

PARTIE II : CHAPITRE 2

ET DANS LE CAS INCOMPRESSIBLE ?

Sommaire

2.1	De la limite incompressible dans la loi exacte générale vers un nouveau modèle	23
2.2	Proposition d'un modèle incompressible gyrotrope	25
2.3	Etude paramétrique des modes linéaires du modèle incompressible gyrotrope	27
2.4	Limite incompressible du modèle CGL	32
2.5	Synthèse : Limite incompressible et pistes d'étude	34

Si l'on prend la limite incompressible de la loi exacte dépendant d'une pression isotrope (??), on retrouve la loi PP98 donnant le taux de cascade ε_{PP98} (??). Mais est-ce aussi le cas si la pression est tensorielle ? De cette question émerge une autre question : qu'est-ce qu'un système incompressible avec pression tensorielle ? Dans ce chapitre, sera présenté le travail effectué pour tenter de répondre à ces questions. Ce travail n'a pas encore été publié.

2.1 De la limite incompressible dans la loi exacte générale vers un nouveau modèle

Si l'on considère la limite incompressible ($\rho = \rho_0$, $\delta\rho = 0$, $\nabla\rho = 0$, $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$, $\nabla \cdot \mathbf{v}_A = 0$) dans l'équation (II.1.21), $\varepsilon_{iso} \rightarrow \varepsilon_{PP98}$ et tous les termes s'annulent sauf :

$$-4(\varepsilon - \varepsilon_{PP98}) = -2 \langle \delta(\bar{\Pi}) : \nabla' \mathbf{v}' - \delta(\bar{\Pi}) : \nabla \mathbf{v} \rangle \quad (\text{II.2.1})$$

car la contribution de la trace de $\nabla \mathbf{v}$ s'annule par incompressibilité : $\bar{\mathbf{I}} : \nabla \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$. On obtient ainsi une correction à la théorie PP98 dépendant de la composante anisotrope de la pression (participant à la déformation incompressible du plasma d'après CASSAK et BARBHUIYA 2022) :

$$-4(\varepsilon - \varepsilon_{PP98}) = -2 \langle \delta(\bar{\mathbf{P}} - p\bar{\mathbf{I}}) : \delta(\nabla \mathbf{v}) \rangle = -2 \langle \delta\bar{\Pi} : \delta(\nabla \mathbf{v}) \rangle \quad (\text{II.2.2})$$

Une question émerge de ce résultat : dans des plasmas faiblement compressibles dépendant d'une pression tensorielle tels que le vent solaire, la correction anisotrope aurait-elle plus de poids que la prise en compte de la compression via les fluctuations de densité ?

Dans le cas particulier gyrotrope, on obtient :

$$-4(\varepsilon - \varepsilon_{PP98}) = -2 \left\langle \delta((p_{\parallel} - p_{\perp})(\mathbf{b}\mathbf{b} - \frac{1}{3}\bar{\mathbf{I}})) : \delta(\nabla \mathbf{v}) \right\rangle \quad (\text{II.2.3})$$

$$= -2 \left\langle \delta((p_{\parallel} - p_{\perp})\mathbf{b}\mathbf{b}) : \delta(\nabla \mathbf{v}) \right\rangle \quad (\text{II.2.4})$$

On observe que la ligne (II.2.3) dépend de $\bar{\mathbf{I}} : \nabla \mathbf{v}$, on annule donc ce terme dans la ligne suivante (II.2.4). Dans le cas incompressible, ces deux expressions sont donc équivalentes. Dans des plasmas quasi-incompressibles par contre, si l'on veut estimer le taux de cascade à l'aide de la loi exacte incompressible corrigée, les deux expressions ne seront plus équivalentes. Dans la première, on s'assure de n'utiliser que la part incompressible de la pression (la contribution de la trace de $\mathbf{b}\mathbf{b}$ étant annulée par $-\frac{1}{3}\bar{\mathbf{I}}$). Dans la seconde, ce n'est pas le cas, le résultat pourra alors être impacté.

On remarque que cette correction dépend de $p_{\parallel} - p_{\perp}$, c'est à dire de $\beta_{\parallel}(1 - a_p)$ qui rappelle les critères d'instabilités. Dans le cas CGL, on a vu que ces critères dépendent fortement de $\beta_{\parallel 0}(1 - a_{p0})$. Si l'on se place dans une situation dans laquelle $\frac{\beta_{\parallel}}{2}(1 - a_p)$ serait quasiment constant, alors le terme correctif de la loi exacte à l'ordre 0 pourra s'écrire :

$$-4(\varepsilon - \varepsilon_{PP98}) = -2 \left\langle \delta(\frac{\beta_{\parallel}}{2}(1 - a_p)\mathbf{v}_A\mathbf{v}_A) : \delta(\nabla \mathbf{v}) \right\rangle \quad (\text{II.2.5})$$

$$\simeq -2\frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0}) \langle \delta(\mathbf{v}_A\mathbf{v}_A) : \delta(\nabla \mathbf{v}) \rangle \quad (\text{II.2.6})$$

En prenant des valeurs réalistes dans le vent solaire telles que $\beta_{\parallel} \sim 1$ et $a_{p0} \sim 0.5$, on obtient $\varepsilon - \varepsilon_{PP98} \sim \frac{1}{8} \langle \delta(\mathbf{v}_A\mathbf{v}_A) : \delta(\nabla \mathbf{v}) \rangle$. Si $\langle \delta(\mathbf{v}_A\mathbf{v}_A) : \delta(\nabla \mathbf{v}) \rangle \sim \varepsilon$ alors la correction de l'anisotropie de pression sera de l'ordre de 12 % du taux de cascade PP98. Près du critère firehose ($\frac{\beta_{\parallel}}{2}(1 - a_p) \sim 1$), le niveau de cette contribution sera autour de 50 %. Dans le vent solaire, HADID, SAHRAOUI et GALTIER 2017, la contribution de la compression est de l'ordre de 10 % du taux PP98, c'est-à-dire plus faible que nos estimations. Le résultat très approximatif obtenu ici va dans le sens d'une correction anisotrope plus significative qu'une correction compressible en particulier près du critère d'instabilité firehose. Si l'on regarde le diagramme publié par OSMAN *et al.* 2013 (voir FIGURE II.1.2), suivant son signe que l'on ne peut pas estimer ici, cette contribution pourrait venir accroître ou réduire la dispersion des valeurs du taux de cascade. Bien évidemment, cette petite estimation est loin d'être suffisante pour conclure sur l'impact des anisotropies de pression sur le taux de cascade. Simulation et étude comparative dans le vent solaire sont nécessaires.

Par curiosité, on s'est demandé quelle était la physique derrière notre terme correctif. Dans le cadre des modèles incompressibles avec pression isotrope, le seul mode existant est le mode d'Alfvén qui constitue la brique fondamentale de la turbulence MHD décrite par PP98. Notre terme correctif serait-il une trace de la correction du mode d'Alfvén pouvant induire l'instabilité firehose dans la cascade non-linéaire incompressible ?

Afin de répondre à cette question, nous avons voulu vérifier dans un modèle incompressible dépendant d'une pression gyrotrope si le mode d'Alfvén-firehose existait. Mais aucune trace d'un modèle incompressible avec pression tensorielle n'a été trouvée dans la littérature. En fait, si l'on approche le problème sous un autre angle, celui des fermetures, on se rend compte que le cadre gyrotrope est habituellement abordé à travers la fermeture CGL. Ajouter une fermeture incompressible signifierait alors, surcontraindre le système : une équation de trop par rapport au nombre de variables. La viabilité du système résul-

tant en tant que modèle réaliste serait remise en cause. Par contre, on peut y appliquer l'incompressibilité telle une limite comme on le discutera dans la section ??.

2.2 Proposition d'un modèle incompressible gyrotrope

Nous avons construit un nouveau modèle en partant de la question : comment décrire un écoulement magnétisé et incompressible dépendant d'une pression gyrotrope ?

Dans un tel écoulement, la contrainte $\rho = \rho_0$ et donc $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ s'impose. Elle induit pour le champ magnétique $\nabla \cdot \mathbf{v}_A = 0$. On a aussi besoin d'une équation sur la vitesse (premier moment) et d'une équation sur le champ magnétique (équation d'induction). L'hypothèse d'une pression gyrotrope va s'exprimer dans l'équation sur la vitesse à travers $\nabla \cdot \overline{\mathbf{P}}$. On a alors 7 équations (la contrainte incompressible, les trois composantes de la vitesse et les trois composantes du champ magnétique) pour 8 variables scalaires (les composantes de la vitesses et du champ magnétique, et les pressions parallèles et perpendiculaires). Il manque donc une équation pour fermer le système. Afin de maintenir la cohérence avec la définition de l'énergie interne telle que $u = \frac{1}{2\rho_0}(2p_\perp + p_\parallel)$, nous avons décidé de fermer le système avec l'équation sur la trace du tenseur de pression avec $\nabla \cdot \mathbf{q} = 0$. Ce système est donc compatible avec la loi exacte (II.2.3).

Par conséquent, le modèle incompressible gyrotrope envisagé est :

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \nabla \cdot \mathbf{v}_A = 0 \quad (\text{II.2.7})$$

$$\partial_t \mathbf{v} + \nabla \cdot (\mathbf{v}\mathbf{v} - \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A + \frac{1}{\rho_0} \overline{\mathbf{P}}_*) = 0 \quad (\text{II.2.8})$$

$$\partial_t p + \nabla \cdot (p\mathbf{v}) + \frac{2}{3} \overline{\mathbf{P}} : \nabla \mathbf{v} = 0 \quad (\text{II.2.9})$$

$$\partial_t \mathbf{v}_A - \nabla \cdot (\mathbf{v}_A \mathbf{v} - \mathbf{v} \mathbf{v}_A) = 0 \quad (\text{II.2.10})$$

avec :

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{P}} &= p\overline{\mathbf{I}} + \overline{\mathbf{\Pi}} = \frac{1}{3}(2p_\perp + p_\parallel)\overline{\mathbf{I}} + (p_\parallel - p_\perp)(\mathbf{b}\mathbf{b} - \frac{1}{3}\overline{\mathbf{I}}) \\ \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}}_* &= \nabla(p_\perp + \frac{1}{2}\rho_0 \mathbf{v}_A^2) + \mathbf{b}\mathbf{b} \cdot \nabla(p_\parallel - p_\perp) + (p_\parallel - p_\perp) \frac{1}{\mathbf{v}_A^2} (\mathbf{v}_A \cdot \nabla \mathbf{v}_A - 2\mathbf{v}_A \mathbf{b}\mathbf{b} : \nabla \mathbf{v}_A) \\ \overline{\mathbf{\Pi}} : \nabla \mathbf{v} &= (p_\parallel - p_\perp) \mathbf{b}\mathbf{b} : \nabla \mathbf{v} \end{aligned}$$

Nous proposons de linéariser ce nouveau modèle afin d'en identifier les modes propres, et a minima vérifier que le mode d'Alfvén-firehose en est une solution. Sa forme linéaire, obtenue en suivant la méthode résumée section ??, est :

$$0 = k_\perp v_{1x} + k_\parallel v_{1z} \quad (\text{II.2.11})$$

$$0 = -\omega v_{1x} + \frac{p_{\perp 1}}{\rho_0} k_\perp + (\frac{p_{\parallel 0} - p_{\perp 0}}{\rho_0 v_{A0}^2} - 1) v_{A0} k_\parallel v_{A1x} + v_{A0} k_\perp v_{A1z} \quad (\text{II.2.12})$$

$$0 = -\omega v_{1y} + (\frac{p_{\parallel 0} - p_{\perp 0}}{\rho_0 v_{A0}^2} - 1) v_{A0} k_\parallel v_{A1y} \quad (\text{II.2.13})$$

$$0 = -\omega v_{1z} + \frac{p_{\parallel 1}}{\rho_0} k_\parallel - \frac{p_{\parallel 0} - p_{\perp 0}}{\rho_0 v_{A0}^2} v_{A0} k_\parallel v_{A1z} \quad (\text{II.2.14})$$

$$0 = -\omega(2p_{\perp 1} + p_{\parallel 1}) + 2(p_{\parallel 0} - p_{\perp 0}) k_\parallel v_{1z} \quad (\text{II.2.15})$$

$$0 = -\omega \mathbf{v}_{A1} - k_\parallel v_{A0} \mathbf{v}_1 \quad (\text{II.2.16})$$

Après quelques manipulations, ce système peut s'écrire sous l'équation de dispersion $\overline{\mathbf{M}} \cdot \mathbf{v}_1 = 0$ avec la matrice

$$\overline{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} k_{\perp} & 0 & k_{\parallel} \\ 0 & \omega^2 - Fv_{A0}^2 k_{\parallel}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2(k_{\perp}^2 - 2k_{\parallel}^2) - (Gk_{\perp}^2 + 2Fk_{\parallel}^2)v_{A0}^2 k_{\parallel}^2 \end{pmatrix} \quad (\text{II.2.17})$$

En notant $F = 1 - \frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0})$ et $G = 3\frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0}) - 2$.

La relation de dispersion est donc :

$$(\omega^2 - Fv_{A0}^2 k_{\parallel}^2)(\omega^2(k_{\perp}^2 - 2k_{\parallel}^2) - (Gk_{\perp}^2 + 2Fk_{\parallel}^2)v_{A0}^2 k_{\parallel}^2) = 0 \quad (\text{II.2.18})$$

On retrouve le mode d'Alfvén incompressible firehose $\omega_A = \pm k_{\parallel} v_{A0} \sqrt{F}$ polarisé suivant $(0, 1, 0)$. Cette solution s'exprime à travers les différentes quantités :

$$\mathbf{v}_1 = (0, 1, 0) \quad (\text{II.2.19})$$

$$\mathbf{v}_{A1} = \pm \frac{1}{\sqrt{F}} \mathbf{v}_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0})}} \mathbf{v}_1 \quad (\text{II.2.20})$$

$$p_{\parallel 1} = (2F - 1)\rho_0 v_{A0} v_{A1z} = 0 \quad (\text{II.2.21})$$

$$p_{\perp 1} = \rho_0 v_{A0} v_{A1z} = 0 \quad (\text{II.2.22})$$

On retrouve bien le comportement du mode d'Alfvén incompressible au niveau des pressions et la relation linéaire entre la vitesse et le champ magnétique. On note que cette relation est altérée par le critère firehose. On remarque que les fluctuations de pressions sont nulles (c'est aussi le cas dans le cadre CGL HUNANA *et al.* 2019). Les seules fluctuations accompagnant ce mode sont celles de v_{1y} et v_{A1y} . Sa contribution à travers le terme correctif du taux de cascade sera donc gouvernée par les fluctuations de la direction du champ magnétique : $\langle \delta(b_y b_y) : \delta(\partial_y v_y) \rangle$. De plus, si ce mode est seul, il n'engendrera pas l'apparition d'anisotropie de pression autres que celle existant initialement dans le système. Ce résultat tend donc en faveur d'un effet de l'anisotropie de pression sur la cascade turbulence à travers l'altération firehose du mode d'Alfvén si une anisotropie de pression existe dans le système (par exemple, induite grâce à des paramètres initiaux dans une simulation). Une surprise nous attend : un nouveau mode émerge de la relation de dispersion (II.2.18).

Ce nouveau mode, polarisé suivant $(1, 0, -\tan \theta)$, est :

$$\omega_N = \pm \sqrt{\frac{Gk_{\perp}^2 + 2Fk_{\parallel}^2}{k_{\perp}^2 - 2k_{\parallel}^2}} v_{A0} k_{\parallel} = \pm \sqrt{\frac{(3\frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0}) - 2)k_{\perp}^2 + 2(1 - \frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0}))k_{\parallel}^2}{k_{\perp}^2 - 2k_{\parallel}^2}} v_{A0} k_{\parallel} \quad (\text{II.2.23})$$

Les différentes quantités sont alors :

$$\mathbf{v}_1 = (1, 0, -\tan \theta) \quad (\text{II.2.24})$$

$$\mathbf{v}_{A1} = \pm \sqrt{\frac{k_\perp^2 - 2k_\parallel^2}{Gk_\perp^2 + 2Fk_\parallel^2}} \mathbf{v}_1 \quad (\text{II.2.25})$$

$$p_{\parallel 1} = \frac{(G + F - 1)k_\perp^2 + 2k_\parallel^2}{k_\perp^2 - 2k_\parallel^2} \rho_0 v_{A0} v_{A1z} = \frac{(\beta_{\parallel 0}(1 - a_{p0}) - 2)k_\perp^2 + 2k_\parallel^2}{k_\perp^2 - 2k_\parallel^2} \rho_0 v_{A0} v_{A1z} \quad (\text{II.2.26})$$

$$\begin{aligned} p_{\perp 1} &= \frac{\rho_0}{k_\perp^2} \frac{4Fk_\parallel^2 k_\perp^2 + (G - F + 2)k_\perp^2 k_\parallel^2 - k_\perp^2 k_\perp^2}{k_\perp^2 - 2k_\parallel^2} v_{A0} v_{A1z} \\ &= \frac{(2\beta_{\parallel 0}(1 - a_{p0}) - 1)(k_\perp^2 - k_\parallel^2)k_\parallel^2 + 3k_\parallel^2 k_\perp^2 - k_\perp^2 k_\perp^2}{k_\perp^2 (k_\perp^2 - 2k_\parallel^2)} \rho_0 v_{A0} v_{A1z} \end{aligned} \quad (\text{II.2.27})$$

On retrouve des résultats similaires au mode pseudo-alfvénique donnant une pression non nulle proportionnelle à v_{A1z} mais avec des facteurs portant une dépendance angulaire complexes mêlées à l'anisotropie de pression moyenne. Considérer une gyrotropie de pression lève donc la dégénérescence observée dans le cas incompressible avec pression isotrope (voir Chapitre ??) similairement à la levée de dégénérescence menant aux modes magnéto-sonores dans le compressible. Ce nouveau mode s'accompagnant de fluctuation des pressions, qui ne sont pas identiques, il pourra engendrer des fluctuations du taux d'anisotropie de pression. Son apport au taux de cascade turbulent pourrait alors s'exprimer à travers notre terme correctif qui dépendrait des fluctuations de pression. Il pourrait aussi interagir non linéairement avec le mode d'Alfvén-firehose.

Ce modèle proposé admet donc deux modes linéaires. Ils forment donc deux canaux potentiels de développement de la cascade turbulente à l'image des modes d'Alfvén et pseudo-alfvénique dans la turbulence MHD incompressible. Par curiosité, une étude comparative et paramétrique des modes d'Alfvén-firehose et du nouveau mode a été menée. Elle est résumée dans la section 6.4.

2.3 Etude paramétrique des modes linéaires du modèle incompressible gyrotrope

La linéarisation du système d'équation incompressible gyrotrope proposé a abouti sur deux modes que l'on peut exprimer en fonction de θ :

- le mode d'Alfvén-firehose : $\omega = \omega_A$ avec $\frac{\omega_A^2}{v_{A0}^2 k_\parallel^2} = F$ et $F = 1 - \frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0})$,
- un nouveau mode : $\omega = \omega_N$ avec $\frac{\omega_N^2}{v_{A0}^2 k_\parallel^2} = \frac{G \sin^2 \theta - 2F \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta - 2 \cos^2 \theta}$ et $G = 3 \frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0}) - 2$

Le mode d'Alfvén-firehose qui s'écrit $\omega_A = \pm \sqrt{F} v_{A0} k_\parallel$ est linéaire en $v_{A0} k_\parallel$ avec une pente dépendant de a_{p0} et $\beta_{\parallel 0}$. Le nouveau mode est aussi linéaire en $v_{A0} k_\parallel$ mais sa pente va aussi dépendre de θ . Ils sont représentés sur la FIGURE II.2.1 normalisé par ω_{ci} la pulsation cyclotron des ions, et en fonction de $k_\parallel d_i = k_\parallel v_{A0} / \omega_{ci}$ avec d_i la longueur inertielle ionique. Le mode d'Alfvén-firehose est représenté en bleu et le nouveau mode dans des couleurs chaudes (orange pour $\theta = 25^\circ$ et rouge pour $\theta = 70^\circ$). On remarque que le nouveau mode peut être plus lent ou plus rapide que le mode d'Alfvén-firehose

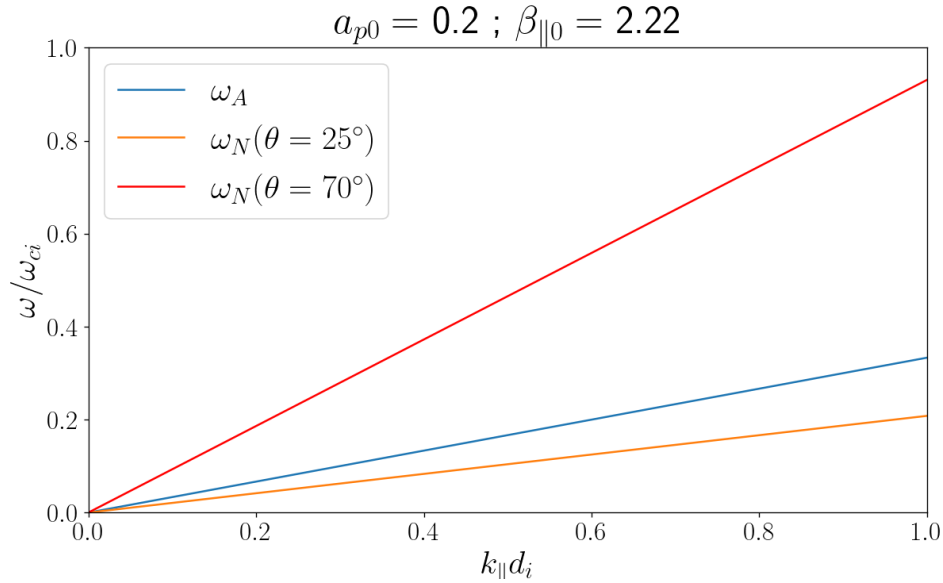


FIGURE II.2.1 – Mode d’Alfvén-firehose (ω_A , bleu) et nouveau mode (ω_N , orange pour $\theta = 25^\circ$ et rouge pour $\theta = 70^\circ$) normalisés par ω_{ci} la pulsation cyclotron des ions et représentés en fonction de $k_{||}d_i$, avec $d_i = v_{A0}/\omega_{ci}$, la longueur inertielle ionique.

en fonction de θ . Ce n’est pas montrer ici mais il peut aussi devenir instable quand le mode d’Alfvén-firehose est stable. Ils sont donc très différents. Ces observations, nous ont amené à faire une étude paramétrique en fonction de θ de la vitesse de phase et du taux d’accroissement/ammortissement des instabilités.

Au cours de cette étude, on a observé cinq comportements différents pour le nouveau mode suivant la valeur du couple $\{\beta_{||0}; a_{p0}\}$. Ces comportements sont résumés sur la figure II.2.2 à travers cinq couples représentatifs. Sur l’ensemble de graphiques de FIGURE II.2.2 sont tracés en fonction de θ , pour cinq couples représentatifs et chaque mode, la partie réelle de ω normalisé par le mode d’Alfvén, $\Re[\omega/(k_{||}v_{A0})]$ (colonne a) correspondant à sa vitesse de phase, ainsi que sa partie imaginaire ($\Im[\omega/(k_{||}v_{A0})]$, colonne b), qui correspond au taux d’accroissement. ω étant ou réel ou purement imaginaire, ces graphiques sont complémentaires : si le mode est instable, il apparaîtra sur la colonne b, et s’il est stable sur la colonne a (à l’exception du graphique (3a) où les modes coïncident). Le caractère instable firehose du mode d’Alfvén (bleu) est ainsi retrouvé lorsque $F < 0$ sur le graphique (1b).

Le nouveau mode semble tendre asymptotiquement vers le mode d’Alfvén pour $\theta \sim 0^\circ$ et vers l’asymptote $\omega_P = \pm k_{||}v_{A0}\sqrt{G}$ représentée par une ligne discontinue verte, pour $\theta \sim 90^\circ$. Une asymptote angulaire est aussi visible en un angle que l’on note θ_2 , on verra par la suite que cet angle est solution de $\tan^2 \theta = 2$. La stabilité du nouveau mode à une dépendance forte en θ : pour tout couple, il existe une gamme angulaire telle que le mode soit stable et, à l’exception du couple (3), une gamme telle que le mode est instable.

On propose maintenant de démontrer les comportements identifiés pour le nouveau mode en fonction de a_{p0} et $\beta_{||0}$. Au fil de cette analyse, on va construire le diagramme de la FIGURE II.2.3. Les emplacements des différents couples présentés sur la FIGURE II.2.2 sont indiqués par des croix rouges.

Etude asymptotique angulaire : Si $\theta \rightarrow 0^\circ$ ($k_{||} \gg k_{\perp}$), alors $\frac{\omega_N^2}{v_{A0}^2 k^2} \rightarrow F \cos^2 \theta$. La convergence vers le mode d’Alfvén-firehose du nouveau mode observée en $\theta \rightarrow 0^\circ$

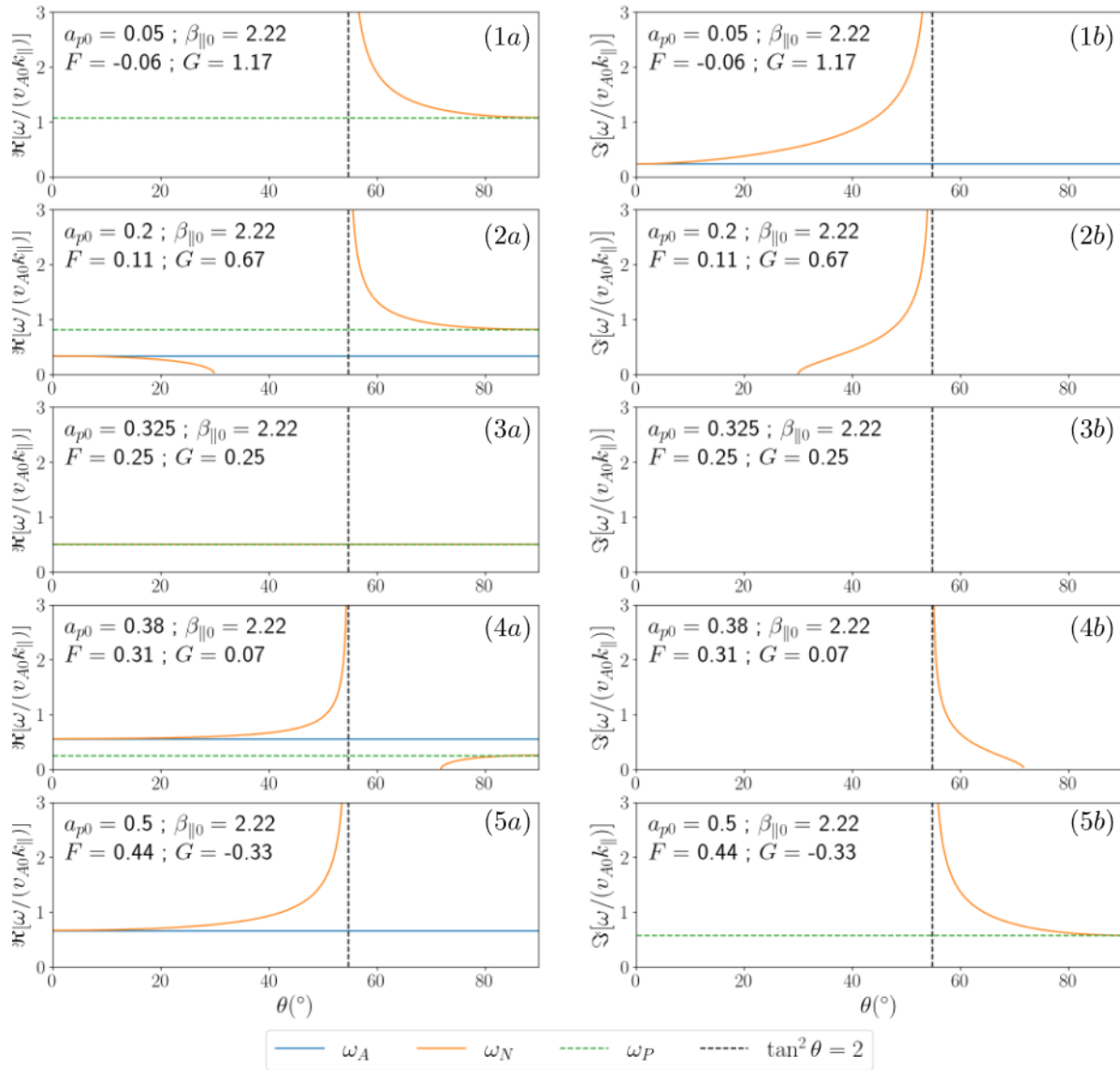


FIGURE II.2.2 – Vitesse de phase $\Re[\omega/(kv_{A0})]$ (colonne a) et taux de croissance des instabilités $\Im[\omega/(kv_{A0})]$ (colonne b) normalisées par v_{A0} en fonction de l'angle θ pour le nouveau mode incompressible (ω_N , orange) et pour le mode d'Alfvén (ω_A , bleu). Des asymptotes sont tracées en lignes discontinues. En vert : mode asymptotique ω_P . En noir : angle asymptotique θ_2 . Première ligne : couple (1) tel que $a_{p0} = 0.05$, $\beta_{||0} = 20/9 \Rightarrow$ instabilité firehose ($F < 0$). Deuxième ligne : couple (2) tel que $a_{p0} = 0.2$, $\beta_{||0} = 20/9$. Troisième ligne : couple (3) tel que $a_{p0} = 0.325$, $\beta_{||0} = 20/9 \Rightarrow$ seul cas stable pour tout θ ($F = G$). Quatrième ligne : couple (4) tel que $a_{p0} = 0.38$, $\beta_{||0} = 20/9$. Cinquième ligne : couple (5) tel que $a_{p0} = 0.5$, $\beta_{||0} = 20/9 \Rightarrow$ instabilité pseudo-firehose perpendiculaire ($G < 0$). Sauf graphique (3a) où tous les modes coïncident, lorsqu'un mode disparaît d'un graphique de la colonne a, il apparaît sur le graphique de la colonne b.

sur la FIGURE II.2.2 est ainsi vérifiée. Comme cette limite peut être stable ou instable en fonction du signe de F , on a représenté sur la FIGURE II.2.3, la frontière $F = 0$ en bleue et bleutée la zone où $F < 0$. On retrouve dans ce comportement stable/instable

l'instabilité firehose «parallèle» qui est présente par exemple pour le mode lent dans le cadre compressible. Le couple (1), tel que $F < 0$, est un exemple instable : le nouveau mode et le mode d'Alfvén apparaissent dans la colonne du taux de croissance (graphique (1b)).

Si $\theta \rightarrow 90^\circ$ ($k_\perp \ll k_\parallel$), alors $\frac{\omega_N^2}{v_{A0}^2 k^2} \rightarrow G \cos^2 \theta$. On retrouve l'asymptote ω_P et tracé en vert sur FIGURE II.2.2. Il est instable si $G < 0$. La comparaison de G et F , qui ont la même structure à un facteur $3/2$ et un signe près, nous inspirant, on appellera cette instabilité «instabilité pseudo-firehose perpendiculaire»¹. Elle apparaît pour le couple (5) (graphique (5b)). Sur la FIGURE II.2.3, on indique la frontière $G = 0$ en vert et la zone où $G < 0$ par une aire verte.

Ainsi grâce à F et G , on peut déduire qu'une instabilité pourra se développer dans le système pour tout couple $\{\beta_{\parallel 0}; a_{p0}\}$ tel que $\frac{2}{3} > \frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0})$ (instabilité pseudo-firehose perpendiculaire, couple (5) et aire verte sur FIGURE II.2.3) ou $\frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0}) > 1$ (instabilité firehose parallèle, couple (1) et aire bleue sur FIGURE II.2.3). Dans la zone intermédiaire (blanche sur la FIGURE II.2.3), $G > 0$ et $F > 0$.

Etude angulaire complète du nouveau mode : Pour les angles θ plus obliques, le comportement de ω_N est plus difficile à établir, le signe de $\sin^2 \theta - 2 \cos^2 \theta$ venant compenser le signe de $G \sin^2 \theta - 2F \cos^2 \theta$. Une instabilité, entre l'instabilité firehose parallèle et l'instabilité pseudo-firehose perpendiculaire, pourra émerger. On la nommera «instabilité pseudo-firehose oblique». Elle apparaît pour les couples (2) (graphique (2b)) et (4) (graphique (4b)). La condition d'instabilité est obtenue pour F et G tels que :

$$(\tan^2 \theta - 2)(G \tan^2 \theta - 2F) < 0 \quad (\text{II.2.28})$$

$g(\theta) = (\tan^2 \theta - 2)(G \tan^2 \theta - 2F)$ est une parabole présentant deux racines :

- $\tan^2 \theta = 2$ en laquelle $\omega_N^2 \rightarrow \infty$ (asymptote verticale indiquée en pointillés sur FIGURE II.2.2), on la note θ_2 ,
- $\tan^2 \theta = 2\frac{F}{G}$ en laquelle $\omega_N^2 \rightarrow 0$, on la note $\theta_{F/G}$.

La stabilité du nouveau mode dépendra donc de la position de θ par rapport à θ_2 et $\theta_{F/G}$.

Pour que le nouveau mode soit stable pour tout θ , il faut $g(\theta) > 0$ pour tout θ . Cela n'est possible que si $F = G$, alors $g(\theta) = (\tan^2 \theta - 2)^2 > 0$. Dans ce cas, $\omega_N = \omega_A = \omega_P$. Sur la FIGURE II.2.3, le critère $F = G$ est indiqué par la courbe noire et il est illustré par le couple (3) (graphiques (3a) et (3b)). **Par conséquent, en fonction de a_{p0} et $\beta_{\parallel 0}$, le nouveau mode sera stable pour tout θ si et seulement si $\frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0}) = \frac{3}{4}$.**

$F = G$, $G = 0$ et $F = 0$ découpent le diagramme de la FIGURE II.2.3 en quatre zones que l'on va étudier séparément.

Si $G < 0$ (zone verte), alors $F > 0$. Dans ce cas, $g(\theta) < 0$ si $\theta > \theta_2$. Cette situation est illustrée par le couple (5) (graphiques (5a) et (5b)), instable pour tout angle supérieur à θ_2 . On peut raccrocher à cette condition le cas $G = 0$ puisque alors $F = 1/3$, et la parabole sera négative si $\tan^2 \theta > 2$. Dans ces cas, on retrouve l'instabilité pseudo-firehose perpendiculaire découverte asymptotiquement si $\theta \rightarrow 90^\circ$. On peut maintenant compléter ses conditions d'existence qui deviennent : **l'instabilité pseudo-firehose perpendiculaire peut se développer si $G < 0$ pour tout angle $\theta > \theta_2$.**

Si $G > 0$ et $F/G > 1$ (zone blanche délimitée par les courbes verte et noire), $g(\theta) < 0$

1. Cette dénomination n'est proposée qu'à cause de la similarité des critères d'instabilités. Le comportement des quantités n'a pas été vérifié.

si $2\frac{F}{G} > \tan^2 \theta > 2$. Cette situation est illustrée par le couple (4) (graphiques (4a) et (4b)). L'instabilité s'y développant est l'instabilité pseudo-firehose oblique.

Si $G > 0$ et $F/G < 1$ (zone blanche délimitée par les courbes bleue et noire et zone bleue), $g(\theta) < 0$ si $2 > \tan^2 \theta > 2\frac{F}{G}$. Si $F < 0$, l'instabilité firehose parallèle se développe pour tout angle $\theta < \theta_2$. Ce cas est illustré par le couple (1) (graphiques (1a) et (1b)). Si $F > 0$, la situation est illustrée par le couple (2) (graphiques (2a) et (2b)). L'instabilité visible est encore une fois l'instabilité pseudo-firehose oblique. Sa condition d'apparition est donc : l'instabilité pseudo-firehose oblique peut se développer si $G > 0$ et $F > 0$ mais $G \neq F$, pour tout angle θ entre θ_2 et $\theta_{F/G}$.

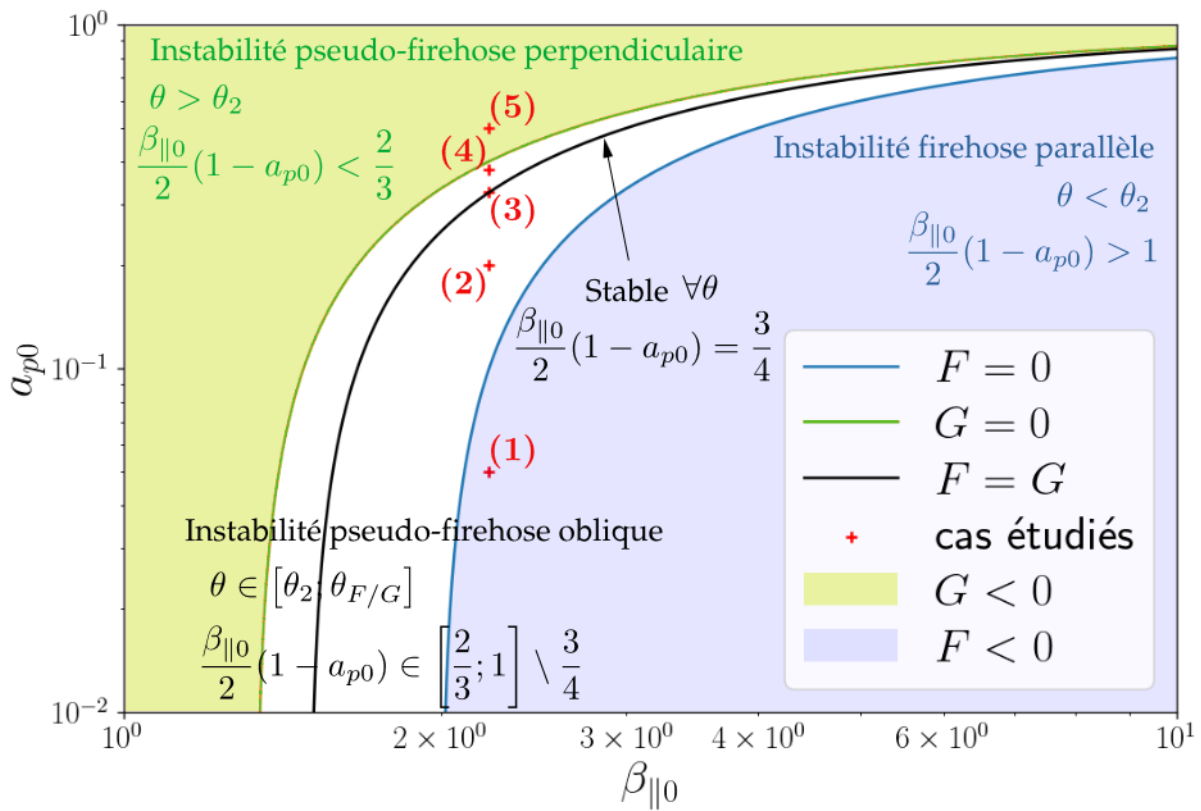


FIGURE II.2.3 – Diagramme $a_{p0} - \beta_{\parallel 0}$. Croix rouges : couples $\{\beta_{\parallel 0}; a_{p0}\}$ sélectionnés pour l'étude paramétrique de FIGURE II.2.2. Frontière d'instabilités firehose $F = 0$ (bleu) et zone instable ($F < 0$, bleue) associée. Frontière d'instabilités pseudo-firehose perpendiculaire $G = 0$ (verte) et zone instable ($G < 0$, verte) associée. Ligne noire : ensemble des couples $\{\beta_{\parallel 0}; a_{p0}\}$ stable pour tout angle θ paramétrisé par $F = G$. Zone blanche : instabilité pseudo-firehose oblique.

La zone de stabilité de ce nouveau mode en fonction des paramètres $\beta_{\parallel 0}$ et a_{p0} est donc quasi-inexistante. Un résumé de l'ensemble des éléments de cette analyse est donnée sur la FIGURE II.2.3 Sachant que la problématique principale de ce travail se place dans le cadre compressible, l'exploitation de ce modèle incompressible n'a pas été engagé.

2.4 Limite incompressible du modèle CGL

Dans le cas MHD compressible avec pression isotrope, le mode pseudo-alfvénique apparaît comme une limite incompressible des modes compressibles magnétosoniques. Similairement, on s'est demandé si l'on pouvait retrouver une trace du nouveau mode dans la limite incompressible du modèle CGL linéaire.

Dans le cas linéaire, le modèle CGL donne l'équation de dispersion (II.3.48) que l'on va simplement noter $\overline{\mathbf{M}}\mathbf{v}_1 = 0$. Avec la contrainte incompressible $\nabla \cdot \mathbf{v}_1 = 0$, on peut écrire \mathbf{v}_1 sous la forme d'un potentiel vecteur $\mathbf{\Omega} : \mathbf{v}_1 = \nabla \times \mathbf{\Omega} = \overline{\mathbf{N}}\mathbf{\Omega}$ avec $\overline{\mathbf{N}} = i\mathbf{k} \times \overline{\mathbf{I}} = i \begin{pmatrix} 0 & -k_{\parallel} & 0 \\ k_{\parallel} & 0 & -k_{\perp} \\ 0 & k_{\perp} & 0 \end{pmatrix}$. Le modèle CGL linéaire surcontraint via l'incompressibilité s'exprime alors à travers l'équation de dispersion : $\overline{\mathbf{M}}\overline{\mathbf{N}}\mathbf{\Omega} = 0$ avec

$$\overline{\mathbf{M}}\overline{\mathbf{N}} = \begin{pmatrix} 0 & -k_{\parallel}(\frac{\omega^2 - \omega_A^2}{v_{A0}^2 k_{\parallel}^2} - (\frac{\beta_{\parallel 0}}{2} a_{p0} + 1) \frac{k_{\perp}^2}{k_{\parallel}^2}) & 0 \\ k_{\parallel} \frac{\omega^2 - \omega_A^2}{v_{A0}^2 k_{\parallel}^2} & 0 & -k_{\perp} \frac{\omega^2 - \omega_A^2}{v_{A0}^2 k_{\parallel}^2} \\ 0 & k_{\perp}(\frac{\omega^2}{v_{A0}^2 k_{\parallel}^2} - \frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(3 - a_{p0})) & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{II.2.29})$$

où $\omega_A^2 = -v_{A0}^2 k_{\parallel}^2 (\frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0}) - 1)$ correspond au mode d'Alfvén-firehose incompressible. On remarque que ce mode est solution si $\Omega_y = 0$, c'est-à-dire pour une polarisation de la vitesse orientée suivant $(0, 1, 0)$.

On a vu dans la section 2.4 que le nouveau mode est polarisé suivant $(\cos \theta, 0, -\sin \theta)$. Si l'on impose cette polarisation dans $\mathbf{\Omega}$ on obtient $\Omega_y \neq 0$. Dans ce cas l'équation de dispersion peut alors s'écrire sous la forme du système :

$$k_{\parallel}(\omega^2 - \omega_A^2 - v_{A0}^2(\frac{\beta_{\parallel 0}}{2} a_{p0} + 1)k_{\perp}^2) = 0 \quad (\text{II.2.30})$$

$$k_{\perp}(\omega^2 - v_{A0}^2 \frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(3 - a_{p0})k_{\parallel}^2) = 0 \quad (\text{II.2.31})$$

$$k_{\parallel}\Omega_x - k_{\perp}\Omega_z = 0 \quad (\text{II.2.32})$$

On va étudier ce système en fonction de l'angle θ de propagation :

- $\theta = 0^\circ \Rightarrow k_{\perp} = 0$ et on suppose $k_{\parallel} \neq 0$, alors $\omega^2 = \omega_A^2$ et $\Omega_x = 0$. On retrouve le mode firehose parallèle associé à un champ de vitesse sera polarisé suivant $(1, 0, 0)$.
- $\theta = 90^\circ \Rightarrow k_{\parallel} = 0$ et on suppose $k_{\perp} \neq 0$, alors $\omega^2 = 0$ et $\Omega_z = 0$. On obtient un mode qui ne se propage pas et un champ de vitesse polarisé suivant $(0, 0, 1)$.
- Si $k_{\parallel} \neq 0$ et $k_{\perp} \neq 0$, alors $\omega^2 = v_{A0}^2 \frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(3 - a_{p0})k_{\parallel}^2$ et θ doit vérifier $\tan^2 \theta = \frac{2(\beta_{\parallel 0}(2 - a_{p0}) - 1)}{\beta_{\parallel 0}a_{p0} + 2}$.

Après quelques manipulations de $\omega^2 = v_{A0}^2 \frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(3 - a_{p0})k_{\parallel}^2$ et de la condition $\tan^2 \theta = \frac{2(\beta_{\parallel 0}(2 - a_{p0}) - 1)}{\beta_{\parallel 0}a_{p0} + 2}$, il est possible de faire ressortir la relation de dispersion du nouveau mode.

On remarque qu'appliquer la contrainte incompressible sur le modèle CGL revient à chercher la limite telle que p_{\parallel} ou p_{\perp} respecte leur équation individuelle dans le modèle incompressible gyrotrope. En fait, la limite incompressible du modèle CGL correspond à l'intersection des solutions des modèles incompressible gyrotrope défini avec la trace de la pression, incompressible gyrotrope défini avec l'équation sur p_{\parallel} et incompressible gyrotrope défini avec l'équation sur p_{\perp} . Dans chacun de ces modèles, le mode d'Alfvén-

firehose sera accompagné d'un nouveau mode dont l'expression dépend du choix de la fermeture sur la pression. Mais tous seront polarisé tel que $(\cos \theta, 0, -\sin \theta)$ et peuvent être retrouvés dans le mode surcontraint du modèle CGL.

2.5 Synthèse : Limite incompressible et pistes d'étude

Limite incompressible de la loi exacte avec pression tensorielle et cas gyrotrope :

$$-4(\varepsilon - \varepsilon_{PP98}) = -2 \langle \delta(\bar{\mathbf{P}} - p\bar{\mathbf{I}}) : \delta(\nabla \mathbf{v}) \rangle = -2 \langle \delta\bar{\mathbf{\Pi}} : \delta(\nabla \mathbf{v}) \rangle \quad (\text{II.2.33})$$

$$-4(\varepsilon - \varepsilon_{PP98}) = -2 \left\langle \delta((p_{\parallel} - p_{\perp})(\mathbf{b}\mathbf{b} - \frac{1}{3}\bar{\mathbf{I}})) : \delta(\nabla \mathbf{v}) \right\rangle \quad (\text{II.2.34})$$

\Rightarrow Questionne l'existence d'un modèle incompressible gyrotrope.

Modèle incompressible avec pression gyrotrope proposé compatible avec la loi exacte :

$$\partial_t \mathbf{v} + \nabla \cdot (\mathbf{v}\mathbf{v} - \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A + \frac{1}{\rho_0} \bar{\mathbf{P}}_*) = 0 \quad (\text{II.2.35})$$

$$\partial_t p + \nabla \cdot (p\mathbf{v}) + \frac{2}{3} \bar{\mathbf{\Pi}} : \nabla \mathbf{v} = 0 \quad (\text{II.2.36})$$

$$\partial_t \mathbf{v}_A - \nabla \cdot (\mathbf{v}_A \mathbf{v} - \mathbf{v} \mathbf{v}_A) = 0 \quad (\text{II.2.37})$$

$$\text{avec } \bar{\mathbf{P}}_* = (p + p_m) \bar{\mathbf{I}} + \bar{\mathbf{\Pi}}, \quad p_m = \frac{\rho_0 |\mathbf{v}_A|^2}{2}, \quad p = \frac{1}{3}(2p_{\perp} + p_{\parallel}),$$

$$\bar{\mathbf{\Pi}} = (p_{\parallel} - p_{\perp})(\mathbf{b}\mathbf{b} - \frac{1}{3}\bar{\mathbf{I}}), \quad \mathbf{b} = \frac{\mathbf{v}_A}{|\mathbf{v}_A|}, \quad \text{et } \nabla \cdot \mathbf{v} = 0.$$

Etude linéaire du modèle proposé :

— Mode d'Alfvén incompressible polarisé suivant $(0, 1, 0)$:

$$\frac{\omega^2}{v_{A0}^2 k_{\parallel}^2} + \frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0}) - 1 = 0 \quad (\text{II.2.38})$$

$$\text{Instabilité firehose : } \frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0}) - 1 > 0 \quad (\text{II.2.39})$$

— Nouveau mode polarisé suivant $(1, 0, -\tan \theta)$: (voir FIGURE II.2.3)

$$\frac{\omega^2}{v_{A0}^2 k_{\parallel}^2} - \frac{2(\frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0}) - 1) \cos^2 \theta + (3\frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0}) - 2) \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta - 2 \cos^2 \theta} = 0 \quad (\text{II.2.40})$$

$$\text{Critère d'instabilité pseudo-firehose : } \frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0}) \neq \frac{3}{4} \quad (\text{II.2.41})$$

Limite incompressible du modèle CGL :

- Survie du mode d'Alfvén-firehose \Rightarrow Solution non-linéaire, pendant gyrotrope du mode d'Alfvén non linéaire ?
- Apparition d'un mode surcontraint correspondant au nouveau mode incompressible.