

PARTIE III : CHAPITRE 2

DES LOIS INCOMPRESSIBLES AUX LOIS COMPRESSIBLES : TESTS ET VALIDATIONS

Sommaire

2.1 Résultats incompressibles et avec pression isotrope	66
2.1.1 Comparaison avec les résultats de F21	66
2.1.2 Comparaison des formulations de PP98	68
2.2 Résultats compressibles avec pression isotrope	70
2.2.1 Comparaison avec les prédictions de A18	70
2.2.2 Comparaison des formulations dérivées dans le chapitre I.2 . . .	73
2.3 Niveau de référence et différence entre fonctions de corrélations	76
2.3.1 Calcul de la loi KHM	76
2.3.2 Calcul de la loi KHMS	78
2.3.3 Explication mathématique et interprétation des lois KHM et KHMS	79
2.4 Synthèse d'une page	83

Avant d'attaquer les spécificités des modèles simulés et les lois exactes associées et afin de valider les méthodes numériques exposées dans le chapitre 2, une comparaison de diverses lois exactes fera l'objet du chapitre en cours. Dans la section 3.2, les résultats de lois exactes incompressibles seront comparés aux résultats de FERRAND, SAHRAOUI, LAVEDER et al. 2021 (F21). La section 3.3 analysera les formulations f1, f2 et f3 de la loi exacte compressible avec pression isotrope dérivée dans le chapitre I.2. Enfin, dans la section 2.3, une méthode d'estimation de l'incertitude sur nos résultats sera proposée.

Les simulations utilisées dans ces études comparatives sont CGL1 et CGL3 (voir détail Tables III.2.1 et III.2.2). Elles font partie du lot de simulation originellement analysé par F21 et elles feront l'objet du chapitre 4. Pour chaque simulation, une date a été sélectionnée. À partir de cette date, la simulation a été relancée sur quelques pas de temps avec extraction des quantités pour chacun d'eux. Sauf exception de la figure III.2.2, tous les résultats montrés dans ce chapitre correspondent à une moyenne de ces échantillons. Pour CGL1, la date correspond au temps utilisé par F21, pour CGL3, c'est la date précédente, F21 analysant le temps 362.

Name	Résolution	$k_{\perp}d_i$	θ_i	E_{sup}	Date	N_t	δt
CGL1	512^3	0.045	7°	1.6×10^{-2}	6700	4	6.25×10^{-2}
CGL3	$512^2 \times 1024$	0.5	15°	4.5×10^{-2}	361	6	2×10^{-4}

TABLE III.2.1 – Paramètres des simulations CGL1 et CGL3 utilisées pour calculer les lois exactes dans ce chapitre. La résolution correspond au nombre de points dans les directions \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y et \mathbf{e}_z . $k_{\perp}d_i$ et θ_i sont les paramètres géométriques du forçage (fréquence et angle d’injection) influençant la gamme d’échelle accessible. E_{sup} est un paramètre énergétique du forçage. Sont aussi indiqués quelques informations temporelles : la date initiale de prélèvement de l’échantillon dans la simulation, le nombre de temps consécutifs utilisés, N_t , et l’incrément temporel les séparant δt .

Name	$\nu = \eta$	ν_{ρ}	ν_p	α
CGL1	7.35×10^{-8}	0	7.35×10^{-9}	80
CGL3	4.5×10^{-2}	1.6×10^{-2}	1.6×10^{-2}	2.5

TABLE III.2.2 – Paramètres des simulations CGL1 et CGL3 utilisées pour calculer les lois exactes dans ce chapitre. ν , η , ν_{ρ} , ν_p et α sont des constantes caractéristiques de l’hyperdissipation.

2.1 Résultats incompressibles et avec pression isotrope

2.1.1 Comparaison avec les résultats de F21

Afin de valider les méthodes et choix décrits dans le chapitre 2, nous avons calculé avec les données de CGL1 et CGL3,

- ε_{PP98} provenant de la loi PP98 (voir chapitre 1 de l’Introduction),
- ε_{Hall} la correction Hall incompressible (équation (II.1.4)),
- $\varepsilon_{F19} = \varepsilon_{PP98} + \varepsilon_{Hall}$, qui correspond au résultat de la loi Hall-MHD incompressible dérivée par FERRAND, GALTIER, SAHRAOUI, MEYRAND et al. 2019.

Ces résultats sont présentés avec les résultats de FERRAND, SAHRAOUI, LAVEDER et al. 2021 (F21) sur la figure III.2.1.

Sur la figure III.2.1, on peut observer que nos résultats ne coïncident pas avec les résultats de F21. Pour CGL1 (graphique supérieur), en partant des grandes échelles, le changement de signe qui serait lié au forçage, a lieu plus tôt pour F21, puis nos résultats pour ε_{F19} et ε_{PP98} , et ceux de F21 convergent et restent constants sur environ une décade. ε_{Hall} et ε_{Hall}^{F21} sont alors du même ordre de grandeur. En s’approchant de $\ell_{\perp}/d_i = 1$, ε_{Hall}^{F21} change de signe plus tôt que ε_{Hall} , puis ils augmentent. La décroissance de ε_{PP98} est moins forte que celle de ε_{PP98}^{F21} et le niveau de ε_{F19} augmente un petit peu. Les échelles telles que $\ell_{\perp}/d_i < 1$ sont considérées comme la zone Hall-MHD par F21. On s’attendrait à y observer une décroissance importante de ε_{PP98} mais ce n’est pas le cas. Si l’on regarde la gamme d’échelles couverte dans la direction parallèle, on remarque que l’échelle la plus petite en dehors de $\ell_{\parallel}/d_i = 0$ est $\ell_{\parallel}/d_i = 2.42$, les échelles $\ell/d_i < 1$ ne sont donc pas atteintes sauf dans le plan $\ell_{\parallel} = 0$. Les valeurs du taux de cascade dans ce plan dépendant des plans supérieurs et inférieurs (à travers la discrétisation de l’opération de divergence) et le résultat montré est une moyenne de quelques plans. Par conséquent, on ne peut observer dans CGL1 le comportement attendu pour ε_{PP98} dans la zone Hall-MHD avec notre mode de représentation. La méthode de calcul entreprise par F21 est du type direct, proche de l’algorithme décrit figure III.1.2. Seul un ensemble parcellaire de vecteur ℓ sont calculés

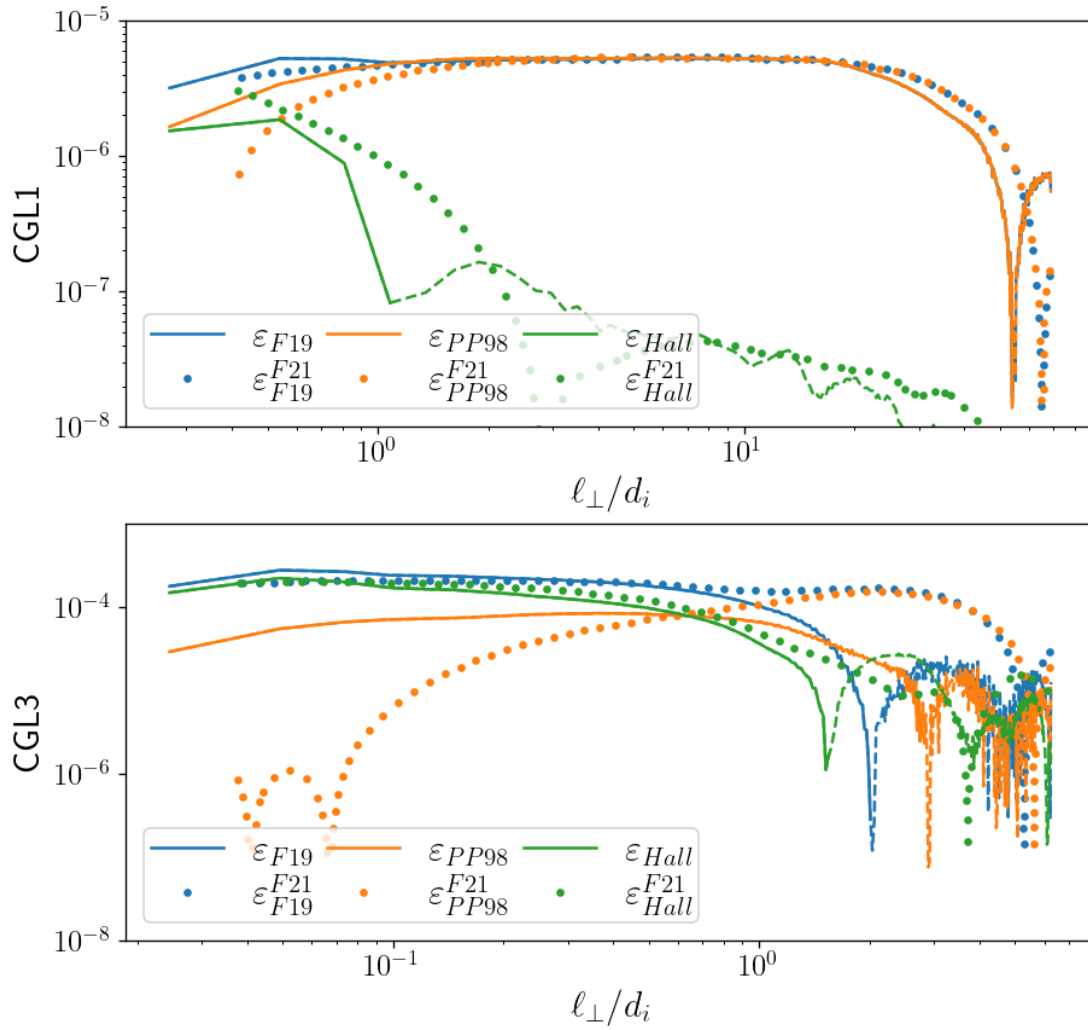


FIGURE III.2.1 – Mode de représentation : 1D en fonction de ℓ_{\perp} normalisé par d_i . Lignes pleines : nos résultats (avec en lignes discontinues les valeurs négatives). Points : résultats extraits des figures 3 et 5 de F21. Bleu : ε_{F19} . Orange : ε_{PP98} . Vert : ε_{Hall} . Haut : CGL1. Bas : CGL3.

et l'hypothèse d'axisymétrie est utilisée pour négliger les dérivations angulaires dans ∇_{ℓ} . Cette méthode repose sur davantage d'hypothèses et renvoie un résultat incomplet. Il n'est donc pas étonnant de trouver des résultats proches, mais différents.

Pour vérifier le comportement des lois dans la zone Hall-MHD, nous pouvons regarder la simulation CGL3 (graphique inférieur de III.2.1). ε_{Hall} et ε_{Hall}^{F21} y restent du même ordre de grandeur tout comme pour ε_{F19} dans les échelles Hall-MHD. On observe bien un plateau pour ε_{F19} dont la contribution dominante est ε_{Hall} . C'est le comportement attendu dans la zone Hall-MHD. Cependant, le comportement de ε_{PP98} diffère complètement de celui de ε_{PP98}^{F21} . Aux échelles Hall-MHD, ε_{PP98} , contrairement à ε_{PP98}^{F21} , ne décroît quasiment pas et seulement aux très petites échelles. On remarque que quelle que soit la simulation, seules les plus petites échelles décroissent, cela pourrait être un reflet de l'hyper-dissipation qui a lieu à ces échelles, et non d'une contribution manquante. Aux plus grandes échelles, ε_{PP98} est du même ordre de grandeur que ε_{Hall} . On ne retrouve donc pas le comportement de ε_{PP98}^{F21} qui semblait annoncer une zone inertielle MHD dans les résultats CGL3. Cette divergence de comportement concerne une décade des échelles les plus grandes et apparaît aussi bien pour CGL3 que pour CGL1. En fait, ces échelles sont proches des échelles

de forçage et se retrouvent influencées par l'injection d'énergie. Cette injection n'étant pas stationnaire, l'apparence de la cascade dans cette zone dépendra de la date de la simulation. Sachant que l'on ne travaille qu'avec une date de la simulation, cette zone sera difficilement interprétable.

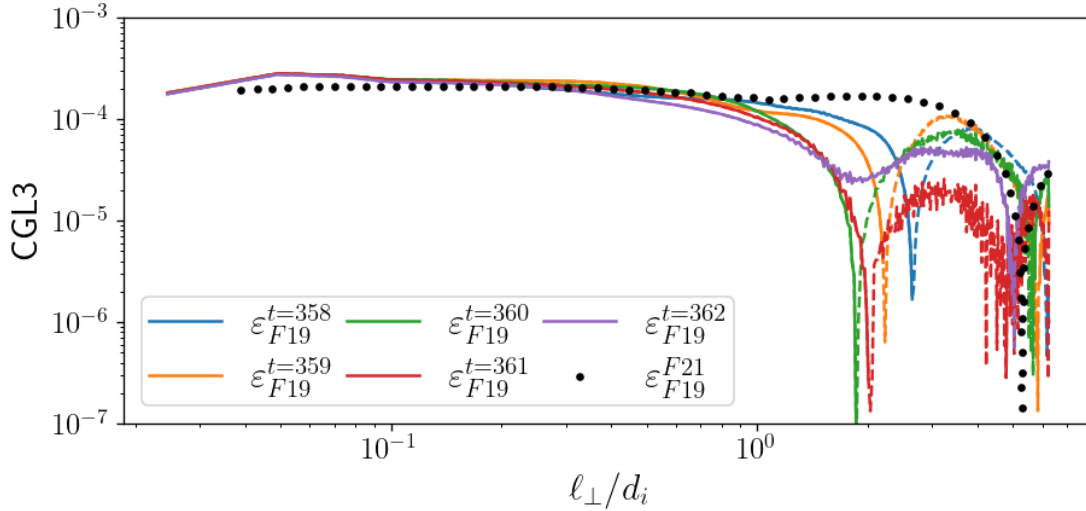


FIGURE III.2.2 – Mode de représentation : 1D en fonction de ℓ_{\perp} normalisé par d_i . ε_{F19} est obtenue pour diverses dates, t , de CGL3, chaque date correspond à une couleur. Le résultat extrait de la figure 5 de F21 est donné en pointillés.

Sur la figure III.2.2, ε_{F19} est donné pour différentes dates de CGL3 en guise d'illustration de l'effet de l'injection d'énergie. ε_{F19}^{F21} y est aussi redonné pour faciliter la comparaison. On voit qu'en fonction de la date, l'échelle limite de la zone inertielle (telle que ε_{F19} soit constant) fluctue grandement. Et à $t = 362$ (date utilisée par F21), notre résultat (courbe violette) est un peu plus proche de ε_{F19}^{F21} que ne l'est le résultat à la date $t = 361$ (courbe rouge), qui a fait l'objet de la figure III.2.1. Aux échelles inférieures à 1, le niveau de ε_{F19} varie peu quelle que soit la date considérée. Cette observation concorde avec l'hypothèse de stationnarité statistique du taux de cascade dans la zone inertielle (ici Hall-MHD). Cette hypothèse est considérée analytiquement pour obtenir des lois du type K41 (voir synthèse 1.4). La disparité entre nos résultats et ceux de F21 serait donc due aux méthodes de calcul et de visualisation, mais aussi au temps de simulation sélectionné. Afin de valider les résultats, il serait donc pertinent de regarder d'autres critères de validation.

2.1.2 Comparaison des formulations de PP98

Dans le cadre incompressible, la loi exacte PP98 peut aussi être écrite avec une autre formulation ne dépendant pas de ∇_{ℓ} . Cette loi a été dérivée par BANERJEE et KRITSUK 2017. Le taux de cascade associé sera noté ε_{BG17} , et s'écrit sous un format non normalisé :

$$\varepsilon_{BG17} = \frac{1}{2} \langle \delta(\mathbf{v} \times \mathbf{w} + \sqrt{\mu_0} \mathbf{j} \times \mathbf{v}_A) \cdot \delta \mathbf{v} + \sqrt{\mu_0} \delta(\mathbf{v} \times \mathbf{v}_A) \cdot \delta \mathbf{j} \rangle \quad (\text{III.2.1})$$

avec nos notations et $\mathbf{w} = \nabla \times \mathbf{v}$, la vorticité. Sur la figure III.2.3, est représent e la différence $\varepsilon_{PP98} - \varepsilon_{BG17}$ suivant les différents modes de représentations retenus au chapitre 2. Cette figure nous indique que, quelle que soit l'échelle ℓ , $\varepsilon_{PP98} - \varepsilon_{BG17} \sim 10^{-7}$ maximum pour CGL1. Cela correspond à 2 % du niveau moyen de ε_{PP98} qui est de l'ordre de 5×10^{-6} . On obtient ainsi une estimation relative de l'erreur effectu e sur ε_{PP98} . Cette

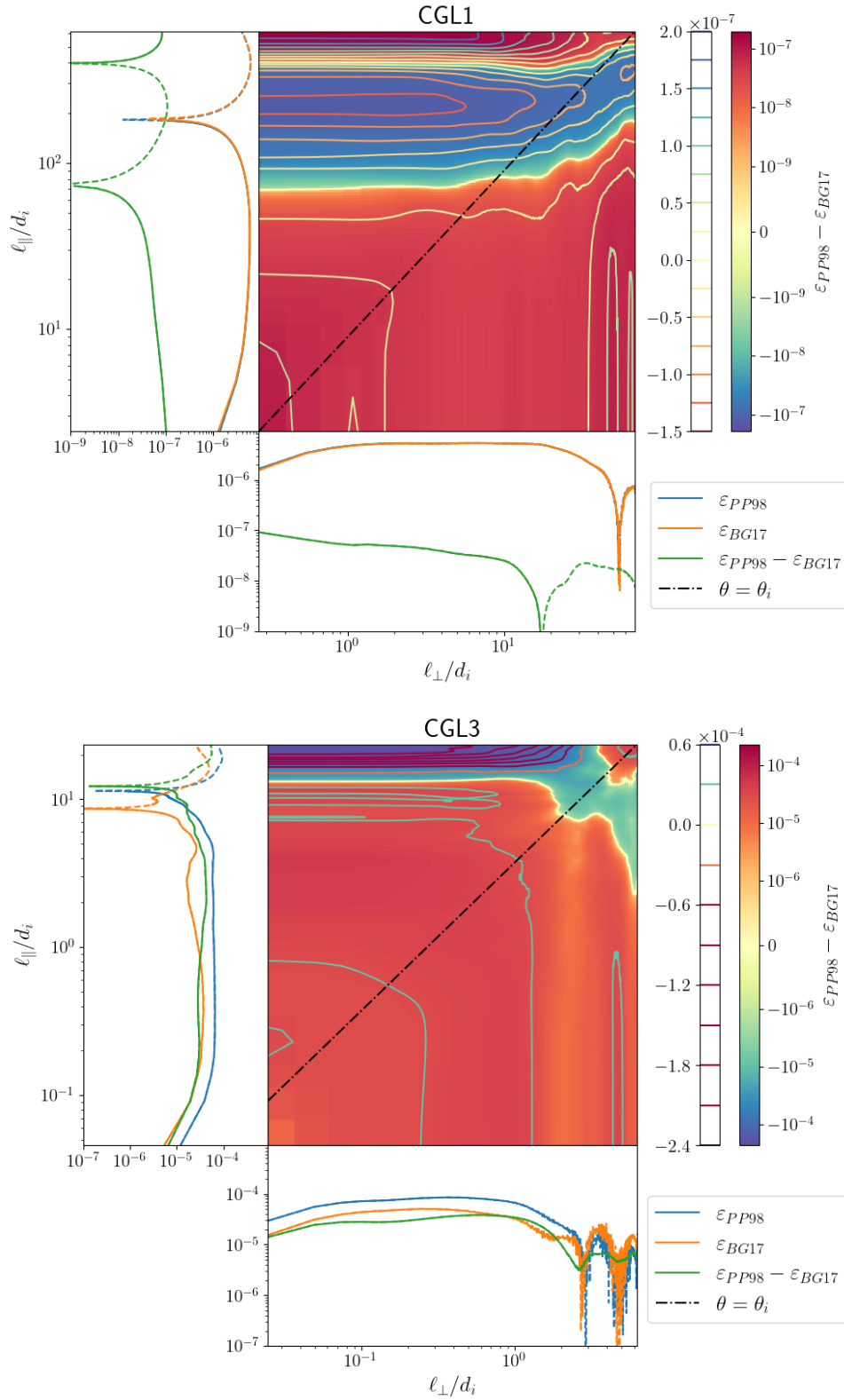


FIGURE III.2.3 – Triptyques de la différence $\varepsilon_{PP98} - \varepsilon_{BG17}$ (courbes vertes et carte 2D) calculée dans CGL1 (panel supérieur) et dans CGL3 (panel inférieur). Courbes 1D bleues : ε_{PP98} . Courbes 1D oranges : ε_{BG17} (coïncidant avec les bleues).

erreur provient du caractère global vs locale de la divergence (différence majeure entre les deux formulations) et de l'hypothèse incompressible qui est utilisée pour reformuler

certaines termes. Pour CGL3, elle est de l'ordre de 50 % aux échelles Hall-MHD. Cette valeur, plus importante que pour CGL1, provient du caractère plus compressible de CGL3 (si l'on regarde l'écart-type de la densité par exemple, elle est de l'ordre de 2×10^{-2} pour CGL1 et 8×10^{-2} pour CGL3).

Ces petites études incompressibles ont permis de se faire une idée des différences potentiellement induites par le mode de visualisation choisi et la méthode de calcul des lois exactes, de l'impact de l'injection d'énergie sur la zone inertielle, de la signification de l'hypothèse de stationnarité statistique dans ces simulations et de l'erreur apportée par la compressibilité sur un taux de cascade calculé avec une loi incompressible. Les résultats présentés ici sont cohérents avec les comportements envisageables en regardant les hypothèses analytiques (stationnarité statistique, compressibilité, zone inertielle). Pour ce qui des comportements attendus suivant les domaines de validités des lois (MHD vs Hall-MHD), ils sont en grande partie retrouvés, la contribution Hall devient bien dominante aux échelles Hall-MHD mais le PP98 ne s'effondre pas. L'ensemble de ces résultats tend à valider les méthodes numériques implémentées.

2.2 Résultats compressibles avec pression isotrope

2.2.1 Comparaison avec les prédictions de A18

Dans cette section, nous allons regarder le comportement du taux de cascade compressibles calculé en supposant une pression isotrope afin de comparer le résultat de la loi (I.2.11) aux prédictions de ANDRÉS, SAHRAOUI et al. 2018 (A18). Dans les simulations CGL1 et CGL3, trois pressions sont disponibles, les pressions ioniques parallèle, $p_{\parallel i}$, et perpendiculaire, $p_{\perp i}$, et la pression électronique supposée isotherme, $p_e = \rho$. Nous calculerons la pression isotrope telle que $p = \frac{1}{3} (2p_{\perp i} + p_{\parallel i}) + p_e$ et l'énergie interne¹, $\rho u = \frac{1}{2} (2p_{\perp i} + p_{\parallel i}) + \rho \ln \rho$. On s'attend à ce que le taux de cascade, noté ε_{f_1} , soit constant aux échelles MHD, la loi exacte étant obtenue dans le cadre d'une loi d'Ohm idéale valable si $\ell \gg d_i$.

Sur les figures III.2.4 et III.2.5, sont représentés en 1D pour CGL1 et CGL3, ε_{PP98} (bleu), ε_{f_1} (orange), le total des termes flux écrits tels des fonctions de structures, $\nabla_{\ell} \cdot \mathcal{F}_{f_1} = \nabla_{\ell} \cdot [\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2]$ (vert et représentation 2D de gauche), les contributions $\nabla_{\ell} \cdot \mathcal{F}_1$ (violet) et $\nabla_{\ell} \cdot \mathcal{F}_2$ (marron), et \mathcal{S}_{f_1} (rouge, et représentation 2D de droite), la somme des autres termes (nommés sources, hybrides et béta par A18). \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 sont définis tels que :

$$\mathcal{F}_1 = -\frac{1}{4} \langle (\delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{v} + \delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \delta \mathbf{v}_A) \delta \mathbf{v} - (\delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \delta \mathbf{v} + \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{v}_A) \delta \mathbf{v}_A \rangle \quad \text{III.2.2}$$

$$\mathcal{F}_2 = -\frac{\beta_0}{4} \langle \delta \rho \delta u \delta \mathbf{v} \rangle \quad \text{III.2.3}$$

En prenant en compte le facteur de normalisation $\frac{\beta_0}{2}$ mentionné dans la section 1.1 (il doit aussi être pris en compte dans \mathcal{S}_{f_1}).

Pour CGL1 (fig. III.2.4) comme pour CGL3 (fig. III.2.5), on retrouve le comportement prédit par A18 : un taux de cascade ε_{f_1} dominé par le terme flux $\nabla_{\ell} \cdot \mathcal{F}_1$ qui

1. L'énergie interne des ions est l'énergie interne gyrotrope : $\rho_i u_i = \frac{1}{2} (2p_{\perp i} + p_{\parallel i})$. L'énergie interne des électrons s'obtient à partir du premier principe de la thermodynamique (cas isentrope-isotherme, voir chapitre I.1) appliqué aux quantités électroniques et en supposant $p_e = \rho = \rho_i$: $u_e = \frac{p_e}{\rho_e} \ln \left(\frac{\rho_e}{\rho_{e0}} \right) = \frac{m_i}{m_e} \ln \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)$ avec $\rho_0 = 1$ (initialisation des simulations).

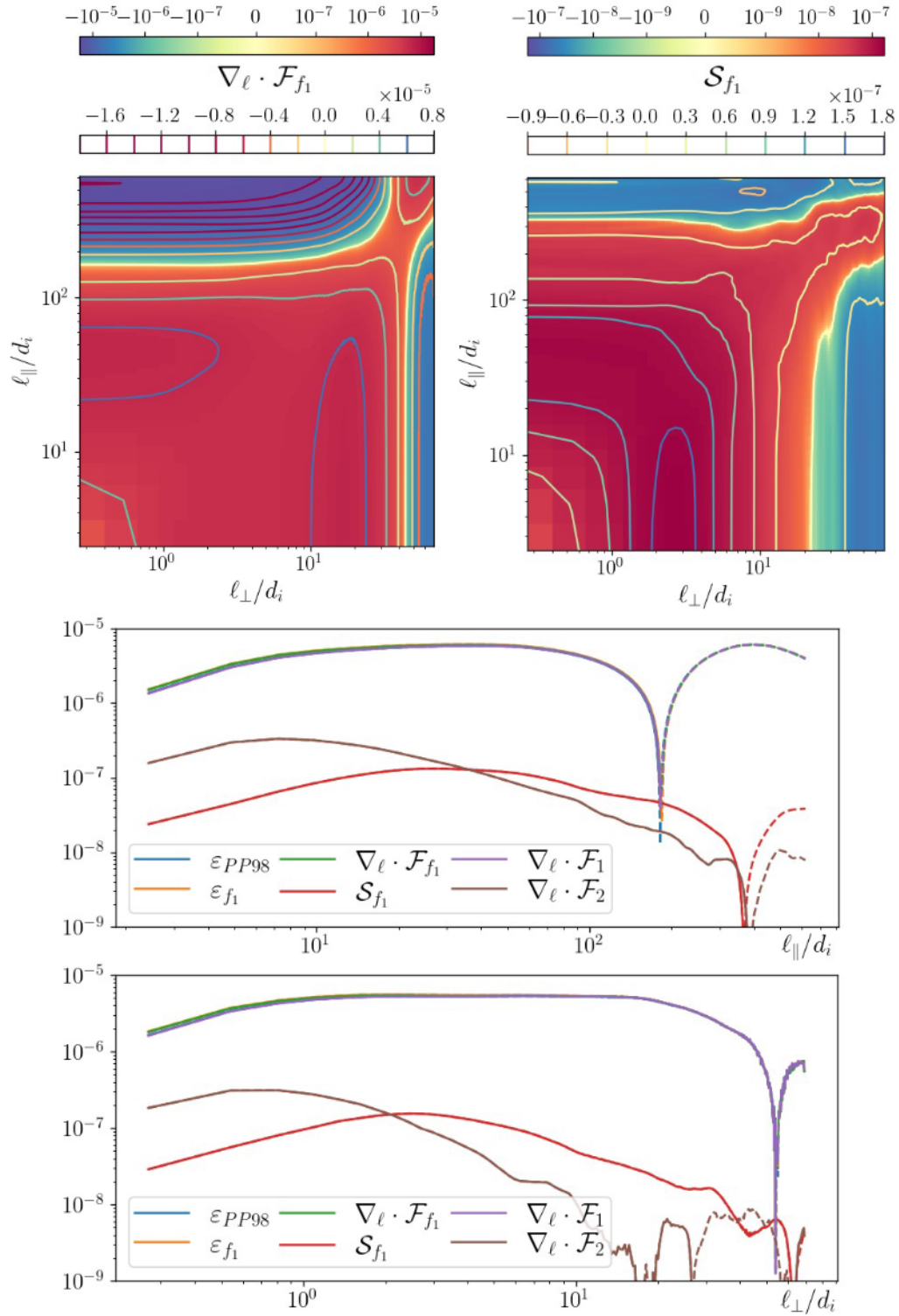


FIGURE III.2.4 – Panel d'étude de ε_{f_1} dans CGL1. Première ligne de gauche à droite : Représentation 2D de $\nabla_{\ell} \cdot \mathcal{F}_{f_1}$ et \mathcal{S}_{f_1} . Deuxième ligne : Représentation 1D en fonction de ℓ_{\perp}/d_i . Troisième ligne : Représentation 1D en fonction de ℓ_{\parallel}/d_i . Sur les représentations 1D : ε_{PP98} (bleu), ε_{f_1} (orange), $\nabla_{\ell} \cdot \mathcal{F}_{f_1}$ (vert), \mathcal{S}_{f_1} (rouge), $\nabla_{\ell} \cdot \mathcal{F}_1$ (violet) et $\nabla_{\ell} \cdot \mathcal{F}_2$ (marron).

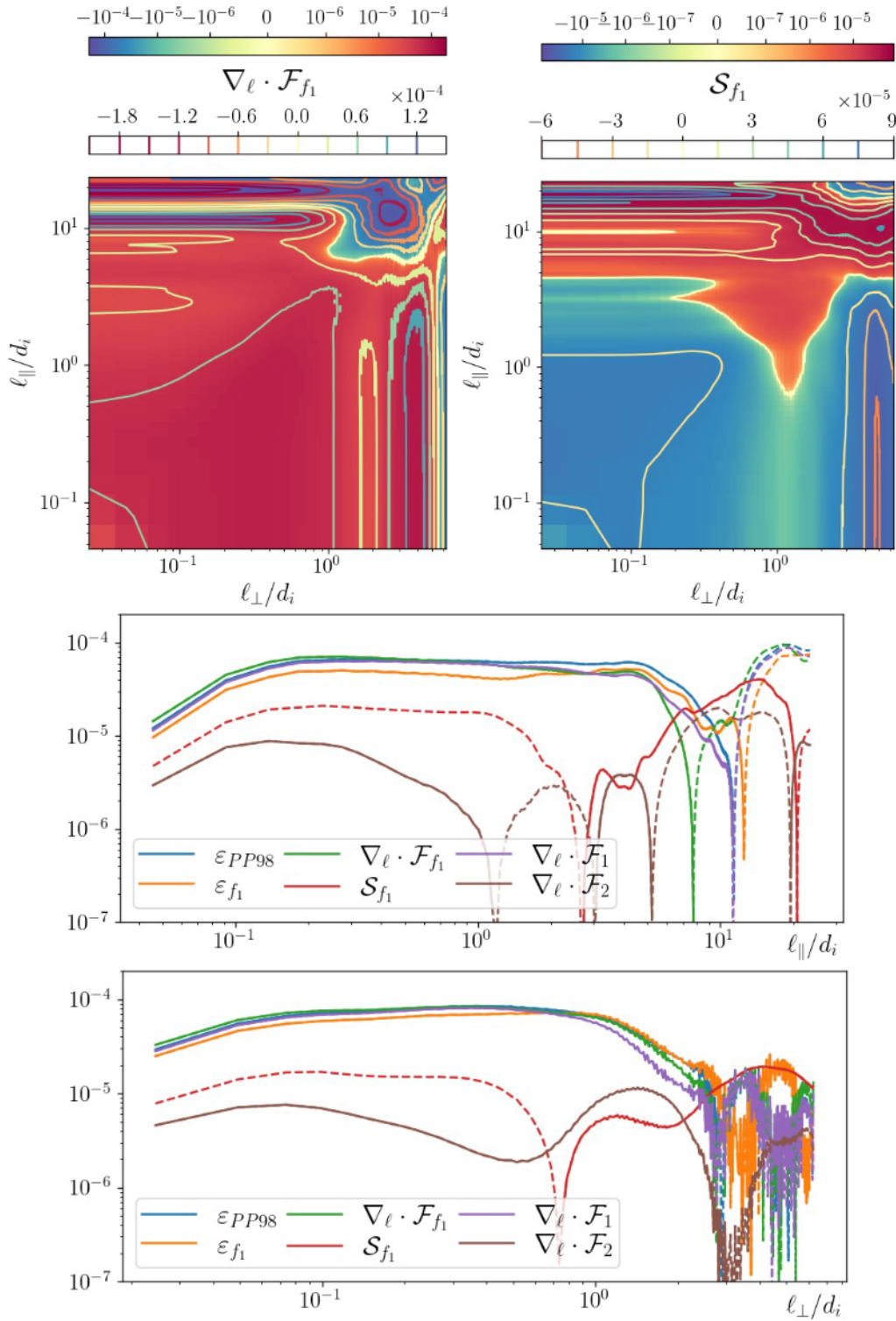


FIGURE III.2.5 – Panel d'étude de ε_{f_1} dans CGL3. Première ligne de gauche à droite : Représentation 2D de $\nabla_{\ell} \cdot \mathcal{F}_{f_1}$ et \mathcal{S}_{f_1} . Deuxième ligne : Représentation 1D en fonction de ℓ_{\perp}/d_i . Troisième ligne : Représentation 1D en fonction de ℓ_{\parallel}/d_i . Sur les représentations 1D : ε_{PP98} (bleu), ε_{f_1} (orange), $\nabla_{\ell} \cdot \mathcal{F}_{f_1}$ (vert), \mathcal{S}_{f_1} (rouge), $\nabla_{\ell} \cdot \mathcal{F}_1$ (violet) et $\nabla_{\ell} \cdot \mathcal{F}_2$ (marron).

correspond aux termes survivant dans la limite incompressible et les termes résumés par \mathcal{S}_{f_1} se compensant pour devenir négligeable. Pour CGL1, ε_{PP98} , ε_{f_1} , $\nabla_{\ell} \cdot \mathcal{F}_{f_1}$, $\nabla_{\ell} \cdot \mathcal{F}_1$ sont superposés. La différence entre ε_{PP98} et ε_{f_1} est de l'ordre de 10 % comme l'a indiqué FERRAND, SAHRAOUI, LAVEDER et al. 2021. La contribution provenant de $\nabla_{\ell} \cdot \mathcal{F}_2$ s'accroît vers les petites échelles mais reste inférieure à 10 % du taux de cascade. Les autres contributions, résumés par \mathcal{S}_{f_1} correspondent à environ 1 % du taux de cascade. Pour CGL3, la contribution \mathcal{S}_{f_1} est plus importante et correspond à environ 20 %. Comme dans le cas incompressible (voir section 3.2), ε_{f_1} ne décroît quasiment pas.

2.2.2 Comparaison des formulations dérivées dans le chapitre I.2

Dans le chapitre I.2, diverses formulations pour les termes dépendant de la pression ont été dérivées. Elles s'obtiennent à partir de (I.2.16), (I.2.17) et (I.2.21). On propose de les comparer dans cette section.

Reformulation des termes de pression magnétique entre f1 et f2 via (I.2.17) :
Les termes composant ε_{pm} (I.2.17) correspondent dans f1 à des termes sources, hybrides et β -dépendant d'après les dénominations de A18, et dans f2, à un terme flux et des termes sources. Ils seront découpés suivant :

- f1 : la contribution hybride $\mathcal{H}_{f_1}^{pm} = -\frac{1}{4} \nabla_{\ell} \cdot \left\langle \left(1 + \frac{\rho'}{\rho}\right) p_m \mathbf{v}' - \left(1 + \frac{\rho}{\rho'}\right) p'_m \mathbf{v} \right\rangle$
- f1 : la contribution d'énergie magnétique présente dans les termes sources et hybrides de A18 :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{f_1}^{pm} = & -\frac{1}{4} \left\langle \left(\rho \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{v}_A - \frac{1}{2} (\rho' + \rho) \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A \right) \nabla' \cdot \mathbf{v}' \right\rangle \\ & + \frac{1}{4} \left\langle \left(\rho' \mathbf{v}'_A \cdot \delta \mathbf{v}_A + \frac{1}{2} (\rho' + \rho) \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A \right) \nabla \cdot \mathbf{v} \right\rangle \end{aligned}$$

- f1 : la contribution β -dépendante $\mathcal{M}_{f_1}^{pm} = \frac{1}{4} \left\langle \rho \frac{p'_m}{\rho'} \mathbf{v} \cdot \frac{\nabla' \rho'}{\rho'} + \rho' \frac{p_m}{\rho} \mathbf{v}' \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} \right\rangle$
- f2 : le terme flux $\nabla_{\ell} \cdot \mathcal{F}_{f_2}^{pm} = \frac{1}{4} \nabla_{\ell} \cdot \left\langle \delta \rho \delta \frac{p_m}{\rho} \delta \mathbf{v} \right\rangle$
- f2 : les termes sources

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{f_2}^{pm} = & -\frac{1}{4} \left\langle \left(\delta \rho \frac{p_m}{\rho} - \rho \delta \left(\frac{p_m}{\rho} \right) \right) \mathbf{v} \cdot \frac{\nabla' \rho'}{\rho'} - \left(\delta \rho' \frac{p'_m}{\rho'} - \rho' \delta \left(\frac{p'_m}{\rho'} \right) \right) \mathbf{v}' \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} \right\rangle \\ & - \frac{1}{8} \left\langle (\rho \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{v}_A - \mathbf{v}_A \cdot \delta (\rho \mathbf{v}_A)) \nabla' \cdot \mathbf{v}' - (\rho' \mathbf{v}'_A \cdot \delta \mathbf{v}_A - \mathbf{v}'_A \cdot \delta (\rho' \mathbf{v}_A)) \nabla \cdot \mathbf{v} \right\rangle \end{aligned}$$

$\mathcal{M}_{f_1}^{pm}$ contient la contribution qui peut être reformulée en appliquant le premier principe thermodynamique (I.1.30) isentrope, cette réécriture est donnée dans l'équation (I.2.12). Sachant que p dépend des pressions ioniques parallèle et perpendiculaire, la validité du premier principe thermodynamique remise en cause. La formule de $\mathcal{M}_{f_1}^{pm}$ ne dépendra donc pas explicitement du paramètre $\beta = p/p_m$ du plasma révélé par la reformulation. Pour les deux simulations, la figure III.2.6 montre que la décomposition (courbes bleues) en termes source, hybride et β -dépendant de la formulation f1 inspirée de A18, reflète moins bien la contribution de pression magnétique du taux de cascade que le découpage (courbes vertes) en termes flux et sources de f2. A l'exception de $\mathcal{S}_{f_1}^{pm}$, ils sont loin de refléter individuellement ε_{pm} . A contrario, $\mathcal{S}_{f_2}^{pm}$ reflète efficacement les variations et le signe

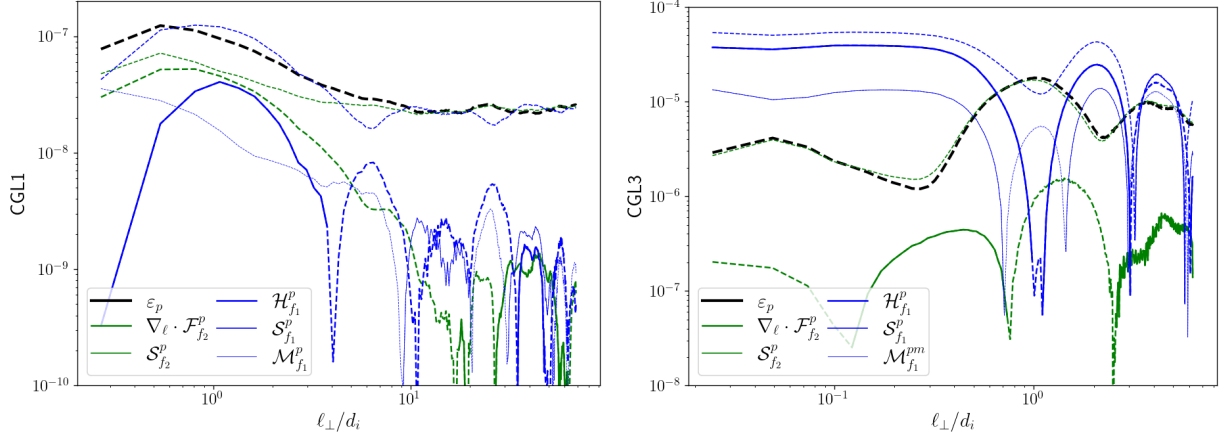


FIGURE III.2.6 – Panel d'étude de la reformulation de la contribution de pression magnétique ε_{pm} (noir) dans CGL1 (gauche) et CGL3 (droite).

Bleu : Décomposition des termes de f1. Epais : contribution hybride $\mathcal{H}_{f_1}^{pm}$. Moyen : contribution d'énergie magnétique $\mathcal{S}_{f_1}^{pm}$. Fin : contribution β -dépendante $\mathcal{M}_{f_1}^{pm}$.

Vert : Décomposition des termes de f2. Epais : terme flux $\nabla_{\ell} \cdot \mathcal{F}_{f_2}^{pm}$. Fin : termes sources $\mathcal{S}_{f_2}^{pm}$. Représentation : 1D fonction de ℓ_{\perp} .

de ε_{pm} pour les deux simulations sauf pour les petites échelles de CGL1 où $\nabla_{\ell} \cdot \mathcal{F}_{f_2}^{pm}$ domine.

Reformulation des termes de pression entre f1 et f2 via (I.2.17) : Une étude similaire peut être effectuée pour les termes composant ε_p (I.2.16). Ils seront découpés suivant :

- f1 : la contribution hybride $\mathcal{H}_{f_1}^p = -\frac{1}{4} \nabla_{\ell} \cdot \left\langle \left(1 + \frac{\rho'}{\rho}\right) p \mathbf{v}' - \left(1 + \frac{\rho}{\rho'}\right) p' \mathbf{v} \right\rangle$
- f1 : la contribution de type source qui ne devient hybride que dans le cas isotherme, car p/ρ est alors constant : $\mathcal{S}_{f_1}^p = \frac{1}{2} \left\langle \rho \frac{p'}{\rho'} \nabla \cdot \mathbf{v}' + \rho' \frac{p}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{v} \right\rangle$
- f1 : la contribution qui peut être réécrite en appliquant le premier principe thermodynamique (I.2.12) $\mathcal{M}_{f_1}^p = -\frac{1}{4} \left\langle \rho \frac{p'}{\rho'} \mathbf{v} \cdot \frac{\nabla' \rho'}{\rho'} + \rho' \frac{p}{\rho} \mathbf{v}' \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} \right\rangle$
- f2 : le terme flux $\nabla_{\ell} \cdot \mathcal{F}_{f_2}^p = \frac{1}{4} \nabla_{\ell} \cdot \left\langle \delta \rho \delta \frac{p}{\rho} \delta \mathbf{v} \right\rangle$
- f2 : les termes sources $\mathcal{S}_{f_2}^{pm} = -\frac{1}{2} \left\langle \rho' \delta \left(\frac{p}{\rho} \right) \nabla \cdot \mathbf{v} - \rho \delta \left(\frac{p}{\rho} \right) \nabla' \cdot \mathbf{v}' \right\rangle$
 $- \frac{1}{4} \left\langle \left(\delta \rho \frac{p_*}{\rho} - \rho \delta \left(\frac{p}{\rho} \right) \right) \mathbf{v} \cdot \frac{\nabla' \rho'}{\rho'} - \left(\delta \rho \frac{p'}{\rho'} - \rho' \delta \left(\frac{p_*}{\rho} \right) \right) \mathbf{v}' \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} \right\rangle$

Les observations effectuées pour la contribution de pression magnétique au taux de cascade sont exactement les mêmes pour la contribution de pression représentée sur la figure III.2.7. La formulation f2 séparant termes flux et termes sources semble donc plus appropriée pour représenter la cascade. En interprétant les termes flux en tant qu'énergie transférée à travers les échelles et les termes sources tels des réservoirs d'énergie localisés aux différentes échelles, il semble que les contributions de pression magnétique et thermodynamique aient plutôt des rôles de réservoirs. L'augmentation des termes flux aux petites échelles de CGL1 indiquerait, avec cette interprétation, le lieu d'un transfert d'énergie à travers les échelles, permis par ces pressions².

2. Il serait intéressant de démontrer analytiquement ces comportements à l'aide d'une théorie plus locale telle que la théorie de «coarse-graining» qui a permis de démontrer l'existence d'une cascade d'entropie par exemple [EYINK et DRIVAS 2018]

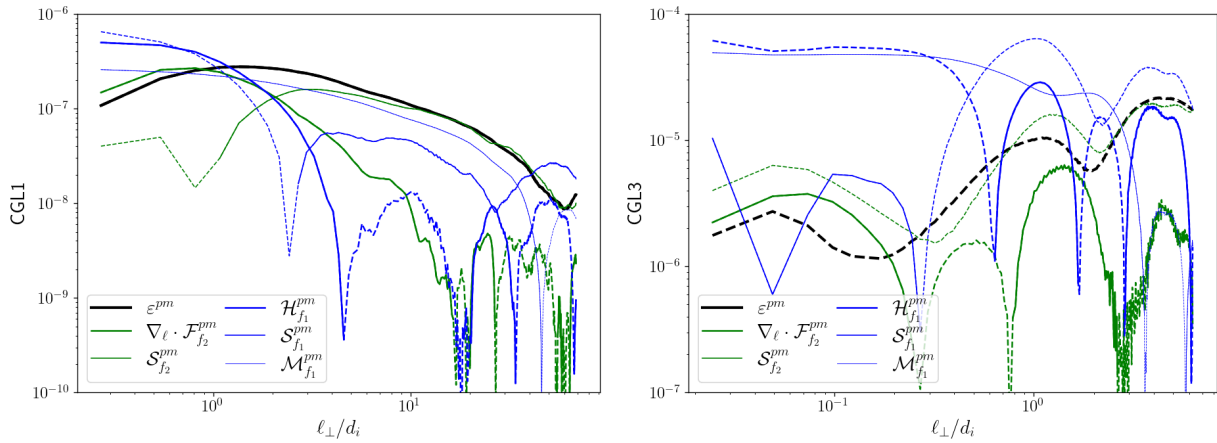


FIGURE III.2.7 – Panel d'étude de la reformulation de la contribution de pression magnétique ε_p (noir) dans CGL1 (gauche) et CGL3 (droite).

Bleu : Décomposition des termes de f1. Epais : contribution hybride $\mathcal{H}_{f_1}^p$. Moyen : contribution d'énergie magnétique $\mathcal{S}_{f_1}^p$. Fin : contribution β -dépendante $\mathcal{M}_{f_1}^p$.

Vert : Décomposition des termes de f2. Epais : terme flux $\nabla_{\ell} \cdot \mathcal{F}_{f_2}^p$. Fin : termes sources $\mathcal{S}_{f_2}^p$. Représentation : 1D fonction de ℓ_{\perp} .

Reformulation des termes de pressions totales entre f2 et f3 via (I.2.21) : Dans la formulation f3, la contribution de pression totale, ε^{p*} , est reformulée (voir (I.2.21)). Afin de déterminer l'apport de f3 par rapport à f2, sont définies les quantités suivantes :

- f2 : le terme flux $\nabla_{\ell} \cdot \mathcal{F}_{f_2}^{p*} = \frac{1}{4} \nabla_{\ell} \cdot \langle \delta \rho \delta_{\rho}^p \delta \mathbf{v} \rangle$
- f2 : les termes sources $\mathcal{S}_{f_2}^{p*} = -\frac{1}{4} \left\langle \left(\delta \rho \frac{p_*}{\rho} - \rho \delta \left(\frac{p_*}{\rho} \right) \right) \mathbf{v} \cdot \frac{\nabla' \rho'}{\rho'} - \left(\delta \rho \frac{p'_*}{\rho'} - \rho' \delta \left(\frac{p_*}{\rho} \right) \right) \mathbf{v}' \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} \right\rangle$
- f3 : le terme flux $\nabla_{\ell} \cdot \mathcal{F}_{f_3}^{p*} = -\frac{1}{4} \nabla_{\ell} \cdot \langle \delta p_* \delta (1/\rho) \delta (\rho \mathbf{v}) \rangle$
- f3 : les termes sources $\mathcal{S}_{f_3}^{p*} = -\frac{1}{4} \left\langle \delta (p_*) \rho \mathbf{v} \cdot \nabla' \left(\frac{1}{\rho'} \right) - \delta (p_*) \rho' \mathbf{v}' \cdot \nabla \left(\frac{1}{\rho} \right) \right\rangle$

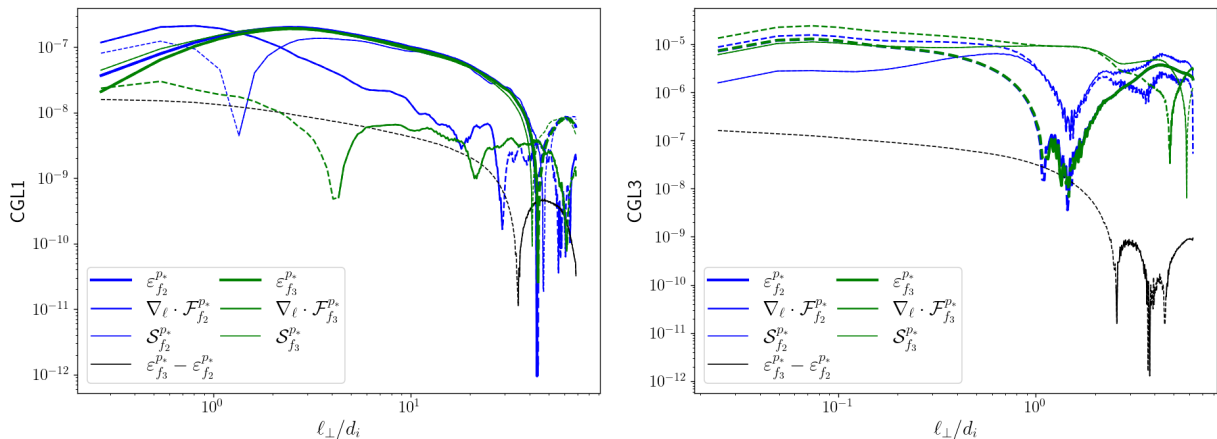


FIGURE III.2.8 – Détails des termes flux (épaisseur moyenne) et sources (épaisseur fine) de ε^{p*} (épaisseur épaisse) obtenu via les formulations f2 (bleu) et f3 (vert). La différence $\varepsilon_{f_3}^{p*} - \varepsilon_{f_2}^{p*}$ correspond à la courbe noire. Représentation : 1D fonction de ℓ_{\perp} . Gauche : CGL1. Droite : CGL3

La figure III.2.8 montre une répartition différente entre f2 et f3 de la contribution de pression totale sur les termes flux et sources. La différence entre la contribution écrite via f2 et celle écrite via f3 (courbe noir) n'est pas de l'ordre du zéro numérique, contrairement aux

résultats sur la reformulation entre f2 et f1. On suspecte une erreur dans l'implémentation des termes de f3, mais cette dernière n'a pas été identifiée. Par la suite, on n'utilisera donc pas f3.

2.3 Niveau de référence et différence entre fonctions de corrélations

Une autre méthode de validation de nos résultats consiste à vérifier l'équation KHM dérivée à partir du modèle simulé.

2.3.1 Calcul de la loi KHM

Une loi de type KHM peut s'écrire schématiquement (voir chapitre 1 de l'Introduction) :

$$\partial_t \mathcal{R} = -\varepsilon_{NL} + \varepsilon_D + \varepsilon_F \quad (\text{III.2.4})$$

ε_{NL} correspond à l'expression de ε donnée par la loi exacte K41 obtenue pour le modèle simulé, dans son intégralité. Nous verrons sont contenus un peu plus en détail dans les chapitres 4 (MCGL) et ?? (MLF).

$\partial_t \mathcal{R}$ est la dérivée temporelle de la fonction de corrélation utilisée pour obtenir la loi exacte. Dans nos études, cette fonction est $\mathcal{R} = \frac{1}{4} \langle (\rho' + \rho)(\mathbf{v}' \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v}'_{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{A}}) + 2\rho'u + 2\rho u' \rangle$. Pour estimer ce terme, on va utiliser les temps consécutifs relevés dans la simulation. La dérivée temporelle sera obtenue grâce à des schémas de discrétisation de type «différences finies» d'ordre 2 :

- décentrée vers la droite pour le premier temps t_0 : $(\partial_t \mathcal{R})(t_0) = \frac{\mathcal{R}(t_0 + \delta t) - \mathcal{R}(t_0)}{\delta t}$,
- décentrée vers la gauche pour le dernier temps t_{N_t} : $(\partial_t \mathcal{R})(t_{N_t}) = \frac{\mathcal{R}(t_{N_t}) - \mathcal{R}(t_{N_t} - \delta t)}{\delta t}$,
- centrée pour les autres temps : $(\partial_t \mathcal{R})(t_n) = \frac{\mathcal{R}(t_{n+1}) - \mathcal{R}(t_{n-1})}{2\delta t}$ avec $n \in]0, N_t[$.

Le forçage présent dans nos simulations est un forçage de type Langevin appliqué sur le champ de vitesse. Par conséquent, le taux de forçage ε_F s'écrira $\varepsilon_F = \frac{1}{4} \langle (\rho' + \rho)(\mathbf{v}' \cdot \mathbf{f} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}') \rangle$. Ce forçage dépend de deux composantes aléatoires qui font partie des quantités extraites de la simulation, elles seront notées f_{sup} et f_{inf} . Elles permettent de construire une quantité intermédiaire $F = a_1 f_{sup} + (1 - a_1) * f_{inf}$. Les composantes de \mathbf{f} sont alors : $f_x = \partial_y F$, $f_y = -\partial_x F$, $f_z = 0$.

Le taux de dissipation ε_D couvre l'ensemble des hyperdissipations présentes dans le système. Chaque quantité est associée à une hyperdissipation du type $\nu_X \Delta^4 X$ avec X quantité générique et $\Delta^4 = (\partial_x^2 + \partial_y^2 + \alpha \partial_z^2)^4$. On va décomposer ε_D tel que :

$$\varepsilon_D = \varepsilon_D^c + \varepsilon_D^m + \varepsilon_D^{ui} + \varepsilon_D^{ue} \quad (\text{III.2.5})$$

avec :

- la contribution cinétique avec $\mathbf{D}_v = \nu \Delta^4 \mathbf{v}$ et $D_\rho = \nu_\rho \Delta^4 \rho$:

$$\varepsilon_D^c = \varepsilon_D^c(\mathbf{D}_v) + \varepsilon_D^c(D_\rho) = -\frac{1}{4} \langle (\rho' + \rho)(\mathbf{v}' \cdot \mathbf{D}_v + \mathbf{v} \cdot \mathbf{D}'_v) \rangle - \frac{1}{4} \langle (D'_\rho + D_\rho) \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v} \rangle \quad (\text{III.2.6})$$

- la contribution magnétique avec $\mathbf{D}_{\mathbf{v}_A} = \frac{\eta}{\sqrt{\rho}} \Delta^4 (\sqrt{\rho} \mathbf{v}_A)$:

$$\begin{aligned} \varepsilon_D^m = \varepsilon_D^m(\mathbf{D}_{\mathbf{v}_A}) + \varepsilon_D^m(D_\rho) &= -\frac{1}{4} \langle (\rho' + \rho) (\mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{D}_{\mathbf{v}_A} + \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{D}'_{\mathbf{v}_A}) \rangle \\ &\quad -\frac{1}{8} \left\langle (\rho' - \rho) \left(\frac{D'_\rho}{\rho'} - \frac{D_\rho}{\rho} \right) \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A \right\rangle \quad (\text{III.2.7}) \end{aligned}$$

- la contribution d'énergie interne ionique (gyrotrope) avec $D_u = \frac{\nu_p}{2} \Delta^4 (2p_{\perp i} + p_{\parallel i})$ et sachant que $\rho_i u_i = \frac{1}{2} (2p_{\perp i} + p_{\parallel i})$:

$$\varepsilon_D^{ui} = \varepsilon_D^{ui}(D_u) + \varepsilon_D^{ui}(D_\rho) = -\frac{1}{2} \left\langle \frac{\rho}{\rho'} D'_u + \frac{\rho'}{\rho} D_u \right\rangle - \frac{1}{2} \left\langle \left(\frac{D'_\rho}{\rho'} - \frac{D_\rho}{\rho} \right) (\rho' u_i - \rho u'_i) \right\rangle \quad (\text{III.2.8})$$

- la contribution d'énergie interne électronique (isotherme) sachant que $\rho_e u_e = \rho \ln \rho$:

$$\varepsilon_D^{ue} = -\frac{1}{2} \left\langle D'_\rho \ln \rho + D_\rho \ln \rho' + \frac{\rho'}{\rho} D_\rho + \frac{\rho}{\rho'} D'_\rho \right\rangle \quad (\text{III.2.9})$$

et ν , η , ν_ρ et ν_p des constantes choisies empiriquement pour chaque simulation. η est choisie égale à ν . Sachant que dans la majorité des simulations du modèle MCGL, $\nu_\rho = 0$ et $\nu_p \ll \nu$, on a négligé les contributions d'énergie interne ainsi que les termes dépendant de D_ρ dans les contributions cinétique et magnétique.

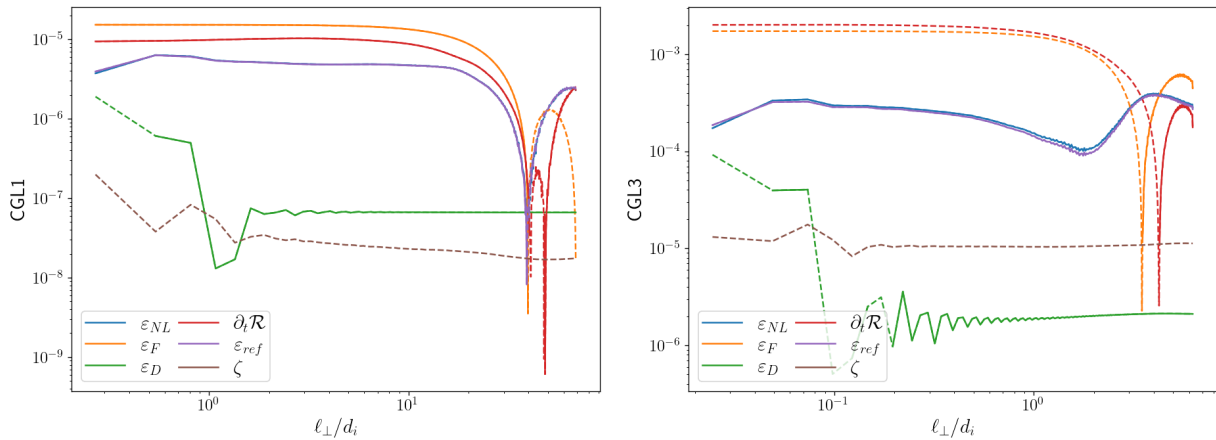


FIGURE III.2.9 – Détail de la loi KHM pour CGL1 (gauche) et CGL3 (droite). Bleu : ε_{NL} . Orange : ε_F . Vert : ε_D . Rouge : $\partial_t \mathcal{R}$. Violet : $\varepsilon_{ref} = -\partial_t \mathcal{R} + \varepsilon_D + \varepsilon_F$. Marron : $\zeta = \varepsilon_{ref} - \varepsilon_{NL}$. Représentation : 1D en fonction de ℓ_\perp avec les valeurs positives en trait plein et négative en trait discontinu.

Sur les figures ?? et ??, ε_{NL} (bleu) est comparé à $\varepsilon_{ref} = -\partial_t \mathcal{R} + \varepsilon_D + \varepsilon_F$ (violet), construit à partir de $\partial_t \mathcal{R}$ (rouge), ε_D (vert) et ε_F (orange). La différence $\zeta = \varepsilon_{ref} - \varepsilon_{NL}$ est donnée en marron. On remarque qu'elle n'est pas de l'ordre du zéro numérique ($\sim 10^{-20}$) mais de l'ordre de deux à trois ordres de grandeurs en dessous du niveau de ε_{NL} .

La forme des termes $\partial_t \mathcal{R}$, ε_D et ε_F est particulière et ne semble pas en accord avec les hypothèses de Kolmogorov. On s'attendrait naïvement à voir une gamme d'échelle pour laquelle ces termes tendraient vers zéro, la zone inertielle étant définie par les hypothèses de stationnarité statistique (annulant a priori $\partial_t \mathcal{R}$) et de séparation d'échelle.

Le terme de dissipation est aussi particulier, il décroît puis sature. Son détail donné sur

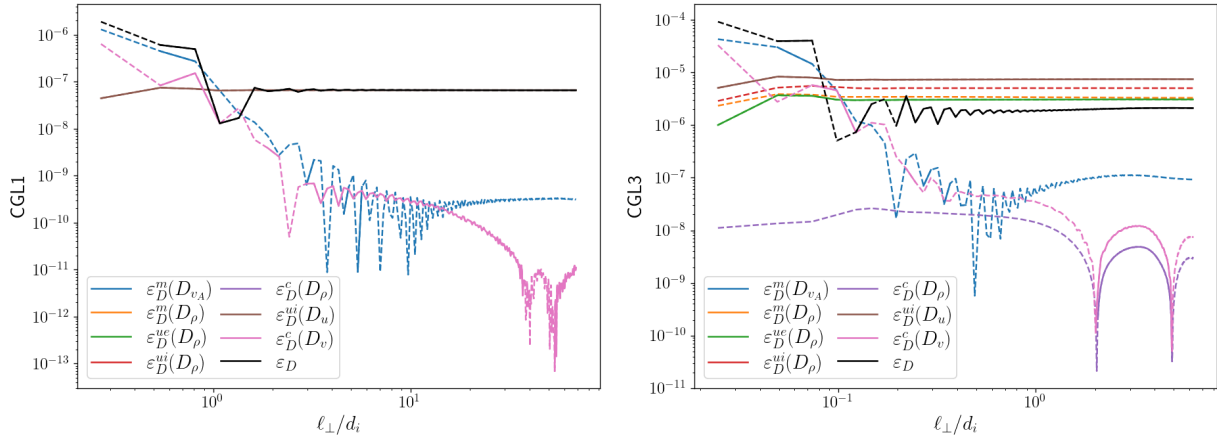


FIGURE III.2.10 – Détail du terme d'hyperdissipation, ε_D (noir), pour CGL1 (gauche) et CGL3 (droite). Bleu : $\varepsilon_D^m(D_{v_A})$. Orange : $\varepsilon_D^m(D_\rho)$. Vert : $\varepsilon_D^{ue}(D_\rho)$. Rouge : $\varepsilon_D^{ui}(D_\rho)$. Violet : $\varepsilon_D^c(D_\rho)$. Marron : $\varepsilon_D^{ui}(D_u)$. Rose : $\varepsilon_D^c(D_v)$. Représentation : 1D en fonction de ℓ_\perp avec les valeurs positives en trait plein et négative en trait discontinu.

la figure III.2.10 révèle un niveau constant des contributions dépendant de D_ρ ou d'une énergie interne alors que ceux dépendant de D_{v_A} ou D_v s'amenuisent en allant vers les grandes échelles. La tendance de la décroissance de ces termes est en ℓ^{-2} environ.

2.3.2 Calcul de la loi KHMS

Dans le chapitre 1 de l'Introduction, on a abordé un autre type de fonction de corrélation : la fonction de corrélation incrémentale. Celle associée à \mathcal{R} est :

$$\mathcal{S} = \frac{1}{4} \langle \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{v} + \delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \delta \mathbf{v}_A + 2\delta\rho\delta u \rangle \quad (\text{III.2.10})$$

On a alors la relation $\mathcal{S} = \langle E_{tot} \rangle - \mathcal{R}$ et sachant que $\mathcal{R}(\ell = 0) = \langle E_{tot} \rangle$, il est facile de passer de l'expression (III.2.11) à la loi que l'on va nommée KHMS :

$$\partial_t \mathcal{S} = -\mathcal{E}_{NL} + \mathcal{E}_D + \mathcal{E}_F \quad (\text{III.2.11})$$

avec : $\mathcal{E}_{NL} = \varepsilon_{NL}(\ell = 0) - \varepsilon_{NL}$, $\mathcal{E}_D = \varepsilon_D(\ell = 0) - \varepsilon_D$ et $\mathcal{E}_F = \varepsilon_F(\ell = 0) - \varepsilon_F$. On notera que l'équation d'énergie totale s'écrit sous la forme $\partial_t E_{tot} + \nabla \cdot \mathbf{F}_{tot} = S$ avec S les termes sources (dissipation et forçage) et \mathbf{F}_{tot} , le total de flux. Puisque $\langle \nabla \cdot \mathbf{F}_{tot} \rangle = \nabla_\ell \cdot \langle \mathbf{F}_{tot} \rangle = -\langle \nabla' \cdot \mathbf{F}_{tot} \rangle = 0$, alors $\mathcal{E}_{NL} = -\varepsilon_{NL}$.

En appliquant cette transformation sur le détail de la loi KHM (fig. III.2.9), on obtient les résultats de la figure ???. On y remarque que le comportement des termes de forçage et dissipations se sont inversés : \mathcal{E}_F augmente avec une pente e facteur 2 et \mathcal{E}_D reste constant avant de changer de signe vers les grandes échelles. La différence $\mathcal{Z} = \mathcal{E}_{ref} - \mathcal{E}_{NL} = (-\partial_t \mathcal{S} + \mathcal{E}_D + \mathcal{E}_F) - \mathcal{E}_{NL}$ est supérieure à ζ . La différence entre \mathcal{Z} et ζ correspond à l'erreur effectuée sur les quantités globales, $\langle E_{tot} \rangle$, etc. en les estimant telles que les valeurs de \mathcal{R} , etc. en $\ell = 0$ associée à l'erreur apportée par la simulation originale sur les quantités globales. Sachant que $\mathcal{Z} > \zeta$, \Rightarrow erreur provenant de notre post-traitement négligeable devant l'incertitude de la simulation d'origine. On gardera le niveau ζ comme repère dans les représentations suivantes, ce niveau questionnant la validité physique des contributions qui lui sont inférieures.

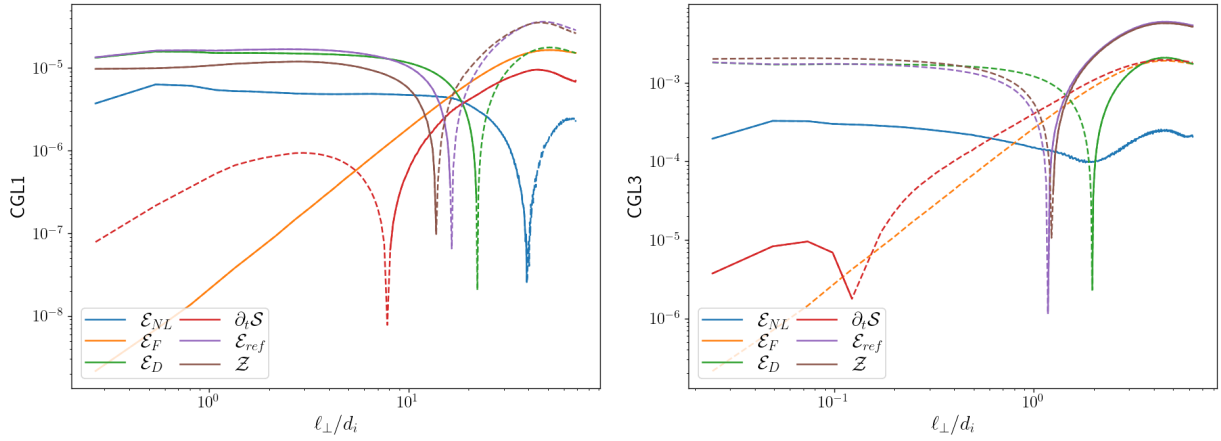


FIGURE III.2.11 – Détail de la loi KHMS pour CGL1 (gauche) et CGL3 (droite). Bleu : \mathcal{E}_{NL} . Orange : \mathcal{E}_F . Vert : \mathcal{E}_D . Rouge : $\partial_t \mathcal{S}$. Violet : $\mathcal{E}_{ref} = -\partial_t \mathcal{S} + \mathcal{E}_D + \mathcal{E}_F$. Marron : $\mathcal{Z} = \mathcal{E}_{ref} - \mathcal{E}_{NL}$. Représentation : 1D en fonction de ℓ_\perp avec les valeurs positives en trait plein et négative en trait discontinu.

Pour ce qui est du comportement étrange des termes de dissipation et de forçage, nous proposons de les vérifier analytiquement dans la section suivante.

2.3.3 Explication mathématique et interprétation des lois KHM et KHMS

En s'inspirant de la démonstration mathématique/approximative de la saturation des fonctions de structures d'ordres 2 proposée par CHO et LAZARIAN 2009, j'ai démontré rigoureusement le comportement des termes du type fonction de corrélation en fonction des tendances des spectres des quantités impliquées. La démonstration proposée ici est un résumé.

Soit $a_{\mathbf{k}}$ (resp. $b_{\mathbf{k}}$) la transformée de Fourier de A (resp. B) évaluée en \mathbf{k} . Pour faciliter la lecture, on supposera les moyennes effectuées sur un volume $V = 1$ et les intégrales triples ne seront notées qu'avec un seul \int . Dans cette section, δ est la distribution de Dirac.

La fonction de corrélation $\langle A(\mathbf{x} + \boldsymbol{\ell}) \cdot B(\mathbf{x}) \rangle$ est d'abord explicitée sous forme d'intégrale. Puis, les transformées de Fourier de A et B sont injectées. Quelques manipulations des différentes intégrales sont nécessaires pour faire apparaître $\delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}')$ qui nous permet de remplacer \mathbf{k}' par $-\mathbf{k}$:

$$\langle A(\mathbf{x} + \boldsymbol{\ell}) \cdot B(\mathbf{x}) \rangle = \int A(\mathbf{x} + \boldsymbol{\ell}) \cdot B(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (\text{III.2.12})$$

$$= \int \left(\int a_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} e^{i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\ell}} d\mathbf{k} \right) \left(\int b_{\mathbf{k}'} e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{k}' \right) d\mathbf{x} \quad (\text{III.2.13})$$

$$= \int \int a_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\ell}} b_{\mathbf{k}'} \left(\int e^{i(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x} \right) d\mathbf{k} d\mathbf{k}' \quad (\text{III.2.14})$$

$$\propto \int \int a_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}'} e^{i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\ell}} \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') d\mathbf{k} d\mathbf{k}' \propto \int a_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^* e^{i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\ell}} d\mathbf{k} \quad (\text{III.2.15})$$

Ensuite, la fonction de corrélation symétrique, J , est construite en notant $\Re[Z]$ la partie

réelle de Z , :

$$J = \langle A(\mathbf{x} + \boldsymbol{\ell}) \cdot B(\mathbf{x}) + A(\mathbf{x}) \cdot B(\mathbf{x} + \boldsymbol{\ell}) \rangle \quad (\text{III.2.16})$$

$$\propto \int (a_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^* + a_{\mathbf{k}}^* b_{\mathbf{k}}) (e^{i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\ell}} + e^{-i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\ell}}) d\mathbf{k} \propto \int \Re[a_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^*] \cos(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\ell}) d\mathbf{k} \quad (\text{III.2.17})$$

Pour une fonction de corrélation incrémentale, notée I , l'expression finale sera un petit peu différente :

$$I = \langle (A(\mathbf{x} + \boldsymbol{\ell}) - A(\mathbf{x})) \cdot (B(\mathbf{x} + \boldsymbol{\ell}) - B(\mathbf{x})) \rangle \quad (\text{III.2.18})$$

$$= \langle 2A(\mathbf{x}) \cdot B(\mathbf{x}) - (A(\mathbf{x} + \boldsymbol{\ell}) \cdot B(\mathbf{x}) + A(\mathbf{x}) \cdot B(\mathbf{x} + \boldsymbol{\ell})) \rangle \quad (\text{III.2.19})$$

$$\propto \int (a_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^* + a_{\mathbf{k}}^* b_{\mathbf{k}}) (1 - e^{i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\ell}} + e^{-i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\ell}}) d\mathbf{k} \propto \int \Re[a_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^*] (1 - \cos(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\ell})) d\mathbf{k} \quad (\text{III.2.20})$$

Maintenant, nous allons explorer la convergence de ces intégrales pour quelques formes de spectres de A et B rappelant les comportements fréquentiels des termes de forçage et de dissipation.

Si A correspond à une distribution de Dirac dans l'espace de Fourier : On suppose $a \propto \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_n)$. Ce cas correspond au comportement du forçage. Dans ce cas :

$$J = \langle A(\mathbf{x} + \boldsymbol{\ell}) \cdot B(\mathbf{x}) + A(\mathbf{x}) \cdot B(\mathbf{x} + \boldsymbol{\ell}) \rangle \propto \Re[b_{\mathbf{k}_n}] \cos(\mathbf{k}_n \cdot \boldsymbol{\ell}) \quad (\text{III.2.21})$$

$$I = \langle (A(\mathbf{x} + \boldsymbol{\ell}) - A(\mathbf{x})) \cdot (B(\mathbf{x} + \boldsymbol{\ell}) - B(\mathbf{x})) \rangle \propto \Re[b_{\mathbf{k}_n}] (1 - \cos(\mathbf{k}_n \cdot \boldsymbol{\ell})) \quad (\text{III.2.22})$$

Aux petites échelles inférieures à $\ell_n = 1/\mathbf{k}_n$ et en représentation logarithmique, J sera donc quasi-constant puisque $\cos(\mathbf{k}_n \cdot \boldsymbol{\ell})$ sera de l'ordre de 1 et que $\Re[b_{\mathbf{k}_n}]$ est indépendant de $\boldsymbol{\ell}$. On retrouve le comportement de ε_F . Pour ce qui est de I , $(1 - \cos(\mathbf{k}_n \cdot \boldsymbol{\ell})) \sim (\mathbf{k}_n \cdot \boldsymbol{\ell})^2$ et on retrouve la pente de facteur 2 observée pour \mathcal{E}_F en représentation logarithmique.

Si $\Re[a_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^*]$ est proportionnelle à une puissance de l'amplitude de \mathbf{k} : On suppose l'hypothèse d'isotropie pour simplifier le calcul³ et on explicite les quantités vectorielles dans un système de coordonnées sphérique, $\{k, \phi, \theta\}$, orienté tel que θ soit l'angle entre \mathbf{k} et $\boldsymbol{\ell}$. Alors $d\mathbf{k} = k^2 \sin \theta dk d\theta d\phi$ avec $\theta \in [0, \pi]$ et $\phi \in [0, 2\pi]$, et $\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\ell} = k\ell \cos \theta$.

On note aussi $k^2 \Re[a_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^*] \propto k^{-m}$. Ce cas est le plus commun dans les études de turbulence. En effet, par exemple, la phénoménologie de Kolmogorov indique un spectre d'énergie cinétique, $k^2 \mathbf{v}_k^2$, proportionnel à $k^{-5/3}$. Pour ce qui est de l'hyperdissipation $\Delta^4 \sim k^8$. Dans FERRAND 2021, est indiqué pour l'hyperdissipation cinétique incompressible, un spectre en $k^8 \mathbf{v}_k^2 \sim k^6$. Dans le cas compressible, on supposera que les spectres liés à l'hyperdissipation ont une pente telle que $m \ll -1$.

3. Dans le cas axisymétrique, il faut gérer les directions parallèle et perpendiculaire. Le calcul se complique, mais les tendances resteront similaires.

Avec ces hypothèses, on obtient :

$$J \propto \int_k \int_0^\pi k^{-m} \cos(k\ell \cos \theta) \sin(\theta) dk d\theta \propto \int_k \int_0^\pi k^{-m} \frac{\sin(k\ell)}{k\ell} dk$$

$$(\text{par substitution } u = k\ell) \propto \ell^{m-1} \int_0^{+\infty} u^{-m-1} \sin(u) du \quad (\text{III.2.23})$$

$$I \propto \int \Re[a_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^*] (1 - \cos(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\ell})) d\mathbf{k} \propto \ell^{m-1} \int_0^{+\infty} u^{-m} (1 - \frac{\sin(u)}{u}) du$$

$$(\text{III.2.24})$$

Ensuite, il est nécessaire de regarder la convergence de $K = \int_0^{+\infty} u^{-m-1} \sin(u) du$ afin d'estimer une tendance en ℓ . Si $m \in]-1, 1[$, cette intégrale peut s'écrire comme une intégrale généralisée de Fresnel convergente et constante in ℓ . Pour les deux autres $(]-\infty, -1[$ and $]1, +\infty[)$, on peut obtenir une expression de récurrence en intégrant par partie K puis estimer la convergence des différents termes. Alors, si $m \in]-\infty, -1[$, $K \propto \ell^{-m-1}$ et si $m \in]1, +\infty[$, $K \propto \ell^{-m+1}$. Par ces technique, on obtient :

$$J = \langle A(\mathbf{x} + \boldsymbol{\ell}) \cdot B(\mathbf{x}) + A(\mathbf{x}) \cdot B(\mathbf{x} + \boldsymbol{\ell}) \rangle \propto \begin{cases} \ell^{-2} & \text{if } m \in]-\infty, -1[\\ \ell^{m-1} & \text{if } m \in]-1, 1[\\ 1 & \text{if } m \in]1, +\infty[\end{cases}$$

$$(\text{III.2.25})$$

$$I = \langle (A(\mathbf{x} + \boldsymbol{\ell}) - A(\mathbf{x})) \cdot (B(\mathbf{x} + \boldsymbol{\ell}) - B(\mathbf{x})) \rangle \propto \begin{cases} 1 & \text{if } m \in]-\infty, 1[\\ \ell^{m-1} & \text{if } m \in]1, 3[\\ \ell^2 & \text{if } m \in]3, +\infty[\end{cases}$$

$$(\text{III.2.26})$$

Ces tendances sont représentées sur la figure III.2.12a pour J et III.2.12b. On retrouve aussi la prédiction de CHO et LAZARIAN 2009 pour les fonctions de corrélation de type I avec $A = B$. Cette prédiction est étendue, ici, à $A \neq B$ et $m < 0$. Passer de J à I est très simple : il suffit de soustraire à J , sa valeur en $\ell = 0$ pour obtenir I . L'équivalence est montrée sur la figure III.2.13.

On s'attend donc à retrouver ce genre de saturations dans nos simulations. Cela semble être en effet le cas en fonction, par exemple pour les fonction de corrélation dépendant des hyperdissipations : $\varepsilon_D^c(D_v)$, écrite sous la forme de J saturent avec une pente en ℓ^{-2} et $\mathcal{E}_D^c(D_v)$ par exemple, qui s'écrit sous la forme de I , saturent avec une pente en ℓ^0 . Les termes dépendant de D_ρ à l'exception de ε_D^{ue} ont une forme proche de la forme de I , cela pourrait expliquer leur constance dans ε_D .

Cette démonstration montre que le lien entre tendance spectrale et fonction de corrélation n'est pas évident. Quelques pincettes sont donc à prendre lorsque l'on veut interpréter les résultats des lois KHM et KHMS en particulier à travers l'hypothèse de séparation d'échelle. Ce n'est pas parce que le forçage n'est supposé agir qu'à grande échelle que sa contribution, ε_F , à la loi KHM tendra vers 0 aux autres échelles, elle peut au contraire rester constante, tout comme la contribution dissipative \mathcal{E}_D reste constante dans la loi KHMS. La saturation des tendances selon des pentes 2 et -2 apporte aussi des biais d'interprétations. FERRAND 2021 a proposé quelques méthodes afin de contourner ce problème dans le cas incompressible mais leur validité est questionnable dans le cas compressible. Comme on a pu le remarquer, une méthode simple existe pour aider à l'interprétation

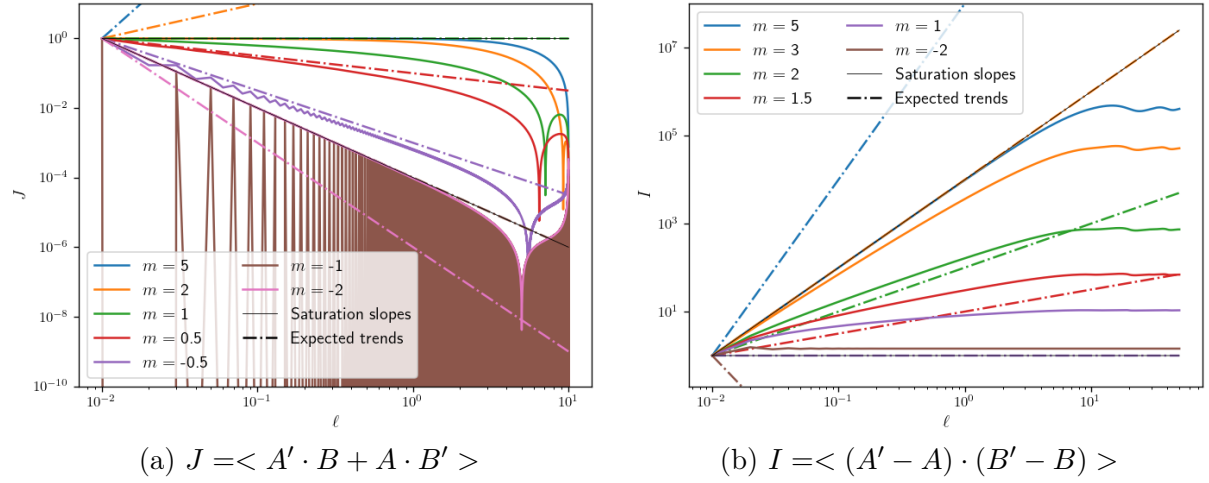


FIGURE III.2.12 – Plain coloured lines : correlation function according to the spectral power m . Dash-dotted coloured lines : expected tendencies if no saturation for each m . Thin black lines : saturation limits.

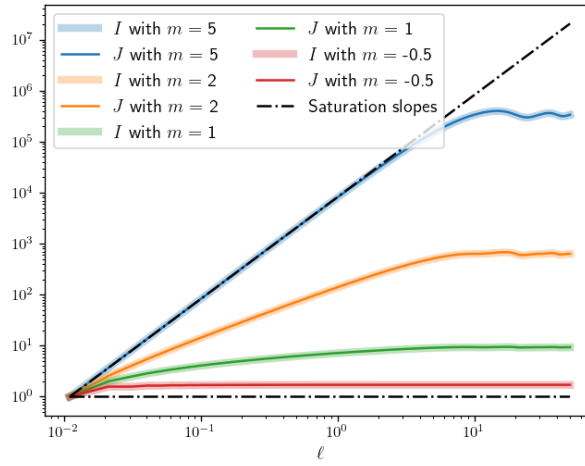


FIGURE III.2.13 – Equivalence between I and $2 \langle A \cdot B \rangle - J$. Colours : m . Thin line : $2 \langle A \cdot B \rangle - J$. Thick line : I . Dash-dotted black lines : I saturation limits.

de ces contributions : regarder conjointement les lois KHM et KHMS. Si les fonctions de corrélations permettant de les obtenir sont bien choisies, il est très facile de passer de l'une à l'autre en soustrayant les valeurs obtenues en $\ell = 0$.

Par cette étude de KHM et KHMS, nous pouvons en déduire un niveau de référence tel que tous termes inférieurs seront considérés comme dans la zone d'incertitude de notre modèle. Ce niveau sera donné par ζ .

2.4 Synthèse d'une page

spécificités et observations