

PARTIE III : CHAPITRE 10

L SIMULATION TURBULENTE ET CALCUL DE LOIS EXACTES

Sommaire

10.1 Simuler un plasma turbulent	119
10.2 Code de post-traitement pour le calcul numérique de lois exactes	121
10.3 Mode de représentation du résultat	124
10.4 Synthèse des méthodes et choix numériques	128

Dans cette partie, nous utiliserons des simulations turbulentes issues de deux modèles décrivant des anisotropies de pression, le premier dépend d'une fermeture CGL tandis que le second dépend d'une fermeture de type LF. Ces modèles sont simulés avec un seul et unique code que l'on va présenter dans ce chapitre. Les spécificités des modèles seront détaillées dans les chapitres 14 et 13. Dans ce premier chapitre, seront abordées les méthodes numériques utilisées dans l'implémentation de ces modèles (section 10.1) ainsi que la description des méthodes de post-traitement associées au calcul des lois exactes (section 10.2) et à leur visualisation (section 10.3). Les valeurs associées à chaque simulation, des paramètres décrits dans la section 10.1 sont résumés dans la TABLE 9.1 et la TABLE 9.2.

10.1 Simuler un plasma turbulent

Le code de simulation utilisé, codé en **Fortran**, est un code tridimensionnel pseudo-spectral et versatile développé en interne à l'Observatoire de la Côte d'Azur pour l'implémentation du modèle fluide proposé par [SNYDER *et al.* 1997] et étendu par [GOSWAMI *et al.* 2005 ; PASSOT et SULEM 2007 ; PASSOT, SULEM et HUNANA 2012 ; SULEM et PASSOT 2015]. Ce modèle prend en compte les termes gyrotope et non-gyrotope des tenseurs de pression des ions et des électrons et capte l'effet Landau ionique et électronique à travers les flux de chaleur des électrons et des ions. Le code permet à l'utilisateur de choisir quelles contributions garder.

Les quantités sont sans dimension, les longueurs sont normalisées par d_i la longueur inertie des ions et les vitesses par la vitesse d'Alfvén. Cela induit une constante $\beta/2$, avec $\beta = 1$, présente dans tous les termes dépendant des pressions. Il faudra prendre en compte cette constante par la suite.

On va supposer une équation générique $\partial_t X = \mathbf{v} \cdot \nabla X$. La simuler via un code pseudo-spectral (algorithme schématisé sur la FIGURE 10.1) signifie que les dérivées spatiales telles que ∇X sont effectuées dans l'espace de Fourier, tandis que les produits tels que $\mathbf{v} \cdot \nabla X$ et l'intégration temporelle de l'équation pour obtenir les quantités au pas de

temps suivant, sont effectués dans l'espace réel. Ainsi, à chaque pas de temps, un aller-retour est effectué entre les espaces réel et de Fourier. Leur discréétisation en un nombre de points finis (la grille numérique), induit un repliement du spectre («aliasing») des termes non-linéaires. Cet effet est limité par une troncation, à chaque pas de temps, du spectre de chaque quantité. L'intégration temporelle est obtenue via un schéma de Runge-Kutta d'ordre 3 (RK3), choisi pour sa stabilité devant des termes dispersifs tels que le terme de Hall [WILLIAMSON 1980]. Les conditions de bords de la grille numérique sont choisies comme périodiques afin de pouvoir utiliser la transformation de Fourier et l'algorithme de transformée de Fourier rapide (FFT).

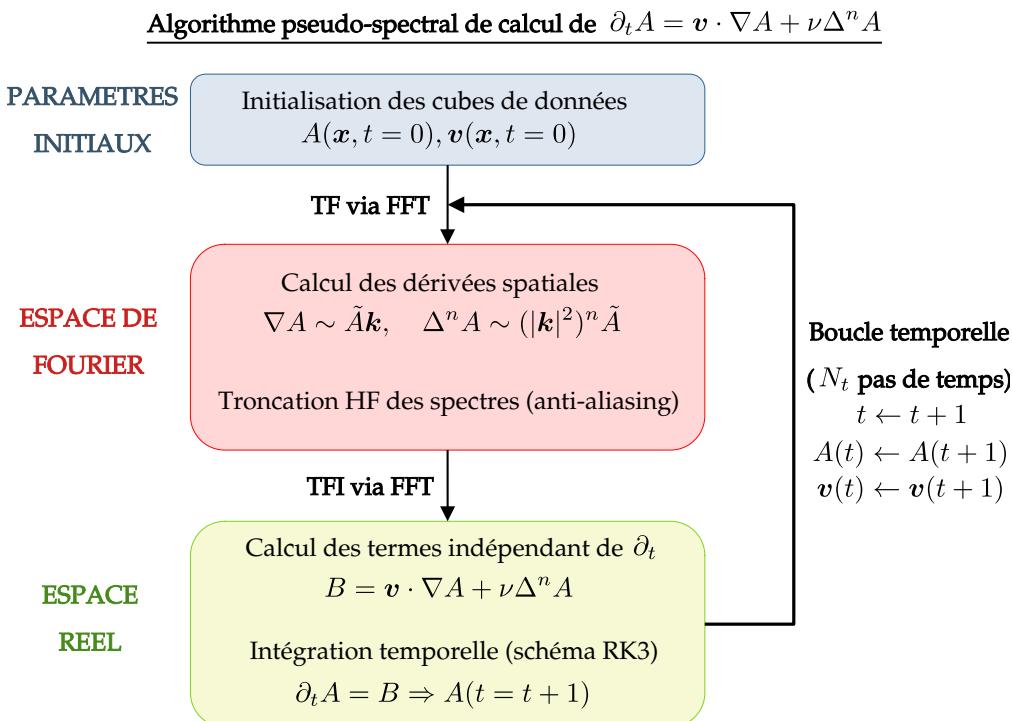


FIGURE 10.1 – Algorithme d'intégration d'une équation d'évolution générique via une méthode pseudo-spectrale. Prise en compte des corrections anti-aliasing et hyperdissipation $\nu\Delta^n A$. TF(I) correspond à Transformée de Fourier (Inverse).

Afin de limiter l'apparition de fort gradients, ces discontinuités faisant planter la simulation, deux possibilités existent : appliquer un filtre passe-bas sur le spectre de la quantité impliquée ou un terme d'hyperviscosité dans son équation. Le choix effectué est celui de l'hyperviscosité, c'est-à-dire imposer une décroissance graduelle et de plus en plus intense du spectre de la quantité (pour plus d'information se référer à [BORUE et ORSZAG 1995 ; FRISCH *et al.* 2008]). Ce terme de dissipation numérique s'écrit pour un champ X , $\nu\Delta^n X$ avec ν , une constante choisie initialement et n un entier fixé à 4. Δ^n est effectué dans l'espace de Fourier où une décroissance du spectre en k^{-8} est donc obtenue. L'existence d'un champ magnétique moyen dans les simulations, induit une anisotropie spatiale de la turbulence. Sa direction est imposée suivant e_z . Afin de refléter cette anisotropie, l'hyperviscosité est adaptée avec un paramètre α : Δ^n et calculée dans l'espace de Fourier tel que $(k_x^2 + k_y^2 + \alpha k_z^2)^n$. Les paramètres ν et α sont résumés dans la TABLE 9.2. Avec l'incrément temporel δt , ils sont accordés empiriquement afin de réduire un peu le temps

de calcul, de maintenir la dissipation aux vecteurs d'onde les plus grands et d'éviter tout emballlement de la simulation et l'apparition d'instabilités numériques induisant une interruption accidentelle de la simulation. En termes de turbulence, l'hyperviscosité sera considérée comme le terme de dissipation évacuant l'énergie aux petites échelles.

La cascade d'énergie est entretenue par un forçage permanent¹. Ce forçage de type antenne de Langevin (oscillateur harmonique forcé aléatoirement [TENBARGE *et al.* 2014]) injecte la somme de deux ondes de vecteurs d'ondes opposées et de fréquences aléatoire mais proches de celle de l'onde d'Alfvén cinétique. Leur amplitude correspond au paramètre A_f multiplié par un facteur aléatoire. Il est appliqué sur le champ de vitesse de telle sorte à maintenir la somme des énergies cinétique et magnétique perpendiculaires moyennes sous un niveau E_{sup} et au-dessus d'un niveau E_{inf} proche de E_{sup} . L'énergie moyenne totale est donc quasi-constante. Il apparaît dans l'espace de Fourier tel un peigne de distribution de Dirac non nulles aux vecteurs d'ondes les plus petits, tels que $\mathbf{k} = \{(0, \pm 1, \pm 1); (\pm 1, \pm 1, \pm 1)\}$ dans la grille numérique associée à l'espace de Fourier. L'angle d'injection de l'énergie, θ_i , sert à définir la forme de la grille spatiale, un parallélépipède allongé dans la direction \mathbf{e}_z , la taille physique de cette grille est fixée telle que $L_\perp/L_z = \tan \theta_i$ avec $L_\perp = \frac{2\pi}{k_{0\perp}d_i}$.

La taille de l'espace des échelles accessibles via ces simulations dépend de la taille de la grille spatiale. L'échelle la plus petite dans une direction est la distance minimale entre deux points de la grille dans cette direction et l'échelle la plus grande la moitié de la taille de la grille. Pour une étude de turbulence, on a besoin de plusieurs ordres de grandeurs entre les échelles minimales et maximales. Afin d'obtenir un nombre de points suffisant, on part d'une grille de taille réelle fixée, mais contenant peu de points, par exemple 128^3 , puis, après avoir atteint un régime turbulent satisfaisant tel que les spectres se soient stabilisés, on augmente le nombre de points, et ainsi de suite jusqu'à avoir la taille voulue pour l'espace des échelles et un spectre stabilisé. Le nombre de points idéal serait de 1024^3 ou plus, mais plus il y a de points, plus le temps de calcul augmente (typiquement, il faut environ un mois de calcul avec 64 processeurs pour obtenir une simulation de taille $512^2 \times 1024$ dans laquelle la turbulence se serait a priori entièrement développée) et plus, le calcul monopolisera de la mémoire. Similairement, le calcul du taux de cascade sera aussi plus contraignant. Un compromis doit donc être trouvé. La taille de cube minimale considérée dans le cadre des études de turbulence sera 512^3 et une partie des simulations auront une taille de 512^2 dans le plan $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y\}$ et 1024 dans la direction \mathbf{e}_z .

Les simulations utilisées et détaillées la TABLE 9.1 et la TABLE ?? ont, pour la plupart, fait l'objet de l'article FERRAND, SAHRAOUI, LAVEDER *et al.* 2021. Parmi, elles, une est de taille 1024^3 . Elle ne sera pas traitée ici, car sa taille est trop importante pour le code de post-traitement implémenté et les moyens de calcul (mésocentres) à disposition.

10.2 Code de post-traitement pour le calcul numérique de lois exactes

On a vu qu'une loi exacte est une formule statistique donnant un résultat en fonction de l'échelle ℓ . Elle dépend de quantités évaluées localement en deux points puis combinées en

¹. [HELLINGER, VERDINI *et al.* 2018; GÓMEZ *et al.* 2005; MININNI *et al.* 2011] utilisent une autre méthode pour obtenir le développement d'une cascade turbulente : leur champ de vitesse et champ magnétique sont initialisés par une superposition de modes de phases aléatoires, puis leurs simulations évoluent librement.

une expression qui est ensuite moyennée. Une partie des termes doivent ensuite être dérivés dans l'espace des échelles si aucune hypothèse d'intégration n'est effectuée. Cette méthode pourrait être implémentée directement. On considérerait les quantités à disposition, a priori des cubes évalués en \mathbf{x}), on les translaterait de telle sorte à obtenir des cubes évalués en $\mathbf{x} - \boldsymbol{\ell}$ puis on les combinerait suivant l'expression voulue avant de les moyenner. On obtiendrait ainsi notre résultat évalué en un point de l'espace des échelles et il faudrait recommencer encore et encore afin d'obtenir l'ensemble de l'espace des échelles. Enfin, on dériverait ou intégrerait le résultat. Cet algorithme est schématisé sur la FIGURE 10.2.

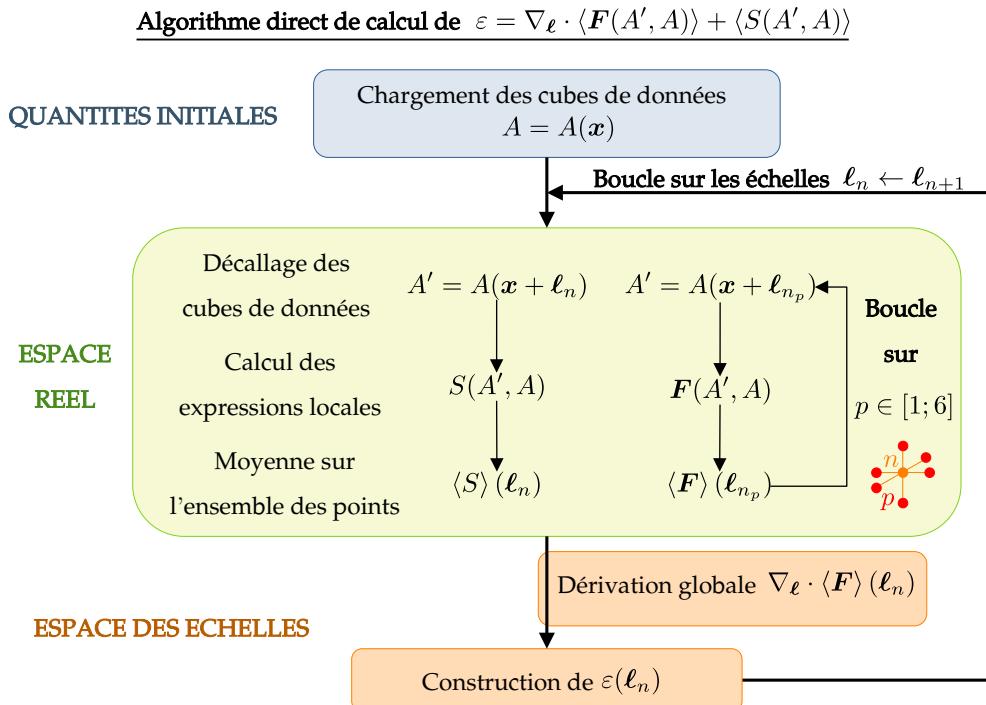


FIGURE 10.2 – Algorithme de calcul du taux de cascade ε via la méthode directe. Les quantités impliquées sont des quantités génériques.

Cette méthode est coûteuse en temps de calcul et demande des compromis. Pour réduire le temps de calcul, on peut choisir intelligemment un certain nombre de vecteurs d'échelle. Tout d'abord, on peut jouer sur la parité de la loi exacte et ne calculer que les vecteurs tels que $\ell_z \leq 0$. [FERRAND, SAHRAOUI, LAVEDER *et al.* 2021 ; FERRAND, SAHRAOUI, GALTIER *et al.* 2022], par exemple, utilise les hypothèses d'isotropie ou d'axisymétrie de l'espace d'échelles. Dans le cas isotrope, l'espace des échelles est alors vu comme une sphère et 73 vecteurs directeurs partant du centre de cette sphère. Dans le cas axisymétrique, le découpage est similaire, mais effectué dans des disques pour chaque ℓ_z . La divergence dans l'espace des échelles est ensuite effectuée sphériquement (resp. cylindriquement) le long de $\ell = |\boldsymbol{\ell}|$ (resp. $\ell_{\perp} = \sqrt{\ell_x^2 + \ell_y^2}$) en supposant les dérivées angulaires nulles. Je n'ai pas voulu faire de même, n'étant pas convaincu de l'indépendance angulaire de la dérivée et trouvant la statistique finale faible. Une autre possibilité est de choisir les vecteurs en fonction du mode de représentation final. Si, au final, le mode de représentation est logarithmique, on peut ne choisir qu'un nombre limité de vecteurs à grande échelle tels qu'ils soient régulièrement espacés en représentation logarithmique [MANZINI *et al.* 2022]. Un problème de cette méthode est l'irrégularité de la grille résul-

tante. La divergence dans l'espace des échelles doit se faire vecteur par vecteur à partir des six échelles les plus proches (au minimum). Ce choix-là ne semblait toujours pas satisfaisant, car il implique de devoir potentiellement refaire le calcul en fonction du mode de représentation final et un biais en cas de moyenne dans l'espace des échelles. Ces compromis doivent en plus être accompagnés d'une optimisation, voire d'une parallélisation du calcul numérique.

Après maintes versions et tentatives d'optimisation de mon code de post-traitement, codé en Python, tel qu'essayant de respecter explicitement la forme de la loi exacte, j'ai décidé de changer radicalement de point de vue. Mathématiquement, les opérations de corrélation et de convolution, $*$, sont liés. En effet, si l'on considère deux quantités s et r , et qu'on les corrèle :

$$\begin{aligned} C_{s,r}(\boldsymbol{\ell}) &= \frac{1}{V} \iiint_V s(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\ell}) r(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} = \frac{1}{V} \iiint_V s(\boldsymbol{x}) r(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\ell}) d\boldsymbol{x} \\ &= \frac{1}{V} \iiint_V s(\boldsymbol{x}) r(-(\boldsymbol{\ell} - \boldsymbol{x})) d\boldsymbol{x} = \left[\frac{1}{V} s * \hat{P}r \right](\boldsymbol{\ell}), \end{aligned} \quad (10.1)$$

avec V le volume d'intégration et \hat{P} l'opérateur de parité. Ainsi appliquer l'opération de corrélation entre s et r revient à convoluer s évaluée en \boldsymbol{x} avec r évaluée en $-\boldsymbol{x}$. Une autre propriété mathématique intéressante est que l'opération de convolution correspond à un simple produit dans l'espace de Fourier et que $\hat{P}r$ correspond à conjuguer \tilde{r} , la transformée de Fourier de r , la conjugaison sera noté \tilde{r}^* . Ainsi en notant $\tilde{C}_{s,r}$ la transformée de Fourier de $C_{s,r}$ et TFI[.] la transformée inverse, :

$$C_{sr}(\boldsymbol{\ell}) = \text{TFI}[\tilde{C}_{sr}] = \frac{1}{V} \text{TFI}[\tilde{s}(\boldsymbol{k}) \tilde{r}^*(\boldsymbol{k})]. \quad (10.2)$$

L'obtention de l'ensemble de l'espace des échelles est donc possible mais demande de développer tous les termes factorisés de la loi exacte. Par exemple, pour la fonction de structure $\langle \delta\boldsymbol{v} \cdot \delta\boldsymbol{v}\delta\boldsymbol{v} \rangle$:

$$\begin{aligned} \langle \delta\boldsymbol{v} \cdot \delta\boldsymbol{v}\delta\boldsymbol{v} \rangle &= \langle \boldsymbol{v}' \cdot \boldsymbol{v}'\boldsymbol{v}' - \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}\boldsymbol{v}' + 2\boldsymbol{v}' \cdot \boldsymbol{v}\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}' \cdot \boldsymbol{v}'\boldsymbol{v} - 2\boldsymbol{v}' \cdot \boldsymbol{v}\boldsymbol{v}' \rangle \\ &= \frac{1}{N} \text{TFI}[\tilde{C}_{\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}} - \tilde{C}_{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}} + 2\tilde{C}_{\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}} - 2\tilde{C}_{\boldsymbol{v}\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}}] \\ &\stackrel{!}{=} \frac{1}{N} \text{TFI}[\text{TF}[\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}] \tilde{\boldsymbol{v}}^* - \tilde{\boldsymbol{v}} \text{TF}[\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}]^* + 2\tilde{\boldsymbol{v}}^* \cdot \text{TF}[\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}] - 2\tilde{\boldsymbol{v}} \cdot \text{TF}[\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}]^*] \end{aligned} \quad (10.3)$$

avec $C_{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}} = \langle \boldsymbol{v}' \cdot \boldsymbol{v}'\boldsymbol{v} \rangle$, $C_{\boldsymbol{v}\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}} = \langle \boldsymbol{v}' \cdot \boldsymbol{v}\boldsymbol{v}' \rangle$, TF[.] la transformée de Fourier appliquée sur une expression et N le nombre de points moyennés et sachant que par homogénéité statistique, on a $\langle \boldsymbol{v}' \cdot \boldsymbol{v}'\boldsymbol{v}' \rangle = \langle \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}\boldsymbol{v} \rangle$ et que la moyenne est distributive. Cette méthode est utilisable, car il est possible de développer les expressions en des produits de deux quantités générales, une évaluée au point \boldsymbol{x} et l'autre en \boldsymbol{x}' , et parce que la simulation est périodique. L'algorithme associé à cette méthode est schématisé sur la FIGURE 10.3. Cette méthode demande quelques précautions lors de l'implémentation, car elle peut vite devenir coûteuse en mémoire ainsi que de développer l'ensemble des termes présents dans une loi exacte. Cependant, elle permet d'obtenir un résultat complet, indépendant du mode de représentation final des résultats. C'est donc la méthode qui a été choisie. En utilisant de l'algorithme de FFT, elle s'avère, de plus, particulièrement rapide (moins de dix minutes pour calculer séparément les trois termes de PP98 pour CGL2 par exemple).

Algorithme spectral de calcul de $\varepsilon = \nabla_{\ell} \cdot \langle \mathbf{F}(A', A) \rangle + \langle S(A', A) \rangle$
avec $\mathbf{F}(A', A)$ **et** $S(A', A)$ **développés en termes de type** $s(A') \cdot r(A)$

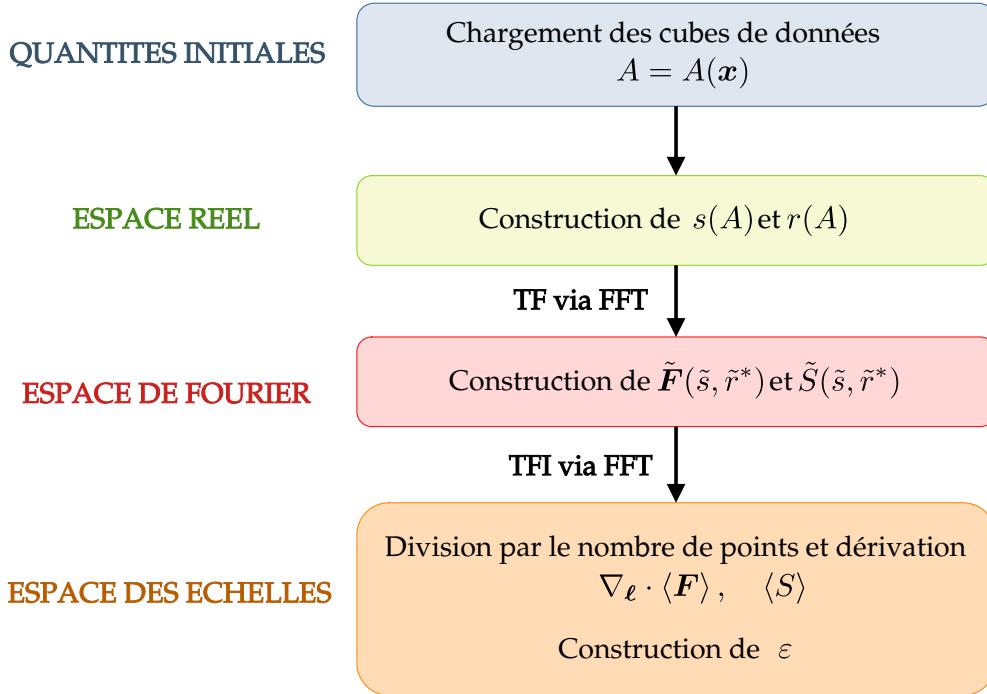


FIGURE 10.3 – Algorithme de calcul du taux de cascade ε via la convolution. Les quantités impliquées sont des quantités génériques et par exemple pour S , $\text{TF}[S] = \tilde{S}$.

10.3 Mode de représentation du résultat

Le résultat de l'algorithme de calcul par convolution est, pour chaque quantité, un parallélépipède couvrant une gamme d'échelles physiques dans la direction \mathbf{e}_z différente de la gamme d'échelles couverte dans les directions perpendiculaires, \mathbf{e}_x ou \mathbf{e}_y . Ces gammes d'échelles couvrant différents ordres de grandeurs, une représentation logarithmique est usuellement adoptée. Le caractère tridimensionnel de la grille parallélépipédique, impose de choisir une méthode de réduction (3 dimensions (3D) vers 2D ou 1D) afin de pouvoir visualiser facilement les quantités. Différents types de réductions sont possibles et illustrées sur la FIGURE 10.4 :

- R1 : 1D en fonction de $\ell = |\ell|$ en moyennant la quantité sur des coquilles de rayon moyen ℓ ,
- R2 : 2D en fonction de $\ell_{\perp} = \sqrt{\ell_x^2 + \ell_y^2}$ et $\ell_{\parallel} = \ell_z$ en moyennant la quantité sur des couronnes de rayon moyen ℓ_{\perp} dans chaque plan perpendiculaire à \mathbf{e}_z ,
- R3 : 1D en fonction de ℓ_{\perp} en moyennant la quantité sur des coquilles cylindriques de rayon moyen ℓ_{\perp} , la moyenne suivant ℓ_{\parallel} peut s'effectuer de diverses manières qui seront détaillées par la suite,
- R4 : 1D en fonction de ℓ_{\parallel} en moyennant chaque plan perpendiculaire à \mathbf{e}_z , la moyenne suivant ℓ_{\perp} peut s'effectuer de diverses manières qui seront détaillées par la suite.

Sachant que la grille parallélépipédique couvre des gammes d'échelles différentes dans

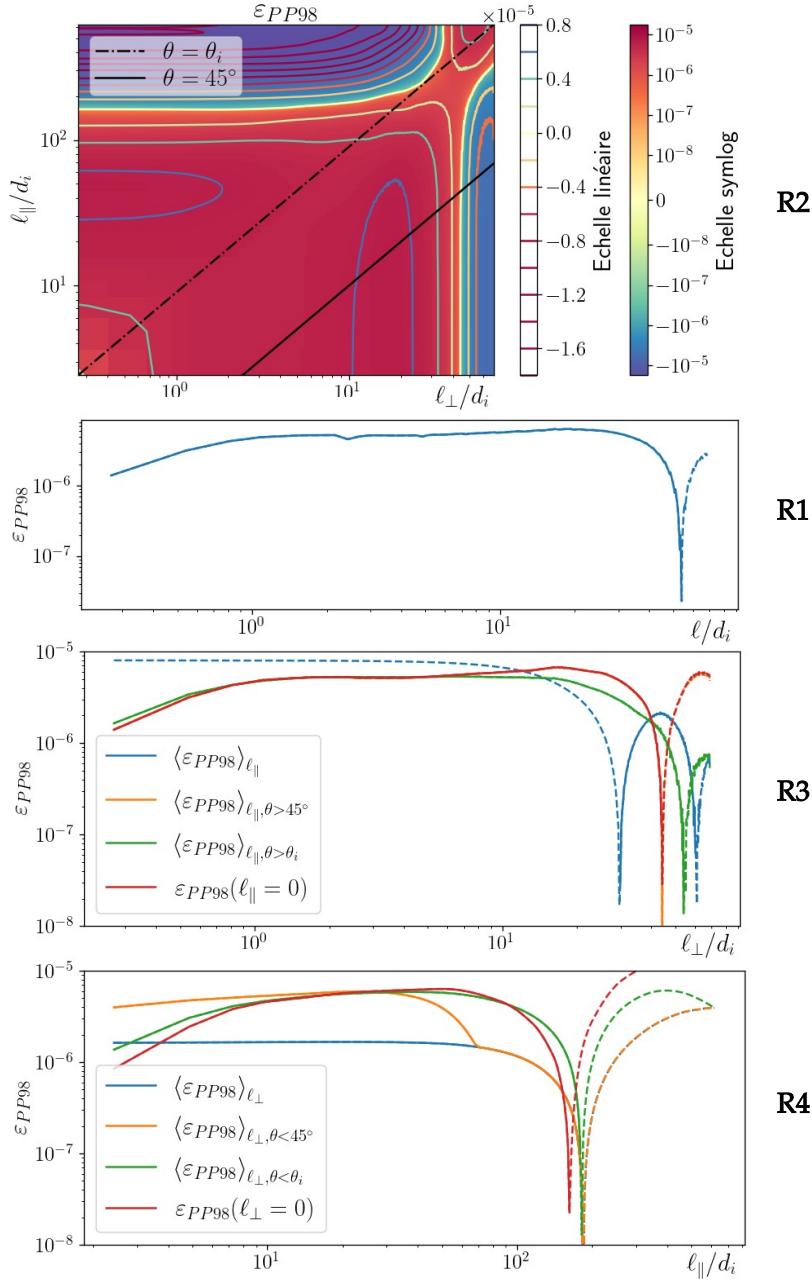


FIGURE 10.4 – Différents modes de représentations du taux de cascade ε_{PP98} calculé avec PP98 dans les données de la simulation CGL1. R2 : 2D en fonction de ℓ_\perp et ℓ_\parallel), avec deux échelles de couleurs, une échelle symlog, linéaire entre -10^8 et 10^8 (échelle colorée continue), une échelle linéaire (échelle colorée discontinue). Frontières $\theta = \theta_i$ (noire discontinue) et $\theta = 45^\circ$ (noire continue). R1 : 1D en fonction de ℓ . R3 : 1D en fonction de ℓ_\perp , pour $\ell_\parallel = 0$ (rouge), moyenne sur l'ensemble des ℓ_\parallel (bleue), moyennes sur les ℓ_\parallel tels que $\theta > 45^\circ$ (orange), et tels que $\theta > \theta_i$ (vert). R4 : 1D en fonction de ℓ_\parallel , pour $\ell_\perp = 0$ (rouge), moyenne sur l'ensemble des ℓ_\perp (bleue), moyenne sur les ℓ_\perp tels que $\theta < 45^\circ$ (orange) et tels que $\theta < \theta_i$ (vert). Le caractère continu ou discontinu des courbes 1D reflète le signe de ε_{PP98} .

la direction e_z et les directions perpendiculaires (voir la carte R2 sur la FIGURE 10.4), notre géométrie est fondamentalement axisymétrique. La représentation de type R2 est donc la plus adaptée. L'échelle «symlog»² permet de repérer les changements de signe et les ordres de grandeurs couverts par ε_{PP98} tandis que les courbes de niveau linéaires révèlent les variations plus spécifiques tel qu'un affaiblissement aux petites échelles ou des bosses (courbes de niveau bleues) aux échelles parallèles et perpendiculaires intermédiaires. On pourrait définir une zone inertielle entre les courbes de niveaux associées à la valeur 0.4. On remarque que cette zone semble carrée, cela est dû aux axes logarithmiques. Avec des axes linéaires, on observerait un quart d'ellipse liant $\ell_{\parallel}/d_i = 1 \times 10^2$ à $\ell_{\perp}/d_i \simeq 30$. Le problème des cartes est la difficulté de comparer de multiples quantités. Nous aurons donc besoin d'une représentation 1D.

R1 peut donner un résultat biaisé : sur le graphique R1 de la FIGURE 10.4, le résultat correspond quasiment entièrement (sauf aux très grandes échelles communes aux directions parallèle et perpendiculaire) à $\varepsilon_{PP98}(\ell_{\parallel} = 0)$ en rouge sur le graphique R3 de la FIGURE 10.4. Le manque de points, pour effectuer la moyenne en chaque ℓ , induit des variations non-physiques du résultat (sursauts à intervalles réguliers sur le graphique R1 de la FIGURE 10.4). R3 ou R4 serait peut-être plus adapté même si originellement, le caractère petit ou grand des échelles est défini à partir de $\ell = |\ell|$ (resp. petit ou grand).

Cependant, visualiser la cascade via R3 en moyennant l'ensemble des ℓ_{\parallel} à ℓ_{\perp} fixé (courbe bleue), vient mixer les petits et grands ℓ . La zone négative à grand ℓ_{\parallel} vient alors écraser la zone inertielle présumée et plus encore la variation des petites échelles. Le même phénomène apparaît pour R4 (courbes bleues sur les graphiques R3 et R4 de la FIGURE 10.4). Une autre possibilité de réduction serait de ne regarder qu'une direction $\ell_{\parallel} = 0$ pour R3 ou $\ell_{\perp} = 0$ pour R4 (courbes rouges sur les graphiques R3 et R4 de la FIGURE 10.4). Le résultat n'est alors pas très lisse et peu représentatif de la variation d'ensemble.

La troisième possibilité correspond à appliquer un filtre angulaire. En définissant θ , l'angle entre ℓ et e_z , on pourrait considérer que les ℓ contribuant à la dynamique parallèle sont les ℓ quasi-parallèles tels que $\theta < 45^\circ$ et ceux contribuant à la dynamique perpendiculaire, les ℓ quasi-perpendiculaires tels que $\theta > 45^\circ$. La frontière $\theta = 45^\circ$ est représentée par une ligne noire continue sur la carte R2 de la FIGURE 10.4, et les résultats apparaissent en orange sur les graphiques R3 et R4. Pour R3, le résultat coïncide avec $\varepsilon_{PP98}(\ell_{\parallel} = 0)$. En effet, aux petites échelles, le plan tel que $\ell_{\parallel} = 0$ est la seule contribution à la moyenne. Similairement, pour R4, on assiste à un écroulement de la courbe qui rejoint $\langle \varepsilon_{PP98} \rangle_{\ell_{\perp}}$ en $\ell_{\parallel} = 7 \times 10^1$. Cet écroulement est dû à la prise en compte de la région bleue à droite de la carte R2 pour les échelles supérieures à 7×10^1 . Ce filtre angulaire n'est donc pas adapté.

La réduction 1D qui sera adoptée par la suite correspond à un filtrage angulaire basé sur l'angle d'injection de l'énergie, θ_i . Ce dernier impose la géométrie de la grille et les gammes d'échelles accessibles. Dans l'espace d'échelle, l'injection a lieu aux échelles telles que ℓ est maximal, c'est-à-dire dans l'angle supérieur droit de la carte R2 FIGURE 10.4. $\theta = \theta_i$ correspond à la diagonale représentée par une ligne noire discontinue. Appliquer cette réduction nous donne les courbes vertes des graphiques R3 et R4 de la FIGURE 10.4. N'y apparaissent, ni les artefacts visibles avec R1, ni les saturations visibles sur les courbes bleues ou orange et elles sont plus représentatives du comportement de ε_{PP98} dans l'ensemble de l'espace des échelles que les courbes rouges. On remarquera tout de

2. Cette échelle décrit l'ensemble des nombres réels via trois représentations : $[x_0; +\infty[$ en représentation logarithmique, $]x_0; -x_0[$ en représentation linéaire (afin d'éviter la singularité du point 0), puis $] -\infty; -x_0]$ en représentation logarithmique (en prenant l'opposé du logarithme de la valeur absolue). x_0 est choisi le plus petit possible.

même que la décroissance en allant vers les petites échelles est moins accentuée que pour les courbes rouges : les premières échelles de $\ell_{parallel}$ (resp. ℓ_{\perp}) différentes de 0 sont prises en compte dans la moyenne des premiers points de ε_{PP98} en fonction de ℓ_{\perp} (resp. $\ell_{parallel}$).

10.4 Synthèse des méthodes et choix numériques

Code de simulation d'un plasma turbulent (Fortran) :

- Méthode d'intégration pseudo-spectrale (voir FIGURE 10.1) des équations fluides.
- Des termes d'hyperdissipation qui joueront le rôle de la dissipation aux petites échelles.
- Un forçage permanent, localisé dans l'espace de Fourier, de fréquences aléatoires proche de la pulsation Alfvénique, et maintenant l'énergie perpendiculaire (cinétique + magnétique) du système quasiment constante.
- Une géométrie périodique dépendant de l'angle d'injection de l'énergie, θ_i et de la résolution de la grille numérique.

Je n'ai pas participé dans l'écriture de ce code mais je l'ai utilisé pour compléter le lot de simulations analysées par FERRAND, SAHRAOUI, LAVEDER *et al.* 2021.

Calcul des termes des lois exactes (Python/Numpy/Scipy) : Obtention rapide de l'ensemble de l'espace d'échelles accessible grâce à une méthode de calcul basée sur le lien entre corrélation et convolution, et sur la périodicité des simulations. L'algorithme est schématisé sur la FIGURE 10.3.

Visualisation des résultats (Python/Matplotlib) : représentation cylindrique

- Représentation 2D en fonction de ℓ_{\parallel} et ℓ_{\perp} avec des échelles de couleurs de type chaud/froid (indiquant facilement le signe du résultat) associées aux variations logarithmique (fond) et linéaire (courbes de niveaux) du résultat.
- Représentation 1D en fonction de ℓ_{\perp} . Réduction du résultat 2D en moyennant sur ℓ_{\parallel} pour $\theta > \theta_i$.
- Représentation 1D en fonction de ℓ_{\parallel} . Réduction du résultat 2D en moyennant sur ℓ_{\perp} pour $\theta < \theta_i$.

Avec θ l'angle entre ℓ et la direction moyenne du champ magnétique e_z .

J'ai implémenté les codes de post-traitement et de visualisation des termes des lois exactes. Le code de post-traitement est disponible sur GitHub : [paulinesimon97/2022-07_Simu_Exact_laws](https://github.com/paulinesimon97/2022-07_Simu_Exact_laws) : Package usefull to compute exact laws 2023.

PARTIE III : CHAPITRE 11

DES LOIS INCOMPRESSIBLES AUX LOIS COMPRESSIBLES : TESTS ET VALIDATIONS

Sommaire

11.1 Comparaison de résultats IMHD-Hall avec pression isotrope et schémas numériques	129
11.1.1 Comparaison avec des résultats IMHD-Hall	129
11.1.2 Comparaison avec des schémas numériques à travers les résultats IMHD-Hall incompressible	131
11.2 Effet du forçage sur la zone inertie	133
11.3 Equation KHM et incertitude numérique	133
11.3.1 Calcul de la loi KHM	134
11.3.2 Analyse des contributions de la loi KHM	135
11.3.3 Estimation de l'erreur sur le taux de cascade	137
11.4 Synthèse des tests de validation et sources d'erreurs	139

Avant d'attaquer les spécificités des modèles simulés et les lois exactes associées, il est nécessaire de valider les méthodes numériques exposées dans le Chapitre 10 et d'en déterminer les biais. Dans la section 11.1, les résultats de lois exactes IMHD-Hall seront comparés aux résultats de [FERRAND, SAHRAOUI, LAVEDER *et al.* 2021] (F21)). Enfin, dans la section 11.3, une méthode d'estimation de l'incertitude sur nos résultats sera proposée.

Les simulations utilisées dans ces études comparatives sont CGL1 et CGL3 (voir détail TABLE 9.1 et TABLE 9.2). Elles font partie des simulations du modèle CGL-Hall- ∇P_e analysées par F21 et elles feront l'objet du Chapitre 14.

11.1 Comparaison de résultats IMHD-Hall avec pression isotrope et schémas numériques

11.1.1 Comparaison avec des résultats IMHD-Hall

Afin de valider les méthodes et choix décrits dans le Chapitre 10, nous avons calculé avec les données de CGL1 et CGL3, les quantités comparées par F21 :

- ε_{MHD} , provenant de la loi PP98 (équation (3.34)),
- ε_{Hall} , la correction Hall incompressible (équation (9.4)),
- $\varepsilon_{MHD-Hall} = \varepsilon_{MHD} + \varepsilon_{Hall}$, qui correspond au résultat de la loi **IMHMH!** dérivée par [FERRAND, GALTIER, SAHRAOUI, MEYRAND *et al.* 2019].

Pour CGL1, la date sélectionnée indiquée dans la TABLE 9.1 est celle utilisée par F21. Ce n'est pas le cas pour CGL3, pour laquelle F21 utilise $t = 357$. Afin de ne pas apporter

d'incertitude à notre comparaison en changeant les données utilisées les résultats seront exceptionnellement donnés pour $t = 357$ dans cette section.

Par conséquent, aucune différence que l'on pourra noter ne proviendra des données, des expressions des quantités ou de leur domaine de validité. Les différences entre les résultats résideront dans les schémas numériques utilisés. On a indiqué le nôtre par la mention «Fourier for Exact Law» (FEL) et celui de F21 par «F21». Nos résultats sont présentés sur la FIGURE 11.1 par des lignes pleines et sont accompagnés de ceux des figures 3 et 5 de F21 en pointillés.

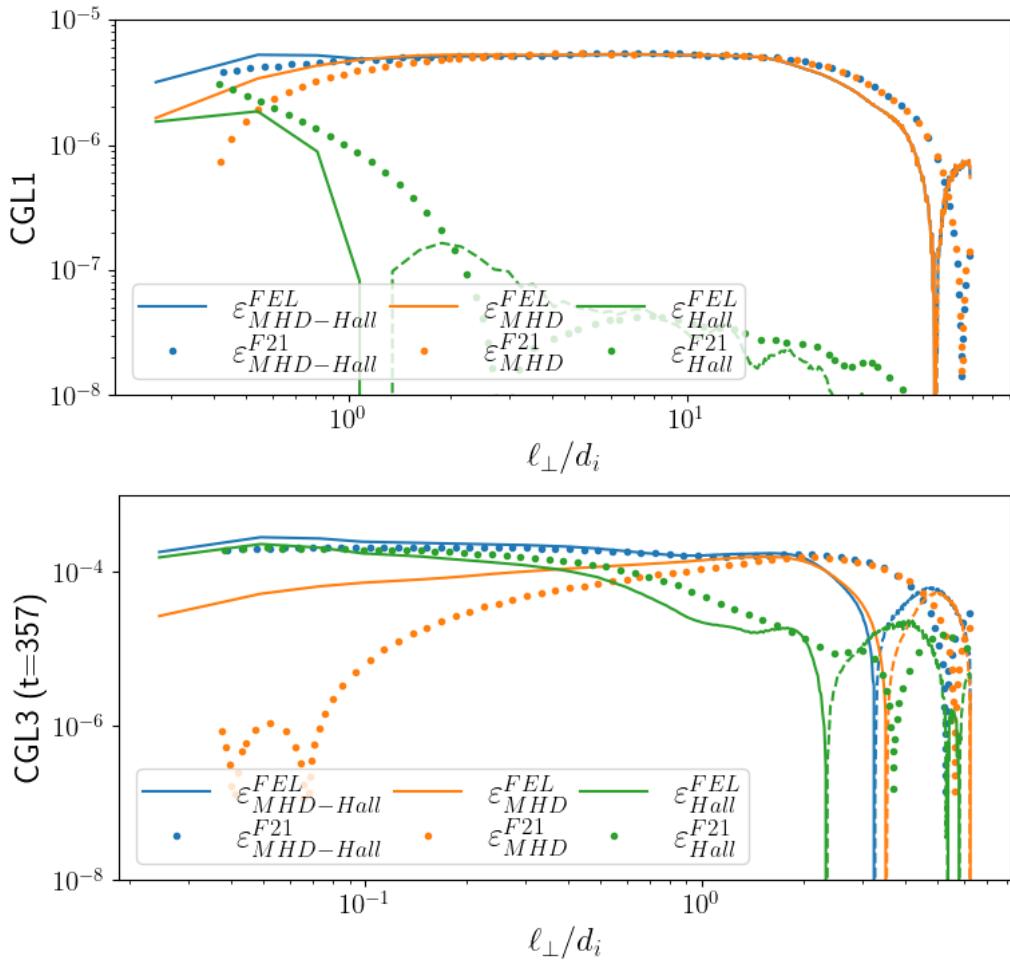


FIGURE 11.1 – Mode de représentation : 1D en fonction de ℓ_\perp normalisé par d_i . Lignes pleines : nos résultats (avec en lignes discontinues les valeurs négatives). Pointillés : résultats extraits des figures 3 et 5 de F21. Bleu : $\epsilon_{MHD-Hall}$. Orange : ϵ_{MHD} . Vert : ϵ_{Hall} .
Haut : CGL1. Bas : CGL3 ($t = 357$).

Tout d'abord, pour chaque simulation, on retrouve les points physiques attendus :

- Pour CGL1 : une zone inertielle MHD telle que $\epsilon_{MHD-Hall} = \epsilon_{MHD}$ (resp. courbe bleue et orange) et une augmentation de ϵ_{Hall} (courbe verte) en allant vers les petites échelles.
- Pour CGL3 : une croissance de ϵ_{Hall} , en allant vers les petites échelles, venant dominer ϵ_{MHD} et rejoignant $\epsilon_{MHD-Hall}$ pour former un plateau (la zone inertielle Hall (Hall)). Le croisement entre ϵ_{MHD} et ϵ_{Hall} a lieu près de $\ell_\perp = d_i$ donc à la

frontière entre les zones MHD et Hall.

Ces résultats tendent à valider notre implémentation. D'autres tests tels qu'une comparaison des formulations de la loi ε_{MHD} (PP98 et celle proposée par [BANERJEE et KRITSUK 2017]) ou la vérification des prédictions de [ANDRÉS, SAHRAOUI, GALTIER, HADID, DMITruk *et al.* 2018], ont été entrepris afin de vérifier la cohérence et le respect de la physique des lois obtenues dans la littérature. Ces résultats sont présentés dans l'Annexe B.

11.1.2 Comparaison avec des schémas numériques à travers les résultats IMHD-Hall incompressible

Les différences entre les résultats de FEL et F21, visibles sur la FIGURE 11.1, sont :

- une bosse aux petites échelles pour $\varepsilon_{MHD-Hall}$ calculé avec FEL,
- en allant vers les petites échelles, une décroissance moindre de ε_{MHD} calculé avec FEL aux échelles $\ell < di$,
- en allant vers les grandes échelles, une décroissance de $\varepsilon_{MHD-Hall}$ et ε_{MHD} calculés avec FEL arrivant avant celle des quantités calculées avec F21.

Usuellement, ce qui se passe au niveau des petites échelles est attribué à un impact de la dissipation et ce qui se passe au niveau des plus grandes échelles est impacté par le forçage. Similairement, ε_{MHD} étant calculé avec la loi PP98, la décroissance apparaît en dehors de son domaine de validité : la zone MHD telle que $\ell \gg di$. Par conséquent, les différences vu n'influent pas sur l'interprétation physique. De plus, les données post-traitées et les expressions des quantités calculées étant identiques pour chaque simulation, les différences observées ne peuvent être dues qu'à une erreur de code ou aux différences présentes dans les schémas numériques utilisés.

Les différences entre les schémas numériques pouvant impacter l'estimation de nos quantités qui sont de la forme $\nabla_\ell \cdot \mathcal{F}$ sont résumées dans la TABLE 11.1. Les notations associées au schéma numérique de F21 et détaillées dans [FERRAND 2021] sont adaptées à nos notations.

	F21 (inspirée de [TAYLOR <i>et al.</i> 2003])	FEL (voir le Chapitre 10)
maillage	set réduit de directions vectorielles	tous les vecteurs accessibles
∇_ℓ	$\frac{1}{\ell_\perp} \partial_{\ell_\perp} [\ell_\perp \langle \mathcal{F}_{\ell_\perp} \rangle_{\phi, \ell_\parallel}]$	$\nabla_\ell \cdot \mathcal{F}$ cartésienne
filtrage des ℓ_\parallel	pour $\theta > 45^\circ$ de la grille numérique pondérée, avant la dérivation	pour $\theta > \theta_i$ après la dérivation
$\langle \rangle_{\phi, \ell_\parallel}$		

TABLE 11.1 – Différences majeures entre les schémas numériques F21 et FEL. ϕ correspond à l'angle présent dans la plan perpendiculaire dans un système de coordonnées cylindrique.

Tout d'abord, à propos du maillage de l'espace des échelles, l'utilisation d'un set réduit de directions vectorielles implique l'impossibilité de calculer une divergence complète : ou il faut interpoler, ou approximer l'opérateur, ou pour chaque point, calculer les quelques points adjacents. La première solution a tendance à apporter des erreurs numériques non négligeable si le maillage interpolé n'est pas régulier, ce qui est le cas pour F21. La troisième solution demande du temps de calcul supplémentaire. Finalement, la deuxième solution a été adoptée pour F21. N'est alors calculée que la composante transverse du

flux dans chaque plan perpendiculaire au champ magnétique moyen. Ce calcul se base donc sur la symétrie des simulations, provenant du champ magnétique moyen suivant e_z et néglige les variations de la composante parallèle du flux le long de ℓ_{\parallel} . La FIGURE 11.2

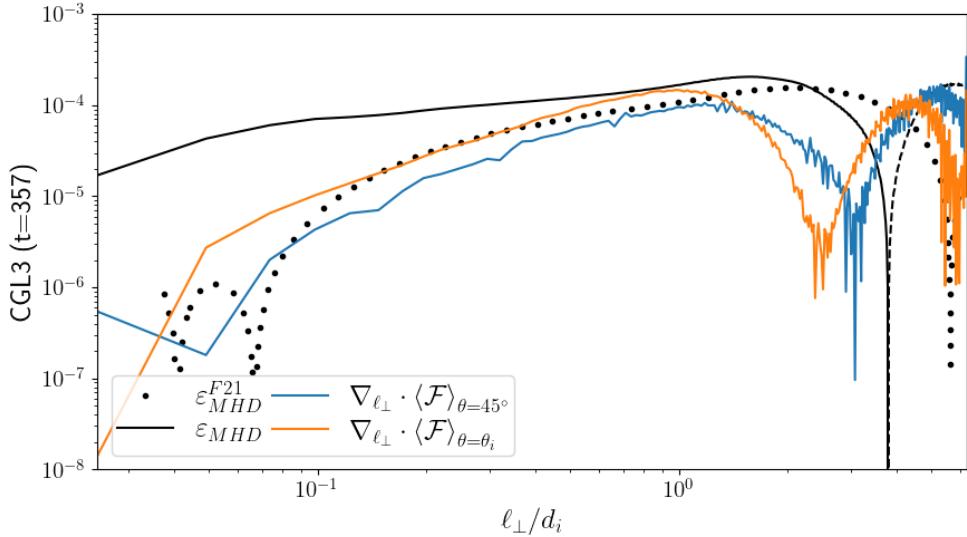


FIGURE 11.2 – Mode de représentation : 1D en fonction de ℓ_{\perp} normalisé par d_i . Simu : CGL3 ($t = 357$). Comparaison de ε_{MHD} obtenu par F21 (noir pointillé), FEL (noir pleine) et l’application d’une divergence transverse sur \mathcal{F} calculés avec FEL et moyenné suivant deux angles $\theta = 45^\circ$ de la boîte numérique et $\theta = \theta_i$.

illustre les effets de la variation parallèle de la composante parallèle du flux ainsi que ceux du filtrage. Le résultat F21 (en pointillé) y est comparé à deux estimations de la divergence transverse effectuée dans nos résultats après avoir moyenné le flux dans le plan perpendiculaire et suivant les ℓ_{\parallel} . On ne s’attend pas à retrouver exactement le résultat de F21 mais à s’en rapprocher et c’est le cas. La différence entre les deux estimations correspond au filtrage utilisé dans la moyenne de ℓ_{\parallel} : celui utilisé par F21, en bleu, et celui que l’on utilise, en orange. L’impact de l’angle de filtrage avait déjà été remarqué dans l’analyse de la FIGURE 10.4. On voit ici qu’il a pu influer sur le résultat de F21 tout comme il peut influer sur le nôtre. On peut en déduire de cette figure que le poids des variations parallèles, omis par F21, semble avoir un impact sur nos résultats.

La différence entre nos estimations transverses et F21 est située dans le nombre de points du maillage utilisé. Comme FEL prend en compte l’ensemble de l’espace des échelles, il donnera pour ε_{MHD} par exemple, un résultat impacté par toutes ses variations spatiales omises par une moyenne sur un nombre réduit de vecteurs, malgré la compensation apportée par la pondération. Cet ensemble réduit d’échelles étant choisi tel des multiples de quelques vecteurs directionnels, il représentera d’autant moins les variations en s’approchant des grandes échelles.

Il semble donc cohérent d’attribuer notre différence de comportement de ε_{MHD} aux choix numériques façonnant le code de post-traitement. On peut aussi en déduire que FEL donne un résultat associé à la position dans l’espace 2 dimensions (2D) plus réaliste que F21.

11.2 Effet du forçage sur la zone inertielle

La proximité du forçage induit de fortes variations dans le résultat à grande échelle. De plus, ici, cette injection est loin d'être stationnaire : parfois le forçage est allumé, d'autres fois, il est éteint. Sur la FIGURE 11.3, est affiché le résultat IMHD-Hall pour différentes dates de CGL3. On voit qu'en fonction de la date, l'échelle limite de la zone

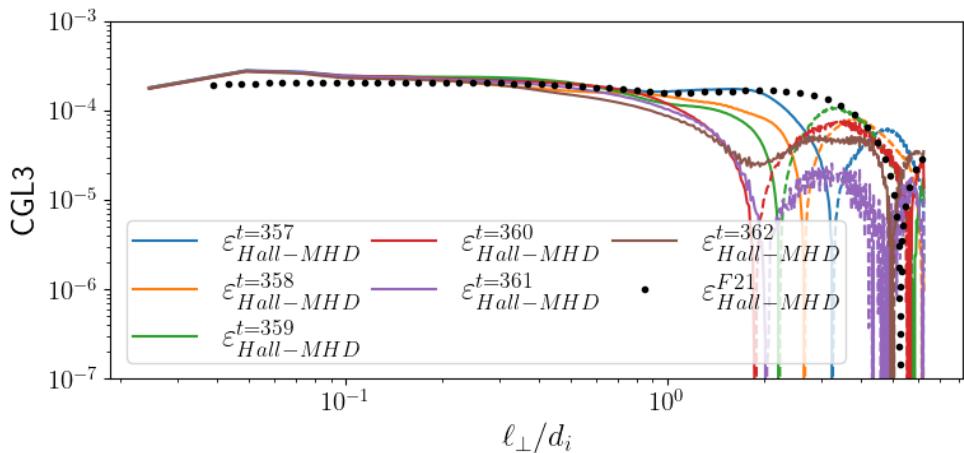


FIGURE 11.3 – Mode de représentation : 1D en fonction de ℓ_{\perp} normalisé par d_i . ε_{F19} est obtenue pour diverses dates, t , de CGL3, chaque date correspond à une couleur. Le résultat extrait de la figure 5 de F21 est donné en pointillés noirs.

inertielle (telle que ε_{F19} soit constant) fluctue grandement. Et, à $t = 357$ (date utilisée par F21), notre résultat (courbe bleue) montre la zone inertielle la plus large. Pour CGL3, de $t = 357$ à $t = 360$ le forçage est éteint, la zone inertielle décroît petit à petit et, pour les temps suivant, il est rallumé et le plateau semble alors se reformer. On observe donc, ici, l'oscillation de l'injection. Aux échelles $\ell_{\perp}/d_i < 1$, le niveau de ε_{F19} varie peu quelle que soit la date considérée. Cette observation concorde avec l'hypothèse de stationnarité statistique du taux de cascade dans la zone inertielle (ici MHD-Hall). Cette hypothèse est considérée analytiquement pour obtenir des lois du type K41 (voir synthèse 1.4).

Le temps de simulation sélectionné impactant l'extension dans la zone de forçage de la zone inertielle, les temps de simulations indiqués dans la TABLE 9.1 ont été sélectionnés en prenant garde à l'état allumé ou éteint du forçage, mais cela ne signifie pas que l'extension de la zone inertielle se sera reformée. Une dernière différence, minime, n'a pas encore été abordée : celle de la variation aux petites échelles de $\varepsilon_{MHD-Hall}$. Sa signification associée à l'hyperdissipation sera abordée dans la section 11.3



11.3 Equation KHM et incertitude numérique

Afin d'estimer l'incertitude sur nos résultats, nous nous sommes lancés dans la vérification de l'équation KHM du modèle simulé sous sa forme complète et pas seulement la loi K41 dont la validité est réduite à la zone inertielle. Cette estimation est permise par le travail analytique effectué en amont et décrit dans la partie II

11.3.1 Calcul de la loi KHM

Une loi de type KHM peut s'écrire schématiquement (voir Chapitre 1) :

$$\partial_t \mathcal{R} = -\varepsilon_{NL} + \varepsilon_D + \varepsilon_F \quad (11.1)$$

Nous avons vu que l'application des hypothèses de Kolmogorov donne la loi réduite de type K41 telle que $\varepsilon = -\varepsilon_{NL}$ (voir synthèse 1.4). Son contenu, spécifique au modèle implémenté, sera détaillé dans les Chapitres 14 (CGL-Hall- ∇P_e) et 13 (LF-Hall- ∇P_e).

$\partial_t \mathcal{R}$ est la dérivée temporelle de la fonction de corrélation utilisée pour obtenir la loi exacte. Dans nos études, cette fonction est $\mathcal{R} = \frac{1}{4} \langle (\rho' + \rho)(\mathbf{v}' \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A) + 2\rho'u + 2\rho u' \rangle$. Pour estimer ce terme, on va utiliser les temps consécutifs relevés dans la simulation. La dérivée temporelle sera estimée grâce à des schémas de discrétisation de type «différences finies» d'ordre 2 :

- décentrée vers la droite pour le premier temps t_0 : $(\partial_t \mathcal{R})(t_0) = \frac{\mathcal{R}(t_0 + \delta t) - \mathcal{R}(t_0)}{\delta t}$,
- décentrée vers la gauche pour le dernier temps t_{N_t} : $(\partial_t \mathcal{R})(t_{N_t}) = \frac{\mathcal{R}(t_{N_t}) - \mathcal{R}(t_{N_t} - \delta t)}{\delta t}$,
- centrée pour les autres temps : $(\partial_t \mathcal{R})(t_n) = \frac{\mathcal{R}(t_{n+1}) - \mathcal{R}(t_{n-1})}{2\delta t}$ avec $n \in]0, N_t[$.

Le forçage présent dans nos simulations est un forçage de type antenne de Langevin appliqué sur le champ de vitesse. Par conséquent, le taux de forçage ε_F s'écrit $\varepsilon_F = \frac{1}{4} \langle (\rho' + \rho)(\mathbf{v}' \cdot \mathbf{f} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}') \rangle$. Ce forçage dépend de deux composantes aléatoires qui font partie des quantités extraites de la simulation, elles seront notées f_{sup} et f_{inf} . Elles permettent de construire une quantité intermédiaire $F = a_1 f_{sup} + (1 - a_1) * f_{inf}$. Les composantes de \mathbf{f} sont alors : $f_x = \partial_y F$, $f_y = -\partial_x F$ et $f_z = 0$.

Le taux de dissipation ε_D couvre l'ensemble des hyperdissipations présentes dans le système. Chaque quantité est associée à une hyperdissipation du type $\nu_X \Delta^4 X$ avec X quantité générique et $\Delta^4 = (\partial_x^2 + \partial_y^2 + \alpha \partial_z^2)^4$. On va décomposer ε_D tel que :

$$\varepsilon_D = \varepsilon_D^c + \varepsilon_D^m + \varepsilon_D^{ui} + \varepsilon_D^{ue} \quad (11.2)$$

avec :

- la contribution cinétique avec $\mathbf{D}_v = \nu \Delta^4 \mathbf{v}$ et $D_\rho = \nu_\rho \Delta^4 \rho$:

$$\varepsilon_D^c = \varepsilon_D^c(\mathbf{D}_v) + \varepsilon_D^c(D_\rho) = -\frac{1}{4} \langle (\rho' + \rho) (\mathbf{v}' \cdot \mathbf{D}_v + \mathbf{v} \cdot \mathbf{D}'_v) \rangle - \frac{1}{4} \langle (D'_\rho + D_\rho) \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v} \rangle \quad (11.3)$$

- la contribution magnétique avec $\mathbf{D}_{v_A} = \frac{\eta}{\sqrt{\rho}} \Delta^4 (\sqrt{\rho} \mathbf{v}_A)$:

$$\begin{aligned} \varepsilon_D^m &= \varepsilon_D^m(\mathbf{D}_{v_A}) + \varepsilon_D^m(D_\rho) = -\frac{1}{4} \langle (\rho' + \rho) (\mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{D}_{v_A} + \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{D}'_{v_A}) \rangle \\ &\quad - \frac{1}{8} \left\langle (\rho' - \rho) \left(\frac{D'_\rho}{\rho'} - \frac{D_\rho}{\rho} \right) \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A \right\rangle \end{aligned} \quad (11.4)$$

- la contribution d'énergie interne ionique (gyrotope) avec $D_u = \frac{\nu_p}{2} \Delta^4 (2p_{\perp i} + p_{\parallel i})$ et sachant que $\rho_i u_i = \frac{1}{2} (2p_{\perp i} + p_{\parallel i})$:

$$\varepsilon_D^{ui} = \varepsilon_D^{ui}(D_u) + \varepsilon_D^{ui}(D_\rho) = -\frac{1}{2} \left\langle \frac{\rho}{\rho'} D'_u + \frac{\rho'}{\rho} D_u \right\rangle - \frac{1}{2} \left\langle \left(\frac{D'_\rho}{\rho'} - \frac{D_\rho}{\rho} \right) (\rho' u_i - \rho u'_i) \right\rangle \quad (11.5)$$

— la contribution d'énergie interne électronique (isotherme) sachant que $\rho_e u_e = \rho \ln \rho$:

$$\varepsilon_D^{ue} = -\frac{1}{2} \left\langle D'_\rho \ln \rho + D_\rho \ln \rho' + \frac{\rho'}{\rho} D_\rho + \frac{\rho}{\rho'} D'_\rho \right\rangle \quad (11.6)$$

et ν , η , ν_ρ et ν_p des constantes choisies empiriquement pour chaque simulation. Elles sont résumées dans la TABLE 9.2.

11.3.2 Analyse des contributions de la loi KHM

Sur FIGURE 11.4, ε_{NL} (bleu) est comparé à un niveau de référence $\varepsilon_{ref} = -\partial_t \mathcal{R} + \varepsilon_D + \varepsilon_F$ (violet), construit à partir de $\partial_t \mathcal{R}$ (rouge), ε_D (vert) et ε_F (orange). La différence $\zeta = \varepsilon_{ref} - \varepsilon_{NL}$ est donnée en marron. On remarque qu'elle n'est pas de l'ordre du zéro numérique ($\sim 10^{-20}$) mais de l'ordre de deux ordres de grandeurs en dessous du niveau de ε_{NL} . La forme des termes $\partial_t \mathcal{R}$, ε_D et ε_F est particulière.

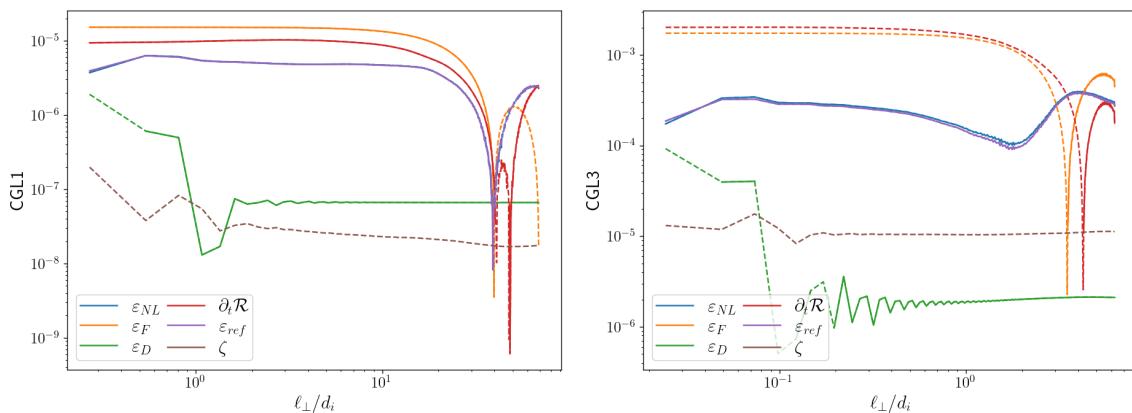


FIGURE 11.4 – Détail de la loi KHM pour CGL1 (gauche) et CGL3 (droite). Bleu : ε_{NL} . Orange : ε_F . Vert : ε_D . Rouge : $\partial_t \mathcal{R}$. Violet : $\varepsilon_{ref} = -\partial_t \mathcal{R} + \varepsilon_D + \varepsilon_F$. Marron : $\zeta = \varepsilon_{ref} - \varepsilon_{NL}$. Représentation : 1D en fonction de ℓ_\perp avec les valeurs positives en trait plein et négative en trait discontinu.

Balance des termes et forçage : Tout d'abord, analysons la situation pour CGL1. Dans le Chapitre 1, on a vu que :

$$\varepsilon_{NL}(\boldsymbol{\ell}) = \varepsilon_F(\boldsymbol{\ell}) = \varepsilon_D(\boldsymbol{\ell} = 0) = -\varepsilon \quad (11.7)$$

dans une zone inertielle où l'hypothèse de stationnarité statistique s'appliquerait.

On peut en effet identifier une gamme d'échelles $\ell_\perp/d_i \in [1; 20]$ telle que ε_{NL} soit constant. Son niveau est alors d'environ 5×10^{-6} . La valeur n'est pas visible ici à cause de l'échelle logarithmique mais $\varepsilon_D(\boldsymbol{\ell} = 0) \simeq 5 \times 10^{-6}$. Donc $\varepsilon_{NL}(\boldsymbol{\ell}) = \varepsilon_D(\boldsymbol{\ell} = 0)$ semble retrouvé. Par contre, même si la constance¹ de ε_F est vérifiée à ces échelles, son niveau est beaucoup trop important, de l'ordre de 1.5×10^{-5} . Pour retrouver le niveau 5×10^{-6} , on doit lui soustraire $\partial_t \mathcal{R}$ qui est d'environ 1×10^{-5} . La relation (11.8) s'écrit alors dans nos simulations :

$$\varepsilon_{NL}(\boldsymbol{\ell}) = \varepsilon_F(\boldsymbol{\ell}) - \partial_t \mathcal{R} = \varepsilon_D(\boldsymbol{\ell} = 0) = -\varepsilon \quad (11.8)$$

1. Le comportement constant du terme de forçage est démontré rigoureusement dans l'annexe A.1.

Analyse du terme $\partial_t \mathcal{R}$: Analytiquement, on se servait de l'hypothèse de stationnarité statistique pour annuler $\partial_t \mathcal{R}$, c'est-à-dire pour supposer qu'entre deux temps \mathcal{R} ne varie pas. Si $\partial_t \mathcal{R} = 0$ alors $\langle E_{tot} \rangle = \partial_t \mathcal{R}(\ell = 0) = 0$. Sauf que dans nos simulations $\langle E_{tot} \rangle$ fluctue légèrement : pour les quatre temps consécutifs utilisés pour CGL1, $\langle E_{tot} \rangle$ de l'ordre de 1.3 augmente d'environ 6×10^{-7} par pas de temps. Par conséquent, $\partial_t \mathcal{R} = 0$ est impossible à obtenir. C'est ce que l'on observe sur la FIGURE 11.4 pour CGL1 comme pour CGL3. Pourtant, la convergence temporelle des résultats du calcul de loi exacte K41 dans une certaine zone d'échelles a bel et bien été observée sur la FIGURE 11.3, et cela nous semblait une belle preuve de la stationnarité statistique de nos simulations. A première vue, ces résultats ne semblent pas compatibles. L'interprétation de ce paradoxe reste à affiner mais le comportement du $\partial_t \mathcal{R}$ instantané tel un forçage ne semble pas être une spécificité de nos simulations. En effet, [FERRAND, SAHRAOUI, GALTIER *et al.* 2022] trouve un comportement similaire dans des simulations de turbulence non forcée. Dans notre cas, on pourrait peut-être interpréter le comportement du terme $\partial_t \mathcal{R}$ comme un réservoir d'énergie régulant temporellement l'injection de l'énergie dans la cascade afin que cette dernière puisse s'effectuer au taux imposé par les processus de dissipation.

Analyse des contributions d'hyperdissipation : Un autre comportement pathologique est celui de ε_D en fonction de ℓ . Dans la théorie analytique, ce terme est supposé nul à toutes les échelles sauf en $\ell = 0$ à cause de l'anomalie dissipative. Dans nos simulations, son rôle est joué par les termes d'hyperdissipation, mais on s'attendrait à ce qu'ils décroissent rapidement en allant vers les grandes échelles puisque la dérivation par Δ^4 impose un comportement en k^8 dans l'espace de Fourier. Regardons ce qu'il en est en le décomposant sur ses diverses contributions. La décomposition est présentée sur FIGURE 11.5. On y voit que chacune des contributions semble ou décroître en allant vers

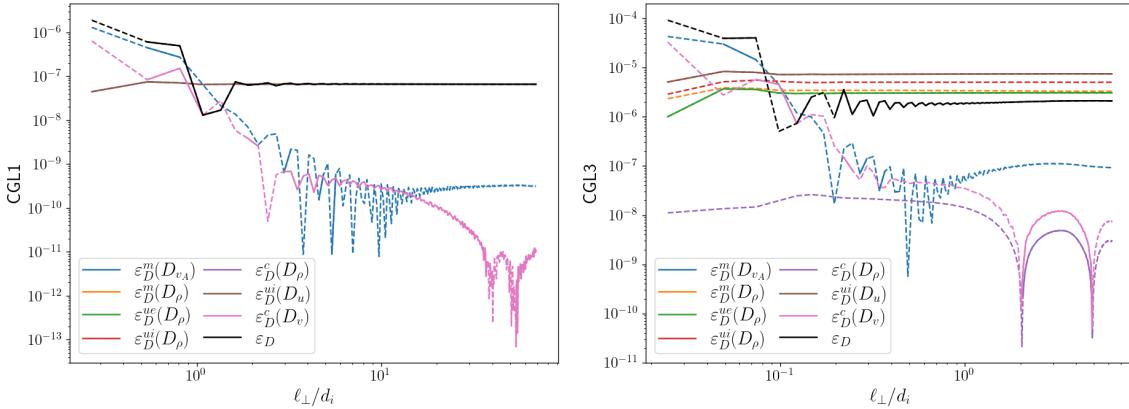


FIGURE 11.5 – Détail du terme d'hyperdissipation, ε_D (noir), pour CGL1 (gauche) et CGL3 (droite). Bleu : $\varepsilon_D^m(D_{v_A})$. Orange : $\varepsilon_D^m(D_\rho)$. Vert : $\varepsilon_D^{ui}(D_\rho)$. Rouge : $\varepsilon_D^{ui}(D_u)$. Violet : $\varepsilon_D^c(D_\rho)$. Marron : $\varepsilon_D^c(D_u)$. Rose : $\varepsilon_D^c(D_v)$. Représentation : 1D en fonction de ℓ_\perp avec les valeurs positives en trait plein et négatives en trait discontinu.

les grandes échelles ou rester constante. Les termes en D_ρ (visible seulement pour CGL3 puisque $\nu_\rho = 0$ pour CGL1) et D_u ne montre pas de décroissance et la tendance en ℓ^{-2} environ de la décroissance de $\varepsilon_D^c(\mathbf{D}_v)$ et $\varepsilon_D^c(\mathbf{D}_{v_A})$ avait été remarquée par [FERRAND 2021] dans le cas incompressible. La pathologie de cette pente en -2 y avait été identifiée, et associée à une saturation mathématique de la fonction de corrélation calculée entre deux

points et due à une puissance de k trop importante dans l'espace de Fourier et similaire à celle relevée par [CHO et LAZARIAN 2009].

Dans l'Annexe A.2, nous proposons une démonstration mathématique de ce phénomène en fonction du type de la fonction de corrélation, incrémentale ou non, et de la tendance du spectre dans l'espace de Fourier. On y obtient dans le cas non incrémental, pour la corrélation de deux quantités indéfinies A et B , :

$$\langle A(\mathbf{x} + \boldsymbol{\ell}) \cdot B(\mathbf{x}) + A(\mathbf{x}) \cdot B(\mathbf{x} + \boldsymbol{\ell}) \rangle \propto \begin{cases} \ell^{-2} & \text{si } m \in]-\infty, -1[\\ \ell^{m-1} & \text{si } m \in]-1, 1[\\ 1 & \text{si } m \in]1, +\infty[\end{cases} \quad (11.9)$$

avec m , la pente du spectre unidimensionnel en représentation logarithmique telle que k^{-m} . Pour une fonction de corrélation incrémentale on obtient :

$$\langle (A(\mathbf{x} + \boldsymbol{\ell}) - A(\mathbf{x})) \cdot (B(\mathbf{x} + \boldsymbol{\ell}) - B(\mathbf{x})) \rangle \propto \begin{cases} 1 & \text{si } m \in]-\infty, 1[\\ \ell^{m-1} & \text{si } m \in]1, 3[\\ \ell^2 & \text{si } m \in]3, +\infty[\end{cases}. \quad (11.10)$$

Si l'on analyse les différentes contributions du terme de dissipation, on se rend compte que $\varepsilon_D^c(\mathbf{D}_v)$, $\varepsilon_D^c(D_\rho)$, $\varepsilon_D^m(\mathbf{D}_{v_A})$, $\varepsilon_D^{ui}(D_u)$ et ε_D^{ue} ont une forme assez proche d'une fonction de corrélation non incrémentale et $\varepsilon_D^m(D_\rho)$ et $\varepsilon_D^{ui}(D_\rho)$ sont plus proches d'une fonction incrémentale.

Pour une pente de spectre autour de k^8 ($m = -8$), une fonction de corrélation non incrémentale, va saturer en ℓ^{-2} , on retrouve ce comportement pour $\varepsilon_D^c(\mathbf{D}_v)$ et $\varepsilon_D^m(\mathbf{D}_{v_A})$ tandis qu'une fonction de corrélation incrémentale va saturer en ℓ^0 , comportement retrouvé pour $\varepsilon_D^m(D_\rho)$ et $\varepsilon_D^{ui}(D_\rho)$. On retrouve aussi le comportement du terme de forçage (fonction de corrélation non incrémentale), constant loin des échelles de forçage, puisqu'un Dirac à petit ℓ peut-être vu comme une pente en $m = +\infty$. Ces comportements plus mathématiques que physiques sont retrouvés pour toutes les simulations. Une étude plus poussée n'a pas été engagée.

On remarque tout de même les fortes variations des termes décroissant en ℓ^{-2} . Ces variations sont la cause de la bosse visible aux plus petites échelles, pour tous les taux ε_{NL} et ε calculer dans les simulations et que l'on avait remarqué dans la section 11.1. En effet, $\varepsilon_F - \partial_t \mathcal{R}$ reste constant dans cette zone alors que la bosse apparaît dans $\varepsilon_F - \partial_t \mathcal{R} + \varepsilon_D$. Cette bosse nous indique donc les échelles auxquelles l'erreur mathématique de l'hyperdissipation impacte systématiquement ε_{NL} et ses contributions.

Ce type d'erreur mathématique pourrait aussi impacter $\partial_t \mathcal{R}$, \mathcal{R} étant une fonction de corrélation en deux points.

11.3.3 Estimation de l'erreur sur le taux de cascade

Les fonctions de corrélations en deux points ne sont donc pas adaptées à l'étude de la physique des termes d'hyperdissipation et de ceux inclus dans $\partial_t \mathcal{R}$ comme a pu le faire remarquer [CHO et LAZARIAN 2009]². Par la suite, nous nous concentrerons seulement

2. La solution proposée par [CHO et LAZARIAN 2009] est d'augmenter le nombre de points servant au calcul de la fonction de corrélation. Une telle tâche s'annonce mathématiquement complexe et lourde dans

sur ε_{NL} et ses contributions, mais nous garderons en mémoire les influences potentielles de ces termes.

L'analyse des différentes contributions à la loi [von KARMAN et HOWARTH 1938; MONIN et JAGLOM 1971] (KHM) permet ainsi d'identifier les sources d'erreur numérique et mathématique menant au niveau de ζ . Ce dernier, de l'ordre des fluctuations de $\langle E_{tot} \rangle$, reflèterait la signature de la quasi-stationnarité statistique des simulations. Aux échelles plus faibles, la pathologie mathématique du calcul de fonction de corrélation dépendant de l'hyperdissipation ainsi que sa signature³ dans ε_{NL} semblent impacter ζ . Ce dernier correspond donc à l'incertitude systématique de notre estimation du taux de cascade, incertitude provenant des données initiales, de leur adéquation avec les hypothèses de Kolmogorov et du schéma numérique utilisé pour le calcul des termes des lois exactes. Les contributions qui apparaîtront inférieures à ζ par la suite, seront dans la zone d'incertitude du taux de cascade total, leur analyse devra donc être effectuée avec précautions.

Un autre point reste à éclaircir dans cette étude sur les lois du type KHM : la différence entre la loi obtenue en utilisant \mathcal{R} et celle en utilisant une fonction incrémentale \mathcal{S} . Celle associée à \mathcal{R} est :

$$\mathcal{S} = \frac{1}{4} \langle \delta(\rho\mathbf{v}) \cdot \delta\mathbf{v} + \delta(\rho\mathbf{v}_A) \cdot \delta\mathbf{v}_A + 2\delta\rho\delta u \rangle \quad (11.11)$$

On a alors la relation $\mathcal{S} = \langle E_{tot} \rangle - \mathcal{R}$ et sachant que $\mathcal{R}(\ell = 0) = \langle E_{tot} \rangle$, il est facile de passer de l'expression (11.1) à la loi :

$$\partial_t \mathcal{S} = -\mathcal{E}_{NL} + \mathcal{E}_D + \mathcal{E}_F \quad (11.12)$$

avec : $\mathcal{E}_{NL} = \varepsilon_{NL}(\ell = 0) - \varepsilon_{NL}$, $\mathcal{E}_D = \varepsilon_D(\ell = 0) - \varepsilon_D$ et $\mathcal{E}_F = \varepsilon_F(\ell = 0) - \varepsilon_F$. On notera que l'équation d'énergie totale s'écrit sous la forme $\partial_t E_{tot} + \nabla \cdot \mathbf{F}_{tot} = S$ avec S les termes sources (dissipation et forçage) et \mathbf{F}_{tot} , le total de flux. Puisque $\langle \nabla \cdot \mathbf{F}_{tot} \rangle = \nabla_\ell \cdot \langle \mathbf{F}_{tot} \rangle = -\langle \nabla' \cdot \mathbf{F}_{tot} \rangle = 0$, alors $\mathcal{E}_{NL} = -\varepsilon_{NL}$.

En appliquant cette transformation sur le détail de la loi KHM (fig. FIGURE 11.4), on obtient les résultats de la FIGURE ???. On y remarque que le comportement des termes de forçage et dissipations se sont inversés : \mathcal{E}_F augmente avec une pente de facteur 2 et \mathcal{E}_D reste constant avant de changer de signe vers les grandes échelles. Ces comportements sont cohérents avec ceux démontrés dans les Annexes A.1 et A.2 (voir équations (11.9) et (11.10)). La différence $\mathcal{Z} = \mathcal{E}_{ref} - \mathcal{E}_{NL} = (-\partial_t \mathcal{S} + \mathcal{E}_D + \mathcal{E}_F) - \mathcal{E}_{NL}$ est supérieure à ζ . L'utilisation d'une fonction de corrélation incrémentale dans une étude de données de simulations amplifie l'erreur numérique et mathématique associée aux termes temporels, de dissipation et de forçage en y ajoutant l'erreur sur l'équation de $\langle E_{tot} \rangle$.

le cadre de la théorie des lois exactes. Une autre possibilité est d'estimer précisément pour chaque contribution la puissance m du spectre influant sur le résultat de chaque contribution au taux de dissipation, puis de calculer la tendance attendue, en ℓ^{m-1} . [FERRAND 2021] a comparé dans le cas incompressible quelques approches pour effectuer une estimation de ce type, mais ces approches reposent fortement sur la contrainte incompressible..

3. Les corrélations impliquées dans ε_D étant d'ordre 2 et celles présentes dans les termes dominant de ε_{NL} étant d'ordre 3, le reflet dans ε_{NL} de l'erreur mathématique pourrait, à priori, ne pas compenser exactement l'erreur sur ε_D .

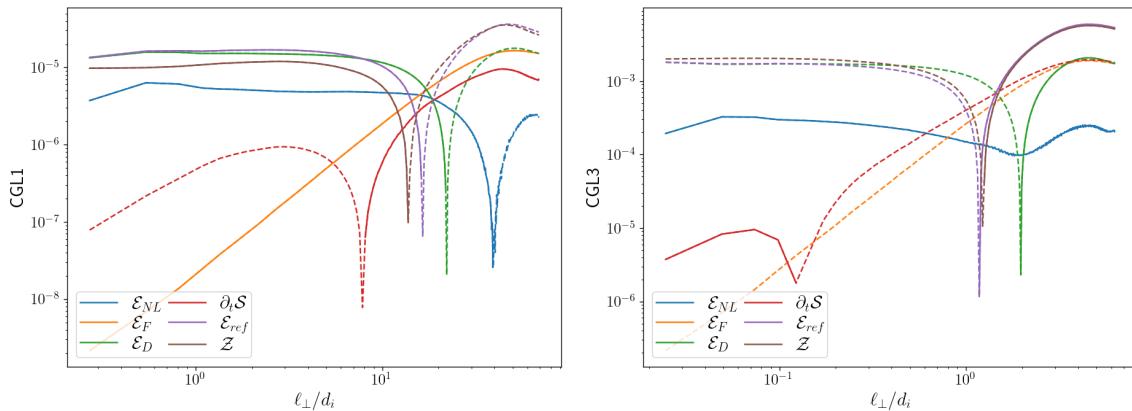


FIGURE 11.6 – Détail de la loi (11.11) pour CGL1 (gauche) et CGL3 (droite). Bleu : \mathcal{E}_{NL} . Orange : \mathcal{E}_F . Vert : \mathcal{E}_D . Rouge : $\partial_t \mathcal{S}$. Violet : $\mathcal{E}_{ref} = -\partial_t \mathcal{S} + \mathcal{E}_D + \mathcal{E}_F$. Marron : $Z = \mathcal{E}_{ref} - \mathcal{E}_{NL}$. Représentation : 1D en fonction de ℓ_\perp avec les valeurs positives en trait plein et négative en trait discontinu.

11.4 Synthèse des tests de validation et sources d'erreurs

Ces études sont illustrées par les résultats obtenus pour les simulations CGL1 et CGL3.

Comparaison IMHD-Hall avec les résultats de [FERRAND 2021] :

- le comportement des lois IMHD-Hall est retrouvé,
- effets de nos choix de schéma numérique.

Effet du forçage sur la zone inertielle visualisée avec IMHD-Hall :

- visualisation des oscillations induites par l'injection d'énergie dans le taux de cascade : extension/réduction de la zone inertielle sur environ une demi décade,
- visualisation de l'impact de la stationnarité statistique : ammortissement des oscillations et convergence de la zone inertielle.

Analyse de la loi KHM :

- paradoxe sur l'hypothèse de stationnarité statistique dans les simulations
- pathologie mathématique apportée par l'hyperdissipation
- incertitude provenant de l'utilisation de fonctions incrémentales
- estimation de l'erreur numérique et mathématique sur la loi exacte totale associée au modèle simulé, noté ζ

Ces résultats valident le schéma numérique, son implémentation, et questionnent les comportements non-physiques pouvant impacter les résultats.

Les Annexes contiennent des études complémentaires pour ce chapitre.

PARTIE III : CHAPITRE 12

L'EFFET DE L'ANISOTROPIE DE PRESSION DANS DES SIMULATIONS HALL-CGL

Sommaire

12.1 Le modèle CGL simulé	141
12.2 Etude de la loi Hall-CGL dans les simulations CGL1, CGL2, CGL3	143
12.2.1 Loi globale et contribution de l'anisotropie de pression	143
12.2.2 Détail de la contribution de l'anisotropie de pression	146
12.2.3 Comportement des simulations	146
12.3 De nouvelles simulations	149
12.3.1 Moins d'énergie que CGL3 : CGL3B	149
12.3.2 Une gamme d'échelle intermédiaire : CGL5	150
12.3.3 Une initialisation anisotrope de a_{pi} : CGL6	151
12.4 Synthèse des résultats de l'étude préliminaire des simulations CGL-Hall-∇P_e	152

Dans ce chapitre, nous attaquons le cœur de l'étude numérique dont l'objectif est de répondre à question : quel impact a la correction dépendant de l'anisotropie de pression sur le taux de cascade ? Les résultats montrés ici sont récents, préliminaires et leur interprétation est encore en cours de discussion.

12.1 Le modèle CGL simulé

Dans un premier lot de simulations, les ions sont décrits avec la fermeture CGL et les électrons avec une fermeture isotherme qui correspond en fait à notre fermeture isotherme-isentrope, la contribution des flux de chaleur est supposée nulle. La pression électronique est définie telle que $p_e = \rho$. Le modèle général CGL-Hall- ∇P_e simulé dans le code versatile, est donné dans la section II.9.2. Regardons à quoi il ressemble si l'on y injecte les fermetures et que l'on y applique la normalisation indiquée dans la section 10.1, et utilisée dans l'implémentation des équations. Il est formé des équations :

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (12.1)$$

$$\partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} - \frac{1}{\rho} \mathbf{j} \times \mathbf{B} + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}} = 0, \quad (12.2)$$

$$\partial_t \mathbf{B} - \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + d_i \nabla \times \left(\frac{1}{\rho} \mathbf{j} \times \mathbf{B} \right) = 0, \quad (12.3)$$

$$\partial_t p_{\perp i} + \nabla \cdot (p_{\perp i} \mathbf{v}) + p_{\perp i} \nabla \cdot \mathbf{v} - p_{\perp i} \mathbf{b} \mathbf{b} : \nabla \mathbf{v} = 0, \quad (12.4)$$

$$\partial_t p_{\parallel i} + \nabla \cdot (p_{\parallel i} \mathbf{v}) + 2p_{\parallel i} \mathbf{b} \mathbf{b} : \nabla \mathbf{v} = 0, \quad (12.5)$$

en notant $\bar{\mathbf{P}} = \frac{\beta_0}{2} (\bar{\mathbf{P}_i} + \rho \bar{\mathbf{I}})$ avec $\bar{\mathbf{P}_i} = p_{\perp i} \bar{\mathbf{I}} + (p_{\parallel i} - p_{\perp i}) \mathbf{b} \mathbf{b}$, le tenseur gyrotrope de pression ionique, $\mathbf{b} = \frac{\mathbf{B}}{|\mathbf{B}|}$, la direction du champ magnétique et $\frac{\beta_0}{2}$ constante provenant de la normalisation des équations.

L'hypothèse isotherme vient y annuler la contribution ∇P_e présente dans l'équation d'induction (9.42) puisque :

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\rho} \nabla (p_e) \right) = \nabla \times \left(\frac{1}{\rho} \nabla \rho \right) = \nabla \times \nabla (\ln \rho) = 0.$$

On s'attend donc à ce que la contribution de ∇P_e permettant de compenser l'effet de ce terme dans l'équation d'énergie totale, s'annule aussi. L'énergie interne étant $\rho u = \frac{\beta_0}{2} (p_{\perp i} + \frac{1}{2} p_{\parallel i} + \rho \ln \rho)$, son équation peut en effet s'écrire :

$$\partial_t (\rho u) + \nabla \cdot (\rho u \mathbf{v}) + \bar{\mathbf{P}} : \nabla \mathbf{v} = 0. \quad (12.6)$$

On reconnaît dans ces équations le modèle ayant donné la loi exacte (7.20) ainsi que le terme Hall dans l'équation (12.3) qui indique qu'il faut prendre en compte la correction Hall donnée par (9.3). Le taux de transfert non linéaire ε_{NL} obtenu, qui est valable aussi en dehors de la zone inertie sera notée ε_{cgl} , on le comparera à ε_{iso} calculé avec la partie isotrope du tenseur de pression¹. On s'attend pour ces quantités à observer une zone inertie élargie de la zone MHD à la zone Hall. La différence $\varepsilon_{\bar{\Pi}} = \varepsilon_{cgl} - \varepsilon_{iso}$ correspond à la contribution de l'anisotropie de pression donnée par l'équation (7.21). Elle sera décomposée en quatre termes :

- un terme flux (orange) : $\nabla \ell \cdot \mathcal{F}_A = \frac{1}{4} \nabla \ell \cdot \left\langle \delta \rho \delta \left(\frac{\bar{\Pi}}{\rho} \right) \cdot \delta \mathbf{v} \right\rangle$,
- le terme source survivant dans la limite incompressible (vert) :

$$\mathcal{S}_{A1} = \frac{1}{2} \left\langle \delta \left(\frac{\bar{\Pi}}{\rho} \right) : (\rho \nabla' \mathbf{v}' - \rho' \nabla \mathbf{v}) \right\rangle,$$

- le terme source dépendant explicitement des fluctuations de pression (rouge) :

$$\mathcal{S}_{A2} = \frac{1}{4} \left\langle \delta \left(\frac{\bar{\Pi}}{\rho} \right) : \left(\rho \mathbf{v} \frac{\nabla' \rho'}{\rho'} - \rho' \mathbf{v}' \frac{\nabla \rho}{\rho} \right) \right\rangle,$$

- le terme source dépendant explicitement des fluctuations de densité (violet) :

$$\mathcal{S}_{A3} = -\frac{1}{4} \left\langle \delta \rho \left(\mathbf{v} \cdot \left(\frac{\bar{\Pi}}{\rho} \right) \cdot \frac{\nabla' \rho'}{\rho'} - \mathbf{v}' \cdot \left(\frac{\bar{\Pi}'}{\rho'} \right) \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} \right) \right\rangle,$$

avec $\bar{\Pi} = \frac{\beta_0}{2} (p_{\parallel i} - p_{\perp i}) (\mathbf{b} \mathbf{b} - \frac{1}{3} \bar{\mathbf{I}})$. Cette contribution anisotrope est entièrement portée par les ions.

1. Le comportement de ε_{iso} est connu, il a été étudié par ANDRÉS, SAHRAOUI, GALTIER, HADID, DMITRUK *et al.* 2018 dans le cas isotherme. Comme nous utilisons une nouvelle formulation de la loi exacte, une vérification des prédictions est détaillée dans l'Annexe B.2.

12.2 Etude de la loi Hall-CGL dans les simulations CGL1, CGL2, CGL3

Tout d'abord, nous avons entrepris l'analyse des simulations CGL1, CGL2 et CGL3. Ce sont les simulations CGL-Hall- ∇P_e analysées dans l'article [FERRAND, SAHRAOUI, LAVEDER *et al.* 2021], leur paramètre sont résumés dans la TABLE 9.1 et la TABLE 9.2. Ces trois simulations sont initialisées telles que $a_{pi} = 1$.

12.2.1 Loi globale et contribution de l'anisotropie de pression

La FIGURE 12.1 (CGL1 et CGL2) et la FIGURE 12.2 (CGL3) contiennent des triptyques, associés à chaque simulation, permettant de comparer les taux de cascade ε_{iso} et ε_{cgl} . La différence des deux, $\varepsilon_{\overline{\Pi}}$, est représentée en 2D en fonction de ℓ_{perp} et ℓ_{\parallel} , et est projetée dans les représentations 1D sous la forme des courbes vertes. Sur les représentations 1D, sont ajoutés ε_{cgl} en bleu, ε_{iso} en orange et le niveau d'incertitude ζ (gris) qui reste assez éloigné des autres quantités.

A partir de ces figures, on peut définir une zone inertielle où ε_{cgl} sera quasi-constant pour chaque simulation. Pour CGL1, elle s'étend entre $\ell_{\perp} \in [1; 20]$ et $\ell_{\parallel} \in [10; 60]$. Pour CGL2, elle s'étend entre $\ell_{\perp} \in [1; 6]$ et $\ell_{\parallel} \in [2; 40]$. Et pour CGL3, elle s'étend entre $\ell_{\perp} \in [0.1; 1]$ et $\ell_{\parallel} \in [0.2; 2]$. Les variations que l'on pourra observer en dehors de ces domaines seront sous influence dissipative ou dans la zone de forçage. On remarque que la zone inertielle de CGL1 et CGL2 couvrent les échelles MHD et celle de CGL3, les échelles Hall. Dans ces zones, la contribution de $\varepsilon_{\overline{\Pi}}$ au taux de cascade totale est en valeurs absolues d'environ 10 % de ε_{iso} pour CGL1 et CGL3, entre 2 % 20 % pour CGL2 (on prendra la valeur médiane : 10 %). Ce niveau reste donc constant.

Cependant, une différence de taille apparaît autour des grandes échelles de CGL3 : $\varepsilon_{\overline{\Pi}}$ augmente autour de 10 fois la valeur de ε_{iso} . En pratique, on ne regarde pas ce qu'il se passe à ces échelles car elles sont impactées par l'injection d'énergie dans la cascade qui a tendance à faire fortement fluctuer les résultats provenant des lois calculées jusqu'à présents dans la littérature. Donc a priori, cette augmentation n'aurait pas un sens physique généralisable et serait plus spécifique à l'outil numérique. Pourtant, contrairement à l'impact du forçage observé dans la section 11.2, il n'est pas oscillant et il provient spécifiquement de la contribution anisotrope. On s'est posé la question de son origine : serait-ce une signature physique ?

Une autre différence est visible : comme le montre la représentation 2D de CGL3, la contribution anisotrope est positive quasiment partout à l'exception d'une «bulle» accrochée à la direction parallèle. Une échelle caractéristique semble impliquer un changement de signe de $\varepsilon_{\overline{\Pi}}$ dans la zone inertielle MHD ($\ell > d_i$). Aux plus petites échelles, il est positif et puis devient négatif. L'emplacement de ce changement de signe est situé autour de $\ell_{\perp}^s \sim 2d_i$ dans la direction perpendiculaire. Dans la direction parallèle, le changement de signe a lieu en $\ell_{\parallel}^s \sim 20d_i$ pour CGL1, $\ell_{\parallel}^s \sim 80d_i$ pour CGL2. Trois éléments pourraient potentiellement expliquer ces observations :

- En présence d'un champ magnétique, le développement de la cascade est anisotrope comme on peut facilement le visualiser sur les cartes de l'article [MANZINI *et al.* 2022]. Cela pourrait venir expliquer l'observation $\ell_{\perp}^s < \ell_{\parallel}^s$.
- L'angle d'injection θ_i étant inférieur à 45° , l'énergie n'est pas injectée isotropiquement dans la simulation. Il diffère d'ailleurs entre CGL1 (7°) et CGL2-CGL3 (15°). Si le premier élément est validé, cela pourrait impliquer qu'un angle d'injection plus

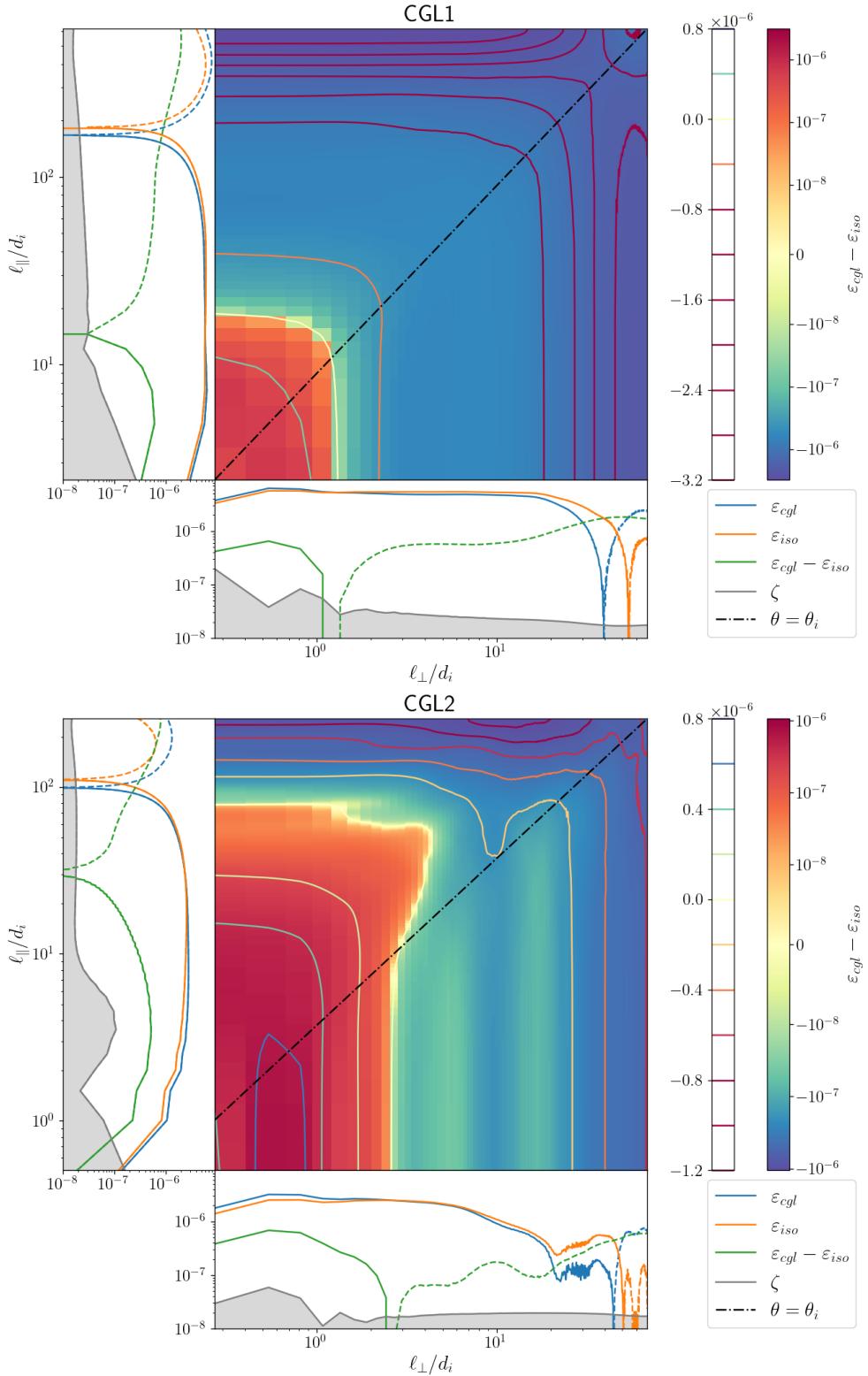


FIGURE 12.1 – Simu : CGL1 et CGL2. Représentation 2D en fonction de ℓ_{\perp} et ℓ_{\parallel} de $\varepsilon_{cgl} - \varepsilon_{iso}$. Entouré des représentations 1D en fonction de ℓ_{\perp} (bas) et ℓ_{\parallel} (gauche) de ε_{iso} (orange), ε_{cgl} (bleu), $\varepsilon_{cgl} - \varepsilon_{iso}$ (vert) et ζ (gris).

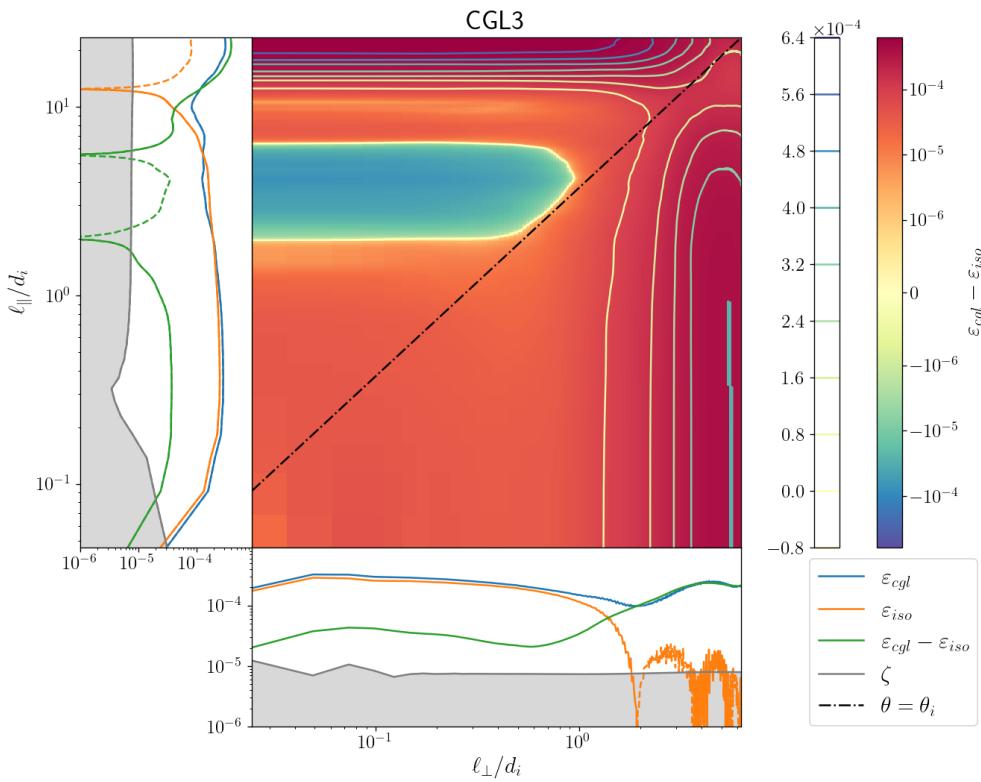


FIGURE 12.2 – Simu : CGL3. Représentation 2D en fonction de ℓ_{perp} et ℓ_{\parallel} de $\varepsilon_{\text{cgl}} - \varepsilon_{\text{iso}}$. Entouré des représentations 1D en fonction de ℓ_{perp} (bas) et ℓ_{\parallel} (gauche) de ε_{iso} (orange), ε_{cgl} (bleu), $\varepsilon_{\text{cgl}} - \varepsilon_{\text{iso}}$ (vert) et ζ (gris).

parallèle pourrait venir contrer ou amplifier l'anisotropie de $\varepsilon_{\overline{\Pi}}$.

Le comportement dans cette direction semblant plus complexe que celui de la direction perpendiculaire, on s'est focalisé sur la compréhension de cette dernière. De plus, ce changement de signe a lieu près de la zone Hall, on s'est donc demandé si le comportement de CGL2 et celui de CGL3 ne se complèterait pas : l'augmentation présente dans CGL3 serait-elle le début d'une bosse qui ensuite se répercute aux échelles MHD où sa diminution irait jusqu'à engendrer un croisement de ε_{cgl} et ε_{iso} et un changement de signe de $\varepsilon_{\overline{\Pi}}$? Cette première question est mise en doute par le comportement de CGL1 et CGL2 : une augmentation similaire semble apparaître dans $\varepsilon_{\overline{\Pi}}$ mais avec un signe opposé et une intensité moindre n'influant que très peu sur ε_{cgl} . Si c'est bien le même effet que pour CGL3, il serait alors accroché à l'échelle d'injection de l'énergie.

Plus de questions que de réponse n'émergent donc de ces simulations, elles ont emmené l'analyse dans diverses directions nécessitant de nouvelles simulations :

- est-ce que le niveau de la zone inertielle changera si l'on initialise la simulation de manière anisotropique?
- est-ce que l'augmentation à grande échelle dans CGL3 est accrochée aux échelles d'injection?
- est-ce que le changement de signe de $\varepsilon_{\overline{\Pi}}$ est lié à la proximité de la frontière entre les zones MHD et Hall?
- ces différences sont-elles des signatures de phénomène physique? Sont-elles liées?

Avant de se lancer dans de nouvelles simulations d'autres éléments peuvent être étudiés,

ils font l'objet des sections suivantes.

12.2.2 Détail de la contribution de l'anisotropie de pression

Sur la FIGURE 12.3 et la FIGURE ??, est indiqué le détail de $\varepsilon_{\overline{\Pi}}$ (bleu). On remarque qu'il est dominé par \mathcal{S}_{A1} . $\nabla_\ell \cdot \mathcal{F}_A$ et \mathcal{S}_{A2} sont du même ordre de grandeurs et fluctuent autour de ζ . Ils peuvent légèrement influencer $\varepsilon_{\overline{\Pi}}$ lorsque \mathcal{S}_{A1} s'affaiblit comme on peut le voir sur les résultats de CGL1 et CGL2. \mathcal{S}_{A3} est généralement négligeable. La contribution de l'anisotropie de pression et son comportement est donc principalement portée par le terme source qui survit dans la limite incompressible. Cela concorde avec la quasi-incompressibilité des simulations : l'écart-type de la densité est entre 2 % (CGL1 et CGL2) et 8 % (CGL3) de la moyenne. \mathcal{S}_{A1} doit donc se comporter telle la limite quasi-incompressible (8.3) obtenue dans le Chapitre 8 :

$$\mathcal{S}_{A1} \simeq \frac{\beta_0}{4} \left\langle \delta \left((p_{\parallel i} - p_{\perp i}) \left(\mathbf{b}\mathbf{b} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \right) \right) : \delta (\nabla \mathbf{v}) \right\rangle \quad (12.7)$$

Comprendre le comportement de ce terme est complexe puisqu'il dépend des fluctuations de la direction du champ magnétique \mathbf{b} pondérées par l'anisotropie de la pression et distribué sur les variations du gradient de la vitesse. $p_{\parallel i} - p_{\perp i}$ portant l'influence de l'anisotropie de pression de ce terme sur la loi exacte et pouvant s'écrire $1 - a_{pi}$, on s'est intéressé au comportement statistique de a_{pi} . On remarque que seule la direction du champ magnétique influe sur ce terme et non son amplitude.

Ces résultats sont retrouvés dans les simulations qui seront étudiées par la suite. La contribution de pression anisotrope ne sera donc pas détaillée dans leur étude.

12.2.3 Comportement des simulations

La TABLE 12.1 résume la statistique (moyenne \pm écart-type) des valeurs de la densité, l'anisotropie de pression ionique ($a_{pi} = \frac{p_{\perp i}}{p_{\parallel i}}$) et paramètre $\beta_{\parallel} = \frac{p_{\parallel i}}{p_m}$ pour l'ensemble des simulations. Sur la figure FIGURE 12.4, est tracée la dispersion en fonction de a_{pi} et β_{\parallel} , des simulations. Ces histogrammes 2D prennent la forme de trois courbes de niveau formant des ovales concentriques, le plus large contient les couples $\{\beta_{\parallel}; a_{pi}\}$ existant dans la simulation, l'intermédiaire et le plus petit sont associés à des pourcentages du maximum de l'histogramme : 50 % et 99 %. Sur cette figure, les critères d'instabilités miroir et firehose ainsi que l'horizontale $a_p = 1$ sont aussi affichés. Le critère firehose est le critère calculé dans le chapitre 7, sa position sera affectée par l'effet Hall. Ce critère miroir prend en compte la présence de la pression électronique isotherme, $p_e = \rho$, et est paramétrisé par l'équation (9.50). Les simulations que l'on étudie ici sont données en gris (CGL1), bleu (CGL2) et orange (CGL3) et correspondent aux première, deuxième et quatrièmes lignes du tableau. On remarque que les trois simulations se sont écartées de leurs valeurs d'initialisation : $a_{piI} = 1$ et $\beta_{\parallel I} = 1$. \mathcal{S}_{A1} ne dépendant pas de p_m , on ne s'est pas attardé sur $\beta_{\parallel} = 1$. Les distributions de CGL1 et de CGL2 sont quasiment identiques et très proches des valeurs initiales. CGL3 s'est quant à lui bien décaler et montre une moyenne $a_{pi0} \sim 2$, sa distribution est aussi beaucoup plus large avec quelques points proches du critère miroir. L'augmentation de la pression a lieu dès les premiers temps de la simulation puis reste stable. La raison d'un tel comportement est encore sujette à question : notre conjecture est l'énergie présente dans CGL3, cette dernière est en effet forcée avec des ondes plus intenses et tel que l'énergie dans le système soit trois fois supérieure à celle dans CGL1-2

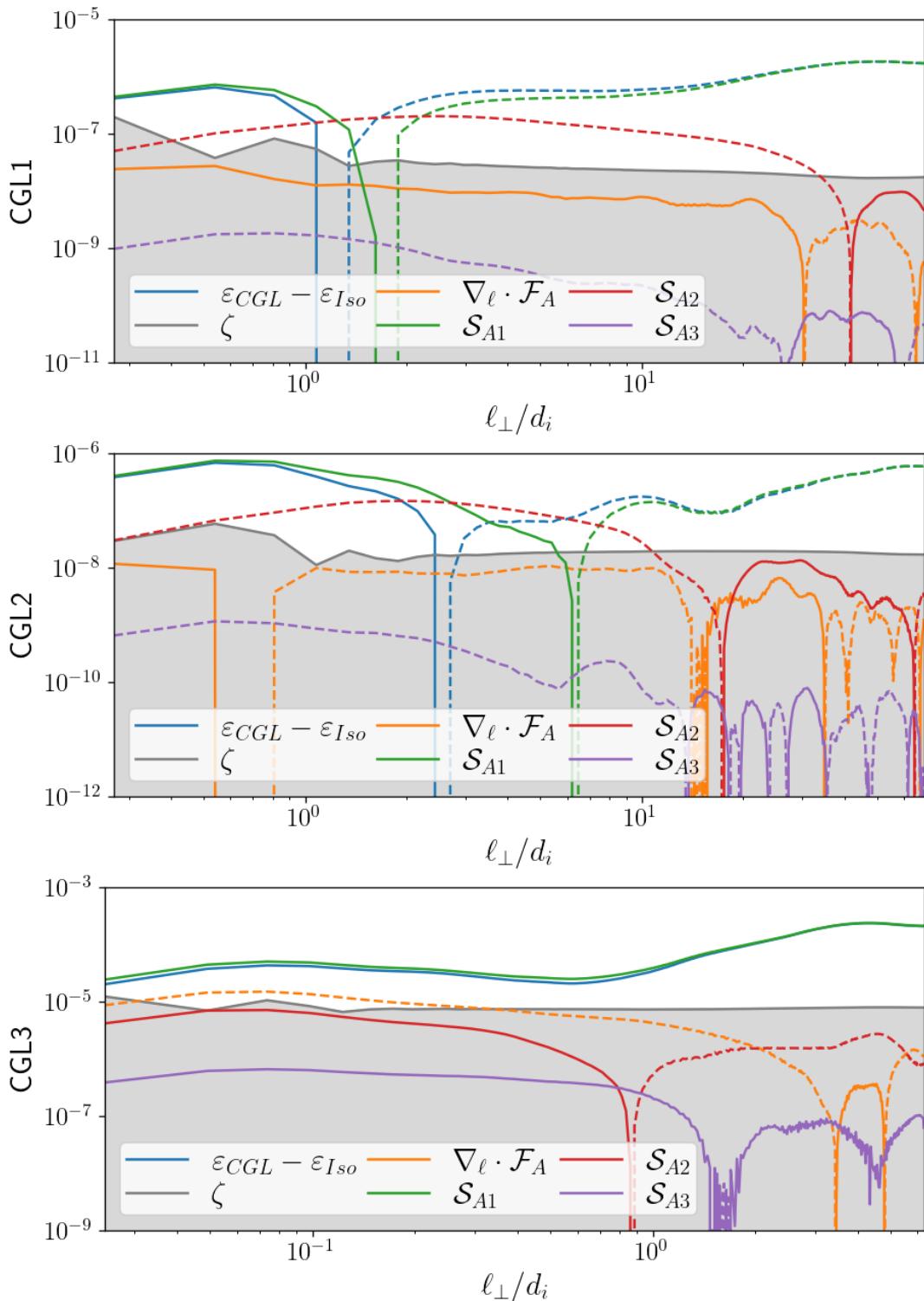


FIGURE 12.3 – Simu : CGL1 (haut), CGL3 (milieu) et CGL2 (bas). Représentation 1D en fonction de ℓ_{\perp} du détail de $\varepsilon_{\overline{\Pi}}$ (bleu). Orange : $\nabla_{\ell} \cdot \mathcal{F}_A$. Vert : S_{A1} . Rouge : S_{A2} . Violet : S_{A3} . Gris : niveau d'erreur ζ . Les termes présents dans la zone grise délimitée par ζ sont supposés négligeables.

Name	ρ	a_{pi}	β_{\parallel}
CGL1	1 ± 0.02	1.1 ± 0.1	0.9 ± 0.1
CGL2	1 ± 0.02	1.1 ± 0.1	0.9 ± 0.1
CGL3B	1 ± 0.04	1.3 ± 0.3	0.8 ± 0.2
CGL3	1 ± 0.08	2.2 ± 0.5	0.6 ± 0.3
CGL5	1 ± 0.02	2.1 ± 0.1	0.6 ± 0.1
CGL6	1 ± 0.02	3.97 ± 0.5	1.01 ± 0.2

TABLE 12.1 – Moyenne et écart-type de la densité, du taux d'anisotropie ionique $a_{pi} = \frac{p_{\perp i}}{p_{\parallel i}}$ et du paramètre $\beta_{\parallel} = \frac{p_{\parallel i}}{p_m}$ pour chaque simulation, à la date t .

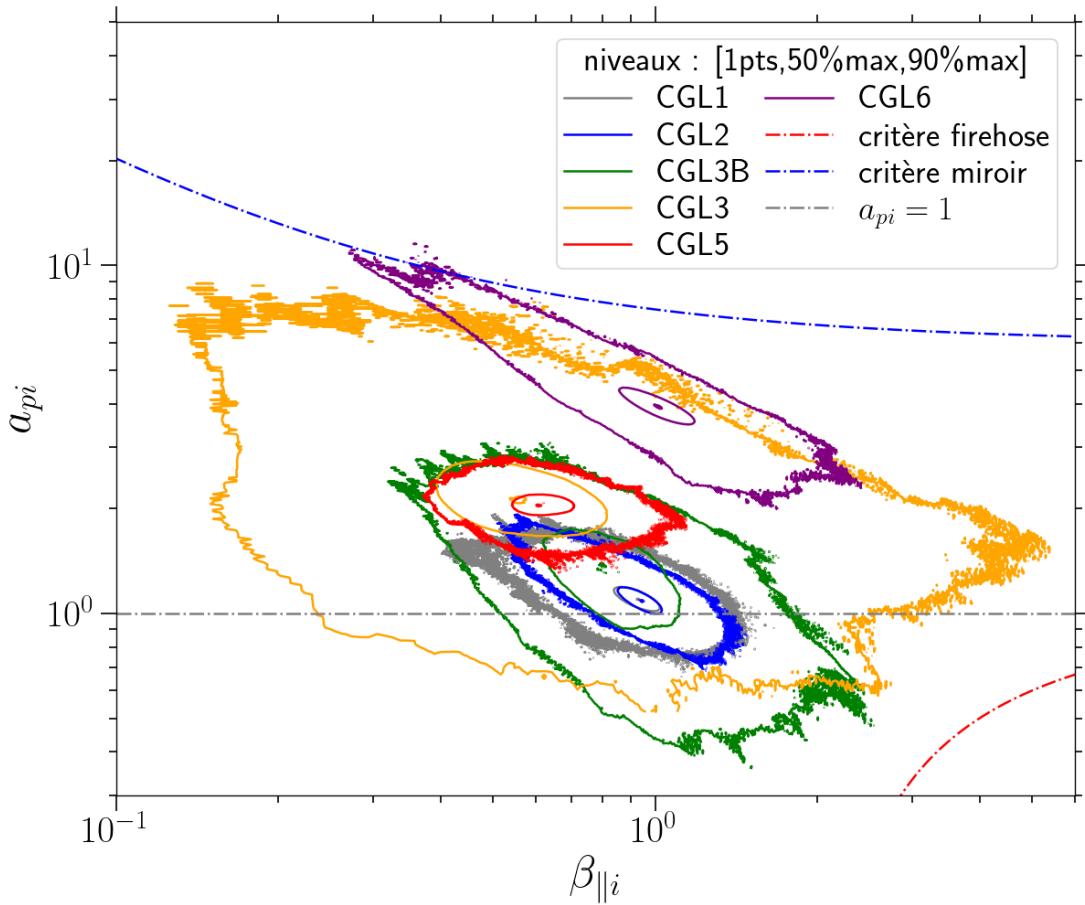


FIGURE 12.4 – Diagramme $a_{pi} - \beta_{\parallel}$ contenant l'histogramme 2D des simulations sous la forme de courbes de niveau centrées sur le couple moyen. Le critère miroir est paramétrisé par l'équation (9.50) qui prend en compte les électrons isothermes. Le critère firehose est le critère CGL calculé dans le Chapitre II.7.

(voir resp. A_f et E_{sup}). Entre les points proches du critère miroir et l'augmentation de la moyenne et de l'écart-type de a_{pi} beaucoup d'éléments pourrait être à l'origine de la différence de comportement de la contribution anisotrope. Ces résultats motivent d'autant

plus l'obtention de nouvelles simulations.

12.3 De nouvelles simulations

Trois nouvelles simulations ont été utilisées. CGL3B est un ancien test effectué lors du lancement de CGL3. CGL5 et CGL6 ont été conçues et lancées pour répondre à certaines de nos questions. Comme indiqué dans le Chapitre 10, obtenir des résultats de simulations valables pour une étude de turbulence prend du temps, c'est-à-dire plusieurs mois en comptant l'ajustement des paramètres d'hyperdissipation et, sachant qu'à chaque augmentation de la résolution, le temps de calcul était au moins multiplié par huit : donc quand il fallait une semaine de calcul pour faire converger le spectre associé à une résolution $258^2 \times 512$, on passait à un à deux mois pour $512^2 \times 1024$. Par conséquent, les résultats présentés, ici sont récents et leur interprétation est encore en cours.

12.3.1 Moins d'énergie que CGL3 : CGL3B

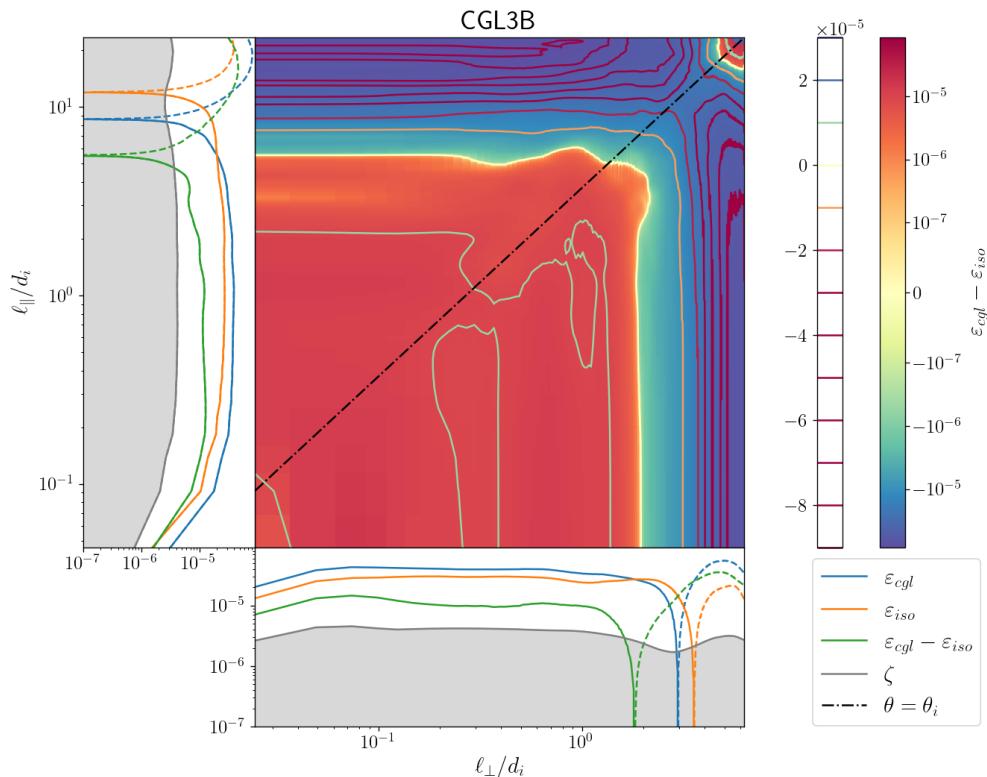


FIGURE 12.5 – Simu : CGL3B. Représentation 2D en fonction de ℓ_{perp} et ℓ_{\parallel} de $\varepsilon_{\text{cgl}} - \varepsilon_{\text{iso}}$. Entouré des représentations 1D en fonction de ℓ_{perp} (bas) et ℓ_{\parallel} (gauche) de ε_{iso} (orange), ε_{cgl} (bleu), $\varepsilon_{\text{cgl}} - \varepsilon_{\text{iso}}$ (vert) et ζ (gris).

Tout d'abord, CGL3B est une version moins énergétique de CGL3. La gamme d'échelle est donc la même, seul le forçage et par conséquent la dissipation sont affaiblis. Elle est, elle aussi, initialisée telles que $a_{pi} = 1$. Sur le diagramme de la FIGURE 12.4, elle est indiquée en vert : sa moyenne, $\langle a_{pi} \rangle \sim 1.5$, est entre celle de CGL2 et CGL3, et sa distribution inclue celle de CGL2, la distribution de CGL3 est principalement dans sa queue. On

s'attend donc à voir les différences les plus importantes entre les résultats de l'étude des lois exactes de CGL2 et de CGL3 s'atténuer si a_{pi} a de l'importance dans l'expression de la correction anisotrope. Le triptyque fait l'objet de la FIGURE 12.5.

A première vue, en regardant la représentation 2D, on sait que l'on a un comportement similaire à CGL2. le croisement entre ε_{cgl} et ε_{iso} dû au changement de signe de $\varepsilon_{\bar{\Pi}}$ est toujours présent dans la zone MHD mais comme pour CGL3, cette zone est aussi la zone d'injection. Dans cette zone, on remarque aussi une augmentation de la contribution venant dominer ε_{iso} . Si ces deux éléments ne sont pas des artefacts dus à l'oscillation du forçage, cela signifierait que le changement de signe a lieu cette fois avant l'augmentation et cela tend à indiquer que l'augmentation présente dans CGL3 est intrinsèque à la zone d'injection.

La zone inertie est située entre $\ell_{\perp} \in [0.1; 2]$ et $\ell_{\parallel} \in [0.2; 4]$. Contrairement à CGL1-2 et CGL3, $\varepsilon_{\bar{\Pi}}$ contribue à 30 % de ε_{iso} . On a donc un facteur 3 par rapport aux 10 % relevées précédemment. Ce résultat, significatif, indique que l'anisotropie de pression semble affecter la zone inertie mais interpelle aussi car pour une simulation que tout semble placer entre CGL2 et CGL3, l'effet de l'anisotropie de pression sur la zone inertie en est éloigné. La source d'un tel phénomène est encore en cours de discussion.

12.3.2 Une gamme d'échelle intermédiaire : CGL5

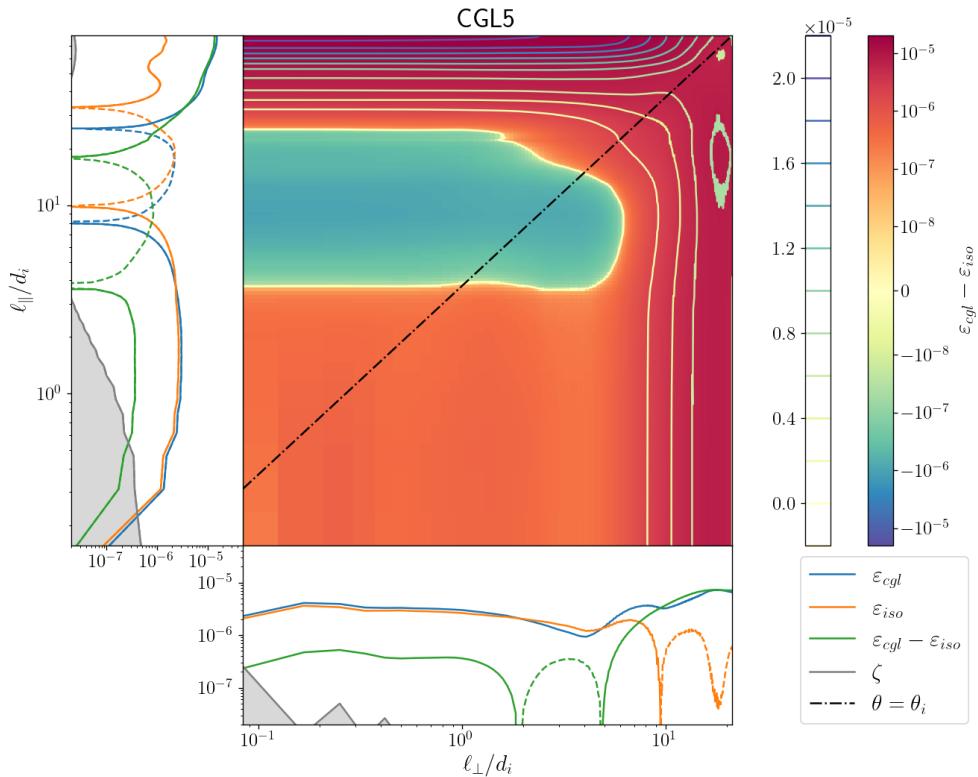


FIGURE 12.6 – Simu : CGL5. Représentation 2D en fonction de ℓ_{perp} et ℓ_{\parallel} de $\varepsilon_{cgl} - \varepsilon_{iso}$. Entouré des représentations 1D en fonction de ℓ_{perp} (bas) et ℓ_{\parallel} (gauche) de ε_{iso} (orange), ε_{cgl} (bleu), $\varepsilon_{cgl} - \varepsilon_{iso}$ (vert) et ζ (gris).

La gamme d'échelles accessible via CGL5 est située entre celles de CGL2 et de CGL3 afin de couvrir la transition entre la zone MHD et la zone Hall tout en gardant éloigner

les échelles impactées par l'injection d'énergie. L'écart-type de sa distribution est aussi de l'ordre de celui de CGL2, tout comme son étalement dans le diagramme de la FIGURE 12.4 mais sa position centrale y est plus proche de celle de CGL3. Le comportement observé pourrait donc être en faveur de la conjecture d'un impact de la moyenne de a_{pi} ou de celle d'un impact des fluctuations sur la contribution du taux de cascade dépendant de l'anisotropie de pression.

Sur le triptyque obtenu pour CGL5 (FIGURE 12.6), on observe un comportement similaire à celui de CGL3. Dans la zone inertie, $\ell_\perp \in [0.3; 5]^2$, la contribution de $\varepsilon_{\bar{\Pi}}$ est de l'ordre de 10 % de ε_{iso} . Ces résultats confirment que le comportement de CGL3 n'est pas un cas particulier et se placent en faveur de la moyenne de a_{pi} plutôt que ses fluctuations. De plus, l'augmentation à grande échelle visible pour CGL3 s'est déportée avec le forçage, confirmant qu'elle est intrinsèque à la zone d'injection de l'énergie dans la cascade.

12.3.3 Une initialisation anisotrope de a_{pi} : CGL6

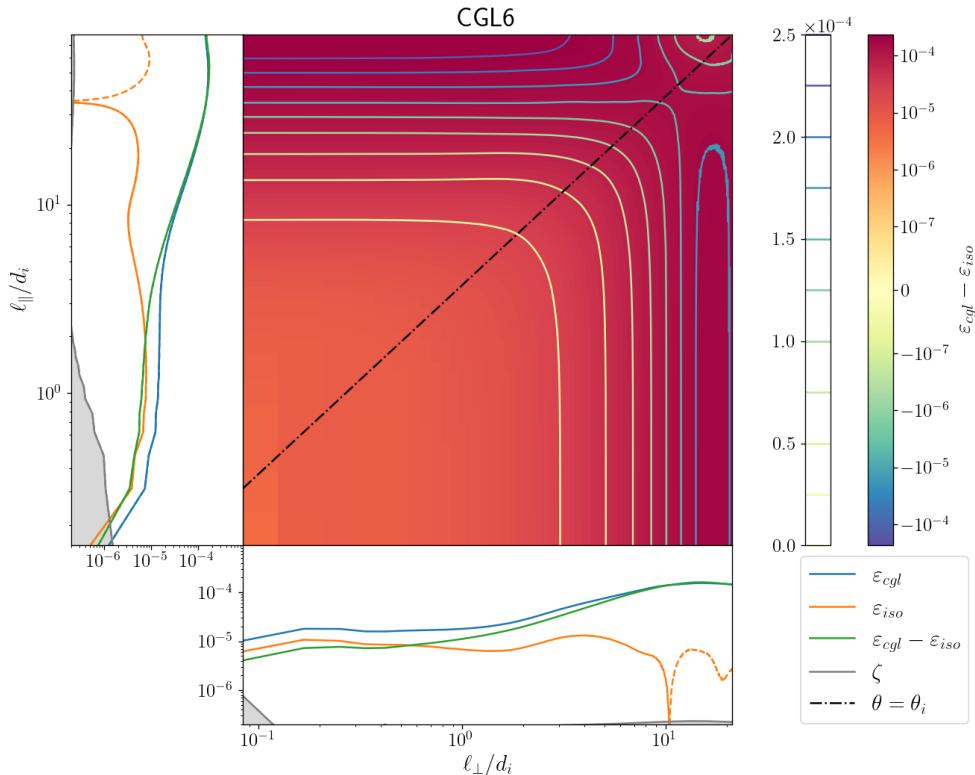


FIGURE 12.7 – Simu : CGL6. Représentation 2D en fonction de ℓ_{perp} et ℓ_{\parallel} de $\varepsilon_{cgl} - \varepsilon_{iso}$. Entouré des représentations 1D en fonction de ℓ_{perp} (bas) et ℓ_{\parallel} (gauche) de ε_{iso} (orange), ε_{cgl} (bleu), $\varepsilon_{cgl} - \varepsilon_{iso}$ (vert) et ζ (gris).

La dernière simulation lancée est CGL6. Elle est basée sur CGL5 mais initialisée avec de l'anisotropie de pression : $a_{p0} = 4 \neq 1$. Le but de cette simulation est double :

2. La taille de la zone inertie perpendiculaire dans la représentation 1D de la FIGURE 12.6 est réduite à cause de la «bulle» négative parallèle et du filtrage angulaire, la valeur maximale est donc estimée à partir de la représentation 2D.

- vérifier si l'un des comportements observés précédemment pour notre correction se maintient lorsque la simulation est initialisée anisotropiquement,
- se rapprocher du critère miroir.

D'autres a_{p0} , plus importants, ont été essayés, mais seule la simulation avec $a_{p0} = 4$ a pu être numériquement stabilisé.

Comme on peut le voir sur la TABLE 12.1 et sur la FIGURE 12.4 (violet), cette simulation se maintient au niveau du a_{pi} initial. En fait, c'est la seule simulation montrant un a_{pi} moyen aussi proche de sa condition initiale, l'écart n'étant que de 3 %. Pour ce qui est du but de se rapprocher du critère miroir, le diagramme nous indique que quelques points de CGL6 sont situés au-dessus du critère miroir, ils pourraient donc permettre le développement d'instabilité miroir dans la simulation.

Sur la FIGURE 12.7, $\varepsilon_{\overline{\Pi}}$ est entièrement positif. Son niveau est de l'ordre de 70 % de ε_{iso} aux échelles inertielles entre $\ell_{\perp} \in [0.3; 1]$. Il a donc bien augmenté par comparaison avec les 10 % et 30 % précédents. Par comparaison avec CGL5, la gamme d'échelles inertielles est réduite par l'augmentation de $\varepsilon_{\overline{\Pi}}$ qui est plus étalée.

12.4 Synthèse des résultats de l'étude préliminaire des simulations CGL-Hall- ∇P_e

Les résultats présentés dans ce chapitre nous permettent de valider numériquement l'apport de la correction dépendant de l'anisotropie de pression dans le cas quasi-incompressible et nous confirme que le terme dominant est celui que nous avons identifié dans le Chapitre 8. Cela implique que la première correction devant être appliquée dans un plasma quasi-incompressible tel que le vent solaire n'est peut-être pas la compression mais l'anisotropie de pression. Cette étude numérique n'est encore qu'à un stade préliminaire, en effet, nous n'avons pas encore convergé sur l'interprétation d'un certain nombre d'éléments et, comme nous venons de le voir, elle soulève un nombre important de questions. [ce n'est pas la bonne figure](#)

On propose une synthèse à travers la FIGURE 12.4. Sur le graphique (A) sont repris les histogrammes de a_p , (CGL1 y est confondu avec CGL2). Les simulations sont ordonnées par couleur et comportement : les simulations où un changement de signe était visible sont en gris (CGL1), bleu (CGL2) et vert (CGL3B). Les simulations montrant un signe quasi-isotope à l'exception d'une «bulle» dans la direction parallèle sont en jaune (CGL3) et rouge (CGL5). La dernière simulation, initialisée en $a_p = 4$, montrant une contribution anisotrope entièrement positive, est donnée en violet (CGL6). Deux paramètres ont été abordés : la moyenne a_{p0} (graphique (B) et (C)) et l'écart-type $std(a_p)$ (graphique (D) et (E)) de a_p . En fonction de a_{p0} , les simulations se comportant similairement restent groupées, contrairement à $std(a_p)$. a_{p0} semble donc être un meilleur paramètre que $std(a_p)$. Sur le graphique (B) sont placés les estimations de la contribution anisotrope au taux de cascade dans la zone inertuelle. On y observe que CGL3B et CGL6 s'écartent du résultat des autres simulations. Ce résultat est, pour CGL3B, ou CGL3-5, inattendu. Si a_{pi0} est bien le paramètre important dans l'impact des anisotropies de pression sur la cascade et que CGL3B est bien valable et n'est pas une exception, alors il pourrait exister un processus qui viendrait inverser la croissance du taux de la contribution dans la zone inertuelle. Pour ce qui est du rapport entre le taux de transfert non linéaire estimé dans la zone de forçage et le taux de cascade inertuelle (graphique (D)), ce rapport semble globalement croître en fonction de a_{p0} , il serait intéressant d'y évaluer plus précisément l'impact de

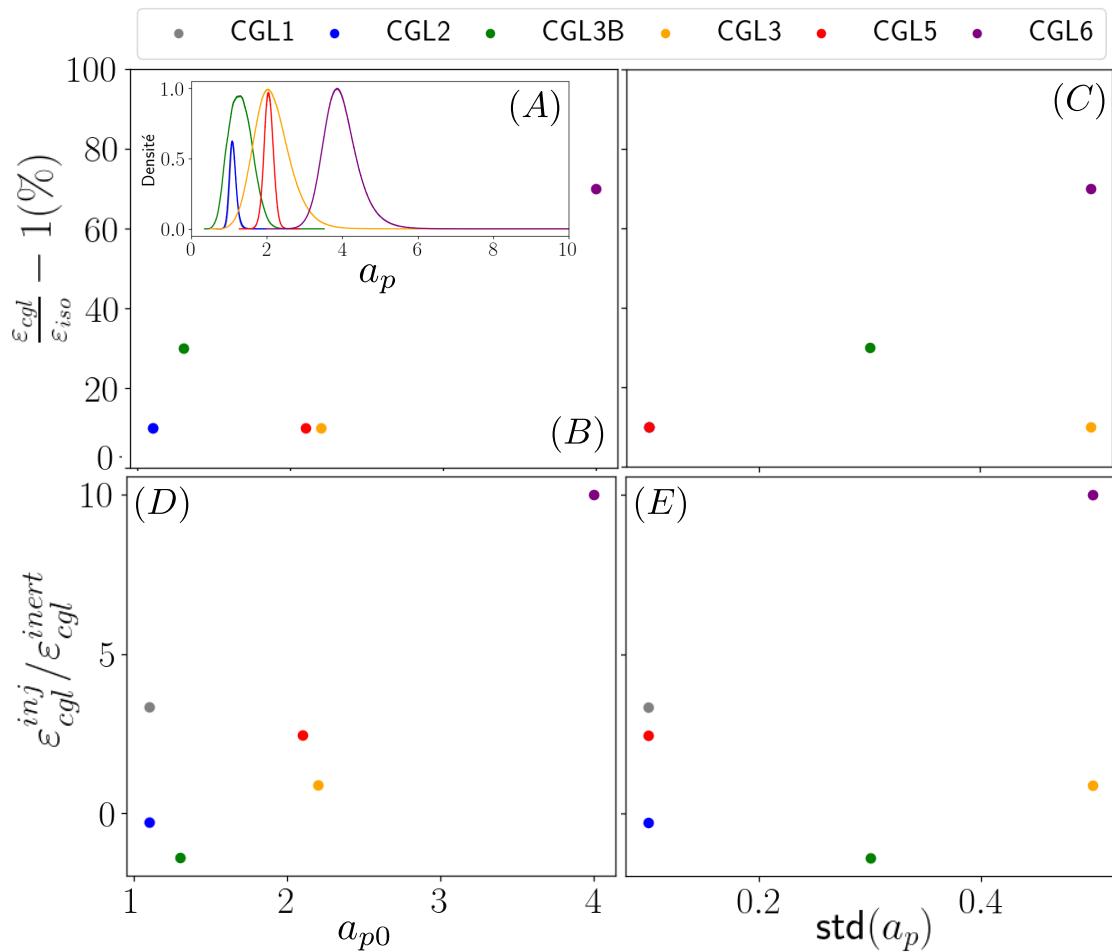


FIGURE 12.8 – Résumé de l'étude préliminaire sur l'effet de l'anisotropie de pression sur le taux de transfert non linéaire en fonction de a_{p0} (première colonne) et de $std(a_p)$ (deuxième colonne). Chaque simulation est associée à une couleur (même association que pour la FIGURE 12.4). (A) : histogramme de a_p , CGL1 y est confondu avec CGL2. (B) et (C) : Apport de la contribution de la pression anisotrope. (D) et (E) : impact de l'augmentation dans la zone d'injection de la contribution anisotrope sur le niveau du taux de transferts total mesuré dans la zone inertie.

l'injection d'énergie afin de vérifier si un autre processus intervient. Ces graphiques ne contenant qu'un nombre de points limités (lié au nombre de simulations à disposition) ne sont, bien évidemment, que des outils de spéculations, synthétisant cette étude préliminaire et permettant de dégager des tendances pour lesquelles, on pourra approfondir l'analyse.

PARTIE III : CHAPITRE 13

L VERS L'ÉTUDE DES SIMULATIONS LANDAU-FLUIDES

Sommaire

13.1 Modèle simulé et loi exacte	155
13.2 Etude préliminaire des simulations	156
13.3 Premières applications de la loi exacte LF-Hall- ∇P_e	158

[FERRAND, SAHRAOUI, LAVEDER *et al.* 2021] ont aussi utilisé des simulations du modèle LF-Hall- ∇P_e prenant en compte un flux de chaleur $\bar{\bar{q}}$ gyrotope obtenu grâce à une fermeture Landau-fluide présente dans le code utilisé dans cette partie. Il s'est avéré que ces simulations prennent aussi en compte un tenseur de pression électronique de type gyrotope. Ces simulations corrigeant les critères d'instabilités tel que le critère miroir afin de refléter le comportement linéaire cinétique, elles pourraient par la suite nous aider à étendre nos interprétations vers les processus cinétiques.

Dans ce chapitre, nous décrivons les spécificités du modèle implémenté et la loi exacte complète associée. Une première application, préliminaire, à deux simulations, semblent montrer des résultats paradoxaux qui nécessiteront une étude plus fine avant d'en extraire un début d'interprétations.

13.1 Modèle simulé et loi exacte

Dans ce deuxième lot de simulations, les ions et les électrons sont décris avec un tenseur de pression gyrotope. La fermeture utilisée est une fermeture Landau-fluide. Cette fermeture nous rapproche d'un modèle cinétique en prenant en compte l'amortissement Landau linéaire (phénomène cinétique) dans le modèle fluide. Cette correction étant basée sur la relation de dispersion cinétique, les critères d'instabilité seront aussi corrigés pour correspondre aux critères cinétiques. La gyrotoirie des électrons impactera d'ailleurs le critère miroir. Les flux de chaleur ioniques et électroniques sont aussi supposés gyrotopres.

Les premières équations du modèle normalisé simulé sont les suivantes, en y faisant

apparaître indépendamment les tenseurs de pression ionique et électronique :

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (13.1)$$

$$\partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} - \frac{1}{\rho} \mathbf{j} \times \mathbf{B} + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot (\overline{\mathbf{P}_i} + \overline{\mathbf{P}_e}) = 0 \quad (13.2)$$

$$\partial_t \mathbf{B} - \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + d_i \nabla \times \left(\frac{1}{\rho} \mathbf{j} \times \mathbf{B} \right) = d_i \nabla \times \left(\frac{1}{\rho} \nabla (p_e) \right) \quad (13.3)$$

$$\partial_t p_{\perp i} + \nabla \cdot (p_{\perp i} \mathbf{v}) + p_{\perp i} \nabla \cdot \mathbf{v} - p_{\perp i} \mathbf{b} \mathbf{b} : \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{2} (\text{Tr}(\nabla \cdot \overline{\mathbf{q}_i}) - \mathbf{b} \mathbf{b} : \nabla \cdot \overline{\mathbf{q}_i}) \quad (13.4)$$

$$\partial_t p_{\parallel i} + \nabla \cdot (p_{\parallel i} \mathbf{v}) + 2p_{\parallel i} \mathbf{b} \mathbf{b} : \nabla \mathbf{v} = -\mathbf{b} \mathbf{b} : \nabla \cdot \overline{\mathbf{q}_i} \quad (13.5)$$

$$\partial_t p_{\perp e} + \nabla \cdot (p_{\perp e} \mathbf{v}_e) + p_{\perp e} \nabla \cdot \mathbf{v}_e - p_{\perp e} \mathbf{b} \mathbf{b} : \nabla \mathbf{v}_e = -\frac{1}{2} (\text{Tr}(\nabla \cdot \overline{\mathbf{q}_e}) - \mathbf{b} \mathbf{b} : \nabla \cdot \overline{\mathbf{q}_e}) \quad (13.6)$$

$$\partial_t p_{\parallel e} + \nabla \cdot (p_{\parallel e} \mathbf{v}_e) + 2p_{\parallel e} \mathbf{b} \mathbf{b} : \nabla \mathbf{v}_e = -\mathbf{b} \mathbf{b} : \nabla \cdot \overline{\mathbf{q}_e} \quad (13.7)$$

avec $\overline{\mathbf{P}_{i,e}} = \frac{\beta_0}{2} (p_{\perp i,e} \overline{\mathbf{I}} + (p_{\parallel i,e} - p_{\perp i,e}) \mathbf{b} \mathbf{b})$, les tenseurs gyrotropes de pression ionique (i) et électronique (e), $\mathbf{b} = \frac{\mathbf{B}}{|\mathbf{B}|}$, la direction du champ magnétique, $\frac{\beta_0}{2}$ constante provenant de la normalisation des équations, et $\mathbf{v}_e = \mathbf{v} - d_i \frac{\mathbf{j}}{\rho}$ la vitesse électronique. La fermeture est appliquée au niveau du quatrième moment (pour plus d'informations, voir les premières parties de PASSOT et SULEM 2007) présent dans les équations de $\overline{\mathbf{q}_i}$ et $\overline{\mathbf{q}_e}$. L'hypothèse de gyrotropie appliquée aux tenseurs de flux de chaleur implique (avec $s = i, e$) :

$$\begin{aligned} \mathbf{b} \mathbf{b} : \nabla \cdot \overline{\mathbf{q}_s} &\simeq \nabla \cdot (q_{\parallel s} \mathbf{b}) - 2q_{\perp s} \nabla \cdot \mathbf{b} \\ \frac{1}{2} (\text{Tr}(\nabla \cdot \overline{\mathbf{q}_s}) - \mathbf{b} \mathbf{b} : \nabla \cdot \overline{\mathbf{q}_s}) &\simeq \nabla \cdot (q_{\perp s} \mathbf{b}) + q_{\perp s} \nabla \cdot \mathbf{b} \end{aligned}$$

L'équation d'énergie interne peut être construite à partir des équations de pression (13.5), (13.4), (13.7), (13.6) et de la relation $\mathbf{v}_e = \mathbf{v} - d_i \frac{\mathbf{j}}{\rho}$:

$$\partial_t (\rho u) + \nabla \cdot (\rho u \mathbf{v} + \mathbf{q}) + (\overline{\mathbf{P}_i} + \overline{\mathbf{P}_e}) : \nabla \mathbf{v} = \frac{d_i}{2} \nabla \cdot \left(\text{Tr}(\overline{\mathbf{P}_e}) \frac{\mathbf{j}}{\rho} \right) + d_i \overline{\mathbf{P}_e} : \nabla \left(\frac{\mathbf{j}}{\rho} \right) \quad (13.8)$$

sachant que $\rho u = \frac{\beta_0}{2} (p_{\perp i} + \frac{1}{2} p_{\parallel i} + p_{\perp e} + \frac{1}{2} p_{\parallel e})$ et avec $\mathbf{q} = \frac{\beta_0}{2} (q_{\perp i} + \frac{1}{2} q_{\parallel i} + q_{\perp e} + \frac{1}{2} q_{\parallel e}) \mathbf{b}$.

La loi exacte valable pour ce modèle a pour base (7.20) à laquelle on doit ajouter la correction Hall (9.3), la correction dépendant de la pression électronique (??) et la correction dépendant des flux de chaleur (5.21).

Par curiosité, nous l'avons appliquée à deux simulations LF2 et LF3, pour vérifier si l'on pouvait retrouver les conclusions de l'article [FERRAND, SAHRAOUI, LAVEDER *et al.* 2021] à travers les termes dépendant des flux de chaleurs.

13.2 Etude préliminaire des simulations

Les paramètres initiaux associés à chaque simulation sont donnés dans la TABLE 9.1 et lan9.2. Et dans la TABLE 13.1, sont repris quelques informations statistiques. Similairement aux simulations CGL-Hall- ∇P_e , les fluctuations de densité sont faibles, ces

simulations sont aussi quasi-incompressibles.

Name	ρ	a_{pi}	$\beta_{\parallel i}$	a_{pe}	$\beta_{\parallel e}$
LF2	1 ± 0.01	1.05 ± 0.03	0.97 ± 0.04	1.01 ± 0.006	0.98 ± 0.05
LF3	1 ± 0.08	1.52 ± 0.31	0.84 ± 0.30	0.96 ± 0.04	1.10 ± 0.42

TABLE 13.1 – Moyenne et écart-type de la densité, du taux d'anisotropie ionique $a_{pi} = \frac{p_{\perp i}}{p_{\parallel i}}$ et électronique $a_{pe} = \frac{p_{\perp e}}{p_{\parallel e}}$ et des paramètres $\beta_{\parallel i} = \frac{p_{\parallel i}}{p_m}$ et $\beta_{\parallel e} = \frac{p_{\parallel e}}{p_m}$ pour chaque simulation, à la date t .

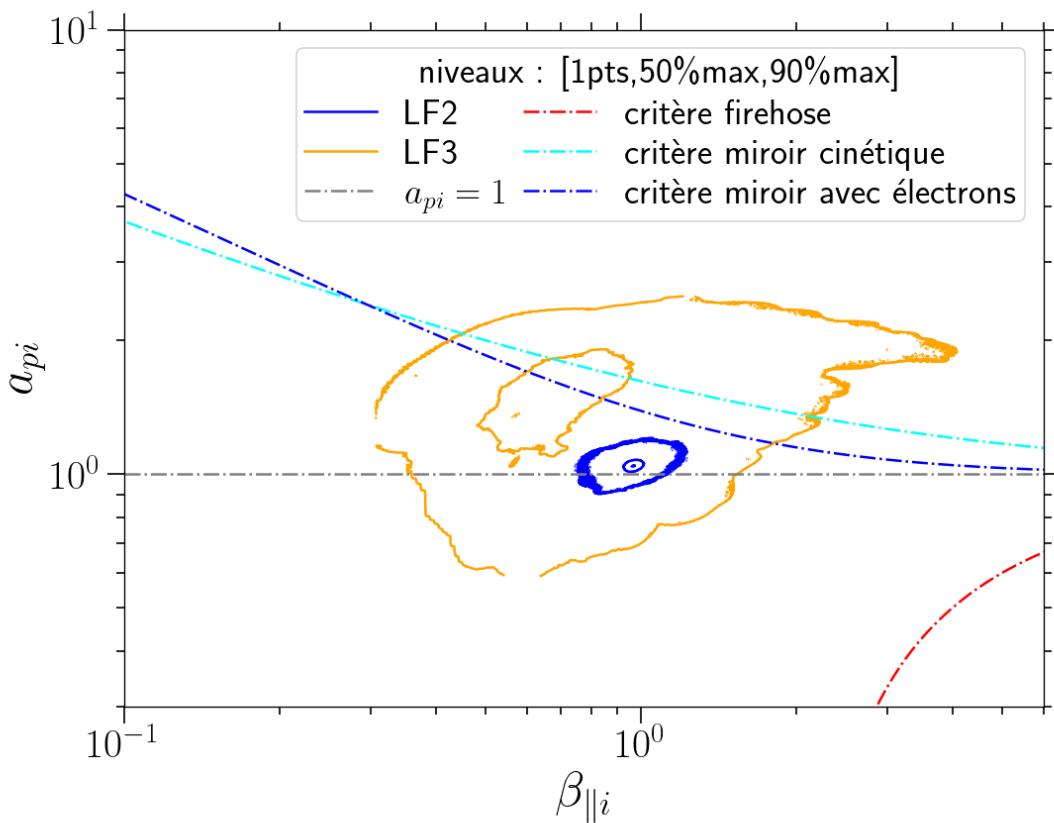


FIGURE 13.1 – Diagramme $a_{pi} - \beta_{\parallel i}$ contenant l'histogramme 2D des simulations LF2 et LF3 sous la forme de courbes de niveau centrées sur le couple moyen. Les lignes discontinues correspondent aux critères d'instabilité. Rouge : le critère firehose CGL calculé dans le chapitre 7 et valable dans les modèles cinétique [HUNANA *et al.* 2019], il ne prend pas en compte l'effet Hall. Cyan : critère miroir cinétique (sans prise en compte de la pression électronique) [HUNANA *et al.* 2019]. Bleu : critère miroir proposé par [KUZNETSOV *et al.* 2012], prenant en compte les électrons gyrotropes et calculé avec $a_{pe0} = 1$ et $\beta_{\parallel e0} = 1$.

Les taux d'anisotropie initialisés à 1 sont restés proches de 1 et sont moins étalées que ceux des simulations CGL-Hall- ∇P_e CGL2 et CGL3. LF3 montre un étalement plus

important similairement à CGL3. Plus d'un tiers des points sont situés dans la zone du diagramme située du côté instable du critère miroir. Deux critères miroirs sont donnés. Le premier en cyan correspond au critère cinétique obtenue en corrigeant le facteur 6 du critère CGL [HUNANA *et al.* 2019]. Le second, en bleu, est aussi un critère miroir cinétique mais prenant en compte l'anisotropie de pression électronique. Ce critère est dérivé dans l'article [KUZNETSOV *et al.* 2012]. Il est ici représenté en considérant $a_{pe} = 1$ et $\beta_{\parallel e} = 1$.

Les simulations LF pourraient donc permettre une étude fine de l'impact des instabilités cinétiques sur la cascade turbulente. Mais, en première application de la loi exacte étendue et par curiosité, nous avons d'abord cherché à retrouver les résultats de F21.

spectres

13.3 Premières applications de la loi exacte LF-Hall- ∇P_e

Pour les simulations LF2 et LF3, l'extraction d'échantillons de temps consécutifs n'a pas encore été fait. On ne fera donc pas apparaître le niveau ζ dans les résultats qui suivent qui sont complètement préliminaires.

L'une des questions que nous nous sommes posés est : est-ce que l'on retrouve la décroissance associée au flux de chaleur par F21 ? On a alors calculé le taux de cascade total dans LF2 et LF3 avec ($\varepsilon|\nabla \cdot \mathbf{q} \neq 0$) et sans ($\varepsilon|\nabla \cdot \mathbf{q} = 0$) la contribution du flux de chaleur. Les résultats sont montrés sur la figure FIGURE 13.2. On remarque que la contribution du flux de chaleur (C_q , vert) semble négligeable même aux plus petites échelles. On ne retrouve donc pas la décroissance observée en allant vers les petites échelles que l'on s'attendait à voir en ne le prenant pas en compte en accord avec les résultats de F21.

Afin de vérifier si une erreur ne s'était pas introduite dans notre calcul. Nous avons calculé la loi exacte la plus proche de la loi incompressible observée par FERRAND, SAHRAOUI, LAVEDER *et al.* 2021, c'est-à-dire la loi Hall-MHD (HMHD) en n'y prenant en compte que les contributions isotropes des tenseurs de pression ionique et électronique, les termes dépendant de l'anisotropie de pression, du terme ∇P_e de la loi d'Ohm ou des flux de chaleur étant nouveaux dans l'estimation du taux de cascade. Ce taux de cascade est représenté en orange sur la figure FIGURE 13.3. On retrouve bien le résultat de F21 avec la décroissance en allant vers les petites échelles. Ayant deux résultats semblant en contradiction, $\varepsilon|\nabla \cdot \mathbf{q}$ (bleu) et ε_{HMHD} , j'ai ajouté une à une les nouvelles contributions afin de comprendre ce qu'il se passait.

Tout d'abord, on prend en compte l'anisotropie de pression des ions et des électrons (en gardant une loi d'Ohm Hall-MHD), le résultat correspond à la courbe verte. Le niveau du taux de cascade commence à s'affaiblir aux échelles a priori inertielles, et à augmenter dans les échelles d'injections. Ces ajouts sont dominés par la pression ionique.

Ensuite, on ajoute la contribution de la pression électronique isotrope associée à au terme ∇P_e de la loi d'Ohm, cela donne la courbe rouge. Le résultat est alors très proche du résultat voulu. La composante anisotrope des tenseurs de pression dans ce terme (résultat cyan) s'avère faible pour LF2 et influe un peu plus pour LF3. Le résultat $\varepsilon|\nabla \cdot \mathbf{q}$ observé sur la FIGURE 13.2 est ainsi retrouvé.

Ce résultat semble paradoxal face aux conclusions de F21. Dans cet article, ils concluent en comblant la décroissance du taux de cascade par une estimation d'un taux de dissipation dû à l'amortissement Landau, remontant ainsi le niveau du taux de cascade dans la

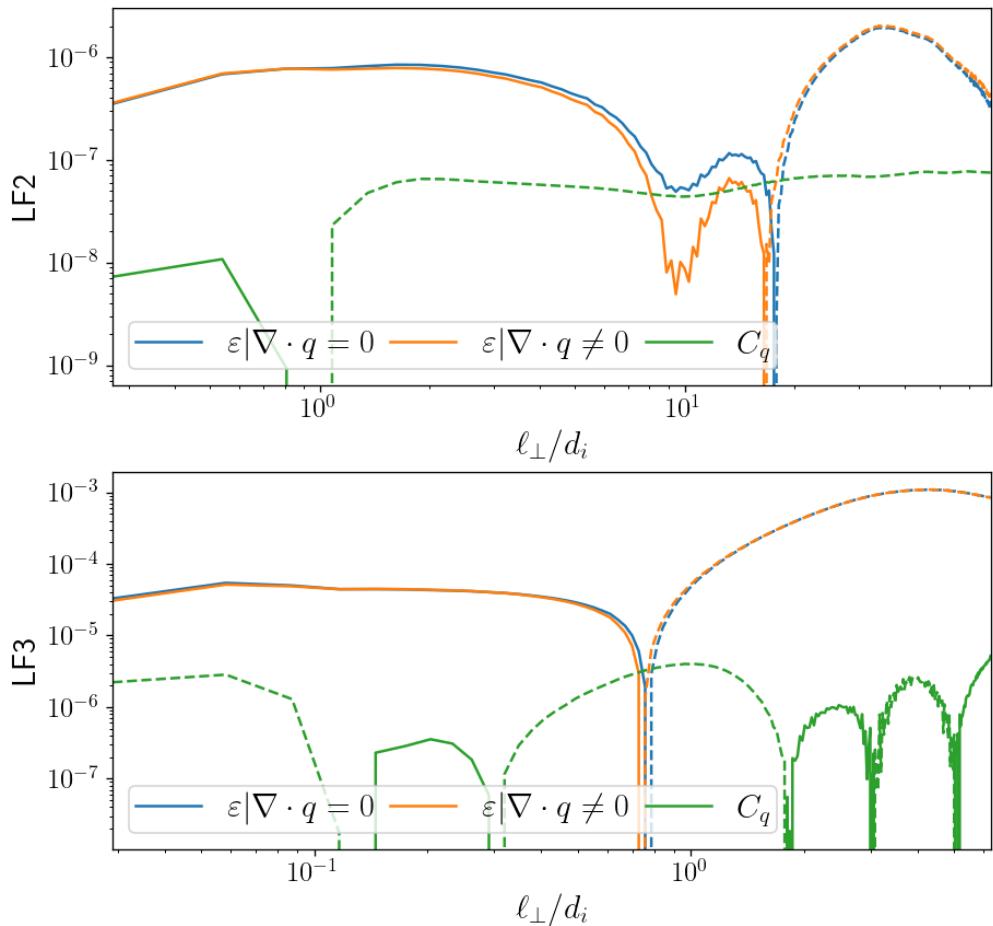


FIGURE 13.2 – Taux de cascade calculé en prenant en compte la contribution de flux de chaleur et en l’omettant.

zone inertielle. De notre côté, on observe plutôt un affaissement du niveau du taux dû à la prise en compte de l'anisotropie de pression ionique ainsi que du tenseur de pression électronique dans l'équation d'induction. Ces résultats obtenus très récemment semblent venir questionner la méthode d'obtention du taux de dissipation par effet Landau utilisée par F21 ou notre interprétation de la contribution du flux de chaleur dans le taux de cascade et demande une analyse plus fine que ce qui a pu être fait jusqu'à présent.

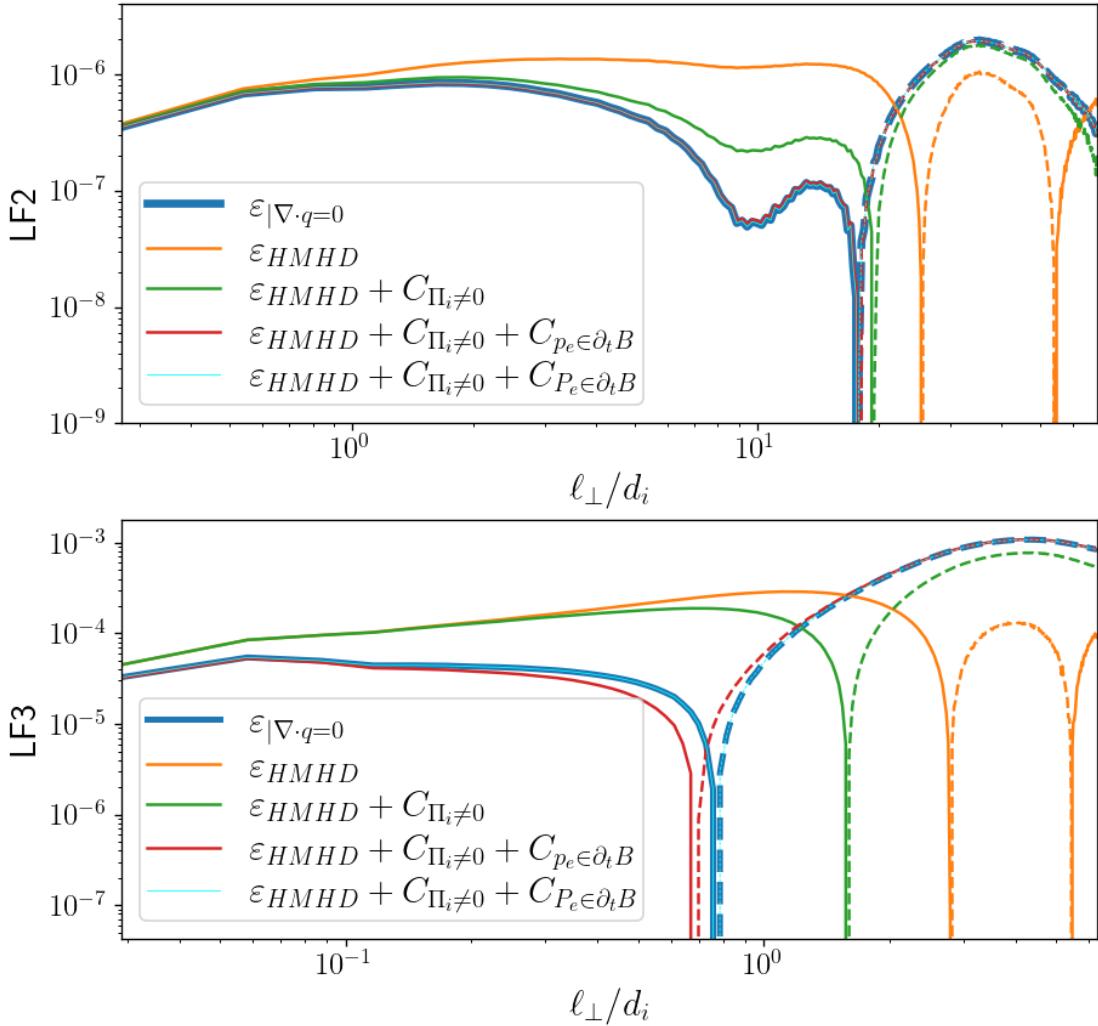


FIGURE 13.3 – Taux de cascade calculé en prenant petit à petit en compte les nouvelles contributions afin d'identifier quelles contributions impactent le taux de cascade LF-Hall- ∇P_e . Le but étant de retrouver le taux de transfert non linéaire total de ces simulations (courbe bleue épaisse) en partant d'une loi MHD-Hall (orange). Etape 1 (vert) : ajout de l'anisotropie de pression ionique. Etape 2 (rouge) : ajout de la contribution de pression électronique isotrope. Etape 3 (cyan) : prise en compte des anisotropies de pression électronique. Le taux de référence est quasiment retrouvé en ajoutant l'anisotropie de pression ionique et la pression isotrope électronique.

CONCLUSION

Cette Partie III contient l'état actuel de notre étude numérique de l'effet de l'anisotropie de pression sur la cascade turbulente.

Dans le Chapitre 10, nous présentons le code qui nous a permis d'obtenir les données dans lesquelles l'étude des lois exactes est effectuée ainsi que notre méthode de post-traitement. Cette méthode reposant sur l'usage de la transformée de Fourier, n'est à notre connaissance pas utilisée par la communauté.

Dans le Chapitre 11, sont exposés les étapes ayant permis la validation de notre code ainsi qu'une étude de l'apport de notre méthode sur une méthode utilisé couramment consistant à décrire l'espace des échelles par un set réduit de vecteurs. En se basant sur nos connaissances du code et sur le travail analytique de la Partie II, nous y développons une méthode d'obtention de l'erreur numérique s'appliquant sur nos résultats ainsi qu'une analyse approfondie de nos sources d'erreur.

Ainsi armé de ces outils, nous avons attaqué la question de l'analyse complète des simulations utilisées par FERRAND, SAHRAOUI, LAVEDER *et al.* 2021 afin de valider l'apport de notre extension gyrotrope de la théorie des lois exactes et d'affiner notre compréhension de l'effet de l'anisotropie de pression sur la turbulence. Le Chapitre 14 contient une analyse préliminaire des simulations du modèle CGL-Hall- ∇P_e . Cette étude valide l'apport de notre extension en particulier le poids, dans des simulations incompressibles, du terme survivant dans la limite incompressible et qui a fait l'objet du Chapitre 8. Cependant, l'interprétation de ses résultats est encore sujette à discussion et nécessitera quelques analyses complémentaires. Le Chapitre 13 contient une ouverture vers l'application de nos résultats analytiques et de nos méthodes dans des simulations plus complexe prenant en compte l'effet Landau-fluide. De telles simulations rapprochent le comportement du système de celui décrit par un modèle cinétique en captant partiellement la physique linéaire cinétique (correction du critère d'instabilité miroir, effet Landau). Les tous premiers résultats questionnent notre interprétation de l'impact du flux de chaleur sur la cascade turbulente, et nécessiteront une analyse plus fine avant de mener à un début d'interprétation.

CONCLUSION GENERALE

«*Science is not about building a body of known ‘facts’. It is a method for asking awkward questions and subjecting them to a reality-check, thus avoiding the human tendency to believe whatever makes us feel good.*»¹

«*But then science is nothing but a series of questions that lead to more questions.*»²

Terry PRATCHETT, écrivain contemporain mélant humour, satire et mondes fantastiques,

1. Traduction : La science ne consiste pas à établir un ensemble de "faits" connus. C'est une méthode qui permet de poser des questions embarrassantes et de les soumettre à un contrôle de réalité, évitant ainsi la tendance humaine à croire tout ce qui nous fait plaisir. Citation extraite de PRATCHETT, STEWART *et al.* 1999.

2. Traduction : La science n'est jamais qu'une succession de questions conduisant à d'autres questions. Citation extraite de PRATCHETT et BAXTER 2012.

CONCLUSION : CHAPITRE 14

SYNTHÈSE ET PERSPECTIVES

Au cours de ce travail, nous avons questionné l'effet de la pression sur la cascade turbulente à travers l'extension de la théorie des lois exactes de Kolmogorov et la dérivation d'une telle loi pour la cascade d'énergie totale. Deux formats de la loi sont possibles, le format KHM qui ne prend en compte que l'hypothèse d'homogénéité statistique et le format K41 qui implique la validité des hypothèses de stationnarité statistique et de séparation des échelles de forçage et de dissipation. Les échelles où la loi exacte, sous le format K41, est constante sont les échelles inertielles. Dans l'INTRODUCTION, nous avons rappelé qu'un plasma peut être décrit tel un fluide grâce à un ensemble infini d'équations dépendant les unes des autres. La pression y apparaît sous la forme d'un tenseur dont l'équation dépend du flux de chaleur. Redéfinir une pression ou un flux de chaleur est une manière de fermer un tel système.

14.1 Partie I

Dans la Partie I, la pression est supposée isotrope. L'utilisation d'une pression isotrope appelle en général une fermeture provenant de la thermodynamique (comme cela est décrit dans le Chapitre 4). Diverses fermetures sont possibles (isotherme, adiabatique, isobare, isochore...) et il en existe une, un peu plus générale : la fermeture polytrope. En fonction de deux paramètres (σ et γ), elle permet de se placer dans le cadre des autres fermetures et de décrire divers plasmas spatiaux. À partir de ces fermetures, on peut estimer une expression de l'énergie interne du système. Ces étapes sont usuellement effectuées avant la dérivation d'une loi exacte associée au système d'équation qui est ainsi fermé.

Dans le Chapitre 5, cette procédure est revisitée. En effet, l'expression explicite de l'énergie interne ou de la pression peut n'être appliquée qu'à la fin, après avoir obtenu une loi exacte que l'on peut ainsi qualifier de générale et dans laquelle, on peut venir appliquer la fermeture. La dérivation de cette loi ne nécessite que les équations de continuité, de vitesse, d'induction et d'énergie interne. La seule contrainte imposée sur la fermeture sera donc qu'elle respecte l'équation d'énergie interne. C'est le cas des fermetures thermodynamiques, l'équation d'énergie interne n'étant alors qu'une réécriture du premier principe de la thermodynamique. Afin de répondre à l'objectif initial qui était d'étendre la théorie des lois exactes à des écoulements polytropes, nous avons choisi d'appliquer, dans cette loi exacte, la fermeture polytrope. En supposant que le chauffage effectif du plasma impactera son entropie, nous avons supposé que la contribution du flux de chaleur nulle dans la zone inertielle. Cette dernière décrite ainsi est isentrope. Cette hypothèse sur la zone inertielle est décorrélée du comportement thermodynamique global de l'écoulement. Si l'écoulement est adiabatique, la loi exacte obtenue sera valable en dehors de la zone inertielle, mais s'il est isotherme, par exemple, l'hypothèse isentrope, s'accompagne du postulat qu'à l'extérieur de la zone inertielle, le système s'adaptera pour réguler la situation.

Dans le Chapitre 6, une application de cette loi isentrope-polytrope est entreprise dans les données relevées par PSP dans le vent solaire. On y compare dans un jeu de données quasi-incompressible et un jeu plus compressible, le comportement des lois incompressibles, isentrope-isotherme et isentrope-adiabatique, estimant ainsi le taux de cascade/chauffage dans le vent solaire. Ce taux s'avère dominé par les termes flux qui survivent dans la limite incompressible, dit Yaglom. La contribution de l'énergie interne, seule contribution dépendant de la fermeture calculable avec une seule sonde, reste négligeable, le choix de fermetures thermodynamiques n'impacte alors pas le taux de chauffage contrairement à la présence de la densité dans les termes Yaglom. Ces observations ont ensuite été confirmées statistiquement dans les données PSP par [BRODIANO *et al.* 2022]. Une petite évaluation statistique est aussi menée dans les données relevées par MMS dans la magnétogaine plus compressible : le comportement de ces termes y est similaire. Etudier la cascade dans le vent solaire permet de confronter nos résultats analytiques à un écoulement réel, mais est aussi très contraignant dans l'étude des lois exactes compressibles : la plupart des missions envoyées ne comprenant qu'un seul satellite, il n'est alors pas possible de calculer, dans les données relevées, des dérivées locales. MMS, constellation de quatre satellites, permet par contre de les estimer et de calculer l'ensemble de la loi exacte. Ce travail n'a pas été entamé. Pour estimer l'énergie interne dans le vent solaire, nous avons utilisé la densité à travers une fermeture thermodynamique, cette estimation, en accord avec le domaine de validité de la loi exacte appliquée, n'est pas très réaliste. En fait, si l'on voulait être réaliste, il faudrait utiliser la pression issue des fonctions de distributions en vitesse des particules, or la pression dans le vent solaire n'est pas isotrope. Notre loi exacte n'est donc pas suffisante.

14.2 Partie II

Le champ magnétique étant magnétisé, toutes les facettes de son comportement sont dilatées dans la direction du champ magnétique, la pression, second moment de la fonction de distribution en vitesse des particules, en fait partie. Le vent solaire étant aussi, peu collisionnel, cette anisotropie n'est pas homogénéisée par les collisions et la pression doit, au minimum, être décrite par un tenseur gyrotrope dépendant de deux composantes. La question de l'impact d'une telle propriété sur la cascade turbulente, cœur de cette thèse, est d'abord abordée à travers une extension analytique de la théorie des lois exactes, présentée dans la Partie II.

Comme résumé dans le Chapitre 7, nous avons d'abord appliqué la routine analytique présentée dans le chapitre 5 et dépendant de l'équation d'énergie interne dans les équations dépendant d'une pression tensorielle. Puis nous y avons injecté la fermeture liée au modèle gyrotrope le plus communément utilisé : le modèle CGL. Ce modèle suppose nulle la contribution du flux de chaleur. Le résultat, alors obtenu dans la zone inertielle, décrit, en fait, le transfert non-linéaire de l'énergie à l'ensemble des échelles MHD. À travers la composante anisotrope du tenseur de pression, il dépend de l'anisotropie de pression, mesuré usuellement par le rapport a_p . Cette contribution pourrait ainsi être affectée par le développement d'instabilité de pression telle que l'instabilité firehose ou miroir permis par l'anisotropie. Ce qui est certain, c'est qu'elle est la signature de l'impact de l'anisotropie de pression sur la cascade turbulente.

En cherchant la limite incompressible de cette contribution, nous nous sommesaperçus qu'un terme, parmi les quatre la composant, survivait. Il est présenté dans le Chapitre 8. L'anisotropie de pression étant généralement étudié dans le cadre compres-

sible, ce terme interpelle : gyrotropie et incompressibilité seraient-elles compatibles ? Nous proposons alors un modèle auto-suffisant dépendant d'un tenseur de pression gyrotrope, fermé par la contrainte incompressible et l'équation d'énergie interne indépendante du flux de chaleur. L'énergie interne étant, en effet, définie à partir de la trace du tenseur de pression, cette fermeture semble appropriée pour s'assurer de la compatibilité de ce modèle avec notre loi exacte générale. L'étude linéaire de ce modèle a révélé la présence d'un mode d'Alfvén incompressible affecté par la correction firehose ainsi que d'un nouveau mode lié à la limite incompressible des modes magnétosonores du modèle CGL. La cascade turbulente étant en partie développée par des interactions non-linéaires entre ondes, notre correction gyrotrope de la loi MHD incompressible, pourrait être l'incarnation de ces interactions. De plus, la résilience de ce terme dans la limite incompressible semble impliquer que la correction majeure dans le vent solaire, quasi-incompressible, n'est pas la compressibilité, mais l'anisotropie de pression.

Dans le Chapitre 9, nous sortons du cadre MHD, en vérifiant le comportement des différents termes de la loi d'Ohm dans face à l'utilisation de tenseur de pression : le terme Hall n'en dépendant pas, sa contribution à la loi exacte ne varie pas entre le cas d'une pression isotrope ou tensorielle, par contre le terme ∇P_e , en fonction de la forme du tenseur de pression électronique pourrait influer le transfert non-linéaire, et cela même, dans la limite incompressible. Nous y dérivons aussi une loi exacte générale bi-fluide dépendant des ions et des électrons et valable dans divers régimes : MHD et magnétohydrodynamique électronique (EMHD). Ces extensions permettent alors la description du transfert non-linéaire dans la grande majorité des gammes d'échelles mesurables. Notons tout de même que la formulation de la loi exacte ainsi obtenue est intrinsèque à la fonction de corrélation d'énergie totale choisie au début le calcul. L'analyse des contributions non gyrotropes du tenseur de pression n'a pas été abordée, mais notre loi générale dépendant d'une pression tensorielle semble tout à fait compatible avec leur étude (tant que le tenseur de pression reste symétrique).

14.3 Partie III

La description de la cascade turbulente d'énergie totale, étendue à ce qu'il semble être son paroxysme (la contribution du flux de chaleur a été dérivée dans le Chapitre 5), peut maintenant nous permettre d'étudier dans son intégrité la cascade d'énergie présente dans des simulations LF/CGL-Hall- ∇P_e et en particulier l'effet de l'anisotropie de pression. Cette étude entamée et présentant des premiers résultats prometteurs est décrite dans la partie III.

Le chapitre 10 présente le code versatile permettant l'obtention de simulation de divers modèles dépendant d'une pression gyrotrope tel que CGL-Hall- ∇P_e ou le modèle Landau-fluide. Ce code peut être utilisé afin de répondre aux problématiques concernant la turbulence grâce à l'inclusion d'une injection d'énergie dans le système simulé et de l'hyperdissipation, originellement utilisé pour lisser les fort gradients pouvant induire des instabilités numériques, mais qui, dans le cadre des études de turbulence, s'avère être un canal dissipatif performant à petites échelles. Y sont aussi présentés notre code de post-traitement et les choix imposés afin de visualiser les résultats. La particularité principale de notre code de post-traitement est qu'il repose sur le lien entre fonction de corrélation et produit de convolution. Cette propriété mathématique nous permet d'effectuer le calcul des termes de la loi exacte dans l'espace de Fourier, et nous donne la quantité voulue pour l'ensemble des vecteurs d'échelles accessibles en fonction de la taille et de la résolution

de la simulation traitée. Le résultat final, tridimensionnel et régulier, laisse ainsi libre les choix de traitements supplémentaires (dérivation, etc.) et de réduction (carte bidimensionnelle, filtrage angulaire et moyenne pour obtenir une visualisation 1 dimension (1D), etc.) afin de visualiser les comportements turbulents qui nous intéressent.

Une campagne de validation de notre implémentation à travers les comparaisons de résultats de diverses lois exactes et une estimation de l'erreur numérique sur le taux de cascade totale, erreur intrinsèque à nos simulations est présenté dans le Chapitre 11. Cette erreur est obtenue en calculant la forme KHM de nos lois exactes, elle prend donc en compte les spécificité du code initial (forçage et hyperdissipation) et son estimation n'est permise que grâce à l'extension de la théorie des lois exactes présentée dans les Parties I et II. Nous intéresser au comportement des termes de forçage et d'hyperdissipation, nous a permis de nous rendre compte des limites mathématiques de cette théorie reposant sur des fonctions de corrélation d'ordre 2. En effet, le comportement de l'hyperdissipation par exemple n'est pas calquée sur sa conception dans l'espace spectral, mais sur des saturations mathématiques dont les tendances dans le cas isotrope sont estimées dans l'Annexe A.

Ayant ainsi validé et déterminé les limitations de notre code, nous avons entamé l'étude des simulations dont certaines sont utilisées par [FERRAND, SAHRAOUI, LAVEDER *et al.* 2021] du modèle CGL-Hall (CGLH). Elle fait l'objet du Chapitre 14. Le comportement des premiers résultats étant particulier, il a engendré un certain nombre de questions qui ont motivé le lancement de nouvelles simulations. L'interprétation fine de leur résultat n'est pas encore aboutie. Cependant, il semblerait que dans ces simulations quasi-incompressible, le terme survivant à la limite incompressible domine les termes compressibles. Cela irait dans le sens de la conjecture proposée dans la Partie II : dans un plasma quasi-incompressible (par exemple le vent solaire), la correction de l'anisotropie de pression primerait sur la correction compressible de la loi exacte et de l'estimation du taux de chauffage turbulent. Une étude dans les données de MMS ou de la mission HELIOS-WARM qui sera déployée dans le vent solaire en 2028 pourrait permettre de valider ce résultat, notre contribution dépendant de dérivées locales. En attendant, nos résultats analytiques pourraient aussi permettre de mieux comprendre la cascade énergétique dans les modèles Landau-fluide tel qu'ébauché dans le Chapitre 13.

14.4 Le mot de la fin du début

Finalement, cette thèse revisite diverses méthodes liées à l'étude de la cascade turbulente telle que la méthode d'obtention des lois exactes d'énergie totale ou leur implémentation en tant que post-traitement de simulations turbulentes. Elle apporte aussi un cadre d'étude élargie de la cascade d'énergie totale grâce à une extension versatile de la théorie des lois exactes, un nouveau modèle incompressible gyrotrope, une correction dépendant des anisotropies de pression qui pourrait servir de base à l'étude du lien entre instabilité et turbulence et qui semble être plus importante dans la description d'un écoulement quasi-incompressible que la correction donnée par la compression.

Jusqu'à présent, ce travail a fait l'objet de deux articles. Le premier, [SIMON et SAHRAOUI 2021], résume l'obtention de l'extension de la théorie des lois exactes dépendant d'une pression isotrope dans le cadre d'une description isentrope de la zone inertielle et présente les résultats de l'étude cas effectuée dans les données de PSP. Le second, [SIMON et SAHRAOUI 2022] présente l'extension analytique dépendant de la compression et d'une pression tensorielle avec l'application au modèle CGL et sa limite incompressible. Ils sont insérés à la fin de cette thèse.