
PARTIE II : Etude analytique de l'effet de l'anisotropie de pression

La collision de tous les sentiments contradictoires qui l'agitaient avait produit la neutralité, et aucun d'eux n'était capable de lui communiquer le mouvement.

Thomas HARDY⁷ (1849-1927), artiste,
écrivain, poète, romancier

7. LOIN DE LA FOULE DÉCHAINÉE, publiée en version originale anglaise en 1874

PARTIE II : CHAPITRE 4

L ET DANS LE CAS INCOMPRESSIBLE ?

Sommaire

4.1	De la limite incompressible dans la loi exacte générale vers un nouveau modèle	37
4.2	Proposition d'un modèle incompressible gyrotrope	39
4.3	Etude paramétrique des modes linéaires du modèle incompressible gyrotrope	41
4.4	Limite incompressible du modèle CGL	46
4.5	Synthèse : Limite incompressible et pistes d'étude	48

Si l'on prend la limite incompressible de la loi exacte dépendant d'une pression isotrope (??), on retrouve la loi PP98 donnant le taux de cascade ε_{PP98} (.3.34). Mais est-ce aussi le cas si la pression est tensorielle ? De cette question émerge une autre question : qu'est-ce qu'un système incompressible avec pression tensorielle ? Dans ce chapitre, sera présenté le travail effectué pour tenter de répondre à ces questions. Ce travail n'a pas encore été publié.

4.1 De la limite incompressible dans la loi exacte générale vers un nouveau modèle

Si l'on considère la limite incompressible ($\rho = \rho_0$, $\delta\rho = 0$, $\nabla\rho = 0$, $\nabla\cdot\mathbf{v} = 0$, $\nabla\cdot\mathbf{v}_A = 0$) dans l'équation (??), $\varepsilon_{iso} \rightarrow \varepsilon_{PP98}$ et tous les termes s'annulent sauf :

$$-4(\varepsilon - \varepsilon_{PP98}) = -2 \langle \delta(\bar{\boldsymbol{\Pi}}) : \nabla' \mathbf{v}' - \delta(\bar{\boldsymbol{\Pi}}) : \nabla \mathbf{v} \rangle \quad (\text{II.4.1})$$

car la contribution de la trace de $\nabla \mathbf{v}$ s'annule par incompressibilité : $\bar{\mathbf{I}} : \nabla \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$. On obtient ainsi une correction à la théorie PP98 dépendant de la composante anisotrope de la pression (participant à la déformation incompressible du plasma d'après CASSAK et BARBHUIYA 2022) :

$$-4(\varepsilon - \varepsilon_{PP98}) = -2 \langle \delta(\bar{\mathbf{P}} - p\bar{\mathbf{I}}) : \delta(\nabla \mathbf{v}) \rangle = -2 \langle \delta \bar{\boldsymbol{\Pi}} : \delta(\nabla \mathbf{v}) \rangle \quad (\text{II.4.2})$$

Une question émerge de ce résultat : dans des plasmas faiblement compressibles dépendant d'une pression tensorielle tels que le vent solaire, la correction anisotrope aurait-elle plus de poids que la prise en compte de la compression via les fluctuations de densité ?

Dans le cas particulier gyrotope, on obtient :

$$-4(\varepsilon - \varepsilon_{PP98}) = -2 \left\langle \delta((p_{\parallel} - p_{\perp})(\mathbf{b}\mathbf{b} - \frac{1}{3}\bar{\mathbf{I}})) : \delta(\nabla \mathbf{v}) \right\rangle \quad (\text{II.4.3})$$

$$= -2 \langle \delta((p_{\parallel} - p_{\perp})\mathbf{b}\mathbf{b}) : \delta(\nabla \mathbf{v}) \rangle \quad (\text{II.4.4})$$

On observe que la ligne (II.4.3) dépend de $\bar{\mathbf{I}} : \nabla \mathbf{v}$, on annule donc ce terme dans la ligne suivante (II.4.4). Dans le cas incompressible, ces deux expressions sont donc équivalentes. Dans des plasmas quasi-incompressibles par contre, si l'on veut estimer le taux de cascade à l'aide de la loi exacte incompressible corrigée, les deux expressions ne seront plus équivalentes. Dans la première, on s'assure de n'utiliser que la part incompressible de la pression (la contribution de la trace de $\mathbf{b}\mathbf{b}$ étant annulée par $-\frac{1}{3}\bar{\mathbf{I}}$). Dans la seconde, ce n'est pas le cas, le résultat pourra alors être impacté.

On remarque que cette correction dépend de $p_{\parallel} - p_{\perp}$, c'est à dire de $\beta_{\parallel}(1 - a_p)$ qui rappelle les critères d'instabilités. Dans le cas CGL, on a vu que ces critères dépendent fortement de $\beta_{\parallel 0}(1 - a_{p0})$. Si l'on se place dans une situation dans laquelle $\frac{\beta_{\parallel}}{2}(1 - a_p)$ serait quasiment constant, alors le terme correctif de la loi exacte à l'ordre 0 pourra s'écrire :

$$-4(\varepsilon - \varepsilon_{PP98}) = -2 \left\langle \delta\left(\frac{\beta_{\parallel}}{2}(1 - a_p)\mathbf{v}_A\mathbf{v}_A\right) : \delta(\nabla \mathbf{v}) \right\rangle \quad (\text{II.4.5})$$

$$\simeq -2\frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0}) \langle \delta(\mathbf{v}_A\mathbf{v}_A) : \delta(\nabla \mathbf{v}) \rangle \quad (\text{II.4.6})$$

En prenant des valeurs réalistes dans le vent solaire telles que $\beta_{\parallel} \sim 1$ et $|1 - a_{p0}| \sim 0.5$, on obtient $\varepsilon - \varepsilon_{PP98} \sim \frac{1}{8} \langle \delta(\mathbf{v}_A\mathbf{v}_A) : \delta(\nabla \mathbf{v}) \rangle$. Si $\langle \delta(\mathbf{v}_A\mathbf{v}_A) : \delta(\nabla \mathbf{v}) \rangle \sim \varepsilon$ alors la correction de l'anisotropie de pression sera de l'ordre de 12% du taux de cascade PP98. Près du critère firehose ($\frac{\beta_{\parallel}}{2}(1 - a_p) \sim 1$), le niveau de cette contribution sera autour de 50%. Dans le vent solaire, HADID *et al.* 2017, la contribution de la compression est de l'ordre de 10% du taux PP98, c'est-à-dire plus faible que nos estimations. Le résultat très approximatif obtenu ici va dans le sens d'une correction anisotrope plus significative qu'une correction compressible en particulier près du critère d'instabilité firehose. Si l'on regarde le diagramme publié par OSMAN *et al.* 2013 (voir FIGURE ??), suivant son signe que l'on ne peut pas estimer ici, cette contribution pourrait venir accroître ou réduire la dispersion des valeurs du taux de cascade. Bien évidemment, cette petite estimation est loin d'être suffisante pour conclure sur l'impact des anisotropies de pression sur le taux de cascade. Simulation et étude comparative dans le vent solaire sont nécessaires.

Par curiosité, on s'est demandé quelle était la physique derrière notre terme correctif. Dans le cadre des modèles incompressibles avec pression isotrope, le seul mode existant est le mode d'Alfvén qui constitue la brique fondamentale de la turbulence MHD décrite par PP98. Notre terme correctif serait-il une trace de la correction du mode d'Alfvén pouvant induire l'instabilité firehose dans la cascade non-linéaire incompressible ?

Afin de répondre à cette question, nous avons voulu vérifier dans un modèle incompressible dépendant d'une pression gyrotope si le mode d'Alfvén-firehose existait. Mais aucune trace d'un modèle incompressible avec pression tensorielle n'a été trouvée dans la littérature. En fait, si l'on approche le problème sous un autre angle, celui des fermetures, on se rend compte que le cadre gyrotope est habituellement abordé à travers la fermeture CGL. Ajouter une fermeture incompressible signifierait alors, surcontraindre le système : une équation de trop par rapport au nombre de variables. La viabilité du système résult-

tant en tant que modèle réaliste serait remise en cause. Par contre, on peut y appliquer l'incompressibilité telle une limite comme on le discutera dans la section ??.

4.2 Proposition d'un modèle incompressible gyrotrope

Nous avons construit un nouveau modèle en partant de la question : comment décrire un écoulement magnétisé et incompressible dépendant d'une pression gyrotrope ?

Dans un tel écoulement, la contrainte $\rho = \rho_0$ et donc $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ s'impose. Elle induit pour le champ magnétique $\nabla \cdot \mathbf{v}_A = 0$. On a aussi besoin d'une équation sur la vitesse (premier moment) et d'une équation sur le champ magnétique (équation d'induction). L'hypothèse d'une pression gyrotrope va s'exprimer dans l'équation sur la vitesse à travers $\nabla \cdot \bar{\mathbf{P}}$. On a alors 7 équations (la contrainte incompressible, les trois composantes de la vitesse et les trois composantes du champ magnétique) pour 8 variables scalaires (les composantes de la vitesse et du champ magnétique, et les pressions parallèles et perpendiculaires). Il manque donc une équation pour fermer le système. Afin de maintenir la cohérence avec la définition de l'énergie interne telle que $u = \frac{1}{2\rho_0}(2p_\perp + p_\parallel)$, nous avons décidé de fermer le système avec l'équation sur la trace du tenseur de pression avec $\nabla \cdot \mathbf{q} = 0$. Ce système est donc compatible avec la loi exacte (II.4.3).

Par conséquent, le modèle incompressible gyrotrope envisagé est :

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \nabla \cdot \mathbf{v}_A = 0 \quad (\text{II.4.7})$$

$$\partial_t \mathbf{v} + \nabla \cdot (\mathbf{v}\mathbf{v} - \mathbf{v}_A\mathbf{v}_A + \frac{1}{\rho_0}\bar{\mathbf{P}}_*) = 0 \quad (\text{II.4.8})$$

$$\partial_t p + \nabla \cdot (p\mathbf{v}) + \frac{2}{3}\bar{\mathbf{\Pi}} : \nabla \mathbf{v} = 0 \quad (\text{II.4.9})$$

$$\partial_t \mathbf{v}_A - \nabla \cdot (\mathbf{v}_A\mathbf{v} - \mathbf{v}\mathbf{v}_A) = 0 \quad (\text{II.4.10})$$

avec :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{P}} &= p\bar{\mathbf{I}} + \bar{\mathbf{\Pi}} = \frac{1}{3}(2p_\perp + p_\parallel)\bar{\mathbf{I}} + (p_\parallel - p_\perp)(\mathbf{b}\mathbf{b} - \frac{1}{3}\bar{\mathbf{I}}) \\ \nabla \cdot \bar{\mathbf{P}}_* &= \nabla(p_\perp + \frac{1}{2}\rho_0\mathbf{v}_A^2) + \mathbf{b}\mathbf{b} \cdot \nabla(p_\parallel - p_\perp) + (p_\parallel - p_\perp)\frac{1}{\mathbf{v}_A^2}(\mathbf{v}_A \cdot \nabla \mathbf{v}_A - 2\mathbf{v}_A \mathbf{b}\mathbf{b} : \nabla \mathbf{v}_A) \\ \bar{\mathbf{\Pi}} : \nabla \mathbf{v} &= (p_\parallel - p_\perp)\mathbf{b}\mathbf{b} : \nabla \mathbf{v} \end{aligned}$$

Nous proposons de linéariser ce nouveau modèle afin d'en identifier les modes propres, et à minima vérifier que le mode d'Alfvén-firehose en est une solution. Sa forme linéaire, obtenue en suivant la méthode résumée section 3.4, est :

$$0 = k_\perp v_{1x} + k_\parallel v_{1z} \quad (\text{II.4.11})$$

$$0 = -\omega v_{1x} + \frac{p_{\perp 1}}{\rho_0} k_\perp + \left(\frac{p_{\parallel 0} - p_{\perp 0}}{\rho_0 v_{A0}^2} - 1 \right) v_{A0} k_\parallel v_{A1x} + v_{A0} k_\perp v_{A1z} \quad (\text{II.4.12})$$

$$0 = -\omega v_{1y} + \left(\frac{p_{\parallel 0} - p_{\perp 0}}{\rho_0 v_{A0}^2} - 1 \right) v_{A0} k_\parallel v_{A1y} \quad (\text{II.4.13})$$

$$0 = -\omega v_{1z} + \frac{p_{\parallel 1}}{\rho_0} k_\parallel - \frac{p_{\parallel 0} - p_{\perp 0}}{\rho_0 v_{A0}^2} v_{A0} k_\parallel v_{A1z} \quad (\text{II.4.14})$$

$$0 = -\omega(2p_{\perp 1} + p_{\parallel 1}) + 2(p_{\parallel 0} - p_{\perp 0})k_\parallel v_{1z} \quad (\text{II.4.15})$$

$$0 = -\omega \mathbf{v}_{A1} - k_\parallel v_{A0} \mathbf{v}_1 \quad (\text{II.4.16})$$

Après quelques manipulations, ce système peut s'écrire sous l'équation de dispersion $\overline{\mathbf{M}} \cdot \mathbf{v}_1 = 0$ avec la matrice

$$\overline{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} k_\perp & 0 & k_\parallel \\ 0 & \omega^2 - F v_{A0}^2 k_\parallel^2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2(k_\perp^2 - 2k_\parallel^2) - (Gk_\perp^2 + 2Fk_\parallel^2)v_{A0}^2 k_\parallel^2 \end{pmatrix} \quad (\text{II.4.17})$$

En notant $F = 1 - \frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0})$ et $G = 3\frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0}) - 2$.

La relation de dispersion est donc :

$$(\omega^2 - F v_{A0}^2 k_\parallel^2)(\omega^2(k_\perp^2 - 2k_\parallel^2) - (Gk_\perp^2 + 2Fk_\parallel^2)v_{A0}^2 k_\parallel^2) = 0 \quad (\text{II.4.18})$$

On retrouve le mode d'Alfvén incompressible firehose $\omega_A = \pm k_\parallel v_{A0} \sqrt{F}$ polarisé suivant $(0, 1, 0)$. Cette solution s'exprime à travers les différentes quantités :

$$\mathbf{v}_1 = (0, 1, 0) \quad (\text{II.4.19})$$

$$\mathbf{v}_{A1} = \pm \frac{1}{\sqrt{F}} \mathbf{v}_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0})}} \mathbf{v}_1 \quad (\text{II.4.20})$$

$$p_{\parallel 1} = (2F - 1)\rho_0 v_{A0} v_{A1z} = 0 \quad (\text{II.4.21})$$

$$p_{\perp 1} = \rho_0 v_{A0} v_{A1z} = 0 \quad (\text{II.4.22})$$

On retrouve bien le comportement du mode d'Alfvén incompressible au niveau des pressions et la relation linéaire entre la vitesse et le champ magnétique. On note que cette relation est altérée par le critère firehose. On remarque que les fluctuations de pressions sont nulles (c'est aussi le cas dans le cadre CGL HUNANA *et al.* 2019). Les seules fluctuations accompagnant ce mode sont celles de v_{1y} et v_{A1y} . Sa contribution à travers le terme correctif du taux de cascade sera donc gouvernée par les fluctuations de la direction du champ magnétique. Cel nous donne l'approximation :

$$-4(\varepsilon - \varepsilon_{PP98}) \simeq \langle \delta(b_y b_y) : \delta(\partial_y v_y) \rangle. \quad (\text{II.4.23})$$

De plus, si ce mode est seul, il n'engendrera pas l'apparition d'anisotropie de pression autres que celle existant initialement dans le système. Ce résultat tend donc en faveur d'un effet de l'anisotropie de pression sur la cascade turbulence à travers l'altération firehose du mode d'Alfvén si une anisotropie de pression existe dans le système (par exemple, induite grâce à des paramètres initiaux dans une simulation). Une surprise nous attend : un nouveau mode émerge de la relation de dispersion (II.4.18).

Ce nouveau mode, polarisé suivant $(1, 0, -\tan \theta)$, est :

$$\omega_N = \pm \sqrt{\frac{Gk_\perp^2 + 2Fk_\parallel^2}{k_\perp^2 - 2k_\parallel^2}} v_{A0} k_\parallel = \pm \sqrt{\frac{(3\frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0}) - 2)k_\perp^2 + 2(1 - \frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0}))k_\parallel^2}{k_\perp^2 - 2k_\parallel^2}} v_{A0} k_\parallel \quad (\text{II.4.24})$$

Les différentes quantités sont alors :

$$\mathbf{v}_1 = (1, 0, -\tan \theta) \quad (\text{II.4.25})$$

$$\mathbf{v}_{A1} = \pm \sqrt{\frac{k_\perp^2 - 2k_\parallel^2}{Gk_\perp^2 + 2Fk_\parallel^2}} \mathbf{v}_1 \quad (\text{II.4.26})$$

$$p_{\parallel 1} = \frac{(G+F-1)k_\perp^2 + 2k_\parallel^2}{k_\perp^2 - 2k_\parallel^2} \rho_0 v_{A0} v_{A1z} = \frac{(\beta_{\parallel 0}(1-a_{p0})-2)k_\perp^2 + 2k_\parallel^2}{k_\perp^2 - 2k_\parallel^2} \rho_0 v_{A0} v_{A1z} \quad (\text{II.4.27})$$

$$\begin{aligned} p_{\perp 1} &= \frac{\rho_0}{k_\perp^2} \frac{4Fk_\parallel^2 k_\parallel^2 + (G-F+2)k_\perp^2 k_\parallel^2 - k_\perp^2 k_\parallel^2}{k_\perp^2 - 2k_\parallel^2} v_{A0} v_{A1z} \\ &= \frac{(2\beta_{\parallel 0}(1-a_{p0})-1)(k_\perp^2 - k_\parallel^2)k_\parallel^2 + 3k_\parallel^2 k_\parallel^2 - k_\perp^2 k_\parallel^2}{k_\perp^2(k_\perp^2 - 2k_\parallel^2)} \rho_0 v_{A0} v_{A1z} \end{aligned} \quad (\text{II.4.28})$$

On retrouve des résultats similaires au mode pseudo-alfvénique donnant une pression non nulle proportionnelle à v_{A1z} mais avec des facteurs portant une dépendance angulaire complexes mêlées à l'anisotropie de pression moyenne. Considérer une gyrotropie de pression lève donc la dégénérescence observée dans le cas incompressible avec pression isotrope (voir Chapitre 3) similairement à la levée de dégénérescence menant aux modes magnétosonores dans le compressible. Ce nouveau mode s'accompagnant de fluctuation des pressions, qui ne sont pas identiques, il pourra engendrer des fluctuations du taux d'anisotropie de pression. Son apport au taux de cascade turbulent pourrait alors s'exprimer à travers notre terme correctif qui dépendrait des fluctuations de pression. Il pourrait aussi interagir non linéairement avec le mode d'Alfvén-firehose¹.

Ce modèle proposé admet donc deux modes linéaires. Ils forment donc deux canaux potentiels de développement de la cascade turbulente à l'image des modes d'Alfvén et pseudo-alfvénique dans la turbulence MHD incompressible. Par curiosité, une étude comparative et paramétrique des modes d'Alfvén-firehose et du nouveau mode a été menée. Elle est résumée dans la section 7.5.

4.3 Etude paramétrique des modes linéaires du modèle incompressible gyrotrope

La linéarisation du système d'équation incompressible gyrotrope proposé a abouti sur deux modes que l'on peut exprimer en fonction de θ :

- le mode d'Alfvén-firehose : $\omega = \omega_A$ avec $\frac{\omega_A^2}{v_{A0}^2 k_\parallel^2} = F$ et $F = 1 - \frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0})$,
- un nouveau mode : $\omega = \omega_N$ avec $\frac{\omega_N^2}{v_{A0}^2 k_\parallel^2} = \frac{G \sin^2 \theta - 2F \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta - 2\cos^2 \theta}$ et $G = 3\frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0}) - 2$

Le mode d'Alfvén-firehose qui s'écrit $\omega_A = \pm \sqrt{F} v_{A0} k_\parallel$ est linéaire en $v_{A0} k_\parallel$ avec une pente dépendant de a_{p0} et $\beta_{\parallel 0}$. Le nouveau mode est aussi linéaire en $v_{A0} k_\parallel$ mais sa pente va aussi dépendre de θ . Ils sont représentés sur la FIGURE II.4.1 normalisé par ω_{ci} la pulsation cyclotron des ions, et en fonction de $k_\parallel d_i = k_\parallel v_{A0} / \omega_{ci}$ avec d_i la longueur inertuelle ionique. Le mode d'Alfvén-firehose est représenté en bleu et le nouveau mode

1. Il serait intéressant de les étudier avec des méthodes de turbulences d'ondes par exemple. Une telle étude n'a pas été entamée.

dans des couleurs chaudes (orange pour $\theta = 25^\circ$ et rouge pour $\theta = 70^\circ$). On remarque

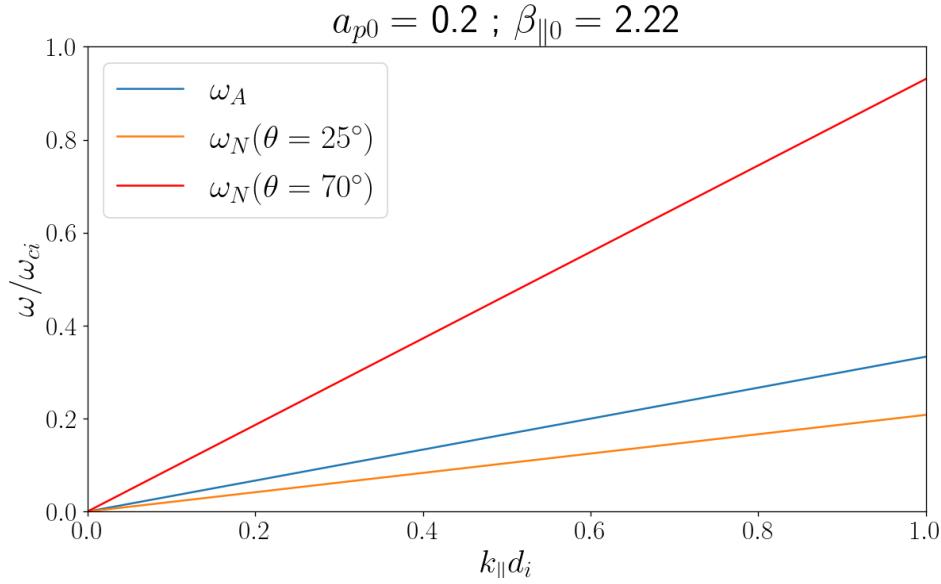


FIGURE II.4.1 – Mode d’Alfvén-firehose (ω_A , bleu) et nouveau mode (ω_N , orange pour $\theta = 25^\circ$ et rouge pour $\theta = 70^\circ$) normalisés par ω_{ci} la pulsation cyclotron des ions et représentés en fonction de $k_{\parallel}d_i$, avec $d_i = v_{A0}/\omega_{ci}$, la longueur inertuelle ionique.

que le nouveau mode peut être plus lent ou plus rapide que le mode d’Alfvén-firehose en fonction de θ . Ce n’est pas montrer ici mais il peut aussi devenir instable quand le mode d’Alfvén-firehose est stable. Ils sont donc très différents. Ces observations, nous ont amené à faire une étude paramétrique en fonction de θ de la vitesse de phase et du taux d’accroissement/ammortissement des instabilités.

Au cours de cette étude, on a observé cinq comportements différents pour le nouveau mode suivant la valeur du couple $\{\beta_{\parallel 0}; a_{p0}\}$. Ces comportements sont résumés sur la figure II.4.2 à travers cinq couples représentatifs. Sur l’ensemble de graphiques de FIGURE II.4.2 sont tracés en fonction de θ , pour cinq couples représentatifs et chaque mode, la partie réelle de ω normalisé par le mode d’Alfvén, $\Re[\omega/(k_{\parallel}v_{A0})]$ (colonne a) correspondant à sa vitesse de phase, ainsi que sa partie imaginaire ($\Im[\omega/(k_{\parallel}v_{A0})]$, colonne b), qui correspond au taux d’accroissement. ω étant ou réel ou purement imaginaire, ces graphiques sont complémentaires : si le mode est instable, il apparaîtra sur la colonne b, et s’il est stable sur la colonne a (à l’exception du graphique (3a) où les modes coïncident). Le caractère instable firehose du mode d’Alfvén (bleu) est ainsi retrouvé lorsque $F < 0$ sur le graphique (1b).

Le nouveau mode semble tendre asymptotiquement vers le mode d’Alfvén pour $\theta \sim 0^\circ$ et vers l’asymptote $\omega_P = \pm k_{\parallel}v_{A0}\sqrt{G}$ représentée par une ligne discontinue verte, pour $\theta \sim 90^\circ$. Une asymptote angulaire est aussi visible en un angle que l’on note θ_2 , on verra par la suite que cet angle est solution de $\tan^2 \theta = 2$. La stabilité du nouveau mode à une dépendance forte en θ : pour tout couple, il existe une gamme angulaire telle que le mode soit stable et, à l’exception du couple (3), une gamme telle que le mode est instable.

On propose maintenant de démontrer les comportements identifiés pour le nouveau mode en fonction de a_{p0} et $\beta_{\parallel 0}$. Au fil de cette analyse, on va construire le diagramme de la FIGURE II.4.3. Les emplacements des différents couples présentés sur la FIGURE II.4.2 sont indiqués par des croix rouges.

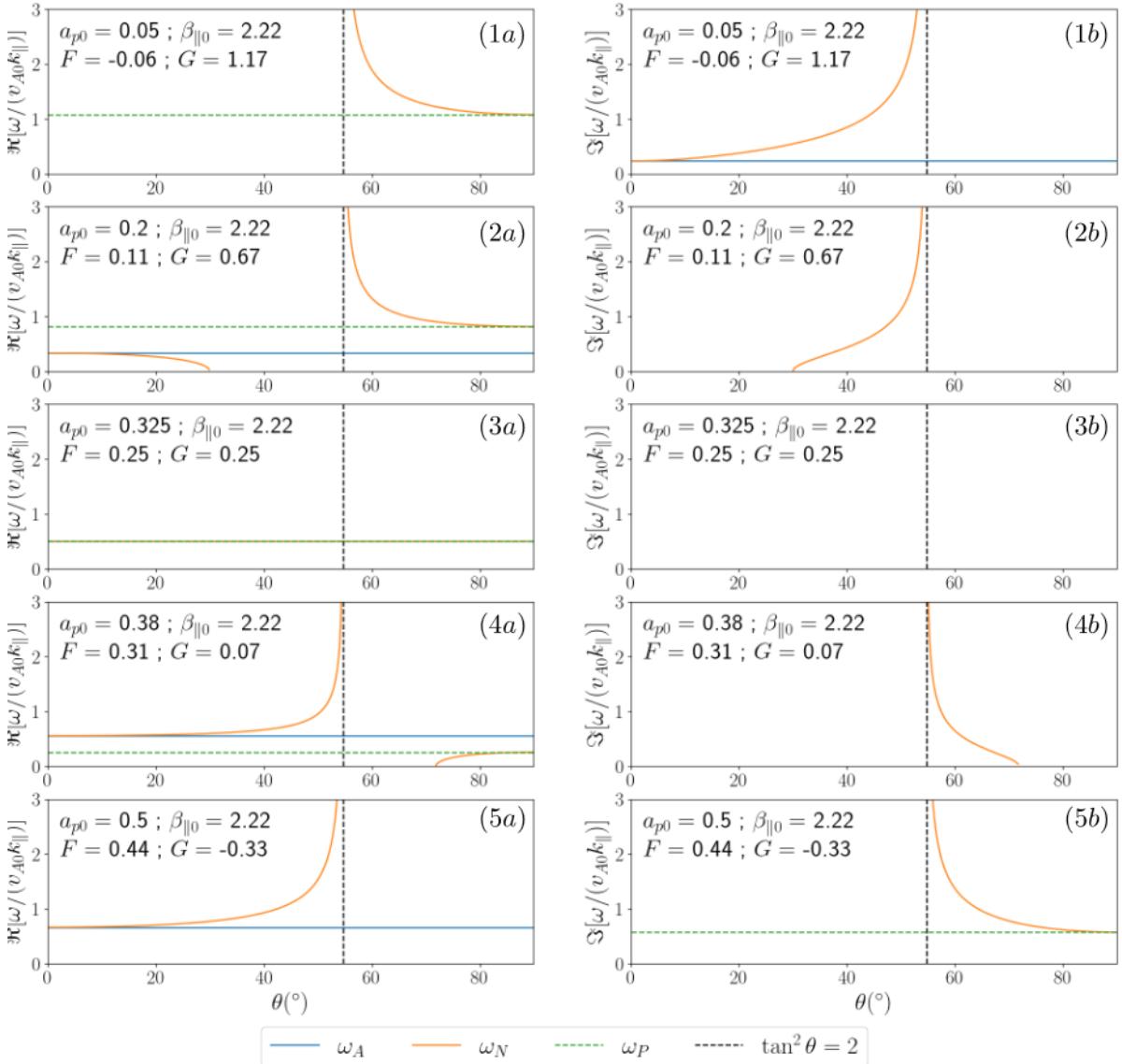


FIGURE II.4.2 – Vitesse de phase $\Re[\omega/(kv_{A0})]$ (colonne a) et taux de croissance des instabilités $\Im[\omega/(kv_{A0})]$ (colonne b) normalisées par v_{A0} en fonction de l’angle θ pour le nouveau mode incompressible (ω_N , orange) et pour le mode d’Alfvén (ω_A , bleu). Des asymptotes sont tracées en lignes discontinues. En vert : mode asymptotique ω_P . En noir : angle asymptotique θ_2 . Première ligne : couple (1) tel que $a_{p0} = 0.05$, $\beta_{\parallel 0} = 20/9 \Rightarrow$ instabilité firehose ($F < 0$). Deuxième ligne : couple (2) tel que $a_{p0} = 0.2$, $\beta_{\parallel 0} = 20/9$. Troisième ligne : couple (3) tel que $a_{p0} = 0.325$, $\beta_{\parallel 0} = 20/9 \Rightarrow$ seul cas stable pour tout θ ($F = G$). Quatrième ligne : couple (4) tel que $a_{p0} = 0.38$, $\beta_{\parallel 0} = 20/9$. Cinquième ligne : couple (5) tel que $a_{p0} = 0.5$, $\beta_{\parallel 0} = 20/9 \Rightarrow$ instabilité pseudo-firehose perpendiculaire ($G < 0$). Sauf graphique (3a) où tous les modes coïncident, lorsque qu’un mode disparaît d’un graphique de la colonne a, il apparaît sur le graphique de la colonne b.

Etude asymptotique angulaire : Si $\theta \rightarrow 0^\circ$ ($k_\parallel \gg k_\perp$), alors $\frac{\omega_N^2}{v_{A0}^2 k^2} \rightarrow F \cos^2 \theta$. La convergence vers le mode d’Alfvén-firehose du nouveau mode observée en $\theta \rightarrow 0^\circ$ sur la FIGURE II.4.2 est ainsi vérifiée. Comme cette limite peut être stable ou instable

en fonction du signe de F , on a représenté sur la FIGURE II.4.3, la frontière $F = 0$ en bleue et bleutée la zone où $F < 0$. On retrouve dans ce comportement stable/instable l'instabilité firehose «parallèle» qui est présente par exemple pour le mode lent dans le cadre compressible. Le couple (1), tel que $F < 0$, est un exemple instable : le nouveau mode et le mode d'Alfvén apparaissent dans la colonne du taux de croissance (graphique (1b)).

Si $\theta \rightarrow 90^\circ$ ($k_\perp \ll k_\parallel$), alors $\frac{\omega_N^2}{v_{A0}^2 k^2} \rightarrow G \cos^2 \theta$. On retrouve l'asymptote ω_P et tracé en vert sur FIGURE II.4.2. Il est instable si $G < 0$. La comparaison de G et F , qui ont la même structure à un facteur $3/2$ et un signe près, nous inspirant, on appellera cette instabilité «instabilité pseudo-firehose perpendiculaire»². Elle apparaît pour le couple (5) (graphique (5b)). Sur la FIGURE II.4.3, on indique la frontière $G = 0$ en vert et la zone où $G < 0$ par une aire verte.

Ainsi grâce à F et G , on peut déduire qu'une instabilité pourra se développer dans le système pour tout couple $\{\beta_{\parallel 0}; a_{p0}\}$ tel que $\frac{2}{3} > \frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0})$ (instabilité pseudo-firehose perpendiculaire, couple (5) et aire verte sur FIGURE II.4.3) ou $\frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0}) > 1$ (instabilité firehose parallèle, couple (1) et aire bleue sur FIGURE II.4.3). Dans la zone intermédiaire (blanche sur la FIGURE II.4.3), $G > 0$ et $F > 0$.

Etude angulaire complète du nouveau mode : Pour les angles θ plus obliques, le comportement de ω_N est plus difficile à établir, le signe de $\sin^2 \theta - 2 \cos^2 \theta$ venant compenser le signe de $G \sin^2 \theta - 2F \cos^2 \theta$. Une instabilité, entre l'instabilité firehose parallèle et l'instabilité pseudo-firehose perpendiculaire, pourra émerger. On la nommera «instabilité pseudo-firehose oblique». Elle apparaît pour les couples (2) (graphique (2b)) et (4) (graphique (4b)). La condition d'instabilité est obtenue pour F et G tels que :

$$(\tan^2 \theta - 2)(G \tan^2 \theta - 2F) < 0 \quad (\text{II.4.29})$$

$g(\theta) = (\tan^2 \theta - 2)(G \tan^2 \theta - 2F)$ est une parabole présentant deux racines :

- $\tan^2 \theta = 2$ en laquelle $\omega_N^2 \rightarrow \infty$ (asymptote verticale indiquée en pointillés sur FIGURE II.4.2), on la note θ_2 ,
- $\tan^2 \theta = 2 \frac{F}{G}$ en laquelle $\omega_N^2 \rightarrow 0$, on la note $\theta_{F/G}$.

La stabilité du nouveau mode dépendra donc de la position de θ par rapport à θ_2 et $\theta_{F/G}$.

Pour que le nouveau mode soit stable pour tout θ , il faut $g(\theta) > 0$ pour tout θ . Cela n'est possible que si $F = G$, alors $g(\theta) = (\tan^2 \theta - 2)^2 > 0$. Dans ce cas, $\omega_N = \omega_A = \omega_P$. Sur la FIGURE II.4.3, le critère $F = G$ est indiqué par la courbe noire et il est illustré par le couple (3) (graphiques (3a) et (3b)). **Par conséquent, en fonction de a_{p0} et $\beta_{\parallel 0}$, le nouveau mode sera stable pour tout θ si et seulement si $\frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0}) = \frac{3}{4}$.**

$F = G$, $G = 0$ et $F = 0$ découpent le diagramme de la FIGURE II.4.3 en quatre zones que l'on va étudier séparément.

Si $G < 0$ (zone verte), alors $F > 0$. Dans ce cas, $g(\theta) < 0$ si $\theta > \theta_2$. Cette situation est illustrée par le couple (5) (graphiques (5a) et (5b)), instable pour tout angle supérieur à θ_2 . On peut raccrocher à cette condition le cas $G = 0$ puisque alors $F = 1/3$, et la parabole sera négative si $\tan^2 \theta > 2$. Dans ces cas, on retrouve l'instabilité pseudo-firehose perpendiculaire découverte asymptotiquement si $\theta \rightarrow 90^\circ$. On peut maintenant compléter ses conditions d'existence qui deviennent : **l'instabilité pseudo-firehose perpendicu-**

2. Cette dénomination n'est proposée qu'à cause de la similarité des critères d'instabilités. Le comportement des quantités n'a pas été vérifié.

laire peut se développer si $G < 0$ pour tout angle $\theta > \theta_2$.

Si $G > 0$ et $F/G > 1$ (zone blanche délimitée par les courbes verte et noire), $g(\theta) < 0$ si $2\frac{F}{G} > \tan^2 \theta > 2$. Cette situation est illustrée par le couple (4) (graphiques (4a) et (4b)). L'instabilité s'y développant est l'instabilité pseudo-firehose oblique.

Si $G > 0$ et $F/G < 1$ (zone blanche délimitée par les courbes bleue et noire et zone bleue), $g(\theta) < 0$ si $2 > \tan^2 \theta > 2\frac{F}{G}$. Si $F < 0$, l'instabilité firehose parallèle se développe pour tout angle $\theta < \theta_2$. Ce cas est illustré par le couple (1) (graphiques (1a) et (1b)). Si $F > 0$, la situation est illustrée par le couple (2) (graphiques (2a) et (2b)). L'instabilité visible est encore une fois l'instabilité pseudo-firehose oblique. Sa condition d'apparition est donc : l'instabilité pseudo-firehose oblique peut se développer si $G > 0$ et $F > 0$ mais $G \neq F$, pour tout angle θ entre θ_2 et $\theta_{F/G}$.

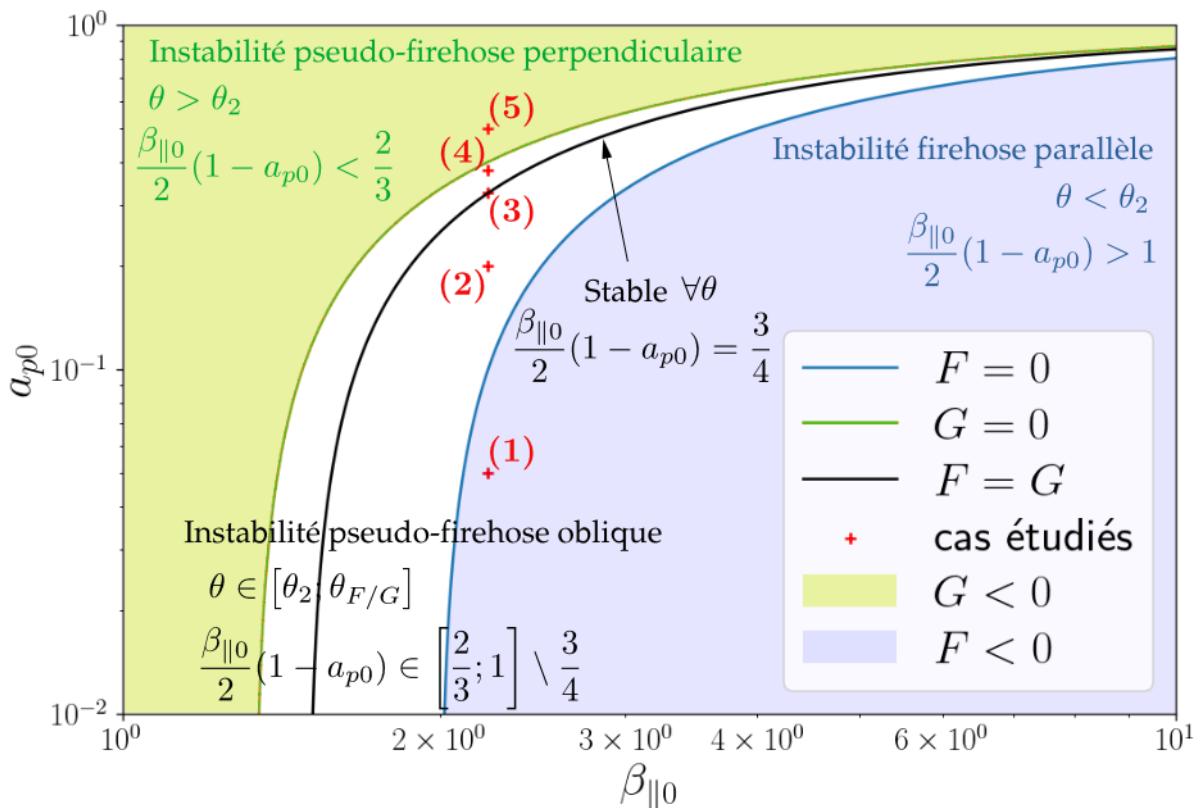


FIGURE II.4.3 – Diagramme $a_{p0} - \beta_{\parallel 0}$. Croix rouges : couples $\{\beta_{\parallel 0}; a_{p0}\}$ sélectionnés pour l'étude paramétrique de FIGURE II.4.2. Frontière d'instabilités firehose $F = 0$ (bleu) et zone instable ($F < 0$, bleue) associée. Frontière d'instabilités pseudo-firehose perpendiculaire $G = 0$ (verte) et zone instable ($G < 0$, verte) associée. Ligne noire : ensemble des couples $\{\beta_{\parallel 0}; a_{p0}\}$ stable pour tout angle θ paramétrisé par $F = G$. Zone blanche : instabilité pseudo-firehose oblique.

La zone de stabilité de ce nouveau mode en fonction des paramètres $\beta_{\parallel 0}$ et a_{p0} est donc quasi-inexistante. Un résumé de l'ensemble des éléments de cette analyse est donnée sur la FIGURE II.4.3 Sachant que la problématique principale de ce travail se place dans le cadre compressible, l'exploitation de ce modèle incompressible n'a pas été engagé.

4.4 Limite incompressible du modèle CGL

Dans le cas MHD compressible avec pression isotrope, le mode pseudo-alfvénique apparaît comme une limite incompressible des modes compressibles magnétosoniques. Similairement, on s'est demandé si l'on pouvait retrouver une trace du nouveau mode dans la limite incompressible du modèle CGL linéaire.

Dans le cas linéaire, le modèle CGL donne l'équation de dispersion (II.4.17) que l'on va simplement noter $\bar{\mathbf{M}}\mathbf{v}_1 = 0$. Avec la contrainte incompressible $\nabla \cdot \mathbf{v}_1 = 0$, on peut écrire \mathbf{v}_1 sous la forme d'un potentiel vecteur Ω : $\mathbf{v}_1 = \nabla \times \Omega = \bar{\mathbf{N}}\Omega$ avec $\bar{\mathbf{N}} = i\mathbf{k} \times \bar{\mathbf{I}}$ alors à travers l'équation de dispersion : $\bar{\mathbf{M}}\bar{\mathbf{N}}\Omega = 0$ avec

$$\bar{\mathbf{M}}\bar{\mathbf{N}} = \begin{pmatrix} 0 & -k_{\parallel} \left(\frac{\omega^2 - \omega_A^2}{v_{A0}^2 k_{\parallel}^2} - \left(\frac{\beta_{\parallel 0}}{2} a_{p0} + 1 \right) \frac{k_{\perp}^2}{k_{\parallel}^2} \right) & 0 \\ k_{\parallel} \frac{\omega^2 - \omega_A^2}{v_{A0}^2 k_{\parallel}^2} & 0 & -k_{\perp} \frac{\omega^2 - \omega_A^2}{v_{A0}^2 k_{\parallel}^2} \\ 0 & k_{\perp} \left(\frac{\omega^2}{v_{A0}^2 k_{\parallel}^2} - \frac{\beta_{\parallel 0}}{2} (3 - a_{p0}) \right) & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{II.4.30})$$

où $\omega_A^2 = -v_{A0}^2 k_{\parallel}^2 \left(\frac{\beta_{\parallel 0}}{2} (1 - a_{p0}) - 1 \right)$ correspond au mode d'Alfvén-firehose incompressible. On remarque que ce mode est solution si $\Omega_y = 0$, c'est-à-dire pour une polarisation de la vitesse orientée suivant $(0, 1, 0)$.

On a vu dans la section 4.4 que le nouveau mode est polarisé suivant $(\cos \theta, 0, -\sin \theta)$. Si l'on impose cette polarisation dans Ω on obtient $\Omega_y \neq 0$. Dans ce cas l'équation de dispersion peut alors s'écrire sous la forme du système :

$$k_{\parallel}(\omega^2 - \omega_A^2 - v_{A0}^2 \frac{\beta_{\parallel 0}}{2} a_{p0} + 1) k_{\perp}^2 = 0 \quad (\text{II.4.31})$$

$$k_{\perp}(\omega^2 - v_{A0}^2 \frac{\beta_{\parallel 0}}{2} (3 - a_{p0}) k_{\parallel}^2) = 0 \quad (\text{II.4.32})$$

$$k_{\parallel}\Omega_x - k_{\perp}\Omega_z = 0 \quad (\text{II.4.33})$$

On va étudier ce système en fonction de l'angle θ de propagation :

- $\theta = 0^\circ \Rightarrow k_{\perp} = 0$ et on suppose $k_{\parallel} \neq 0$, alors $\omega^2 = \omega_A^2$ et $\Omega_x = 0$. On retrouve le mode firehose parallèle associé à un champ de vitesse sera polarisé suivant $(1, 0, 0)$.
- $\theta = 90^\circ \Rightarrow k_{\parallel} = 0$ et on suppose $k_{\perp} \neq 0$, alors $\omega^2 = 0$ et $\Omega_z = 0$. On obtient un mode qui ne se propage pas et un champ de vitesse polarisé suivant $(0, 0, 1)$.
- Si $k_{\parallel} \neq 0$ et $k_{\perp} \neq 0$, alors $\omega^2 = v_{A0}^2 \frac{\beta_{\parallel 0}}{2} (3 - a_{p0}) k_{\parallel}^2$ et θ doit vérifier $\tan^2 \theta = \frac{2(\beta_{\parallel 0}(2-a_{p0})-1)}{\beta_{\parallel 0}a_{p0}+2}$.

Après quelques manipulations de $\omega^2 = v_{A0}^2 \frac{\beta_{\parallel 0}}{2} (3 - a_{p0}) k_{\parallel}^2$ et de la condition $\tan^2 \theta = \frac{2(\beta_{\parallel 0}(2-a_{p0})-1)}{\beta_{\parallel 0}a_{p0}+2}$, il est possible de faire ressortir la relation de dispersion du nouveau mode.

On remarque qu'appliquer la contrainte incompressible sur le modèle CGL revient à chercher la limite telle que p_{\parallel} ou p_{\perp} respecte leur équation individuelle dans le modèle incompressible gyrotron. En fait, la limite incompressible du modèle CGL correspond à l'intersection des solutions des modèles incompressible gyrotron défini avec la trace de la pression, incompressible gyrotron défini avec l'équation sur p_{\parallel} et incompressible gyrotron défini avec l'équation sur p_{\perp} . Dans chacun de ces modèles, le mode d'Alfvén-

firehose sera accompagné d'un nouveau mode dont l'expression dépend du choix de la fermeture sur la pression. Mais tous seront polarisé tel que $(\cos \theta, 0, -\sin \theta)$ et peuvent être retrouvés dans le mode surconstraint du modèle CGL.

4.5 Synthèse : Limite incompressible et pistes d'étude

Limite incompressible de la loi exacte avec pression tensorielle et cas gyrotronique :

$$-4(\varepsilon - \varepsilon_{PP98}) = -2 \langle \delta(\bar{\mathbf{P}} - p\bar{\mathbf{I}}) : \delta(\nabla \mathbf{v}) \rangle = -2 \langle \delta\bar{\mathbf{\Pi}} : \delta(\nabla \mathbf{v}) \rangle \quad (\text{II.4.34})$$

$$-4(\varepsilon - \varepsilon_{PP98}) = -2 \left\langle \delta((p_{\parallel} - p_{\perp})(\mathbf{b}\mathbf{b} - \frac{1}{3}\bar{\mathbf{I}})) : \delta(\nabla \mathbf{v}) \right\rangle \quad (\text{II.4.35})$$

⇒ Questionne l'existence d'un modèle incompressible gyrotronique.

Modèle incompressible avec pression gyrotronique proposé compatible avec la loi exacte :

$$\partial_t \mathbf{v} + \nabla \cdot (\mathbf{v}\mathbf{v} - \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A + \frac{1}{\rho_0} \bar{\mathbf{P}}_*) = 0 \quad (\text{II.4.36})$$

$$\partial_t p + \nabla \cdot (p\mathbf{v}) + \frac{2}{3} \bar{\mathbf{\Pi}} : \nabla \mathbf{v} = 0 \quad (\text{II.4.37})$$

$$\partial_t \mathbf{v}_A - \nabla \cdot (\mathbf{v}_A \mathbf{v} - \mathbf{v} \mathbf{v}_A) = 0 \quad (\text{II.4.38})$$

avec $\bar{\mathbf{P}}_* = (p + p_m)\bar{\mathbf{I}} + \bar{\mathbf{\Pi}}$, $p_m = \frac{\rho_0 |\mathbf{v}_A|^2}{2}$, $p = \frac{1}{3}(2p_{\perp} + p_{\parallel})$,

$$\bar{\mathbf{\Pi}} = (p_{\parallel} - p_{\perp})(\mathbf{b}\mathbf{b} - \frac{1}{3}\bar{\mathbf{I}}), \quad \mathbf{b} = \frac{\mathbf{v}_A}{|\mathbf{v}_A|}, \quad \text{et} \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0.$$

Etude linéaire du modèle proposé :

- Mode d'Alfvén incompressible polarisé suivant $(0, 1, 0)$:

$$\frac{\omega^2}{v_{A0}^2 k_{\parallel}^2} + \frac{\beta_{\parallel 0}}{2} (1 - a_{p0}) - 1 = 0 \quad (\text{II.4.39})$$

$$\text{Instabilité firehose : } \frac{\beta_{\parallel 0}}{2} (1 - a_{p0}) - 1 > 0 \quad (\text{II.4.40})$$

- Nouveau mode polarisé suivant $(1, 0, -\tan \theta)$: (voir FIGURE II.4.3)

$$\frac{\omega^2}{v_{A0}^2 k_{\parallel}^2} - \frac{2(\frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0}) - 1) \cos^2 \theta + (3\frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0}) - 2) \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta - 2 \cos^2 \theta} = 0 \quad (\text{II.4.41})$$

$$\text{Critère d'instabilité pseudo-firehose : } \frac{\beta_{\parallel 0}}{2} (1 - a_{p0}) \neq \frac{3}{4} \quad (\text{II.4.42})$$

Limite incompressible du modèle CGL :

- Survie du mode d'Alfvén-firehose ⇒ Solution non-linéaire, pendant gyrotronique du mode d'Alfvén non linéaire ?
- Apparition d'un mode surcontraint correspondant au nouveau mode incompressible.

Les résultats obtenus ici à propos du nouveau modèle semble prometteur et feront l'objet d'une publication future.

PARTIE III : Etude numérique d'un plasma compressible turbulent

Simulations are to plasma turbulence physics what telescopes are to astronomy. They allow us to see beyond the limitations of our physical experiments and explore the vast and complex landscape of plasma behavior.

Paul W. TERRY, "The role of numerical simulations in plasma turbulence research"

2010

INTRODUCTION

L'outil numérique pour la turbulence permet d'étudier divers modèles, d'isoler les effets des différents processus présents dans un plasma turbulent ou de simuler des régimes présents dans des plasmas inaccessibles. Par exemple, les effets de la compression et les régimes sonique ou supersonique ont été étudiés par ANDRÉS *et al.* 2018, des régimes proche du régime supposé dans le milieu interstellaire ont été explorés par FEDERRATH *et al.* 2010; FERRAND, GALTIER, SAHRAOUI et FEDERRATH 2020. L'impact de l'approximation Hall sur la cascade incompressible d'énergie totale est le sujet de FERRAND, GALTIER, SAHRAOUI, MEYRAND *et al.* 2019 et celui de la fermeture Landau-fluide a fait l'objet de FERRAND, SAHRAOUI, LAVEDER *et al.* 2021. Comme on le verra par la suite, le modèle Landau-fluide est un modèle gyrotope fermé au niveau du flux de chaleur de telle sorte que le modèle fluide capte le processus cinétique de l'effet Landau décrit par la théorie linéaire. Dans ces simulations, on a alors $\nabla \cdot \bar{\vec{q}} \neq 0$.

Dans les études présentées ici, nous allons utiliser des simulations qui ont, pour certaines, fait l'objet du papier [FERRAND, SAHRAOUI, LAVEDER *et al.* 2021]. Le code de simulation et notre méthode de post-traitement permettant d'obtenir les différents termes des lois exactes, seront présentés dans le chapitre 6. Différentes méthodes de validation feront l'objet du chapitre 7. Puis, nous présenterons et analyserons, plus en détail, la cascade turbulente présente dans divers jeux de données. Ceux issus de simulations du modèle CGL (MCGL) feront l'objet du chapitre A et ceux associés au modèle Landau-fluide (MLF) du chapitre 8.4.

Le premier objectif de ces études est de valider l'apport des lois dépendant d'une pression gyrotope (voir chapitre II.??) par rapport à la loi compressible avec pression isotrope dérivée dans le chapitre I.?. Le second est d'explorer l'impact de l'anisotropie de pression sur la cascade.

Les résultats de ces études n'ont pas encore été publiées³.

3. Le chemin engagé pour obtenir les résultats montré ici, s'est révélé tortueux entre la réflexion sur les méthodes à utiliser dans le code de post-traitement, l'implémentation de ces méthodes, la nécessité de lancer de nouvelles simulations, etc.

Paramètres et dénominations des simulations utilisées

Les paramètres et dénominations des simulations utilisées sont résumés dans la TABLE III.4.1 et la TABLE III.4.2. Nous nous y réfèrerons au fil des chapitres de cette partie. Le champ magnétique est initialisé suivant \mathbf{e}_z . CGL1, CGL2, CGL3, LF2 et LF3 ont initialement fait l'objet de l'article FERRAND, SAHRAOUI, LAVEDER *et al.* 2021 mais les échantillons de temps consécutifs ont été extraits pour nos études. Les simulations CGL5 et CGL6 ont été spécialement lancées pour nos études.

Name	Résolution	$k_{\perp} d_i$	θ_i	E_{sup}	A_f	D	N_t	δt
CGL1	512^3	0.045	7°	1.6×10^{-2}	1.0×10^{-3}	6700	4	6.25×10^{-2}
CGL2	512^3	0.045	15°	1.6×10^{-2}	1.0×10^{-3}	12 900	4	5×10^{-2}
CGL3	$512^2 \times 1024$	0.5	15°	4.5×10^{-2}	8.0×10^{-3}	361	6	2×10^{-4}
CGL3B	$512^2 \times 1024$	0.5	15°	1.125×10^{-2}	4.0×10^{-3}	410	4	3×10^{-4}
CGL5	$512^2 \times 1024$	0.147	15°	1.6×10^{-2}	3.0×10^{-3}	12 905	6	5×10^{-3}
CGL6	$512^2 \times 1024$	0.147	15°	1.6×10^{-2}	3.0×10^{-3}	2730	4	5×10^{-3}
LF2	512^3	0.045	15°	1.6×10^{-2}	1×10^{-3}	6580	1	6.25×10^{-2}
LF3	432^3	0.5	15°	4.5×10^{-2}	8×10^{-3}	180.2	1	4×10^{-4}

TABLE III.4.1 – Extraits des paramètres des simulations taitées. Résolution : Nombre de points grille numérique du code initial. $k_{\perp} d_i$: vecteur d'onde d'injection perpendiculaire à \mathbf{e}_z normalisé par la longueur inertielle d_i , $L_{\perp} = \frac{2\pi}{k_{\perp} d_i}$ est la taille physique perpendiculaire de la grille simulée. θ_i : angle d'injection par rapport \mathbf{e}_z , $L_z = \frac{L_{\perp}}{\tan \theta_i}$. E_{sup} : énergie perpendiculaire cinétique + magnétique, critère d'extinction du forçage. D : date initiale (en unité de temps ionique) de prélèvement de l'échantillon temporel utilisé pour l'étude le loi exacte. N_t : nombre de temps consécutifs utilisés. δt : pas temporel, unité de temps ionique.

Name	$\nu = \eta$	ν_{ρ}	ν_p	ν_q	α	a_{pi0}	a_{pe0}
CGL1	7.35×10^{-8}	0	7.35×10^{-9}	0	80	1	1
CGL2	7.35×10^{-8}	0	7.35×10^{-9}	0	10	1	1
CGL3	4×10^{-14}	1.6×10^{-14}	1.6×10^{-14}	0	2.5	1	1
CGL3B	1.0×10^{-14}	1.0×10^{-14}	1.0×10^{-14}	0	2.5	1	1
CGL5	3×10^{-11}	0	3×10^{-12}	0	6	1	1
CGL6	3×10^{-11}	0	3×10^{-12}	0	5	4	1
LF2	7.35×10^{-8}	0	7.35×10^{-9}	7.35×10^{-9}	1	1	1
LF3	7×10^{-14}	7×10^{-14}	7×10^{-14}	7×10^{-14}	1.5	1	1

TABLE III.4.2 – Extraits des paramètres des simulations taitées, choisis empiriquement pour l'hyperdissipation. ν , η , ν_{ρ} , ν_p : constantes caractéristiques de l'hyperdissipation respectivement de la vitesse, du champ magnétique, de la densité, des pressions. α : facteur d'anisotropie. a_{pi0} : taux d'anisotropie de pression ionique initiale. a_{pe0} : taux d'anisotropie de pression électronique initiale.

PARTIE III : CHAPITRE 5

L SIMULATION TURBULENTE ET CALCUL DE LOIS EXACTES

Sommaire

5.1	Simuler un plasma turbulent	53
5.2	Code de post-traitement pour le calcul numérique de lois exactes	55
5.3	Mode de représentation du résultat	57
5.4	Synthèse des méthodes et choix numériques	61

Dans cette partie, nous utiliserons des simulations turbulentes issues de deux modèles, le premier dépend d'une fermeture CGL tandis que le second dépend d'une fermeture de type LF. Ces modèles sont simulés avec un seul et unique code que l'on va présenter dans ce chapitre. Les spécificités des modèles seront détaillés dans les chapitres A et 8.4. Dans ce premier chapitre, seront abordées les méthodes numériques utilisées dans l'implémentation de ces modèles (section 5.1) ainsi que la description des méthodes de post-traitement associées au calcul des lois exactes (section 5.2) et à leur visualisation (section 5.3). Les valeurs associées à chaque simulation, des paramètres décrits dans la section 5.1 sont résumés dans la TABLE III.4.1 et la TABLE III.4.2.

5.1 Simuler un plasma turbulent

Le code de simulation utilisé est un code tridimensionnel pseudo-spectral et versatile développé en interne à l'Observatoire de la Côte d'Azur pour l'implémentation du modèle fluide proposé et étendu par PASSOT et SULEM 2007 ; PASSOT, SULEM et HUNANA 2012 ; SULEM et PASSOT 2015. Ce modèle prend en compte les termes gyrotrope et non gyrotrope des tenseurs de pression et de flux de chaleur des électrons et des ions. Le code permet à l'utilisateur de choisir quelles contributions garder.

Les quantités sont sans dimension, les longueurs sont normalisées par d_i la longueur inertie des ions et les vitesses par la vitesse d'Alfvén. Cela induit une constante $\beta/2$, avec $\beta = 1$, présente dans tous les termes dépendant des pressions. Il faudra prendre en compte cette constante par la suite.

On va supposer une équation générique $\partial_t X = \mathbf{v} \cdot \nabla X$. La simuler via un code pseudo-spectral (algorithme schématisé sur la FIGURE III.5.1) signifie que les dérivées spatiales telles que ∇X sont effectuées dans l'espace de Fourier, tandis que les produits tels que $\mathbf{v} \cdot \nabla X$ et l'intégration temporelle de l'équation pour obtenir les quantités au pas de temps suivant, sont effectués dans l'espace réel. Ainsi, à chaque pas de temps, un aller-retour est effectué entre les espaces réel et de Fourier. Leur discrétisation en un nombre de points finis (les grilles), induit un repliement du spectre («aliasing») des termes non-linéaires.

Cet effet est limité par une troncation, à chaque pas de temps, du spectre de chaque quantité. L'intégration temporelle est obtenue via un schéma de Runge-Kutta d'ordre 3 (RK3), choisi pour sa stabilité devant des termes dispersifs tels que le terme de Hall. Les conditions de bords de la grille spatiale sont choisies comme périodiques afin de pouvoir utiliser la transformation de Fourier et l'algorithme de transformée de Fourier rapide (FFT).

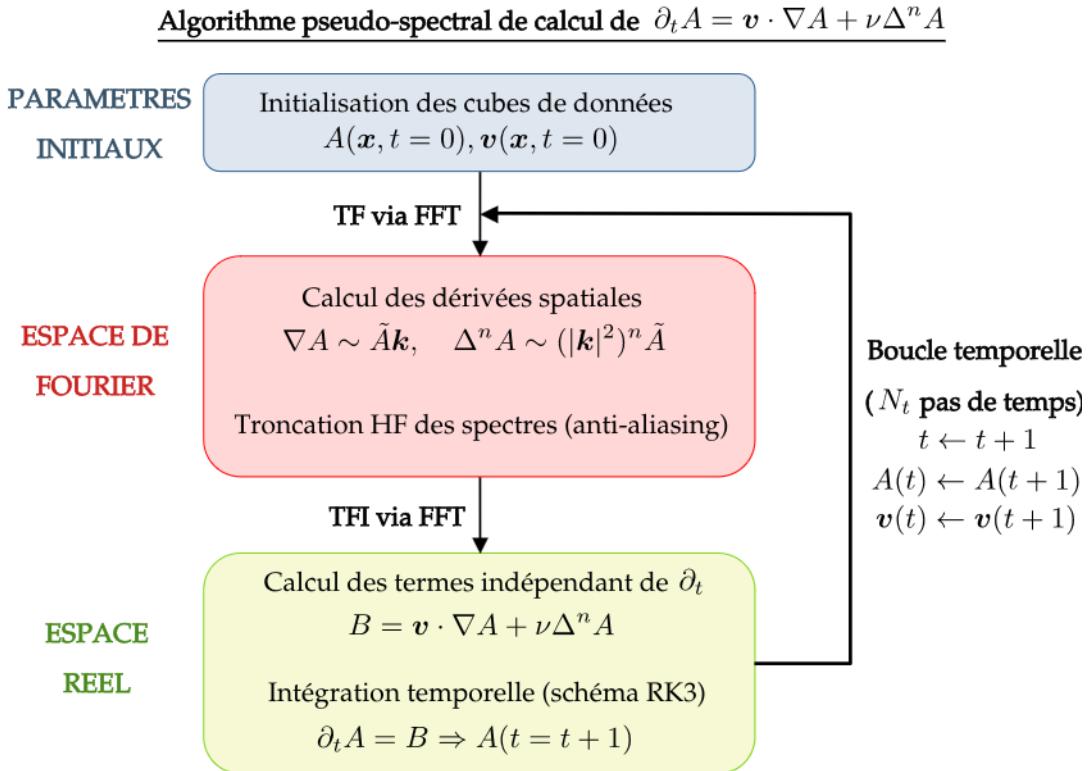


FIGURE III.5.1 – Algorithme d'intégration d'une équation d'évolution générique via une méthode pseudo-spectrale. Prise en compte des corrections anti-aliasing et hyperdissipation $\nu \Delta^n A$. TF(I) correspond à Transformée de Fourier (Inverse).

Afin de limiter l'apparition de fort gradients, ces discontinuités faisant planter la simulation, deux possibilités existent : appliquer un filtrage hautes fréquences de la quantité impliquée ou un terme d'hyperviscosité dans son équation. Le choix effectué est celui de l'hyperviscosité, c'est-à-dire imposer une décroissance graduelle et de plus en plus intense du spectre de la quantité. Ce terme de dissipation numérique s'écrit pour un champ X , $\nu \Delta^n X$ avec ν , une constante choisie initialement et n un entier fixé à 4. Δ^n est effectué dans l'espace de Fourier où une décroissance du spectre en \mathbf{k}^{-8} est donc obtenue. L'existence d'un champ magnétique moyen dans les simulations, induit une anisotropie spatiale de la turbulence. Sa direction est imposée suivant \mathbf{e}_z . Afin de refléter cette anisotropie, l'hyperviscosité est adaptée avec un paramètre α : Δ^n est calculée dans l'espace de Fourier tel que $(k_x^2 + k_y^2 + \alpha k_z^2)^n$. Les paramètres ν et α sont résumés dans la TABLE III.4.2. Avec l'incrément temporel δt , ils sont accordés empiriquement afin de réduire un peu le temps de calcul, de maintenir la dissipation aux vecteurs d'onde les plus grands et d'éviter tout emballement de la simulation et l'apparition d'instabilités numériques induisant une interruption accidentelle de la simulation. En termes de turbulence, l'hyperviscosité sera considéré comme le terme de dissipation évacuant l'énergie aux petites échelles.

La cascade d'énergie est entretenue par un forçage permanent¹. Ce forçage de type antenne de Langevin (oscillateur harmonique forcé aléatoirement) injecte la somme de deux ondes opposées de fréquence aléatoire mais proche de celle de l'onde d'Alfvén cinétique. Leur amplitude correspond au paramètre A_f multiplié par un facteur aléatoire. Il est appliqué sur le champ de vitesse de telle sorte à maintenir la somme des énergies cinétique et magnétique perpendiculaires moyennes sous un niveau E_{sup} et au-dessus d'un niveau E_{inf} proche de E_{sup} . L'énergie moyenne totale est donc quasi-constante. Il apparaît dans l'espace de Fourier tel un peigne de distribution de Dirac égales à 1 aux vecteurs d'ondes les plus petits, tels que $\frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} = \{(0, \pm 1, \pm 1); (\pm 1, \pm 1, \pm 1)\}$. L'angle d'injection de l'énergie, θ_i , sert à définir la forme de la grille spatiale, un parallélépipède allongé dans la direction e_z , la taille physique de cette grille est fixée telle que $L_\perp/L_z = \tan \theta_i$.

La taille de l'espace des échelles accessibles via ces simulations dépend de la taille de la grille spatiale. L'échelle la plus petite dans une direction est la distance minimale entre deux points de la grille dans cette direction et l'échelle la plus grande la moitié de la taille de la grille. Pour une étude de turbulence, on a besoin de plusieurs ordres de grandeurs entre les échelles minimales et maximales. Afin d'obtenir un nombre de points suffisant, on part d'une grille de taille réelle fixée, mais contenant peu de points, par exemple 128^3 , puis, après avoir atteint un régime turbulent satisfaisant tel que les spectres se soient stabilisés, on augmente le nombre de points, et ainsi de suite jusqu'à avoir la taille voulue pour l'espace des échelles et un spectre stabilisé. Le nombre de points idéal serait de 1024^3 ou plus, mais plus il y a de points, plus le temps de calcul augmente (typiquement, il faut environ un mois de calcul avec 64 processeurs pour obtenir une simulation de taille $512^2 \times 1024$ dans laquelle la turbulence se serait a priori entièrement développée) et plus, le calcul monopolisera de la mémoire. Similairement, le calcul du taux de cascade sera aussi plus contraignant. Un compromis doit donc être trouvé. La taille de cube minimale considérée dans le cadre des études de turbulence sera 512^3 et une partie des simulations auront une taille de 512^2 dans le plan $\{e_x, e_y\}$ et 1024 dans la direction e_z .

Les simulations utilisées et détaillées dans les chapitres 7 et A ont, pour la plupart, fait l'objet de l'article FERRAND, SAHRAOUI, LAVEDER *et al.* 2021. Parmi, elles, une est de taille 1024^3 . Elle ne sera pas traitée ici, car sa taille est trop importante pour le code de post-traitement implémenté et les moyens de calcul (mésocentres) à disposition.

5.2 Code de post-traitement pour le calcul numérique de lois exactes

On a vu qu'une loi exacte est une formule statistique donnant un résultat en fonction de l'échelle ℓ . Elle dépend de quantités évaluées localement en deux points puis combinées en une expression qui est ensuite moyennée. Une partie des termes doivent ensuite être dérivés dans l'espace des échelles si aucune hypothèse d'intégration n'est effectuée. Cette méthode pourrait être implémentée directement. On considérerait les quantités à disposition, a priori des cubes évalués en \mathbf{x}), on les translaterait de telle sorte à obtenir des cubes évalués en $\mathbf{x} - \ell$ puis on les combinerait suivant l'expression voulue avant de les moyenner. On obtiendrait ainsi notre résultat évalué en un point de l'espace des échelles et il faudrait recommencer encore et encore afin d'obtenir l'ensemble de l'espace des échelles. Enfin, on

1. HELLINGER *et al.* 2018 ; GÓMEZ *et al.* 2005 ; MININNI *et al.* 2011 utilisent une autre méthode pour obtenir le développement d'une cascade turbulente : leur champ de vitesse et champ magnétique sont initialisés par une superposition de modes de phases aléatoires, puis leurs simulations évoluent librement.

dériverait ou intégrerait le résultat. Cet algorithme est schématisé sur la FIGURE III.5.2.

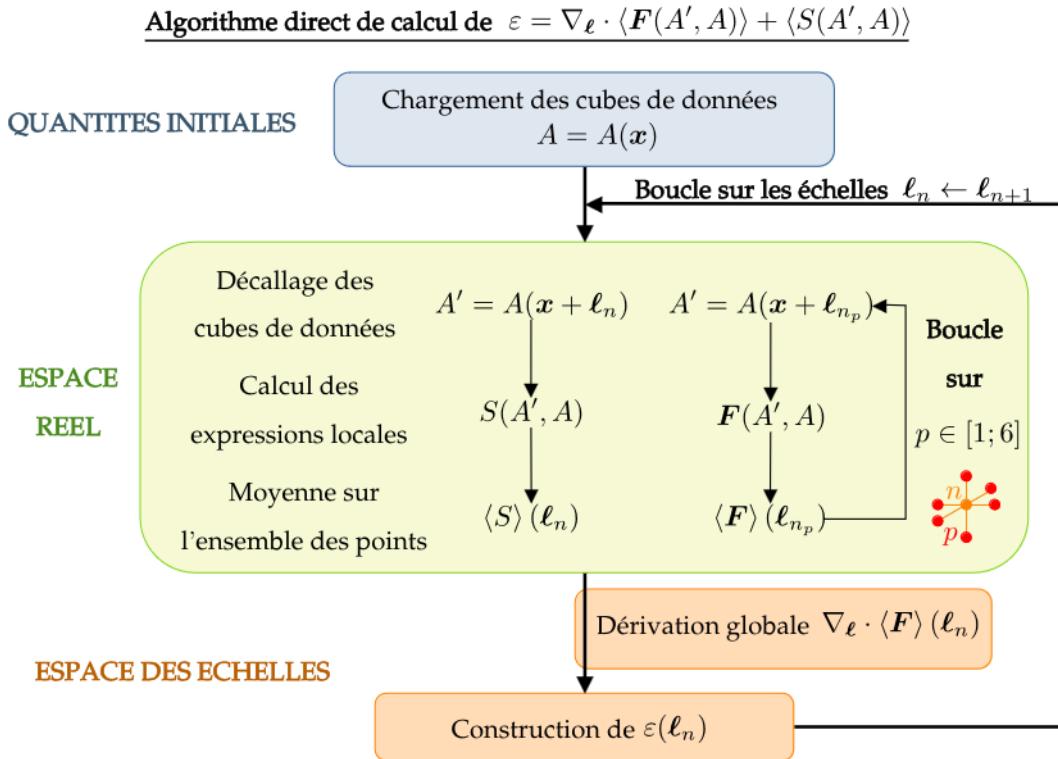


FIGURE III.5.2 – Algorithme de calcul du taux de cascade ε via la méthode directe. Les quantités impliquées sont des quantités génériques.

Cette méthode est coûteuse en temps de calcul et demande des compromis. Pour réduire le temps de calcul, on peut choisir intelligemment un certain nombre de vecteurs d'échelle. Tout d'abord, on peut jouer sur la parité de la loi exacte et ne calculer que les vecteurs tels que $\ell_z \leq 0$. FERRAND, SAHRAOUI, LAVEDER *et al.* 2021 ; FERRAND, SAHRAOUI, GALTIER *et al.* 2022, par exemple, utilisent les hypothèses d'isotropie ou d'axisymétrie de l'espace d'échelles. Dans le cas isotrope, l'espace des échelles est alors vu comme une sphère et 73 vecteurs directeurs partant du centre de cette sphère. Dans le cas axisymétrique, le découpage est similaire, mais effectué dans des disques pour chaque ℓ_z . La divergence dans l'espace des échelles est ensuite effectuée sphériquement (resp. cylindriquement) le long de $\ell = |\ell|$ (resp. $\ell_{\perp} = \sqrt{\ell_x^2 + \ell_y^2}$) en supposant les dérivées angulaires nulles. Je n'ai pas voulu faire de même, n'étant pas convaincu de l'indépendance angulaire de la dérivée et trouvant la statistique finale faible. Une autre possibilité est de choisir les vecteurs en fonction du mode de représentation final. Si, au final, le mode de représentation est logarithmique, on peut ne choisir qu'un nombre limité de vecteurs à grande échelle tels qu'ils soient régulièrement espacés en représentation logarithmique (MANZINI *et al.* 2022). Un problème de cette méthode est l'irrégularité de la grille résultante. La divergence dans l'espace des échelles doit se faire vecteur par vecteur à partir des six échelles les plus proches (au minimum). Ce choix-là ne semblait toujours pas satisfaisant, car il implique de devoir potentiellement refaire le calcul en fonction du mode de représentation final et un biais en cas de moyenne dans l'espace des échelles. Ces compromis doivent en plus être accompagnés d'une optimisation, voire d'une parallélisation du calcul numérique.

Après maintes versions et tentatives d'optimisation de mon code de post-traitement

tel qu'essayant de respecter explicitement la forme de la loi exacte, j'ai décidé de changer radicalement de point de vue. Mathématiquement, les opérations de corrélation, \otimes , et de convolution, $*$, sont liés. En effet, si l'on considère deux quantités s et r , et qu'on les corrèle :

$$\begin{aligned} C_{sr}(\boldsymbol{\ell}) = s(\mathbf{x}) \otimes r(\mathbf{x}) &= \frac{1}{V} \iiint_V s(\mathbf{x} + \boldsymbol{\ell}) r^*(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \frac{1}{V} \iiint_V s(\mathbf{x}) r^*(\mathbf{x} - \boldsymbol{\ell}) d\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{V} \iiint_V s(\mathbf{x}) r^*(-(\boldsymbol{\ell} - \mathbf{x})) d\mathbf{x} = \frac{1}{V} s(\boldsymbol{\ell}) * r^*(-\boldsymbol{\ell}) \end{aligned} \quad (\text{III.5.1})$$

avec V le volume d'intégration. Ainsi appliquer l'opération de corrélation entre s et r revient à convoluer s évaluée en $\boldsymbol{\ell}$ avec le conjugué de r évaluée en $-\boldsymbol{\ell}$. Dans notre situation, $r^* = r$ puisque r n'est pas un complexe. Une autre propriété mathématique intéressante est que l'opération de convolution correspond à effectuer un simple produit dans l'espace de Fourier. Ainsi en notant $\text{TF}[\cdot]$ la transformée de Fourier et $\text{TFI}[\cdot]$ la transformée inverse, :

$$C_{sr}(\boldsymbol{\ell}) = \text{TFI}[\text{TF}[C_{sr}(\boldsymbol{\ell})]] = \frac{1}{V} \text{TFI}[\text{TF}[s(\boldsymbol{\ell})] \cdot \text{TF}[r(-\boldsymbol{\ell})]] = \frac{1}{V} \text{TFI}[\text{TF}[s](\mathbf{k}) \cdot \text{TF}[r]^*(\mathbf{k})] \quad (\text{III.5.2})$$

L'obtention de l'ensemble de l'espace des échelles est donc possible mais demande de développer tous les termes factorisés de la loi exacte. Par exemple, pour la fonction de structure $\langle \delta\mathbf{v} \cdot \delta\mathbf{v} \delta\mathbf{v} \rangle$:

$$\begin{aligned} \langle \delta\mathbf{v} \cdot \delta\mathbf{v} \delta\mathbf{v} \rangle &= \langle \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}' \mathbf{v}' - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \mathbf{v}' + 2\mathbf{v}' \cdot \mathbf{v} \mathbf{v} - \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}' \mathbf{v} - 2\mathbf{v}' \cdot \mathbf{v} \mathbf{v}' \rangle \quad (\text{III.5.3}) \\ &= \frac{1}{N} \text{TFI}[\text{TF}[C_{\mathbf{v}, \mathbf{v}, \mathbf{v}}] - \text{TF}[C_{\mathbf{v}, \mathbf{v}, \mathbf{v}}] + 2\text{TF}[C_{\mathbf{v}, \mathbf{v} \mathbf{v}}] - 2\text{TF}[C_{\mathbf{v} \mathbf{v}, \mathbf{v}}]] \quad (\text{III.5.4}) \\ &= \frac{1}{N} \text{TFI}[\text{TF}[\mathbf{v}]^* \cdot \text{TF}[\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}] - \text{TF}[\mathbf{v}] \cdot \text{TF}[\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}]^*] \\ &\quad + \frac{2}{N} \text{TFI}[\text{TF}[\mathbf{v}]^* \cdot \text{TF}[\mathbf{v} \mathbf{v}] - \text{TF}[\mathbf{v}] \cdot \text{TF}[\mathbf{v} \mathbf{v}]^*] \end{aligned} \quad (\text{III.5.5})$$

avec $C_{\mathbf{v}, \mathbf{v}, \mathbf{v}} = \langle \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}' \mathbf{v}' \rangle$, $C_{\mathbf{v} \mathbf{v}, \mathbf{v}} = \langle \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v} \mathbf{v}' \rangle$, $\text{TFI}[\cdot]$ la transformée de Fourier inverse et N le nombre de points moyennés et sachant que par homogénéité statistique, on a $\langle \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}' \mathbf{v}' \rangle = \langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \mathbf{v}' \rangle$. Cette méthode est utilisable, car il est possible de développer les expressions en des produits de deux quantités générales, une évaluée au point \mathbf{x} et l'autre en \mathbf{x}' , et parce que la simulation est périodique. L'algorithme associé à cette méthode est schématisé sur la FIGURE III.5.3. Cette méthode demande quelques précautions lors de l'implémentation, car elle peut vite devenir coûteuse en mémoire ainsi que de développer l'ensemble des termes présents dans une loi exacte. Cependant, elle permet d'obtenir un résultat complet, indépendant du mode de représentation final des résultats. C'est donc la méthode qui a été choisie. En usant de l'algorithme de FFT, elle s'avère, de plus, particulièrement rapide (moins d'une heure pour calculer séparément les trois termes de PP98).

5.3 Mode de représentation du résultat

Le résultat de l'algorithme de calcul par convolution est, pour chaque quantité, un parallélépipède couvrant une gamme d'échelles physiques dans la direction \mathbf{e}_z différente de la gamme d'échelles couverte dans les directions perpendiculaires, \mathbf{e}_x ou \mathbf{e}_y . Ces gammes d'échelles couvrant différents ordres de grandeurs, une représentation logarithmique sera adoptée. Le caractère tridimensionnel de la grille parallélépipédique, impose de choisir

Algorithme spectral de calcul de $\varepsilon = \nabla_\ell \cdot \langle \mathbf{F}(A', A) \rangle + \langle S(A', A) \rangle$
avec $\mathbf{F}(A', A)$ et $S(A', A)$ développés en termes de type $s(A') \cdot r(A)$

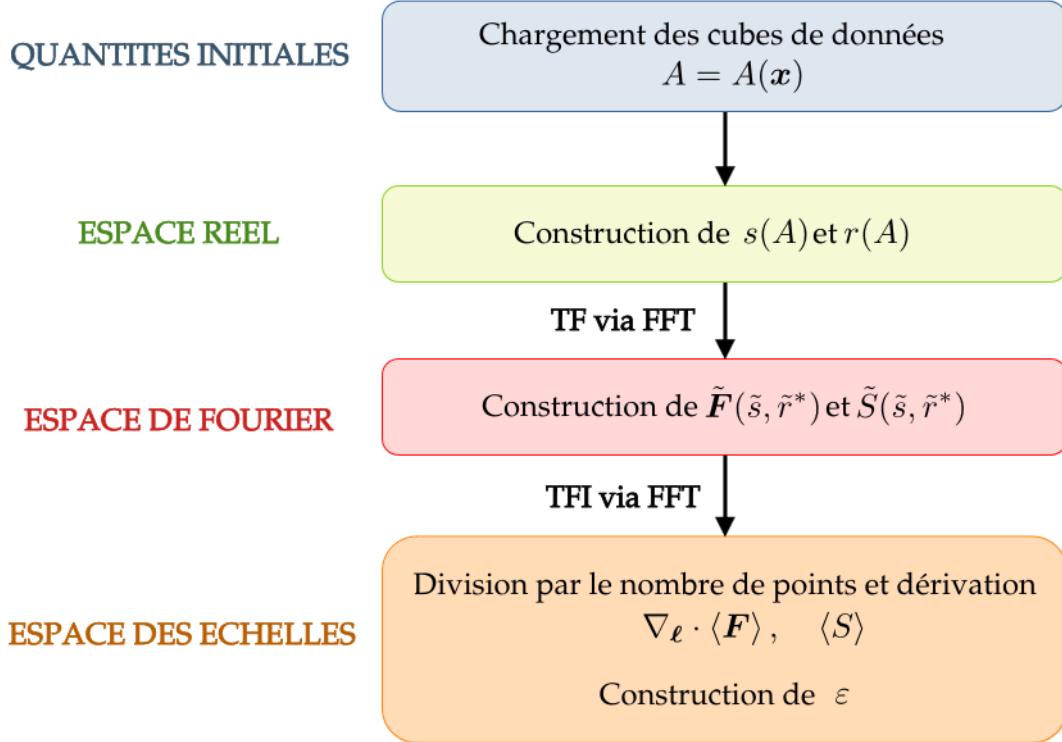


FIGURE III.5.3 – Algorithme de calcul du taux de cascade ε via la convolution. Les quantités impliquées sont des quantités génériques et par exemple pour S , $\text{TF}[S] = \tilde{S}$.

une méthode de réduction (3D vers 2D ou 1D) afin de pouvoir visualiser facilement les quantités. Différents types de réductions sont possibles et illustrées sur la FIGURE III.5.4 :

- R1 : 1D en fonction de $\ell = |\ell|$ en moyennant la quantité sur des coquilles de rayon moyen ℓ ,
- R2 : 2D en fonction de $\ell_\perp = \sqrt{\ell_x^2 + \ell_y^2}$ et $\ell_\parallel = \ell_z$ en moyennant la quantité sur des couronnes de rayon moyen ℓ_\perp dans chaque plan perpendiculaire à \mathbf{e}_z ,
- R3 : 1D en fonction de ℓ_\perp en moyennant la quantité sur des coquilles cylindriques de rayon moyen ℓ_\perp , la moyenne suivant ℓ_\parallel peut s'effectuer de diverses manières qui seront détaillées par la suite,
- R4 : 1D en fonction de ℓ_\parallel en moyennant chaque plan perpendiculaire à \mathbf{e}_z , la moyenne suivant ℓ_\perp peut s'effectuer de diverses manières qui seront détaillées par la suite.

Sachant que la grille parallélépipédique couvre des gammes d'échelles différentes dans la direction \mathbf{e}_z et les directions perpendiculaires (voir la FIGURE III.5.4R2), notre géométrie est fondamentalement axisymétrique. La représentation de type R2 est donc la plus adaptée. L'échelle «symlog»² permet de repérer les changements de signe et les ordres de

2. Cette échelle décrit l'ensemble des nombres réels via trois représentations : $[x_0; +\infty[$ en représentation logarithmique, $]x_0; -x_0[$ en représentation linéaire (afin d'éviter la singularité du point 0), puis $]-\infty; -x_0]$ en représentation logarithmique (en prenant l'opposé du logarithme de la valeur absolue). x_0

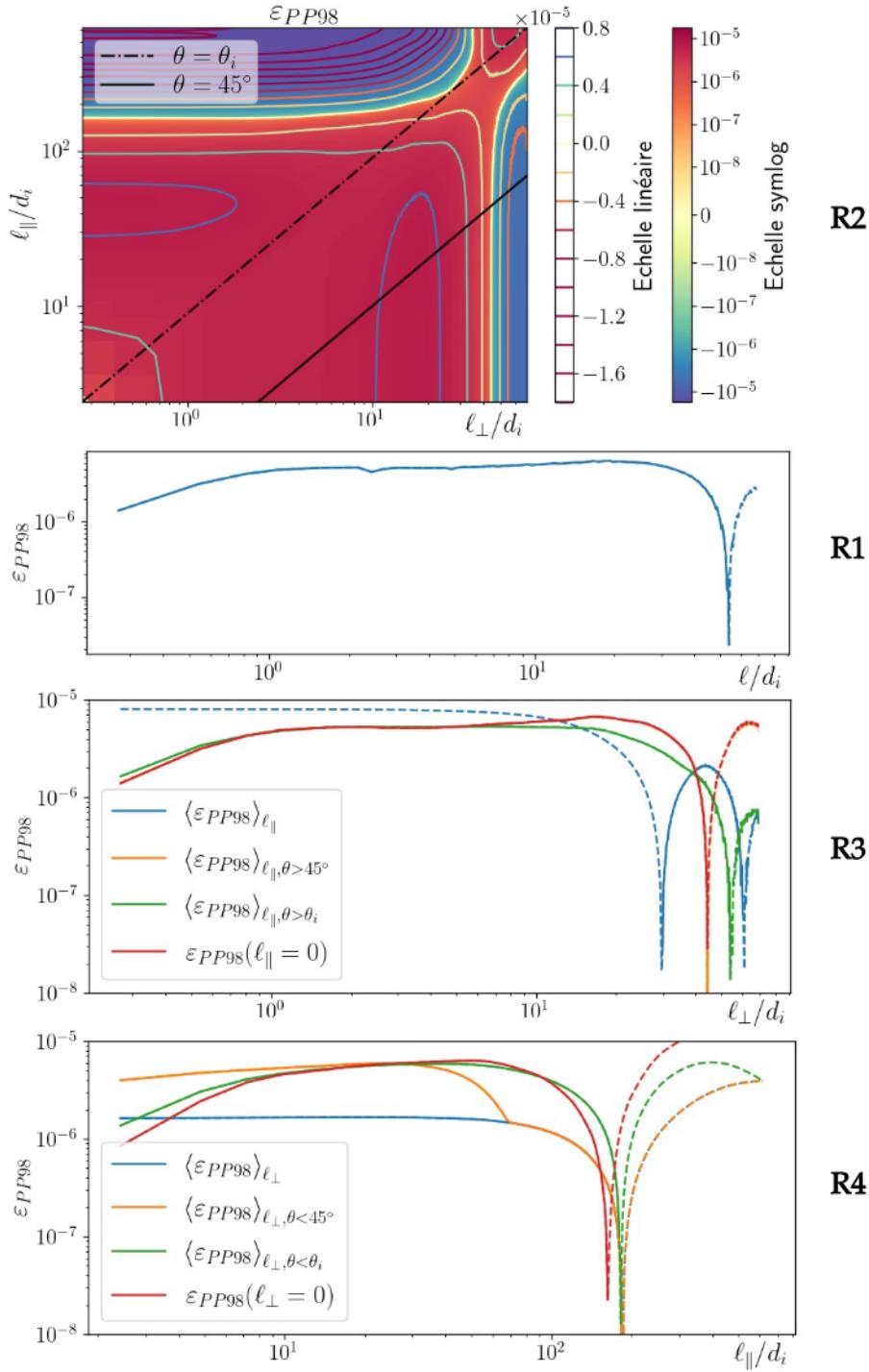


FIGURE III.5.4 – Différents modes de représentations du taux de cascade ε_{PP98} calculé avec PP98 dans les données de la simulation CGL1. R2 : 2D en fonction de ℓ_\perp et ℓ_\parallel , avec deux échelles de couleurs, une échelle symlog, linéaire entre -10^8 et 10^8 (continue), une échelle linéaire (discontinu). Frontières $\theta = \theta_i$ (noire discontinue) et $\theta = 45^\circ$ (noire continue). R1 : 1D en fonction de ℓ . R3 : 1D en fonction de ℓ_\perp , pour $\ell_\parallel = 0$ (rouge), moyenne sur l'ensemble des ℓ_\parallel (bleue), moyennes sur les ℓ_\parallel tels que $\theta > 45^\circ$ (orange), et tels que $\theta > \theta_i$ (vert). R4 : 1D en fonction de ℓ_\parallel , pour $\ell_\perp = 0$ (rouge), moyenne sur l'ensemble des ℓ_\perp (bleue), moyenne sur les ℓ_\perp tels que $\theta < 45^\circ$ (orange) et tels que $\theta < \theta_i$ (vert). Le caractère continu ou discontinu des courbes 1D reflète le signe de ε_{PP98} .

grandeur couverts par ε_{PP98} tandis que les courbes de niveau linéaires révèlent les variations plus spécifiques tel qu'un affaiblissement aux petites échelles ou des bosses (courbes de niveau bleues) aux échelles intermédiaires. On pourrait définir une zone inertie entre les courbes de niveaux associées à la valeur 0.4. On remarque que cette zone semble carrée, cela est dû aux axes logarithmiques. Avec des axes linéaires, on observerait un quart d'ellipse liant $\ell_{\parallel}/d_i = 10^2$ à $\ell_{\perp}/d_i \simeq 30$. Le problème des cartes est la difficulté de comparer de multiples quantités. Nous aurons donc besoin d'une représentation 1D.

R1 peut donner un résultat biaisé : sur la FIGURE III.5.4R1, le résultat correspond quasiment entièrement (sauf aux très grandes échelles communes aux directions parallèle et perpendiculaire) à $\varepsilon_{PP98}(\ell_{\parallel} = 0)$ en rouge sur la FIGURE III.5.4R3. De plus, le manque de points, pour effectuer la moyenne en chaque ℓ , induit des variations non-physiques du résultat (sursauts à intervalles réguliers sur la FIGURE III.5.4R1). Ce n'est donc pas le type de représentation 1D le plus adapté dans notre cas.

Originellement, le caractère petit ou grand des échelles est défini à partir de $\ell = |\boldsymbol{\ell}|$ (resp. petit ou grand). Cependant, visualiser la cascade via R3 en moyennant l'ensemble des ℓ_{\parallel} à ℓ_{\perp} fixé (courbe bleue), vient mixer les petits et grands ℓ . La zone négative à grand ℓ_{\parallel} vient écraser la zone inertie présumée et plus encore la variation des petites échelles. Le même phénomène apparaît pour R4. Une autre possibilité serait de ne regarder qu'une direction $\ell_{\parallel} = 0$ pour R3 (en rouge) ou $\ell_{\perp} = 0$ pour R4. Le résultat n'est alors pas très lisse et peu représentatif de la variation d'ensemble. La troisième possibilité correspond à appliquer un filtre angulaire. En définissant θ , l'angle entre $\boldsymbol{\ell}$ et \mathbf{e}_z , on pourrait considérer que les $\boldsymbol{\ell}$ contribuant à la dynamique parallèle sont les $\boldsymbol{\ell}$ quasi-parallèles tels que $\theta < 45^\circ$ et ceux contribuant à la dynamique perpendiculaire, les $\boldsymbol{\ell}$ quasi-perpendiculaires tels que $\theta > 45^\circ$. La frontière $\theta = 45^\circ$ est représentée par une ligne noire continue sur la FIGURE III.5.4R2 et les résultats apparaissent en orange sur la FIGURE III.5.4R3 et la FIGURE III.5.4R4. Pour R3, le résultat coïncide avec $\varepsilon_{PP98}(\ell_{\parallel} = 0)$. En effet, aux petites échelles, le plan tel que $\ell_{\parallel} = 0$ est la seule contribution à la moyenne. Similairement, pour R4, on assiste à un écoulement de la courbe qui rejoint $\langle \varepsilon_{PP98} \rangle_{\ell_{\perp}}$. Ce filtre angulaire n'est donc pas adapté.

La réduction 1D qui sera adoptée par la suite correspond à un filtrage angulaire basé sur l'angle d'injection de l'énergie, θ_i . Ce dernier impose la géométrie de la grille et les gammes d'échelles accessibles. Dans l'espace d'échelle, l'injection à lieu aux échelles telles que ℓ est maximal, c'est-à-dire dans l'angle supérieur droit de la FIGURE III.5.4R2. $\theta = \theta_i$ correspond à la diagonale représentée par une ligne noire discontinue sur la FIGURE III.5.4R2. Appliquer cette réduction nous donne les courbes vertes des FIGURE III.5.4R3 et FIGURE III.5.4R4. N'y apparaissent, ni les artefacts visibles avec R1, ni les saturations visibles sur les courbes bleues ou orange et elles sont plus représentatives du comportement de ε_{PP98} dans l'ensemble de l'espace des échelles que les courbes rouges.

5.4 Synthèse des méthodes et choix numériques

Code de simulation d'un plasma turbulent :

- Méthode d'intégration pseudo-spectrale (voir FIGURE III.5.1) des équations fluides.
- Des termes d'hyperdissipation qui joueront le rôle de la dissipation aux petites échelles.
- Un forçage permanent maintenant l'énergie totale (**ou perp ?**) du système quasi-maintenant constante.
- Une géométrie périodique dépendant de l'angle d'injection de l'énergie, θ_i .

Je n'ai pas participé dans l'écriture de ce code mais je l'ai utilisé pour compléter le lot de simulations analysées par FERRAND, SAHRAOUI, LAVEDER *et al.* 2021.

Calcul des termes des lois exactes : Obtention rapide de l'**ensemble de l'espace d'échelles accessible** grâce à une méthode de calcul basée sur le lien entre corrélation et convolution, et sur la périodicité des simulations. L'algorithme est schématisé sur la FIGURE III.5.3.

Visualisation des résultats : représentation cylindrique

- Représentation 2D en fonction de ℓ_{\parallel} et ℓ_{\perp} avec des échelles de couleurs de type chaud/froid (indiquant facilement le signe du résultat) associées aux variations logarithmique (fond) et linéaire (courbes de niveaux) du résultat.
- Représentation 1D en fonction de ℓ_{\perp} . Réduction du résultat 2D en moyennant sur ℓ_{\parallel} pour $\theta > \theta_i$.
- Représentation 1D en fonction de ℓ_{\parallel} . Réduction du résultat 2D en moyennant sur ℓ_{\perp} pour $\theta < \theta_i$.

Avec θ l'angle entre ℓ et la direction moyenne du champ magnétique e_z .

J'ai implémenté les codes de calcul et de visualisation des termes des lois exactes. Le code de calcul est disponible sur GitHub : [paulinesimon97/2022-07_Simu_Exact_laws](https://github.com/paulinesimon97/2022-07_Simu_Exact_laws) : Package useful to compute exact laws 2023.

PARTIE III : CHAPITRE 6

DES LOIS INCOMPRESSIBLES AUX LOIS COMPRESSIBLES : TESTS ET VALIDATIONS

Sommaire

6.1 Résultats incompressibles et avec pression isotrope	64
6.1.1 Comparaison avec des schémas numériques à travers les résultats MHD-Hall incompressible	64
6.1.2 Comparaison des formulations de la loi MHD incompressible .	67
6.2 Résultats compressibles avec pression isotrope	67
6.2.1 Comparaison avec les prédictions de comportement des termes de la loi MHD compressible avec pression isotrope	67
6.2.2 Comparaison des formulations dérivées dans le chapitre I.?? .	69
6.3 Erreur numérique et différences entre fonctions de corrélations	74
6.3.1 Calcul de la loi KHM	74
6.3.2 Analyse des contributions à la loi KHM	75
6.3.3 Estimation de l'erreur sur le taux de cascade :	78
6.4 Synthèse des tests de validation et sources d'erreurs	81

Avant d'attaquer les spécificités des modèles simulés et les lois exactes associées et afin de valider les méthodes numériques exposées dans le chapitre 6, une comparaison de diverses lois exactes issus de modèles dépendant d'une pression isotrope fera l'objet du chapitre en cours. Dans la section 6.1, les résultats de lois exactes Hall-MHD incompressible seront comparés aux résultats de FERRAND, SAHRAOUI, LAVEDER *et al.* 2021 (F21). La section 6.2 analysera les formulations f₁, f₂ et f₃ de la loi exacte compressible avec pression isotrope dérivée dans le chapitre I.???. Enfin, dans la section 6.3, une méthode d'estimation de l'incertitude sur nos résultats sera proposée.

Les simulations utilisées dans ces études comparatives sont CGL1 et CGL3 (voir détail TABLE III.4.1 et TABLE III.4.2). Elles font partie des simulations du modèle MCGL analysées par F21 et elles feront l'objet du chapitre A. Pour chaque simulation, une date a été sélectionnée. À partir de cette date, la simulation a été relancée sur quelques pas de temps rapprochés avec extraction des quantités pour chacun d'eux. Sauf exception de la FIGURE III.6.2, tous les résultats montrés dans ce chapitre correspondent à une moyenne de ces échantillons. Pour CGL1, la date correspond au temps utilisé par F21, pour CGL3, c'est la date précédente, F21 analysant le temps 362.

6.1 Résultats incompressibles et avec pression isotrope

6.1.1 Comparaison avec des schémas numériques à travers les résultats MHD-Hall incompressible

Afin de valider les méthodes et choix décrits dans le chapitre 6, nous avons calculé avec les données de CGL1 et CGL3,

- ε_{MHD} provenant de la loi PP98 (voir chapitre 3 de l'Introduction),
- ε_{Hall} la correction Hall incompressible (équation (??)),
- $\varepsilon_{HMHD} = \varepsilon_{MHD} + \varepsilon_{Hall}$, qui correspond au résultat de la loi Hall-MHD incompressible dérivée par FERRAND, GALTIER, SAHRAOUI, MEYRAND *et al.* 2019.

Ces résultats sont présentés sur la FIGURE III.6.1 en trait plein accompagnés de ceux des figures 3 et 5 de F21 en pointillés. Les lois calculées dans F21 sont les mêmes que celles que nous avons calculées. La différence réside dans le schéma numérique. On va indiquer le nôtre par la mention FEL («Fourier for Exact Law») et celui de F21 par F21.

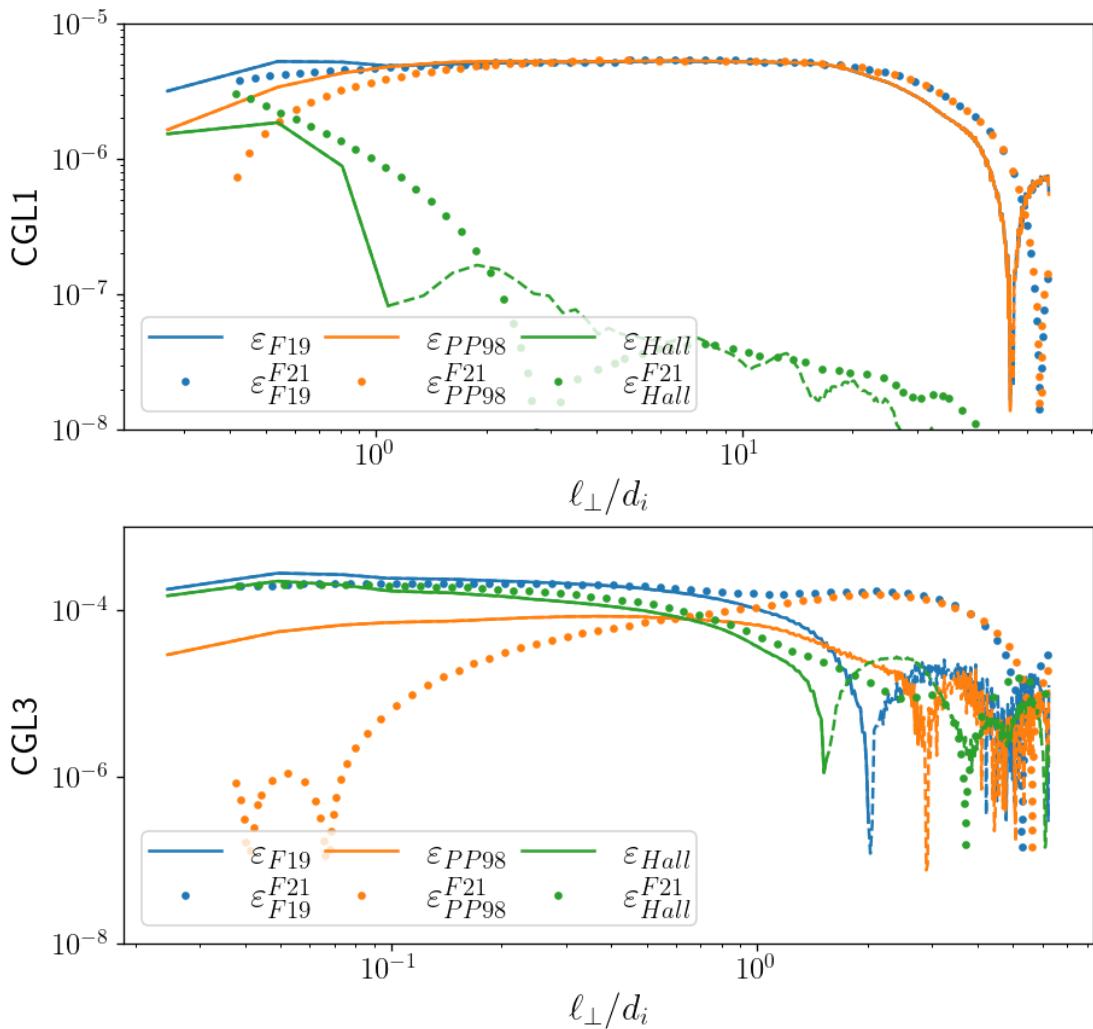


FIGURE III.6.1 – Mode de représentation : 1D en fonction de ℓ_\perp normalisé par d_i . Lignes pleines : nos résultats (avec en lignes discontinues les valeurs négatives). Points : résultats extraits des figures 3 et 5 de F21. Bleu : ε_{HMHD} . Orange : ε_{MHD} . Vert : ε_{Hall} . Haut : CGL1. Bas : CGL3.

Sur la FIGURE III.6.1, on peut observer des différences entre nos résultats et ceux de

F21. Pour CGL1 (graphique supérieur), en partant des grandes échelles, le changement de signe qui serait lié au forçage, a lieu plus tôt pour F21, puis les résultats Hall-MHD (bleu) et MHD (orange) calculé par F21 ou avec FEL convergent et restent constants sur environ une décennie, zone associée à la zone inertielle MHD. Ensuite, autour de $\ell_\perp/d_i = 1$, on observe une décroissance plus accentuée pour la loi MHD calculée par F21 qu'avec FEL. On remarque aussi que le résultat Hall-MHD de F21 est plus plat que le nôtre. Pour les termes Hall (vert), le comportement (augmentations aux échelles plus faible) est aussi respecté mais n'est pas non plus identique. Pour CGL3 donc la gamme d'échelle est plus ancrée dans les échelles Hall, on retrouve des différences de nature similaire mais accentuées. Le forçage impacte une plus grande gamme de grandes échelles pour FEL que pour F21 et le résultat MHD calculé avec FEL décroît plus faiblement en allant vers les petites échelles que pour F21. On remarque que pour F21, les résultats MHD et Hall-MHD coincident à grandes échelles supérieures à ℓ_\perp/d_i . On semble donc y voir la fin d'une zone inertielle MHD.

Le comportement attendu pour ces lois exactes est validé dans notre modèle : on a bien $\varepsilon_{MHD} \gg \varepsilon_{Hall}$ aux grandes échelles (CGL1), $\varepsilon_{MHD} < \varepsilon_{Hall}$ aux échelles inférieures à $\ell/di = 1$ (CGL3). Cette observation contribue à valider notre implémentation.

Maintenant creusons un peu les différences entre les schémas numériques. Elles sont résumés dans la TABLE III.6.1 Les notations associées au schéma numérique de F21 dé-

	F21 (inspirée de TAYLOR <i>et al.</i> 2003)	FEL
∇_ℓ filtrage des ℓ_\parallel $\langle \rangle_{\phi, \ell_\parallel}$ nombre de vecteurs	$\frac{1}{\ell_\perp} \partial_{\ell_\perp} \left[\ell_\perp \langle \mathcal{F}_{\ell_\perp} \rangle_{\phi, \ell_\parallel} \right]$ pour $\theta > 45^\circ$ de la grille numérique pondérée, avec $\langle \rangle_{\ell_\parallel}$ set réduit de vecteurs	$\nabla_\ell \cdot \mathcal{F}$ cartésienne pour $\theta > \theta_i$ séparément suivant ϕ puis ℓ_\parallel tous les vecteurs accessibles

TABLE III.6.1 – Différences majeures entre les schémas numériques F21 et FEL. ϕ correspond à l'angle présent dans la plan perpendiculaire dans un système de coordonnées cylindrique.

taillé dans FERRAND 2021 est adapté à nos notations. On voit que les schémas numériques sont très différents : le nombre de vecteurs pris en compte dans le cas F21 est assez réduit, principalement à grande échelle mais leur moyenne est pondérée afin de compenser les vecteurs manquants. Leur divergence est aussi plus approximative mais elle ne dépend pas de la résolution en ℓ_\parallel . Dans FEL, tous les vecteurs accessibles sont calculés, la divergence calculée complètement est donc a priori aussi exacte que possible mais elle va dépendre de la résolution de la grille d'échelle, c'est à dire de l'incrément entre deux échelles accessibles et cela pour toutes les directions. Pour une grille d'échelle isotrope, cela n'aurait pas forcément d'impact sur le résultat. Cependant, pour une grille anisotrope avec une gamme d'échelles parallèle supérieure à la gamme d'échelle perpendiculaire comme c'est le cas dans les simulations, la dynamique parallèle peut venir atténuer la dynamique perpendiculaire. Cela pourrait expliquer la différence d'intensité des décroissances à petite échelle observée en comparant les résultats MHD pour CGL1. CGL1 comprend en effet un nombre de points identiques, 512, dans les directions perpendiculaires et parallèle mais est fortement anisotrope à cause de l'angle d'injection, $\theta_i = 7^\circ$. Ainsi, la gamme d'échelle parallèle est supérieure à $\ell_\parallel/d_i = 1$ et la gamme perpendiculaire couvre des échelles inférieures à $\ell_\perp/d_i = 1$ comme on peut le voir sur les représentations 2D (voir par exemple

la FIGURE III.5.4R2). Par conséquent, la dynamique du comportement de la zone MHD parallèle va venir impacter fortement la dynamique perpendiculaire. Pour CGL3, l'anisotropie de l'injection est compensée par l'augmentation du nombre de points dans la direction parallèle, 1024. La gamme d'échelle couverte dans chaque dimension est donc similaire tout comme la résolution physique. La cause suspectée de la différence d'intensité des décroissances est alors l'angle limite utilisé pour filtrer la moyenne en ℓ_{\parallel} . Dans le cas CGL1, ce critère est le même pour le schéma de F21 et FEL, alors que pour CGL3, à cause de l'anisotropie de résolution de la grille numérique, une différence existe, visible par exemple sur la FIGURE III.6.3 : l'axe $\theta = \theta_i$ n'atteint pas l'angle inférieur gauche de la carte 2D. Cela vient donc apporter de l'anisotropie dans la moyenne effectuée et elle aurait un effet similaire à l'anisotropie de résolution de la grille physique d'échelles impactant CGL1. A grande échelle, la différence entre les résultats issus des schémas F21 et FEL pourrait être un effet conjoint des différences entre les schémas qui sont amplifiés par la représentation logarithmique et de l'augmentation des fluctuations de ε due à la proximité du forçage.

La proximité du forçage induit en effet de fortes variations dans le résultat à grande échelle. De plus, cette injection est loin d'être stationnaire : parfois le forçage est allumé, d'autre fois, il est éteint. Sur la FIGURE III.6.2, est affiché le résultat Hall-MHD pour différentes dates de CGL3, on y indique aussi le résultat obtenu avec le schéma F21 et calculé à la date D=362. On voit qu'en fonction de la date, l'échelle limite de la zone

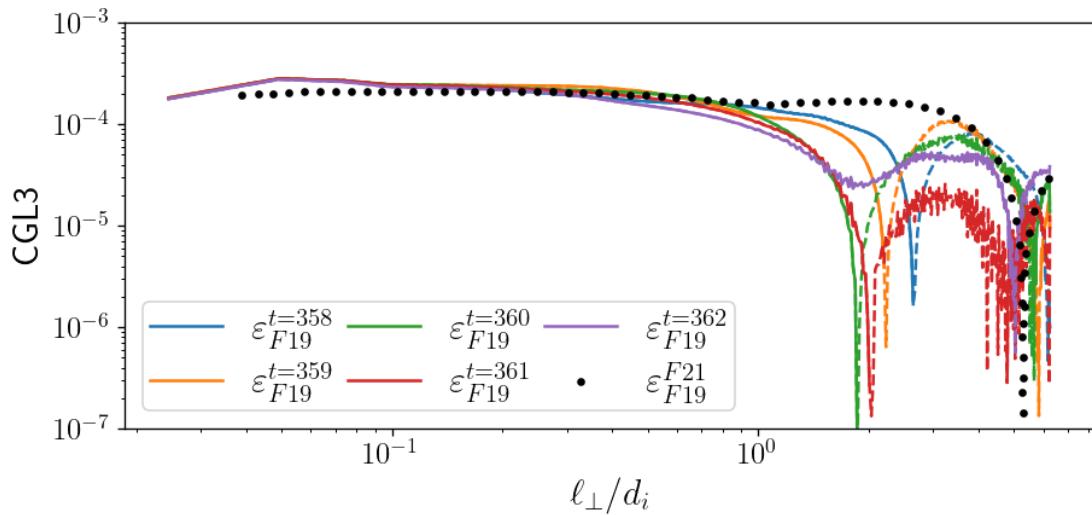


FIGURE III.6.2 – Mode de représentation : 1D en fonction de ℓ_{\perp} normalisé par d_i . ε_{F19} est obtenue pour diverses dates, D, de CGL3, chaque date correspond à une couleur. Le résultat extrait de la figure 5 de F21 est donné en pointillés noirs.

inertielle (telle que ε_{F19} soit constant) fluctue grandement. Et à $t = 362$ (date utilisée par F21), notre résultat (courbe violette) est un peu plus proche de ε_{F19}^{F21} que ne l'est le résultat à la date $D = 361$ (courbe rouge), qui a fait l'objet de la FIGURE III.6.1. Aux échelles inférieures à 1, le niveau de ε_{F19} varie peu quelle que soit la date considérée. Cette observation concorde avec l'hypothèse de stationnarité statistique du taux de cascade dans la zone inertielle (ici Hall-MHD) considérée analytiquement pour obtenir des lois du type K41 (voir synthèse 1.4).

La disparité entre nos résultats et ceux de F21 serait donc due aux méthodes de calcul et de visualisation, mais aussi au temps de simulation sélectionné (qui impacte les grandes

échelles). Afin de valider les résultats, il serait donc pertinent de regarder d'autres critères de validation.

6.1.2 Comparaison des formulations de la loi MHD incompressible

On propose ici une validation à travers une comparaison des formulations de la loi PP98. Elle peut en effet s'écrire via une autre formulation ne dépendant pas de ∇_ℓ mais de la vorticité $\mathbf{w} = \nabla \times \mathbf{v}$. Cette loi a été dérivée par BANERJEE et KRITSUK 2017. Le taux de cascade associé sera noté ε_{BG17} , et s'écrit, sous un format non normalisé et avec nos notations, :

$$\varepsilon_{BG17} = \frac{1}{2} \langle \delta(\mathbf{v} \times \mathbf{w} + \sqrt{\mu_0} \mathbf{j} \times \mathbf{v}_A) \cdot \delta\mathbf{v} + \sqrt{\mu_0} \delta(\mathbf{v} \times \mathbf{v}_A) \cdot \delta\mathbf{j} \rangle. \quad (\text{III.6.1})$$

Sur la FIGURE III.6.3, est représentée la différence $\varepsilon_{PP98} - \varepsilon_{BG17}$ suivant les différents modes de représentations retenus au chapitre 6. Cette figure nous indique que, quelle que soit l'échelle ℓ , $\varepsilon_{PP98} - \varepsilon_{BG17} \sim 10^{-7}$ maximum pour CGL1. Cela correspond à 2 % du niveau moyen de ε_{PP98} qui est de l'ordre de 5×10^{-6} . On obtient ainsi une estimation relative de l'erreur effectuée sur ε_{PP98} . Pour CGL3, elle est de l'ordre de 50 %.

Cette erreur pourrait provenir de la forme analytique de la dérivation, locale (BG17) à travers la vorticité et la densité de courant ou en échelle (PP98) à travers la divergence en ℓ , car elle n'est pas appliquée au même stade du schéma numérique ni avec les mêmes quantités. De plus, le passage analytique d'une forme à l'autre, n'est pas direct, la contrainte incompressible doit être utilisée. Comme l'on travaille avec des simulations quasi-incompressible, une différence de compression même mineure pourrait expliquer la différence entre les erreurs estimées pour CGL1 et CGL3. Si l'on regarde l'écart-type de la densité par exemple, on remarque que CGL3 (8×10^{-2}) est en effet un peu plus compressible que CGL1 (2×10^{-2}).

Ces petites études incompressibles ont permis de se faire une idée de l'incertitude potentiellement induite par le mode de visualisation et la méthode de calcul des lois exactes choisis pour le code de post-traitement, ainsi que de l'impact de l'injection d'énergie sur la zone inertie et de la signification de l'hypothèse de stationnarité statistique dans ces simulations. Les résultats présentés ici sont cohérents avec les comportements envisageables en regardant les hypothèses analytiques (stationnarité statistique, compressibilité, zone inertie). Ils tendent donc à valider l'implémentation des méthodes numériques choisies.

6.2 Résultats compressibles avec pression isotrope

6.2.1 Comparaison avec les prédictions de comportement des termes de la loi MHD compressible avec pression isotrope

Dans cette section, nous allons regarder le comportement du taux de cascade compressibles calculé en supposant une pression isotrope afin de comparer le résultat de la loi (?) aux prédictions de ANDRÉS *et al.* 2018 (A18). Dans les simulations CGL1 et CGL3, trois pressions sont disponibles, les pressions ioniques parallèle, $p_{||i}$, et perpendiculaire, $p_{\perp i}$, et la pression électronique supposée isotherme, $p_e = \rho$. Nous calculerons la pression

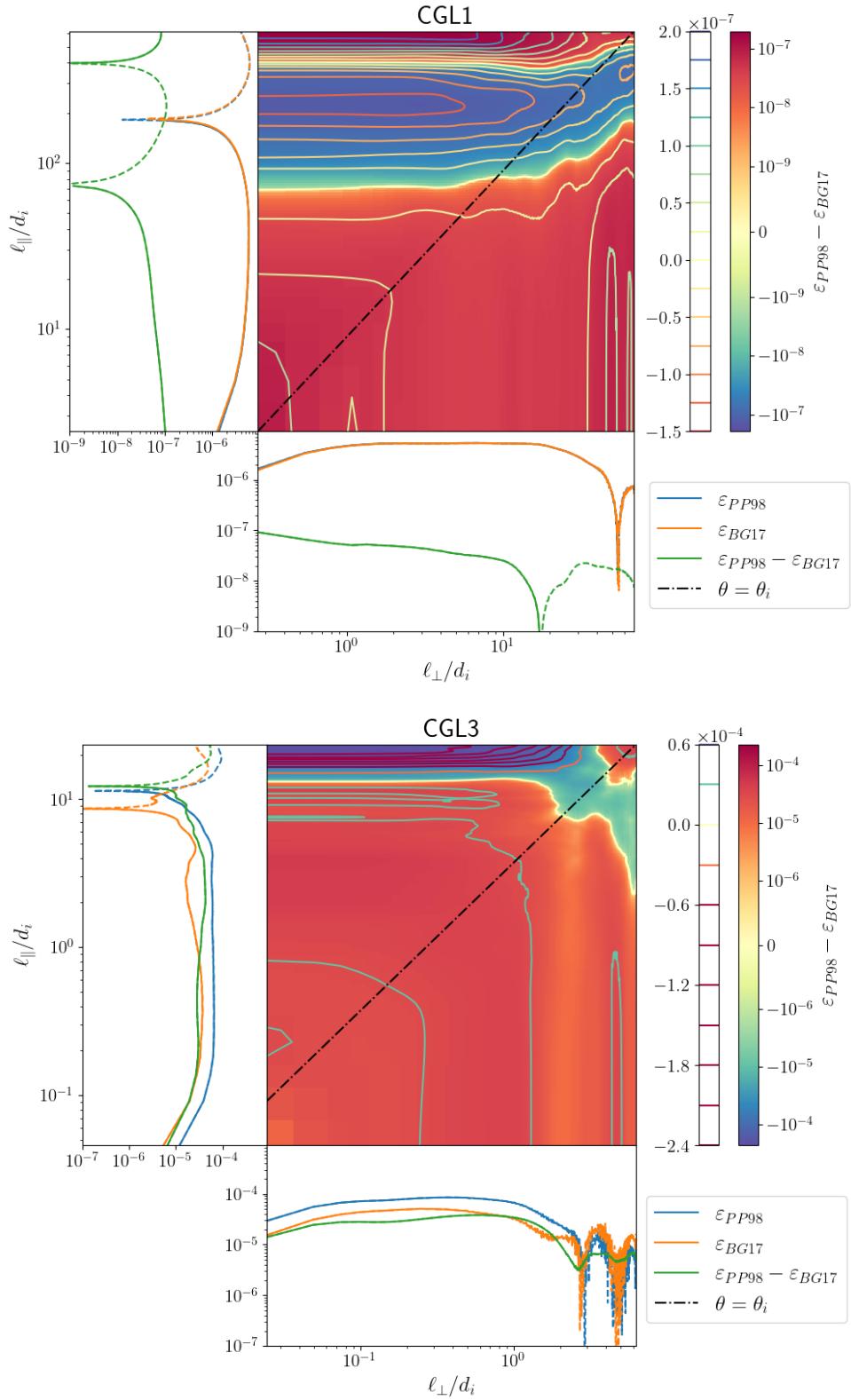


FIGURE III.6.3 – Triptyques de la différence $\varepsilon_{PP98} - \varepsilon_{BG17}$ (courbes vertes et carte 2D) calculée dans CGL1 (panel supérieur) et dans CGL3 (panel inférieur). Courbes 1D bleues : ε_{PP98} . Courbes 1D oranges : ε_{BG17} (coïncidant avec les bleues).

isotrope telle que $p = \frac{1}{3} (2p_{\perp i} + p_{\parallel i}) + p_e$ et l'énergie interne¹, $\rho u = \frac{1}{2} (2p_{\perp i} + p_{\parallel i}) + \rho \ln \rho$.

1. L'énergie interne des ions est l'énergie interne gyrotopte : $\rho_i u_i = \frac{1}{2} (2p_{\perp i} + p_{\parallel i})$. L'énergie interne des électrons s'obtient à partir du premier principe de la thermodynamique (cas isentrope-isotherme, voir

On s'attend à ce que le taux de cascade, noté ε_{f_1} , soit constant aux échelles MHD, la loi exacte étant obtenue dans le cadre d'une loi d'Ohm idéale valable si $\ell \gg d_i$.

Sur la FIGURE III.6.4 et la FIGURE III.6.5, sont représentés en 1D pour CGL1 et CGL3, ε_{PP98} (bleu), ε_{f_1} (orange), le total des termes flux écrits tels des fonctions de structures, $\nabla_\ell \cdot \mathcal{F}_{f_1} = \nabla_\ell \cdot [\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2]$ (vert et représentation 2D de gauche), les contributions $\nabla_\ell \cdot \mathcal{F}_1$ (violet) et $\nabla_\ell \cdot \mathcal{F}_2$ (marron), et \mathcal{S}_{f_1} (rouge, et représentation 2D de droite), la somme des autres termes (nommés sources, hybrides et béta par A18). \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 sont définis tels que :

$$\mathcal{F}_1 = -\frac{1}{4} \langle (\delta(\rho\mathbf{v}) \cdot \delta\mathbf{v} + \delta(\rho\mathbf{v}_A) \cdot \delta\mathbf{v}_A) \delta\mathbf{v} - (\delta(\rho\mathbf{v}_A) \cdot \delta\mathbf{v} + \delta(\rho\mathbf{v}) \cdot \delta\mathbf{v}_A) \delta\mathbf{v}_A \rangle \quad (\text{III.6.2})$$

$$\mathcal{F}_2 = -\frac{\beta_0}{4} \langle \delta\rho\delta u\delta\mathbf{v} \rangle \quad (\text{III.6.3})$$

En prenant en compte le facteur de normalisation $\frac{\beta_0}{2}$ mentionné dans la section 5.1 (il doit aussi être pris en compte dans \mathcal{S}_{f_1}).

Pour CGL1, ε_{PP98} , ε_{f_1} , $\nabla_\ell \cdot \mathcal{F}_{f_1}$, $\nabla_\ell \cdot \mathcal{F}_1$ sont superposés. La différence entre ε_{PP98} et ε_{f_1} est de l'ordre de 10 % comme l'a indiqué FERRAND, SAHRAOUI, LAVEDER *et al.* 2021. La contribution provenant de $\nabla_\ell \cdot \mathcal{F}_2$ s'accroît vers les petites échelles mais reste inférieure à 10 % du taux de cascade. Les autres contributions, résumés par \mathcal{S}_{f_1} correspondent à environ 1 % du taux de cascade. Pour CGL3, la contribution \mathcal{S}_{f_1} est plus importante et correspond à environ 20 % du total. Comme dans le cas incompressible (voir section 6.1), ε_{f_1} ne décroît quasiment pas.

Pour CGL1 (fig. FIGURE III.6.4) comme pour CGL3 (fig. FIGURE III.6.5), on retrouve donc le comportement prédict par A18 : un taux de cascade ε_{f_1} dominé par le terme flux $\nabla_\ell \cdot \mathcal{F}_1$ qui correspond aux termes survivant dans la limite incompressible et les termes résumés par \mathcal{S}_{f_1} se compensant pour devenir négligeables. On retrouve aussi l'effet de la compression venant augmenter la contribution compressible pour CGL3 par rapport à CGL1 (moins compressible).

6.2.2 Comparaison des formulations dérivées dans le chapitre I.??

Dans le chapitre I.??, diverses formulations pour les termes dépendant de la pression ont été dérivées. Elles s'obtiennent à partir de (??), (??) et (??). On compare ici la formulation f2 avec la formulation f1 afin de vérifier si les prédictions de A18 y resteront valables. Dans la formulation f2, on a en effet extrait un terme flux de pression totale des termes sources et hybrides présents dans f1. Cette étude pourra servir à une future application d'une loi formulée avec f2 comme la loi CGL par exemple, dans les observations : le nouveau terme flux est-il négligeable devant les autres termes ? ou contient-il la majeure partie de la contribution de pression totale ? cette dernière possibilité permettrait de corriger les résultats appliqués dans des données relevées par des missions constituées d'une seule sonde (ex : PSP). Une autre possibilité serait qu'il domine la contribution de pression totale et que les termes sources l'accompagnent viennent le compenser. Dans ce cas, il ne faudrait surtout pas l'utiliser dans les données issues d'une seule sonde. La contribution de pression ε_p (??) n'étant pas liée analytiquement à celle de pression magnétique ε_{pm} (??), on sépare leur analyse.

chapitre I.??) appliqué aux quantités électroniques et en supposant $p_e = \rho = \rho_i$: $u_e = \frac{p_e}{\rho_e} \ln \left(\frac{\rho_e}{\rho_{e0}} \right) = \frac{m_i}{m_e} \ln \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)$ avec $\rho_0 = 1$ (initialisation des simulations).

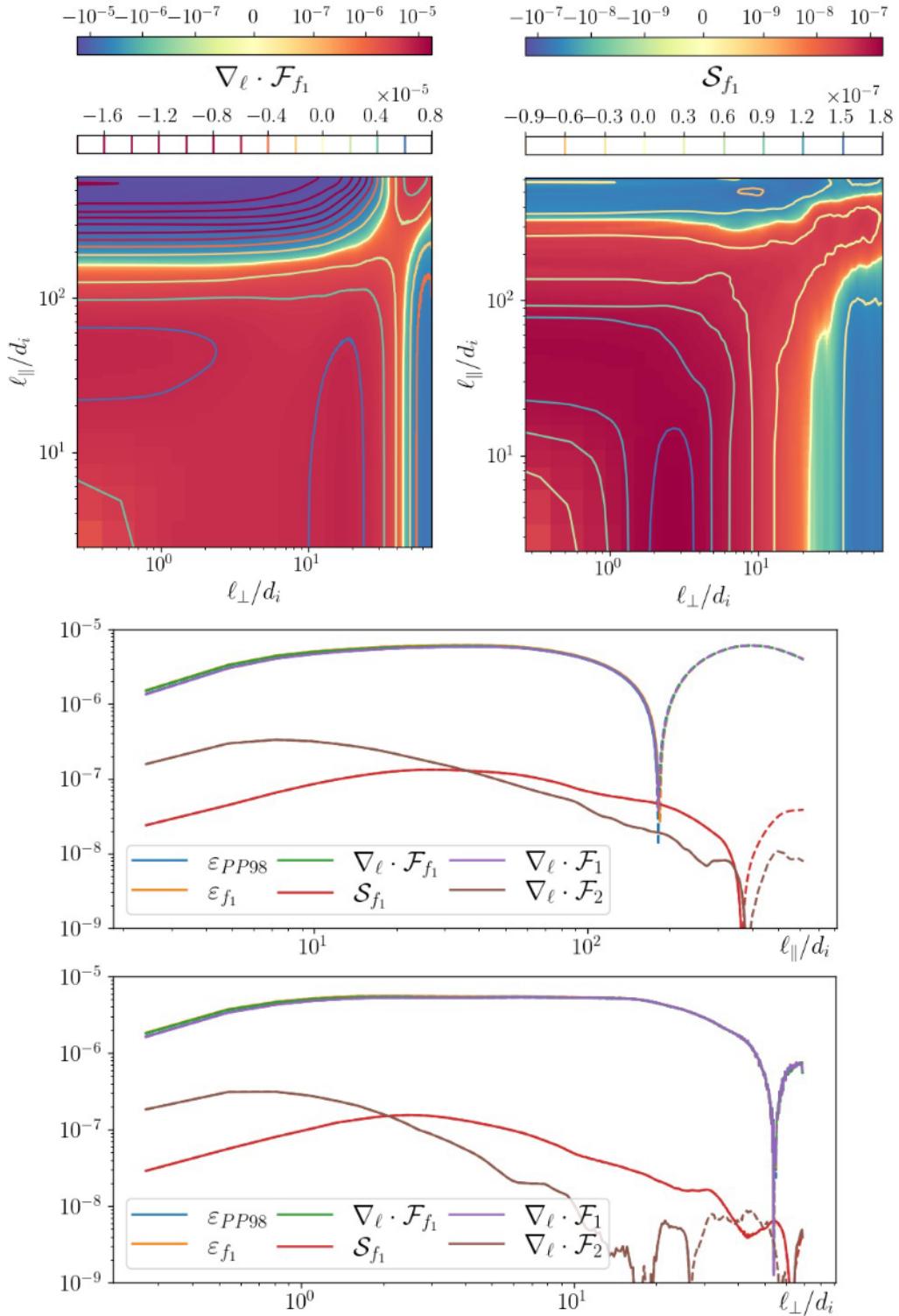


FIGURE III.6.4 – Panel d'étude de ε_{f1} dans CGL1. Première ligne de gauche à droite : Représentation 2D de $\nabla_\ell \cdot \mathcal{F}_{f1}$ et \mathcal{S}_{f1} . Deuxième ligne : Représentation 1D en fonction de ℓ_{\perp}/d_i . Troisième ligne : Représentation 1D en fonction de ℓ_{\parallel}/d_i . Sur les représentations 1D : ε_{PP98} (bleu), ε_{f1} (orange), $\nabla_\ell \cdot \mathcal{F}_{f1}$ (vert), \mathcal{S}_{f1} (rouge), $\nabla_\ell \cdot \mathcal{F}_1$ (violet) et $\nabla_\ell \cdot \mathcal{F}_2$ (marron).

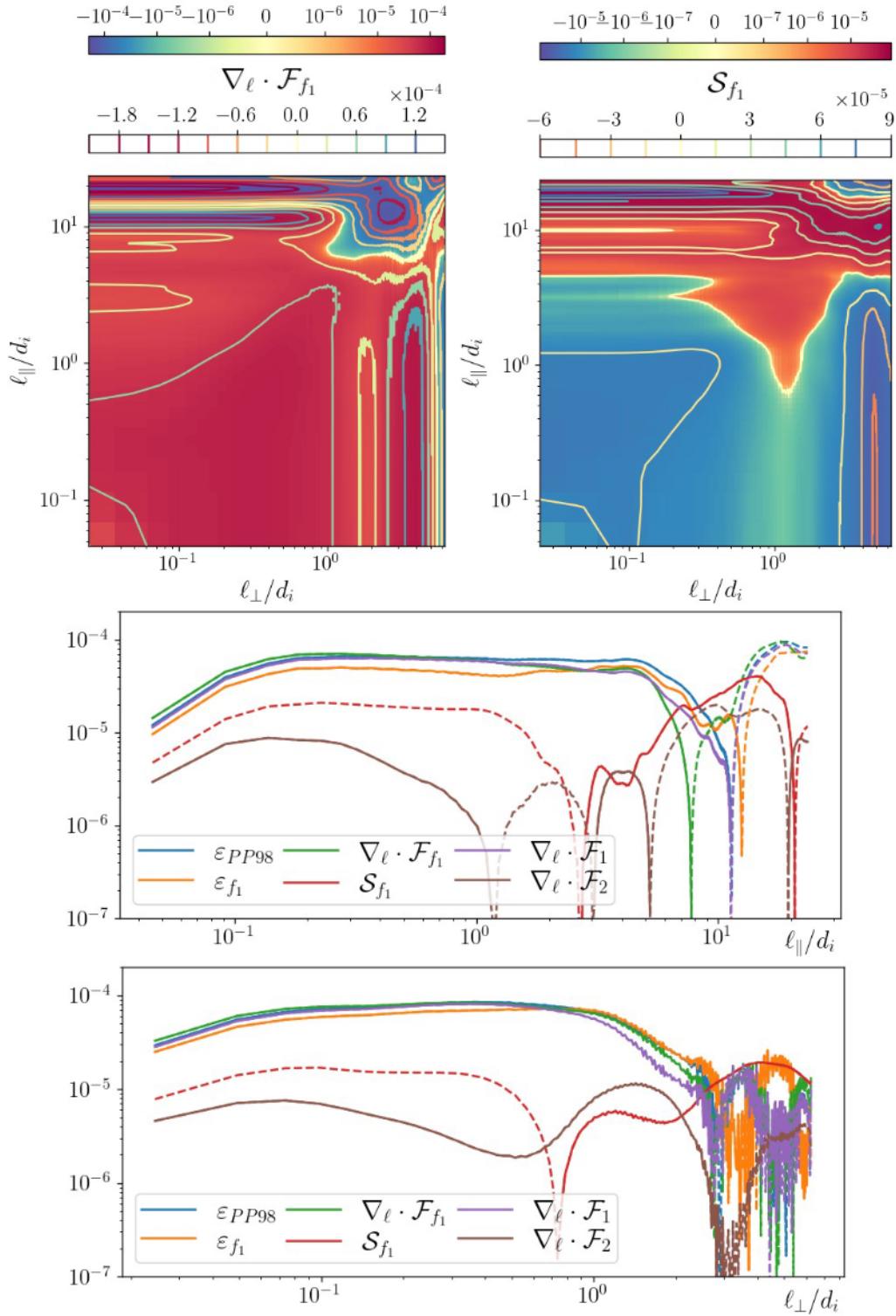


FIGURE III.6.5 – Panel d'étude de ε_{f_1} dans CGL3. Première ligne de gauche à droite : Représentation 2D de $\nabla_\ell \cdot \mathcal{F}_{f_1}$ et \mathcal{S}_{f_1} . Deuxième ligne : Représentation 1D en fonction de ℓ_\perp/d_i . Troisième ligne : Représentation 1D en fonction de ℓ_\parallel/d_i . Sur les représentations 1D : ε_{PP98} (bleu), ε_{f_1} (orange), $\nabla_\ell \cdot \mathcal{F}_{f_1}$ (vert), \mathcal{S}_{f_1} (rouge), $\nabla_\ell \cdot \mathcal{F}_1$ (violet) et $\nabla_\ell \cdot \mathcal{F}_2$ (marron).

Reformulation des termes de pression magnétique entre f1 et f2 via (??) :
 Les termes composant ε^{pm} (??) correspondent dans f1 à des termes sources, hybrides et β -dépendant d'après les dénominations de A18, et dans f2, à un terme flux et des termes sources. Ils seront découpés suivant :

- f1 : la contribution hybride $\mathcal{H}_{f_1}^{pm} = -\frac{1}{4}\nabla_\ell \cdot \left\langle \left(1 + \frac{\rho'}{\rho}\right)p_m \mathbf{v}' - \left(1 + \frac{\rho}{\rho'}\right)p'_m \mathbf{v}' \right\rangle$
- f1 : la contribution d'énergie magnétique présente dans les termes sources et hybrides de A18 :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{f_1}^{pm} &= -\frac{1}{4} \left\langle \left(\rho \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{v}_A - \frac{1}{2}(\rho' + \rho) \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A \right) \nabla' \cdot \mathbf{v}' \right\rangle \\ &\quad + \frac{1}{4} \left\langle \left(\rho' \mathbf{v}'_A \cdot \delta \mathbf{v}_A + \frac{1}{2}(\rho' + \rho) \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A \right) \nabla \cdot \mathbf{v} \right\rangle \end{aligned}$$

- f1 : la contribution β -dépendante $\mathcal{M}_{f_1}^{pm} = \frac{1}{4} \left\langle \rho \frac{p'_m}{\rho'} \mathbf{v} \cdot \frac{\nabla' \rho'}{\rho'} + \rho' \frac{p_m}{\rho} \mathbf{v}' \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} \right\rangle$
 - f2 : le terme flux $\nabla_\ell \cdot \mathcal{F}_{f_2}^{pm} = \frac{1}{4} \nabla_\ell \cdot \left\langle \delta \rho \delta \frac{p_m}{\rho} \delta \mathbf{v} \right\rangle$
 - f2 : les termes sources
- $$\begin{aligned} \mathcal{S}_{f_2}^{pm} &= -\frac{1}{4} \left\langle \left(\delta \rho \frac{p_m}{\rho} - \rho \delta \left(\frac{p_m}{\rho} \right) \right) \mathbf{v} \cdot \frac{\nabla' \rho'}{\rho'} - \left(\delta \rho \frac{p'_m}{\rho'} - \rho' \delta \left(\frac{p_m}{\rho} \right) \right) \mathbf{v}' \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} \right\rangle \\ &\quad - \frac{1}{8} \left\langle (\rho \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{v}_A - \mathbf{v}_A \cdot \delta(\rho \mathbf{v}_A)) \nabla' \cdot \mathbf{v}' - (\rho' \mathbf{v}'_A \cdot \delta \mathbf{v}_A - \mathbf{v}'_A \cdot \delta(\rho \mathbf{v}_A)) \nabla \cdot \mathbf{v} \right\rangle \end{aligned}$$

$\mathcal{M}_{f_1}^{pm}$ contient la contribution qui peut être reformulée en appliquant le premier principe thermodynamique (??) isentrope, cette réécriture est donnée dans l'équation (??) et fait apparaître le paramètre $\beta = p/p_m$ du plasma. Sachant que p dépend des pressions ioniques parallèle et perpendiculaire, la validité du premier principe thermodynamique est remise en cause. On n'explicitera donc pas β dans $\mathcal{M}_{f_1}^{pm}$. Pour les deux simulations, la FIGURE

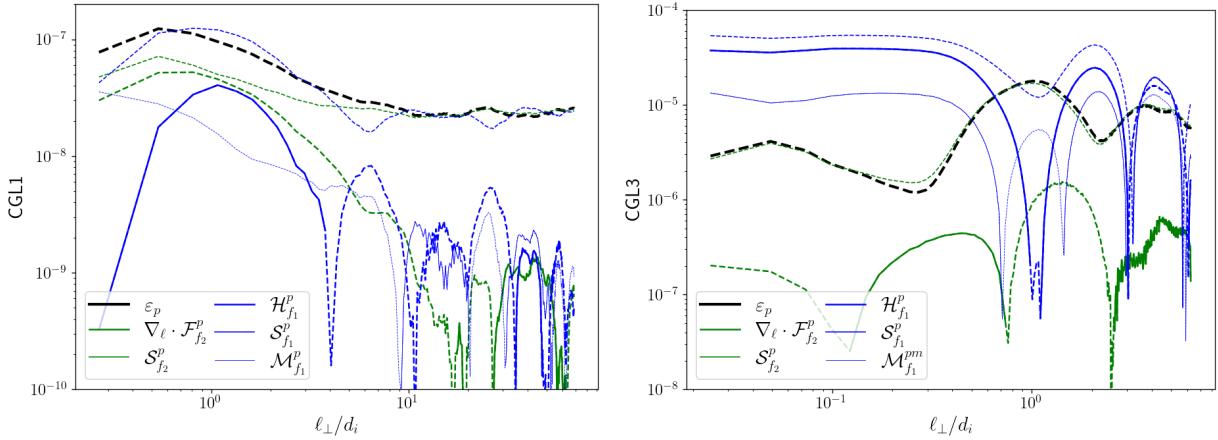


FIGURE III.6.6 – Panel d'étude de la reformulation de la contribution de pression magnétique ε^{pm} (noir) dans CGL1 (gauche) et CGL3 (droite).

Bleu : Décomposition des termes de f1. Epais : contribution hybride $\mathcal{H}_{f_1}^{pm}$. Moyen : contribution d'énergie magnétique $\mathcal{S}_{f_1}^{pm}$. Fin : contribution β -dépendante $\mathcal{M}_{f_1}^{pm}$.

Vert : Décomposition des termes de f2. Epais : terme flux $\nabla_\ell \cdot \mathcal{F}_{f_2}^{pm}$. Fin : termes sources $\mathcal{S}_{f_2}^{pm}$. Représentation : 1D fonction de ℓ_\perp .

III.6.6 montre que la décomposition (courbes bleues) en termes source, hybride et β -

dépendant de la formulation f1 inspirée de A18, reflète moins bien la contribution de pression magnétique du taux de cascade que le découpage (courbes vertes) en termes flux et sources de f2. A l'exception de $\mathcal{S}_{f_1}^{pm}$ (dans le cas CGL1), ils sont loin de refléter individuellement ε_{pm} . A contrario, $\mathcal{S}_{f_2}^{pm}$ reflète efficacement les variations et le signe de ε_{pm} pour les deux simulations sauf pour les petites échelles de CGL1 où $\nabla_\ell \cdot \mathcal{F}_{f_2}^{pm}$ domine. Notre décomposition semble donc plus adaptée pour la contribution de pression magnétique, cependant cela provient du caractère négligeable du nouveau terme flux (en général de l'ordre de 10 % de ε_{pm}).

Reformulation des termes de pression entre f1 et f2 via (??) : Une étude similaire peut être effectuée pour les termes composant ε_p (??). Ils seront découpés suivant :

- f1 : la contribution hybride $\mathcal{H}_{f_1}^p = -\frac{1}{4}\nabla_\ell \cdot \left\langle \left(1 + \frac{\rho'}{\rho}\right)p\mathbf{v}' - \left(1 + \frac{\rho}{\rho'}\right)p'\mathbf{v} \right\rangle$
- f1 : la contribution de type source qui ne devient hybride que dans le cas isotherme, car p/ρ est alors constant : $\mathcal{S}_{f_1}^p = \frac{1}{2}\left\langle \rho \frac{p'}{\rho'} \nabla \cdot \mathbf{v}' + \rho' \frac{p}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{v} \right\rangle$
- f1 : la contribution qui peut être réécrite en appliquant le premier principe thermodynamique (??) $\mathcal{M}_{f_1}^p = -\frac{1}{4}\left\langle \rho \frac{p'}{\rho'} \mathbf{v} \cdot \frac{\nabla' p'}{\rho'} + \rho' \frac{p}{\rho} \mathbf{v}' \cdot \frac{\nabla p}{\rho} \right\rangle$
- f2 : le terme flux $\nabla_\ell \cdot \mathcal{F}_{f_2}^p = \frac{1}{4}\nabla_\ell \cdot \left\langle \delta\rho \delta \frac{p}{\rho} \delta \mathbf{v} \right\rangle$
- f2 : les termes sources $\mathcal{S}_{f_2}^{pm} = -\frac{1}{2}\left\langle \rho' \delta \left(\frac{p}{\rho}\right) \nabla \cdot \mathbf{v} - \rho \delta \left(\frac{p}{\rho}\right) \nabla' \cdot \mathbf{v}' \right\rangle$
 $- \frac{1}{4}\left\langle \left(\delta\rho \frac{p_*}{\rho} - \rho \delta \left(\frac{p}{\rho}\right)\right) \mathbf{v} \cdot \frac{\nabla' p'}{\rho'} - \left(\delta\rho \frac{p'}{\rho'} - \rho' \delta \left(\frac{p_*}{\rho}\right)\right) \mathbf{v}' \cdot \frac{\nabla p}{\rho} \right\rangle$

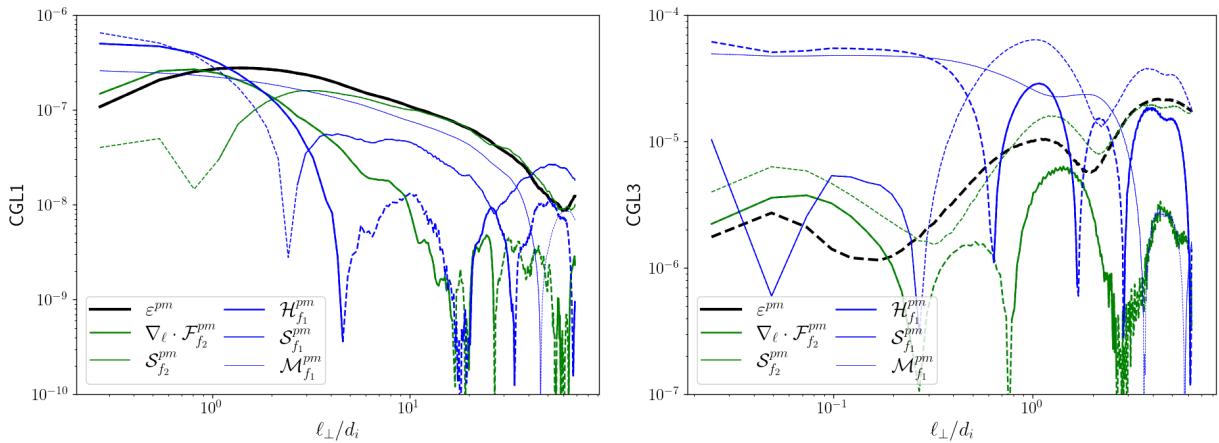


FIGURE III.6.7 – Panel d'étude de la reformulation de la contribution de pression magnétique ε^p (noir) dans CGL1 (gauche) et CGL3 (droite).

Bleu : Décomposition des termes de f1. Epais : contribution hybride $\mathcal{H}_{f_1}^p$. Moyen : contribution d'énergie magnétique $\mathcal{S}_{f_1}^p$. Fin : contribution β -dépendante $\mathcal{M}_{f_1}^p$.

Vert : Décomposition des termes de f2. Epais : terme flux $\nabla_\ell \cdot \mathcal{F}_{f_2}^p$. Fin : termes sources $\mathcal{S}_{f_2}^p$. Représentation : 1D fonction de ℓ_\perp .

Les observations effectuées pour la contribution de pression magnétique au taux de cascade s'appliquent à la contribution de pression représentée sur la FIGURE III.6.7. La formulation f2 séparant termes flux et termes sources semble plus appropriée pour représenter la cascade. Le terme flux $\nabla_\ell \cdot \mathcal{F}_{f_2}^p$ est cependant un peu plus important dans la balance que ne l'est $\nabla_\ell \cdot \mathcal{F}_{f_2}^{pm}$ dans le cas magnétique : autour de 30 % de ε^p pour CGL3 et complètement dominant aux petites échelles de CGL1.

A propos des prédictions de A18, elles restent valables. Avec les conclusions du chapitre ?? et les résultats de cette section, on peut les adapter à l'usage d'une formulation f2 dans des données faiblement compressibles :

- les termes flux de types Yaglom domine les termes sources et les termes flux de pression, pression magnétique et énergie interne,
- la contribution des termes de flux de pression et pression magnétique est négligeable devant celle des termes sources.

Le set de simulations CGL et LF n'étant pas adaptés à une étude rigoureuse du caractère systématique de la validité de ces prédictions ni à une analyse de l'évolution de ces contributions en fonction de la compression du milieu telle que celle effectuée par ANDRÉS *et al.* 2018, ces résultats resteront sous la forme de résultats préliminaires. Je me suis aussi posée la question de l'apport de la formulation f3 sur la formulation f2 via (??). Les résultats, non présentés ici, ne semblent montrer aucun apport significatif.

En interprétant les termes flux en tant qu'énergie transférée à travers les échelles et les termes sources tels des réservoirs d'énergie localisés aux différentes échelles, il semble ici que les contributions de pression magnétique et thermodynamique aient plutôt des rôles de réservoirs. L'augmentation des termes flux aux petites échelles de CGL1 indiquerait, avec cette interprétation, le lieu d'un transfert d'énergie à travers les échelles, permis par ces pressions².

6.3 Erreur numérique et différences entre fonctions de corrélations

Une autre méthode de validation de nos résultats consiste à vérifier l'équation KHM du modèle simulé sous sa forme complète et pas seulement la loi K41 dont la validité est réduite à la zone inertie.

6.3.1 Calcul de la loi KHM

Une loi de type KHM peut s'écrire schématiquement (voir chapitre 1) :

$$\partial_t \mathcal{R} = -\varepsilon_{NL} + \varepsilon_D + \varepsilon_F \quad (\text{III.6.4})$$

Nous avons vu que l'application des hypothèses de Kolmogorov donne la loi réduite de type K41 telle que $\varepsilon = -\varepsilon_{NL}$ (voir synthèse 1.4). Son contenu, spécifique au modèle implémenté sera détaillé dans les chapitres A (MCGL) et ?? (MLF).

$\partial_t \mathcal{R}$ est la dérivée temporelle de la fonction de corrélation utilisée pour obtenir la loi exacte. Dans nos études, cette fonction est $\mathcal{R} = \frac{1}{4} \langle (\rho' + \rho)(\mathbf{v}' \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A) + 2\rho'u + 2\rho u' \rangle$. Pour estimer ce terme, on va utiliser les temps consécutifs relevés dans la simulation. La dérivée temporelle sera obtenue grâce à des schémas de discrétisation de type «différences finies» d'ordre 2 :

- décentrée vers la droite pour le premier temps t_0 : $(\partial_t \mathcal{R})(t_0) = \frac{\mathcal{R}(t_0 + \delta t) - \mathcal{R}(t_0)}{\delta t}$,
- décentrée vers la gauche pour le dernier temps t_{N_t} : $(\partial_t \mathcal{R})(t_{N_t}) = \frac{\mathcal{R}(t_{N_t}) - \mathcal{R}(t_{N_t} - \delta t)}{\delta t}$,
- centrée pour les autres temps : $(\partial_t \mathcal{R})(t_n) = \frac{\mathcal{R}(t_{n+1}) - \mathcal{R}(t_{n-1})}{2\delta t}$ avec $n \in]0, N_t[$.

2. Il serait intéressant de démontrer analytiquement ces comportements à l'aide d'une théorie plus locale telle que la théorie de «coarse-graining» qui a permis de démontrer l'existence d'une cascade d'entropie par exemple [EYINK et DRIVAS 2018]

Le forçage présent dans nos simulations est un forçage de type antenne de Langevin appliqué sur le champ de vitesse. Par conséquent, le taux de forçage ε_F s'écrira $\varepsilon_F = \frac{1}{4} < (\rho' + \rho) (\mathbf{v}' \cdot \mathbf{f} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}') >$. Ce forçage dépend de deux composantes aléatoires qui font partie des quantités extraites de la simulation, elles seront notées f_{sup} et f_{inf} . Elles permettent de construire une quantité intermédiaire $F = a_1 f_{sup} + (1 - a_1) * f_{inf}$. Les composantes de \mathbf{f} sont alors : $f_x = \partial_y F$, $f_y = -\partial_x F$, $f_z = 0$.

Le taux de dissipation ε_D couvre l'ensemble des hyperdissipations présentes dans le système. Chaque quantité est associée à une hyperdissipation du type $\nu_X \Delta^4 X$ avec X quantité générique et $\Delta^4 = (\partial_x^2 + \partial_y^2 + \alpha \partial_z^2)^4$. On va décomposer ε_D tel que :

$$\varepsilon_D = \varepsilon_D^c + \varepsilon_D^m + \varepsilon_D^{ui} + \varepsilon_D^{ue} \quad (\text{III.6.5})$$

avec :

- la contribution cinétique avec $\mathbf{D}_v = \nu \Delta^4 \mathbf{v}$ et $D_\rho = \nu_\rho \Delta^4 \rho$:

$$\varepsilon_D^c = \varepsilon_D^c(\mathbf{D}_v) + \varepsilon_D^c(D_\rho) = -\frac{1}{4} \langle (\rho' + \rho) (\mathbf{v}' \cdot \mathbf{D}_v + \mathbf{v} \cdot \mathbf{D}'_v) \rangle - \frac{1}{4} \langle (D'_\rho + D_\rho) \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v} \rangle \quad (\text{III.6.6})$$

- la contribution magnétique avec $\mathbf{D}_{v_A} = \frac{\eta}{\sqrt{\rho}} \Delta^4 (\sqrt{\rho} \mathbf{v}_A)$:

$$\begin{aligned} \varepsilon_D^m = \varepsilon_D^m(\mathbf{D}_{v_A}) + \varepsilon_D^m(D_\rho) &= -\frac{1}{4} \langle (\rho' + \rho) (\mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{D}_{v_A} + \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{D}'_{v_A}) \rangle \\ &\quad - \frac{1}{8} \left\langle (\rho' - \rho) \left(\frac{D'_\rho}{\rho'} - \frac{D_\rho}{\rho} \right) \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A \right\rangle \end{aligned} \quad (\text{III.6.7})$$

- la contribution d'énergie interne ionique (gyrotope) avec $D_u = \frac{\nu_p}{2} \Delta^4 (2p_{\perp i} + p_{\parallel i})$ et sachant que $\rho_i u_i = \frac{1}{2} (2p_{\perp i} + p_{\parallel i})$:

$$\varepsilon_D^{ui} = \varepsilon_D^{ui}(D_u) + \varepsilon_D^{ui}(D_\rho) = -\frac{1}{2} \left\langle \frac{\rho}{\rho'} D'_u + \frac{\rho'}{\rho} D_u \right\rangle - \frac{1}{2} \left\langle \left(\frac{D'_\rho}{\rho'} - \frac{D_\rho}{\rho} \right) (\rho' u_i - \rho u'_i) \right\rangle \quad (\text{III.6.8})$$

- la contribution d'énergie interne électronique (isotherme) sachant que $\rho_e u_e = \rho \ln \rho$:

$$\varepsilon_D^{ue} = -\frac{1}{2} \left\langle D'_\rho \ln \rho + D_\rho \ln \rho' + \frac{\rho'}{\rho} D_\rho + \frac{\rho}{\rho'} D'_\rho \right\rangle \quad (\text{III.6.9})$$

et ν , η , ν_ρ et ν_p des constantes choisies empiriquement pour chaque simulation. Elles sont résumées dans la TABLE III.4.2.

6.3.2 Analyse des contributions à la loi KHM

Sur FIGURE III.6.8, ε_{NL} (bleu) est comparé à un niveau de référence $\varepsilon_{ref} = -\partial_t \mathcal{R} + \varepsilon_D + \varepsilon_F$ (violet), construit à partir de $\partial_t \mathcal{R}$ (rouge), ε_D (vert) et ε_F (orange). La différence $\zeta = \varepsilon_{ref} - \varepsilon_{NL}$ est donnée en marron. On remarque qu'elle n'est pas de l'ordre du zéro numérique ($\sim 10^{-20}$) mais de l'ordre de deux ordres de grandeurs en dessous du niveau de ε_{NL} . La forme des termes $\partial_t \mathcal{R}$, ε_D et ε_F est particulière.

Balance des termes et forçage : Analysons la situation pour CGL1. Dans le chapitre 1, on a vu que :

$$\varepsilon_{NL}(\ell) = \varepsilon_F(\ell) = \varepsilon_D(\ell = 0) = -\varepsilon \quad (\text{III.6.10})$$

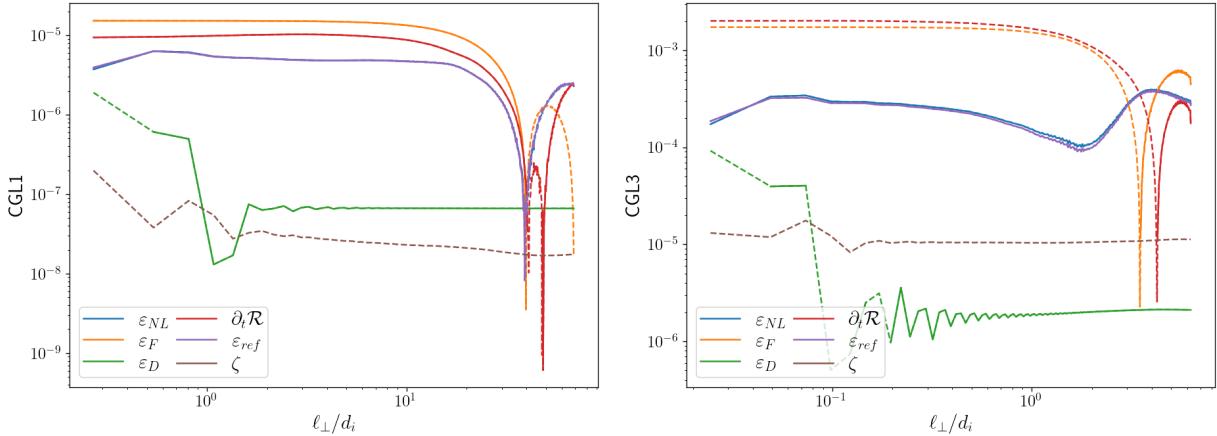


FIGURE III.6.8 – Détail de la loi KHM pour CGL1 (gauche) et CGL3 (droite). Bleu : ε_{NL} . Orange : ε_F . Vert : ε_D . Rouge : $\partial_t \mathcal{R}$. Violet : $\varepsilon_{ref} = -\partial_t \mathcal{R} + \varepsilon_D + \varepsilon_F$. Marron : $\zeta = \varepsilon_{ref} - \varepsilon_{NL}$. Représentation : 1D en fonction de ℓ_\perp avec les valeurs positives en trait plein et négative en trait discontinu.

dans une zone inertie où l'hypothèse de stationnarité statistique s'appliquerait.

On peut en effet identifier une gamme d'échelles $\ell_\perp/d_i \in [1; 20]$ telle que ε_{NL} soit constant. Son niveau est alors d'environ 5×10^{-6} . La valeur n'est pas visible ici à cause de l'échelle logarithmique mais $\varepsilon_D(\ell = 0) \simeq 5 \times 10^{-6}$. Donc $\varepsilon_{NL}(\ell) = \varepsilon_D(\ell = 0)$ semble retrouvé. Par contre, même si la constance³ de ε_F est vérifiée à ces échelles, son niveau est beaucoup trop important, de l'ordre de 1.5×10^{-5} . Pour retrouver le niveau 5×10^{-6} , on doit lui soustraire le niveau de $\partial_t \mathcal{R}$ qui est d'environ 1×10^{-5} . La relation (III.6.11) s'écrit alors dans nos simulations :

$$\varepsilon_{NL}(\ell) = \varepsilon_F(\ell) - \partial_t \mathcal{R} = \varepsilon_D(\ell = 0) = -\varepsilon \quad (\text{III.6.11})$$

Analyse du terme $\partial_t \mathcal{R}$: Analytiquement, on se servait de l'hypothèse de stationnarité statistique pour annuler $\partial_t \mathcal{R}$, c'est-à-dire pour supposer qu'entre deux temps \mathcal{R} ne varie pas. Si $\partial_t \mathcal{R} = 0$ alors $\langle E_{tot} \rangle = \partial_t \mathcal{R}(\ell = 0) = 0$. Sauf que dans nos simulations $\langle E_{tot} \rangle$ fluctue légèrement : pour les quatre temps consécutifs utilisé pour CGL1, $\langle E_{tot} \rangle$ de l'ordre de 1.3 augmente d'environ 6×10^{-7} par pas de temps. Par conséquent, $\partial_t \mathcal{R} = 0$ est impossible. C'est ce que l'on observe sur la FIGURE III.6.8 pour CGL1 comme pour CGL3. Pourtant, la convergence temporelle des résultats du calcul de loi exacte K41 dans une certaine zone d'échelles a bel et bien été observée sur la FIGURE III.6.2, et cela nous semblait une belle preuve de la stationnarité statistique de nos simulations. A première vue, ces résultats ne semblent pas compatibles. L'interprétation de ce paradoxe reste à affiner mais le comportement de $\partial_t \mathcal{R}$ tel un forçage ne semble pas être une spécificité de nos simulations. En effet, FERRAND, SAHRAOUI, GALTIER *et al.* 2022 trouve un comportement similaire dans des simulations de turbulence non forcée. Dans notre cas, on pourrait peut-être interpréter le comportement du terme $\partial_t \mathcal{R}$ comme un réservoir d'énergie régulant temporellement l'injection de l'énergie dans la cascade afin que cette dernière puisse s'effectuer au taux imposé par les processus de dissipation.

3. Le comportement constant du terme de forçage est démontré rigoureusement dans l'annexe ??.

Analyse des contributions d’hyperdissipation : Un autre comportement pathologique est celui de ε_D en fonction de ℓ . Dans la théorie analytique, ce terme est supposé nul à toutes les échelles sauf en $\ell = 0$ à cause de l’anomalie dissipative. Dans nos simulations, son rôle est joué par les termes d’hyperdissipation, mais on s’attendrait à ce qu’ils décroissent rapidement en allant vers les grandes échelles puisque la dérivation par Δ^4 impose un comportement en k^8 dans l’espace de Fourier. Regardons ce qu’il en est si on le décompose sur ses diverses contributions. La décomposition est présentée sur FIGURE III.6.9. On y voit que chacune des contributions semble ou décroître en allant vers

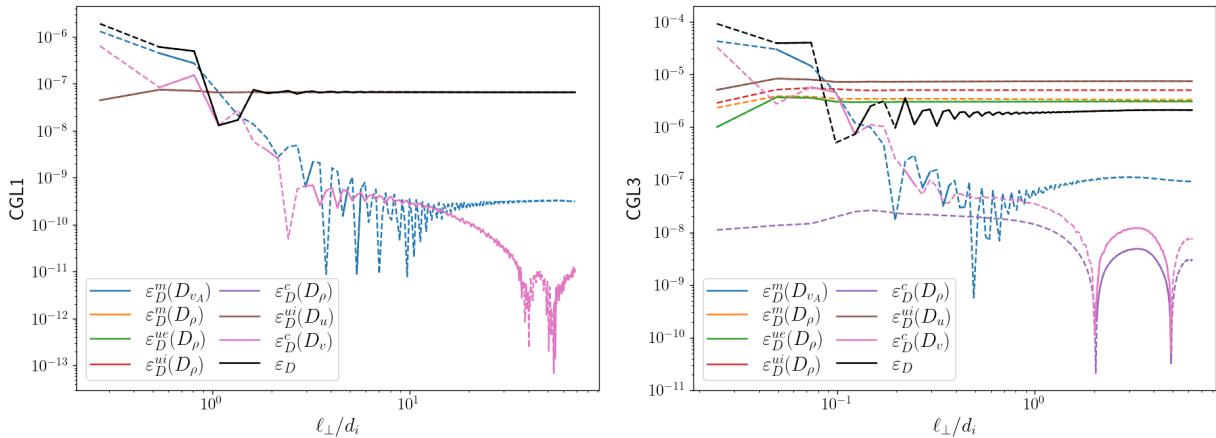


FIGURE III.6.9 – Détail du terme d’hyperdissipation, ε_D (noir), pour CGL1 (gauche) et CGL3 (droite). Bleu : $\varepsilon_D^m(D_{v_A})$. Orange : $\varepsilon_D^m(D_\rho)$. Vert : $\varepsilon_D^{ue}(D_\rho)$. Rouge : $\varepsilon_D^{ui}(D_\rho)$. Violet : $\varepsilon_D^c(D_\rho)$ Marron : $\varepsilon_D^c(D_u)$. Rose : $\varepsilon_D^c(D_v)$. Représentation : 1D en fonction de ℓ_\perp avec les valeurs positives en trait plein et négatives en trait discontinu.

les grandes échelles ou rester constant. Les termes en D_ρ (visible seulement pour CGL3 puisque $\nu_\rho = 0$ pour CGL1) et D_u ne montre pas de décroissance et la tendance en ℓ^{-2} environ de la décroissance de $\varepsilon_D^c(D_v)$ et $\varepsilon_D^m(D_{v_A})$ avait été remarquée par FERRAND 2021 dans le cas incompressible. La pathologie de cette pente en -2 y avait été identifiée, et associée à une saturation mathématique de la fonction de corrélation calculée entre deux points et due à une puissance de k trop importante dans l’espace de Fourier et similaire à celle relevée par CHO et LAZARIAN 2009.

Dans l’Annexe ?? nous proposons une démonstration mathématique de ce phénomène en fonction du type de la fonction de corrélation, incrémentale ou non, et de la tendance du spectre dans l’espace de Fourier. On y obtient dans le cas non incrémental :

$$< A(\mathbf{x} + \boldsymbol{\ell}) \cdot B(\mathbf{x}) + A(\mathbf{x}) \cdot B(\mathbf{x} + \boldsymbol{\ell}) > \propto \begin{cases} \ell^{-2} & \text{if } m \in]-\infty, -1[\\ \ell^{m-1} & \text{if } m \in]-1, 1[\\ 1 & \text{if } m \in]1, +\infty[\end{cases} \quad (\text{III.6.12})$$

avec m la pente du spectre unidimensionnel en représentation logarithmique telle que

k^{-m} . Pour une fonction de corrélation incrémentale on obtient :

$$\langle (A(\mathbf{x} + \boldsymbol{\ell}) - A(\mathbf{x})) \cdot (B(\mathbf{x} + \boldsymbol{\ell}) - B(\mathbf{x})) \rangle \propto \begin{cases} 1 & \text{if } m \in]-\infty, 1[\\ \ell^{m-1} & \text{if } m \in]1, 3[\\ \ell^2 & \text{if } m \in]3, +\infty[\end{cases} \quad (\text{III.6.13})$$

Si on analyse les différentes contributions du terme de dissipation, on se rend compte que $\varepsilon_D^c(\mathbf{D}_v)$, $\varepsilon_D^c(D_\rho)$, $\varepsilon_D^m(\mathbf{D}_{v_A})$, $\varepsilon_D^{ui}(D_u)$ et ε_D^{ue} ont une forme assez proche d'une fonction de corrélation non incrémentale et $\varepsilon_D^m(D_\rho)$ et $\varepsilon_D^{ui}(D_\rho)$ sont plus proches d'une fonction incrémentale.

Pour une pente de spectre autour de k^8 ($m = -8$), une fonction de corrélation non incrémentale, va saturer en ℓ^{-2} , on retrouve ce comportement pour $\varepsilon_D^c(\mathbf{D}_v)$ et $\varepsilon_D^m(\mathbf{D}_{v_A})$ tandis qu'une fonction de corrélation incrémentale va saturer en ℓ^0 , comportement retrouvé pour $\varepsilon_D^m(D_\rho)$ et $\varepsilon_D^{ui}(D_\rho)$. On retrouve aussi le comportement du terme de forçage (fonction de corrélation non incrémentale), constant, puisqu'un Dirac à petit ℓ peut-être vu comme une pente en $m = +\infty$. Ces comportements plus mathématiques que physiques sont retrouvés pour toutes les simulations. Une étude plus poussée n'a pas été engagée.

On remarque tout de même les fortes variations des termes décroissant en ℓ^{-2} . Ces variations sont la cause de la bosse visible aux plus petites échelles, pour tout les taux ε_{NL} et ε calculer dans les simulations. En effet, $\varepsilon_F - \partial_t \mathcal{R}$ reste constant dans cette zone alors que la bosse apparaît dans $\varepsilon_F - \partial_t \mathcal{R} + \varepsilon_D$. Cette bosse nous indique donc les échelles auxquelles l'erreur mathématique de l'hyperdissipation impacte systématiquement ε_{NL} .

6.3.3 Estimation de l'erreur sur le taux de cascade :

Afin de se rapprocher du comportement théorique de la turbulence et d'estimer un taux de cascade indépendant de l'erreur mathématique du taux de dissipation, une correction de ε possible est de regarder $\varepsilon_{NL} - \varepsilon_D$ au lieu de ε_{NL} aux échelles telles que $\ell \neq 0$. Ainsi, l'énergie estimée de manière erronée comme embarquée par l'hyperdissipation serait «rendue à la cascade» tout en préservant l'anomalie dissipative. Ensuite, une estimation plus réaliste du taux de dissipation devra être effectuée. Une méthode potentielle, inspirée de CHO et LAZARIAN 2009 serait d'augmenter le nombre de points servant au calcul de la fonction de corrélation. Une telle tâche s'annonce mathématiquement complexe et lourde. Une autre possibilité serait d'estimer précisément pour chaque contribution la puissance m du spectre influant sur le résultat de chaque contribution au taux de dissipation puis de calculer la tendance attendue en ℓ^{m-1} . FERRAND 2021 a comparer dans le cas incompressible quelques approches pour effectuer cette estimation ainsi, mais ces approches reposent fortement sur la contrainte incompressible... Par la suite, étant plus intéressés par le comportement des différentes contributions présentes dans ε_{NL} , en particulier celle de l'anisotropie de pression, que par le taux de cascade total, l'estimation réaliste de ε_D n'a pas été entreprise. Nous garderons tout de même en mémoire, les altérations apportées par l'erreur s'appliquant sur ce terme.

L'analyse des différentes contributions à la loi KHM permet d'identifier les sources d'erreur numérique et mathématique menant au niveau de ζ . Ce dernier, de l'ordre des fluctuations de $\langle E_{tot} \rangle$, reflèterait la signature de la quasi-stationnarité statistique des simulations. Aux échelles plus faibles, la pathologie mathématique du calcul de fonction

de corrélation dépendant de l'hyperdissipation ainsi que sa signature⁴ dans ε_{NL} semblent affecter ζ . Ce dernier correspond donc à l'incertitude systématique de notre estimation du taux de cascade, incertitude provenant des données initiales, de leur adéquation avec les hypothèses de Kolmogorov et du schéma numérique utilisé pour le calcul des termes des lois exactes. Les termes lui étant inférieurs en valeur absolue étant dans la zone d'incertitude du taux de cascade total, leur analyse devra être effectuée avec précautions.

Un autre point reste à éclaircir dans cette étude sur les lois du type KHM : la différence entre la loi obtenue en utilisant \mathcal{R} et celle en utilisant une fonction incrémentale \mathcal{S} . Celle associée à \mathcal{R} est :

$$\mathcal{S} = \frac{1}{4} \langle \delta(\rho\mathbf{v}) \cdot \delta\mathbf{v} + \delta(\rho\mathbf{v}_A) \cdot \delta\mathbf{v}_A + 2\delta\rho\delta u \rangle \quad (\text{III.6.14})$$

On a alors la relation $\mathcal{S} = \langle E_{tot} \rangle - \mathcal{R}$ et sachant que $\mathcal{R}(\ell = 0) = \langle E_{tot} \rangle$, il est facile de passer de l'expression (III.6.4) à la loi que l'on va nommée KHMS :

$$\partial_t \mathcal{S} = -\mathcal{E}_{NL} + \mathcal{E}_D + \mathcal{E}_F \quad (\text{III.6.15})$$

avec : $\mathcal{E}_{NL} = \varepsilon_{NL}(\ell = 0) - \varepsilon_{NL}$, $\mathcal{E}_D = \varepsilon_D(\ell = 0) - \varepsilon_D$ et $\mathcal{E}_F = \varepsilon_F(\ell = 0) - \varepsilon_F$. On notera que l'équation d'énergie totale s'écrit sous la forme $\partial_t E_{tot} + \nabla \cdot \mathbf{F}_{tot} = S$ avec S les termes sources (dissipation et forçage) et \mathbf{F}_{tot} , le total de flux. Puisque $\langle \nabla \cdot \mathbf{F}_{tot} \rangle = \nabla_\ell \cdot \langle \mathbf{F}_{tot} \rangle = -\langle \nabla' \cdot \mathbf{F}_{tot} \rangle = 0$, alors $\mathcal{E}_{NL} = -\varepsilon_{NL}$.

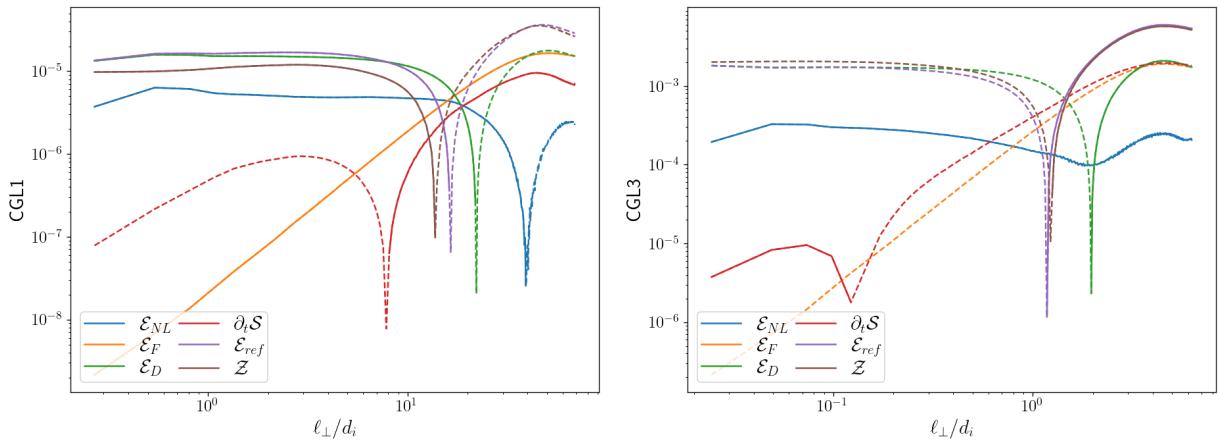


FIGURE III.6.10 – Détail de la loi KHMS pour CGL1 (gauche) et CGL3 (droite). Bleu : \mathcal{E}_{NL} . Orange : \mathcal{E}_F . Vert : \mathcal{E}_D . Rouge : $\partial_t \mathcal{S}$. Violet : $\mathcal{E}_{ref} = -\partial_t \mathcal{S} + \mathcal{E}_D + \mathcal{E}_F$. Marron : $\mathcal{Z} = \mathcal{E}_{ref} - \mathcal{E}_{NL}$. Représentation : 1D en fonction de ℓ_\perp avec les valeurs positives en trait plein et négative en trait discontinu.

En appliquant cette transformation sur le détail de la loi KHM (fig. FIGURE III.6.8), on obtient les résultats de la FIGURE ???. On y remarque que le comportement des termes de forçage et dissipations se sont inversés : \mathcal{E}_F augmente avec une pente de facteur 2 et \mathcal{E}_D reste constant avant de changer de signe vers les grandes échelles. Ces comportements sont cohérents avec ceux démontrés dans les Annexes ?? et ?? (voir équations (III.6.12)et (III.6.13)). La différence $\mathcal{Z} = \mathcal{E}_{ref} - \mathcal{E}_{NL} = (-\partial_t \mathcal{S} + \mathcal{E}_D + \mathcal{E}_F) - \mathcal{E}_{NL}$ est supérieure à ζ . L'utilisation d'une fonction de corrélation incrémentale dans une étude de données de

4. Les corrélations impliquées dans ε_D étant d'ordre 2 et celles présentes dans les termes dominant de ε_{NL} étant d'ordre 3, le reflet dans ε_{NL} de l'erreur mathématique pourraît, à priori, ne pas compenser exactement l'erreur sur ε_D .

simulations amplifie l'erreur numérique et mathématique associée aux termes temporels, de dissipation et de forçage en y ajoutant l'erreur sur l'équation d' $\langle E_{tot} \rangle$.

6.4 Synthèse des tests de validation et sources d'erreurs

Ces études sont illustrées par les résultats obtenus pour les simulations CGL1 et CGL3.

Comparaison Hall-MHD incompressible avec les résultats de FERRAND 2021 :

- apport de nos choix de schéma numérique
- le comportement des lois Hall-MHD est retrouvé
- visualisation de l'impact de la stationnarité statistique et du forçage sur la zone inertielle

Comparaison MHD incompressible avec la formulation de PP98 donnée par BANERJEE et GALTIER 2017 :

- comportement global retrouvé
- différences induites par la quasi-incompressibilité des simulations

Comparaison MHD compressible avec pression isotrope avec les prédictions de ANDRÉS *et al.* 2018 :

- formulation f1 cohérente avec les prédictions
- validation de l'apport de f2 sur f1 et cohérence avec les prédictions

Analyse de la loi KHM :

- paradoxe sur l'hypothèse de stationnarité statistique dans les simulations
- pathologie mathématique apportée par l'hyperdissipation
- incertitude provenant de l'utilisation de fonctions incrémentales
- estimation de l'erreur numérique et mathématique sur la loi exacte totale associée au modèle simulé

Ces résultats valident le schéma numérique, son implémentation, la formulation de la loi qui sera utilisée par la suite et questionne les comportements non-physiques pouvant impactés les résultats.

Annexes utilisées : ?? et ??

PARTIE III : CHAPITRE 7

L'EFFET DE L'ANISOTROPIE DE PRESSION DANS DES SIMULATIONS HALL-CGL

Sommaire

7.1	Le modèle CGL simulé	83
7.2	Etude de la loi Hall-CGL dans les simulations CGL1, CGL2, CGL3 et CGL3B	84
7.2.1	Loi globale et contribution de l'anisotropie de pression	85
7.2.2	Détail de la contribution de l'anisotropie de pression	88
7.2.3	Comportement à la date D des simulations	88
7.3	De nouvelles simulations	91
7.3.1	Une gamme d'échelle intermédiaire : CGL5	91
7.3.2	Une initialisation anisotrope de a_p : CGL6	92
7.4	Etude de spectre	93
7.5	Synthèse d'une page	96

Dans ce chapitre, nous attaquons le cœur de l'étude numérique dont l'objectif est de répondre à question : quel impact a la correction dépendant de l'anisotropie de pression sur le taux de cascade ?

7.1 Le modèle CGL simulé

Dans un premier lot de simulations, les ions sont décris avec la fermeture CGL et les électrons, avec une fermeture isotherme qui correspond en fait à notre fermeture isotherme-isentrope. La pression électronique est définie telle que $p_e = \rho$. Le modèle général (hors dépendances du flux de chaleur) simulé dans le code versatile, est donné dans la section II.???. Regardons à quoi il ressemble si l'on y injecte les fermetures et qu'on y applique la normalisation indiquée dans la section 5.1 et utilisée dans l'implémentation des équations. Il est formé des équations :

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (\text{III.7.1})$$

$$\partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} - \frac{1}{\rho} \mathbf{j} \times \mathbf{B} + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}} = 0 \quad (\text{III.7.2})$$

$$\partial_t \mathbf{B} - \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + d_i \nabla \times \left(\frac{1}{\rho} \mathbf{j} \times \mathbf{B} \right) = 0 \quad (\text{III.7.3})$$

$$\partial_t p_{\perp i} + \nabla \cdot (p_{\perp i} \mathbf{v}) + p_{\perp i} \nabla \cdot \mathbf{v} - p_{\perp i} \mathbf{b} \mathbf{b} : \nabla \mathbf{v} = 0 \quad (\text{III.7.4})$$

$$\partial_t p_{\parallel i} + \nabla \cdot (p_{\parallel i} \mathbf{v}) + 2p_{\parallel i} \mathbf{b} \mathbf{b} : \nabla \mathbf{v} = 0 \quad (\text{III.7.5})$$

en notant $\bar{\mathbf{P}} = \frac{\beta_0}{2} (\bar{\mathbf{P}}_i + \rho \bar{\mathbf{I}})$ avec $\bar{\mathbf{P}}_i = p_{\perp i} \bar{\mathbf{I}} + (p_{\parallel i} - p_{\perp i}) \mathbf{b} \mathbf{b}$, le tenseur gyrotrope de pression ionique, $\mathbf{b} = \frac{\mathbf{B}}{|\mathbf{B}|}$, la direction du champ magnétique et $\frac{\beta_0}{2}$ constante provenant de la normalisation des équations.

L'hypothèse isotherme vient y annuler la contribution ∇P_e présente dans l'équation d'induction (??) puisque :

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\rho} \nabla (p_e) \right) = \nabla \times \left(\frac{1}{\rho} \nabla \rho \right) = \nabla \times \nabla (\ln \rho) = 0$$

On s'attend donc à ce que la contribution de ∇P_e permettant de compenser l'effet de ce terme dans l'équation d'énergie totale, s'annule aussi. L'énergie interne étant $\rho u = \frac{\beta_0}{2} (p_{\perp i} + \frac{1}{2} p_{\parallel i} + \rho \ln \rho)$, son équation peut en effet s'écrire :

$$\partial_t (\rho u) + \nabla \cdot (\rho u \mathbf{v}) + \bar{\mathbf{P}} : \nabla \mathbf{v} = 0. \quad (\text{III.7.6})$$

On reconnaît dans ces équations le modèle ayant donné la loi exacte (??) ainsi que le terme Hall dans l'équation (III.7.3) qui indique qu'il faut prendre en compte la correction Hall donnée par (??). Le taux de transfert non linéaire obtenu, qui est valable aussi en dehors de la zone inertielle sera notée ε_{cgl} , on le comparera à ε_{iso} calculé avec la partie isotrope du tenseur de pression. La différence $\varepsilon_{\bar{\Pi}} = \varepsilon_{cgl} - \varepsilon_{iso}$ correspond à la contribution de l'anisotropie de pression donnée par l'équation (??). Elle sera décomposée en quatre termes :

- un terme flux (orange) : $\nabla_{\boldsymbol{\ell}} \cdot \mathcal{F}_{\mathbf{A}} = \frac{1}{4} \nabla_{\boldsymbol{\ell}} \cdot \left\langle \delta \rho \delta \left(\frac{\bar{\Pi}}{\rho} \right) \cdot \delta \mathbf{v} \right\rangle$
- le terme source survivant dans la limite incompressible (vert) :

$$\mathcal{S}_{A1} = \frac{1}{2} \left\langle \delta \left(\frac{\bar{\Pi}}{\rho} \right) : (\rho \nabla' \mathbf{v}' - \rho' \nabla \mathbf{v}) \right\rangle$$

- le terme source dépendant explicitement des fluctuations de pression (rouge) :

$$\mathcal{S}_{A2} = \frac{1}{4} \left\langle \delta \left(\frac{\bar{\Pi}}{\rho} \right) : \left(\rho \mathbf{v} \frac{\nabla' \rho'}{\rho'} - \rho' \mathbf{v}' \frac{\nabla \rho}{\rho} \right) \right\rangle$$

- le terme source dépendant explicitement des fluctuations de densité (violet) :

$$\mathcal{S}_{A3} = -\frac{1}{4} \left\langle \delta \rho \left(\mathbf{v} \cdot \left(\frac{\bar{\Pi}}{\rho} \right) \cdot \frac{\nabla' \rho'}{\rho'} - \mathbf{v}' \cdot \left(\frac{\bar{\Pi}'}{\rho'} \right) \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} \right) \right\rangle$$

7.2 Etude de la loi Hall-CGL dans les simulations CGL1, CGL2, CGL3 et CGL3B

Les simulations CGL1, CGL2 et CGL3 sont les simulations Hall-CGL analysées dans l'article FERRAND, SAHRAOUI, LAVEDER *et al.* 2021, leur paramètre sont résumés dans la TABLE III.4.1 et la TABLE III.4.2. CGL3B est une version moins énergétique de CGL3. Ces quatre simulations sont initialisées telles que $a_p = 1$.

7.2.1 Loi globale et contribution de l'anisotropie de pression

La FIGURE III.7.1 (CGL1 et CGL2) et la FIGURE III.7.2 (CGL3B et CGL3) contiennent des triptyques, associés à chaque simulation, permettant de comparer les taux de cascade ε_{iso} et ε_{cgl} . La différence des deux, $\varepsilon_{\overline{\Pi}}$, est représentée en 2D en fonction de ℓ_{perp} et ℓ_{\parallel} , et est projetée dans les représentations 1D sous la forme des courbes vertes. Sur les représentations 1D, sont ajoutés ε_{cgl} en bleu, ε_{iso} en orange et le niveau d'incertitude ζ (gris) qui reste assez éloigné des autres quantités.

Pour CGL1, CGL2 et CGL3B, dans la zone inertuelle, où ε_{cgl} est quasi-constant, de chaque simulation, la contribution de $\varepsilon_{\overline{\Pi}}$ au taux de cascade totale est en valeurs absolues de 10 % de ε_{iso} pour CGL1, 10 % à 20 % pour CGL2. Ces valeurs sont cohérentes. Pour CGL3B, elle est de 30 %. Une question se pose alors : cette augmentation est-elle physique ? Est-elle due à la zone d'échelles, Hall vs MHD ? ou à une différence de comportement de nos simulations ? Près des échelles de forçage, $\varepsilon_{\overline{\Pi}}$ augmente autour de 100 % à 200 % de ε_{iso} . En pratique, on ne regarde pas ce qu'il se passe à ces échelles car elles sont impactées par l'injection d'énergie dans la cascade qui a tendance à faire fortement fluctuer les résultats provenant des lois calculées jusqu'à présents dans la littérature. Donc a priori cette augmentation n'aurait pas un sens physique généralisable et serait plus spécifique à l'outil numérique.

Sur les représentations 2D, une échelle caractéristique semble impliquer un changement de signe de $\varepsilon_{\overline{\Pi}}$ dans la zone inertuelle MHD ($\ell > d_i$). Aux plus petites échelles, il est positif et puis devient négatif. L'emplacement de ce changement de signe est situé autour de $\ell_{\perp}^s \sim 2d_i$ dans la direction perpendiculaire. Dans la direction parallèle, le changement de signe à lieu en $\ell_{\parallel}^s \sim 20d_i$ pour CGL1, $\ell_{\parallel}^s \sim 80d_i$ pour CGL2 et $\ell_{\parallel}^s \sim 6d_i$ pour CGL3B. Trois éléments pourraient potentiellement expliquer ces observations :

- Les gammes d'échelles couverte par les simulations : CGL1 est plus parallélépipédique que CGL2 et CGL3B couvre les échelles Hall donc le changement de signe à lieu dans les échelles impactées par le forçage. la valeur $\ell_{\parallel}^s \sim 6d_i$ est donc peut-être due au forçage et sans ce dernier elle aurait peut-être eu lieu plus en amont.
- En présence d'un champ magnétique, le développement de la cascade est anisotrope comme on peut facilement le visualiser sur les cartes de l'article MANZINI *et al.* 2022. Cela pourrait venir expliquer l'observation $\ell_{\perp}^s < \ell_{\parallel}^s$.
- L'angle d'injection θ_i étant inférieur à 45°, l'énergie n'est pas injectée isotropiquement dans la simulation. Il diffère d'ailleurs entre CGL1 (7°) et CGL2-CGL3 (15°). Si le deuxième élément est validé, cela pourrait impliquer qu'un angle d'injection plus parallèle peut venir contrer ou amplifier l'anisotropie de $\varepsilon_{\overline{\Pi}}$. Si le premier élément est validé, une injection parallèle isotropiserait $\varepsilon_{\overline{\Pi}}$.

Globalement, les comportements analysés jusqu'à présent semblent se recouper : une contribution autour de 20 % du taux isotrope, une échelle caractéristique induisant un changement de signe de la contribution et une augmentation près des échelles de forçage. Ces similarités sont cohérentes avec la similarité des paramètres initiaux.

Regardons maintenant ce qu'il en est de CGL3. Sur la figure FIGURE III.7.2, on observe que le niveau de $\varepsilon_{\overline{\Pi}}$ est de l'ordre de 10 % de ε_{iso} dans la zone inertuelle (de type Hall) et encore une fois une augmentation près des échelles de forçage. Par contre, cette augmentation domine complètement ε_{iso} . Une autre différence et pas des moindres d'après la représentation 2D est que $\varepsilon_{\overline{\Pi}}$ est positif quasiment pour toutes les échelles à l'exception d'une «bulle» présente pour certain $\ell_{\parallel} > d_i$. Sachant qu'en termes de paramètres initiaux, l'énergie moyenne présente dans le système est plus importante, on s'attendait à une différence de comportement mais pas d'une telle ampleur. Y aurait-il une raison qui

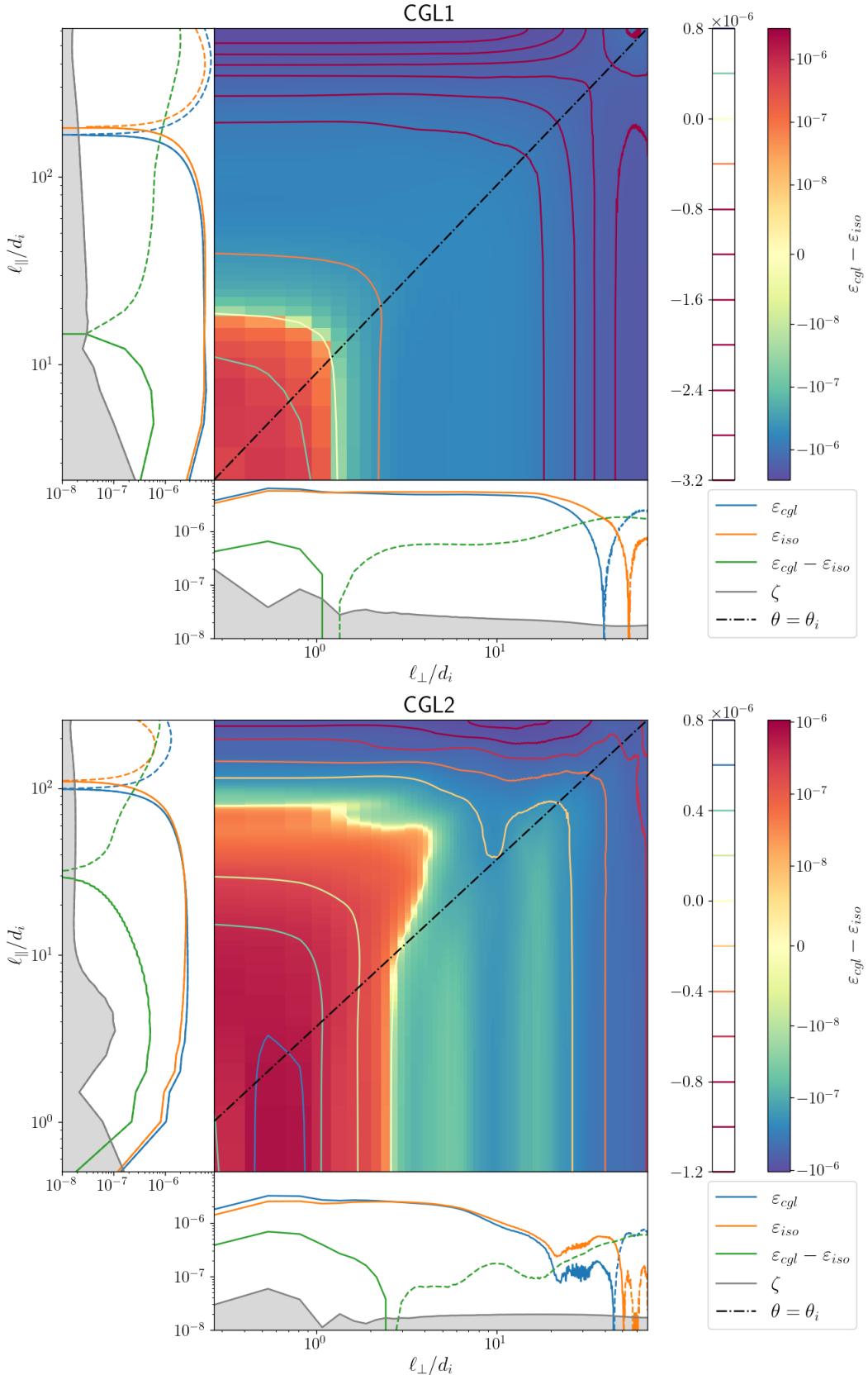


FIGURE III.7.1 – Simu : CGL1 et CGL2. Représentation 2D en fonction de ℓ_{perp} et ℓ_{\parallel} de $\varepsilon_{cgl} - \varepsilon_{iso}$. Entouré des représentations 1D en fonction de ℓ_{perp} (bas) et ℓ_{\parallel} (gauche) de ε_{iso} (orange), ε_{cgl} (bleu), $\varepsilon_{cgl} - \varepsilon_{iso}$ (vert) et ζ (gris).

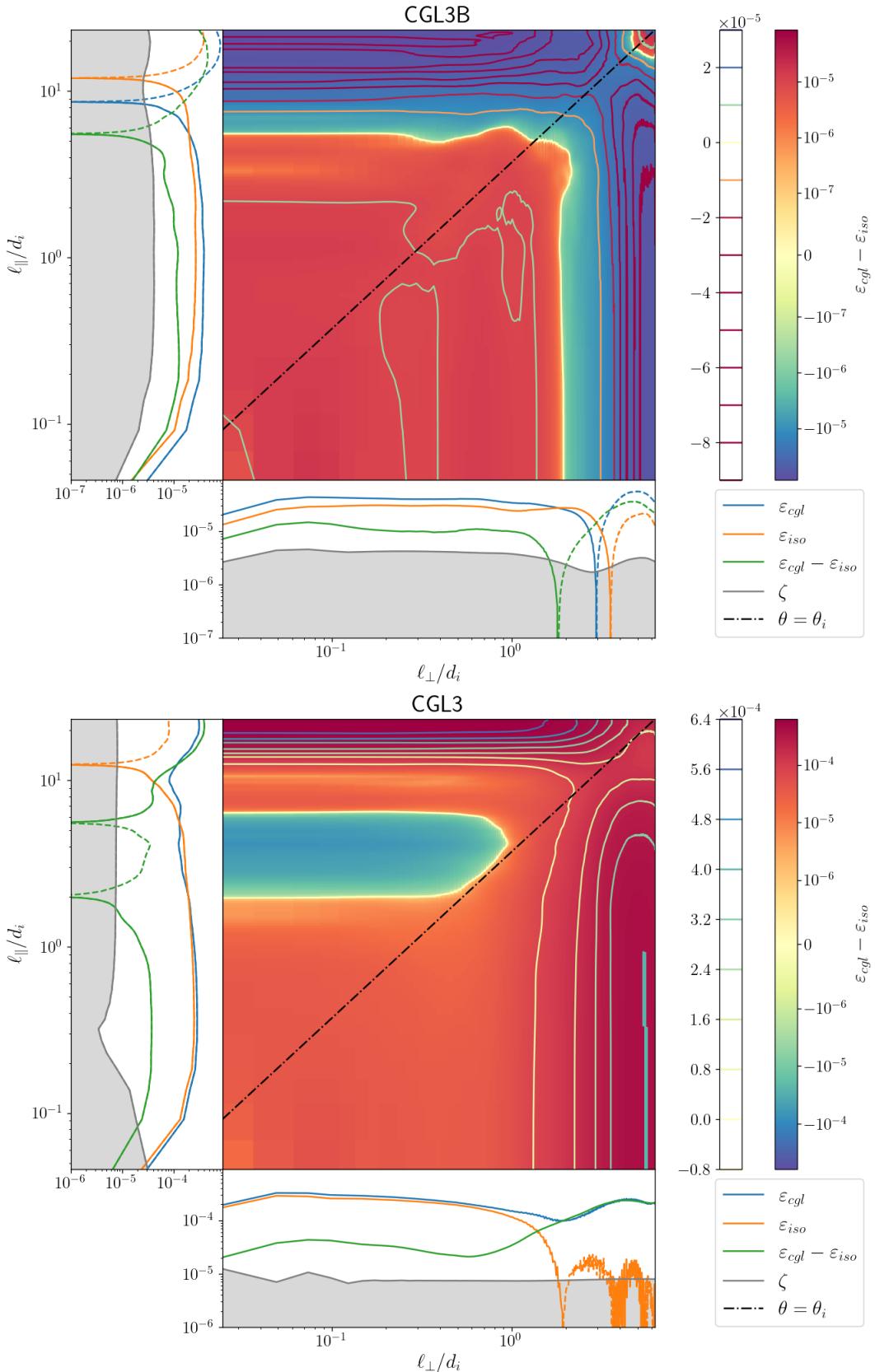


FIGURE III.7.2 – Simu : CGL3B et CGL3. Représentation 2D en fonction de ℓ_{perp} et ℓ_{\parallel} de $\varepsilon_{cgl} - \varepsilon_{iso}$. Entouré des représentations 1D en fonction de ℓ_{perp} (bas) et ℓ_{\parallel} (gauche) de ε_{iso} (orange), ε_{cgl} (bleu), $\varepsilon_{cgl} - \varepsilon_{iso}$ (vert) et ζ (gris).

nous aurait échappée ?

7.2.2 Détail de la contribution de l'anisotropie de pression

Sur la FIGURE III.7.3 et la FIGURE III.7.4, est indiqué le détail de $\varepsilon_{\overline{\Pi}}$ (bleu). On remarque qu'il est dominé par \mathcal{S}_{A1} . $\nabla_{\ell} \cdot \mathcal{F}_A$ et \mathcal{S}_{A2} sont du même ordre de grandeurs et fluctuent autour de ζ . Ils peuvent légèrement influencer $\varepsilon_{\overline{\Pi}}$ lorsque \mathcal{S}_{A1} s'affaiblit. \mathcal{S}_{A3} est généralement négligeable. La contribution de l'anisotropie de pression et son comportement est donc principalement portée par le terme source qui survit dans la limite incompressible.

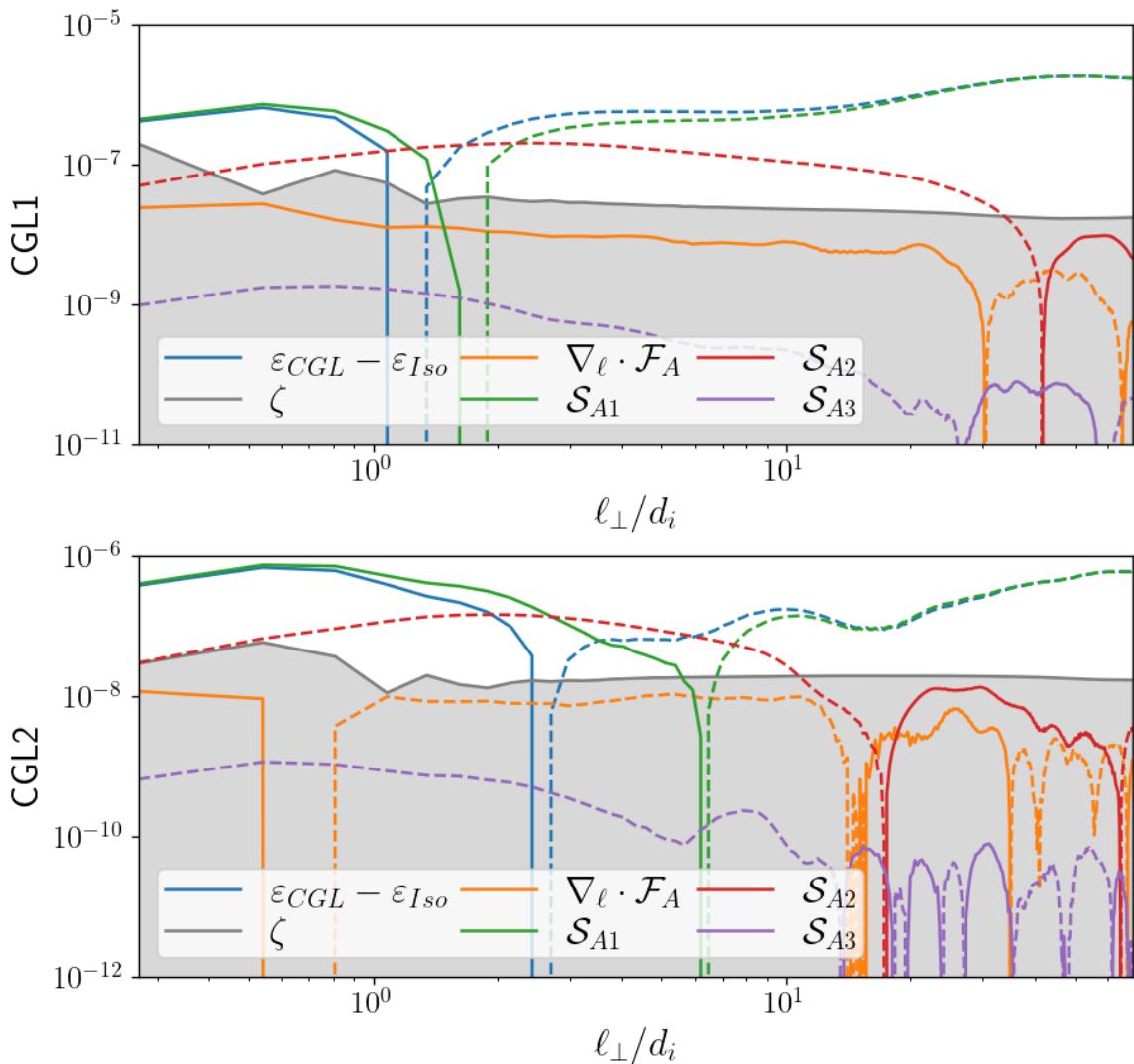


FIGURE III.7.3 – Représentation 1D en fonction de ℓ_\perp du détail de $\varepsilon_{\overline{\Pi}}$ (bleu). Orange : $\nabla_{\ell} \cdot \mathcal{F}_A$. Vert : \mathcal{S}_{A1} . Rouge : \mathcal{S}_{A2} . Violet : \mathcal{S}_{A3} . Gris : niveau d'erreur ζ . Les termes présents dans la zone grise délimitée par ζ sont supposés négligeables. Haut : CGL1. Bas : CGL2.

7.2.3 Comportement à la date D des simulations

Ce terme dépend des fluctuations de la composante anisotrope du tenseur de pression et donc de $(1 - a_p)$, nous nous sommes donc demandés quel était son comportement

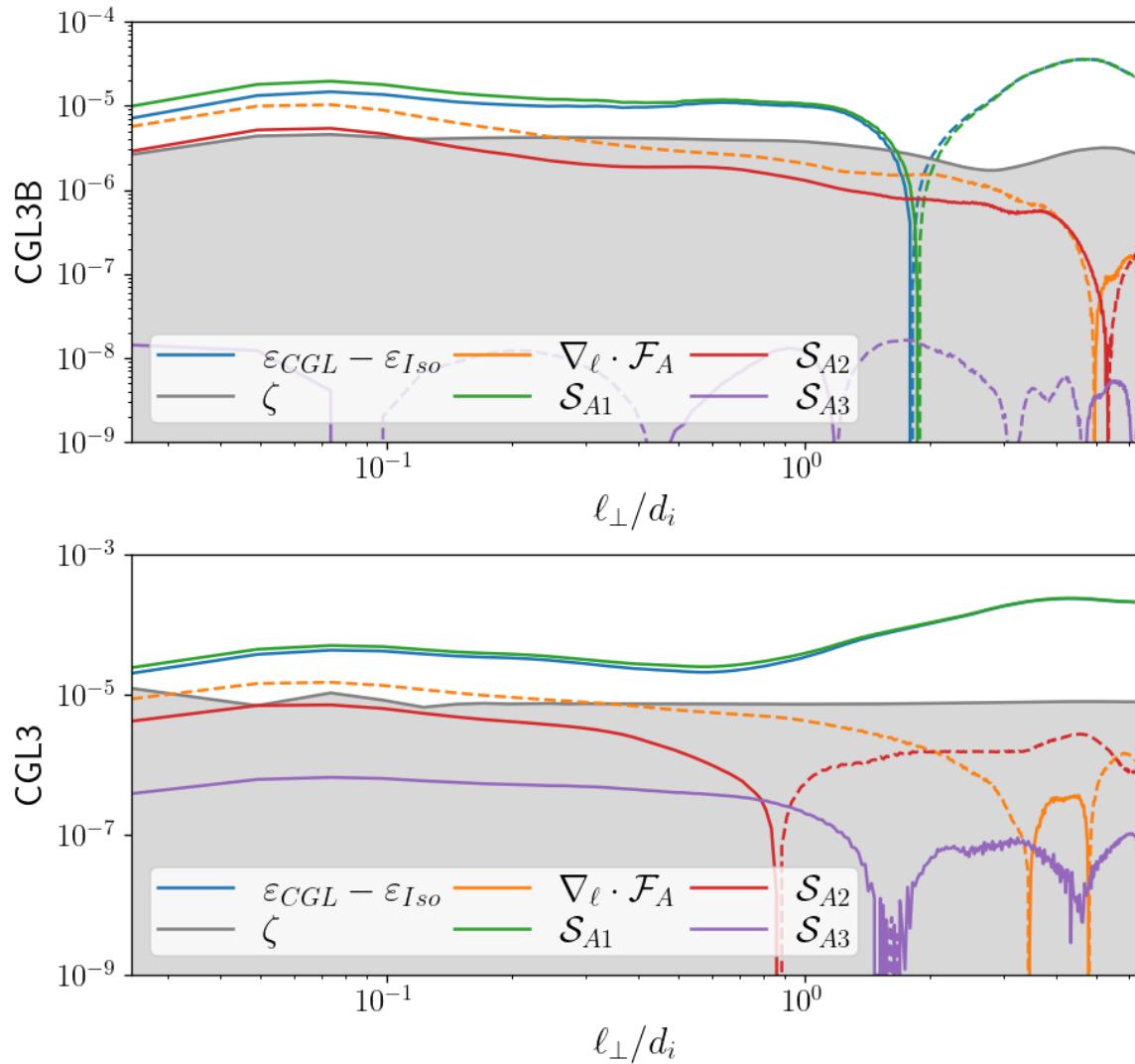


FIGURE III.7.4 – Représentation 1D en fonction de ℓ_\perp du détail de $\varepsilon_{\overline{\Pi}}$ (bleu). Orange : $\nabla_\ell \cdot \mathcal{F}_A$. Vert : \mathcal{S}_{A1} . Rouge : \mathcal{S}_{A2} . Violet : \mathcal{S}_{A3} . Gris : niveau d'erreur ζ . Les termes présents dans la zone grise délimitée par ζ sont supposés négligeables. Haut : CGL3B. Bas : CGL3.

statistique. Le tableau III.7.1 résume la statistique (moyenne \pm écart-type) des valeurs de la densité, l'anisotropie de pression ionique ($a_p = \frac{p_{\perp i}}{p_{\parallel i}}$) et paramètre $\beta_{\parallel} = \frac{p_{\parallel i}}{p_m}$ pour l'ensemble des simulations. Sur la figure FIGURE III.7.5, est tracée la dispersion en fonction de a_p et β_{\parallel} , des simulations à la date D . Ces histogrammes 2D prennent la forme de trois courbes de niveau formant des cercles concentriques, le plus large contient les couples $\{\beta_{\parallel}; a_p\}$ existant dans la simulation, l'intermédiaire et le plus petit sont associés à des pourcentages du maximum de l'histogramme : 50 % et 99 %. Sur cette figure, les critères d'instabilités miroir et firehose ainsi que l'horizontale $a_{p0} = 1$ sont aussi affichés. Le critère firehose est le critère calculé dans le chapitre ??, sa position sera affectée par l'effet Hall. Ce critère miroir prend en compte la présence de la pression électronique isotherme, $p_e = \rho$, et est paramétrisé par l'équation ??).

Tout d'abord, on remarque que les fluctuations de densité restant faible (autour de 3 %) même si CGL3, avec un écart-type proche de 8 %, est un très légèrement plus compressible que les autres simulations. Cela pourrait expliquer pourquoi les termes purement compressibles sont dominés par \mathcal{S}_{A1} . Les distributions de CGL1 et de CGL2 sont quasi-

Name	ρ	a_p	β_{\parallel}
CGL1	1 ± 0.02	1.1 ± 0.1	0.9 ± 0.1
CGL2	1 ± 0.02	1.1 ± 0.1	0.9 ± 0.1
CGL3B	1 ± 0.04	1.3 ± 0.3	0.8 ± 0.2
CGL3	1 ± 0.08	2.2 ± 0.5	0.6 ± 0.3
CGL5	1 ± 0.02	2.1 ± 0.1	0.6 ± 0.1
CGL6	1 ± 0.02	3.97 ± 0.5	1.01 ± 0.2

TABLE III.7.1 – Moyenne et écart-type de la densité, du taux d'anisotropie ionique $a_p = \frac{p_{\perp i}}{p_{\parallel i}}$ et du paramètre $\beta_{\parallel} = \frac{p_{\parallel i}}{p_m}$ pour chaque simulation, à la date D .

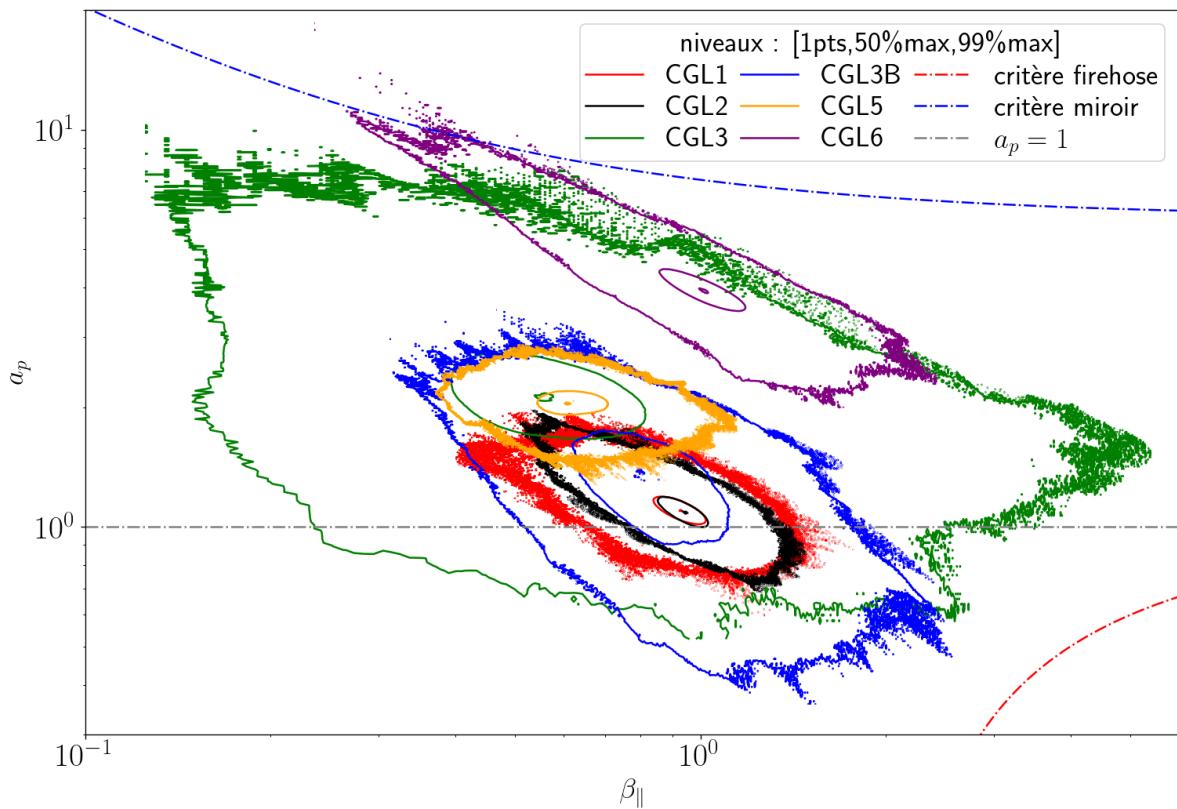


FIGURE III.7.5 – Diagramme $a_p - \beta_{\parallel}$ contenant l'histogramme 2D des simulations sous la forme de courbes de niveau centrées sur le couple moyen. Le critère miroir est paramétrisé par l'équation (??) (il prend en compte les électrons isothermes). Le critère firehose est le critère CGL calculé dans le chapitre II.??.

ment identiques et très proches des valeurs initiales de β_{\parallel} et a_p qui sont fixées à 1. CGL3B est plus étalée et montre une petite augmentation de a_p : $\langle a_p \rangle \sim 1.5$. L'augmentation de la pression a lieu dès les premiers temps de la simulation puis reste stable comme si elle auto-corrigait l'initialisation. La raison d'un tel comportement est encore sujette à question. CGL3 est un ovni : $\langle a_p \rangle \sim 2$ et une distribution des valeurs locales étalées jusqu'à $\langle a_p \rangle \sim 10$, s'approchant du critère miroir. Aurait-on trouvé la source des différences de comportement de notre contribution turbulente anisotrope ?

Diverses questions semblent émerger des simulations CGL1, CGL2, CGL3B et CGL3 : l'impact de l'angle d'injection, l'impact de a_p , le comportement dans la zone inertie MHD, la zone inertie Hall, et dans celle de forçage... Afin de clarifier les questions liées à l'impact de a_p sur les comportements observés, nous avons lancé deux simulations, CGL5 et CGL6.

7.3 De nouvelles simulations

7.3.1 Une gamme d'échelle intermédiaire : CGL5

La gamme d'échelles accessible via CGL5 est située entre celles de CGL2 et de CGL3 afin de couvrir la transition entre la zone MHD et la zone Hall tout en gardant éloigner les échelles impactées par l'injection. Sur la TABLE III.7.1, on voit que sa compression est similaire à celle de CGL2, tout comme son étalement dans le diagramme de la FIGURE III.7.5 mais sa position y est plus proche de celle de CGL3. Suivant le comportement observé pourrait donc être en faveur de la conjecture d'un impact de la moyenne de a_p à la date D ou de celle d'un impact des fluctuations sur la contribution du taux de cascade dépendant de l'anisotropie de pression.

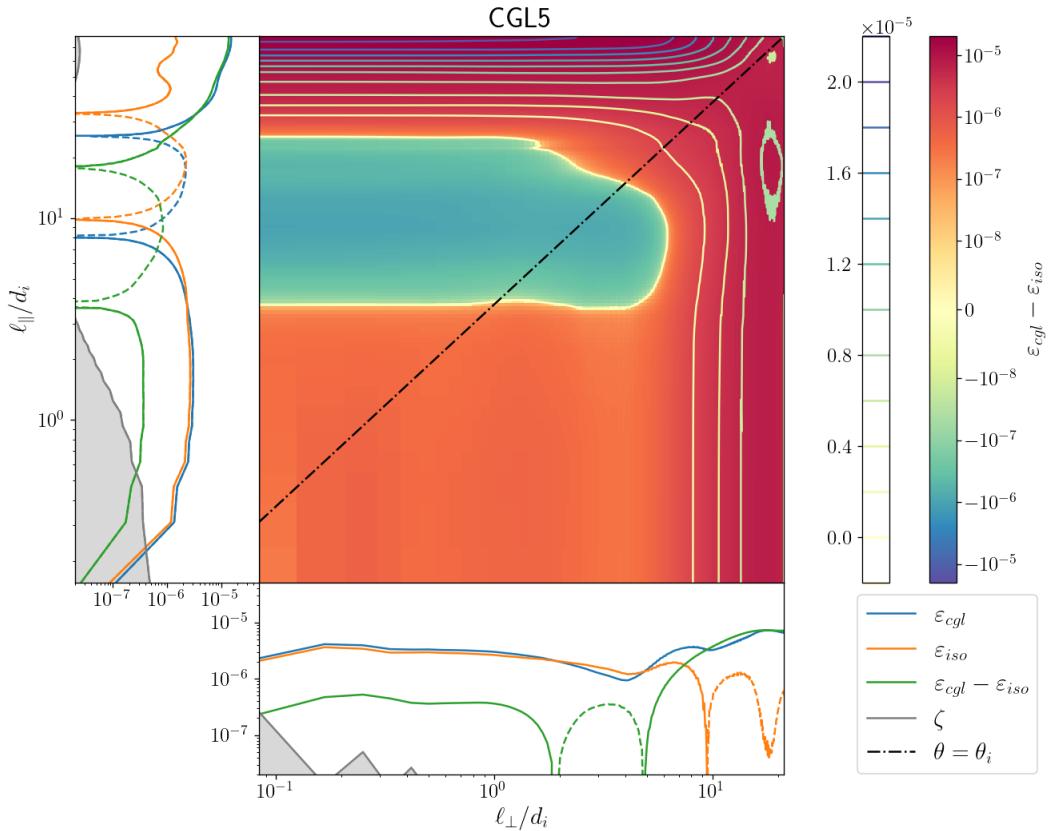


FIGURE III.7.6 – Simu : CGL5. Représentation 2D en fonction de ℓ_{\perp} et ℓ_{\parallel} de $\varepsilon_{cgl} - \varepsilon_{iso}$. Entouré des représentations 1D en fonction de ℓ_{\perp} (bas) et ℓ_{\parallel} (gauche) de ε_{iso} (orange), ε_{cgl} (bleu), $\varepsilon_{cgl} - \varepsilon_{iso}$ (vert) et ζ (gris).

La FIGURE III.7.6 et la FIGURE III.7.7 montrent respectivement le triptyque obtenu pour CGL5 et le détail des termes présent dans $\varepsilon_{\overline{\Pi}}$. LE triptyque montre un comportement similaire à celui de CGL3 et le détail de $\varepsilon_{\overline{\Pi}}$ la dominance de \mathcal{S}_{A1} . Ces résultats

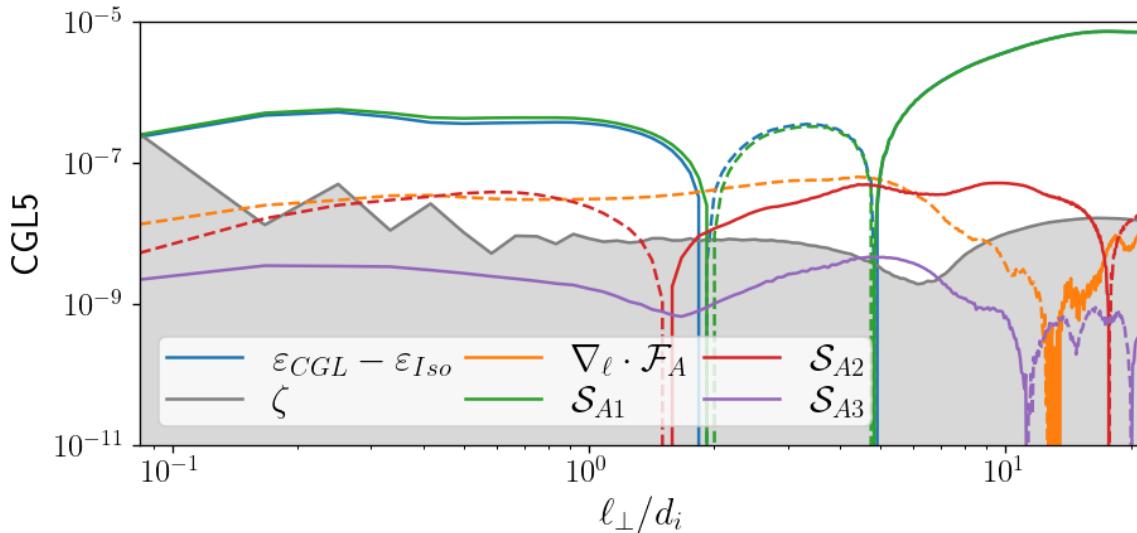


FIGURE III.7.7 – Simu : CGL5. Représentation 1D en fonction de ℓ_\perp du détail de $\varepsilon_{\overline{\Pi}}$ (bleu). Orange : $\nabla_\ell \cdot \mathcal{F}_A$. Vert : \mathcal{S}_{A1} . Rouge : \mathcal{S}_{A2} . Violet : \mathcal{S}_{A3} . Gris : niveau d'erreur ζ . Les termes présents dans la zone grise délimitée par ζ sont supposés négligeables.

se placent donc en faveur de la moyenne de a_p . Ils rappellent l'approximation (II.4.23) quasi-linéaire du terme correctif incompressible dépendant de l'anisotropie de pression proposée dans le chapitre 4 suite à l'analyse des quantités linéarisées accompagnant le mode d'Alfvén-firehose incompressible. **Ce n'est qu'une conjecture qu'il faudra vérifier mais verrions-nous dans le comportement turbulent de nos simulations quasi-incompressible l'impact non-linéaire de la correction firehose du mode d'Alfvén ? Et dans le décalage des paramètres initiaux s'effectuant aux premiers temps de la simulation, l'impact d'ondes magnétosonores ?**

7.3.2 Une initialisation anisotrope de a_p : CGL6

La deuxième simulation lancée, CGL6, est basée sur CGL5 mais initialisée avec de l'anisotropie de pression : $a_{p0} = 4 \neq 1$. Le but de cette simulation est double :

- vérifier que le comportement de notre correction se maintient lorsque la simulation est initialisée anisotropiquement,
- se rapprocher du critère miroir.

D'autres a_{p0} , plus importants, ont été essayés, mais seule la simulation avec $a_{p0} = 4$ a pu être numériquement stabilisé.

Comme on peut le voir sur la TABLE III.7.1 et sur la FIGURE III.7.5, cette simulation se maintient au niveau du a_p initial. En fait, c'est la seule simulation montrant un a_p moyen aussi proche de sa condition initiale, l'écart n'étant que de 3 %. De même, β_{\parallel} moyen n'a a priori bougé que de 1 %. De telles observations vont dans le sens de la spéculation sur une auto-correction des paramètres initiaux d'une simulation seulement si cette dernière est initialisée isotropiquement. Au niveau linéaire, nous avions attribué cette réinitialisation au rôle des ondes compressibles/pseudo-alfvéniques. Pour ce qui est du but de se rapprocher du critère miroir, le diagramme nous indique que quelques points de CGL6 sont situés au-dessus du critère miroir, ils pourraient donc permettre le développement d'instabilité miroir dans la simulation.

Sur la FIGURE III.7.8 et la FIGURE III.7.9, on peut voir que $\varepsilon_{\overline{\Pi}}$ est entièrement

positif. Son niveau est de l'ordre de 100 % de ε_{iso} au plus petites échelles puis augmente. On remarque l'augmentation commence bien avant les échelles de forçage (usuellement situées au niveau du premier changement de signe d'une loi dépendant d'une pression isotrope). La zone de forçage serait-elle plus grande ? ou est-ce la signature d'un effet physique apparaissant dans la simulation ? Pour essayer de répondre à cette question, une étude de spectre a été entamée. Les premiers résultats sont présentés dans la section 8.4

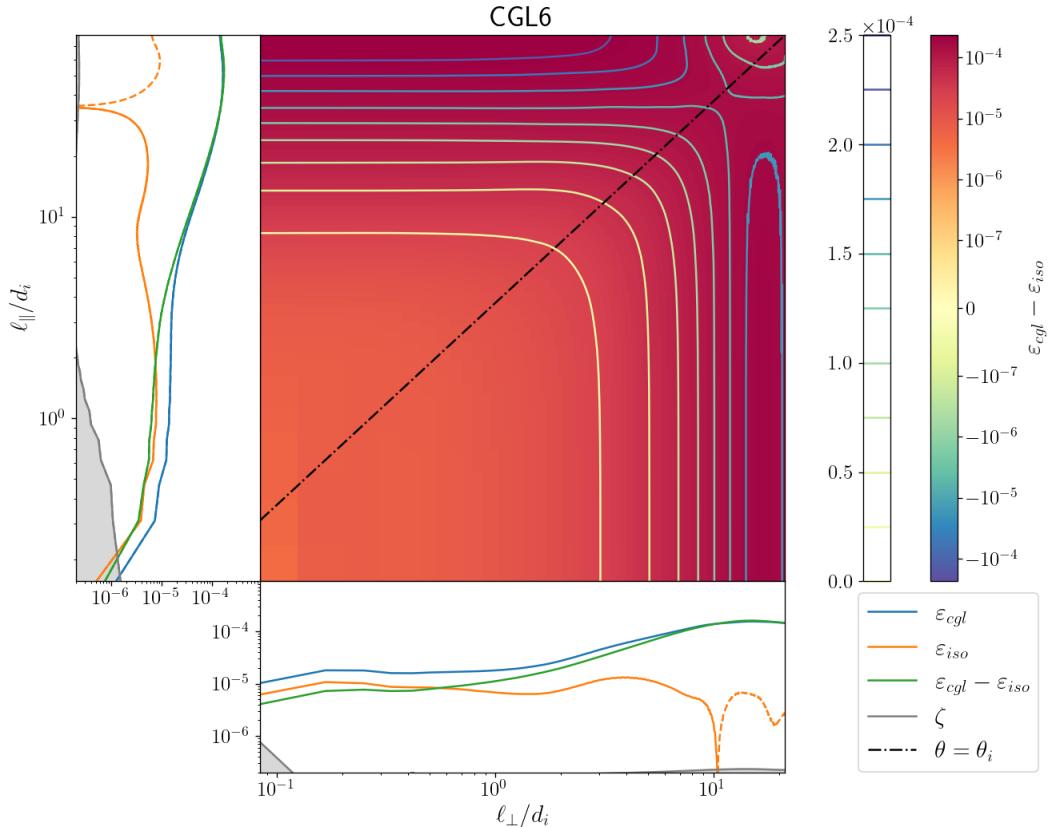


FIGURE III.7.8 – Simu : CGL6. Représentation 2D en fonction de ℓ_{perp} et ℓ_{\parallel} de $\varepsilon_{cgl} - \varepsilon_{iso}$. Entouré des représentations 1D en fonction de ℓ_{perp} (bas) et ℓ_{\parallel} (gauche) de ε_{iso} (orange), ε_{cgl} (bleu), $\varepsilon_{cgl} - \varepsilon_{iso}$ (vert) et ζ (gris).

7.4 Etude de spectre

Sachant que le forçage se fait avec des modes aléatoires de fréquences proches de celle du mode d'Alfvén et que des études telles celle de BRODIANO *et al.* 2021 ont relié le choix de forçage aux ondes dominant la simulation, observer une cascade développée par des ondes d'Alfvén dans nos simulations serait tout à fait réaliste. Si l'on regarde les spectres de champs magnétiques parallèle et perpendiculaire de CGL2 par exemple (FIGURE III.7.10), on remarque que le spectre d'énergie magnétique est dominé par les fluctuations perpendiculaires au champ magnétique ambiant et on y retrouve les pentes turbulentes en $-5/3$ (zone MHD) et en $-7/3$ (zone Hall). Un tel résultat est une signature de la nature alfvénique de la cascade turbulente. Il n'est donc pas impossible que la correction d'anisotropie de pression soit dominé par la correction firehose.

Sur le spectre des fluctuations perpendiculaires, on peut remarquer une bosse en $k_{\perp}d_i = 0.3$, cela correspondrait à $\ell_{\perp}/d_i = 21$. Si l'on regarde sur le triptyque associé à CGL2

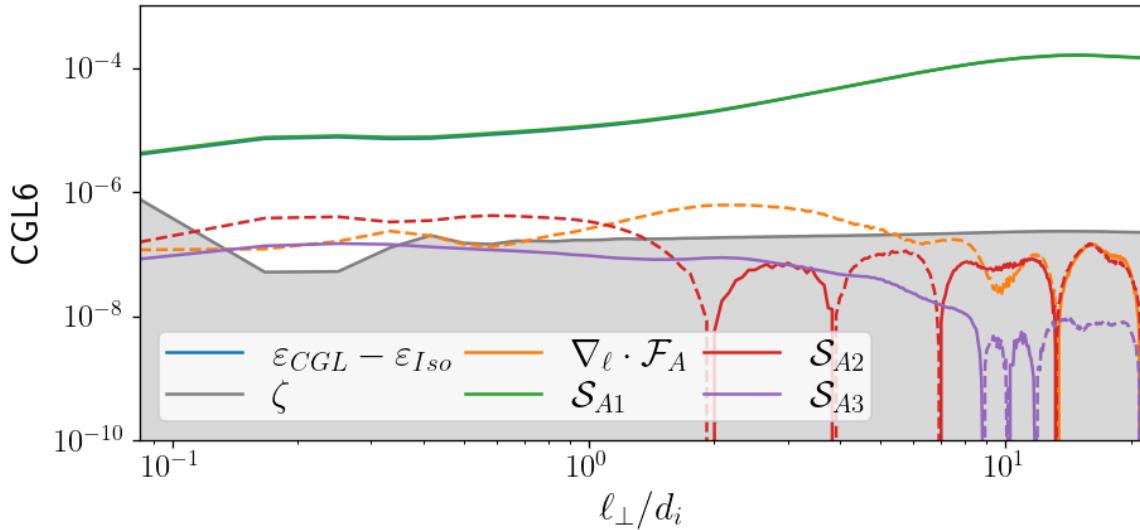


FIGURE III.7.9 – Simu : CGL6. Représentation 1D en fonction de ℓ_{\perp} du détail de $\varepsilon_{\overline{\Pi}}$ (bleu). Orange : $\nabla_{\ell} \cdot \mathcal{F}_A$. Vert : \mathcal{S}_{A1} . Rouge : \mathcal{S}_{A2} . Violet : \mathcal{S}_{A3} . Gris : niveau d'erreur ζ . Les termes présents dans la zone grise délimitée par ζ sont supposés négligeables. De haut en bas : CGL3, CGL5 et CGL6.

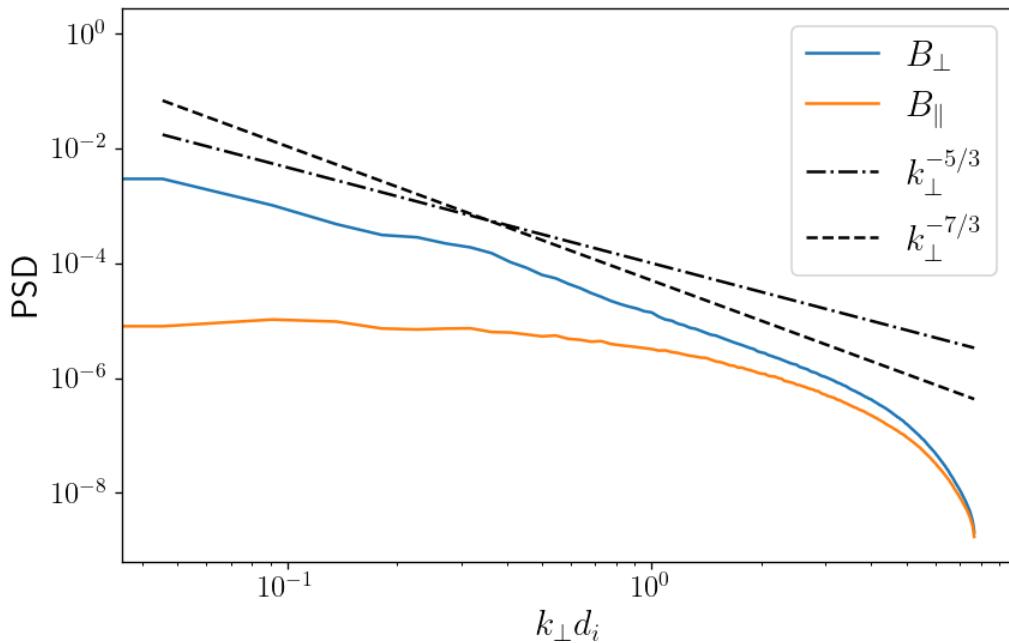


FIGURE III.7.10 – Simu : CGL2. Spectre d'énergie magnétique perpendiculaire et parallèle en fonction de $k_{\perp}d_i$

(FIGURE III.7.1), on remarque que cette échelle correspond au début de l'augmentation de $\varepsilon_{\overline{\Pi}}$.

Les spectres de CGL5 et CGL6 sont plus complexes à analyser, la contribution des fluctuations parallèles au spectre total prend de l'importance dans la zone Hall, comme on peut le voir pour sur la FIGURE III.7.11. Serait la signature d'une cascade d'ondes magnétosonores ?

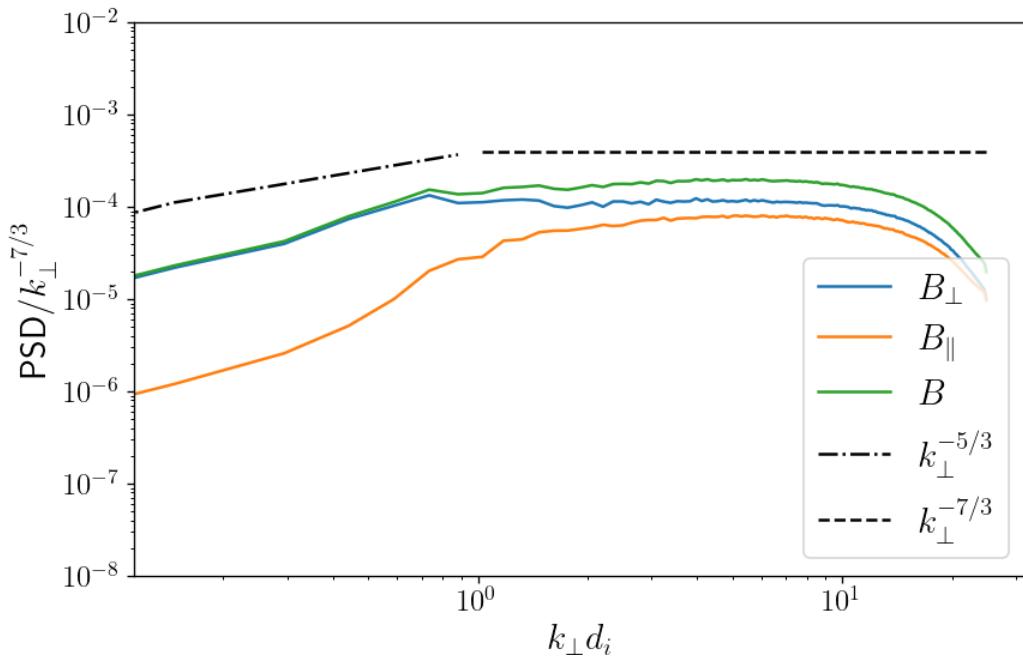


FIGURE III.7.11 – Simu : CGL6. Spectre d'énergie magnétique perpendiculaire et parallèle en fonction de $k_{\perp} d_i$. Le spectre est compensé par la pente $-7/3$ attendue dans la zone inertuelle Hall.

Les résultats présentés dans ce chapitre valident numériquement l'apport de la correction dépendant de l'anisotropie de pression dans le cas quasi-incompressible. Cela implique que la première correction devant être appliquée dans un plasma quasi-incompressible tel que le vent solaire n'est pas la compression mais l'anisotropie de pression. Cette étude numérique n'est encore qu'à un stade préliminaire, en effet, nous n'avons pas encore convergé sur son interprétation et elle soulève un nombre important de questions.

7.5 Synthèse d'une page

spécificités et observations

PARTIE III : CHAPITRE 8

EFFET D'UN FLUX DE CHALEUR DE TYPE LANDAU-FLUIDE ET D'UNE PRESSION ÉLECTRONIQUE TENSORIELLE

Sommaire

8.1	Modèle simulé et loi exacte	97
8.2	Etude préliminaire des simulations	98
8.3	Vérification des conclusions apportées par FERRAND, SAHRAOUI, LAVEDER <i>et al.</i> 2021 sur l'impact de la fermeture Landau-fluide	100
8.4	Synthèse d'une page	101

FERRAND, SAHRAOUI, LAVEDER *et al.* 2021 ont aussi utilisé des simulations prenant en compte un flux de chaleur \bar{q} gyrotrope obtenu grâce à une fermeture Landau-fluide. Il s'est avéré que ces simulations prennent aussi en compte un tenseur de pression électronique de type gyrotrope. Dans ce chapitre, nous proposons de regarder ces simulations afin d'étudier l'impact de ces contributions sur la cascade turbulente.

8.1 Modèle simulé et loi exacte

Dans ce deuxième lot de simulations, les ions et les électrons sont décrits avec un tenseur de pression gyrotronique. La fermeture utilisée est une fermeture Landau-fluide. Cette fermeture nous rapproche d'un modèle cinétique en prenant en compte l'amortissement Landau (phénomène cinétique) dans le modèle fluide. Cette correction étant basée sur la relation de dispersion cinétique, les critères d'instabilité seront aussi corrigés pour correspondre aux critères cinéiques. La gyrotronie des électrons impactera d'ailleurs le critère miroir. Les flux de chaleur ioniques et électroniques sont aussi supposés gyrotroniques.

Les premières équations du modèle normalisé simulé sont les suivantes, en y faisant

apparaître indépendamment les tenseurs de pression ionique et électronique :

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (\text{III.8.1})$$

$$\partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} - \frac{1}{\rho} \mathbf{j} \times \mathbf{B} + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot (\overline{\mathbf{P}_i} + \overline{\mathbf{P}_e}) = 0 \quad (\text{III.8.2})$$

$$\partial_t \mathbf{B} - \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + d_i \nabla \times \left(\frac{1}{\rho} \mathbf{j} \times \mathbf{B} \right) = d_i \nabla \times \left(\frac{1}{\rho} \nabla (p_e) \right) \quad (\text{III.8.3})$$

$$\partial_t p_{\perp i} + \nabla \cdot (p_{\perp i} \mathbf{v}) + p_{\perp i} \nabla \cdot \mathbf{v} - p_{\perp i} \mathbf{b} \mathbf{b} : \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{2} (\text{Tr}(\nabla \cdot \overline{\mathbf{q}_i}) - \mathbf{b} \mathbf{b} : \nabla \cdot \overline{\mathbf{q}_i}) \quad (\text{III.8.4})$$

$$\partial_t p_{\parallel i} + \nabla \cdot (p_{\parallel i} \mathbf{v}) + 2p_{\parallel i} \mathbf{b} \mathbf{b} : \nabla \mathbf{v} = -\mathbf{b} \mathbf{b} : \nabla \cdot \overline{\mathbf{q}_i} \quad (\text{III.8.5})$$

$$\partial_t p_{\perp e} + \nabla \cdot (p_{\perp e} \mathbf{v}_e) + p_{\perp e} \nabla \cdot \mathbf{v}_e - p_{\perp e} \mathbf{b} \mathbf{b} : \nabla \mathbf{v}_e = -\frac{1}{2} (\text{Tr}(\nabla \cdot \overline{\mathbf{q}_e}) - \mathbf{b} \mathbf{b} : \nabla \cdot \overline{\mathbf{q}_e}) \quad (\text{III.8.6})$$

$$\partial_t p_{\parallel e} + \nabla \cdot (p_{\parallel e} \mathbf{v}_e) + 2p_{\parallel e} \mathbf{b} \mathbf{b} : \nabla \mathbf{v}_e = -\mathbf{b} \mathbf{b} : \nabla \cdot \overline{\mathbf{q}_e} \quad (\text{III.8.7})$$

avec $\overline{\mathbf{P}_{i,e}} = \frac{\beta_0}{2} (p_{\perp i,e} \overline{\mathbf{I}} + (p_{\parallel i,e} - p_{\perp i,e}) \mathbf{b} \mathbf{b})$, les tenseurs gyrotropes de pression ionique (i) et électronique (e), $\mathbf{b} = \frac{\mathbf{B}}{|\mathbf{B}|}$, la direction du champ magnétique, $\frac{\beta_0}{2}$ constante provenant de la normalisation des équations, et $\mathbf{v}_e = \mathbf{v} - d_i \frac{\mathbf{j}}{\rho}$ la vitesse électronique. La fermeture est appliquée au niveau du quatrième moment (pour plus d'informations, voir les premières parties de PASSOT et SULEM 2007) présent dans les équations de $\overline{\mathbf{q}_i}$ et $\overline{\mathbf{q}_e}$. L'hypothèse de gyrotropie appliquée aux tenseurs de flux de chaleur implique (avec $s = i, e$) :

$$\begin{aligned} \mathbf{b} \mathbf{b} : \nabla \cdot \overline{\mathbf{q}_s} &\simeq \nabla \cdot (q_{\parallel s} \mathbf{b}) - 2q_{\perp s} \nabla \cdot \mathbf{b} \\ \frac{1}{2} (\text{Tr}(\nabla \cdot \overline{\mathbf{q}_s}) - \mathbf{b} \mathbf{b} : \nabla \cdot \overline{\mathbf{q}_s}) &\simeq \nabla \cdot (q_{\perp s} \mathbf{b}) + q_{\perp s} \nabla \cdot \mathbf{b} \end{aligned}$$

L'équation d'énergie interne peut être construite à partir des équations de pression (III.8.5), (III.8.4), (III.8.7), (III.8.6) et de la relation $\mathbf{v}_e = \mathbf{v} - d_i \frac{\mathbf{j}}{\rho}$:

$$\partial_t (\rho u) + \nabla \cdot (\rho u \mathbf{v} + \mathbf{q}) + (\overline{\mathbf{P}_i} + \overline{\mathbf{P}_e}) : \nabla \mathbf{v} = \frac{d_i}{2} \nabla \cdot \left(\text{Tr}(\overline{\mathbf{P}_e}) \frac{\mathbf{j}}{\rho} \right) + d_i \overline{\mathbf{P}_e} : \nabla \left(\frac{\mathbf{j}}{\rho} \right) \quad (\text{III.8.8})$$

sachant que $\rho u = \frac{\beta_0}{2} (p_{\perp i} + \frac{1}{2} p_{\parallel i} + p_{\perp e} + \frac{1}{2} p_{\parallel e})$ et avec $\mathbf{q} = \frac{\beta_0}{2} (q_{\perp i} + \frac{1}{2} q_{\parallel i} + q_{\perp e} + \frac{1}{2} q_{\parallel e}) \mathbf{b}$.

La loi exacte valable pour ce modèle a pour base (??) à laquelle on doit ajouter la correction Hall (??), la correction dépendant de la pression électronique (??) et la correction dépendant des flux de chaleur (??).

8.2 Etude préliminaire des simulations

Pour ces simulations, l'extraction d'échantillons de temps consécutifs n'a pas été fait. On ne fera donc pas apparaître le niveau ζ . Les paramètres initiaux associés à chaque simulation sont donnés dans les tables III.4.1 et III.4.2. Sur la première, sont indiqués les paramètres de forçage, la date d'extraction et les taux initiaux d'anisotropie de pression ionique et électronique. La seconde contient les paramètres d'hyperdissipation, dont ν_q la constante utilisée pour dissiper les flux de chaleur.

Contrairement aux simulations CGL, les taux d'anisotropie sont restés proches de 1, comme le montre le tableau III.8.1. Le diagramme $a_{pi} - \beta_{\parallel i}$ présenté sur la figure

Name	ρ	a_{pi}	$\beta_{\parallel i}$	a_{pe}	$\beta_{\parallel e}$
LF1	1 ± 0.02	1.04 ± 0.04	0.97 ± 0.06	1.01 ± 0.003	0.99 ± 0.07
LF2	1 ± 0.01	1.05 ± 0.03	0.97 ± 0.04	1.01 ± 0.006	0.98 ± 0.05
LF3	1 ± 0.08	1.52 ± 0.31	0.84 ± 0.30	0.96 ± 0.04	1.10 ± 0.42
LF4	1 ± 0.02	1.07 ± 0.05	0.94 ± 0.07	1.07 ± 0.02	0.92 ± 0.05

TABLE III.8.1 – Moyenne et écart-type de la densité, du taux d'anisotropie ionique $a_{pi} = \frac{p_{\perp i}}{p_{\parallel i}}$ et électronique $a_{pe} = \frac{p_{\perp e}}{p_{\parallel e}}$ et des paramètres $\beta_{\parallel i} = \frac{p_{\parallel i}}{p_m}$ et $\beta_{\parallel e} = \frac{p_{\parallel e}}{p_m}$ pour chaque simulation, à la date D .

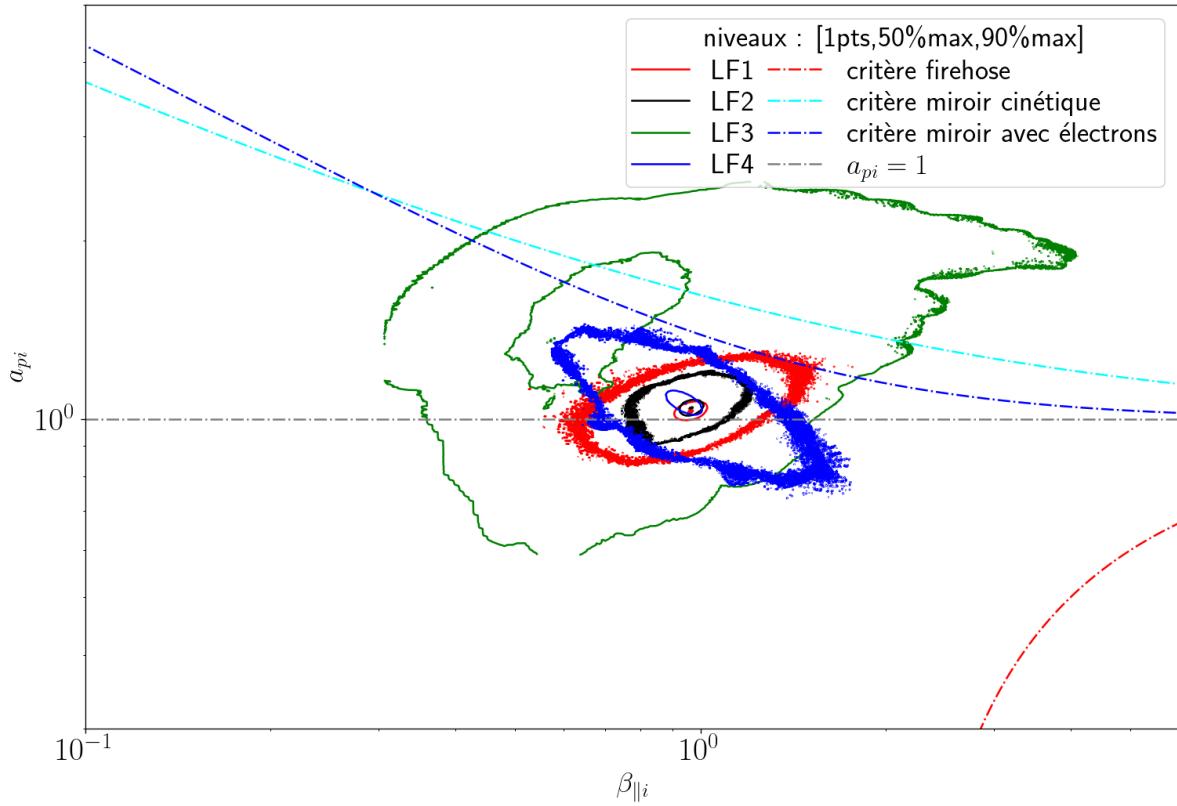


FIGURE III.8.1 – Diagramme $a_{pi} - \beta_{\parallel i}$ contenant l'histogramme 2D des simulations sous la forme de courbes de niveau centrées sur le couple moyen. Les courbes discontinues correspondent aux critères d'instabilité. Le critère firehose (rouge) est le critère CGL calculé dans le chapitre II.?? et valable dans les modèles cinétique HUNANA *et al.* 2019. En cyan : critère miroir cinétique (sans prise en compte de la pression électronique) HUNANA *et al.* 2019. En bleu : critère miroir proposé par **kuznetsov_mirror_2012**, prenant en compte les électrons gyrotropes et calculé avec $a_{pe0} = 1$ et $\beta_{\parallel e0} = 1$.

FIGURE III.8.1 contient les histogrammes 2D associés à chaque simulation. On remarque l'ampleur de l'étalement de LF3 par comparaisons avec les autres simulations. Plu d'un

tiers des points du cube de données associés sont situés dans la zone du diagramme située du côté instable du critère miroir. Deux critères miroirs sont donnés. Le premier en cyan correspond au critère cinétique obtenue en corrigeant le facteur 6 du critère CGL [HUNANA *et al.* 2019]. Le second, en bleu, est aussi un critère miroir cinétique mais prenant en compte l'anisotropie de pression électronique. Ce critère est dérivé dans l'article **kuznetsov_mirror_2012**. Il est ici représenté en considérant $a_{pe} = 1$ et $\beta_{\parallel e} = 1$.

Les simulations LF pourraient donc permettre une étude fine de l'impact des instabilités cinétiques sur la cascade turbulente. Mais, nous avons d'abord cherché à retrouver les résultats de FERRAND, SAHRAOUI, LAVEDER *et al.* 2021.

spectres

8.3 Vérification des conclusions apportées par FERRAND, SAHRAOUI, LAVEDER *et al.* 2021 sur l'impact de la fermeture Landau-fluide

L'une des questions que nous nous sommes posés est : est-ce que l'on retrouve la décroissance associée au flux de chaleur par FERRAND, SAHRAOUI, LAVEDER *et al.* 2021 ? D'après cet article, cette décroissance est peu visible avec LF1 et intervient autour de $\ell = d_i$. On a donc calculé le taux de cascade dans LF2 et LF3 avec et sans la contribution du flux de chaleur. Les résultats sont montrés sur la figure FIGURE III.8.2. On remarque que la contribution du flux de chaleur est négligeable même aux plus petites échelles. On ne retrouve donc pas la décroissance observée en allant vers les petites échelles.

La loi exacte la plus proche de la loi incompressible observée par FERRAND, SAHRAOUI, LAVEDER *et al.* 2021, correspond à la loi Hall-MHD (HMHD) en y prenant en compte les contributions isotropes des tenseurs de pression ionique et électronique, mais pas le terme de pression électronique dans la loi d'Ohm. Ce taux de cascade est représenté en bleu sur la figure FIGURE III.8.3. On retrouve bien le résultat de FERRAND, SAHRAOUI, LAVEDER *et al.* 2021 avec la décroissance en allant vers les petites échelles.

Sur la figure ??, on ajoute une à une les différentes contributions, afin d'identifier les sources principales de différences entre $\varepsilon|\nabla \cdot \mathbf{q}|$ (bleu) et ε_{HMHD} (orange). Tout d'abord, on prend en compte l'anisotropie de pression des ions et des électrons (en gardant une loi d'Ohm Hall-MHD), le résultat correspond à la courbe verte. Le niveau du taux de cascade commence à s'affaisser aux échelles les plus faibles et à augmenter près des échelles de forçage. Ces ajouts sont dominés par la pression ionique.

Ensuite, on ajoute la contribution de la pression électronique isotrope de la loi d'Ohm, cela donne la courbe rouge. Le résultat est alors très proche du résultat voulu. L'apport de la composante anisotrope des tenseurs de pression dans ce terme (résultat cyan) s'avère faible.

Contrairement à l'analyse de FERRAND, SAHRAOUI, LAVEDER *et al.* 2021, qui conclue en comblant la décroissance du taux de cascade par une estimation d'un taux de dissipation dû à l'amortissement Landau, on observe plutôt un affaissement du niveau du taux dû à la prise en compte de l'anisotropie de pression ionique ainsi que du tenseur de pression électronique dans l'équation d'induction. Ces résultats obtenus très récemment viennent questionner la méthode d'obtention du taux de dissipation par effet Landau utilisée dans le papier FERRAND, SAHRAOUI, LAVEDER *et al.* 2021.

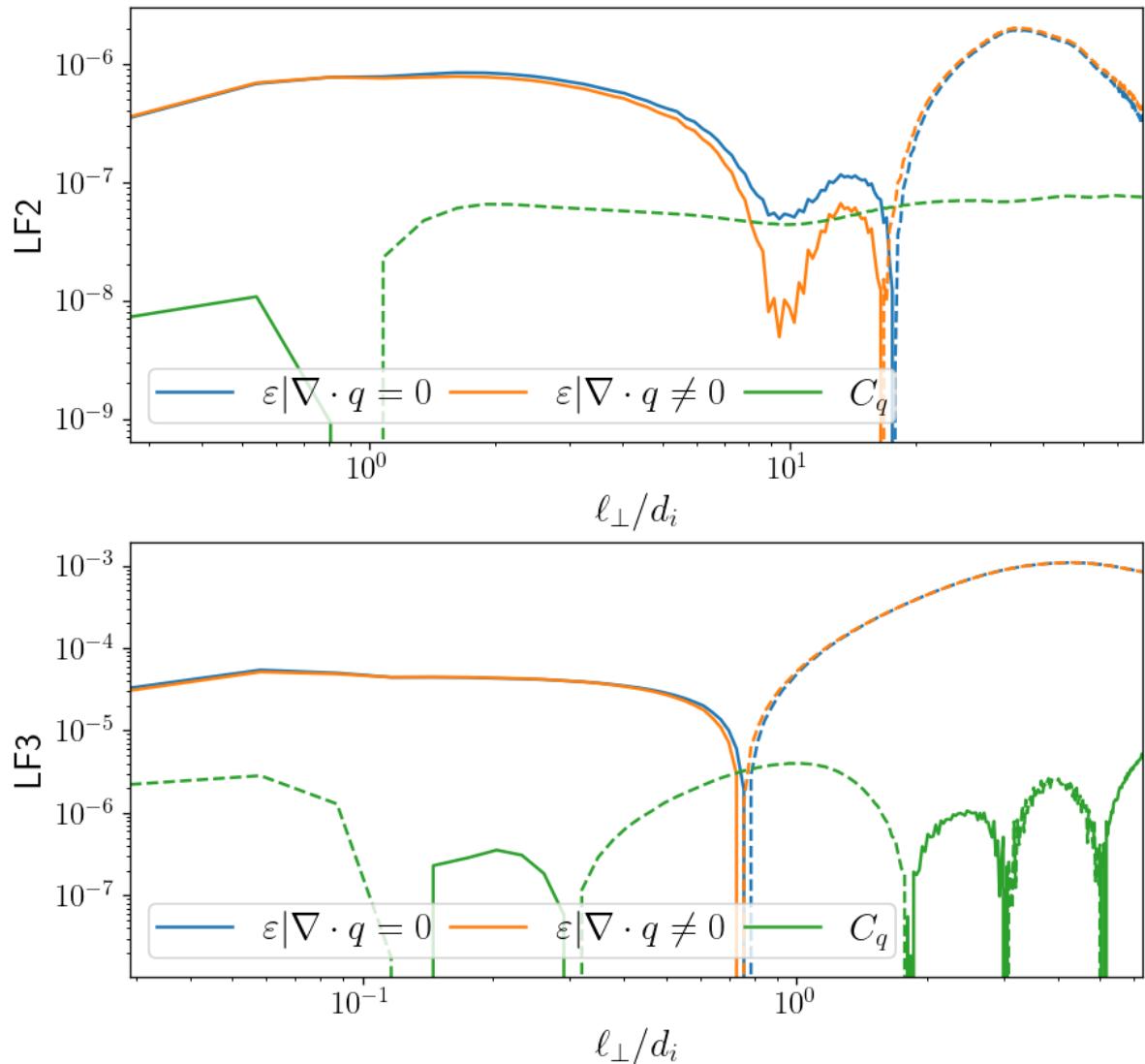


FIGURE III.8.2 – Taux de cascade calculé en prenant en compte la contribution de flux de chaleur et en l’omettant.

8.4 Synthèse d'une page

spécificités et observations

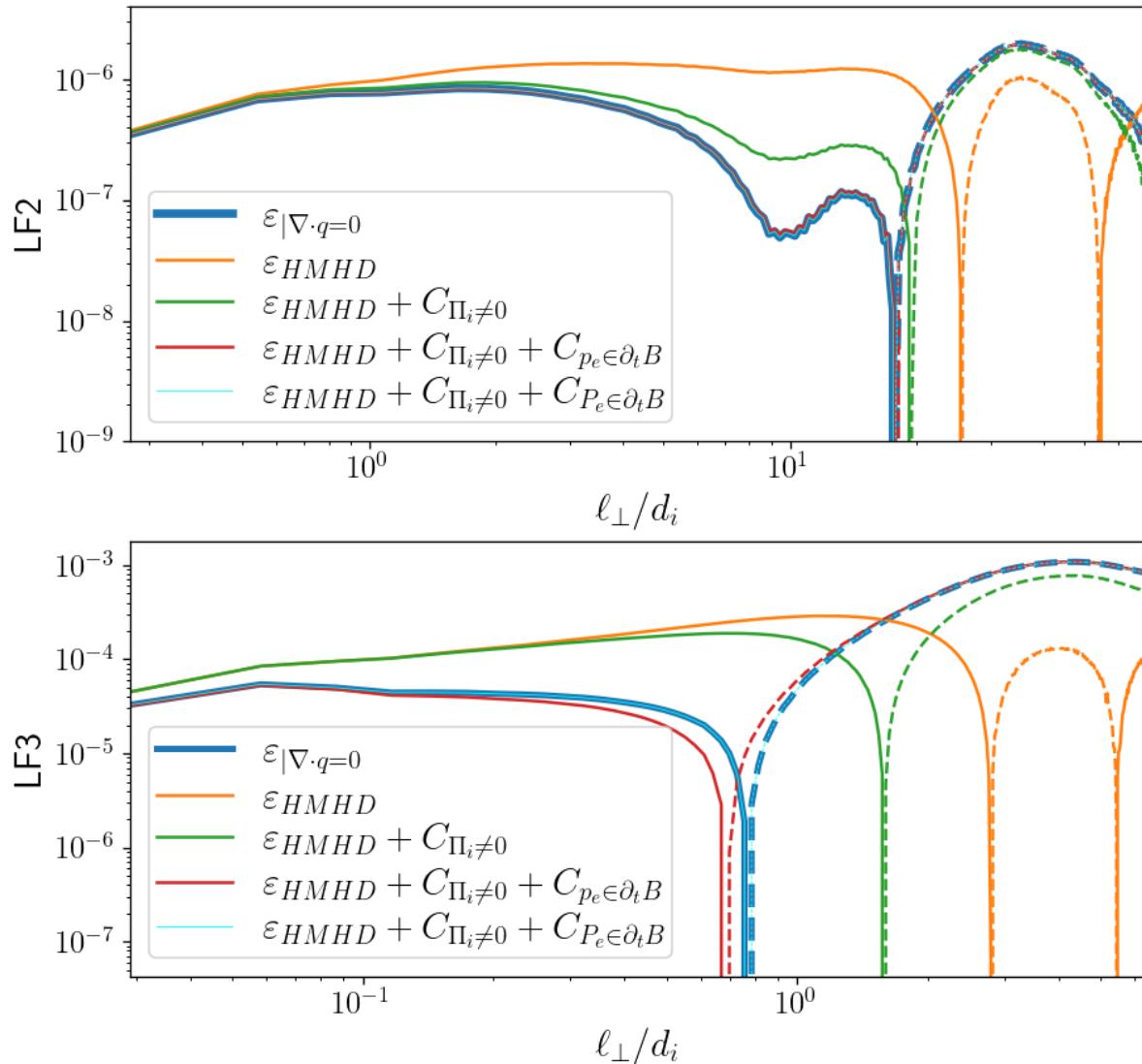


FIGURE III.8.3 – Taux de cascade calculé en prenant en compte la contribution de flux de chaleur et en l’omettant.