
INTRODUCTION : La turbulence dans les plasmas astrophysique

I have never thought that you could obtain the extremely clumpy, heterogeneous universe we have today, strongly affected by plasma processes, from the smooth, homogeneous one of the Big Bang, dominated by gravitation.

Hannes ALFVÈN, un des pères de la physique des plasmas spatiaux.

INTRODUCTION : CHAPITRE 1

L QU'EST-CE QUE LA TURBULENCE ? LA DESCRIPTION HYDRODYNAMIQUE DE KOLMOGOROV

Sommaire

1.1	Définition et propriétés d'un écoulement turbulent	3
1.2	Description statistique et notations pour l'étude d'un système turbulent	6
1.3	Théorie de Kolmogorov et invariance d'échelle	8

Quand on parle de turbulence, la première image qui résonne dans notre esprit est un écoulement semblant chaotique, des secousses dans un avion ou un enfant qui n'en fait qu'à sa tête. Les propriétés partagées par ces trois exemples sont l'agitation, l'apparent désordre, l'imprévisibilité. Mais ce n'est qu'apparence, contrairement au pur chaos, ce comportement est statistiquement prévisible et peut montrer un semblant d'ordre. Dans ce chapitre, sont résumés des notions, notations et outils permettant de caractériser et prédire le comportement d'un écoulement turbulent.

1.1 Définition et propriétés d'un écoulement turbulent

Supposons l'écoulement incompressible, c'est-à-dire un fluide de densité constante ρ_0 . L'hypothèse incompressible impose aussi une contrainte sur la vitesse de l'écoulement, le champ vectoriel $\mathbf{v}(t, \mathbf{x})$ dépendant du temps t et de la position \mathbf{x} , : l'annulation de la divergence de la vitesse, c'est-à-dire, mathématiquement, en notant $\nabla = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}$, l'opérateur de dérivation spatiale, $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$.

Un écoulement hydrodynamique incompressible est un système modélisé par l'équation de Navier-Stokes :

$$\partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla P + \nu \Delta \mathbf{v}. \quad (.1.1)$$

Le premier terme, $\partial_t \mathbf{v}$, indique que cette équation est celle de l'évolution temporelle, $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$ étant la dérivée partielle temporelle, de la vitesse de l'écoulement \mathbf{v} . Le deuxième terme, $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$, implique un déplacement convectif du champ de vitesse à la vitesse de l'écoulement. Ce terme cristallise les non-linéarité du système. Dimensionnellement, on peut le schématiser par $C_{NL} = \frac{V^2}{L}$ avec V la vitesse caractéristique de l'écoulement et L

sa largeur caractéristique. Le terme $-\frac{1}{\rho_0} \nabla P$ avec P la pression du fluide est, dans le cas incompressible, un terme linéaire, dénotant les forces de pressions impliquées dans l'écoulement. Le dernier terme, $\nu \Delta \mathbf{v}$, est un terme dissipatif, d'effort visqueux. Il dépend de ν , la viscosité du fluide, et de $\Delta = \nabla^2$, l'opérateur Laplacien. Ce terme vient contrebalancer le terme non-linéaire et, s'il domine, rend l'écoulement laminaire. On peut le schématiser tel que $C_D = \nu \frac{V}{L^2}$.

Le rapport entre C_{NL} et C_D est le nombre de Reynolds $R_e = \frac{C_{NL}}{C_D} = \frac{VL}{\nu}$, un nombre sans dimension caractérisant le régime de l'écoulement, laminaire (s'il est faible) ou turbulent. Ces régimes sont illustrés sur la figure .1.1. Dans cette expérience, un jet d'eau (blanc) est injecté dans de l'eau stagnante (espace noir). A gauche, sa largeur caractéristique est imposée par le diamètre du tuyau d'injection, l'écoulement est alors dans un régime laminaire. Ensuite la turbulence se développe (régime transitoire), il y a apparition de tourbillons (vortex) dans l'écoulement. Enfin, tout à droite, la turbulence est pleinement développée, les non-linéarités dominent et s'entretiennent.

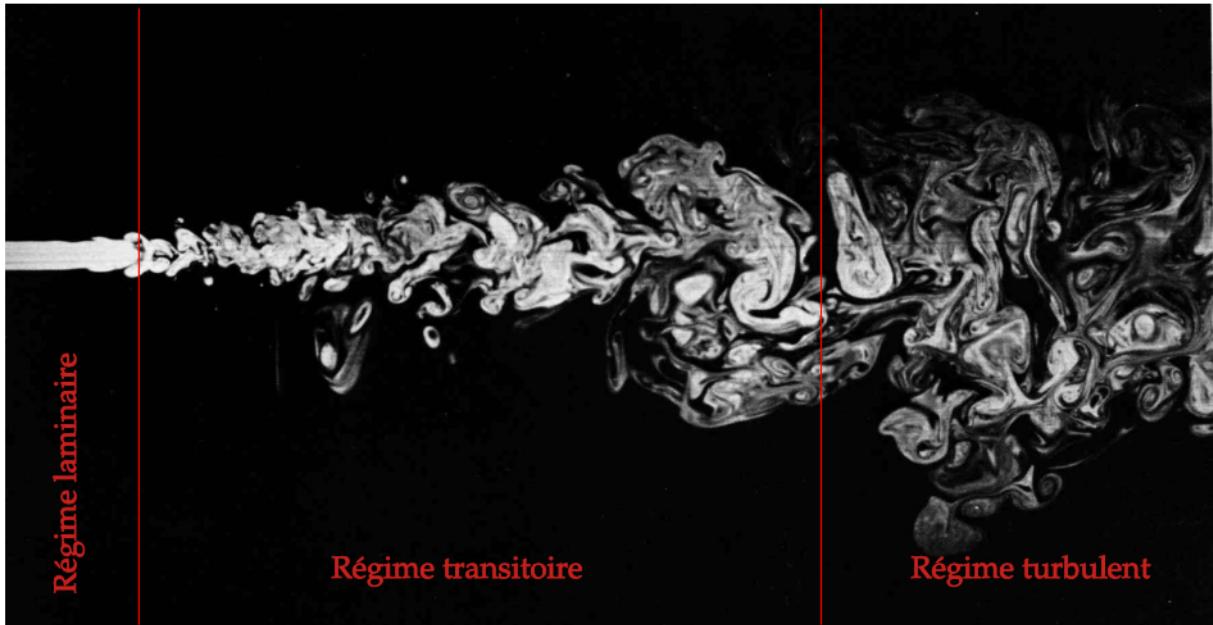


FIGURE .1.1 – Injection d'un jet d'eau dans de l'eau observée par fluorescence laser et illustrant les différents régimes d'un écoulement : laminaire, transitoire et turbulent. Crédits de l'image initiale : [van_dyke_album_1982](#).

Dans le cadre hydrodynamique incompressible, l'écoulement n'est décrit que par le champ de vitesse mais pour d'autres fluides, la description peut impliquer d'autres champs tel que le champ magnétique \mathbf{B} ou les champs scalaires thermique T ou massique ρ . On peut définir un nombre sans dimension similaire au nombre de Reynolds, rapport entre le terme non-linéaire convectif et le terme diffusif ou dissipatif impliqués dans l'évolution temporel de ce champ. Dans le cas d'un champ magnétique, ce sera le nombre de Reynolds magnétique $R_m = \frac{VL}{\eta}$ avec η la résistivité ou diffusivité magnétique et pour les champs thermique et massique, les nombres dit de Péclet, rapports entre le transfert non-linéaire par convection et les transferts par, respectivement, conduction ou diffusion.

Sur la figure .1.2, sont présentés des résultats d'une simulation turbulente tridimensionnelle qui sera introduite et utilisée dans la partie ???. L'image (a) correspond à une coupe du cube de densité ρ telle que $z = 323$ obtenue à la date $t = 410$. Si on la compare

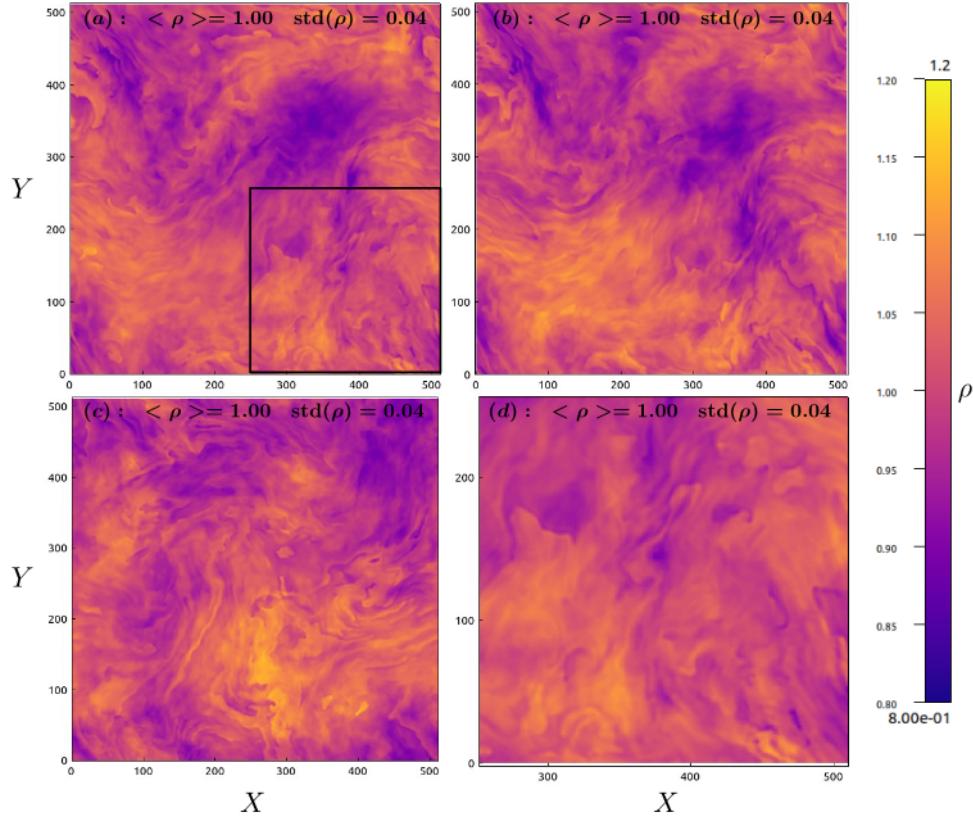


FIGURE .1.2 – Résultat de simulations tridimensionnelles turbulentes (ces simulations seront introduites et analysées dans la partie ??). La quantité représentée est la densité ρ . Chaque image correspond à une coupe $X - Y$ du cube $X - Y - Z$ obtenu au temps T . (a) : $Z = 323$, $T = 410$. (b) : $Z = 323$, $T = 408$. (c) : $Z = 638$, $T = 410$. (d) : zoom de (a). Pour chaque image, la moyenne spatiale est de 1.00 et la déviation standard de 0.04.

à l'image (c) (autre coupe du même cube telle que $z = 638$), on remarque une certaine invariance spatiale statistique qui illustre la propriété d'homogénéité dite statistique d'un fluide turbulent. Si par contre, on la compare à l'image (b) (coupe $z = 323$ obtenue à la date $t = 408$), on retrouve similairement une certaine invariance temporelle qui vient illustrer la propriété de stationnarité statistique du fluide. Et en comparant avec l'image (d) (un zoom de l'image (a)), on observe ce qui semble être une invariance statistique d'échelle.

Un écoulement ou un fluide turbulent serait donc caractérisé par

- une dominance des non-linéarité sur les contributions diffusives (nombres de Reynolds et de Péclet infinis),
- des propriétés d'invariance (homogénéité, stationnarité, d'échelles) au sens statistique.

Dans la section 1.2, on va définir les notations et appellations liées aux notions mathématiques statistiques et dans la section 1.3, on abordera un peu plus en détail la description de la turbulence à travers les échelles.

1.2 Description statistique et notations pour l'étude d'un système turbulent

Afin de garder la description du travail présenté dans ce mémoire accessible à tous, nous ne nous perdrons pas dans des définitions mathématiques complexes et exhaustives des notions, mais resterons sur des définitions exemplifiées et plus appliquées.

Dans l'ensemble de ce mémoire, on se placera dans le cadre tridimensionnel (3D). Sauf quantités indéfinies, les grandeurs vectorielles seront notées en gras. Le système de représentation spatial sera génériquement cartésien $\{x, y, z\}$, sauf mention contraire.

Soit une quantité indéfinie X (position, vitesse, masse, etc.) caractérisant un fluide. La distribution de valeurs possibles pour X , ou distribution de probabilité de X notée \mathcal{P}_X , peut être obtenue en considérant différents points de vue :

- PV1 : Décrire le fluide comme un ensemble de N particules (atomes, molécules, etc.) associée individuellement à une valeur de la quantité X , notée X_n avec $n \in [1; N]$.
- PV2 : Regarder l'espace occupé par le fluide : un volume continu V ou un nombre de points d'emplacement \mathbf{x} . La quantité X sera alors évaluée en chacun d'eux et notée $X(\mathbf{x})$.
- PV3 : Ne considérer qu'une particule ou qu'un point, regarder les valeurs de X au fil du temps, sur une période T et les noter $X(t)$.

Ces différents points de vue ne sont pas forcément équivalents. Par exemple, si l'on regarde plusieurs types de particules et que les valeurs de X dépendent de leur nature, ne regarder qu'une particule au fil du temps ne sera pas représentatif du système.

Pour caractériser la distribution de probabilité de X , on peut utiliser divers outils statistiques. L'un d'eux est la moyenne (moment d'ordre 0), une opération linéaire que l'on va noter $\langle X \rangle$ et définie en fonction des points de vue :

- PV1 : $\langle X \rangle_N = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N X_n$, c'est la moyenne d'ensemble définie de manière discrète.
- PV2 : $\langle X \rangle_V = \frac{1}{V} \int_V X(\mathbf{x}) \mathcal{P}_X d\mathbf{x}$, c'est la définition continue de la moyenne spatiale. $\langle X \rangle_{PV2}$ est indépendant de la position locale \mathbf{x} . Dans le cas discret, en considérant un échantillonnage spatial, c'est-à-dire N_V points dans le volume V , et en notant X_p la valeur de X au point p , $\langle X \rangle_V = \frac{1}{N_V} \sum_{p=1}^{N_V} X_p$.
- PV3 : $\langle X \rangle_T = \frac{1}{T} \int_0^T X(t) \mathcal{P}_X dt$, c'est la définition continue de la moyenne temporelle. $\langle X \rangle_{PV3}$ est indépendant de l'instant t . Une moyenne discrète peut aussi être définie en considérant un échantillonnage temporel.

Si $\langle X \rangle_N = \langle X \rangle_V = \langle X \rangle_T$, on peut supposer une équivalence des différents points de vue que l'on peut qualifier de moyenne, de statistique ou de globale. Le système sera alors ergodique.

On peut définir plus rigoureusement les propriétés d'homogénéité et de stationnarité statistiques à l'aide de \mathcal{P}_X :

- **homogénéité statistique** : soit deux échantillons représentatifs du système et définis relativement à deux positions indépendantes l'une de l'autre \mathbf{x} et \mathbf{x}' alors $\mathcal{P}_X(\mathbf{x}) = \mathcal{P}_X(\mathbf{x}') = \mathcal{P}_X$ ce qui implique pour la moyenne $\langle X \rangle(\mathbf{x}) = \langle X \rangle(\mathbf{x}') = \langle X \rangle$,
- **stationnarité statistique** : soit deux échantillons représentatifs du système et définis relativement à deux instants indépendants l'un de l'autre t et t' alors $\mathcal{P}_X(t) = \mathcal{P}_X(t') = \mathcal{P}_X$ ce qui implique pour la moyenne $\langle X \rangle(t) = \langle X \rangle(t') = \langle X \rangle$.

Attention, cela ne signifie pas que localement, entre deux instants t ou deux positions \mathbf{x} , X sera invariant. En pratique, dans des données d'observations ou de simulations, des échantillons dans lesquels ces hypothèses seraient parfaitement valides sont difficiles à

obtenir. Des compromis devront donc être établis.

Similairement aux définitions des propriétés d'homogénéité et de stationnarité statistiques, pour étudier un fluide turbulent, on doit relier le comportement statistique de deux échantillons ou plus, c'est-à-dire que l'on doit s'intéresser aux fluctuations, incrément de quantités et corrélations entre au moins deux échantillons. Ce lien peut s'exprimer en fonction de la distance temporelle ou spatiale entre ces échantillons, généralement appelée «échelle». En 1941, Kolmogorov pose les bases d'une théorie permettant d'obtenir une telle relation, la théorie des lois exactes de Kolmogorov (FRISCH 1995). Cette théorie repose sur les hypothèses que nous avons illustrées dans la section 1.1 (dominance des effets non-linéaires, homogénéité et stationnarité statistiques) ainsi que sur une hypothèse plus spécifique de séparation d'échelles qui sera expliquée dans la section 1.3.

Le travail décrit dans ce mémoire est basé sur cette théorie et implique les notations suivantes. On considérera deux échantillons définis relativement à deux positions¹ indépendantes l'une de l'autre, \mathbf{x} et \mathbf{x}' . La quantité indéfinie X évaluée en \mathbf{x}' sera notée X' et celle évaluée en \mathbf{x} , X . L'échelle, notée $\boldsymbol{\ell}$ sera définie comme l'incrément de position :

$$\boldsymbol{\ell} = \delta\mathbf{x} = \mathbf{x}' - \mathbf{x} \quad (1.2)$$

avec δ dénotant le caractère incrémentale de la quantité (ici la position). L'incrément de la quantité indéfinie X s'écrirait :

$$\delta X = X' - X = X(\mathbf{x}') - X(\mathbf{x}). \quad (1.3)$$

Le lien étudié entre les deux échantillons sera une fonction de corrélation entre deux quantités X et Y (ici indéfinies) qui s'obtient en considérant une quantité au point \mathbf{x} et l'autre au point \mathbf{x}' , en les multipliant puis en moyennant. Afin de conserver une symétrie du rôle de \mathbf{x} et \mathbf{x}' , on définira la fonction de corrélation telle que

$$\mathcal{R}_{XY} = \frac{1}{2} \langle X \cdot Y' + X' \cdot Y \rangle \quad (1.4)$$

en notant \cdot l'opération générique multiplicative. Entre deux vecteurs, cette opération pourrait être considérée comme un produit scalaire ou remplacée par un produit vectoriel noté \times . La fonction d'auto-corrélation est définie telle que $\mathcal{R}_{XX} = \langle X \cdot X' \rangle$. La moyenne $\langle \rangle$ impliquée dans ces fonctions est la moyenne spatiale. \mathcal{R}_{XY} sera donc indépendant de \mathbf{x} et \mathbf{x}' et ne dépendra que de $\boldsymbol{\ell}$ et a priori de t si les quantités dépendent du temps.

Par indépendance entre le temps et la position, la moyenne spatiale commute avec la dérivée temporelle :

$$\partial_t \langle X \rangle = \langle \partial_t X \rangle. \quad (1.5)$$

On note $\nabla_{\boldsymbol{\ell}} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\ell}}$ l'opérateur de dérivation spatiale dans l'espace global des échelles, ∇ et ∇' les opérateurs de dérivation locaux respectivement en \mathbf{x} et \mathbf{x}' . L'indépendance entre \mathbf{x} et \mathbf{x}' , implique que :

$$\nabla X' = 0 \quad \nabla' X = 0. \quad (1.6)$$

1. Il est possible de corrélérer plus de deux points, mais ce ne sera pas un sujet de ce mémoire. Tout lecteur intéressé pourra se référer à CHO et LAZARIAN 2009.

Grâce à l'hypothèse d'homogénéité statistique, ces opérateurs dérivatifs sont liés² tels que

$$\nabla_{\boldsymbol{\ell}} \langle \cdot \rangle = \langle \nabla' \cdot \rangle = - \langle \nabla \cdot \rangle. \quad (.1.7)$$

Ces notations et hypothèses seront utilisées tout au long de ce mémoire. Pour se familiariser avec leur utilisation, une application de la théorie de Kolmogorov avec ces notations, à un écoulement hydrodynamique incompressible décrit par l'équation de Navier-Stockes (.1.1) est donné dans la section 1.3. Cette application va nous servir à introduire la notion d'invariance d'échelle et l'hypothèse de séparation d'échelles.

1.3 Théorie de Kolmogorov et invariance d'échelle

La démonstration donnée ici est une version plus récente de la démonstration de Kolmogorov de 1941 (KOLMOGOROV 1941) issue de FRISCH 1995; GALTIER 2021. Pour faciliter les étapes de calcul, on va réécrire l'équation de Navier-Stockes (.1.1) grâce à l'hypothèse incompressible $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$:

$$\partial_t \mathbf{v} = -\nabla \cdot (\mathbf{v}\mathbf{v}) - \frac{1}{\rho_0} \nabla P + \nu \Delta \mathbf{v}. \quad (.1.8)$$

Elle se base sur la recherche d'une équation d'évolution temporelle pour la fonction d'autocorrélation $\mathcal{R}_{vv} = \langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}' \rangle$. Pour l'obtenir, on dérive temporellement \mathcal{R}_{vv} grâce à la propriété (.1.5) (étape (.1.9)), on injecte l'équation de Navier-Stockes (.1.1) (étape (.1.10)) puis on applique les propriétés (.1.6) et (.1.7) pour extraire les opérateurs dérivatifs spatiaux de la moyenne spatiale (étape (.1.11)) :

$$\partial_t \mathcal{R}_{vv} = \langle \mathbf{v} \cdot \partial_t \mathbf{v}' + \mathbf{v}' \cdot \partial_t \mathbf{v} \rangle \quad (.1.9)$$

$$= -\langle \mathbf{v} \cdot \nabla' \cdot (\mathbf{v}' \mathbf{v}') + \mathbf{v}' \cdot \nabla \cdot (\mathbf{v} \mathbf{v}) \rangle - \frac{1}{\rho_0} \langle \mathbf{v} \cdot \nabla' P' + \mathbf{v}' \cdot \nabla P \rangle \\ + \nu \langle \mathbf{v} \cdot \Delta' \mathbf{v}' + \mathbf{v}' \cdot \Delta \mathbf{v} \rangle \quad (.1.10)$$

$$= \nabla_{\boldsymbol{\ell}} \cdot \langle -\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}' \mathbf{v}' + \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v} \mathbf{v} \rangle + \frac{1}{\rho_0} \nabla_{\boldsymbol{\ell}} \cdot \langle -P' \mathbf{v} + P \mathbf{v}' \rangle \\ + 2\nu \Delta_{\boldsymbol{\ell}} \langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}' \rangle \quad (.1.11)$$

Avec l'hypothèse incompressible et celle d'homogénéité statistique (propriétés (.1.6) et (.1.7)), $\nabla_{\boldsymbol{\ell}} \cdot \langle -P' \mathbf{v} + P \mathbf{v}' \rangle = 0$ et $\nabla_{\boldsymbol{\ell}} \cdot \langle -\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}' \mathbf{v}' + \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v} \mathbf{v} \rangle = \frac{1}{2} \nabla_{\boldsymbol{\ell}} \cdot \langle \delta \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v} \delta \mathbf{v} \rangle$. D'où l'équation dite de Karman-Howartz :

$$\partial_t \mathcal{R}_{vv} = \frac{1}{4} \nabla_{\boldsymbol{\ell}} \cdot \langle \delta \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v} \delta \mathbf{v} \rangle + 2\nu \Delta_{\boldsymbol{\ell}} \mathcal{R}_{vv}. \quad (.1.12)$$

L'hypothèse de stationnarité statistique vient annuler le terme de gauche, ainsi :

$$\nu \Delta_{\boldsymbol{\ell}} \mathcal{R}_{vv} = -\frac{1}{2} \nabla_{\boldsymbol{\ell}} \cdot \langle \delta \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v} \delta \mathbf{v} \rangle. \quad (.1.13)$$

2. Soit A , B et C des quantités indéfinies telles que $A(\boldsymbol{\ell}) = \langle B \cdot C' \rangle = \langle B(\mathbf{x}) \cdot C(\mathbf{x}') \rangle$ avec \cdot une opération multiplicative quelconque et $\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \boldsymbol{\ell}$.

A \mathbf{x} fixé, $\partial \mathbf{x}' = \partial \boldsymbol{\ell}$ et $\nabla_{\boldsymbol{\ell}} A(\boldsymbol{\ell}) = \left\langle \frac{\partial(B \cdot C')}{\partial \boldsymbol{\ell}} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial(B \cdot C')}{\partial \mathbf{x}'} \right\rangle = \langle \nabla'(B \cdot C') \rangle$. D'où la relation entre les opérateurs : $\nabla_{\boldsymbol{\ell}} \langle \cdot \rangle = \langle \nabla' \cdot \rangle$. Similairement, à \mathbf{x}' fixé, $\partial \mathbf{x} = -\partial \boldsymbol{\ell}$, d'où $\nabla_{\boldsymbol{\ell}} \langle \cdot \rangle = -\langle \nabla \cdot \rangle$.

Maintenant, on peut appliquer l'hypothèse de grand nombre de Reynolds qui fait tendre ν vers 0. Mais on doit prendre quelques précautions. En effet, une propriété fondamentale de la turbulence, la loi «zéroième», implique que lorsque ν tend vers 0, l'énergie dissipée moyenne, que l'on peut écrire $\nu \Delta_\ell \mathcal{R}_{vv} (\ell = 0)$, devient indépendante de ν et ne s'annule pas. Cette singularité, aussi appelée anomalie dissipative, est définie globalement et peut être généralisée à $\ell \neq 0$. On peut donc définir un taux de dissipation ε tel que $\nu \Delta_\ell \mathcal{R}_{vv} \xrightarrow[\nu \rightarrow 0]{} \frac{\varepsilon}{\rho_0} \neq 0$.

Ainsi, on obtient la loi exacte de Kolmogorov (version dérivée) :

$$\frac{\varepsilon}{\rho_0} = -\frac{1}{4} \nabla_\ell \cdot \langle \delta \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v} \delta \mathbf{v} \rangle. \quad (.1.14)$$

Cette loi est valable dans une zone d'échelles dite inertielles où le comportement du fluide est supposé complètement non-linéaire ($R_e \rightarrow \infty$ et $\nu \rightarrow 0$). $\nabla_\ell \cdot \langle \delta \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v} \delta \mathbf{v} \rangle$ peut s'interpréter comme le transfert entre les échelles de l'énergie incrémentale $\frac{1}{4} \langle \delta \mathbf{v}^2 \rangle$ c'est-à-dire une cascade d'énergie à un taux ε constant. *On retiendra donc comme dernière hypothèse de Kolmogorov la séparation d'échelles qui permet de définir une zone d'échelles dite inertielles où l'énergie cascade conservativement (pas de dissipation, $\nu \rightarrow 0$) à un taux ε constant.*³

Une autre hypothèse, communément appliquée en hydrodynamique, a été prise en compte par Kolmogorov, celle d'isotropie statistique. Elle permet d'obtenir une forme intégrée de la loi exacte. L'isotropie statistique implique une invariance angulaire sphérique. $\varepsilon(\ell)$ ne dépendra alors que du module de ℓ , noté ℓ . Dans un système de représentation sphérique, on peut intégrer sur une boule de rayon ℓ la loi (.1.14) sachant que, dans la zone inertielles, ε est constant. Ainsi, en notant $v_\ell = \mathbf{v} \cdot \ell$, :

$$-\frac{4}{3} \frac{\varepsilon}{\rho_0} \ell = \langle |\delta \mathbf{v}|^2 \delta v_\ell \rangle. \quad (.1.15)$$

Une autre méthode est communément utilisée pour étudier la cascade turbulente : la transformée de Fourier. Cette méthode permet de travailler dans un espace inverse où la position est repérée par $\mathbf{k} \propto 1/\mathbf{x}$ et où toute quantité se retrouve décomposée en une série de «modes». Dans le cas continu 3D, on définit la transformée de Fourier de la quantité X par

$$\tilde{X}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint X(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x} \quad (.1.16)$$

et la transformée inverse par

$$X(\mathbf{x}) = \iiint \tilde{X}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{k}. \quad (.1.17)$$

On remarque qu'en termes de dimensions, si l'on note $[X]$, l'unité de X et L , l'unité de longueur, $\tilde{X} \sim [X]L^3$.

Dans le cas continu 1D, on aura similairement :

$$\tilde{X}(k) = \frac{1}{2\pi} \int X(x) e^{-ikx} dx \quad X(x) = \int \tilde{X}(k) e^{ikx} dk \quad (.1.18)$$

3. Une variante de cette hypothèse et de cette démonstration, prenant en compte l'existence potentielle d'une source de forçage dans l'équation d'énergie sera introduite dans le chapitre I.3.

et en termes de dimensions, $\tilde{X} \sim [X]L$.

Phénoménologiquement, par analyse dimensionnelle, la loi exacte (.1.15) s'écrit $(\delta v)^3 \sim \ell$ d'où $E(\ell) \sim (\delta v)^2 \sim \ell^{2/3}$. En passant dans l'espace de Fourier, sachant que le cas l'on se place dans un cas 1D, $\ell \rightarrow 1/k$ et $E(\ell) \rightarrow kE(k)$ d'où

$$E(k) \sim k^{-5/3}. \quad (.1.19)$$

En représentation logarithmique : $\log E(k) = -5/3 \log k + C$ avec C une constante. Ainsi, la théorie de Kolmogorov nous permet de prédire, dans le cas isotrope, un spectre d'énergie cinétique, $E(k)$ de pente $-5/3$ en représentation logarithmique. Malgré son caractère phénoménologique, cette prédition est très bien retrouvée sur plusieurs ordres de grandeurs, par exemple dans le cadre expérimental (voir figure .1.3).

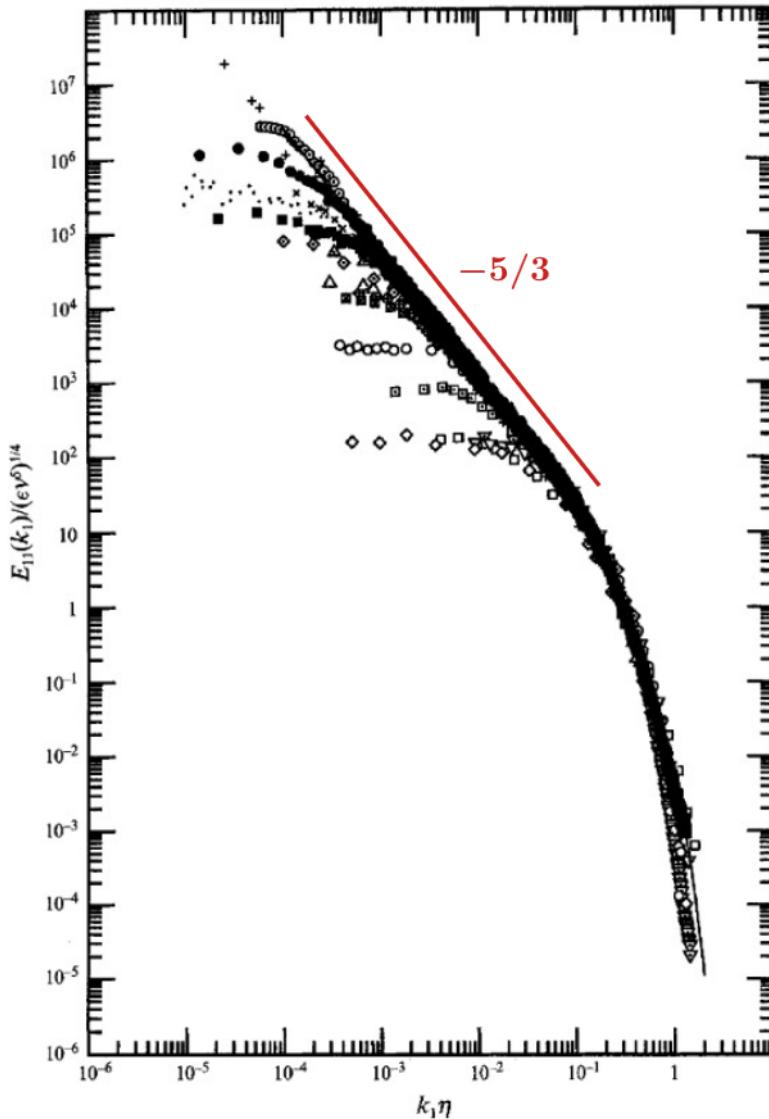


FIGURE .1.3 – Compilations de spectres obtenus dans diverses expériences de laboratoire. Tous ces spectres sont cohérents avec la pente en $-5/3$ prédictie grâce à la théorie de Kolmogorov. Crédits : [saddoughi_local_1994](#).

Un spectre de la forme $E(k) = Ck^\gamma$ avec C et γ constants, qui en représentation

logarithmique s'écrit $\log E(k) = \gamma \log k + C$, est typique d'une invariance mathématique dite d'échelle que l'on peut retrouver dans de multiples systèmes mathématiques et physiques. En physique, une invariance d'échelle ne va avoir lieu que sur une gamme d'échelle dédiée, limitée par la taille du système et l'émergence de phénomènes diffusifs à petites échelles, càd. petits ℓ ou grand k . Dans les études spectrales de la turbulence, cette gamme d'échelles est souvent confondue avec la zone inertie. Cette définition spectrale de la zone inertie n'est pas aussi contraignante que la définition statistique via un taux ε constant. En effet, le système vérifiera plus facilement la définition spectrale que la définition statistique car $E(k)$ est d'ordre 2 ($\propto (\delta v)^2$) alors que ε est d'ordre 3 ($\propto (\delta v)^3$). Autrement dit, observer une pente $-5/3$ de type Kolmogorov ne sera pas forcément synonyme d'un régime de turbulence complètement développée défini par l'existence d'une zone inertie telle que ε constant.

INTRODUCTION : CHAPITRE 2

L QU'EST-CE QU'UN PLASMA ? DE L'EXEMPLE DU VENT SOLAIRE À LA PROBLÉMATIQUE D'ÉTUDE

Sommaire

2.1	Les plasmas, états extrêmes de la matière	13
2.2	Le vent solaire, source de questions ouvertes et problématique d'étude	15
2.3	Décrire un plasma à l'aide d'un modèle fluide	17

Dans le chapitre 1, nous avons défini de manière hydrodynamique (HD) ce qu'est la turbulence grâce à la théorie des lois exactes de Kolmogorov. Ce sera le seul chapitre placé dans le domaine hydrodynamique. En effet, parmi les nombreux systèmes turbulents présents dans l'univers, très peu ne peuvent être décrit que par l'équation de Navier-Stockes. La majorité des systèmes turbulents sont en effet des plasmas. Dans ce chapitre, nous allons définir ce qu'est un plasma et comment le décrire, puis nous aborderons les questions ouvertes, motivations des travaux décrits dans ce mémoire.

2.1 Les plasmas, états extrêmes de la matière

La matière peut être décrite comme des poupées russes constituées de particules, de tailles diverses allant des molécules aux quarks en passant par les protons et les électrons. Ces particules peuvent être extrêmement ordonnées, la forme de la matière sera alors solide, ou désordonnées, elle sera fluide. Parmi les fluides, les plus reconnus dans notre quotidien sont les liquides et les gaz constitués de molécules ou d'atomes neutres ne portant pas de charge électrique. Dans des cas extrêmes, très énergétiques, ces états ne survivent pas et la matière prend la forme d'un plasma : les atomes se dissocient en particules chargées, les ions, protons et électrons. Un champ électromagnétique va alors apparaître, induit par les particules chargées. Champ et particules vont ensuite interagir entretenant ainsi le plasma. *Un plasma est donc un milieu fluide constitué de particules chargées et d'un champ électromagnétique en étroite interaction.*

On peut aussi en reconnaître dans notre quotidien, le plus souvent ils brillent ! Par exemple, les éclairs, les aurores, les flammes, les néons, les étoiles et les nébuleuses. Ils forment finalement la grande majorité de la matière présente dans l'univers, du centre des

planètes au fond diffus cosmologique. Pour les étudier, on a deux possibilités : les créer en laboratoire ou s'immerger dedans. Dans le deuxième cas, peu sont réellement accessibles, beaucoup étant trop furtif (les éclairs), trop lointains (les nébuleuses) ou trop extrêmes (le soleil) pour y envoyer des appareils de mesure. Parmi les plasmas naturels accessibles, l'espace interplanétaire est roi. Véritable laboratoire (BRUNO et CARBONE 2005), on y envoie régulièrement des sondes et satellites. La dernière sonde en date est JUICE (Jupiter Icy Moons Explorer) lancée le 14 avril 2023 en direction du système lunaire de Jupiter.

Dans l'espace interplanétaire, on trouve différents types de plasmas. Si l'on décolle de la surface d'une planète telle que la Terre, on commencera par traverser l'atmosphère constituée de gaz neutre. Puis, on atteindra l'ionosphère constituée d'ions lourds et impactée par le champ magnétique induit par la rotation de la planète. En s'écartant un peu plus, on s'immergera dans la magnétosphère constituée d'ions légers (principalement des protons) et d'électrons, toujours sous l'influence du champ planétaire. En sortant de la magnétosphère, on entrera dans une région intermédiaire, la magnétogaine, où le champ magnétique planétaire s'amoindrit. En partant du Soleil, on peut aussi définir différentes couches, la chromosphère, une couche fine gazeuse, puis la couronne solaire, un plasma s'étendant sur une quinzaine de rayons solaires et enfin l'héliosphère dans lequel baignent les planètes. Le Soleil y éjecte continuellement un plasma : le vent solaire. Il vient interagir avec le champ magnétique planétaire dans la magnétogaine. La figure .2.3 illustre quelques-unes de ces différentes régions. D'autres régions plus spécifiques existent, mais on se contentera de ce niveau de description, le vent solaire étant notre principal objet d'étude. La couronne et le vent solaire sont par exemple traversés par Parker Solar Probe

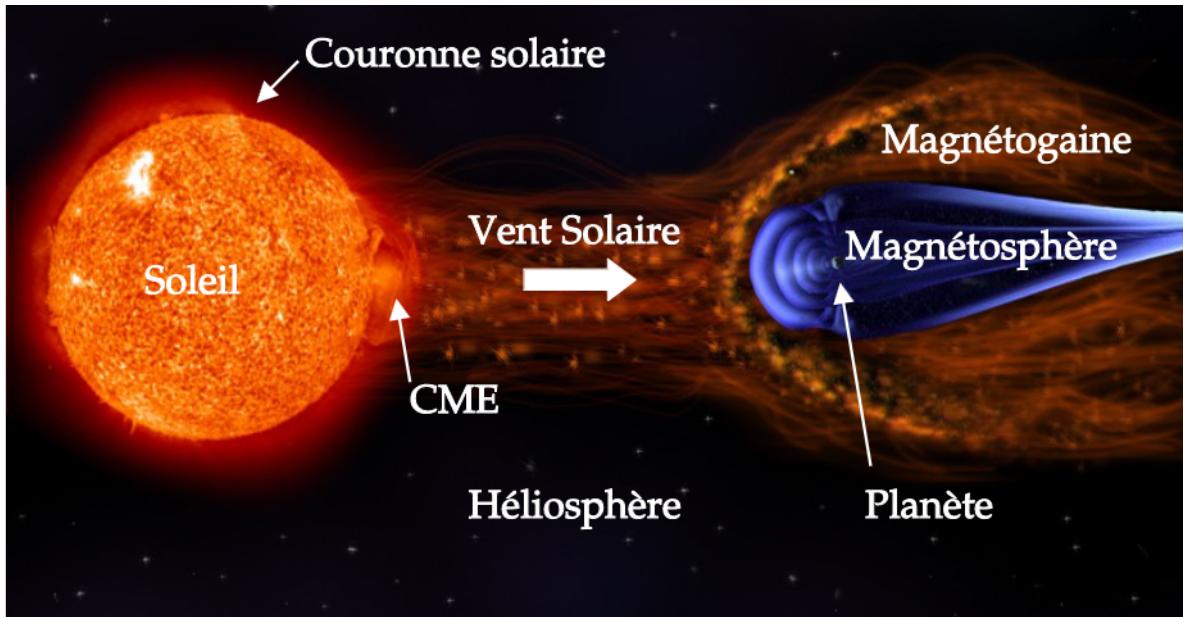


FIGURE .2.1 – Exemples de plasmas spatiaux. CME signifie éjections de masse coronale. Crédits de l'image initiale : Institut royal d'Aéronomie Spatiale de Belgique (page web www.aeronomie.be).

(PSP) en orbite autour du Soleil. La mission Magnetospheric Multiscales (MMS) en orbite autour de la Terre traverse le vent solaire, la magnétogaine et la magnétosphère. Nous reparlerons plus en détail de ces missions dans le chapitre I.3.

2.2 Le vent solaire, source de questions ouvertes et problématique d'étude

Le vent solaire est un plasma extrêmement dilué, peu collisionnel et turbulent, constitué essentiellement d'ions légers ou protons (hydrogène, hélium chargés) et d'électrons interagissant avec le champ magnétique du Soleil. En fonction de l'activité cyclique et régionale du Soleil, il peut être rapide (~ 800 km/s) ou plus lent (~ 400 km/s) et parcourus par des structures à grandes échelles telles que les éjections de masse coronale (CME). Les missions Voyager 1 et 2 lancées en 1977 vers les confins de l'héliosphère par l'agence spatiale américaine (NASA), ont permis de tracer les profils de température, champ magnétique, vitesse etc. en fonction de la distance au Soleil (RICHARDSON, PAULARENA et al. 1995). Ces profils ont donné lieu à diverses modélisations et à des problèmes ouverts encore aujourd'hui.

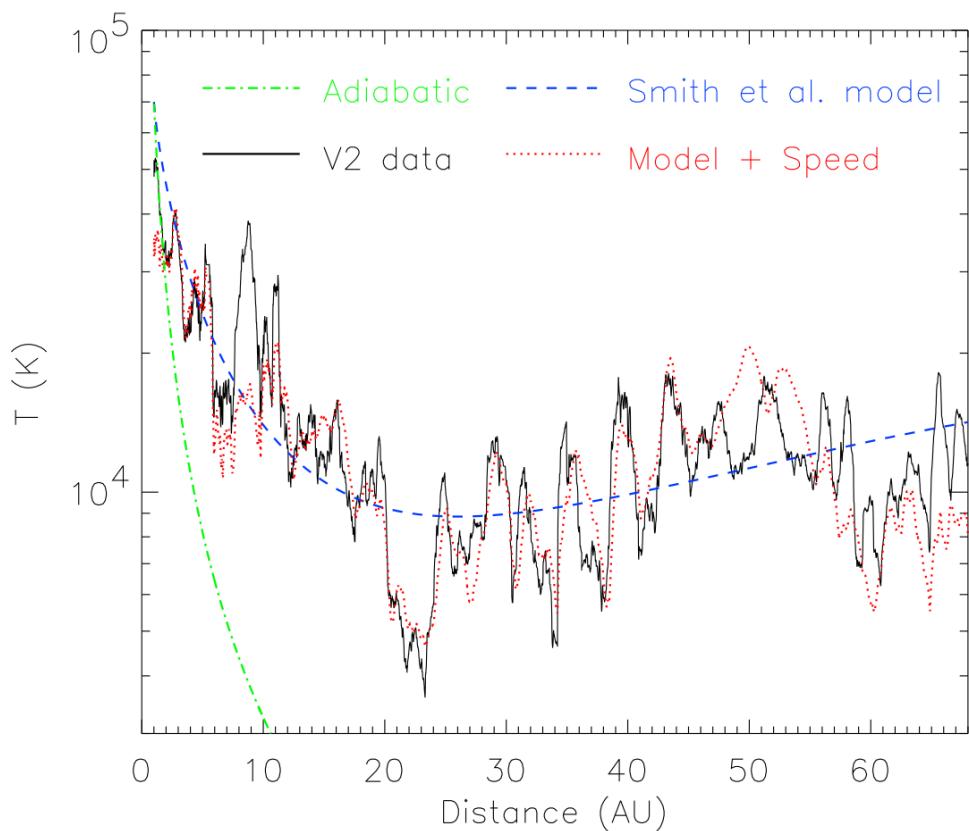


FIGURE .2.2 – Profil de température en fonction de la distance au Soleil, observé avec les données de Voyager 2 (noir). Profil adiabatique (vert). Crédits : RICHARDSON et SMITH 2003.

Sur la figure .2.2, est donné l'exemple du profil de température. Du caractère peu collisionnel du vent solaire a, dans un premier temps, émergé des prédictions d'une décroissance adiabatique du profil de température (courbe verte) (TU et MARSCH 1995). Comme on peut l'observer, la décroissance n'est pas si rapide. Des exemples de modélisations pour retrouver ce profil sont référencés par RICHARDSON et SMITH 2003. Sur la figure .2.2, des résultats d'un modèle prenant en compte des ions dits «pickups» sont présentés en bleu et en rouge. Dans le cas rouge, est ajouté au modèle une dépendance linéaire entre la vitesse du vent solaire et la température. Le profil in-situ est ainsi plutôt

bien retrouvé mais initialisé à partir de relevés de vitesse et température effectés autour de 1 au (unité astronomique dont l'étalon est la distance Soleil-Terre). Les ions pickups font en effet partie des sources du chauffage localisé du vent solaire mais ce chauffage aurait d'autres sources, comme l'explique DAVID et al. 2022. Avant 1 au, il serait principalement dû aux fluctuations turbulentes, puis aux chocs interplanétaires venant accélérer ou ralentir le plasma, et enfin, après 20 au, aux ions pickups provenant du milieu interstellaire. Le chauffage dû aux fluctuations turbulentes est souvent mis en compétitions avec un chauffage induit par les processus de reconnexion des lignes de champ magnétique (MATTHAEUS et VELLI 2011 ; CRANMER et al. 2015). Ces deux phénomènes sont souvent liés comme expliqué par MANZINI, SAHRAOUI et CALIFANO 2022.

Dans ces travaux, on s'intéresse au chauffage turbulent (TU et MARSCH 1995 ; KIYANI, KT OSMAN et CHAPMAN 2015) prédominant à partir de quelques rayons solaires jusqu'à 2 au. Une définition thermodynamique de ce chauffage sera donnée dans le chapitre I.1. Ce problème sera abordé à travers la cascade turbulente (définie dans le chapitre 1) et décrite avec la théorie des lois exactes de Kolmogorov. Cette cascade permet un transfert d'énergie des grandes échelles d'injections vers les petites échelles où les processus cinétiques dispersifs et dissipatifs peuvent intervenir afin de chauffer les ions et les électrons. Ce transfert a principalement lieu aux échelles fluides et peut être illustré à partir des spectres d'énergie magnétique comme celui de la figure ?? compilé grâce aux relevés de champ magnétique effectués in-situ par les missions ACE et Cluster en orbite autour de la Terre. Sur cette figure, on retrouve en fonction de la fréquence temporelle f une pente de type Kolmogorov en $-5/3 \simeq -1.7$. L'hypothèse de Taylor permet de relier le vecteur d'onde \mathbf{k} introduit dans le chapitre 1, à la fréquence temporelle f accessible dans les relevés in-situ, grâce à la vitesse du vent (\mathbf{v}_{SW}) : $f \sim \mathbf{v}_{SW} \cdot \mathbf{k}$. Cette pente indique donc les échelles inertielles et la présence de turbulence dans le plasma d'après la définition spectrale de la zone inertielle donnée dans le chapitre 1 et transposée à l'énergie magnétique. À plus hautes fréquences, cette zone inertielle s'achève par une rupture de pente autour de la fréquence associée à la longueur inertielle ionique ici notée ρ_i . À partir de cette échelle, des effets cinétiques ioniques commencent donc à apparaître. Ensuite, le spectre semble se stabiliser autour d'un nouveau régime a priori dispersif, avec une pente en -2.6 , avant d'atteindre la zone d'influence des électrons autour de la fréquence associée à la longueur inertielle électronique ici notée ρ_e . Les phénomènes d'origine cinétique impliqués dans la zone de transition et les zones qui s'ensuivent ne sont pas encore complètement définis, tout comme leurs impacts sur les régimes turbulents. Ces questions ouvertes (voir par exemple ALEXANDROVA et al. 2013 ; SAHRAOUI, L HADID et S HUANG 2020). Parmi ces questions ouvertes dans l'étude de la turbulence compressible pour le chauffage du vent solaire, on s'attaquera aux effets conjoints du manque de collision et du champ magnétique sur la cascade. Ces deux propriétés induisent une anisotropie de la fonction de distribution de vitesse des particules qui peut être décrite par une pression, anisotrope, définie tensoriellement. Cette anisotropie de pression induit le développement d'instabilités dans le système HUNANA et al. 2019.

La cascade turbulente d'énergie a été largement étudiée dans le cas incompressible depuis le début du siècle et l'extension de la théorie des lois exactes de Kolmogorov au modèle magnétohydrodynamique incompressible par POLITANO et POUQUET 1998a ; POLITANO et POUQUET 1998b. Les études sur l'effet de la compression sur la cascade sont quant à elles plus récentes et leur cadre souvent limité par l'hypothèse thermodynamique isotherme MARINO et SORRISO-VALVO 2023. Dans la partie I, nous reprendrons quelques résultats incompressibles avant d'apporter une première extension du cadre d'étude de la

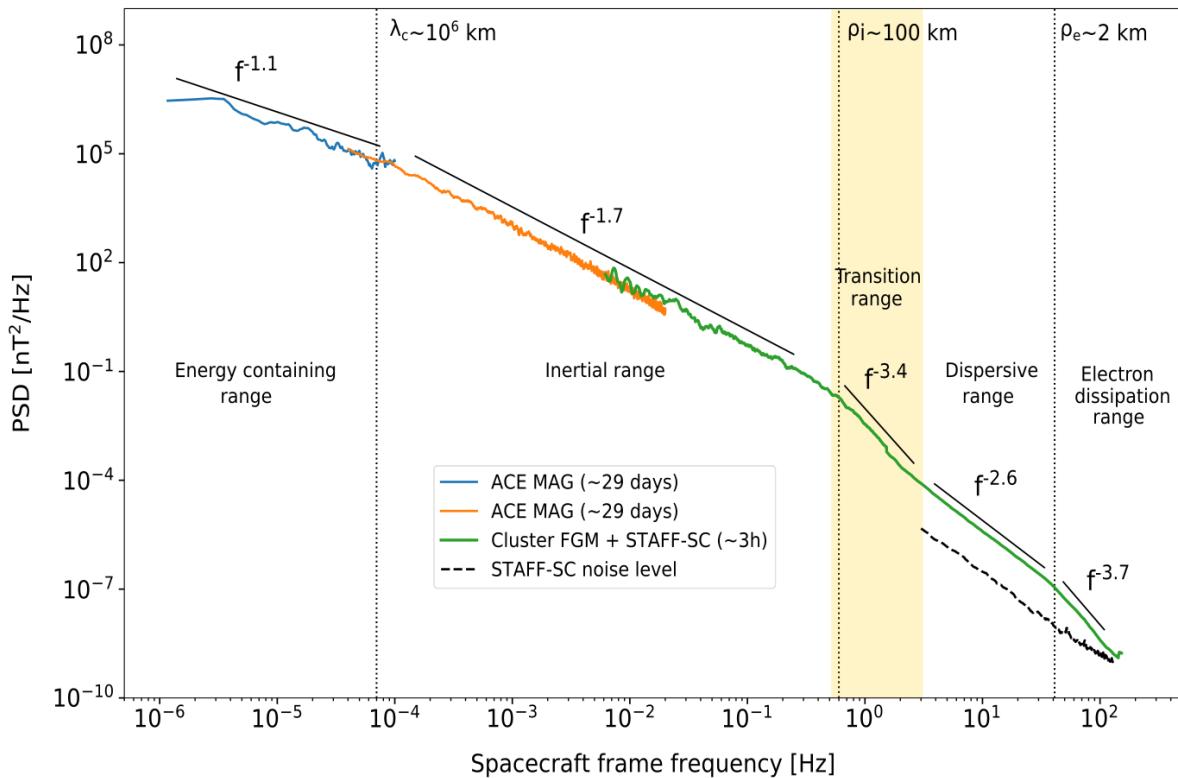


FIGURE .2.3 – Spectres d'énergie magnétique du vent solaire obtenu à partir des missions ACE et Cluster. Ce spectre peut être découpé en cinq régions grâce aux ruptures de pentes. Pente en -1.1 : Réservoir d'énergie. λ_c : longueur de corrélation. Pente en -1.7 : Zone inertielle. ρ_i : longueur d'inertie ionique. Pente en -3.4 : Zone de transition. Pente en -2.6 : Échelles dispersives. ρ_e : longueur d'inertie électronique. Pente en -3.7 : Échelles de dissipation électronique. Crédits : SAHRAOUI, L HADID et S HUANG 2020.

cascade turbulente à des plasmas compressibles, en centrant la problématique sur l'effet de différentes descriptions thermodynamiques utilisées pour définir la pression. Dans la partie II, nous élargirons le cadre de la théorie des lois exactes en prenant en compte l'anisotropie de pression. Dans la partie ??, nous appliquerons la théorie analytique ainsi élargie à des simulations tridimensionnelles turbulentes.

Mais avant cela, dans la section 2.3, sera rappelé la description fluide d'un plasma qui sert de base à l'ensemble des modèles utilisés dans ces travaux. Et dans le chapitre 3, nous allons introduire, de manière plus détaillée, les méthodes qui seront appliquées par la suite.

2.3 Décrire un plasma à l'aide d'un modèle fluide

Soit un plasma, dans lequel chaque particule est caractérisée par le ratio charge/masse, q_α/m_α , associée à son espèce notée α , sa position dans l'espace des phases $\{\mathbf{x}, \mathbf{v}\}$ et une fonction de distribution $f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$. Dans les cas étudiés ici, les espèces sont les protons ($\alpha = i$) et les électrons ($\alpha = e$). En négligeant les collisions entre les particules, l'équation cinétique, nommée alors équation de Vlasov, décrivant l'évolution de la fonction de

distribution des particules est :

$$\partial_t f_\alpha + \nabla \cdot (f_\alpha \mathbf{v}) + \nabla_{\mathbf{v}} \cdot f_\alpha \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 0. \quad (.2.1)$$

Le système est alors décrit par sept variables, une temporelle t , trois spatiales $\mathbf{x} = [x, y, z]$ associée à l'opérateur dérivatif ∇ et trois définissant la vitesse $\mathbf{v} = [v_x, v_y, v_z]$ associée à l'opérateur dérivatif $\nabla_{\mathbf{v}}$. Si l'on considère que les particules baignent dans un champ électromagnétique $\{\mathbf{E}(\mathbf{x}, t), \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)\}$, on peut remplacer $\frac{d\mathbf{v}}{dt}$ par la force électromagnétique de Lorentz $q_\alpha/m_\alpha (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ et compléter le système avec les équations de Maxwell :

- $\nabla \cdot \mathbf{E} = Q/\epsilon_0$,
- $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$,
- $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}$,
- $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \epsilon_0 \mu_0 \partial_t \mathbf{E}$,

avec $Q(\mathbf{x}, t)$ et $\mathbf{j}(\mathbf{x}, t)$ les densités totales de charges et de courant du plasma.

Les moments de la fonction de distributions sont obtenues en moyennant une fonction $g(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ dans l'espace des vitesses ($d^3v = dv_x dv_y dv_z$) :

$$\langle G(\mathbf{x}, t) \rangle_\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) g(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d^3v. \quad (.2.2)$$

Afin d'appliquer cette moyenne, on supposera la convergence des intégrales. Les étapes de calculs ne seront pas détaillées. Pour plus d'informations, se référer à, par exemple, GALTIER 2016.

Suivant la fonction g , on peut obtenir pour chaque espèce, les quantités macroscopiques suivantes, aussi appelées «moments», :

Quantité	$\langle G(\mathbf{x}, t) \rangle_\alpha$	$g(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$	ordre
Densité de particules	$n_\alpha(\mathbf{x}, t)$	1	0
Densité de masse	$\rho_\alpha(\mathbf{x}, t)$	$m_\alpha(\mathbf{x}, t)$	0
Densité de charge	$Q_\alpha(\mathbf{x}, t)$	$q_\alpha(\mathbf{x}, t)$	0
Densité de Vitesse du fluide	$n_\alpha \mathbf{v}_\alpha(\mathbf{x}, t)$	\mathbf{v}	1
Densité de courant	$\mathbf{j}_\alpha(\mathbf{x}, t)$	$q_\alpha \mathbf{v}_\alpha$	1
Pression	$\overline{\mathbf{P}_\alpha}(\mathbf{x}, t)$	$m_\alpha(\mathbf{v} - \mathbf{v}_\alpha)(\mathbf{v} - \mathbf{v}_\alpha)$	2
Densité d'énergie interne	$n_\alpha u_\alpha(\mathbf{x}, t)$	$\frac{1}{2}(\mathbf{v} - \mathbf{v}_\alpha) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_\alpha)$	2
Flux de chaleur	$\overline{\mathbf{q}_\alpha}(\mathbf{x}, t)$	$m_\alpha(\mathbf{v} - \mathbf{v}_\alpha)(\mathbf{v} - \mathbf{v}_\alpha)(\mathbf{v} - \mathbf{v}_\alpha)$	3

Visuellement, les moments d'ordre 0, sont reliés à l'aire sous la fonction de distribution, ceux d'ordre 1 sont reliés à sa valeur moyenne et ceux d'ordre 2 à sa largeur à mi-hauteur comme représenté sur la figure .2.4.

En appliquant ces transformations à l'équation de Vlasov, on obtient des équations dites «multi-fluides» (dépendant de α) ou «bi-fluide» dans notre cas où l'on a deux fluides, un électronique et un ionique, :

- L'équation de continuité pour la densité massique :

$$\partial_t \rho_\alpha + \nabla \cdot (\rho_\alpha \mathbf{v}_\alpha) = 0 \quad (.2.3)$$

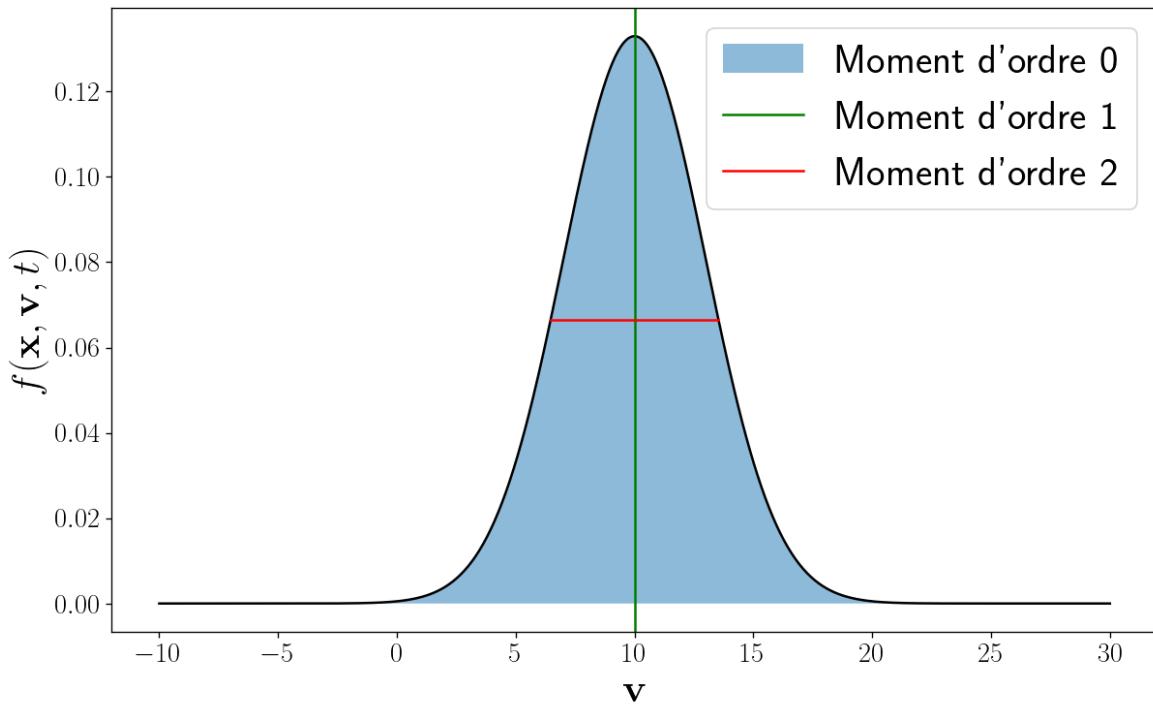


FIGURE .2.4 – Représentation graphique des moments d'ordre 0 (aire sous la courbe colorée en bleu), 1 (valeur moyenne de \mathbf{v} indiquée par la verticale verte) et 2 (largeur indiquée par l'horizontale rouge) de la fonction de distribution en vitesse $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ ici gaussienne.

— L'équation sur la quantité de mouvement :

$$\partial_t (\rho_\alpha \mathbf{v}_\alpha) + \nabla \cdot (\rho_\alpha \mathbf{v}_\alpha \mathbf{v}_\alpha + \overline{\mathbf{P}_\alpha}) - Q_\alpha \mathbf{E} - \mathbf{j}_\alpha \times \mathbf{B} = 0 \quad (.2.4)$$

— L'équation d'évolution du tenseur de pression :

$$\partial_t \overline{\mathbf{P}_\alpha} + \nabla \cdot (\mathbf{v}_\alpha \overline{\mathbf{P}_\alpha} + \overline{\mathbf{q}_\alpha}) + (\overline{\mathbf{P}_\alpha} \cdot \nabla \mathbf{v}_\alpha)^S + (\mathbf{B} \times \overline{\mathbf{P}_{E\alpha}})^S = 0 \quad (.2.5)$$

avec $\overline{\mathbf{P}_{E\alpha}} = \frac{Q_\alpha}{\rho_\alpha} \overline{\mathbf{P}_\alpha}$ et $(\cdot)^S = (\cdot) + (\cdot)^T$ avec $(\cdot)^T$ la transposée de (\cdot) .

Les quantités totales, mono-fluide, sont ensuite obtenues en sommant sur toutes les espèces n_α , ρ_α , Q_α , $\rho_\alpha \mathbf{v}_\alpha$, \mathbf{j}_α , $\overline{\mathbf{P}_\alpha} + \rho_\alpha \mathbf{v}_\alpha \mathbf{v}_\alpha$ et $\rho_\alpha u_\alpha + \frac{1}{2} \rho_\alpha |\mathbf{v}_\alpha|^2$. Ces quantités sont notées sans indice.

En appliquant ces sommes aux équations (.2.3), (.2.4) et (.2.5) et en considérant l'hypothèse de quasi-neutralité ($Q \simeq 0$), on obtient les équations mono-fluides suivantes :

— L'équation de continuité pour la densité massique :

$$\Rightarrow \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (.2.6)$$

— L'équation sur la quantité de mouvement :

$$\Rightarrow \partial_t (\rho \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v} + \overline{\mathbf{P}}) - \mathbf{j} \times \mathbf{B} = 0 \quad (.2.7)$$

— L'équation d'évolution du tenseur de pression :

$$\Rightarrow \partial_t \bar{\mathbf{P}} + \nabla \cdot (\mathbf{v} \bar{\mathbf{P}} + \bar{\mathbf{q}}) + (\bar{\mathbf{P}} \cdot \nabla \mathbf{v})^S + (\mathbf{B} \times \bar{\mathbf{P}}_E)^S = 0 \quad (.2.8)$$

Ces équations sont associées respectivement aux moments d'ordre 0, 1 et 2. On remarque que l'équation du moment d'ordre n dépend d'un moment d'ordre $n+1$. Afin de fermer le système d'équations, une équation dite «de fermeture», devra être considérée. Ces équations forment les premières équations du modèle magnétohydrodynamique (MHD), elles doivent être complétées par une équation dite «d'induction» donnant l'évolution temporelle du champ magnétique et obtenue à partir des équations de Maxwell.

Dans le cas d'un plasma bi-fluide constitué d'électrons ($m_e, -e$) et d'ions ou protons (m_i, e) avec les masses $m_i \gg m_e$ et e la charge élémentaire et quasi-neutre, $Q \simeq 0$, on peut noter que $\rho \simeq \rho_i$ et $n_i = n_e = n$. A partir de l'équation (.2.4), on peut obtenir l'évolution de la densité de courant $\mathbf{j} = en_i \mathbf{v}_i - en_e \mathbf{v}_e$, et l'écrire sous la forme de la loi d'Ohm généralisée :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{ind} + \mathbf{E}_{hall} + \mathbf{E}_{therm} + \mathbf{E}_{iner} \quad (.2.9)$$

avec :

- $\mathbf{E}_{ind} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, le terme d'induction,
- $\mathbf{E}_{hall} = \lambda \frac{\mathbf{i}}{\rho} \times \mathbf{B}$, le terme Hall,
- $\mathbf{E}_{therm} = -\frac{\lambda}{\rho} \nabla \cdot \bar{\mathbf{P}}_e$, le terme thermique ou électromoteur,
- $\mathbf{E}_{iner} = \frac{\lambda \lambda_e}{\rho} \left(\partial_t \mathbf{j} + \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{i} \mathbf{j}}{n_e e} - \mathbf{v} \mathbf{j} - \mathbf{j} \mathbf{v} \right) \right)$, et le terme inertiel électronique.

$\lambda = \frac{m_i}{e}$ est l'inverse du rapport charge/masse associé aux ions et est lié à la fréquence cyclotron ionique $\frac{eB}{m_i}$ avec $B = |\mathbf{B}|$. Comme toute fréquence caractéristique, cette fréquence à un pendant spatial, le rayon de Larmor, qui est la largeur de l'hélice effectuée par l'ion autour d'une ligne de champ. Ainsi, pour les échelles proches du rayon de Larmor ou de la fréquence cyclotron, on devra prendre en compte dans la description mono-fluide une dissociation des lignes de champ magnétique et du mouvement des ions, c'est le rôle du terme Hall. Le terme thermique dépend de λ et de la pression électronique. La pression électronique étant liée à la vitesse thermique des électrons et donc à leur agitation, prendre en compte le terme thermique implique la prise en compte de l'effet de l'agitation électronique sur le mouvement des ions et le champ magnétique. $\lambda_e = \frac{m_e}{e}$ est lié à la fréquence cyclotron électronique et $\lambda \lambda_e$ peut aussi s'écrire $\lambda^2 \mu$ avec $\mu = \frac{m_e}{m_i}$ le rapport de masse caractéristique du plasma. Le terme inertiel électronique devra donc être pris en compte si l'on s'intéresse aux échelles proches du rayon de Larmor ou de la longueur d'inertie électronique.

Suivant quels termes sont négligés dans la loi d'Ohm, l'équation d'induction

$$\partial_t \mathbf{B} = -\nabla \times \mathbf{E} \quad (.2.10)$$

devient :

- dans le cas dit «Idéal» : $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{ind}$ d'où $\partial_t \mathbf{B} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B})$.
- dans le cas Hall : $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{ind} + \mathbf{E}_{hall}$ d'où $\partial_t \mathbf{B} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \lambda \nabla \times \left(\frac{\mathbf{i}}{\rho} \times \mathbf{B} \right)$.
- dans le cas Hall dit «hybride bi-fluide» : $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{ind} + \mathbf{E}_{hall} + \mathbf{E}_{therm}$
d'où $\partial_t \mathbf{B} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \lambda \nabla \times \left(\frac{\mathbf{i}}{\rho} \times \mathbf{B} \right) - \frac{\lambda}{\rho} \nabla \cdot \bar{\mathbf{P}}_e$.

Une autre variable est souvent utilisée pour décrire le champ magnétique : la vitesse d'Alfvén $\mathbf{v}_A = \frac{\mathbf{B}}{\sqrt{\mu_0 \rho}}$ avec μ_0 , la perméabilité du vide. On peut ainsi réécrire l'équation

d'induction (cas Hall hybride bi-fluide) :

$$\partial_t \mathbf{v}_A = \nabla \cdot (\mathbf{v}_A \mathbf{v} - \mathbf{v} \mathbf{v}_A) - \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{v}_A + \frac{\mathbf{v}_A}{2} \nabla \cdot \mathbf{v} - \frac{\lambda}{\sqrt{\rho}} \nabla \times \left(\frac{1}{\sqrt{\rho}} \mathbf{j} \times \mathbf{v}_A \right) - \frac{\lambda}{\rho \sqrt{\mu_0 \rho}} \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}_e} \quad (.2.11)$$

Les équations (.2.6), (.2.7) et (.2.11) forment le modèle magnétohydrodynamique (MHD) décrivant un plasma considéré comme mono-fluide. Dans la partie I, on y supposera une pression scalaire et l'approximation idéale dans l'équation d'induction (.2.11). Dans la partie II, la pression sera considérée comme tensorielle et on relaxera peu à peu les approximations sur la loi d'Ohm dans le chapitre II.???. L'équation (.2.8) servira à définir des équations de fermeture dans les chapitres I.?? et II.??.

INTRODUCTION : CHAPITRE 3

L ETUDE DE LA CASCADE TURBULENTE DANS UN PLASMA : APPLICATION DE LA THÉORIE DE KOLMOGOROV AU MODÈLE MHD INCOMPRESSIBLE

Sommaire

3.1	Le modèle et l'énergie totale	23
3.2	Le cas linéaire et les ondes d'Alfvén	24
3.3	Décrire la cascade turbulente incompressible avec une loi exacte	25
3.4	Synthèse des définitions et méthodes (cadre IMHD)	29

Ce n'est que 57 ans après l'apport de Kolmogorov à la compréhension de la turbulence que l'idée de chercher des lois exactes dans un fluide magnétisé, ou plasma, a émergé. Ainsi, POLITANO et POUQUET 1998a ; POLITANO et POUQUET 1998b a étendu la théorie hydrodynamique à la MHD idéale en restant dans le cadre incompressible. Cette avancée historique a apporté un cadre à l'étude de la turbulence dans les plasmas spatiaux. Dans le laboratoire qu'est le vent solaire, elle a permis de trouver des éléments de réponses à des problèmes tels que ceux du chauffage ou de l'accélération du vent par exemple (BRUNO et CARBONE 2013 ; ALEXANDROVA et al. 2013 ; SAHRAOUI, L HADID et S HUANG 2020 ; MARINO et SORRISO-VALVO 2023).

Le modèle incompressible magnétohydrodynamique idéal avec pression isotrope (IMHD) est la description fluide d'un plasma la plus simple abordé dans ce mémoire. Dans ce chapitre, nous reprendrons les résultats analytiques incompressibles afin d'introduire simplement les méthodes qui seront appliquées par la suite dans le cas compressible.

3.1 Le modèle et l'énergie totale

Contrairement au modèle hydrodynamique incompressible abordé dans le chapitre 1 qui ne contient qu'une équation principale – l'équation de Navier-Stokes –, dans le cas d'un plasma, il est nécessaire de prendre en compte le couplage entre le fluide et le champ magnétique et d'ajouter l'équation d'induction (.2.11) comme on a pu le mettre en pratique dans le chapitre ???. L'incompressibilité s'exprime, quant à elle, à travers une

densité de masse constante, ρ_0 qui se traduit via l'équation de continuité (.2.6), par la contrainte $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$. Le modèle magnétohydrodynamique incompressible (IMHD) est alors :

$$\partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} - \mathbf{v}_A \cdot \nabla \mathbf{v}_A + \frac{1}{\rho_0} \nabla p_* = 0 \quad (.3.1)$$

$$\partial_t \mathbf{v}_A + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}_A - \mathbf{v}_A \cdot \nabla \mathbf{v} = 0 \quad (.3.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (.3.3)$$

Le champ magnétique apparaît dans ces équations à travers la vitesse d'Alfvén $\mathbf{v}_A = \mathbf{B}/\sqrt{\mu_0 \rho_0}$ et la pression magnétique $p_m = \rho_0 \mathbf{v}_A^2/2$ contenue dans la pression totale $p_* = p + p_m$. On remarque qu'il y a 3 équations (7 en termes de composantes) et 3 inconnues (2 vectorielles, \mathbf{v} et \mathbf{v}_A et une scalaire, p). Le système se retrouve donc fermé grâce à la contrainte incompressible. On peut rappeler aussi que le champ magnétique est aussi contraint tel que $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, ce qui implique dans le cas incompressible : $\nabla \cdot \mathbf{v}_A = 0$ (contrainte implicitement prise en compte dans l'équation d'induction (.3.2)). En appliquant la divergence sur l'équation (.3.1), on obtient l'équilibre de pression, $-\frac{1}{\rho_0} \nabla^2 p_* = \nabla \mathbf{v} : \nabla \mathbf{v} - \nabla \mathbf{v}_A : \nabla \mathbf{v}_A$, qui indique que la pression totale est directement reliée aux non-linéarités du système.¹

Dans ce système apparaissent deux canaux énergétiques, cinétique de densité $E_c = \frac{1}{2} \rho_0 \mathbf{v}^2$ et magnétique, $E_m = \frac{1}{2} \rho_0 \mathbf{v}_A^2$. On définit aussi la densité d'hélicité croisée couplant les deux champs : $H_c = \rho_0 \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}$. Les équations de densité d'énergie cinétique et magnétique, obtenue respectivement à partir de (.3.1) et (.3.2), et celle de densité d'énergie totale $E_{tot} = E_c + E_m$ sont alors :

$$\partial_t E_c + \nabla \cdot (E_c \mathbf{v} + H_c \mathbf{v}_A + p_* \mathbf{v}) = -\rho_0 \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A : \nabla \mathbf{v} \quad (.3.5)$$

$$\partial_t E_m + \nabla \cdot (E_m \mathbf{v}) = \rho_0 \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A : \nabla \mathbf{v} \quad (.3.6)$$

$$\partial_t E_{tot} + \nabla \cdot (E_{tot} \mathbf{v} + H_c \mathbf{v}_A + p_* \mathbf{v}) = 0 \quad (.3.7)$$

L'équation (.3.7) indique que l'énergie totale moyenne $\langle E_{tot} \rangle$ est conservée puisque pour toute quantité \mathbf{X} , la moyenne, ici spatiale, $\langle \rangle$, implique $\langle \nabla \cdot \mathbf{X} \rangle = 0$. Les équations (.3.5) et (.3.6) nous indiquent un échange entre les canaux énergétiques se faisant à travers le terme de droite.

3.2 Le cas linéaire et les ondes d'Alfvén

1. Ce système peut aussi être symétrisé grâce aux variables d'Elsässer, $\mathbf{z}^\pm = \mathbf{v} \pm \mathbf{v}_A$:

$$\partial_t \mathbf{z}^\pm + \mathbf{z}^\mp \cdot \nabla \mathbf{z}^\pm = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p_* \quad \nabla \cdot \mathbf{z}^\pm = 0 \quad (.3.4)$$

Leur somme $\frac{1}{4} \rho_0 (\mathbf{z}^{+2} + \mathbf{z}^{-2})$ donne l'énergie totale E_{tot} et leur différence, l'hélicité croisée H_c . La dynamique non-linéaire est alors contenue dans le terme $\mathbf{z}^\mp \cdot \nabla \mathbf{z}^\pm$. De telles variables semblent parfaites dans l'étude de ce système incompressible et sont largement utilisées pour simplifier les calculs. Il est nécessaire de garder en tête qu'en termes de mathématique fondamentale, elles ne peuvent exister, car les champs de vitesse (vectoriel) et magnétique (pseudo-vectoriel) sont incompatibles. Dans un effort de cohérence avec le cadre compressible dans lequel elles sont mal définies (MAGYAR 2019), elles ne seront pas utilisées ici.

La théorie linéaire est la principale voie nous donnant des informations ondu-
latoires sur un modèle. Ainsi, dans le mod-
èle IMHD, elle vient révéler l'existence des
ondes dites d'Alfvén.

Pour cela, on doit linéariser le système,
c'est-à-dire négliger tout terme non-linéaire
(d'ordre supérieur à 1). Les moyennes des
quantités impliquées seront indiquées par
un 0 (ordre 0) et les fluctuations d'ordre
1 seront indiquées par un 1. Ainsi, par
exemple, $\mathbf{v} \simeq \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1$. On considérera aussi
que $\mathbf{v}_0 = 0$ et $\mathbf{v}_{A0} = v_{A0}\mathbf{b}_0$.

La deuxième étape consiste à passer dans l'espace de Fourier, c'est-à-dire remplacer ∂_t
par la pulsation $-i\omega$ et ∇ par le vecteur d'onde $i\mathbf{k}$. On supposera sans perte de généralité,
le système de coordonnées cartésien orienté tel que $\mathbf{e}_z = \mathbf{b}_0$ et la composante suivant \mathbf{e}_y
du vecteur d'onde, $k_y = 0$. On notera k la norme du vecteur d'onde, k_{\parallel} sa composante le
long de \mathbf{e}_z , parallèle au champ magnétique moyen, k_{\perp} sa composante le long de \mathbf{e}_x et θ
l'angle formé avec \mathbf{e}_z (voir Figure .3.1). Le système IMHD devient alors :

$$\omega\mathbf{v}_1 + \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_{A0}\mathbf{v}_{A1} - \frac{1}{\rho_0} \mathbf{k} p_{*1} = 0 \quad (.3.8)$$

$$\omega\mathbf{v}_{A1} + \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_{A0}\mathbf{v}_1 = 0 \quad (.3.9)$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_1 = 0 \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_{A1} = 0 \quad (.3.10)$$

Ensuite, on injecte les équations (.3.9) et (.3.10) dans l'équation (.3.8) :

— $\mathbf{k} \cdot (.3.8) \Rightarrow p_{*1} = 0$, en excluant le cas trivial où $\mathbf{k} = 0$, d'où $p_1 = -v_{A0}v_{A1z}$ qui
nous informe sur l'équilibre de pression linéaire.

— $\omega \cdot (.3.8) \Rightarrow (\omega^2 - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_{A0})^2)\mathbf{v}_1 = 0$ (dite équation de dispersion), d'où la relation
de dispersion :

$$\omega = \pm \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_{A0} = \pm k_{\parallel} v_{A0} = \pm v_{A0} k \cos \theta \quad (.3.11)$$

— (.3.9) et (.3.11) $\Rightarrow \mathbf{v}_1 = \pm \mathbf{v}_{A1}$.

La relation de dispersion (.3.11) nous indique qu'il peut y avoir dans le système IMHD,
des ondes dites d'Alfvén, couplant champ magnétique et champ de vitesse.

Les ondes sont très importantes dans l'étude de la turbulence en physique des plasmas
où deux théories coexistent : la turbulence faible ou turbulence d'ondes où la cascade
d'énergie est supposément développée par des interactions faiblement non-linéaires entre
paquets d'ondes et, la turbulence forte où ondes et structures cohérentes (de type vortex
par exemple) coexistent.

3.3 Décrire la cascade turbulente incompressible avec une loi exacte

Le calcul des lois exactes, nommée ainsi car aucune approximation de type linéaire,
perturbative, etc. n'est supposée pour les obtenir, fait par définition partie intégrante de
la théorie de la turbulence forte et, s'appuie sur les hypothèses de Kolmogorov exposées
dans l'introduction et rappelées ci-après. Historiquement, de multiples versions de la loi

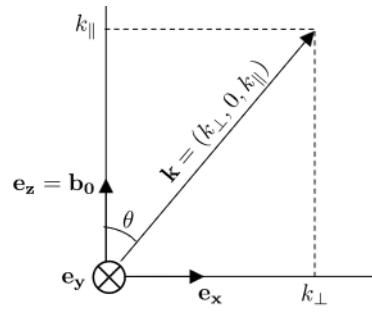


FIGURE .3.1 – Système de coordonnées et vecteur d'onde dans le cadre linéaire.

exacte décrivant la cascade IMHD et de la méthode pour l'obtenir existent (POLITANO et POUQUET 1998a ; GALTIER 2018 ; MACBRIDE, SMITH et MA FORMAN 2008). On la nommera dans la suite "PP98" du nom des deux chercheuses ayant dérivé la première version en 1998 POLITANO et POUQUET 1998b ; POLITANO et POUQUET 1998a.

D'après les hypothèses de Kolmogorov (FRISCH 1995), la zone inertie est définie comme l'ensemble des échelles où le transfert s'effectue conservativement. L'énergie totale (cinétique + magnétique) étant un invariant du système IMHD, il peut a priori cascader de manière conservative. Une cascade d'énergie implique une source d'injection et un canal de dissipation, respectivement à grandes et petites échelles. Le canal de dissipation transfert l'énergie au niveau interne, particulière du fluide en augmentant son entropie (par exemple, une dissipation visqueuse ou résistive) et le canal d'injection est nécessaire pour entretenir la cascade et maintenir le bilan énergétique (dans le cas incompressible) (GALTIER 2021). Pour refléter cela dans les équations, on va ajouter une force \mathbf{f}_c d'injection agissant à grande échelle et un terme dissipatif (visqueux), \mathbf{d}_c , agissant à petite échelle, dans l'équation (.3.1) et, pour permettre la visualisation de ce que deviennent ces sources si elles sont définies magnétiquement, on va ajouter \mathbf{f}_m et \mathbf{d}_m (résistif) dans l'équation d'induction (.3.2). On restera dans un cadre général en ne détaillant pas leur contenu. Ainsi :

$$\partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} - \mathbf{v}_A \cdot \nabla \mathbf{v}_A + \frac{1}{\rho_0} \nabla p_* = \mathbf{f}_c + \mathbf{d}_c \quad (.3.12)$$

$$\partial_t \mathbf{v}_A + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}_A - \mathbf{v}_A \cdot \nabla \mathbf{v} = \mathbf{f}_m + \mathbf{d}_m \quad (.3.13)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \nabla \cdot \mathbf{v}_A = 0 \quad (.3.14)$$

On se référera au chapitre introduction REF à propos des notations. Maintenant, si l'on veut une loi exacte sur l'énergie totale, on doit choisir une fonction de corrélation qui, lorsque $\mathbf{x}' = \mathbf{x}$, est égale à l'énergie totale moyenne, ici $\langle E_{tot} \rangle = \langle E_c + E_m \rangle = \langle \frac{1}{2}\rho_0 \mathbf{v}^2 + \frac{1}{2}\rho_0 \mathbf{v}_A^2 \rangle$. Cela nous donne bien des choix de formulation : $\langle \sqrt{E_{tot}} \cdot \sqrt{E'_{tot}} \rangle$, $\langle \sqrt{E_c} \cdot \sqrt{E'_c} + \sqrt{E_m} \cdot \sqrt{E'_m} \rangle$, et pourquoi pas d'autres puissances ? Ici, c'est la même quantité à une constante près, mais on pourrait avoir à choisir en \mathbf{B} ou \mathbf{v}_A , ou encore utiliser les variables d'Elsässer. Une autre possibilité est de définir cette fonction à l'aide des incrément de quantités (type incrémentale), dans ce cas, il faut s'assurer que, lorsque $\mathbf{x}' = \mathbf{x}$, le résultat soit nul. Du choix de cette fonction va dépendre la difficulté du calcul, la sauvegarde du sens physique (que voudrait dire $\mathbf{v}^{1/5}$?) et potentiellement l'élégance et la compacité du résultat. Une question fondamentale subsiste et ne sera qu'en partie traitée dans ce mémoire : regarde-t-on la même chose quel que soit le choix de fonction de corrélation ?² On prendra comme exemple la fonction d'auto-corrélation pour chaque canal d'énergie : $\mathcal{R} = \frac{1}{2}\rho_0 \langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}' + \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}'_A \rangle$, $\rho_0/2$ étant une constante dans ce cadre incompressible.

Ensuite, on doit dériver une équation pour cette fonction de corrélation, elle s'obtient en notant que $\partial_t \mathcal{R} = \frac{1}{2}\rho_0 (\langle \partial_t(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}' + \mathbf{v} \cdot \partial_t(\mathbf{v}') \rangle + \langle \partial_t(\mathbf{v}_A) \cdot \mathbf{v}'_A + \mathbf{v}_A \cdot \partial_t(\mathbf{v}'_A) \rangle)$ et en remplaçant les dérivées temporelles grâce aux équations (.3.12) et (.3.13). Pour alléger la démonstration, on peut noter que $\langle \partial_t(\mathbf{v}') \cdot \mathbf{v} \rangle$ est le conjugué de $\langle \partial_t(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}' \rangle$,

2. On regardera la différence analytique entre les fonctions de type incrémentale ou non (traitée numériquement dans les cadres Hall-MHD incompressible et compressible par FERRAND, GALTIER, SAHRAOUI, MEYRAND et al. 2019 ; FERRAND, SAHRAOUI et al. 2022). La question de la convergence de taux de cascade obtenus avec des lois du même type (incrémental ou non) mais différentes formulations (exemple des différentes puissances) reste un problème ouvert qui n'a, à notre connaissance, pas été traité rigoureusement.

c'est-à-dire en échangeant les rôles (prime ou pas) de chacun des points. Ainsi, on obtient en jouant un peu avec l'hypothèse d'homogénéité statistique et les contraintes (3.14) :

$$\langle \mathbf{v}' \cdot \partial_t \mathbf{v} \rangle = \nabla_{\ell} \cdot \langle \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v} \mathbf{v} - \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A \rangle + \langle \mathbf{v}' \cdot \mathbf{f}_c + \mathbf{v}' \cdot \mathbf{d}_c \rangle \quad (3.15)$$

$$\langle \mathbf{v}'_A \cdot \partial_t \mathbf{v}_A \rangle = \nabla_{\ell} \cdot \langle \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A \mathbf{v} - \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v} \mathbf{v}_A \rangle + \langle \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{f}_m + \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{d}_m \rangle \quad (3.16)$$

puisque $-\langle \mathbf{v}' \cdot \nabla p_* \rangle = \nabla_{\ell} \cdot \langle p_* \mathbf{v}' \rangle = \langle p_* \nabla' \cdot \mathbf{v}' \rangle = 0$.

On peut chercher à faire apparaître par factorisation dans les termes dit «de flux» (sous l'opérateur ∇_{ℓ}) des équations (3.15) et (3.16), des fonctions de structures, c'est-à-dire des multiplications d'incrémentations tel que $\langle \delta \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v} \delta \mathbf{v} \rangle$. Via les hypothèses d'homogénéité et les contraintes (3.14), on peut faire ainsi ressortir :

$$\begin{aligned} \nabla_{\ell} \cdot & \langle \delta \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v} \delta \mathbf{v} \rangle \\ &= \nabla_{\ell} \cdot \langle \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}' \mathbf{v}' - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \mathbf{v} - \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}' \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \mathbf{v}' + 2\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}' \mathbf{v} - 2\mathbf{v}' \cdot \mathbf{v} \mathbf{v}' \rangle \\ &= 2\nabla_{\ell} \cdot \langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}' \mathbf{v} - \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v} \mathbf{v}' \rangle \end{aligned} \quad (3.17)$$

Et de même :

$$\nabla_{\ell} \cdot \langle \delta \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{v}_A \delta \mathbf{v} \rangle = 2\nabla_{\ell} \cdot \langle \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}'_A \mathbf{v} - \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A \mathbf{v}' \rangle \quad (3.18)$$

$$\nabla_{\ell} \cdot \langle \delta \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v}_A \delta \mathbf{v}_A \rangle = \nabla_{\ell} \cdot \langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'_A \mathbf{v}_A - \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}_A \mathbf{v}'_A + \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'_A \mathbf{v}'_A \rangle \quad (3.19)$$

Les fonctions de structures d'ordre 3, $\langle \delta \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v} \delta \mathbf{v} \rangle$ et $\langle \delta \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{v}_A \delta \mathbf{v} \rangle$, rappellent la convection de l'énergie, respectivement cinétique et magnétique, par le champ de vitesse présente dans l'équation d'énergie totale (3.7), et $\langle \delta \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v}_A \delta \mathbf{v}_A \rangle$ rappelle la convection de l'hélicité croisée par le champ magnétique.

Ainsi, l'équation de la fonction de corrélation de l'énergie totale obtenue avec $\mathcal{R} = \langle \frac{1}{2} \rho_0 \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}' + \frac{1}{2} \rho_0 \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}'_A \rangle$ peut s'écrire :

$$\partial_t \mathcal{R} = \frac{1}{4} \rho_0 \nabla_{\ell} \cdot \langle \delta \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v} \delta \mathbf{v} + \delta \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{v}_A \delta \mathbf{v} + 2\delta \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v}_A \delta \mathbf{v}_A \rangle \quad (3.20)$$

$$+ \frac{1}{2} \rho_0 \langle \mathbf{v}' \cdot \mathbf{f}_c + \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}'_c + \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{f}_m + \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{f}'_m \rangle \quad (3.21)$$

$$+ \frac{1}{2} \rho_0 \langle \mathbf{v}' \cdot \mathbf{d}_c + \mathbf{v} \cdot \mathbf{d}'_c + \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{d}_m + \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{d}'_m \rangle \quad (3.22)$$

où dans le terme de droite la première ligne décrit la cascade non-linéaire, la deuxième, l'injection au taux ε_F (= (3.21)), et la troisième, la dissipation (ε_D = (3.22)). Cette équation est une loi exacte de type von Karman, Howarth et Monin (KHM) (KARMAN et HOWARTH 1938 ; FRISCH 1995 ; GALTIER 2021). Elle est valable dans et en dehors de la zone inertie. En $\ell = 0$, on retrouve l'équation de densité d'énergie totale moyenne dans ce système : $\partial_t \langle E_{tot} \rangle = \langle E_F \rangle + \langle E_D \rangle$ avec $\langle E_F \rangle = \rho_0 \langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}_c + \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{f}_m \rangle$, la densité d'énergie moyenne injectée et $\langle E_D \rangle = \rho_0 \langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{d}_c + \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{d}_m \rangle$, la densité d'énergie moyenne dissipée. Si le système est conservatif, $\langle E_F \rangle = -\langle E_D \rangle$.³

Pour définir le taux de cascade, ε_{NL} , on doit appliquer les hypothèses de stationnarité statistique et de séparations d'échelle de Kolmogorov : les taux de cascade, injection, ε_F , et dissipation, ε_D , considérés dans leur domaine d'échelles respectif, doivent s'égaliser. En

3. Afin que $\langle E_F \rangle = -\langle E_D \rangle$ soit respecté ε_F ne doit pas s'annuler aux échelles où le forçage n'a pas d'influence mais plutôt être égal à $\langle E_F \rangle$. $\varepsilon_F(\ell)$ ne représente donc pas l'énergie qui est injecté à l'échelle ℓ mais plutôt l'énergie qui a été injecté dans la cascade aux échelles $> \ell$, où le forçage est actif.

effet, en cas de stationnarité statistique, le terme d'évolution temporelle s'annule et avec la séparation d'échelles, l'énergie qui est injectée à grande échelle n'a pas d'autre choix que de cascader avant d'être dissipée. On notera ce taux de transfert à l'équilibre ε . Ainsi si l'on regarde en une frontière, ℓ_f par exemple entre la zone d'injection et la zone inertie, (.3.22) s'annule, (.3.21) = $\varepsilon_F(\ell_f^+) = \varepsilon_{NL}(\ell_f^-) = \varepsilon$ et finalement :

$$\varepsilon = -\frac{1}{4}\rho_0\nabla_\ell \cdot <\delta\mathbf{v} \cdot \delta\mathbf{v} \delta\mathbf{v} + \delta\mathbf{v}_A \cdot \delta\mathbf{v}_A \delta\mathbf{v} + 2\delta\mathbf{v} \cdot \delta\mathbf{v}_A \delta\mathbf{v}_A> \quad (.3.23)$$

Cette équation est la loi exacte PP98 pour l'énergie totale du modèle IMHD, obtenue à partir de la théorie de Kolmogorov (similairement aux lois exactes dites génériquement «KHM», on appellera ces lois exactes obtenues à partir de la théorie de Kolmogorov, «lois K41»). Cette formule du taux de cascade ε_{NL} nous permet, dans le vent solaire par exemple, d'estimer le taux de transfert à l'équilibre ε (valeur dans la zone inertie) et donc le taux de dissipation turbulente (i.e. permis par la cascade turbulente) pour répondre par exemple au problème du chauffage (BRUNO et CARBONE 2013). En effet, ce taux est difficile à estimer directement : il faudrait définir quels processus cinétiques dissipent l'énergie et surpasser les limites de résolutions des instruments de mesures.

Phénoménologiquement, ε étant supposé constant et avec l'hypothèse d'isotropie, on remarque que : $(\delta\mathbf{v})^3 \sim (\delta\mathbf{v}_A)^3 \sim \varepsilon\ell \Rightarrow (\delta\mathbf{v})^2 \sim (\delta\mathbf{v}_A)^2 \sim \ell^{2/3}$, ce qui donne les spectres 1D d'énergie cinétique et magnétique en $E(k) \sim k(\delta\mathbf{v}(k))^2 \sim k(\delta\mathbf{v}_A(k))^2 \sim k^{-5/3}$. On retrouve ainsi la loi phénoménologique des spectres en $-5/3$ de Kolmogorov étendue aux fluides magnétisés.⁴

Pour en revenir à la différence entre les fonctions de corrélation, regardons ce qu'il se passe si l'on considère une fonction incrémentale, par exemple $\mathcal{S} = <\frac{1}{2}\rho_0\delta\mathbf{v}^2 + \frac{1}{2}\rho_0\delta\mathbf{v}_A^2>$ formée de fonctions de structure d'ordre 2 qui rappelle celles d'ordre 3 impliquées dans le taux de cascade. On remarque que $\mathcal{S} = 2 < E_{tot} > - 2\mathcal{R}$. Ainsi la loi exacte KHM (.3.20) devient :

$$\partial_t \mathcal{S} = -\frac{1}{2}\rho_0\nabla_\ell \cdot <\delta\mathbf{v} \cdot \delta\mathbf{v} \delta\mathbf{v} + \delta\mathbf{v}_A \cdot \delta\mathbf{v}_A \delta\mathbf{v} + 2\delta\mathbf{v} \cdot \delta\mathbf{v}_A \delta\mathbf{v}_A> \quad (.3.24)$$

$$+ \rho_0 <\delta\mathbf{v} \cdot \delta\mathbf{f}_c + \delta\mathbf{v}_A \cdot \delta\mathbf{f}_m> \quad (.3.25)$$

$$+ \rho_0 <\delta\mathbf{v} \cdot \delta\mathbf{d}_c + \delta\mathbf{v}_A \cdot \delta\mathbf{d}_m> \quad (.3.26)$$

Similairement aux appellations lois KHM et K41, on utilisera le nom générique «KHMS» pour indiquer le type de lois obtenu avec une fonction incrémentale. La partie non-linéaire, le taux de cascade, n'est pas impactée. Mais une question émerge : les définitions des taux de forçage et de dissipations dépendants de \mathbf{f}_c , \mathbf{f}_m et \mathbf{d}_c , \mathbf{d}_m extraites de (.3.20) et celles extraites de (.3.24) sont-elles équivalentes ? Regarder \mathcal{S} ou \mathcal{R} revient à regarder ou une quantité énergétique incrémentale ou celle restant dans un bilan énergétique total moyen, $< E_{tot} > = \mathcal{S}/2 + \mathcal{R}$ définit suivant les échelles. C'est la même chose pour les définitions des taux d'injection et de dissipation. Le choix de la définition, incrémentale ou non, des taux, dépend donc du point de vue que l'on veut étudier et comme on vient de le voir, il est très facile de passer, analytiquement, d'une loi KHM à une loi KHMS.

4. Lorsque le champ magnétique est important, de l'anisotropie apparaît dans l'espace de Fourier entre la direction parallèle au champ magnétique et le plan perpendiculaire. La description phénoménologique doit donc être complétée par exemple par la condition dite de "critical balance" (GOLDREICH et SRIDHAR 1995 ; HORBURY, M FORMAN et OUGHTON 2008).

3.4 Synthèse des définitions et méthodes (cadre IMHD)

Modèle constraint tel que $\rho = \rho_0 \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$:

$$\partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} - \mathbf{v}_A \cdot \nabla \mathbf{v}_A + \frac{1}{\rho_0} \nabla p_* = \mathbf{f}_c + \mathbf{d}_c \quad (.3.27)$$

$$\partial_t \mathbf{v}_A + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}_A - \mathbf{v}_A \cdot \nabla \mathbf{v} = \mathbf{f}_m + \mathbf{d}_m \quad (.3.28)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \nabla \cdot \mathbf{v}_A = 0 \quad (.3.29)$$

Points méthodologiques de linéarisation (voir figure .3.1) :

- Négliger toutes quantités ou termes n'étant pas d'ordre 0 ou 1
- $\mathbf{v} \simeq \mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_A \simeq \mathbf{v}_{A0} + \mathbf{v}_{A1}$ avec $\mathbf{v}_{A0} = v_{A0} \mathbf{b}_0$ et $\mathbf{b}_0 = \mathbf{e}_z$
- Passage dans l'espace de Fourier : $\partial_t \rightarrow -i\omega$ et $\nabla \rightarrow i\mathbf{k}$ avec

$$\mathbf{k} = k_\perp \mathbf{e}_x + k_\parallel \mathbf{e}_z = k(\sin \theta \mathbf{e}_x + \cos \theta \mathbf{e}_z)$$

Relation de dispersion linéaire : Existence de modes d'Alfvén

$$\omega = \pm k_\parallel v_{A0} = \pm v_{A0} k \cos \theta \quad (.3.30)$$

Hypothèses de Kolmogorov :

- Homogénéité statistique
 - Stationnarité statistique
 - Séparation des gammes d'échelles d'injection/forçage (où le taux ε_F agit seul), de cascade/inertielles (resp. ε_{NL}), et de dissipation/chauffage (resp. ε_D).
- $\Rightarrow \varepsilon_{NL} = \varepsilon_F = \varepsilon_D$ chacun considéré dans sa zone d'échelles. Cette valeur sera notée ε .

Fonctions de corrélation d'énergie totale et moyennes statistiques :

- $\mathcal{R} = \frac{1}{2} \rho_0 < \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}' + \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}'_A >$
- $\mathcal{S} = \frac{1}{2} \rho_0 < (\delta \mathbf{v})^2 + (\delta \mathbf{v}_A)^2 > = 2 < E_{tot} > - 2\mathcal{R}$
- $< E_{tot} > = \mathcal{R}(\ell = 0)$, $< E_F > = \varepsilon_F(\ell = 0)$, $< E_D > = \varepsilon_D(\ell = 0)$

Équations statistiques (énergie totale moyenne, lois exactes KHM et KHMS) :

$$\partial_t < E_{tot} > = < E_F > + < E_D > \quad (.3.31)$$

$$\begin{aligned} \partial_t \mathcal{R} = -\varepsilon_{NL} + \varepsilon_F + \varepsilon_D &= \frac{1}{4} \rho_0 \nabla_\ell \cdot < \delta \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v} \delta \mathbf{v} + \delta \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{v}_A \delta \mathbf{v} + 2 \delta \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v}_A \delta \mathbf{v}_A > \\ &\quad + \frac{1}{2} \rho_0 < \mathbf{v}' \cdot \mathbf{f}_c + \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}'_c + \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{f}_m + \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{f}'_m > \\ &\quad + \frac{1}{2} \rho_0 < \mathbf{v}' \cdot \mathbf{d}_c + \mathbf{v} \cdot \mathbf{d}'_c + \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{d}_m + \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{d}'_m > \end{aligned} \quad (.3.32)$$

$$\begin{aligned} \partial_t \mathcal{S} = -\mathcal{E}_{NL} + \mathcal{E}_F + \mathcal{E}_D &= -\frac{1}{2} \rho_0 \nabla_\ell \cdot < \delta \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v} \delta \mathbf{v} + \delta \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{v}_A \delta \mathbf{v} + 2 \delta \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v}_A \delta \mathbf{v}_A > \\ &\quad + \rho_0 < \delta \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{f}_c + \delta \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{f}_m > \\ &\quad + \rho_0 < \delta \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{d}_c + \delta \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{d}_m > \end{aligned} \quad (.3.33)$$

Loi exacte PP98 sur les taux d'énergie (type K41) :

$$\varepsilon = -\frac{1}{4} \rho_0 \nabla_\ell \cdot < \delta \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v} \delta \mathbf{v} + \delta \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{v}_A \delta \mathbf{v} + 2 \delta \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v}_A \delta \mathbf{v}_A > \quad (.3.34)$$

PARTIE I : Le chauffage turbulent dans un plasma compressible avec pression isotrope

There is even a humorous statement about this by a well-known theoretical physicist who compared the theory of turbulence without pressure with a someone who has lost his manhood.

**Sergey G. CHEFRANOV et Artem S.
CHEFRANOV⁵**

INTRODUCTION

Le modèle incompressible est encore très utilisé (MARINO et SORRISO-VALVO 2023) pourtant le caractère compressible des fluctuations et des structures présentes dans le vent solaire est observé et identifié depuis les premières missions spatiales (TU et MARSCH 1995). Les travaux présentés dans cette partie se placent dans la continuité d'un effort d'extension de la théorie de Kolmogorov aux plasmas compressible entrepris depuis GALTIER et BANERJEE 2011.

Dans le chapitre 1, sera présenté le modèle compressible sur lequel seules deux contraintes seront imposées dans cette partie I : une pression de type isotrope et une équation d'induction de type idéale. Diverses relations thermodynamiques y seront analysées pour fermer ce modèle fluide.

Dans le chapitre 2, sera résumé l'extension analytique compressible avec pression isotrope de la théorie de Kolmogorov à travers les premiers résultats que j'ai obtenus.

Dans le chapitre 3, nous parlerons observation et données in-situ à travers une application de nos premiers résultats analytique dans les premières données obtenues près du Soleil par la sonde Parker Solar Probe (PSP). Cette étude de cas effectuée, j'ai ensuite amorcé une étude statistique dans des données relevées dans la magnétogaine par la mission Magnetospheric Multiscale (MMS).

Chaque chapitre sera achevé par une synthèse des méthodes et résultats. L'apport du travail présenté ici y sera encadré en rouge et les résultats provenant de l'état de l'art y seront encadrés en bleu.

PARTIE I : CHAPITRE 1

L QUE SAIT-ON SUR LE MODÈLE COMPRESSIBLE ?

Sommaire

1.1	Energétique du modèle non fermé	35
1.2	Fermetures thermodynamique	36
1.3	Propriétés linéaires	40
1.4	Synthèse sur le modèle compressible avec pression isotrope .	42

Lorsque la contrainte d'incompressibilité qui servait de fermeture au système d'équation est relaxée, le modèle n'est plus fermé. Dans ce chapitre, seront définis différents types de fermetures en considérant toujours une pression isotrope. On regardera ce qu'il advient du taux de cascade dans le chapitre suivant.

1.1 Energétique du modèle non fermé

Si l'on reprend les équations du modèle MHD idéal dérivées du modèle cinétique dans l'introduction et que l'on suppose une pression isotrope, on obtient le système écrit avec la vitesse d'Alfvén, $\mathbf{v}_A = \frac{\mathbf{B}}{\sqrt{\mu_0 \rho}}$, :

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (I.1.1)$$

$$\partial_t(\rho \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v} - \rho \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A) + \nabla p_* = 0 \quad (I.1.2)$$

$$3\partial_t p + \nabla \cdot (3\rho \mathbf{v} + 2\mathbf{q}) + 2p \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (I.1.3)$$

$$\partial_t \mathbf{v}_A - \nabla \cdot (\mathbf{v}_A \mathbf{v} - \mathbf{v} \mathbf{v}_A) + \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{v}_A - \frac{\mathbf{v}_A}{2} \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (I.1.4)$$

La contrainte sur le champ magnétique peut s'écrire : $\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}_A) = -\rho \nabla \cdot \mathbf{v}_A$. Ce système n'est pas fermé, mais avant de le fermer, regardons ce qu'il nous indique en terme d'énergétique. L'équation de densité d'énergie cinétique $E_c = \frac{1}{2}\rho \mathbf{v}^2$ obtenue via (I.1.1) et (I.1.2) est :

$$\partial_t E_c + \nabla \cdot (E_c \mathbf{v} + p_* \mathbf{v} - \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A) = -\rho \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A : \nabla \mathbf{v} + p_* \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (I.1.5)$$

L'équation de densité d'énergie magnétique $E_m = \frac{1}{2}\rho \mathbf{v}_A^2$ obtenue via (I.1.1) et (I.1.4) est :

$$\partial_t E_m + \nabla \cdot (E_m \mathbf{v}) = \rho \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A : \nabla \mathbf{v} - p_m \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (I.1.6)$$

On remarque que l'échange entre ces deux canaux énergétiques se fait à travers la pression magnétique et un terme croisé (termes de droite de (I.1.6)) similaire au cas incompressible. La densité d'énergie totale moyenne $\langle E_{tot} = E_c + E_m + E_u \rangle$ est un invariant de système, ce qui nous autorise, a priori, à appliquer la méthode résumée dans la section 3.4 de la partie Introduction pour en étudier la cascade. Afin que cette énergie soit conservée, il faut ajouter une équation annulant le terme source dépendant de p dans l'équation d'énergie cinétique (I.1.5). Cette équation est l'équation de densité d'énergie interne, $E_u = \rho u$ avec u l'énergie interne spécifique, dans laquelle on doit aussi faire figurer un terme de flux de chaleur, $\nabla \cdot \mathbf{q}$:

$$\partial_t E_u + \nabla \cdot (E_u \mathbf{v} + \mathbf{q}) = -p \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (\text{I.1.7})$$

L'équation de densité d'énergie totale, $E_{tot} = E_c + E_m + E_u$, est alors :

$$\partial_t E_{tot} + \nabla \cdot (E_{tot} \mathbf{v} + p_* \mathbf{v} - \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A + \mathbf{q}) = 0 \quad (\text{I.1.8})$$

On peut remarquer que dans le cas incompressible, l'énergie interne (I.1.7) est découpée de l'énergie cinétique (I.1.5) et par ce biais de l'énergie magnétique (I.1.6) puisque $p \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$. Via cette méthode basée sur un bilan, nous obtenons, indépendamment de la fermeture, une équation d'évolution pour l'énergie interne ECKART 1940. L'obtention d'une équation de densité d'énergie totale est donc possible sans expliciter de fermeture qui pourra donc être injectée par la suite. Ces équations ((I.1.7) et (I.1.8)) sont générales car elles sont applicable à toutes données, tous modèles respectant le comportement des premiers moments fluides obtenu via l'équation de Vlasov (ρ (I.1.1) et \mathbf{v} (I.1.2)) et l'équation d'induction (I.1.4), mais elle n'est pas complète, pas fermée, rien n'y impose le respect de l'équation (I.1.3) concernant p qui pourrait être défini autrement et \mathbf{q} reste indéfini. Cette observation présage la possibilité d'obtenir une loi exacte tout aussi générale sur la cascade de densité d'énergie totale comme on le verra dans le chapitre 2.

1.2 Fermetures thermodynamique

En MHD compressible avec pression isotrope, l'équation de fermeture est souvent une relation entre la pression, p , et la densité, ρ , issue de la thermodynamique et venant se substituer à l'équation sur la pression (I.1.3).¹ Par la suite, on appellera thermodynamique tout ce qui est relatif à la densité, la pression, l'énergie interne, etc. (grandeur supposément définies et convergentes dans le cadre fluide) et pouvant relever du champ de discipline empirique de la thermodynamique à l'équilibre (BOREL et FAVRAT 2005) possiblement étendu au cadre hors équilibre (LIVADIOTIS et MCCOMAS 2012).

Le premier principe de la thermodynamique peut s'écrire

$$du = \delta q + \delta w = Tds + \frac{p}{\rho^2} d\rho \quad (\text{I.1.9})$$

avec q la chaleur et w le travail de pression. En y formant la dérivée temporelle totale à partir des dérivées partielles : $d_t = \partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla$ et en injectant l'équation de densité de

1. On pourrait aussi fermer au niveau des moments suivant via une loi de Fourier sur le flux de chaleur, $\mathbf{q} = -\kappa \nabla T$, (belmont_introduction_2018) ou la fermeture à l'ordre 4 proposé par CHUST et BELMONT 2006 par exemple. On ne détaillera pas ces possibilités ici mais on notera que le flux de chaleur peut, via κ , la viscosité thermique, n'avoir un impact qu'aux petites échelles, telle que les dissipations visqueuse et résistive (EYINK et DRIVAS 2018).

masse (I.1.1), on retrouve une équation sur la densité d'énergie interne :

$$d_t(\rho u) = \rho T d_t s - (p + \rho u) \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (\text{I.1.10})$$

Cette équation est compatible avec l'équation (I.1.7) si $\nabla \cdot \mathbf{q} = -\rho T d_t s$, s étant l'entropie spécifique et T la température. Ces équations sont compatibles avec l'équation de pression (I.1.3) si l'on impose $\rho u = \frac{3}{2}p$. On verra que ce n'est pas forcément le cas avec les fermetures de type thermodynamique.

La définition originale, thermodynamique (BOREL et FAVRAT 2005), des dénominations «polytrope», «isochore», «isobare», «isotherme» ou «isentrope» ne s'applique qu'à des transformations :

- isochore (ou incompressible puisque $\rho = m/V$) signifie à volume V constant
- isobare signifie à pression P constante,
- isotherme signifie à température T constante,
- isentrope signifie à entropie s constante, elle ne peut être ni créée ni échangée par transfert thermique,
- adiabatique signifie sans transfert thermique δq , c'est-à-dire sans échange d'entropie,
- polytrope signifie à $\sigma = \frac{T ds}{V dP}$, le facteur polytrope, constant.

La transformation adiabatique est synonyme de l'isentrope si aucune entropie n'est créée (cas réversible). En astrophysique et physique des plasmas, on entend ces termes en tant que caractéristique du système et ils sont utilisés pour qualifier une fermeture. Ici, dans une volonté de clarifier cet usage, on considérera qu'un système décrit idéalement avec l'une de ces caractéristiques est un système dans lequel la quantité caractérisée ne pourra évoluer qu'en suivant le type de transformation associée. En réalité, ces caractéristiques coexistent souvent, l'une pouvant dominer les autres, par exemple dans les plasmas spatiaux (LIVADIOTIS et MCCOMAS 2012). L'hypothèse polytrope est particulière dans le sens où suivant la valeur de σ , on peut se retrouver dans le cadre des hypothèses isochore, isobare, isotherme, adiabatique ou isentrope (BOREL et FAVRAT 2005).

D'après HOREDT 2004, l'hypothèse polytrope, introduite par CHANDRASEKHAR 1939 en astrophysique est définie telle que pV^γ constant avec $\gamma = \frac{c_p - c}{c_v - c}$, nommé indice spectral ou indice polytropique, $c = \frac{dQ}{dT}$ étant la chaleur spécifique, c_p la chaleur spécifique à pression constante et c_v celle à volume constant. Cette définition rappelle celle de l'indice adiabatique $\gamma_a = c_p/c_v$. On peut d'ailleurs réécrire γ en fonction de γ_a en se plaçant dans le cadre d'un gaz parfait ($PV \propto T$) et en utilisant les relations (1.2.19) à (1.2.24) de HOREDT 2004. Ainsi $\gamma = (\gamma_a - 1)K + \gamma_a$ avec $K = \frac{\delta q}{\delta w} = \frac{T ds}{-P dV}$. Sachant que $d(pV^\gamma) = 0$, le lien entre pV^γ et $\sigma = \frac{T ds}{V dP}$ est $\sigma = K/\gamma = \frac{1-\gamma_a/\gamma}{\gamma_a-1}$. D'où l'équivalence des définitions via σ et γ .²

La figure I.1.1 inspirée de LIVADIOTIS et MCCOMAS 2012, complétée avec les valeurs de σ et quelques exemples de plasmas spatiaux données par LIVADIOTIS 2018 résume le lien entre les différentes fermetures et l'hypothèse polytrope. Les plasmas spatiaux pouvant être modélisés comme des gaz parfaits monoatomiques, $\gamma_a = 5/3$ et dans le cas isochore, $\sigma = \frac{1}{\gamma_a-1} = 3/2$.

Dans le premier principe (I.1.9) et l'équation d'énergie interne (I.1.10), l'utilisation de

2. L'intérêt de la définition via σ met en lumière la différence entre les transformations polytropes et les transformations adiabatiques/isentrope qui semblent souvent confondues en astrophysique (EYINK et DRIVAS 2018), en particulier car le flux de chaleur semble "disparaître" dans l'obtention de la forme explicite de l'énergie interne.

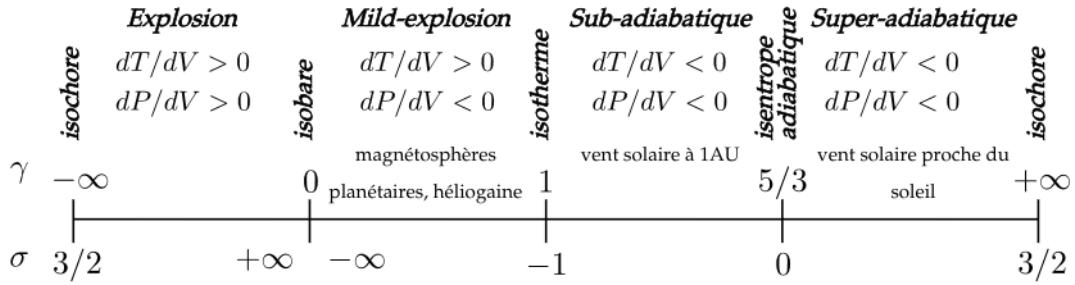


FIGURE I.1.1 – Transformations thermodynamiques et intervalles en fonction du γ du milieu (LIVADIOTIS et MCCOMAS 2012) et du σ (BOREL et FAVRAT 2005), exemple de plasmas spatiaux (LIVADIOTIS 2018). Adiabatique et isentrope y sont confondus dans le cas réversible.

σ permet d'écrire :

$$du = \delta q + \delta w = (K + 1)\delta w = (\sigma\gamma + 1)\delta w \quad (I.1.11)$$

$$d_t(\rho u) = -[(\sigma\gamma + 1)p + \rho u]\nabla \cdot \mathbf{v} \quad (I.1.12)$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{q} = -\rho T d_t s = \sigma\gamma p \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (I.1.13)$$

D'un autre côté, la relation entre p et V peut s'écrire $p \propto \rho^\gamma$. Cela donne l'équation :

$$d_t p = -\gamma p \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (I.1.14)$$

Cette équation est compatible avec l'équation de pression du modèle fluide (I.1.3) si :

$$\left(\frac{5}{3} - \gamma\right)p \nabla \cdot \mathbf{v} = -\frac{2}{3}\nabla \cdot \mathbf{q} \Rightarrow \left(\frac{5}{3} + \left(\frac{2}{3}\sigma - 1\right)\gamma\right)p \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (I.1.15)$$

Par ces relations, on remarque que l'hypothèse polytrope peut nous permettre de fermer le modèle fluide au niveau du 3ème moment \mathbf{q} en injectant (I.1.13) dans l'équation de p (I.1.3), ou au niveau du 2ème, p , en utilisant γ et en injectant $p \propto \rho^\gamma$ dans (I.1.2). L'hypothèse adiabatique, isentrope si réversible, $\gamma = \gamma_a$ et $\nabla \cdot \mathbf{q} = 0$, est retrouvée dans l'évolution fluide de p si l'on se place dans le cadre d'un gaz parfait monoatomique $\gamma_a = 5/3$ d'après (I.1.15). Dans le cas isotherme, on retrouve dans (I.1.15) ou (I.1.11), $\delta w = -\delta q$, c'est-à-dire $du = 0$. En effet, l'énergie interne d'un gaz parfait ne dépendant que de la température, elle ne peut qu'être nulle sous l'hypothèse d'isothermie. Les cas isochore (ou incompressible) et isobare sont plus délicats. Dans le cas isochore, le produit $\gamma \nabla \cdot \mathbf{v}$ qui apparaît dans toutes les expressions de (I.1.11) à (I.1.15), tend vers $\infty \times 0$. Dans le cas isobare, $\infty \times 0$ apparaît dès que $\sigma\gamma$ est présent dans l'équation. Ces limites du cas polytrope sont donc problématiques dans la définition de u . Elles doivent être traitées indépendamment. Cela a été fait dans le chapitre sur la cascade incompressible pour le cas isochore. L'hypothèse isobare, quant à elle, ferme le système fluide au niveau de l'équation (I.1.2) et empêche tout échange énergétique entre les canaux interne et cinétique-magnétique.

Dans le cadre de la fermeture polytrope, $p = \frac{c_s^2}{\gamma} \rho^\gamma$, avec $c_s^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho}$ le carré de la vitesse

thermique. Pour ce qui est de la variation d'énergie interne spécifique, elle devient :

$$du = (\sigma\gamma + 1) \frac{p}{\rho^2} d\rho = (\sigma\gamma + 1) \frac{p}{\rho^\gamma} \rho^{\gamma-2} d\rho \quad (I.1.16)$$

$$= \begin{cases} \frac{\sigma\gamma+1}{\gamma-1} \frac{p}{\rho^\gamma} d\rho^{\gamma-1} & \text{si } \gamma \neq 1 \\ (\sigma + 1) \frac{p}{\rho} d(\ln \rho) & \text{si } \gamma = 1 \end{cases} \quad (I.1.17)$$

Et par intégration :

$$u - u_0 = \begin{cases} \frac{\sigma\gamma+1}{\gamma-1} \frac{p}{\rho^\gamma} (\rho^{\gamma-1} - \rho_0^{\gamma-1}) & \text{si } \gamma \neq 1 \\ (\sigma + 1) \frac{p}{\rho} \ln \frac{\rho}{\rho_0} & \text{si } \gamma = 1 \end{cases} \quad (I.1.18)$$

en notant u_0 et ρ_0 les constantes d'intégrations. Dans le cas particulier de la fermeture isotherme : $\gamma = 1$, $\sigma = -1$, $p = c_s^2 \rho$ avec c_s constante et $du = 0$.

La cascade turbulente est, dans les plasmas spatiaux peu collisionnels, une réponse au problème du chauffage. En définissant le chauffage comme la variation de température et sachant que pour un gaz parfait la relation entre énergie interne et température est linéaire, il est facile de définir le chauffage comme tout transfert d'énergie vers l'énergie interne, appelée aussi énergie thermique (CASSAK et BARBUIYA 2022). Le terme de pression dans l'équation (I.1.2) s'interprète alors comme les termes visqueux et résistifs abordés dans le chapitre 3, c'est à dire comme un terme "dissipatif". Mais ce serait oublier que la cascade turbulente permet de faire le lien entre les grandes échelles, fluides où la température est définie, et les petites, cinétique/particulaire/locale. Dans le cadre cinétique/particulaire, on ne peut pas définir de température et le chauffage sera visible dans le mouvement, de plus en plus désordonné, des particules. Ce désordre est mesurable macroscopiquement à travers l'entropie. Chauffer à petite échelle a donc un impact entropique. C'est possible via les termes visqueux par exemple. D'après EYINK et DRIVAS 2018, ils transfèrent l'énergie cinétique à l'énergie interne tout en contribuant à l'équation d'entropie contrairement au terme de pression isotrope. C'est aussi le cas du flux de chaleur s'il est défini via la loi de Fourier et la viscosité thermique κ . Pour répondre à la question de chauffage, le taux de cascade doit donc prendre en compte l'énergie étant transférée isentropiquement à l'énergie interne. Cette interprétation justifie l'hypothèse que seul le terme de travail de l'énergie interne affecte la cascade dans la zone inertielle proposée par GALTIER et BANERJEE 2011. Cette hypothèse revenant à supposer une zone inertielle isentropique telle que $\sigma = 0$. Si le système global fermé tel que $\gamma \neq \gamma_a$, le terme de chaleur joue un rôle aux autres échelles et s'adapte afin que les relations thermodynamiques soient respectées. La fermeture considérée par GALTIER et BANERJEE 2011 est la fermeture isotherme qui alors implique dans la zone inertielle : $\gamma = 1$, $\sigma = 0$, $p = c_s^2 \rho$ avec c_s constante et $du = \delta w \Rightarrow u - u_0 = \frac{p}{\rho} \ln \frac{\rho}{\rho_0}$. On appellera cette fermeture «isentrope-isotherme». En suivant cette logique, je me suis intéressée dans SIMON et SAHRAOUI 2021 à la fermeture «isentrope-polytrope» : $\sigma = 0$, $p = \frac{c_s^2}{\gamma} \rho^\gamma$ et

$$u - u_0 = \begin{cases} \frac{1}{\gamma-1} \frac{p}{\rho^\gamma} (\rho^{\gamma-1} - \rho_0^{\gamma-1}) & \text{si } \gamma \neq 1 \\ \frac{p}{\rho} \ln \frac{\rho}{\rho_0} & \text{si } \gamma = 1 \end{cases} \quad (I.1.19)$$

Dans l'usage des formes explicite de l'énergie interne dans les calculs de lois exactes avec l'hypothèse polytrope, les constantes sont souvent annulées entre elles. Par exemple, dans le cas «isentrope-polytrope», BANERJEE et GALTIER 2014 considère comme forme

explicite de l'énergie interne $\rho u = \frac{1}{(\gamma-1)}p$. Contrairement à ce travail, nous avons choisi de maintenir une forme de compatibilité avec la fermeture «isentrope-isotherme» de GALTIER et BANERJEE 2011 (si $u = u_0$ alors $u = 0$) dans nos choix de constantes.

ALUI, S LI et H LI 2012 observent en détail la cascade d'énergie cinétique et magnétique dans différentes simulations subsoniques à transoniques. Le transfert cinétique-interne via la pression semble n'avoir lieu qu'à grande échelle dans une zone qu'ils appellent «zone de conversion», à plus petites échelles cette contribution reste constante. Ils en déduisent un découplage des cascades d'énergie cinétique et d'énergie interne et l'existence d'une zone inertielle cinétique. EYINK et DRIVAS 2018 déduisent aussi, analytiquement, un effet à grande échelle de la pression qui permettrait d'alimenter des structures cohérentes et de réduire l'entropie à grande échelle. Cela induirait une cascade inverse d'entropie vers les grandes échelles et un équilibre s'établirait entre les cascades énergétique totale et d'entropie. Aucun de ces résultats ne prouve que l'énergie interne de cascade pas. Ne pas la prendre en compte dans l'estimation du taux de chauffage comme le propose HELLINGER, VERDINI et al. 2018 est donc hasardeux et n'est justifiable que dans le cas subsonique ou à suffisamment petites échelles où sa contribution semble mineure (ANDRÉS, SAHRAOUI, GALTIER, LZ HADID, DMITRUK et al. 2018; FERRAND, GALTIER, SAHRAOUI et FEDERRATH 2020). Etudier la cascade dans une zone inertielle où la pression ne transférerait pas d'énergie vers l'énergie interne, c'est à dire ne varierait pas, correspondrait à regarder une zone inertielle isobare et ne semble donc pas physiquement absurde mais étant intéressés par l'impact de la pression sur la cascade turbulente totale, cette hypothèse réductrice n'a été que brièvement envisagée.

Sont résumés dans la table 1.2, les caractéristiques, dénominations et choix de constante des fermetures définies polytropiquement qui serviront par la suite.

Nom	Paramètres polytropes	Pression	Energie interne explicite
Polytrope	$\{\sigma, \gamma\}$	$\frac{p}{\rho} = \frac{c_s^2}{\gamma}$	$u = \frac{\sigma+1}{\gamma-1} \frac{c_s^2 - c_{s0}^2}{\gamma}$ ou $(\sigma + 1)c_s^2 \ln \frac{\rho}{\rho_0}$
Isotherme	$\{-1, 1\}$	$\frac{p}{\rho} = c_s^2$	$u = 0$
Isentrope-polytrope	$\{0, \gamma\}$	$\frac{p}{\rho} = \frac{c_s^2}{\gamma}$	$u = \frac{1}{\gamma-1} \frac{c_s^2 - c_{s0}^2}{\gamma}$ ou $c_s^2 \ln \frac{\rho}{\rho_0}$
Isentrope-isotherme	$\{0, 1\}$	$\frac{p}{\rho} = c_s^2$	$u = c_s^2 \ln \frac{\rho}{\rho_0}$

TABLE I.1.1 – Fermetures et relations associées. La forme de l'énergie interne de l'isentrope-isotherme est calquée sur celle utilisée dans le papier GALTIER et BANERJEE 2011. Les autres sont définies de telle sorte à maintenir une forme de compatibilité : si $u = u_0$ alors $u = 0$. Celle de l'isentrope-polytrope est donc légèrement différente de celle utilisée par BANERJEE et GALTIER 2014.

1.3 Propriétés linéaires

Dans le cadre de l'obtention d'une relation de dispersion compressible, on fermera le système avec la fermeture polytrope pour rester dans le cas le plus général possible. Ainsi,

on utilise le système d'équations :

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (I.1.20)$$

$$\partial_t(\rho \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v} - \rho \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A) + \nabla p_* = 0 \quad (I.1.21)$$

$$\partial_t \mathbf{v}_A - \nabla \cdot (\mathbf{v}_A \mathbf{v} - \mathbf{v} \mathbf{v}_A) + \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{v}_A - \frac{\mathbf{v}_A}{2} \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (I.1.22)$$

fermé par et $p = \frac{c_s^2}{\gamma} \rho$.

L'application de la méthode de linéarisation présentée dans le chapitre I.3 nous donne l'équation de dispersion suivante :

$$\begin{pmatrix} \frac{\omega^2}{k_{\parallel}^2 v_{A0}^2} - (1 + \frac{\gamma}{2} \beta_0) \frac{k_{\perp}^2}{k_{\parallel}^2} - 1 & 0 & -\frac{\gamma}{2} \beta_0 \frac{k_{\perp}}{k_{\parallel}} \\ 0 & \frac{\omega^2}{k_{\parallel}^2 v_{A0}^2} - 1 & 0 \\ -\frac{\gamma}{2} \beta_0 \frac{k_{\perp}}{k_{\parallel}} & 0 & \frac{\omega^2}{k_{\parallel}^2 v_{A0}^2} - \frac{\gamma}{2} \beta_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_x^{(1)} \\ v_y^{(1)} \\ v_z^{(1)} \end{pmatrix} = 0 \quad (I.1.23)$$

avec $\beta_0 = \frac{2 \langle p \rangle}{\langle \rho \rangle v_{A0}^2}$ le paramètre β linéarisé du plasma (la notation indicelle 0 telle que définie dans le chapitre 3 n'est pas utilisée pour p et ρ afin d'éviter toute confusion avec les constantes d'intégrations définies dans la section 1.2). La relation de dispersion est donnée par l'annulation du déterminant de la matrice, c'est-à-dire, :

$$0 = \left(\frac{\omega^2}{k_{\parallel}^2 v_{A0}^2} - 1 \right) \left(\frac{\omega^2}{k_{\parallel}^2 v_{A0}^2} - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\gamma}{2} \beta_0 \pm \sqrt{\Delta} \right) \right) \quad (I.1.24)$$

avec $\Delta = (1 + \frac{\gamma}{2} \beta_0)^2 + 2\gamma\beta_0 \sin^2 \theta = (1 + \frac{\gamma}{2} \beta_0)^2 - 2\gamma\beta_0 \cos^2 \theta$ en notant θ l'angle entre \mathbf{k} et \mathbf{e}_z . La première racine correspond au mode d'Alfvén incompressible et les deux autres aux modes magnétonores rapides (+) et lents (-). Ces modes sont stables, puisque $\Delta > 0$ et $\frac{1}{2}(1 + \frac{\gamma}{2} \beta_0 \pm \sqrt{\Delta}) > 0$. Ces modes peuvent participer à la cascade, mais le mode d'Alfvén semble dominant (ANDRÉS, CLARK DI LEONI et al. 2017; BRODIANO, ANDRÉS et DMITRUK 2021).

1.4 Synthèse sur le modèle compressible avec pression isotrope

Modèle :

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (I.1.25)$$

$$\partial_t(\rho \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v} - \rho \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A) + \nabla p_* = 0 \quad (I.1.26)$$

$$\partial_t \mathbf{v}_A - \nabla \cdot (\mathbf{v}_A \mathbf{v} - \mathbf{v} \mathbf{v}_A) + \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{v}_A - \frac{\mathbf{v}_A}{2} \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (I.1.27)$$

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}_A) + \rho \nabla \cdot \mathbf{v}_A = 0 \quad (I.1.28)$$

Fermetures écrites dans le cadre général polytrope et formes explicites de l'énergie interne spécifique considérées (telles que $u_0 = u(\rho = \rho_0) = 0$) :

$$p = \rho \frac{c_s^2}{\gamma}, \quad c_s^2 \propto \rho^{\gamma-1}, \quad \sigma = \frac{\nabla \cdot \mathbf{q}}{\gamma p \nabla \cdot \mathbf{v}}$$

- cas polytrope hors isotherme : $u = \frac{\sigma\gamma+1}{\gamma(\gamma-1)}(c_s^2 - c_{s0}^2)$
- cas isotherme : $\sigma = -1$, $\gamma = 1$, $u = 0$ et c_s constants
- cas isentrope-polytrope hors isotherme : $\sigma = 0$ et $u = \frac{c_s^2 - c_{s0}^2}{\gamma(\gamma-1)}$
- cas isentrope-isotherme : $\sigma = 0$, $\gamma = 1$, c_s constant et $u = c_s^2 \ln \frac{\rho}{\rho_0}$

Equation d'énergie interne :

$$\text{Formulation générale : } \partial_t(\rho u) + \nabla \cdot (\rho u \mathbf{v} + \mathbf{q}) = -p \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (I.1.29)$$

$$\text{Premier principe thermo : } du = \delta q + \delta w = T ds + \frac{p}{\rho^2} d\rho \quad (I.1.30)$$

$$\text{Formulation thermo : } \partial_t(\rho u) + \nabla \cdot (\rho u \mathbf{v}) - \rho T ds = -p \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (I.1.31)$$

$$\Rightarrow \text{Compatibilité : } \nabla \cdot \mathbf{q} = -\rho T ds \quad (I.1.32)$$

$$\text{Formulation polytrope : } \partial_t(\rho u) + \nabla \cdot (\rho u \mathbf{v}) = -(\sigma\gamma + 1)p \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (I.1.33)$$

Equation de pression :

$$\text{Modèle fluide non fermé : } \partial_t p + \nabla \cdot (p \mathbf{v} + \frac{2}{3} \mathbf{q}) + \frac{2}{3} p \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (I.1.34)$$

$$\text{Fermeture polytrope } (p \propto \rho^\gamma) : \quad \partial_t p + \mathbf{v} \cdot \nabla p - \gamma p \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (I.1.35)$$

$$\Rightarrow \text{Compatibilité : } \left(\frac{5}{3} + \left(\frac{2}{3}\sigma - 1 \right)\gamma \right) \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (I.1.36)$$

Relation de dispersion linéaire :

$$0 = \left(\frac{\omega^2}{k_\parallel^2 v_{A0}^2} - 1 \right) \left(\frac{\omega^2}{k_\parallel^2 v_{A0}^2} - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\gamma}{2} \beta_0 \pm \sqrt{(1 - \frac{\gamma}{2} \beta_0)^2 + 2\gamma\beta_0 \sin^2 \theta} \right) \right) \quad (I.1.37)$$

La première racine correspond au mode d'Alfvén similaire à celui obtenu en incompressible et les deux autres aux modes magnétosonores rapide (+) et lent (-).

PARTIE I : CHAPITRE 2

DÉcrire la cascade compressible

Sommaire

2.1	Dérivation d'une loi exacte compressible générale pour décrire un écoulement turbulent polytrope	44
2.2	Reformulation de la loi K41 générale dépendant d'une pression isotrope	48
2.3	Contribution du flux de chaleur dans la loi KHM et deuxième reformulation	49
2.4	Synthèse de l'étude analytique de turbulence compressible avec pression isotrope	53

La variation du résultat de l'estimation d'un indice polytropique dans différents types de plasmas spatiaux (voir Figure I.1.1) vient motiver la dérivation d'une loi exacte polytrope pour étudier la cascade d'énergie totale dans ces milieux. L'objectif initial du travail présenté dans cette partie et dont la contribution originale analytique est introduite dans ce chapitre, était de dériver une loi exacte MHD polytrope, une extension des modèles MHD isothermes (BANERJEE et GALTIER 2013; ANDRÉS et SAHRAOUI 2017; ANDRÉS, GALTIER et SAHRAOUI 2018; FERRAND, GALTIER et SAHRAOUI 2021) et HD polytrope (BANERJEE et GALTIER 2014) existant. La cascade y est supposée isentrope dans la zone inertielle telle qu'initialement décrite par GALTIER et BANERJEE 2011 (cas HD isotherme). L'hypothèse d'une fermeture polytrope (resp. isotherme) avec une zone inertielle isentrope revient à la fermeture "isentrope-polytrope" (resp. isentrope-isotherme) discutée au chapitre précédent.

La méthode de calcul envisagée pour atteindre l'objectif initial à en réalité permis d'obtenir une loi exacte générale valable pour toutes les fermetures du système tant que l'isentropie est imposée dans la zone inertielle. Ce travail dont l'application à la fermeture "isentrope-polytrope" répond à l'objectif initial est présenté dans la section 2.1. Dans la section 2.2, on détaillera l'impact des fermetures sur une autre formulation de la loi qui a émergée du travail de relaxation de l'hypothèse d'isotropie de pression qui sera présenté dans le chapitre 1 de la partie II. Bien après avoir atteint l'objectif initial, on s'est posé la question de l'impact du flux de chaleur (a priori attendu en dehors de la zone inertielle) et on l'a pris en compte dans la loi KHM qui, ainsi, a réellement pris une dimension générale. Notre loi a alors adopté une troisième formulation qui sera présentée dans la section 2.3.

Des applications isobare, isotherme et polytrope y seront abordées en tant qu'exemple d'application clôturant ce travail de généralisation.

2.1 Dérivation d'une loi exacte compressible générale pour décrire un écoulement turbulent polytrope

La méthode utilisée ici pour dériver une loi exacte compressible correspond à celle détaillée dans le cas incompressible et résumée dans la section 3.4 de l'Introduction. La première étape est de définir une fonction de corrélation. La pluralité de possibilités est plus importante que dans le cas incompressible puisque cette fois la compression ($\rho \neq 0$) impacte les densités d'énergie : $E_{tot} = \frac{1}{2}\rho\mathbf{v}^2 + \frac{1}{2}\rho\mathbf{v}_A^2 + \rho u$. Pour l'énergie cinétique, la volonté de considérer une forme de type auto-corrélation, a inspiré des études HD et MHD considérant sa racine-carré en $\sqrt{\rho}\mathbf{v}$ (ex : HELLINGER, PAPINI et al. 2021) tandis que d'autres ont privilégié le sens physique de la quantité de mouvement $\rho\mathbf{v}$ (ex : GALTIER et BANERJEE 2011). Pour l'énergie magnétique, la question est la même : \mathbf{B} (ex : FERRAND, GALTIER et SAHRAOUI 2021) ou $\rho\mathbf{v}_A$ (ex : ANDRÉS et SAHRAOUI 2017) ? Et pour l'énergie interne, les choix présents dans la littérature ont été en partie orientés suivant le type de fermeture : dans le cas polytrope par exemple, la forme explicite de l'énergie interne spécifique peut s'écrire tel que le carré de la vitesse thermique, d'où $\rho\sqrt{u}$ (BANERJEE et GALTIER 2014) ou $\sqrt{\rho u}$ alors que, dans le cas isotherme (ex : GALTIER et BANERJEE 2011), le choix était plutôt orienté vers la conservation de son intégrité et de prendre ρ en un point et u en un autre. Trois possibilités ont été envisagées pour chaque type d'énergie (dont la forme est ici généralisée en $E_X = \rho X^2$) :

- l'auto-corrélation : $\mathcal{R}_{X1} = \langle \sqrt{\rho}X' \cdot \sqrt{\rho}X \rangle$ de fonction incrémentale associée : $\mathcal{S}_{X1} = \langle (\delta(\sqrt{\rho}X))^2 \rangle$ puisque $\mathcal{S}_{X1} = 2 \langle E_X \rangle - 2\mathcal{R}_{X1}$
- la moyenne de densité : $\mathcal{R}_{X2} = \frac{1}{2} \langle (\rho' + \rho)X' \cdot X \rangle$ de fonction incrémentale associée : $\mathcal{S}_{X2} = \langle \delta(\rho X) \cdot \delta X \rangle$
- la corrélation avec la densité : $\mathcal{R}_{X3} = \frac{1}{2} \langle \rho' X^2 + \rho X'^2 \rangle$ de fonction incrémentale associée : $\mathcal{S}_{X3} = \langle \delta\rho\delta X^2 \rangle$

Il s'avère qu'utiliser des formes prenant en compte des racines carrées a tendance à compliquer le calcul et le résultat. Les formes finalement choisies sont donc : $\mathcal{R}_c = \mathcal{R}_{c2} = \langle \frac{1}{4}(\rho' + \rho)\mathbf{v}' \cdot \mathbf{v} \rangle$, $\mathcal{R}_m = \mathcal{R}_{m2} = \langle \frac{1}{4}(\rho' + \rho)\mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A \rangle$ et $\mathcal{R}_u = \mathcal{R}_{u3} = \frac{1}{2} \langle \rho'u + \rho u' \rangle$. Ce choix concorde avec celui de ANDRÉS, SAHRAOUI, GALTIER, LZ HADID, DMITRU et al. 2018 dont les résultats de simulation permettront l'étude dans les données in-situ du chapitre 3 et serviront de base de comparaison afin de valider les résultats de simulations présentés dans la partie III.

Pour ce qui est du modèle considéré, la première idée était d'appliquer la méthode de calcul des lois exactes sur le modèle fermé par l'hypothèse $p \propto \rho^\gamma$, dans la lignée des dérivations compressible effectuées par exemple par GALTIER et BANERJEE 2011 ; ANDRÉS et SAHRAOUI 2017. Mais il s'est avéré qu'un autre choix plus judicieux existait. En effet, comme pour obtenir l'équation d'énergie totale (I.1.8), nous pouvons obtenir une loi exacte "générale" en utilisant l'équation de densité d'énergie interne (I.1.29) et sans expliciter la forme de p ni celle de u . En première approximation, l'hypothèse isentrope qui implique $\nabla \cdot \mathbf{q} = 0$ via l'équation de compatibilité (I.1.32), a d'abord été posée. Ce travail fait partie des résultats publiés dans SIMON et SAHRAOUI 2021. La loi KHM générale qui y est obtenue n'est alors valable que dans la zone inertuelle où l'hypothèse isentrope est supposée effective et ne sert que d'étape de calcul vers une loi K41. Dans une

volonté de donner un résultat pour la loi KHM générale valable pour toutes les échelles, nous prendrons en compte $\nabla \cdot \mathbf{q}$ dans cette section, mais nous garderons sa contribution brute, sans travail analytique en accord avec le cheminement chronologique voulu pour ce chapitre.

Les équations considérées sont celles de densité de masse (I.1.25), vitesse (I.1.26), induction (I.1.27) et énergie interne (I.1.29) avec des termes de forçage et de dissipations définis comme dans le cas incompressible (voir (.3.27) et (.3.28)). Ainsi :

$$\partial_t \rho = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \quad (I.2.1)$$

$$\partial_t \mathbf{v} = -\nabla \cdot (\mathbf{v} \mathbf{v}) + \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A) - \frac{1}{\rho} \nabla p_* + \mathbf{f}_c + \mathbf{d}_c \quad (I.2.2)$$

$$\partial_t \mathbf{v}_A = \nabla \cdot (\mathbf{v}_A \mathbf{v} - \mathbf{v} \mathbf{v}_A) - \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{v}_A + \frac{\mathbf{v}_A}{2} \nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{f}_m + \mathbf{d}_m \quad (I.2.3)$$

$$\partial_t u = -\nabla \cdot (u \mathbf{v}) + u \nabla \cdot \mathbf{v} - \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{q} - \frac{p}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (I.2.4)$$

(I.2.5) et (I.2.6) peuvent aussi s'écrire en prenant en compte (I.2.1) :

$$\partial_t(\rho \mathbf{v}) = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A) - \nabla p_* + \rho \mathbf{f}_c + \rho \mathbf{d}_c \quad (I.2.5)$$

$$\partial_t(\rho \mathbf{v}_A) = \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}_A \mathbf{v} - \rho \mathbf{v} \mathbf{v}_A) + \rho \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{v}_A - \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}_A \nabla \cdot \mathbf{v} + \rho \mathbf{f}_m + \rho \mathbf{d}_m \quad (I.2.6)$$

Si l'on regarde la forme des fonctions de corrélations de type incrémentales associées aux formes des fonctions choisies, on peut s'attendre à pouvoir identifier les fonctions de structure $\langle \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{v} \delta \mathbf{v} \rangle$, $\langle \delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \delta \mathbf{v}_A \delta \mathbf{v} \rangle$ et $\langle \delta \rho \delta u \delta \mathbf{v} \rangle$ et, similairement au cas incompressible, $\langle \delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \delta \mathbf{v} \delta \mathbf{v}_A \rangle$ ou $\langle \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{v}_A \delta \mathbf{v}_A \rangle$. Le calcul de l'évolution temporelle des fonctions de corrélation pour chaque canal énergétique nous donne en effet :

— Canal d'énergie cinétique : $\mathcal{R}_c = \frac{1}{4} \langle (\rho' + \rho) \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v} \rangle$

$$\begin{aligned} 4\partial_t \mathcal{R}_c &= \langle \partial_t(\rho' \mathbf{v}') \cdot \mathbf{v} + \rho' \mathbf{v}' \cdot \partial_t \mathbf{v} + \partial_t(\rho \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}' + \rho \mathbf{v} \cdot \partial_t \mathbf{v}' \rangle \\ &= \nabla_{\ell} \cdot \langle \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{v} \delta \mathbf{v} - (\delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \delta \mathbf{v}_A \delta \mathbf{v}_A + \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{v}_A \delta \mathbf{v}_A) \rangle \\ &\quad + \nabla_{\ell} \cdot \langle \rho' \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v} \mathbf{v}_A - \rho \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}' \mathbf{v}'_A - \rho' \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}_A \mathbf{v}'_A + \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'_A \mathbf{v}_A \rangle \\ &\quad + \langle \rho \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v} \nabla' \cdot \mathbf{v}' - \rho' \mathbf{v}' \cdot \delta \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{v} + 2\rho' \mathbf{v}' \cdot \delta \mathbf{v}_A \nabla \cdot \mathbf{v}_A - 2\rho \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v}_A \nabla' \cdot \mathbf{v}'_A \rangle \\ &\quad + \nabla_{\ell} \cdot \langle (1 + \frac{\rho'}{\rho}) p_* \mathbf{v}' - (1 + \frac{\rho}{\rho'}) p'_* \mathbf{v} \rangle - \langle \frac{\rho'}{\rho} p_* \mathbf{v}' \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} + \frac{\rho}{\rho'} p'_* \mathbf{v} \cdot \frac{\nabla' \rho'}{\rho'} \rangle \\ &\quad + \langle (\rho' + \rho) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{f}_c' + \mathbf{v}' \cdot \mathbf{f}_c) \rangle + \langle (\rho' + \rho) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{d}_c' + \mathbf{v}' \cdot \mathbf{d}_c) \rangle \end{aligned} \quad (I.2.7)$$

— Canal d'énergie magnétique : $\mathcal{R}_m = \frac{1}{4} \langle (\rho' + \rho) \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A \rangle$

$$\begin{aligned} 4\partial_t \mathcal{R}_m &= \langle \partial_t(\rho' \mathbf{v}'_A) \cdot \mathbf{v}_A + \rho' \mathbf{v}'_A \cdot \partial_t \mathbf{v}_A + \partial_t(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \mathbf{v}'_A + \rho \mathbf{v}_A \cdot \partial_t \mathbf{v}'_A \rangle \\ &= \nabla_{\ell} \cdot \langle \delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \delta \mathbf{v}_A \delta \mathbf{v} \rangle + \langle (\rho \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{v}_A - \frac{1}{2} (\rho' + \rho) \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A) \nabla' \cdot \mathbf{v}' \rangle \\ &\quad - \langle \rho' \mathbf{v}'_A \cdot \delta \mathbf{v}_A + \frac{1}{2} (\rho' + \rho) \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A \rangle \nabla \cdot \mathbf{v} \\ &\quad + \langle (\rho' \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v} - \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'_A) \nabla \cdot \mathbf{v}_A \rangle + \langle (\rho' \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}_A - \rho \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}') \nabla' \cdot \mathbf{v}'_A \rangle \\ &\quad - \nabla_{\ell} \cdot \langle \rho' \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v} \mathbf{v}_A - \rho \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}' \mathbf{v}'_A - \rho' \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}_A \mathbf{v}'_A + \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'_A \mathbf{v}_A \rangle \\ &\quad + \langle (\rho' + \rho) (\mathbf{v}_A \cdot \mathbf{f}_m' + \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{f}_m) \rangle + \langle (\rho' + \rho) (\mathbf{v}_A \cdot \mathbf{d}_m' + \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{d}_m) \rangle \end{aligned} \quad (I.2.8)$$

— Canal d'énergie interne : $\mathcal{R}_u = \frac{1}{2} < \rho' u + \rho u' >$

$$\begin{aligned} 2\partial_t \mathcal{R}_u &= < \partial_t(\rho') u + \rho' \partial_t u + \partial_t(\rho) u' + \rho \partial_t u' > \\ &= \nabla_{\boldsymbol{\ell}} \cdot < \delta \rho \delta u \boldsymbol{\delta v} > + < \rho \delta u \nabla \cdot \boldsymbol{v}' - \rho' \delta u \nabla \cdot \boldsymbol{v} > \\ &\quad - < \rho' \frac{p}{\rho} \nabla \cdot \boldsymbol{v} + \rho \frac{p'}{\rho'} \nabla' \cdot \boldsymbol{v}' > - < \frac{\rho}{\rho'} \nabla' \cdot \boldsymbol{q}' + \frac{\rho'}{\rho} \nabla \cdot \boldsymbol{q} > \end{aligned} \quad (\text{I.2.9})$$

D'où pour l'énergie totale avec $\mathcal{R} = \mathcal{R}_c + \mathcal{R}_m + \mathcal{R}_u$:

$$\begin{aligned} [1] \quad 4\partial_t \mathcal{R} &= \nabla_{\boldsymbol{\ell}} \cdot < (\delta(\rho \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{\delta v} + \delta(\rho \boldsymbol{v}_A) \cdot \boldsymbol{\delta v}_A) \boldsymbol{\delta v} - (\delta(\rho \boldsymbol{v}_A) \cdot \boldsymbol{\delta v} + \delta(\rho \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{\delta v}_A) \boldsymbol{\delta v}_A > \\ [2] &\quad + < (\rho \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\delta v} + \rho \boldsymbol{v}_A \cdot \boldsymbol{\delta v}_A - \frac{1}{2}(\rho' + \rho) \boldsymbol{v}'_A \cdot \boldsymbol{v}_A) \nabla' \cdot \boldsymbol{v}' > \\ [3] &\quad - < \rho' \boldsymbol{v}' \cdot \boldsymbol{\delta v} + \rho' \boldsymbol{v}'_A \cdot \boldsymbol{\delta v}_A + \frac{1}{2}(\rho' + \rho) \boldsymbol{v}'_A \cdot \boldsymbol{v}_A) \nabla \cdot \boldsymbol{v} > \\ [4] &\quad + < (2\rho' \boldsymbol{v}' \cdot \boldsymbol{\delta v}_A + \rho \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}'_A - \rho' \boldsymbol{v}'_A \cdot \boldsymbol{v}) \nabla \cdot \boldsymbol{v}_A > \\ [5] &\quad - < (2\rho \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\delta v}_A - \rho' \boldsymbol{v}' \cdot \boldsymbol{v}_A + \rho \boldsymbol{v}_A \cdot \boldsymbol{v}') \nabla' \cdot \boldsymbol{v}'_A > \\ [6] &\quad + 2\nabla_{\boldsymbol{\ell}} \cdot < \delta \rho \delta u \boldsymbol{\delta v} > + 2 < (\rho \delta u - \rho \frac{p'}{\rho'}) \nabla' \cdot \boldsymbol{v}' - (\rho' \delta u + \rho' \frac{p}{\rho}) \nabla \cdot \boldsymbol{v} > \\ [7] &\quad + \nabla_{\boldsymbol{\ell}} \cdot < (1 + \frac{\rho'}{\rho}) p_* \boldsymbol{v}' - (1 + \frac{\rho}{\rho'}) p'_* \boldsymbol{v} > - < \frac{\rho'}{\rho} p_* \boldsymbol{v}' \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} + \frac{\rho}{\rho'} p'_* \boldsymbol{v} \cdot \frac{\nabla' \rho'}{\rho'} > \\ [8] &\quad - 2 < \frac{\rho}{\rho'} \nabla' \cdot \boldsymbol{q}' + \frac{\rho'}{\rho} \nabla \cdot \boldsymbol{q} > \\ [9] &\quad + < (\rho' + \rho) (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{f}'_c + \boldsymbol{v}' \cdot \boldsymbol{f}_c + \boldsymbol{v}_A \cdot \boldsymbol{f}'_m + \boldsymbol{v}'_A \cdot \boldsymbol{f}_m) > \\ [10] &\quad + < (\rho' + \rho) (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{d}'_c + \boldsymbol{v}' \cdot \boldsymbol{d}_c + \boldsymbol{v}_A \cdot \boldsymbol{d}'_m + \boldsymbol{v}'_A \cdot \boldsymbol{d}_m) > \end{aligned} \quad (\text{I.2.10})$$

Cette loi KHM est valable à toutes les échelles où est valable le modèle MHD idéal, quelle que soit la fermeture du modèle et quelque soit l'hypothèse thermodynamique considérée dans la zone inertielle. C'est le premier résultat majeur obtenu, il a été par la suite reformulé comme on le verra dans les sections suivantes. La ligne [1] contient la contribution à la cascade qui survit dans la limite incompressible, ces termes flux sont souvent nommés «Yaglom compressible» (suivant un autre nom de la loi PP98). Cette contribution est de type flux. Les lignes [2] à [4] contiennent des termes compressibles, dits «sources», liés à la dilation du fluide et du champ magnétique (resp. $\nabla \cdot \boldsymbol{v}$ et $\nabla \cdot \boldsymbol{v}_A$). La ligne [6] contient des contributions d'énergie interne et de pression convectées par le champ de vitesse. La ligne [7] contient la contribution de pression totale qui peut être écrite en factorisant la pression magnétique en fonction du paramètre $\beta = p/p_m$ du plasma et qui contient la majorité des termes nommés «hybrides» par ANDRÉS et SAHRAOUI 2017. Cette ligne sera principalement affectée par les reformulations présentées dans les sections 2.2 et 2.3. La ligne [8] contient la contribution du flux de chaleur qui sera abordé et reformulée dans la section 2.3. Et pour finir, les lignes [9] et [10] correspondent aux taux d'injection et de dissipation de l'énergie totale compressible.

Dans le cadre d'une zone inertielle isentrope, il faut prendre en compte les lignes [1] à [7] dans le taux de cascade :

$$\begin{aligned} -4\varepsilon &= \nabla_{\boldsymbol{\ell}} \cdot < (\delta(\rho \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{\delta v} + \delta(\rho \boldsymbol{v}_A) \cdot \boldsymbol{\delta v}_A) \boldsymbol{\delta v} - (\delta(\rho \boldsymbol{v}_A) \cdot \boldsymbol{\delta v} + \delta(\rho \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{\delta v}_A) \boldsymbol{\delta v}_A > \\ &\quad + < (\rho \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\delta v} + \rho \boldsymbol{v}_A \cdot \boldsymbol{\delta v}_A - \frac{1}{2}(\rho' + \rho) \boldsymbol{v}'_A \cdot \boldsymbol{v}_A) \nabla' \cdot \boldsymbol{v}' > \\ &\quad - < \rho' \boldsymbol{v}' \cdot \boldsymbol{\delta v} + \rho' \boldsymbol{v}'_A \cdot \boldsymbol{\delta v}_A + \frac{1}{2}(\rho' + \rho) \boldsymbol{v}'_A \cdot \boldsymbol{v}_A) \nabla \cdot \boldsymbol{v} > \\ &\quad + < (2\rho' \boldsymbol{v}' \cdot \boldsymbol{\delta v}_A + \rho \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}'_A - \rho' \boldsymbol{v}'_A \cdot \boldsymbol{v}) \nabla \cdot \boldsymbol{v}_A > \\ &\quad - < (2\rho \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\delta v}_A - \rho' \boldsymbol{v}' \cdot \boldsymbol{v}_A + \rho \boldsymbol{v}_A \cdot \boldsymbol{v}') \nabla' \cdot \boldsymbol{v}'_A > \\ &\quad + 2\nabla_{\boldsymbol{\ell}} \cdot < \delta \rho \delta u \boldsymbol{\delta v} > + 2 < (\rho \delta u - \rho \frac{p'}{\rho'}) \nabla' \cdot \boldsymbol{v}' - (\rho' \delta u + \rho' \frac{p}{\rho}) \nabla \cdot \boldsymbol{v} > \\ &\quad + \nabla_{\boldsymbol{\ell}} \cdot < (1 + \frac{\rho'}{\rho}) p_* \boldsymbol{v}' - (1 + \frac{\rho}{\rho'}) p'_* \boldsymbol{v} > - < \frac{\rho'}{\rho} p_* \boldsymbol{v}' \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} + \frac{\rho}{\rho'} p'_* \boldsymbol{v} \cdot \frac{\nabla' \rho'}{\rho'} > \end{aligned} \quad (\text{I.2.11})$$

On obtient ainsi la «loi exacte générale de type Kolmogorov dans le cadre d'une zone inertielle supposée isentrope». Grâce au premier principe de thermodynamique (I.1.30) qui peut alors s'écrire $\rho^2 \partial u = p \partial \rho$, on peut reformuler le dernier terme en fonction de l'énergie interne et du paramètre caractéristique en physique des plasmas $\beta = p/p_m$ local :

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{\rho'}{\rho} p_* \mathbf{v}' \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} + \frac{\rho}{\rho'} p'_* \mathbf{v} \cdot \frac{\nabla' \rho'}{\rho'} \right\rangle = \left\langle \left(1 + \frac{p_m}{p}\right) \rho' \mathbf{v}' \cdot \nabla u + \left(1 + \frac{p'_m}{p'}\right) \rho \mathbf{v} \cdot \nabla' u' \right\rangle \\ & = \nabla_{\boldsymbol{\ell}} \cdot \left\langle \rho u' \mathbf{v} - \rho' u \mathbf{v}' \right\rangle + \left\langle \frac{1}{\beta} \nabla \cdot (\rho' u \mathbf{v}') + \frac{1}{\beta'} \nabla' \cdot (\rho u' \mathbf{v}) \right\rangle \end{aligned} \quad (I.2.12)$$

On retrouve ainsi le résultat général publié et analysé dans SIMON et SAHRAOUI 2021 (équation 18). Il y est alors direct d'y injecter les fermetures isentrope-isotherme ou isentrope-polytrope. Dans le cas de la fermeture isentrope-isotherme, après quelques manipulations et introduction d'autres notations, il est possible de retrouver la loi proposée par ANDRÉS et SAHRAOUI 2017 comme le montre SIMON et SAHRAOUI 2021. L'injection de la fermeture isentrope-polytrope permet de répondre à l'objectif initial : trouver une loi exacte MHD polytrope. Le résultat dans le cas $\gamma \neq 1$ est alors en fonction de γ et c_s^2 :

$$\begin{aligned} -4\varepsilon = & \nabla_{\boldsymbol{\ell}} \cdot \left\langle (\delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{v} + \delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \delta \mathbf{v}_A) \delta \mathbf{v} - (\delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \delta \mathbf{v} + \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{v}_A) \delta \mathbf{v}_A \right\rangle \\ & + \left\langle (\rho \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v} + \rho \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{v}_A - \frac{1}{2}(\rho' + \rho) \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A) \nabla' \cdot \mathbf{v}' \right\rangle \\ & - \left\langle \rho' \mathbf{v}' \cdot \delta \mathbf{v} + \rho' \mathbf{v}'_A \cdot \delta \mathbf{v}_A + \frac{1}{2}(\rho' + \rho) \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A \right\rangle \nabla \cdot \mathbf{v} \\ & + \left\langle (2\rho' \mathbf{v}' \cdot \delta \mathbf{v}_A + \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'_A - \rho' \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}) \nabla \cdot \mathbf{v}_A \right\rangle \\ & - \left\langle (2\rho \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v}_A - \rho' \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}_A + \rho \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}') \nabla' \cdot \mathbf{v}'_A \right\rangle \\ & + \frac{2}{\gamma(\gamma-1)} \nabla_{\boldsymbol{\ell}} \cdot \left\langle \delta \rho \delta c_s^2 \delta \mathbf{v} \right\rangle + \frac{2}{\gamma} \left\langle \rho \left(\frac{1}{\gamma-1} \delta c_s^2 - c'^2_s \right) \nabla' \cdot \mathbf{v}' - \rho' \left(\left(\frac{1}{\gamma-1} \delta c_s^2 + c_s^2 \right) \nabla \cdot \mathbf{v} \right) \right. \\ & \left. + \nabla_{\boldsymbol{\ell}} \cdot \left\langle (\rho + \rho') \left(\frac{c_s^2}{\gamma} + \frac{\mathbf{v}_A^2}{2} \right) \mathbf{v}' - (\rho + \rho') \left(\frac{c'^2_s}{\gamma} + \frac{\mathbf{v}'_A^2}{2} \right) \mathbf{v} \right\rangle \right. \\ & \left. - \left\langle \rho' \left(\frac{c_s^2}{\gamma} + \frac{\mathbf{v}_A^2}{2} \right) \mathbf{v}' \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} + \rho \left(\frac{c'^2_s}{\gamma} + \frac{\mathbf{v}'_A^2}{2} \right) \mathbf{v} \cdot \frac{\nabla' \rho'}{\rho'} \right\rangle \right) \end{aligned} \quad (I.2.13)$$

On remarque que la partie constante de l'énergie interne dépendant de c_{s0}^2 ne survit pas étant donné que cette énergie n'apparaît que sous forme incrémentale. C'est aussi le cas avec la reformulation (I.2.12) où l'énergie interne apparaît dérivée. En considérant $\mathbf{v}_A = 0$, on peut trouver une loi exacte pour le cas hydrodynamique compressible :

$$\begin{aligned} -4\varepsilon = & \nabla_{\boldsymbol{\ell}} \cdot \left\langle (\delta \rho \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{v} \delta \mathbf{v} + \frac{2}{\gamma(\gamma-1)} \delta \rho \delta c_s^2 \delta \mathbf{v} \right\rangle + \left\langle \rho \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v} \nabla' \cdot \mathbf{v}' - \rho' \mathbf{v}' \cdot \delta \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{v} \right\rangle \\ & + \frac{2}{\gamma} \left\langle \rho \left(\frac{1}{\gamma-1} \delta c_s^2 - c'^2_s \right) \nabla' \cdot \mathbf{v}' - \rho' \left(\left(\frac{1}{\gamma-1} \delta c_s^2 + c_s^2 \right) \nabla \cdot \mathbf{v} \right) \right\rangle \\ & + \nabla_{\boldsymbol{\ell}} \cdot \left\langle (\rho + \rho') \frac{c_s^2}{\gamma} \mathbf{v}' - (\rho + \rho') \frac{c'^2_s}{\gamma} \mathbf{v} \right\rangle - \left\langle \rho' \frac{c_s^2}{\gamma} \mathbf{v}' \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} + \rho \frac{c'^2_s}{\gamma} \mathbf{v} \cdot \frac{\nabla' \rho'}{\rho'} \right\rangle \end{aligned} \quad (I.2.14)$$

On n'y reconnaît pas la loi proposée par BANERJEE et GALTIER 2014 car ces derniers considèrent comme fonction de corrélation pour l'énergie interne : $\left\langle \frac{\rho c_s c'_s}{\gamma(\gamma-1)} \right\rangle$. Passer de $\left\langle \frac{\rho c'^2_s c'_s}{\gamma(\gamma-1)} \right\rangle$ à $\left\langle \frac{\rho c_s c'_s}{\gamma(\gamma-1)} \right\rangle$ n'est analytiquement pas possible, on doit supprimer la contribution de l'une et la remplacer par celle de l'autre. L'étude de la convergence de ces différentes formes de fonction de corrélation dans des simulations n'a pas été traitée dans ce travail.

2.2 Reformulation de la loi K41 générale dépendant d'une pression isotrope

Dans le chapitre 1 de la partie II, nous dériverons une loi exacte de type K41 pour un modèle où l'isotropie de pression sera relaxée. Y imposer, après obtention, l'isotropie de pression, nous apporte la formulation suivante pour la loi générale (I.2.11) :

$$\begin{aligned}
 -4\varepsilon = & \nabla_{\ell} \cdot < (\delta(\rho\mathbf{v}) \cdot \delta\mathbf{v} + \delta(\rho\mathbf{v}_A) \cdot \delta\mathbf{v}_A) \delta\mathbf{v} - (\delta(\rho\mathbf{v}_A) \cdot \delta\mathbf{v} + \delta(\rho\mathbf{v}) \cdot \delta\mathbf{v}_A) \delta\mathbf{v}_A > \\
 & + \nabla_{\ell} \cdot < \delta\rho(2\delta u - \delta(\frac{p_*}{\rho})) \delta\mathbf{v} > \\
 & + < (\rho\mathbf{v} \cdot \delta\mathbf{v} + \frac{1}{2}\rho\mathbf{v}_A \cdot \delta\mathbf{v}_A - \frac{1}{2}\mathbf{v}_A \cdot \delta(\rho\mathbf{v}_A) + 2\rho(\delta u - \delta(\frac{p}{\rho})) \nabla' \cdot \mathbf{v}' > \\
 & - < (\rho'\mathbf{v}' \cdot \delta\mathbf{v} + \frac{1}{2}\rho'\mathbf{v}'_A \cdot \delta\mathbf{v}_A - \frac{1}{2}\mathbf{v}'_A \cdot \delta(\rho\mathbf{v}_A) + 2\rho'(\delta u - \delta(\frac{p}{\rho})) \nabla \cdot \mathbf{v} > \\
 & + < (2\rho'\mathbf{v}' \cdot \delta\mathbf{v}_A + \delta(\rho\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}'_A - \rho'\mathbf{v}'_A \cdot \delta\mathbf{v}) \nabla \cdot \mathbf{v}_A > \\
 & - < (2\rho\mathbf{v} \cdot \delta\mathbf{v}_A + \delta(\rho\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}_A - \rho\mathbf{v}_A \cdot \delta\mathbf{v}) \nabla' \cdot \mathbf{v}'_A > \\
 & + < (\frac{p_*}{\rho} \delta\rho - \rho\delta(\frac{p_*}{\rho})) \mathbf{v} \cdot \frac{\nabla'\rho'}{\rho'} - (\frac{p_*}{\rho'} \delta\rho - \rho'\delta(\frac{p_*}{\rho})) \mathbf{v}' \cdot \frac{\nabla\rho}{\rho} >
 \end{aligned} \tag{I.2.15}$$

Cette formulation est plus élégante que la précédente, car les termes flux apparaissent tous sous la forme de fonctions de structure grâce à l'introduction de $< \delta\rho\delta(\frac{p_*}{\rho})\delta\mathbf{v} >$ et les termes sources s'écrivent tous sous une forme généralisée du type $< X\delta Y \nabla' Z' >$ ou $< X' \delta Y \nabla Z >$ avec l'opération entre ∇ et Z pouvant être une divergence si Z est une quantité vectorielle (ex : \mathbf{v}) ou un gradient ($\frac{\nabla\rho}{\rho} = \nabla(\ln\rho)$). Cette forme rend évident qu'en $\ell = 0$, $\varepsilon = 0$. Le passage d'une forme à l'autre s'effectue en remarquant que les contributions de pression (notée ε_p) et de pression magnétique (notée ε_{pm}) peuvent s'écrire :

$$\begin{aligned}
 -4\varepsilon_p = & \nabla_{\ell} \cdot < (1 + \frac{\rho'}{\rho}) p \mathbf{v}' - (1 + \frac{\rho}{\rho'}) p' \mathbf{v} > - 2 < \rho \frac{p'}{\rho'} \nabla \cdot \mathbf{v}' + \rho' \frac{p}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{v} > \\
 = & - \nabla_{\ell} \cdot < \delta\rho \delta \frac{p}{\rho} \delta\mathbf{v} > + < 2\rho' \delta(\frac{p}{\rho}) \nabla \cdot \mathbf{v} - 2\rho \delta(\frac{p}{\rho}) \nabla' \cdot \mathbf{v}' - \rho \frac{p'}{\rho'} \mathbf{v} \cdot \frac{\nabla'\rho'}{\rho'} - \rho' \frac{p}{\rho} \mathbf{v}' \cdot \frac{\nabla\rho}{\rho} > \\
 & + < (\delta\rho \frac{p_*}{\rho} - \rho\delta(\frac{p}{\rho})) \mathbf{v} \cdot \frac{\nabla'\rho'}{\rho'} - (\delta\rho \frac{p'}{\rho'} - \rho'\delta(\frac{p_*}{\rho})) \mathbf{v}' \cdot \frac{\nabla\rho}{\rho} >
 \end{aligned} \tag{I.2.16}$$

$$\begin{aligned}
 -4\varepsilon_{pm} = & \nabla_{\ell} \cdot < (1 + \frac{\rho'}{\rho}) p_m \mathbf{v}' - (1 + \frac{\rho}{\rho'}) p'_m \mathbf{v} > - < \rho \frac{p'_m}{\rho'} \mathbf{v} \cdot \frac{\nabla'\rho'}{\rho'} + \rho' \frac{p_m}{\rho} \mathbf{v}' \cdot \frac{\nabla\rho}{\rho} > \\
 & + < (\rho\mathbf{v}_A \cdot \delta\mathbf{v}_A - \frac{1}{2}(\rho' + \rho)\mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A) \nabla' \cdot \mathbf{v}' - (\rho'\mathbf{v}'_A \cdot \delta\mathbf{v}_A + \frac{1}{2}(\rho' + \rho)\mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A) \nabla \cdot \mathbf{v} > \\
 = & - \nabla_{\ell} \cdot < \delta\rho \delta \frac{p_m}{\rho} \delta\mathbf{v} > + < (\delta\rho \frac{p_m}{\rho} - \rho\delta(\frac{p_m}{\rho})) \mathbf{v} \cdot \frac{\nabla'\rho'}{\rho'} - (\delta\rho \frac{p'_m}{\rho'} - \rho'\delta(\frac{p_m}{\rho})) \mathbf{v}' \cdot \frac{\nabla\rho}{\rho} > \\
 & + \frac{1}{2} < (\rho\mathbf{v}_A \cdot \delta\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_A \cdot \delta(\rho\mathbf{v}_A)) \nabla' \cdot \mathbf{v}' - (\rho'\mathbf{v}'_A \cdot \delta\mathbf{v}_A - \mathbf{v}'_A \cdot \delta(\rho\mathbf{v}_A)) \nabla \cdot \mathbf{v} >
 \end{aligned} \tag{I.2.17}$$

Dans le cas isentrope-polytrope avec $\gamma \neq 1$, $\delta(u - p/\rho) = \delta[(2 - \gamma) \frac{c_s^2}{\gamma(\gamma - 1)}] = (2 - \gamma)\delta u$ et de même, $\delta(2u - p/\rho) = (3 - \gamma)\delta u$. Dans le cas isentrope-isotherme, c'est-à-dire avec $\gamma = 1$ et c_s constant, $\delta(u - p/\rho) = \delta u = (2 - \gamma)\delta u$ et $\delta(2u - p/\rho) = (3 - \gamma)\delta u$. De plus, $p_*/\rho = (1 + \beta)\mathbf{v}_A^2/2$. Ainsi, on peut déduire de (I.2.15), une formulation de la loi exacte isentrope-polytrope valable pour tout γ , incluant donc la fermeture isentrope-isotherme,

et dépendant de u , γ et β :

$$\begin{aligned}
 -4\varepsilon = & \nabla_{\boldsymbol{\ell}} \cdot < (\delta(\rho\boldsymbol{v}) \cdot \delta\boldsymbol{v} + \delta(\rho\boldsymbol{v}_A) \cdot \delta\boldsymbol{v}_A) \delta\boldsymbol{v} - (\delta(\rho\boldsymbol{v}_A) \cdot \delta\boldsymbol{v} + \delta(\rho\boldsymbol{v}) \cdot \delta\boldsymbol{v}_A) \delta\boldsymbol{v}_A > \\
 & + \nabla_{\boldsymbol{\ell}} \cdot < \delta\rho\delta((3-\gamma)u - \frac{\boldsymbol{v}_A^2}{2}) \delta\boldsymbol{v} > \\
 & + < (\rho\boldsymbol{v} \cdot \delta\boldsymbol{v} + \frac{1}{2}\rho\boldsymbol{v}_A \cdot \delta\boldsymbol{v}_A - \frac{1}{2}\boldsymbol{v}_A \cdot \delta(\rho\boldsymbol{v}_A) + 2(2-\gamma)\rho\delta u) \nabla' \cdot \boldsymbol{v}' > \\
 & - < (\rho'\boldsymbol{v}' \cdot \delta\boldsymbol{v} + \frac{1}{2}\rho'\boldsymbol{v}'_A \cdot \delta\boldsymbol{v}_A - \frac{1}{2}\boldsymbol{v}'_A \cdot \delta(\rho\boldsymbol{v}_A) + 2(2-\gamma)\rho'\delta u) \nabla \cdot \boldsymbol{v} > \\
 & + < (2\rho'\boldsymbol{v}' \cdot \delta\boldsymbol{v}_A + \delta(\rho\boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{v}'_A - \rho'\boldsymbol{v}'_A \cdot \delta\boldsymbol{v}) \nabla \cdot \boldsymbol{v}_A > \\
 & - < (2\rho\boldsymbol{v} \cdot \delta\boldsymbol{v}_A + \delta(\rho\boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{v}_A - \rho\boldsymbol{v}_A \cdot \delta\boldsymbol{v}) \nabla' \cdot \boldsymbol{v}'_A > \\
 & + < (\frac{\boldsymbol{v}_A^2}{2}(1+\beta)\delta\rho - \rho\delta(\frac{\boldsymbol{v}_A^2}{2}(1+\beta))) \boldsymbol{v} \cdot \frac{\nabla'\rho'}{\rho'} > \\
 & - < (\frac{\boldsymbol{v}'_A^2}{2}(1+\beta')\delta\rho - \rho'\delta(\frac{\boldsymbol{v}_A^2}{2}(1+\beta))) \boldsymbol{v}' \cdot \frac{\nabla\rho}{\rho} >
 \end{aligned} \tag{I.2.18}$$

La réécriture des termes de pression via les formules (I.2.16) et (I.2.17) ne dépend pas de l'hypothèse d'isentropie de la zone inertielle et sont applicables dans la loi KHM générale (I.2.10) :

$$\begin{aligned}
 4\partial_t \mathcal{R} = & \nabla_{\boldsymbol{\ell}} \cdot < (\delta(\rho\boldsymbol{v}) \cdot \delta\boldsymbol{v} + \delta(\rho\boldsymbol{v}_A) \cdot \delta\boldsymbol{v}_A) \delta\boldsymbol{v} - (\delta(\rho\boldsymbol{v}_A) \cdot \delta\boldsymbol{v} + \delta(\rho\boldsymbol{v}) \cdot \delta\boldsymbol{v}_A) \delta\boldsymbol{v}_A > \\
 & + \nabla_{\boldsymbol{\ell}} \cdot < \delta\rho(2\delta u - \delta(\frac{p_*}{\rho})) \delta\boldsymbol{v} > \\
 & + < (\rho\boldsymbol{v} \cdot \delta\boldsymbol{v} + \frac{1}{2}\rho\boldsymbol{v}_A \cdot \delta\boldsymbol{v}_A - \frac{1}{2}\boldsymbol{v}_A \cdot \delta(\rho\boldsymbol{v}_A) + 2\rho(\delta u - \delta(\frac{p}{\rho})) \nabla' \cdot \boldsymbol{v}' > \\
 & - < (\rho'\boldsymbol{v}' \cdot \delta\boldsymbol{v} + \frac{1}{2}\rho'\boldsymbol{v}'_A \cdot \delta\boldsymbol{v}_A - \frac{1}{2}\boldsymbol{v}'_A \cdot \delta(\rho\boldsymbol{v}_A) + 2\rho'(\delta u - \delta(\frac{p}{\rho})) \nabla \cdot \boldsymbol{v} > \\
 & + < (2\rho'\boldsymbol{v}' \cdot \delta\boldsymbol{v}_A + \delta(\rho\boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{v}'_A - \rho'\boldsymbol{v}'_A \cdot \delta\boldsymbol{v}) \nabla \cdot \boldsymbol{v}_A > \\
 & - < (2\rho\boldsymbol{v} \cdot \delta\boldsymbol{v}_A + \delta(\rho\boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{v}_A - \rho\boldsymbol{v}_A \cdot \delta\boldsymbol{v}) \nabla' \cdot \boldsymbol{v}'_A > \\
 & + < (\frac{p_*}{\rho}\delta\rho - \rho\delta(\frac{p_*}{\rho})) \boldsymbol{v} \cdot \frac{\nabla'\rho'}{\rho'} - (\frac{p'_*}{\rho'}\delta\rho - \rho'\delta(\frac{p_*}{\rho})) \boldsymbol{v}' \cdot \frac{\nabla\rho}{\rho} > \\
 & - 2 < \frac{\rho}{\rho'} \nabla' \cdot \boldsymbol{q}' + \frac{\rho'}{\rho} \nabla \cdot \boldsymbol{q} > \\
 & + < (\rho' + \rho)(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{f}'_c + \boldsymbol{v}' \cdot \boldsymbol{f}_c + \boldsymbol{v}_A \cdot \boldsymbol{f}'_m + \boldsymbol{v}'_A \cdot \boldsymbol{f}_m) > \\
 & + < (\rho' + \rho)(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{d}'_c + \boldsymbol{v}' \cdot \boldsymbol{d}_c + \boldsymbol{v}_A \cdot \boldsymbol{d}'_m + \boldsymbol{v}'_A \cdot \boldsymbol{d}_m) >
 \end{aligned} \tag{I.2.19}$$

2.3 Contribution du flux de chaleur dans la loi KHM et deuxième reformulation

L'approche présentée dans la section 2.1 pour répondre à l'objectif initial est empreinte d'une volonté de généralisation des résultats dans le but de permettre à de futures études de ne pas avoir à redémontrer de A à Z une loi exacte pour une nouvelle fermeture. Le résultat obtenu peut même être utilisé pour étudier d'autre forme de zone inertielle comme celle proposée par ALUIE, S LI et H LI 2012 et HELLINGER, PAPINI et al. 2021, où l'énergie cinétique/magnétique pourrait cascader indépendamment de l'énergie interne, sans transfert de pression. Comme discuté dans la section I.1.2, cela revient à supposer une zone inertielle isobare dans laquelle la description de cette cascade d'énergie via une loi exacte ne dépendrait d'aucune grandeur thermodynamique autre que la densité. Elle peut s'obtenir à partir de notre loi exacte générale (I.2.19) en supposant $\delta u \rightarrow 0$ pour

supprimer la contribution d'énergie interne et $p \rightarrow 0$ pour supprimer celle de p . Ainsi :

$$\begin{aligned}
-4\varepsilon &= \nabla_{\ell} \cdot \left((\delta(\rho\mathbf{v}) \cdot \delta\mathbf{v} + \delta(\rho\mathbf{v}_A) \cdot \delta\mathbf{v}_A - \delta\rho\delta(\frac{\mathbf{v}_A^2}{2}))\delta\mathbf{v} - (\delta(\rho\mathbf{v}_A) \cdot \delta\mathbf{v} + \delta(\rho\mathbf{v}) \cdot \delta\mathbf{v}_A)\delta\mathbf{v}_A \right) \\
&\quad + \left< (\rho\mathbf{v} \cdot \delta\mathbf{v} + \frac{1}{2}\rho\mathbf{v}_A \cdot \delta\mathbf{v}_A - \frac{1}{2}\mathbf{v}_A \cdot \delta(\rho\mathbf{v}_A))\nabla' \cdot \mathbf{v}' \right> \\
&\quad - \left< (\rho'\mathbf{v}' \cdot \delta\mathbf{v} + \frac{1}{2}\rho'\mathbf{v}'_A \cdot \delta\mathbf{v}_A - \frac{1}{2}\mathbf{v}'_A \cdot \delta(\rho\mathbf{v}_A))\nabla \cdot \mathbf{v} \right> \\
&\quad + \left< (2\rho'\mathbf{v}' \cdot \delta\mathbf{v}_A + \delta(\rho\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}'_A - \rho'\mathbf{v}'_A \cdot \delta\mathbf{v})\nabla \cdot \mathbf{v}_A \right> \\
&\quad - \left< (2\rho\mathbf{v} \cdot \delta\mathbf{v}_A + \delta(\rho\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}_A - \rho\mathbf{v}_A \cdot \delta\mathbf{v})\nabla' \cdot \mathbf{v}'_A \right> \\
&\quad + \left< (\frac{\mathbf{v}_A^2}{2}\delta\rho - \rho\delta(\frac{\mathbf{v}_A^2}{2}))\mathbf{v} \cdot \frac{\nabla'\rho'}{\rho'} - (\frac{\mathbf{v}'_A^2}{2}\delta\rho - \rho'\delta(\frac{\mathbf{v}_A^2}{2}))\mathbf{v}' \cdot \frac{\nabla\rho}{\rho} \right> \tag{I.2.20}
\end{aligned}$$

On rappelle que l'utilisation de ce résultat dans le but d'estimer le taux de chauffage turbulent doit à priori être complété une estimation du taux de cascade d'énergie interne qui semble être visible à travers le terme, de type flux à travers les échelles, $\nabla_{\ell} \cdot \langle \delta\rho\delta u\delta\mathbf{v} \rangle$.

Mais l'hypothèse principale de notre approche étant une zone inertielles isentropes, une contribution y a été omise : la contribution du flux de chaleur. Cette contribution est une fenêtre s'ouvrant sur l'entropie à travers le terme de flux de chaleur présent dans l'équation d'énergie interne, comme on l'a vu dans la section I.1.2. De plus, EYINK et DRIVAS 2018 a démontré via la théorie du «coarse-graining»¹ l'existence d'une cascade d'entropie. Est-ce que cette cascade d'entropie aurait un impact sur la cascade d'énergie ? Est-ce que le flux de chaleur n'agit bien qu'à petite échelle ? Ces questions seront posées dans la partie ?? mais ici on peut déjà répondre à la question : est-il possible d'obtenir analytiquement un terme de type flux dépendant du flux de chaleur dans la description générale (KHM) de la cascade turbulente ? La réponse est oui, et elle va même nous permettre de retravailler les termes de pression.

La contribution du flux de chaleur, gardée brute dans la relation KHM générale (I.2.10) et que l'on va noter ε_q , peut s'écrire :

$$\begin{aligned}
-4\varepsilon_q &= -2 \left< \frac{\rho'}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{q} + \frac{\rho}{\rho'} \nabla' \cdot \mathbf{q}' \right> \\
&= \nabla_{\ell} \cdot \left< 2\delta\rho\delta\mathbf{q}\delta(1/\rho) \right> + \left< 2\rho\delta\mathbf{q} \cdot \nabla'(\frac{1}{\rho'}) - 2\rho'\delta\mathbf{q} \cdot \nabla(\frac{1}{\rho}) \right>
\end{aligned}$$

De plus, si l'on compare les termes flux écrits avec la formulation précédente ((I.2.15)) et auxquels on ajoute celui de flux de chaleur (à gauche) avec les termes flux de l'équation de densité d'énergie totale (I.1.8) (à droite) :

$$\begin{aligned}
\nabla_{\ell} \cdot \left(\delta(\rho\mathbf{v}) \cdot \delta\mathbf{v} + \delta(\rho\mathbf{v}_A) \cdot \delta\mathbf{v}_A + 2\delta u \right) \delta\mathbf{v} &= \frac{1}{2} \nabla \cdot ((\rho\mathbf{v}^2 + \rho\mathbf{v}_A^2 + 2\rho u)\mathbf{v}) \\
-\nabla_{\ell} \cdot \left(\delta(\rho\mathbf{v}_A) \cdot \delta\mathbf{v} + \delta(\rho\mathbf{v}) \cdot \delta\mathbf{v}_A \right) \delta\mathbf{v}_A &= -\nabla \cdot (\rho\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A) \\
-\nabla_{\ell} \cdot \left(\delta\rho\delta(\frac{p_*}{\rho}) \right) \delta\mathbf{v} &= \nabla \cdot (p_* \mathbf{v}) \\
\nabla_{\ell} \cdot \left< 2\delta\rho\delta\mathbf{q}\delta(1/\rho) \right> &= \nabla \cdot (\mathbf{q})
\end{aligned}$$

on peut se demander s'il n'existerait pas une formulation de la contribution de pression totale dans la loi exacte qui aurait un signe correspondant à celui présent dans l'équation de densité d'énergie totale. En effet, en s'inspirant de la forme de la fonction de structure

1. Cette autre approche de l'étude de la cascade turbulente implique schématiquement un filtrage de type passe-haut des échelles et permet une représentation locale dans l'espace et en échelle.

dépendant du flux de chaleur, on remarque que la contribution de la pression totale peut s'écrire :

$$\begin{aligned} -4\varepsilon_{p*} &= -\nabla_{\boldsymbol{\ell}} \cdot \left(\delta\rho \frac{p_*}{\rho} \delta\boldsymbol{v} \right) + \left(\delta\rho \frac{p_*}{\rho} - \rho \delta \left(\frac{p_*}{\rho} \right) \right) \boldsymbol{v} \cdot \frac{\nabla' \rho'}{\rho'} - \left(\delta\rho \frac{p'_*}{\rho'} - \rho' \delta \left(\frac{p_*}{\rho} \right) \right) \boldsymbol{v}' \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} \\ &= \nabla_{\boldsymbol{\ell}} \cdot \left(\delta p_* \delta(1/\rho) \delta(\rho\boldsymbol{v}) \right) + \left(\delta(p_*) \rho \boldsymbol{v} \cdot \nabla' \left(\frac{1}{\rho'} \right) - \delta(p_*) \rho' \boldsymbol{v}' \cdot \nabla \left(\frac{1}{\rho} \right) \right) \end{aligned}$$

Le nombre de termes est ainsi réduit de 5 à 3 et la loi KHM générale s'écrit :

$$\begin{aligned} 4\partial_t \mathcal{R} &= \nabla_{\boldsymbol{\ell}} \cdot \left((\delta(\rho\boldsymbol{v}) \cdot \delta\boldsymbol{v} + \delta(\rho\boldsymbol{v}_A) \cdot \delta\boldsymbol{v}_A) \delta\boldsymbol{v} - (\delta(\rho\boldsymbol{v}_A) \cdot \delta\boldsymbol{v} + \delta(\rho\boldsymbol{v}) \cdot \delta\boldsymbol{v}_A) \delta\boldsymbol{v}_A \right) \\ &\quad + \nabla_{\boldsymbol{\ell}} \cdot \left(2\delta\rho\delta u\delta\boldsymbol{v} + \delta p_* \delta(1/\rho) \delta(\rho\boldsymbol{v}) + 2\delta\rho\delta\boldsymbol{q}\delta(1/\rho) \right) \\ &\quad + \left(\rho\boldsymbol{v} \cdot \delta\boldsymbol{v} + \frac{1}{2}\rho\boldsymbol{v}_A \cdot \delta\boldsymbol{v}_A - \frac{1}{2}\boldsymbol{v}_A \cdot \delta(\rho\boldsymbol{v}_A) + 2\rho(\delta u - \delta(\frac{p}{\rho})) \right) \nabla' \cdot \boldsymbol{v}' \\ &\quad - \left(\rho'\boldsymbol{v}' \cdot \delta\boldsymbol{v} + \frac{1}{2}\rho'\boldsymbol{v}'_A \cdot \delta\boldsymbol{v}_A - \frac{1}{2}\boldsymbol{v}'_A \cdot \delta(\rho\boldsymbol{v}_A) + 2\rho'(\delta u - \delta(\frac{p}{\rho})) \right) \nabla \cdot \boldsymbol{v} \\ &\quad + \left(2\rho'\boldsymbol{v}' \cdot \delta\boldsymbol{v}_A + \delta(\rho\boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{v}'_A - \rho'\boldsymbol{v}'_A \cdot \delta\boldsymbol{v} \right) \nabla \cdot \boldsymbol{v}_A \\ &\quad - \left(2\rho\boldsymbol{v} \cdot \delta\boldsymbol{v}_A + \delta(\rho\boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{v}_A - \rho\boldsymbol{v}_A \cdot \delta\boldsymbol{v} \right) \nabla' \cdot \boldsymbol{v}'_A \\ &\quad + \left(\rho\boldsymbol{v}\delta(p_*) + 2\rho\delta\boldsymbol{q} \right) \cdot \nabla' \left(\frac{1}{\rho'} \right) - \left(\rho'\boldsymbol{v}'\delta(p_*) + 2\rho'\delta\boldsymbol{q} \right) \cdot \nabla \left(\frac{1}{\rho} \right) \\ &\quad + \left(\rho' + \rho \right) (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{f}'_c + \boldsymbol{v}' \cdot \boldsymbol{f}_c + \boldsymbol{v}_A \cdot \boldsymbol{f}'_m + \boldsymbol{v}'_A \cdot \boldsymbol{f}_m) \\ &\quad + \left(\rho' + \rho \right) (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{d}'_c + \boldsymbol{v}' \cdot \boldsymbol{d}_c + \boldsymbol{v}_A \cdot \boldsymbol{d}'_m + \boldsymbol{v}'_A \cdot \boldsymbol{d}_m) \end{aligned} \tag{I.2.21}$$

L'équation (I.2.21) est la formulation finale de la loi KHM compressible générale décrivant la cascade d'énergie totale à l'aide de la fonction de corrélation $\mathcal{R} = \langle \frac{1}{4}(\rho' + \rho)\boldsymbol{v}' \cdot \boldsymbol{v} + \frac{1}{4}(\rho' + \rho)\boldsymbol{v}'_A \cdot \boldsymbol{v}_A + \frac{1}{2}(\rho'u + \rho u') \rangle$. Cette formulation rappelle l'équation d'énergie totale générale (I.1.8) et, tout comme elle, dépend de p , u et \boldsymbol{q} restant à définir à l'aide d'une équation de fermeture et/ou à annuler en fonction du type de zone inertie que l'on veut considérer. Son application dans des données ou des simulations n'impose qu'un postulat : que les équations de continuité (I.2.1), vitesse (I.2.5), induction (I.2.6) et énergie interne générale (I.2.4)² soient valides. En fonction du cas d'application, les autres formulations des contributions de pression ε_p (I.2.16), pression magnétique ε_{pm} (I.2.17), pression totale ε_{p*} (I.2.21) et flux de chaleur ε_q (I.2.21) ou celle en appliquant le premier principe thermodynamique avec l'hypothèse d'isentropie (I.2.12) pourront tout à fait être préférées.

Par exemple, si l'on veut utiliser l'expression du flux de chaleur en fonction de σ pour obtenir une loi exacte de type K41 dans le cadre d'une zone inertie de type encore indéfinie (isobare, isentrope ou autre) mais pour un modèle fermé avec la fermeture polytrope, il semble plus à propos d'utiliser la formulation de ε_q dépendant de $\nabla \cdot \boldsymbol{q}$ qui devient, puisque $\nabla \cdot \boldsymbol{q} = \sigma\gamma p \nabla \cdot \boldsymbol{v}$, $-4\varepsilon_q = -2\sigma\gamma \left(\rho' \frac{p}{\rho} \nabla \cdot \boldsymbol{v} + \rho \frac{p'}{\rho'} \nabla' \cdot \boldsymbol{v}' \right)$. Ainsi en posant $p_* = \rho\boldsymbol{v}'^2_A(\beta + 1)/2$, $c_s^2/\gamma = \boldsymbol{v}'^2_A \beta/2$ et $\tilde{u} = \frac{1}{\gamma-1}$ si $\gamma \neq 1$ ou $\ln(\rho/\rho_0)$ si $\gamma = 1$, on

2. Hors cas isobare.

obtient :

$$\begin{aligned}
 4\partial_t \mathcal{R} = & \nabla_{\boldsymbol{\ell}} \cdot < (\delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{v} + \delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \delta \mathbf{v}_A) \delta \mathbf{v} - (\delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \delta \mathbf{v} + \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{v}_A) \delta \mathbf{v}_A > \\
 & + \nabla_{\boldsymbol{\ell}} \cdot < \delta \rho \delta(\mathbf{v}'_A^2 \beta(\sigma + 1) \tilde{u}) \delta \mathbf{v} + \delta(\rho \mathbf{v}'_A^2 (\beta + 1)/2) \delta(1/\rho) \delta(\rho \mathbf{v}) > \\
 & + < (\rho \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v} + \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{v}_A - \frac{1}{2} \mathbf{v}_A \cdot \delta(\rho \mathbf{v}_A)) \nabla' \cdot \mathbf{v}' > \\
 & + < (\rho \delta(\mathbf{v}'_A^2 \beta((\sigma \gamma + 1) \tilde{u} - 1)) - \sigma \gamma \rho \mathbf{v}'_A^2 \beta') \nabla' \cdot \mathbf{v}' > \\
 & - < (\rho' \mathbf{v}' \cdot \delta \mathbf{v} + \frac{1}{2} \rho' \mathbf{v}'_A \cdot \delta \mathbf{v}_A - \frac{1}{2} \mathbf{v}'_A \cdot \delta(\rho \mathbf{v}_A)) \nabla \cdot \mathbf{v} > \\
 & - < (\rho' \delta(\mathbf{v}'_A^2 \beta((\sigma \gamma + 1) \tilde{u} - 1)) + \sigma \gamma \rho' \mathbf{v}'_A^2 \beta) \nabla \cdot \mathbf{v} > \\
 & + < (2\rho' \mathbf{v}' \cdot \delta \mathbf{v}_A + \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}'_A - \rho' \mathbf{v}'_A \cdot \delta \mathbf{v}) \nabla \cdot \mathbf{v}_A > \\
 & - < (2\rho \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v}_A + \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}_A - \rho \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{v}) \nabla' \cdot \mathbf{v}'_A > \\
 & + < (\rho \mathbf{v} \delta(\rho \mathbf{v}'_A^2 (\beta + 1)/2)) \cdot \nabla'(\frac{1}{\rho'}) - (\rho' \mathbf{v}' \delta(\rho \mathbf{v}'_A^2 (\beta + 1)/2)) \cdot \nabla(\frac{1}{\rho}) > \\
 & + < (\rho' + \rho)(\mathbf{v} \cdot \mathbf{f}'_c + \mathbf{v}' \cdot \mathbf{f}_c + \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{f}'_m + \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{f}_m) > \\
 & + < (\rho' + \rho)(\mathbf{v} \cdot \mathbf{d}'_c + \mathbf{v}' \cdot \mathbf{d}_c + \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{d}'_m + \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{d}_m) >
 \end{aligned} \tag{I.2.22}$$

Dans le cadre d'une zone inertielle isentrope, $\sigma = 0$, et on y retrouve la loi exacte (I.2.18) écrite avec la dernière formulation des termes de pression totale. Si le système est fermé de manière isotherme et qu'aucune hypothèse thermodynamique ne constraint la zone inertielle, alors $\gamma = 1$, $\sigma = -1$, c_s^2 constant et :

$$\begin{aligned}
 4\partial_t \mathcal{R} = & \nabla_{\boldsymbol{\ell}} \cdot < (\delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{v} + \delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \delta \mathbf{v}_A) \delta \mathbf{v} - (\delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \delta \mathbf{v} + \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{v}_A) \delta \mathbf{v}_A > \\
 & + \nabla_{\boldsymbol{\ell}} \cdot < \delta(\rho \mathbf{v}'_A^2 / 2) \delta(1/\rho) \delta(\rho \mathbf{v}) > + c_s^2 < (\rho \nabla' \cdot \mathbf{v}' + \rho' \nabla \cdot \mathbf{v}) > \\
 & + < (\rho \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v} + \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{v}_A - \frac{1}{2} \mathbf{v}_A \cdot \delta(\rho \mathbf{v}_A)) \nabla' \cdot \mathbf{v}' > \\
 & - < (\rho' \mathbf{v}' \cdot \delta \mathbf{v} + \frac{1}{2} \rho' \mathbf{v}'_A \cdot \delta \mathbf{v}_A - \frac{1}{2} \mathbf{v}'_A \cdot \delta(\rho \mathbf{v}_A)) \nabla \cdot \mathbf{v} > \\
 & + < (2\rho' \mathbf{v}' \cdot \delta \mathbf{v}_A + \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}'_A - \rho' \mathbf{v}'_A \cdot \delta \mathbf{v}) \nabla \cdot \mathbf{v}_A > \\
 & - < (2\rho \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v}_A + \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}_A - \rho \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{v}) \nabla' \cdot \mathbf{v}'_A > \\
 & + < (\rho \mathbf{v} \delta(\rho \mathbf{v}'_A^2 / 2)) \cdot \nabla'(\frac{1}{\rho'}) - (\rho' \mathbf{v}' \delta(\rho \mathbf{v}'_A^2 / 2)) \cdot \nabla(\frac{1}{\rho}) > \\
 & + < (\rho' + \rho)(\mathbf{v} \cdot \mathbf{f}'_c + \mathbf{v}' \cdot \mathbf{f}_c + \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{f}'_m + \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{f}_m) > \\
 & + < (\rho' + \rho)(\mathbf{v} \cdot \mathbf{d}'_c + \mathbf{v}' \cdot \mathbf{d}_c + \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{d}'_m + \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{d}_m) >
 \end{aligned} \tag{I.2.23}$$

La contribution thermodynamique est alors très simple : $c_s^2 < (\rho \nabla' \cdot \mathbf{v}' + \rho' \nabla \cdot \mathbf{v})$. Sans elle, on obtiendrait la loi KHM décrivant la cascade isobare d'énergie cinétique-magnétique.

La loi exacte KHM (I.2.22) peut donc décrire la cascade énergétique à travers les échelles qu'il existe ou non une zone inertielle, et cela dans tout modèle fermé avec une fermeture thermodynamique polytropique.³ Elle prend en compte les canaux de dissipations et injections d'énergie ainsi que la contribution du flux de chaleur.

Cette étude analytique analysant la prise en compte des fermetures thermodynamiques dans l'extension compressible de la théorie des lois exactes nous apporte donc un cadre général applicable à toute étude de cascade turbulente dans des modèles MHD idéaux avec pression isotrope. On verra dans le chapitre II.3 qu'en ajoutant quelques termes indépendants de la pression, ces résultats seront aussi valables pour les modèles MHD Hall.

3. Attention par contre à l'interprétation des résultats aux plus petites échelles où le modèle MHD idéal n'est pas valable. On reviendra sur ce point dans le chapitre II.3.

2.4 Synthèse de l'étude analytique de turbulence compressible avec pression isotrope

Equations utilisées pour calculer la loi générale (modèle MHD idéal) :

$$\partial_t \rho = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \quad (I.2.24)$$

$$\partial_t \mathbf{v} = -\nabla \cdot (\mathbf{v} \mathbf{v}) + \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A) - \frac{1}{\rho} \nabla p_* + \mathbf{f}_c + \mathbf{d}_c \quad (I.2.25)$$

$$\partial_t \mathbf{v}_A = \nabla \cdot (\mathbf{v}_A \mathbf{v} - \mathbf{v} \mathbf{v}_A) - \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{v}_A + \frac{\mathbf{v}_A}{2} \nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{f}_m + \mathbf{d}_m \quad (I.2.26)$$

$$\partial_t u = -\nabla \cdot (u \mathbf{v}) + u \nabla \cdot \mathbf{v} - \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{q} - \frac{p}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (I.2.27)$$

Fonctions de corrélation d'énergie totale considérée (autres possibilités évoquées section 2.1) : $\mathcal{R} = \frac{1}{2} < \frac{1}{2}(\rho' + \rho) \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{2}(\rho' + \rho) \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A + \rho' u + \rho u' >$ de fonction incrémentale associée $\mathcal{S} = \frac{1}{2} < \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{v} + \delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \delta \mathbf{v}_A + 2\delta \rho \delta u >$

Formulations (f1, f2 et f3) des lois exactes générales KHM et K41 et applications aux fermetures isentrope-polytrope et polytrope :

- KHM f1 : (I.2.10)
- K41 f1 : (I.2.11)
- K41 isentrope-polytrope f1 : (I.2.13) [Résultat répondant à l'objectif initial]
- KHM f2 : (I.2.19)
- K41 f2 : (I.2.15)
- K41 isentrope-polytrope f2 : (I.2.18)
- KHM f3 : (I.2.21)
- KHM polytrope F3 : (I.2.22)

Réécriture des contributions de pression et flux de chaleur :

- Prise en compte le premier principe de la thermodynamique et de l'hypothèse d'isentropie dans f1 : (I.2.12)
- Contributions de pression ε_p (f1 vers f2) : (I.2.16)
- Contributions de pression magnétique ε_{pm} (f1 vers f2) : (I.2.17)
- Contributions de pression totale ε_{p*} (f2 vers f3) : (I.2.21)
- Contributions du flux de chaleur ε_q (f1 et f2 vers f3) : (I.2.21)

Des applications aux autres fermetures définies dans le chapitre I.1 sont données au fil des sections 2.1, 2.2 et 2.3. Les résultats écrits avec la F1 (section 2.1) sont publiés dans SIMON et SAHRAOUI 2021.

PARTIE I : CHAPITRE 3

L ETUDES DE CAS DANS LES DONNÉES IN-SITU

Sommaire

3.1	Données et conditions d'adaptation d'une loi exacte dans des observations issues d'une seule sonde	55
3.2	Comparaison des lois incompressible vs compressible-isentrope-polytrope avec $\gamma = 1$ (isotherme) et $\gamma = 5/3$ (adiabatique)	60
3.3	Application statistique préliminaire dans des données localisées dans la magnétogaine	62
3.4	Synthèse de l'étude de cas observationnelle dans les données de PSP	65

Ce chapitre résume le travail de comparaison de la loi incompressible PP98, et de deux cas de la loi compressible isentrope-polytrope dans deux jeux de données issus de Parker Solar Probe (PSP). Dans le premier cas, elle est fermée tel que $\gamma = 1$ (isotherme) et dans le second, tel que $\gamma = 5/3$. Ce travail, effectué pour comprendre l'apport de la loi polytrope dans l'estimation du taux de chauffage dans le vent solaire, a été publié dans SIMON et SAHRAOUI 2021 puis étendue statistiquement dans le cadre d'une étude préliminaire dans des données relevées dans la magnétogaine terrestre par la mission Magnetospheric Multiscales (MMS). La formulation des lois compressibles utilisée est la formulation f1 donnée par la loi exacte générale (I.2.11).

3.1 Données et conditions d'adaptation d'une loi exacte dans des observations issues d'une seule sonde

Le 12 août 2018, la sonde Parker Solar Probe commence son voyage à bord d'une fusée Delta IV-Heavy. Cette mission lancée par la NASA devra s'approcher au maximum du Soleil afin de permettre la compréhension de la dynamique énergétique insufflée par le Soleil dans son environnement, du chauffage et accélération de la couronne solaire et du vent solaire à ceux des particules énergétiques (FOX et al. 2016). Un tel objectif résonne avec l'application des lois exactes dans les données afin d'estimer le taux de chauffage turbulent (PARASHAR et MATTHAEUS 2022). De plus, comme indiqué sur la figure I.1.1,

le γ estimé près du Soleil est plus proche, voire supérieur, de $5/3$ que de 1. Relaxer l'isothermie dans la loi exacte et y regarder une loi polytrope y semble donc plus réaliste.

Pour estimer le taux de chauffage avec une loi exacte MHD, nous avons besoin du champ magnétique et des moments mono-fluide de la fonction de distribution. Ces données sont relevées par deux expériences de PSP (voir Figure I.3.1) : FIELDS («Fields Experiment») et SWEAP («Solar Wind Electrons Alpha and Protons Investigation»).

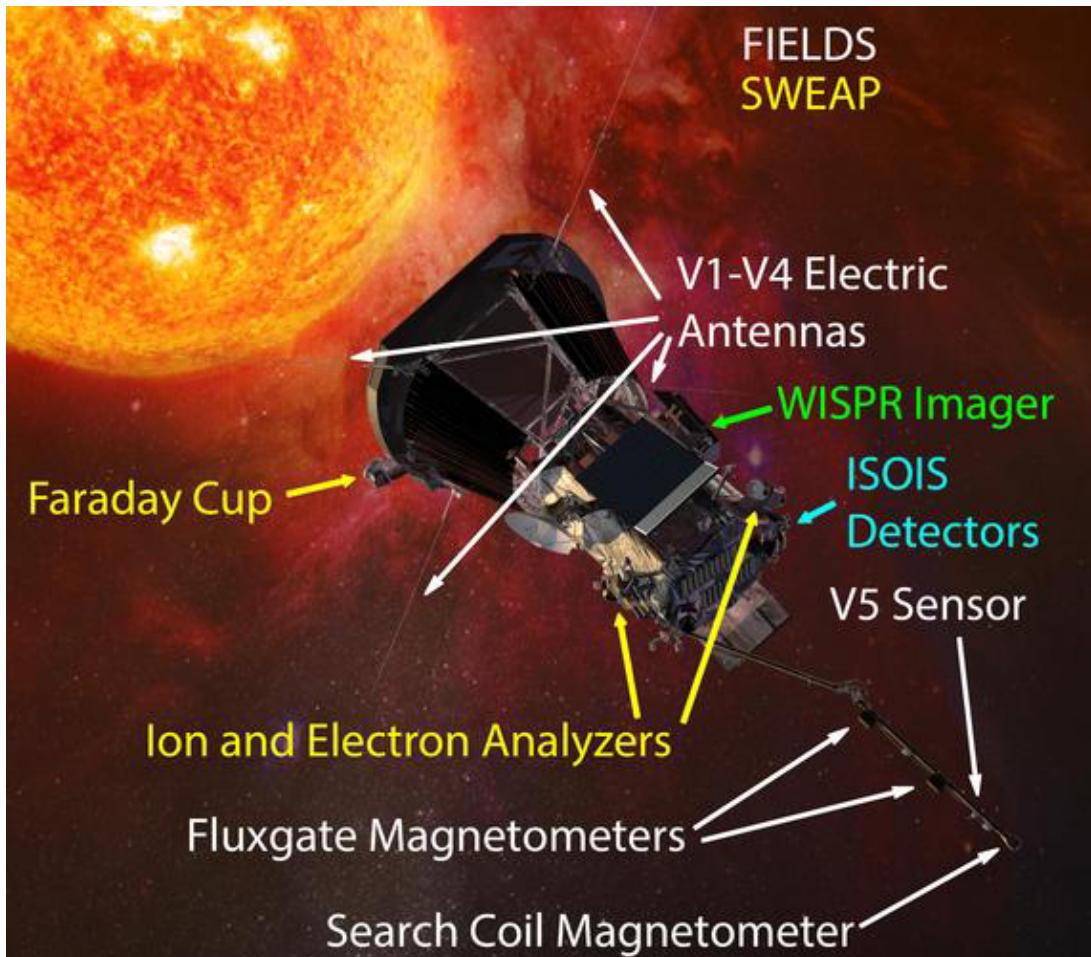


FIGURE I.3.1 – Localisation instruments de mesure sur PSP. Les instruments de la expérience FIELDS sont notés en blanc, et ceux de SWEAP en jaune. Les données utilisées ici proviennent des Fluxgate Magnetometers (MAGs) situés sur le bras et de la Faraday Cup (SPC) située juste à côté du bouclier et orientée vers le Soleil. Crédits : la page web de FIELDS (fields.ssl.berkeley.edu) et Johns Hopkins University Applied Physics Laboratory.

FIELDS (BALE, GOETZ et al. 2016) mesure le champ magnétique grâce à deux magnétomètres à saturation («fluxgate» en anglais), MAGs, mesurant la composante continue (DC) et les fluctuations à basse fréquence du champ (MHD-ionique) et un de type fluxmètre («search-coil»), SCM, donnant accès aux hautes fréquences (ionique-électronique). SWEAP (KASPER et al. 2016) est quant à elle composée d'une coupe de Faraday («Faraday Cup»), SPC, mesurant les flux globaux ionique et électronique, et d'analyseurs électrostatiques d'ions et d'électrons, SPAN, permettant de séparer leur état de charge. Notre étude concernant plutôt les échelles MHD, les données utilisées proviennent des instruments MAGs et SPC.

Les données publiquement disponibles au moment où cette étude a été menée (fin 2020) provenaient des trois-quatre premières orbites (Figure I.3.2). Nous avons choisi

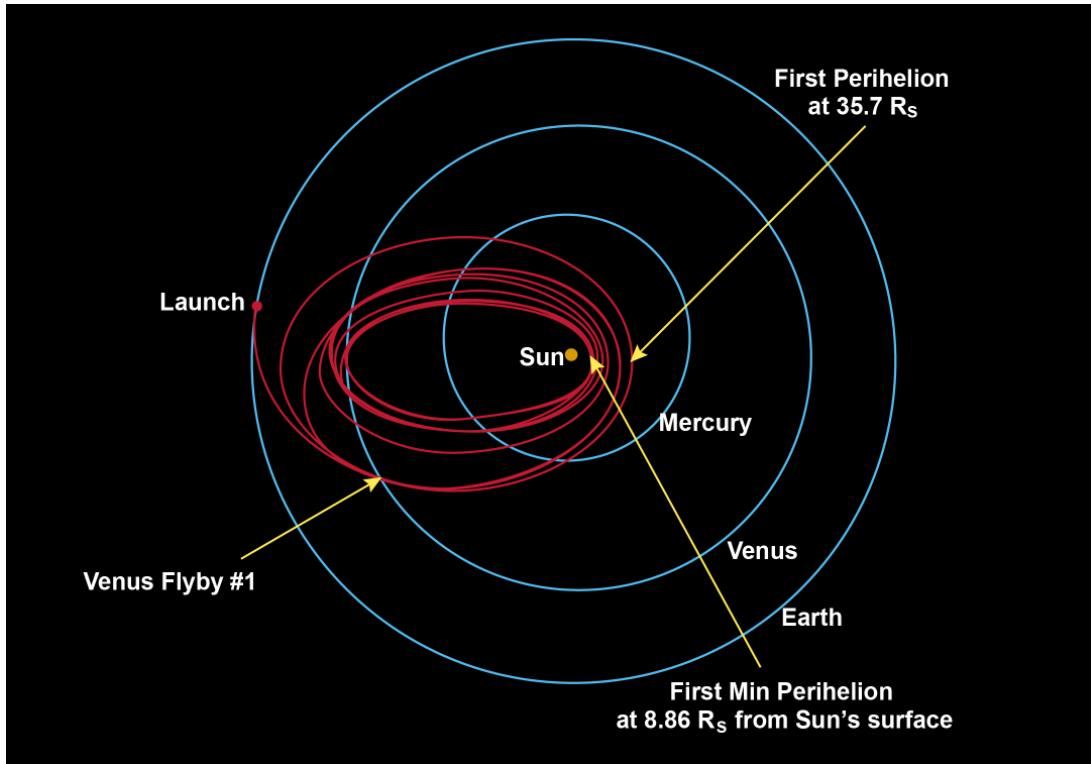


FIGURE I.3.2 – Orbites de PSP depuis la date de lancement, le 12 août 2018 à 7h31 UTC. Le premier périhélie à $35.7 R_s$ a été atteint le 6 novembre 2018 à 03h27 UTC. Crédits : la page web de PSP (<http://parkersolarprobe.jhuapl.edu>) et Johns Hopkins University Applied Physics Laboratory.

d'analyser les données relevées lorsque PSP était proche de son premier périhélie atteint le 6 novembre 2018 à 03h27 UTC vers $35.7 R_s$. Autour de cette position, les données sont relevées dans le vent solaire près du Soleil. Peu de lots de données comprenaient les relevés provenant de SPC et ceux provenant de MAGs avec assez peu de trous pour pouvoir les traiter conjointement dans cette étude. Finalement, le jeu choisi a été relevé le 4 novembre entre 00h00 et 02h30. Les données provenant de MAGs y sont résolues à une cadence d'environ 7 ms sans trous tandis que celles provenant de SPC sont résolues à 0.873 s et montrent 0.15% de trous situés entre 01h08 et 01h13. Ces trous seront comblés par interpolation linéaire et afin d'avoir la même cadence de données, les données MAGs sont rééchantillonnées sur la cadence de SPC. Les données analysées sont montrées sur la figure I.3.3.

Les sous-intervalles choisis pour le calcul des taux de cascade sont marqués en rouge et sont associés à deux niveaux de compressibilité différents. Le compressibilité noté c est calculé en prenant la déviation standard std des fluctuations de densité, c'est-à-dire $c = \text{std}(\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}) = \text{std}(\frac{\delta\rho}{\rho_0})$. Le premier sous-intervalle, de 00h35 à 01h05 a une compressibilité très faible, $c \sim 8\%$, tandis que le second, de 01h45 à 02h15, est plus compressible, $c \sim 20\%$. Grâce à ces deux intervalles, nous pouvons étudier l'impact des différents niveaux de fluctuation de densité sur le taux de cascade calculé avec la loi isentrope-polytrope et la loi incompressible.

Ces choix de sous-intervalles ont été effectués en considérant un certain nombre d'hypo-

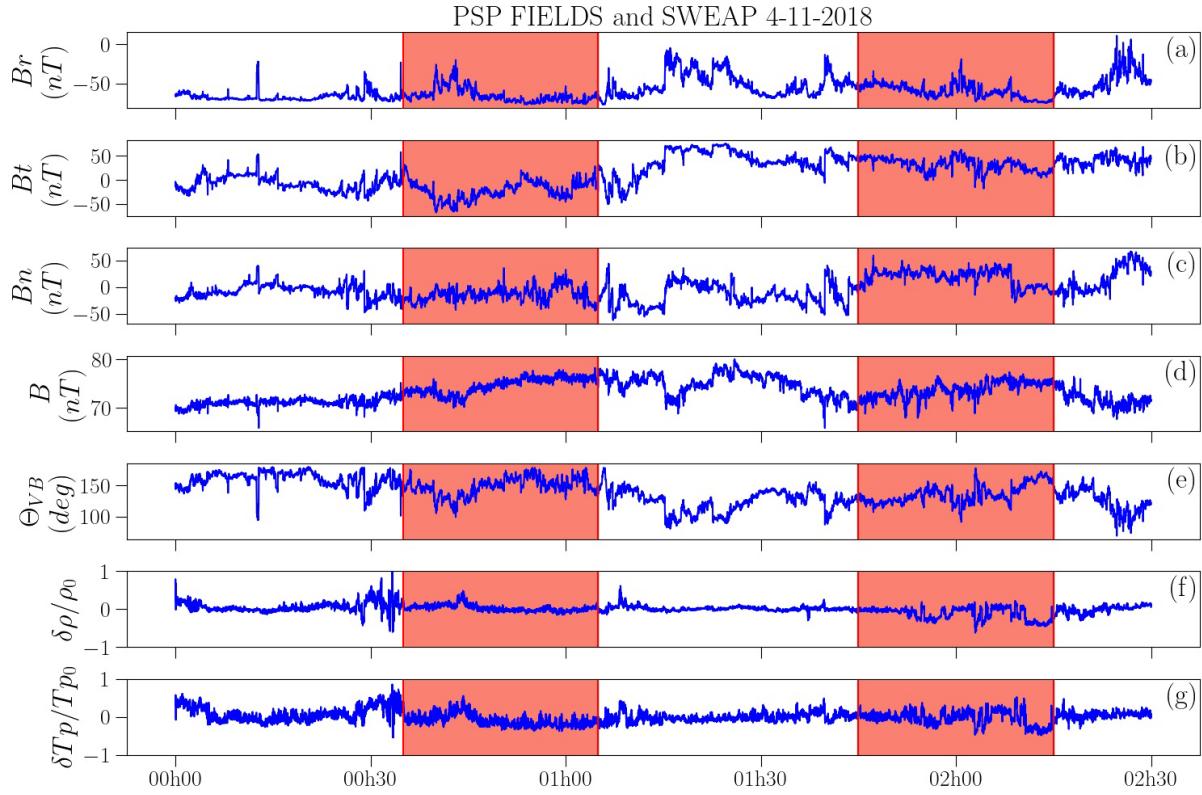


FIGURE I.3.3 – Données PSP mesurées dans l'héliosphère interne le 4 novembre 2018. (a) à (c) : les trois composantes du champ magnétique dans le système de représentation RTN. (d) : Norme du champs magnétique. (e) : angle entre le champ de vitesse du fluide et le champ magnétique. (f) et (g) : fluctuations de densité et température relative des protons. Les zones rouges représentent les sous-intervalles utilisés pour le calculer des taux de cascade.

thèses permettant de calculer un taux de cascade tout en réduisant l'incertitude du résultat. Les séries étant temporelles, on utilise l'hypothèse de Taylor¹ (**taylor_spectrum_1938**) qui presuppose que les variations temporelles relevées par la sonde peuvent être interprétées comme des variations spatiales convectées par le flot de plasma à la vitesse moyenne \mathbf{v}_0 . Ainsi, on peut estimer l'incrément spatial ℓ à partir de l'incrément temporel τ via $\ell \sim \mathbf{v}_0 \tau$. Estimer l'échelle spatiale à l'aide de l'hypothèse de Taylor suppose que les incrément longitudinaux sont orientés suivant la direction moyenne du flot. Or le couplage entre le champ magnétique et le fluide implique une forte anisotropie entre les directions parallèles et perpendiculaires au champ magnétique. Par conséquent, si l'angle entre la vitesse et le champ magnétique, θ_{VB} , varie trop fortement, d'importantes variations pourront apparaître dans les résultats du taux de cascade, comme l'ont observé LZ HADID, SAHRAOUI et GALTIER 2017. Les intervalles ont donc été choisis tel que θ_{VB} soit relativement stationnaire (ligne (e) de la figure I.3.3). On a aussi considéré des séries temporelles relativement stationnaires pour les autres quantités afin d'assurer une certaine stationnarité/homogénéité statistique.

1. La validité de l'hypothèse de Taylor dans le vent solaire et en particulier le long de la trajectoire de PSP peut être remise en question (**treumann_applicability_2019**; **chhiber_contextual_2019**) mais l'obtention d'une hypothèse de remplacement est encore une question ouverte (PARASHAR et MATTHAEUS 2022) que l'on n'a pas adressée au cours de ce travail.

L'estimation des moyennes dans le calcul du taux de cascade demande une statistique suffisante, c'est-à-dire des intervalles de durée supérieure à plusieurs fois le temps de corrélation des fluctuations turbulentes (COBURN et al. 2015). PARASHAR, GOLDSTEIN et al. 2020 ont estimé le temps de corrélation des données relevées par PSP entre le 3 et le 10 novembre avec des intervalles glissants de 4h, 8h et 24h. En se fiant à cette estimation, le temps de corrélation pour les données utilisées ici (le 4 novembre entre 00h00 et 02h30) est autour de 500 s c'est-à-dire un peu moins du tiers de la longueur de nos sous-intervalles (30 min). On supposera donc que leur durée convient au calcul d'un taux de cascade.

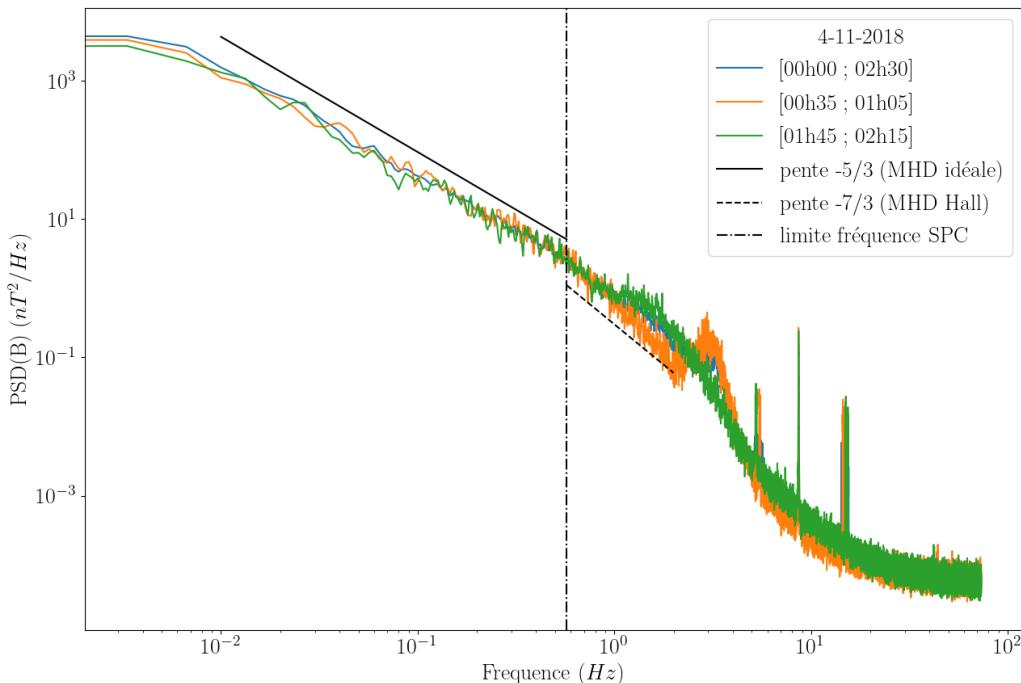


FIGURE I.3.4 – Spectre des fluctuations magnétiques pour l'intervalle complet de données (bleu), et les sous-intervalles (orange et vert) obtenue avec les données MAGs non rééchantillonnées à la cadence de SPC. La ligne noire continue indique la pente attendue dans la zone MHD idéale (spectre de type Kolmogorov en $-5/3$), la ligne en pointillés celle attendue dans la zone MHD Hall ($-7/3$) et l'axe vertical la fréquence maximale accessible avec la cadence de SPC.

Sur la figure I.3.4, sont affichés les spectres des fluctuations magnétiques obtenus avec les données MAGs non rééchantillonnées de l'intervalle complet et des deux sous-intervalles. Les fréquences qui nous intéressent sont les fréquences inférieures à la cadence de SPC. Pour ces fréquences, la pente des spectres semble être plus proche de $-5/3$ (attendue dans la zone MHD idéale) que de $-7/3$ (attendue dans la zone MHD Hall). La loi exacte du modèle MHD idéal y semble donc applicable.

3.2 Comparaison des lois incompressible vs compressible-isentrope-polytrope avec $\gamma = 1$ (isotherme) et $\gamma = 5/3$ (adiabatique)

Pour ce qui est de la forme de la loi exacte, l'utilisation d'une seule sonde impose deux autres hypothèses. La première correspond à la négligence des termes sources. Ces derniers ne peuvent pas être calculés à cause de leur dépendance en des dérivées locales (∇ et ∇') qui ne sont accessibles qu'avec des missions multi-sondes telles que MMS ou CLUSTER envoyées autour de la Terre (ANDRÉS, SAHRAOUI, GALTIER, LZ HADID, FERRAND et al. 2019). Physiquement, une telle hypothèse pourrait avoir un impact significatif, mais d'après l'étude numérique de ANDRÉS, SAHRAOUI, GALTIER, LZ HADID, FERRAND et al. 2019 en turbulence MHD subsonique sur une loi exacte isentrope-isotherme formulée telle que (I.2.11) (formulation qui sera considérée ici), seuls les termes flux écrits sous la forme de fonctions de structure sont dominants, les termes sources et les termes hybrides sont négligeables ou se compensent. La deuxième hypothèse est celle d'isotropie des fluctuations qui permet d'intégrer tridimensionnellement la loi exacte dans une boule de rayon $\ell = |\boldsymbol{\ell}|$. Cette hypothèse simplificatrice est largement utilisée PARASHAR et MATTHAEUS 2022 mais sa validité peut être remise en cause par l'anisotropie du plasma due au champ magnétique.² L'expression du taux de cascade calculée ici est alors :

$$\varepsilon = -\frac{3}{4|\boldsymbol{v}_0|\tau} < (\delta(\rho\boldsymbol{v}) \cdot \delta\boldsymbol{v} + \delta(\rho\boldsymbol{v}_A) \cdot \delta\boldsymbol{v}_A + 2\delta\rho\delta u)\delta\boldsymbol{v} - (\delta(\rho\boldsymbol{v}_A) \cdot \delta\boldsymbol{v} + \delta(\rho\boldsymbol{v}) \cdot \delta\boldsymbol{v}_A)\delta\boldsymbol{v}_A > \quad (\text{I.3.1})$$

avec, suivant les fermetures définies sur la Table 1.2, :

- incompressible (IMHD) : $\rho = \rho_0$, pas de u nécessaire
- isentrope-isotherme (CMHDI) : $u = c_s^2 \ln(\frac{\rho}{\rho_0})$ obtenu avec la fermeture isentrope-polytrope et $\gamma = 1$
- isentrope-adiabatique (CMHDp) : $u = \frac{c_s^2 - c_{s0}^2}{\gamma(\gamma-1)}$ obtenu avec la fermeture isentrope-polytrope et $\gamma = 5/3$

La vitesse du son est obtenue grâce à la relation des gaz parfaits : $c_s^2 = \gamma k_B T_p / m_p$ avec k_B , la constante de Boltzmann et T_p et m_p , la température et la masse des protons.

Sur la figure I.3.5 apparaissent les résultats pour les deux sous-intervalles, le quasi-incompressible à gauche (1) et le plus compressible à droite (2). La première ligne ((a1) et (a2)) montre l'estimation du taux de cascade avec la loi incompressible PP98 en bleu, la loi isentrope-isotherme en vert et adiabatique en rouge. Sur la deuxième ligne ((b1) et (b2)), la contribution d'énergie interne $-\frac{3}{4|\boldsymbol{v}_0|\tau} < 2\delta\rho\delta u\delta\boldsymbol{v} >$ notée F_2 est comparé aux autres termes résumés sous la notation F_1 dans le cas isotherme (vert) et le cas adiabatique (rouge). L'impact de la fermeture thermodynamique n'étant portée que par F_2 , le ratio entre les F_2 adiabatique (F_{2p}) et isotherme (F_{2i}) est donné sur la troisième ligne ((c1) et (c2)). F_1 représente les termes flux dit quasi-incompressibles ou Yaglom compressibles car ne s'annulant pas dans la loi PP98.

N'est représenté que la valeur absolue des différentes quantités. Leur signe nécessite des intervalles plus longs pour statistiquement converger (COBURN et al. 2015 ; LZ HADID, SAHRAOUI et GALTIER 2017). La question de l'inversion de la cascade potentiellement visualisée à travers le signe du taux ne peut donc pas être étudiée ici. Un signe constant

2. Un taux de cascade incompressible intégré anisotropiquement a été investigué par ANDRÉS, SAHRAOUI, S HUANG et al. 2022 mais une extension compressible reste à faire.

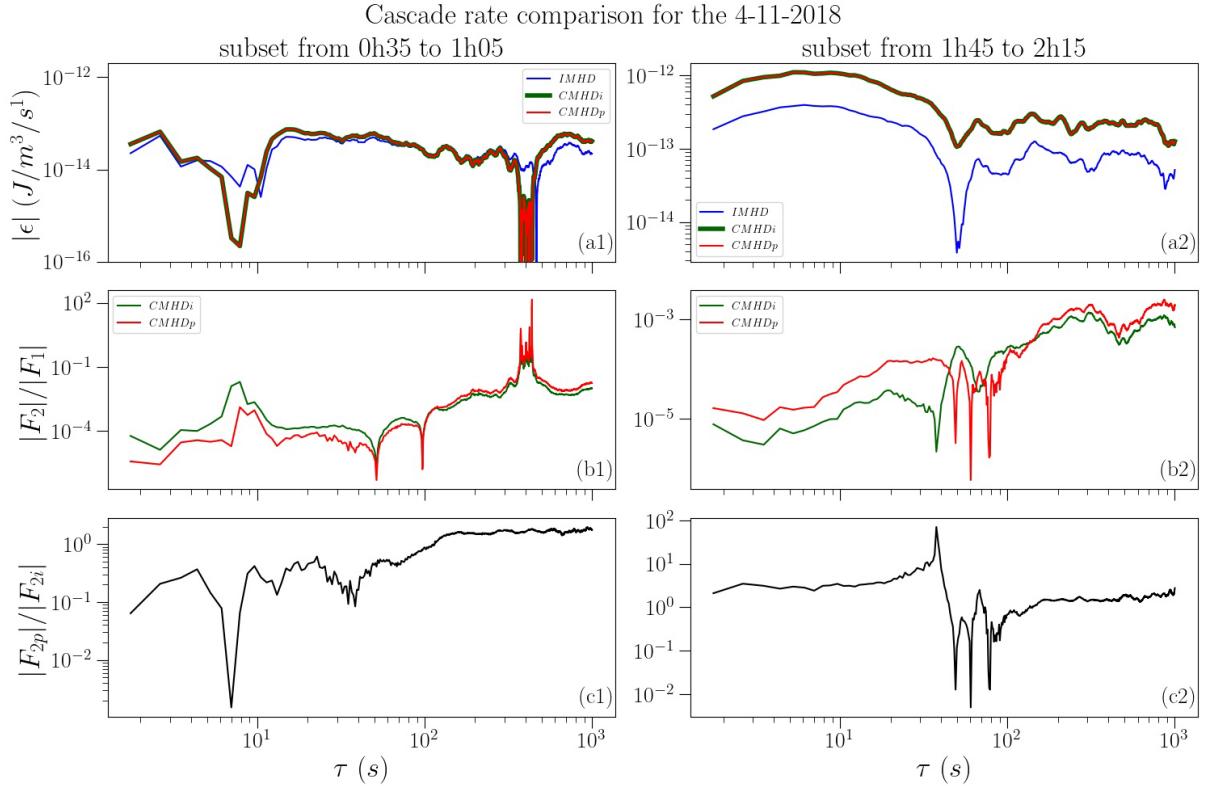


FIGURE I.3.5 – Comparaison des taux de cascade obtenus avec l’expression de la loi exacte (I.3.1) et différentes fermetures pour le sous-intervalle $\{00h35–01h05\}$ à gauche et $\{01h45–02h15\}$ à droite. (a1)–(a2) : valeur absolue des taux de cascade obtenus avec les fermetures incompressible (IMHD) en bleu, compressible isentrope-isotherme (CMHD_i) en vert et adiabatique (CMHD_p) en rouge. (b1)–(b2) : ratio entre la contribution d’énergie interne F_2 et celle quasi-incompressible F_1 dans le cas isotherme (vert) et le cas adiabatique (rouge). (c1)–(c2) : ratio entre les contributions de l’énergie interne adiabatique F_{2p} et isotherme F_{2i} .

peut par contre témoigner d’un rapprochement de la convergence. On va donc utiliser la variation de signe pour définir partiellement une zone inertuelle. Pour le premier intervalle, le signe montre des variations avant $\tau \sim 10$ s et après $\tau \sim 400$ s et reste constant et positif au centre. On supposera donc que cette zone centrale correspond à une zone inertuelle. À grande échelle, ces variations proviennent de F_1 et se reflètent dans la brusque augmentation apparaissant sur la deuxième ligne de graphiques. Pour le second intervalle, le signe ne varie pas, il reste positif contrairement à ce que pourrait laisser présager le creux apparaissant en $\tau \sim 50$ s. Malgré tout, nous limitons l’interprétation d’une zone inertuelle à l’intervalle $\tau \in [50; 800]$ s où le niveau moyen reste quasiment constant.

Figure I.3.5(a2) met en avant le rôle de la prise en compte de la compression dans le taux de cascade : les taux de cascade compressible sont plus élevés d’un facteur 2 à 3 par rapport au taux incompressible alors que Figure I.3.5(a1) provenant de données bien moins compressible montre des niveaux similaires. Cette observation coïncide avec de précédentes issues de données du vent solaire (BANERJEE, LZ HADID et al. 2016; LZ HADID, SAHRAOUI et GALTIER 2017; ANDRÉS, SAHRAOUI, LZ HADID et al. 2021). Par contre, les deux modèles compressibles montrent les mêmes résultats. La raison de cette convergence est révélée par les graphiques I.3.5(b1)–(b2) : la contribution de F_2 est bien

négligeable devant celle de F_1 . Le facteur 3 observé précédemment provient donc de la prise en compte de la densité dans $F1$. Même si l'impact du terme dépendant de la fermeture à une importance moindre dans le taux total, nous pouvons en examiner l'effet dans le graphique I.3.5(c1)–(c2). À large échelles ($\tau > 100$ s), les deux fermetures apportent une contribution similaire tandis qu'à plus faible échelle (hors de la suspectée zone inertie pour le deuxième intervalle), un ordre de grandeur de différence apparaît. Dans le cas du premier intervalle, la fermeture isotherme contribue plus que l'adiabatique tandis que dans le cas du deuxième intervalle, c'est le contraire. Une interprétation complète de cette différence de comportement ne peut être apportée avec cette étude de cas et nécessite une analyse statistique. Cette analyse, effectuée ultérieurement par BRODIANO, ANDRÉS et DMITRUK 2022 dans les données PSP montre que $\langle F_2 \rangle$ (en notant $\langle \rangle$ la moyenne sur les échelles et en adoptant nos notations des contributions aux taux de cascade) apparaît statistiquement un à deux ordres de grandeur en dessous de $\langle F_1 \rangle$ et que le facteur 3 entre les taux compressibles et le taux incompressible n'est pas retrouvé sauf pour des cas particuliers. Les cas que nous avons étudiés semblent donc dans la norme pour le premier point vérifié, mais, pour le dernier point, notre deuxième sous-intervalle entre dans la classe des cas particuliers. Ils montrent aussi que plus la compressibilité est forte, plus $\langle F_2 \rangle$ peut venir concurrencer $\langle F_1 \rangle$ voire, pour certains cas, le surpasser. Près de Soleil, ils notent aussi que $\langle F_{2p} \rangle$ est supérieur à $\langle F_{2i} \rangle$ en moyenne.

Cette étude de cas préliminaire publiée par SIMON et SAHRAOUI 2021 et validée statistiquement par BRODIANO, ANDRÉS et DMITRUK 2022 a donc permis de visualiser l'impact de la compression sur l'estimation du taux de cascade et l'apport potentiel d'une fermeture par rapport à une autre dans des données réelles du vent solaire.

3.3 Application statistique préliminaire dans des données localisées dans la magnétogaine

Le plasma dans la magnétogaine est plus compressible que dans le vent solaire (LZ HADID, SAHRAOUI, GALTIER et SY HUANG 2018) et d'après LIVADIOTIS 2018, $1 < \gamma < 5/3$. Il est aussi parcouru par de multiples missions en particulier des missions multi-sondes comme la mission Magnetospheric Multiscale (MMS) qui comprend quatre satellites en orbites autour de la Terre depuis 2015 (figure I.3.6). Leur caractéristique «multi-sonde» pourrait permettre de calculer les termes sources des lois exactes compressibles tel qu'effectué par ANDRÉS, SAHRAOUI, GALTIER, LZ HADID, FERRAND et al. 2019.

Par curiosité, on a choisi une douzaine de cas parmi les cas utilisés par ANDRÉS, SAHRAOUI, GALTIER, LZ HADID, FERRAND et al. 2019 pour regarder d'une manière un peu plus statistique si l'on retrouve les résultats sur les termes flux de notre étude de cas effectuée dans PSP. Les données utilisées ont été relevées par les instruments FPI («Fast Plasma Investigation») pour ce qui est des moments de la fonction de distribution des particules et FGM («Fluxgate Magnetometer») pour le champ magnétique pendant 12 intervalles de temps entre 2015 et 2017. L'étude, similaire à celle effectuée dans les données PSP, est menée séparément sur les quatre satellites de la constellation (48 résultats). La figure I.3.7 montre l'emplacement des 48 résultats pour lesquels la fluctuation de densité (compressibilité, c) varie de 20% à 60% (visualisé via l'échelle de couleur) dans deux diagrammes ayant pour abscisse le rapport entre les taux moyen compressible $\langle \varepsilon_{CMHD} \rangle$ obtenu avec $\gamma = 5/3$ (loi adiabatique, CMHD_p) et incompressible $\langle \varepsilon_{IMHD} \rangle$. et $\langle \varepsilon_i \rangle$ obtenu avec $\gamma = 1$ (loi isotherme, CMHD_i). Le diagramme de gauche a pour ordonnée le

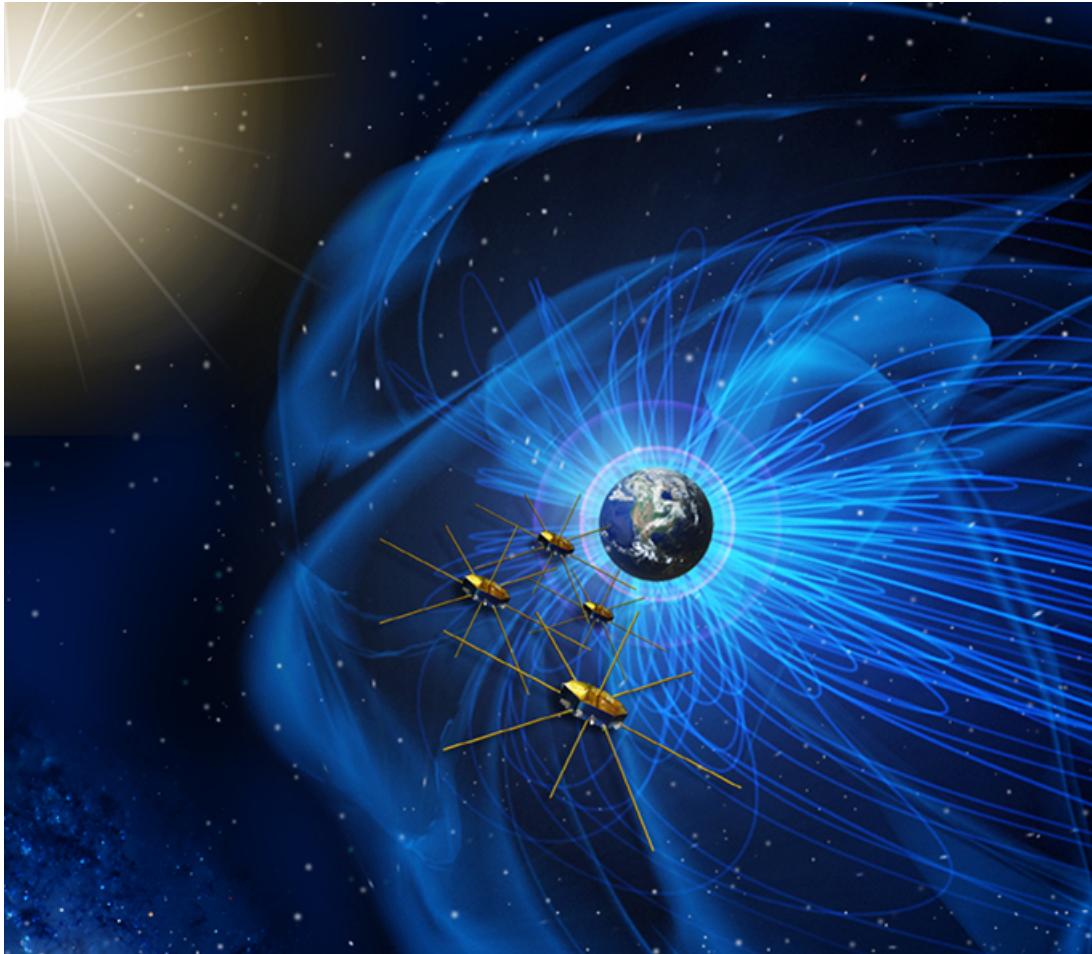


FIGURE I.3.6 – Vue d’artiste de la mission MMS. Crédits : la page web de MMS/NASA (https://www.nasa.gov/mission_pages/mms/).

rapport entre les contributions d’énergie interne $\langle F_{2p} \rangle$ et quasi-incompressible $\langle F_1 \rangle$ à la loi adiabatique et celui de droite le rapport entre les contributions d’énergie interne adiabatique et isotherme, $\langle F_{2p} \rangle$ et $\langle F_{2i} \rangle$. Cette étude révèle de plus importantes fluctuations de densité dans la magnétogaine que celles relevées pour les données PSP. Dans les cas les plus compressibles, le taux de cascade compressible semble pouvoir doubler par rapport au taux incompressible (points rouges éloignés de la verticale centrale). Mais la contribution d’énergie interne moyenne y est encore plus négligeable que dans les données PSP, 5 à 8 ordres de grandeurs plus faible que la contribution quasi-incompressible moyenne comme le montre le premier diagramme. Sur le diagramme de droite, on voit que $\langle F_{2p} \rangle$ à tendance à être un peu plus faible que $\langle F_{2i} \rangle$ mais qu’il peut aussi être environ deux fois plus important. Cette dernière observation montre un comportement inverse du comportement moyen observé à tout rayon solaire dans le vent solaire par BRODIANO, ANDRÉS et DMITRUK 2022, mais demanderait plus de statistique pour être confirmée.

Cette étude dans les données MMS est restée préliminaire, l’intérêt du travail ayant dévié vers l’effet de l’anisotropie de pression (voir partie II). Par la suite, une autre contribution pourrait être étudiée grâce à la constellation de satellites de MMS : celles des termes sources, impossible à analyser avec PSP. Il serait aussi intéressant d’étudier dans les données les contributions au taux de cascade apportées par les différentes formulations ayant

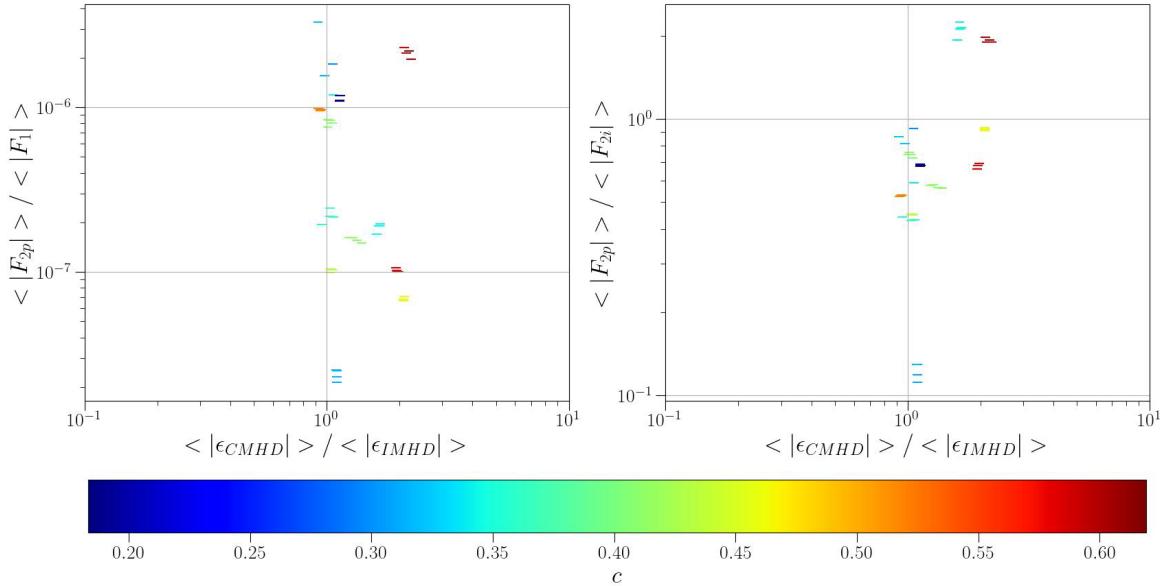


FIGURE I.3.7 – Résumé de l'étude statistique préliminaire menée sur 12 intervalles de type "burstmode" des quatre satellites de MMS. Les points sont colorés suivant la compressibilité c du jeu de données associé. En abscisses : rapport entre les taux de cascade compressible (CMHD, $\gamma = 5/3$) et incompressible (IMHD). Ordonnée à gauche : rapport entre les contributions d'énergie interne (cas $\gamma = 5/3$) et quasi-incompressible. Ordonnée à droite : rapport entre les contributions d'énergie interne adiabatique (cas $\gamma = 5/3$) et isotherme ($\gamma = 1$).

été analytiquement dérivées dans le chapitre précédent, en particulier les contributions des termes flux dépendant des pressions magnétique et thermodynamique ou du flux de chaleur.

3.4 Synthèse de l'étude de cas observationnelle dans les données de PSP

Données choisies : instrument SPC/SWEAP et MAGs/FIELDS présents sur la sonde PSP, mesures relevées le 4 Novembre 2018, comparaison d'un intervalle quasi-incompressible et d'un plus compressible.

Hypothèses nécessaires à l'utilisation de données in-situ issues d'une mission composée d'une seule sonde pour l'estimation de taux de cascade :

- taille d'intervalle supérieur à plusieurs fois le temps de corrélation des fluctuations turbulentes.
- hypothèse de Taylor, $\ell \sim \mathbf{v}_0\tau$, valide si angle θ_{VB} quasi-stationnaire.
- négligeance des termes sources dans la loi exacte, valide si vent subsonique et avec la formulation de loi étudiée ici.
- intégration isotrope de la loi exacte, validité à nuancer tant que l'angle θ_{VB} reste quasi-stationnaire.

Loi exacte analysée : $\varepsilon = F_1 + F_2$ avec

$$\begin{aligned} F_1 &= -\frac{3}{4|\mathbf{v}_0|\tau} < (\delta(\rho\mathbf{v}) \cdot \delta\mathbf{v} + \delta(\rho\mathbf{v}_A) \cdot \delta\mathbf{v}_A) \delta\mathbf{v} - (\delta(\rho\mathbf{v}_A) \cdot \delta\mathbf{v} + \delta(\rho\mathbf{v}) \cdot \delta\mathbf{v}_A) \delta\mathbf{v}_A > \\ F_2 &= -\frac{3}{4|\mathbf{v}_0|\tau} < 2\delta\rho\delta u\delta\mathbf{v} > \end{aligned}$$

Fermetures :

- incompressible : $\rho = \rho_0$, pas de u nécessaire
- isentrope-isotherme : $u = c_s^2 \ln(\frac{\rho}{\rho_0})$ et $\gamma = 1$
- isentrope-adiabatique : $u = \frac{c_s^2 - c_{s0}^2}{\gamma(\gamma-1)}$ et $\gamma = 5/3$

Conclusion :

- apport potentiellement substantiel de la compression via la densité dans les termes de type F_1 indépendant de la fermeture
 - apport de la fermeture important dans F_2 à petite échelle
 - F_2 négligeable devant F_1 pour les fermetures compressibles et dans les cas analysés
- Ces résultats sont publiés dans SIMON et SAHRAOUI 2021, statistiquement validés par BRODIANO, ANDRÉS et DMITRUK 2022 et étendus dans la magnétogaine à travers une étude statistique préliminaire effectué dans les données MMS.

CONCLUSION

Depuis 1998 et la loi exacte de POLITANO et POUQUET 1998a étendant aux modèles fluides magnétisés incompressibles, la théorie de Kolmogorov décrivant la cascade turbulence forte à travers des lois exactes, de multiples extensions ont été proposées prenant en compte la compressibilité.

Dans cette partie I, nous nous sommes concentrés sur l'effet de fermetures thermodynamiques dépendant d'une pression isotrope. Un premier chapitre (synthèse section 1.4) pose le problème de la compressibilité dans les modèles fluide et analyse différentes possibilités de fermeture basée sur la théorie thermodynamique. La question qui se pose alors est celle de l'impact de la compressibilité sur la turbulence. Ma contribution pour y répondre est développée à travers les chapitres 2 et 3.

Dans le chapitre 2 (synthèse section 2.4), un cadre analytique est démontré à travers l'extension de la théorie des lois exactes. La stratégie mise en œuvre ne repose pas sur une fermeture thermodynamique, a contrario de celles entreprises dans la littérature (GALTIER et BANERJEE 2011 ; BANERJEE et GALTIER 2013 ; BANERJEE et GALTIER 2014 ; ANDRÉS et SAHRAOUI 2017), mais plutôt, sur l'équation de densité d'énergie interne. La loi exacte résultante, générale, obtient ainsi un caractère général et la fermeture ne devient qu'un «détail», une hypothèse, à ne considérer qu'à la fin du calcul en fonction du besoin. Par ce biais, est abordée l'objectif initial de cette partie du travail : obtenir une loi valable dans la zone inertie isentrope pour une fermeture polytrope décrivant ainsi la cascade turbulente dans différents plasmas présents dans l'univers de manière plus réaliste et versatile que la fermeture isotherme utilisée jusqu'à présent. La première formulation (f1) proposée pour répondre à cet objectif est inspirée du travail dans le cadre isentrope-isotherme de ANDRÉS, SAHRAOUI, GALTIER, LZ HADID, DMITRU et al. 2018. Elle a permis l'étude comparative, dans deux jeux de données issus de la mission PSP, de l'impact de la compression et des fermetures isentropes-isotherme ($\gamma = 1$) et isentrope-adiabatique ($\gamma = 5/3$) sur la cascade turbulente. Cette étude fait l'objet du chapitre 3 (synthèse section 3.4) où elle est étendue dans la magnétogaine à travers l'amorçage d'une étude statistique dans les données de MMS. L'intérêt de la formulation f1 est que les termes sources impossibles à calculer à cause des caractéristiques de la mission PSP (une seule sonde) ont préalablement été numériquement démontrés comme négligeable dans le taux de cascade total par ANDRÉS, SAHRAOUI, GALTIER, LZ HADID, DMITRU et al. 2018. La deuxième formulation (f2) de la loi exacte a initialement vu le jour comme une conséquence du travail analytique qui sera présenté dans la partie II, relaxant l'isotropie de pression, mais le résultat, dépendant de p/ρ , peut s'avérer plus adapté à l'application

d'une fermeture thermodynamique. La troisième et dernière formulation (f3) est la plus récente et s'inspire du travail sur le flux de chaleur dans l'équation d'énergie interne qui s'est révélée nécessaire lors de l'étude numérique qui sera présentée dans la partie ?? . Ce résumé des résultats obtenus avec pression isotrope reflète la structure chronologique de l'ensemble du travail effectué et présenté dans ces trois parties, la méthode scientifique mise en œuvre et les points méthodologiques utilisés.

En termes de physique, cette partie propose un cadre d'étude de l'impact de la compression dans sa forme la plus "simple" : une densité variable, une pression isotrope, une énergie interne et un flux de chaleur souvent négligé. Ces grandeurs nous permettent de fermer le modèle fluide par des relations basées sur des hypothèses thermodynamiques telles que l'isentropie, l'isothermie ou la polytropie. À travers l'analyse de ces hypothèses et leur application dans les anciennes descriptions de la cascade turbulente, quatre possibilités majeures de fermeture ont émergées. La première, isentrope-isotherme est la première à avoir été utilisée dans l'extension des lois exactes (GALTIER et BANERJEE 2011 ; BANERJEE et GALTIER 2013 ; ANDRÉS et SAHRAOUI 2017). La deuxième, isentrope-polytrope, introduite en HD (BANERJEE et GALTIER 2014), est celle qui nous a permis de généraliser la méthode d'obtention des lois exactes à toutes fermetures en utilisant l'équation d'énergie interne, elle prend en compte l'existence d'un γ et reflète un peu mieux la pluralité de transformations thermodynamiques observée dans les plasmas spatiaux et astrophysiques. La troisième, polytropique, basée sur un γ et un σ , lie le flux de chaleur au travail de pression et étend un peu plus loin les possibilités d'application des lois exactes. De la dernière, isotherme, émerge la loi exacte compressible qui semble la plus simple malgré la prise en compte des flux de chaleur.

Pour ce qui est de l'impact de la compression et des fermetures observé dans l'étude du taux de cascade dans le vent solaire, l'étude de cas comparative montre que la compression peut jouer un rôle important dans la cascade, mais, dans les cas étudiés, la fermeture isentrope-adiabatique ou isentrope-isotherme a peu d'impact malgré le rôle qu'elle joue à travers l'énergie interne. Les termes dominants s'avèrent en effet être ceux n'en dépendant pas. On peut aussi les interpréter comme ceux subsistant dans le cas d'une fermeture isobare. Ce travail pose ainsi les bases d'une étude observationnelle, plus générale, complète et systématique, de l'impact de compression et des fermetures sur la turbulence dans les plasmas spatiaux. Cette étude est laissée au futur car le vent solaire ayant la particularité d'être peu collisionnel et magnétisé, une autre question, un autre type de fermeture se sont posés et ont orienté le travail dans une autre direction : celle de l'effet de l'anisotropie de pression.

PARTIE II : Etude analytique de l'effet de l'anisotropie de pression induite par un manque de collision

La collision de tous les sentiments contradictoires qui l'agitaient avait produit la neutralité, et aucun d'eux n'était capable de lui communiquer le mouvement.

Thomas HARDY, artiste, écrivain, poète,
romancier (1840 - 1928)

INTRODUCTION

Les fonctions de distributions en vitesse des ions observées dans le vent solaire sont généralement anisotrope le long des directions parallèle et perpendiculaires au champ magnétique (CASSAK et BARBHUIYA 2022 ; CASSAK, BARBHUIYA et WELDON 2022). Cette observation s'explique par le manque de collisions dans le milieu et les interactions entre le champ magnétique et les ions. Ce type d'anisotropie a tout d'abord été modélisé par CHEW, GOLDBERGER et LOW 1956 à travers une pression de forme tensorielle et diagonale (gyrotrope) et supposant l'isentropie du modèle. Ce modèle, nommé CGL en hommage aux auteurs, sera présenté plus en détail dans le chapitre 1 de cette deuxième partie. Il y sera accompagné de l'extension de la théorie de Kolmogorov proposée prenant en compte un tenseur de pression. Dans le chapitre 2, nous nous poserons la question suivante : l'incompressibilité est-elle compatible avec la gyrotropie de pression ? Et dans le 3, nous généraliserons la loi pour la MHD au modèle bi-fluide.

Dans cette partie qui concentre le cœur analytique du travail effectué, nous conserverons l'hypothèse d'une zone inertielle isentrope et nous ne regarderons pas en détail l'impact sur la cascade des composantes non gyrotrope du tenseur de pression.

PARTIE II : CHAPITRE 1

LOI EXACTE POUR LE MODÈLE CGL

Sommaire

1.1	D'un tenseur de pression dans le modèle fluide au modèle CGL	73
1.2	Instabilités linéaires et potentiel impact sur la turbulence du vent solaire	75
1.3	Loi exacte générale pour tout type de pression et application au modèle CGL	78
1.4	Synthèse de l'étude analytique de turbulence compressible avec pression tensorielle et modèle CGL	82

Dans le vent solaire, utiliser un modèle MHD compressible avec pression isotrope peut s'avérer ardu à justifier en présence de champ magnétique fort ou de faibles collisions. Il faut prendre en compte, à minima, une pression gyrotrope par exemple en utilisant le modèle dit «CGL». C'est le but de ce chapitre : décrire la cascade turbulente d'énergie totale à travers une loi exacte associée au modèle CGL. Encore une fois, on ne réduira le champ d'application qu'après avoir obtenu une loi plus générale, valable pour tout tenseur de pression. Les nouveaux résultats exposés ici ont fait l'objet principal de l'article SIMON et SAHRAOUI 2022.

1.1 D'un tenseur de pression dans le modèle fluide au modèle CGL

Dans le cadre général défini à partir de l'équation de Vlasov et menant au modèle MHD, la pression et le flux de chaleur sont définis comme des tenseurs de dimension respective 3×3 et $3 \times 3 \times 3$. La pression, $\bar{\mathbf{P}}$, est un tenseur symétrique obtenu en effectuant le produit de deux vecteurs vitesse tandis que le flux de chaleur s'obtient à partir du produit de trois vecteurs vitesse.

Dans la partie I, la pression était supposée isotrope, c'est à dire $\bar{\mathbf{P}} = p\bar{\mathbf{I}}$ avec $\bar{\mathbf{I}}$ le tenseur identité. Dans le modèle CGL, elle est définie comme gyrotrope dans la direction favorisée par le champ magnétique, notée \mathbf{b} . On considère donc deux pressions, une dite parallèle $p_{||}$ et une perpendiculaire p_{\perp} et dans un repère cartésien orienté tel que \mathbf{b} coïncide

avec la direction \mathbf{e}_z , le tenseur s'écrit :

$$\bar{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} p_\perp & 0 & 0 \\ 0 & p_\perp & 0 \\ 0 & 0 & p_\parallel \end{pmatrix}$$

Plus généralement, on peut l'écrire : $\bar{\mathbf{P}} = p_\perp \bar{\mathbf{I}} + (p_\parallel - p_\perp) \mathbf{b} \mathbf{b}$. La partie isotrope de la pression est obtenue en faisant le produit dual ":" entre $\bar{\mathbf{P}}$ et $\bar{\mathbf{I}}$, ce qui revient à considérer la trace de $\bar{\mathbf{P}}$. Ainsi : $p = \frac{1}{3} \bar{\mathbf{P}} : \bar{\mathbf{I}} = \frac{1}{3}(2p_\perp + p_\parallel)$. Cela permet de réécrire le tenseur de pression en séparant la partie isotrope de la composante dite anisotrope : $\bar{\mathbf{P}} = p \bar{\mathbf{I}} + (p_\parallel - p_\perp)(\mathbf{b} \mathbf{b} - \frac{1}{3} \bar{\mathbf{I}})$, on notera la composante anisotrope $\bar{\Pi}$. Dans le cas général non-gyrotrope, d'autres composantes apparaissent. On n'abordera pas leur détail et on les résumera simplement par la notation $\bar{\Pi}_{ng}$. D'après CASSAK et BARBUIYA 2022, $\bar{\Pi} = (p_\parallel - p_\perp)(\mathbf{b} \mathbf{b} - \frac{1}{3} \bar{\mathbf{I}}) + \bar{\Pi}_{ng}$ contribue à la déformation incompressible du fluide par compression/expansion et cisaillement à travers le terme $\bar{\mathbf{P}} : \nabla \mathbf{v}$ tandis que p résulte en sa dilatation, compressible. En mécanique des fluides, ces termes de pression anisotrope sont souvent une réécriture des termes de dissipation visqueuse d'où leur interprétation dissipative.

On rappelle le modèle ouvert dépendant des moments $\rho, \mathbf{v}, \bar{\mathbf{P}}$ et $\bar{\mathbf{q}}$ et de la loi d'Ohm idéale exprimée à travers l'équation d'induction (II.1.4) :

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (\text{II.1.1})$$

$$\partial_t(\rho \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v} - \rho \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A) + \nabla \cdot \bar{\mathbf{P}}_* = 0 \quad (\text{II.1.2})$$

$$\partial_t \bar{\mathbf{P}} + \nabla \cdot (\mathbf{v} \bar{\mathbf{P}}) + (\bar{\mathbf{P}} \cdot \nabla \mathbf{v})^S + \Omega_g (\mathbf{b} \times \bar{\Pi}_{ng})^S = -\nabla \cdot \bar{\mathbf{q}} \quad (\text{II.1.3})$$

$$\partial_t \mathbf{v}_A - \nabla \cdot (\mathbf{v}_A \mathbf{v} - \mathbf{v} \mathbf{v}_A) + \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{v}_A - \frac{\mathbf{v}_A}{2} \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (\text{II.1.4})$$

sachant que $\mathbf{b} \times \bar{\mathbf{I}} = 0$ et $\mathbf{b} \times \mathbf{b} \mathbf{b} = 0$, et en notant $\bar{\mathbf{P}}_* = \bar{\mathbf{P}} + p_m \bar{\mathbf{I}}$, le tenseur de pression totale. Aucune hypothèse sur la forme des tenseurs de pression et flux de chaleur n'est faite dans ce modèle.

Ce modèle peut nous servir à obtenir une loi exacte générale sur l'énergie totale applicable sous l'hypothèse d'une cascade isentrope, quelle que soit la forme de la pression et du flux de chaleur. En effet, comme dans le cas avec pression isotrope, l'équation (II.1.3) ne servira pas dans la dérivation de la loi exacte. On utilisera seulement l'équation d'énergie interne que l'on peut obtenir à partir de l'équation sur la composante isotrope du tenseur de pression :

$$\partial_t p + \nabla \cdot (p \mathbf{v}) + \frac{2}{3} \bar{\mathbf{P}} : \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{3} \nabla \cdot (\bar{\mathbf{q}} : \bar{\mathbf{I}}) \quad (\text{II.1.5})$$

puisque $\bar{\Pi}_{ng}$ étant symétrique $(\mathbf{b} \times \bar{\Pi}_{ng}) : \bar{\mathbf{I}} = 0$. L'énergie interne sera définie par $\rho u = \frac{1}{2} \bar{\mathbf{P}} : \bar{\mathbf{I}} = \frac{3}{2} p = \frac{1}{2}(2p_\perp + p_\parallel)$, la dernière formulation étant associé au cas particulier gyrotrope (HAZELTINE, MAHAJAN et MORRISON 2013). On retrouve donc l'équation (I.1.29) écrite pour un tenseur de pression quelconque :

$$\partial_t(\rho u) + \nabla \cdot (\rho u \mathbf{v}) + \bar{\mathbf{P}} : \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{2} \nabla \cdot (\bar{\mathbf{q}} : \bar{\mathbf{I}}) \quad (\text{II.1.6})$$

Cette équation est assez générale et peut-être obtenue indépendamment de l'expression de u en fonction de p et de l'équation (II.1.3), avec un bilan énergétique, comme celui que l'on a effectué dans le chapitre I.1 (ECKART 1940 ; HAZELTINE, MAHAJAN et MORRISON

2013). On peut y faire apparaître l'isentropie à travers l'hypothèse : $-\frac{1}{2}\nabla \cdot (\bar{\bar{\mathbf{q}}} : \bar{\mathbf{I}}) = 0$.

La fermeture CGL consiste à annuler la divergence du flux de chaleur $\nabla \cdot \bar{\bar{\mathbf{q}}}$ dans l'équation (II.1.3) et à considérer un tenseur de pression de forme gyrotrope. L'équation tensorielle de pression prend alors la forme de deux équations (voir HUNANA et al. 2019 pour les détails de dérivations) :

$$\partial_t p_{\parallel} + \nabla \cdot (p_{\parallel} \mathbf{v}) + 2p_{\parallel} \mathbf{b} \mathbf{b} : \nabla \mathbf{v} = 0 \quad (\text{II.1.7})$$

$$\partial_t p_{\perp} + \nabla \cdot (p_{\perp} \mathbf{v}) + p_{\perp} \nabla \cdot \mathbf{v} - p_{\perp} \mathbf{b} \mathbf{b} : \nabla \mathbf{v} = 0 \quad (\text{II.1.8})$$

En les sommant, on retrouve l'équation d'énergie interne (II.1.6) avec l'hypothèse d'isen-tropie. Pour simplifier les calculs dans cette partie II, nous supposerons, dans le cas général, $\nabla \cdot \bar{\bar{\mathbf{q}}} = 0$ (équation (II.1.3)). Cette hypothèse est, comme on vient de le voir, cohérente avec l'hypothèse d'isentropie de la cascade turbulente et avec le modèle CGL qui nous intéresse. Elle pourra être facilement relaxée, si besoin est, en prenant en compte, dans la loi exacte, la correction (I.2.21) qui a été dérivée dans la section I.2.3.

En manipulant les équations de pression du modèle CGL, (II.1.7) et (II.1.8), avec l'équation d'induction (II.1.4), on obtient les formes conservatives :

$$d_t \left(\frac{p_{\parallel} \mathbf{v}_A^2}{\rho^2} \right) = 0 \quad d_t \left(\frac{p_{\perp}}{\rho^{3/2} |\mathbf{v}_A|} \right) \quad (\text{II.1.9})$$

De ce lien, entre $p_{\parallel, \perp}$ et des puissances de ρ , provient la deuxième appellation du modèle, «bi-adiabatique», et les formes explicites des pressions : $p_{\parallel} \propto \frac{\rho^2}{\mathbf{v}_A^2}$ et $p_{\perp} \propto \rho^{3/2} |\mathbf{v}_A|$.

1.2 Instabilités linéaires et potentiel impact sur la turbulence du vent solaire

Contrairement au modèle MHD, le modèle gyrotrope a la particularité d'être potentiellement linéairement instable. Sa linéarisation (voir méthode dans la section-synthèse du chapitre 3 de l'introduction et pour plus de détails, le chapitre 3 de HUNANA et al. 2019) nous donne l'équation de dispersion suivante :

$$\begin{pmatrix} \frac{\omega^2}{v_{A0}^2 k_{\parallel}^2} - (\beta_{\parallel 0} a_{p0} + 1) \frac{k_{\parallel}^2}{k_{\perp}^2} + \left(\frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0}) - 1\right) & 0 & -\frac{\beta_{\parallel 0}}{2} a_{p0} \frac{k_{\perp}}{k_{\parallel}} \\ 0 & \frac{\omega^2}{v_{A0}^2 k_{\parallel}^2} + \left(\frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0}) - 1\right) & 0 \\ -\frac{\beta_{\parallel 0}}{2} a_{p0} \frac{k_{\perp}}{k_{\parallel}} & 0 & \frac{\omega^2}{v_{A0}^2 k_{\parallel}^2} - \frac{3}{2} \beta_{\parallel 0} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_{x1} \\ v_{y1} \\ v_{z1} \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{II.1.10})$$

où $a_{p0} = \frac{p_{\perp 0}}{p_{\parallel 0}}$ est appelé taux d'anisotropie et $\beta_{\parallel 0} = \frac{2p_{\parallel 0}}{\rho_0 v_{A0}^2}$ est le paramètre β linéaire du plasma calculé avec la pression parallèle. La relation de dispersion s'écrit alors :

$$0 = \left(\frac{\omega^2}{k_{\parallel}^2 v_{A0}^2} - 1 + \frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0}) \right) \left(\frac{\omega^2}{k_{\parallel}^2 v_{A0}^2} - \frac{1}{2}(A \pm \sqrt{A^2 - 4B}) \right) \quad (\text{II.1.11})$$

avec

$$\begin{aligned}
 A &= 1 + \beta_{\parallel 0} a_{p0} \left(1 - \frac{1}{2} \cos^2 \theta\right) + \beta_{\parallel 0} \cos^2 \theta \\
 B &= \frac{3}{2} \beta_{\parallel 0} \cos^2 \theta \left(\left(1 - \frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0})\right) \cos^2 \theta + \left(1 + \beta_{\parallel 0} a_{p0} \left(1 - \frac{1}{6} a_{p0}\right)\right) \sin^2 \theta\right) \\
 &= \frac{3}{2} \beta_{\parallel 0} \cos^2 \theta \left(1 + \beta_{\parallel 0} a_{p0} \left(1 - \frac{1}{2} \cos^2 \theta\right) - \frac{\beta_{\parallel 0}}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{6} \beta_{\parallel 0} a_{p0}^2 \sin^2 \theta\right) \\
 A^2 - 4B &= \left(1 + \beta_{\parallel 0} a_{p0} \left(1 - \frac{1}{2} \cos^2 \theta\right) - \beta_{\parallel 0} \cos^2 \theta\right)^2 + 3\beta_{\parallel 0}^2 \cos^4 \theta + \beta_{\parallel 0} a_{p0}^2 \sin^2 \theta
 \end{aligned}$$

Dans le premier mode $\frac{\omega^2}{k_{\parallel}^2 v_{A0}^2} + (\frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0}) - 1) = 0$, on retrouve le mode d'Alfvén incompressible si $a_{p0} = 1$. Ce mode est instable si $1 - \frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0}) < 0$. Cette instabilité est l'instabilité firehose («lance d'incendie» ou «tuyau d'arrosage»). Son nom provient du comportement des tubes de flux magnétique qui ressemble à celui d'un tuyau d'arrosage devenu fou après avoir été lâché par son utilisateur : la pression parallèle qui joue le rôle de la force centrifuge est alors trop importante et n'est plus compensée par les pressions perpendiculaire (force de pression thermique extérieure au tuyau d'arrosage) et magnétique (tension du tube).

Les deux autres modes visibles dans la relation (II.1.11) sont les modes magnétosoniques rapide (+) et lent (-) du modèle CGL. Même en y considérant $a_{p0} = 1$, il est impossible de retrouver les modes magnétosonores MHD dans les expressions des modes CGL. Cela est dû à l'utilisation des équations de pression dans le calcul pour obtenir les relations de dispersion. D'après l'expression de $A^2 - 4B$, le mode rapide va rester stable. Le mode lent peut quant à lui devenir instable si $B < 0$. Cela peut arriver dans deux cas de figure :

- $1 - \frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0}) < 0$ correspondant à l'instabilité firehose, qui est dans ce cas nommée firehose parallèle puisqu'elle apparaît principalement si $k_{\parallel} \gg k_{\perp}$,
- $1 + \beta_{\parallel 0} a_{p0} \left(1 - \frac{1}{6} a_{p0}\right) < 0$ correspondant à l'instabilité miroir.

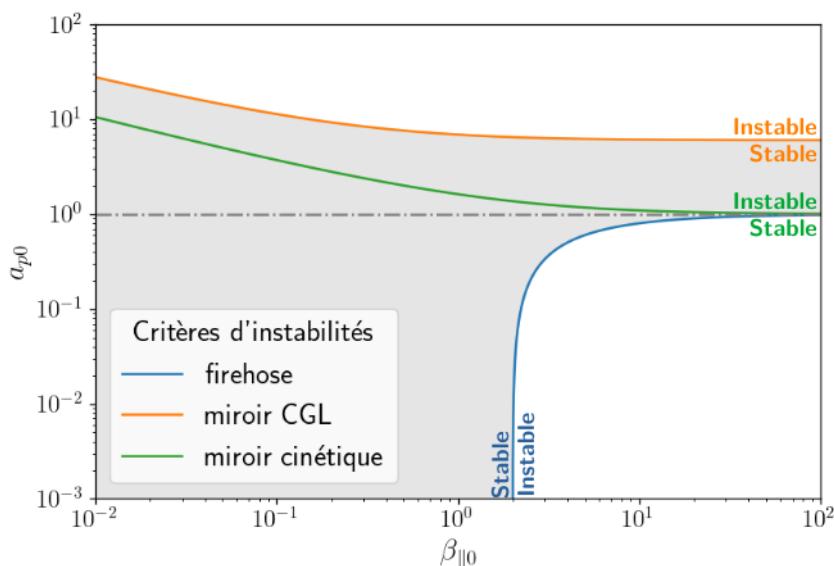


FIGURE II.1.1 – Zones de stabilité du modèle CGL (zone grisée). Critères d'instabilité firehose (bleu), miroir (orange) et miroir cinétique (vert). Horizontale $a_p = 1$ en gris.

L'expression du critère d'instabilité miroir est légèrement différente de celle provenant de la théorie linéaire cinétique à cause du facteur 1/6. Ce facteur d'erreur translate la condition nécessaire pour qu'il y ait des instabilités miroir à $a_{p0} > 6$ au lieu de $a_{p0} > 1$ comme on peut le voir sur la figure II.1.1. La condition nécessaire pour qu'il y ait apparition d'instabilité firehose est, quant à elle, $a_{p0} < 1$ et en accord avec la théorie cinétique. Dans le vent solaire, ces critères d'instabilité semblent avoir un impact majeur puisque l'état du plasma semble maintenu, sur les diagrammes $a_p - \beta_{\parallel}$, dans une zone qu'ils semblent délimiter comme l'a observé HELLINGER, TRÁVNÍČEK et al. 2006 dans les données relevées par la sonde WIND.

Dans le chapitre 3 de l'introduction, nous avons rappelé l'importance des ondes d'Alfvén dans les théories de turbulence et, dans le chapitre 1 de la partie I, que le sujet de l'impact des ondes compressibles MHD sur la cascade turbulente est toujours ouvert (BRODIANO, ANDRÉS et DMITRU 2021). On peut donc s'attendre à ce que ces instabilités et la cascade turbulente s'influencent. Cela semble en effet être le cas si l'on regarde

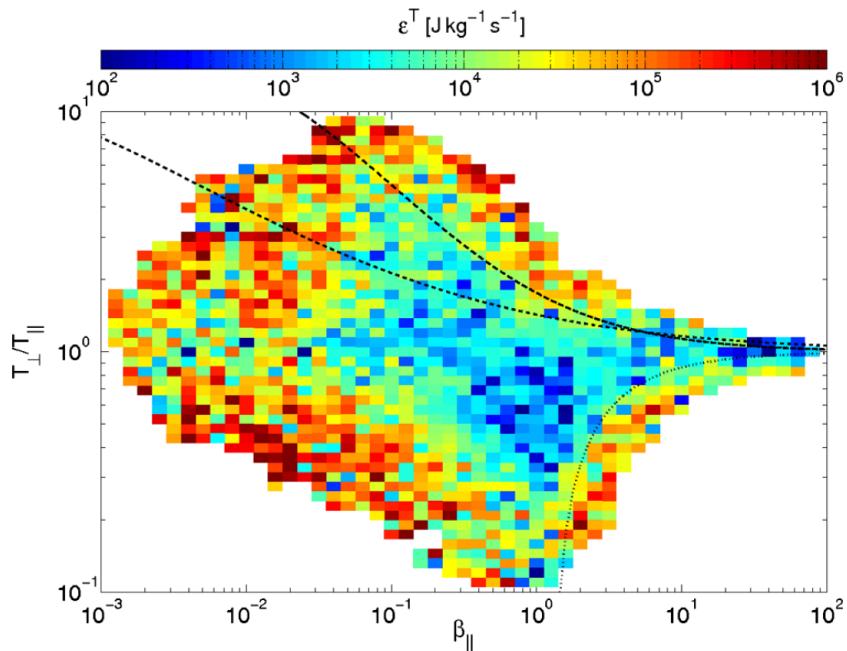


FIGURE II.1.2 – Distribution statistique en fonction de $a_p = \frac{p_{\perp}}{p_{\parallel}} = \frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}}$ et β_{\parallel} d'échantillons relevés entre 1995 et 2011 dans le vent solaire par la sonde WIND en orbite autour de la Terre. Pour chacun d'eux, le taux de cascade est calculé avec la loi exacte PP98 et indiqué par l'échelle chromatique. Les lignes indiquent les frontières associées aux instabilités cinétiques miroir (décroissante supérieure), cyclotron (décroissante inférieure) et firehose (croissante). Crédits : K OSMAN et al. 2013.

les résultats de l'étude de la température isotrope (LIU et al. 2006), des fluctuations magnétiques (BALE, KASPER et al. 2009) et du taux de cascade incompressible K OSMAN et al. 2013 (voir figure II.1.2) dans les données relevées par WIND et ceux du taux compressible isotherme observés par LZ HADID, SAHRAOUI, GALTIER et SY HUANG 2018 dans les données des missions THEMIS et CLUSTER : sur les diagrammes $a_p - \beta_{\parallel}$, près des frontières des zones instables, la température des protons semble plus élevée, les fluctuations du champ magnétique et les taux de cascade plus importants. Mais la relation entre instabilités et turbulence reste à clarifier : est-ce que le plasma est plus chaud et

turbulent parce que les instabilités jouent un rôle dans son chauffage ? Et est-ce que ce chauffage s'effectue via la cascade turbulente ? Est-ce lié à l'âge collisionnel du plasma comme le propose BALE, KASPER et al. 2009 ?

Ces questions viennent motiver l'obtention d'une loi exacte pour un écoulement avec pression gyrotron permettant de calculer un taux de cascade plus réaliste, potentiellement lié aux anisotropies de pressions, et de mettre en place un cadre d'étude rigoureux afin d'examiner l'influence des instabilités sur la cascade turbulente.

1.3 Loi exacte générale pour tout type de pression et application au modèle CGL

Pour obtenir une loi exacte pour le modèle CGL, nous avons utilisé la méthode mise en place dans le chapitre I.2 : prendre en compte l'équation d'énergie interne (II.1.6) et non la forme explicite des pressions parallèle et perpendiculaire (II.1.9). Le modèle utilisé est donc :

$$\partial_t \rho = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \quad (\text{II.1.12})$$

$$\partial_t \mathbf{v} = -\nabla \cdot (\mathbf{v} \mathbf{v}) + \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A) - \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}_*} + \mathbf{f}_c + \mathbf{d}_c \quad (\text{II.1.13})$$

$$\partial_t \mathbf{v}_A = \nabla \cdot (\mathbf{v}_A \mathbf{v} - \mathbf{v} \mathbf{v}_A) - \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{v}_A + \frac{\mathbf{v}_A}{2} \nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{f}_m + \mathbf{d}_m \quad (\text{II.1.14})$$

$$\partial_t u = -\nabla \cdot (u \mathbf{v}) + u \nabla \cdot \mathbf{v} - \frac{\overline{\mathbf{P}}}{\rho} : \nabla \mathbf{v} \quad (\text{II.1.15})$$

De manière cohérente avec les choix effectués dans le chapitre I.2, la fonction de corrélation d'énergie totale choisie est : $\mathcal{R} = \mathcal{R}_c + \mathcal{R}_m + \mathcal{R}_u$ avec $\mathcal{R}_c = < \frac{1}{4}(\rho' + \rho) \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v} >$, $\mathcal{R}_m = < \frac{1}{4}(\rho' + \rho) \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A >$ et $\mathcal{R}_u = \frac{1}{2} < \rho' u + \rho u' >$.

Et en appliquant la même méthode que celle utilisée pour obtenir (I.2.7), (I.2.8) et (I.2.9), on obtient l'évolution temporelle des fonctions de corrélation associées à chaque énergie :

— Energie cinétique : $\mathcal{R}_c = < (\rho' + \rho) \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v} > / 4$

$$\begin{aligned} 4\partial_t \mathcal{R}_c &= \nabla_{\ell} \cdot < \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{v} \delta \mathbf{v} - (\delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \delta \mathbf{v} \delta \mathbf{v}_A + \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{v}_A \delta \mathbf{v}_A) > \\ &\quad + \nabla_{\ell} \cdot < \rho' \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v} \mathbf{v}_A - \rho \mathbf{v} \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}' \mathbf{v}'_A - \rho' \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}_A \mathbf{v}'_A + \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'_A \mathbf{v}_A > \\ &\quad + < \rho \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v} \nabla' \cdot \mathbf{v}' - \rho' \mathbf{v}' \cdot \delta \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{v} + 2\rho' \mathbf{v}' \cdot \delta \mathbf{v}_A \nabla \cdot \mathbf{v}_A - 2\rho \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v}_A \nabla' \cdot \mathbf{v}'_A > \\ &\quad + \nabla_{\ell} \cdot < \rho' \frac{\overline{\mathbf{P}_*}}{\rho} \cdot \mathbf{v}' - \rho \frac{\overline{\mathbf{P}'_*}}{\rho'} \cdot \mathbf{v} + \overline{\mathbf{P}_*} \cdot \mathbf{v}' - \overline{\mathbf{P}'_*} \cdot \mathbf{v} > \\ &\quad - < \frac{\rho'}{\rho} \mathbf{v}' \cdot \overline{\mathbf{P}_*} \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} + \frac{\rho}{\rho'} \mathbf{v} \cdot \overline{\mathbf{P}'_*} \cdot \frac{\nabla' \rho'}{\rho'} > \\ &\quad + < (\rho' + \rho) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{f}'_c + \mathbf{v}' \cdot \mathbf{f}_c) > + < (\rho' + \rho) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{d}'_c + \mathbf{v}' \cdot \mathbf{d}_c) > \quad (\text{II.1.16}) \end{aligned}$$

— Energie magnétique : $\mathcal{R}_m = < (\rho' + \rho) \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A > / 4$

$$\begin{aligned}
4\partial_t \mathcal{R}_m &= \nabla_{\ell} \cdot < \delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \delta \mathbf{v}_A \delta \mathbf{v} > \\
&\quad - \nabla_{\ell} \cdot < \rho' \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v} \mathbf{v}_A - \rho \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}' \mathbf{v}'_A - \rho' \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}_A \mathbf{v}'_A + \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'_A \mathbf{v}_A > \\
&\quad + < (\rho \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{v}_A - \frac{1}{2}(\rho' + \rho) \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A) \nabla' \cdot \mathbf{v}' > \\
&\quad - < (\rho' \mathbf{v}'_A \cdot \delta \mathbf{v}_A + \frac{1}{2}(\rho' + \rho) \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A) \nabla \cdot \mathbf{v} > \\
&\quad + < (\rho' \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v} - \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'_A) \nabla \cdot \mathbf{v}_A > + < (\rho' \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}_A - \rho \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}') \nabla' \cdot \mathbf{v}'_A > \\
&\quad + < (\rho' + \rho) (\mathbf{v}_A \cdot \mathbf{f}'_m + \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{f}_m) > + < (\rho' + \rho) (\mathbf{v}_A \cdot \mathbf{d}'_m + \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{d}_m) >
\end{aligned} \tag{II.1.17}$$

— Energie interne : $\mathcal{R}_u = < \rho' u + \rho u' > / 2$

$$\begin{aligned}
2\partial_t \mathcal{R}_u &= \nabla_{\ell} \cdot < \delta \rho \delta u \delta \mathbf{v} > + < \rho \delta u \nabla' \cdot \mathbf{v}' - \rho' \delta u \nabla \cdot \mathbf{v} > \\
&\quad - < \rho' \frac{\bar{\mathbf{P}}}{\rho} : \nabla \mathbf{v} + \rho \frac{\bar{\mathbf{P}}'}{\rho'} : \nabla' \mathbf{v}' >
\end{aligned} \tag{II.1.18}$$

Le résultat pour l'énergie magnétique n'est pas influencé par le type de pression (tensoriel ou isotrope) contrairement à ceux des énergies cinétique et interne. La question qui s'est posée alors était : est-il possible d'améliorer la formulation des termes dépendants de la pression ? de faire apparaître l'influence de la pression dans les termes de type flux sous la forme d'une fonction de structure ? En remarquant que $\bar{\mathbf{P}}$ ou $\bar{\mathbf{P}}_*$ est, dans tous les termes, accompagné de $\frac{1}{\rho}$ pris au même point, l'idée de travailler sur la fonction de structure $< \delta \rho \delta \frac{\bar{\mathbf{P}}}{\rho} \cdot \delta \mathbf{v} >$ puis sur la fonction $< \delta \rho \delta \frac{\bar{\mathbf{P}}_*}{\rho} \cdot \delta \mathbf{v} >$ a émergé. Développer cette dernière sous la divergence locale en utilisant l'hypothèse d'homogénéité statistique et l'indépendance des positions \mathbf{x} et \mathbf{x}' donne :

$$\begin{aligned}
\nabla_{\ell} \cdot < \delta \rho \delta \frac{\bar{\mathbf{P}}_*}{\rho} \cdot \delta \mathbf{v} > &= \nabla_{\ell} \cdot < [\rho \frac{\bar{\mathbf{P}}'_*}{\rho'} \cdot \mathbf{v} - \rho' \frac{\bar{\mathbf{P}}_*}{\rho} \cdot \mathbf{v}'] + [\bar{\mathbf{P}}_* \cdot \mathbf{v}' - \bar{\mathbf{P}}'_* \cdot \mathbf{v}] > \\
&\quad + \nabla_{\ell} \cdot < \rho' \frac{\bar{\mathbf{P}}_*}{\rho} \cdot \mathbf{v} - \rho \frac{\bar{\mathbf{P}}'_*}{\rho'} \cdot \mathbf{v}' >
\end{aligned}$$

On va donc pouvoir remplacer dans (II.1.16) $\nabla_{\ell} \cdot < \rho' \frac{\bar{\mathbf{P}}_*}{\rho} \cdot \mathbf{v}' - \rho \frac{\bar{\mathbf{P}}'_*}{\rho'} \cdot \mathbf{v} >$ ou $\nabla_{\ell} \cdot < \bar{\mathbf{P}}_* \cdot \mathbf{v}' - \bar{\mathbf{P}}'_* \cdot \mathbf{v} >$. En voyant que ce dernier s'écrit aussi $< \rho \frac{\bar{\mathbf{P}}_*}{\rho} : \nabla' \mathbf{v}' + \rho' \frac{\bar{\mathbf{P}}'_*}{\rho'} : \nabla \mathbf{v} >$ qui rappelle les termes dépendant de la pression de l'équation (II.1.18), nous avons choisi la première possibilité. Ainsi :

$$\begin{aligned}
\nabla_{\ell} \cdot &< \rho' \frac{\bar{\mathbf{P}}_*}{\rho} \cdot \mathbf{v}' - \rho \frac{\bar{\mathbf{P}}'_*}{\rho'} \cdot \mathbf{v} + \bar{\mathbf{P}}_* \cdot \mathbf{v}' - \bar{\mathbf{P}}'_* \cdot \mathbf{v} > \\
&= -\nabla_{\ell} \cdot < \delta \rho \delta \frac{\bar{\mathbf{P}}_*}{\rho} \cdot \delta \mathbf{v} > + < \mathbf{v} \cdot \frac{\bar{\mathbf{P}}_*}{\rho} \cdot \nabla' \rho' + \mathbf{v}' \cdot \frac{\bar{\mathbf{P}}'_*}{\rho'} \cdot \nabla \rho > \\
&\quad + < 2\rho \frac{\bar{\mathbf{P}}}{\rho} : \nabla' \mathbf{v}' + 2\rho' \frac{\bar{\mathbf{P}}'}{\rho'} : \nabla \mathbf{v} + \rho \mathbf{v}_A^2 \nabla' \cdot \mathbf{v}' + \rho' \mathbf{v}'_A^2 \nabla \cdot \mathbf{v} >
\end{aligned}$$

La loi KHM générale pour l'énergie totale avec $\mathcal{R} = \mathcal{R}_c + \mathcal{R}_m + \mathcal{R}_u$ devient alors :

$$\begin{aligned}
[1] \quad 4\partial_t \mathcal{R} &= \nabla_{\ell} \cdot < (\delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{v} + \delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \delta \mathbf{v}_A \delta \mathbf{v} - (\delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \delta \mathbf{v} + \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{v}_A) \delta \mathbf{v}_A) \\
[2] &\quad + < (\rho \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v} + \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{v}_A - \frac{1}{2} \delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \mathbf{v}_A) \nabla' \cdot \mathbf{v}' > \\
[3] &\quad - < (\rho' \mathbf{v}' \cdot \delta \mathbf{v} + \frac{1}{2} \rho' \mathbf{v}'_A \cdot \delta \mathbf{v}_A - \frac{1}{2} \delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \mathbf{v}'_A) \nabla \cdot \mathbf{v} > \\
[4] &\quad + < (2\rho' \mathbf{v}' \cdot \delta \mathbf{v}_A - \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}'_A + \rho' \mathbf{v}'_A \cdot \delta \mathbf{v}) \nabla \cdot \mathbf{v}_A > \\
[5] &\quad - < (2\rho \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v}_A - \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}_A + \rho \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{v}) \nabla' \cdot \mathbf{v}'_A > \\
[6] &\quad + \nabla_{\ell} \cdot < 2\delta\rho\delta u \delta \mathbf{v} - \delta\rho\delta \frac{\bar{P}_*}{\rho} \cdot \delta \mathbf{v} > + 2 < \rho\delta u \nabla' \cdot \mathbf{v}' - \rho'\delta u \nabla \cdot \mathbf{v} > \\
[7] &\quad - \nabla_{\ell} \cdot < \delta\rho\delta \frac{\bar{P}_*}{\rho} \cdot \delta \mathbf{v} > - 2 < \rho\delta \frac{\bar{P}}{\rho} : \nabla' \mathbf{v}' - \rho'\delta \frac{\bar{P}}{\rho} : \nabla \mathbf{v} > \\
[8] &\quad + < \mathbf{v} \cdot (\frac{\bar{P}_*}{\rho} \delta\rho - \rho\delta \frac{\bar{P}_*}{\rho}) \cdot \frac{\nabla' \rho'}{\rho'} - \mathbf{v}' \cdot (\frac{\bar{P}'_*}{\rho'} \delta\rho - \rho'\delta \frac{\bar{P}_*}{\rho}) \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} > \\
[9] &\quad + < (\rho' + \rho)(\mathbf{v} \cdot \mathbf{f}'_c + \mathbf{v}' \cdot \mathbf{f}_c + \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{f}'_m + \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{f}_m) > \\
[10] &\quad + < (\rho' + \rho)(\mathbf{v} \cdot \mathbf{d}'_c + \mathbf{v}' \cdot \mathbf{d}_c + \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{d}'_m + \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{d}_m) >
\end{aligned}$$

(II.1.19)

Les lignes [7] et [8] contiennent les contributions des tenseurs de pression et de pression totale. La loi exacte générale de type Kolmogorov est alors :

$$\begin{aligned}
-4\varepsilon &= \nabla_{\ell} \cdot < (\delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{v} + \delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \delta \mathbf{v}_A \delta \mathbf{v} - (\delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \delta \mathbf{v} + \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{v}_A) \delta \mathbf{v}_A) \\
&\quad + \nabla_{\ell} \cdot < 2\delta\rho\delta u \delta \mathbf{v} - \delta\rho\delta \frac{\bar{P}_*}{\rho} \cdot \delta \mathbf{v} > \\
&\quad + < (\rho \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v} + \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{v}_A - \frac{1}{2} \delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \mathbf{v}_A + 2\rho\delta u) \nabla' \cdot \mathbf{v}' - 2\rho\delta \frac{\bar{P}}{\rho} : \nabla' \mathbf{v}' > \\
&\quad - < (\rho' \mathbf{v}' \cdot \delta \mathbf{v} + \frac{1}{2} \rho' \mathbf{v}'_A \cdot \delta \mathbf{v}_A - \frac{1}{2} \delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \mathbf{v}'_A + 2\rho'\delta u) \nabla \cdot \mathbf{v} - 2\rho'\delta \frac{\bar{P}}{\rho} : \nabla \mathbf{v} > \\
&\quad + < (2\rho' \mathbf{v}' \cdot \delta \mathbf{v}_A - \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}'_A + \rho' \mathbf{v}'_A \cdot \delta \mathbf{v}) \nabla \cdot \mathbf{v}_A > \\
&\quad - < (2\rho \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v}_A - \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}_A + \rho \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{v}) \nabla' \cdot \mathbf{v}'_A > \\
&\quad + < \mathbf{v} \cdot (\frac{\bar{P}_*}{\rho} \delta\rho - \rho\delta \frac{\bar{P}_*}{\rho}) \cdot \frac{\nabla' \rho'}{\rho'} - \mathbf{v}' \cdot (\frac{\bar{P}'_*}{\rho'} \delta\rho - \rho'\delta \frac{\bar{P}_*}{\rho}) \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} >
\end{aligned}$$

(II.1.20)

Cette loi est valable quelle que soit la forme du tenseur de pression ou de l'énergie interne tant que la zone inertielle est supposée isentrope. Si l'on considère la pression sous forme isotrope $\bar{P} = p\bar{I}$, on trouve la loi (I.2.15) analysée dans la section I.2.2. On va noter ce résultat ε_{iso} . On peut alors isoler dans le taux de cascade, la contribution de la composante anisotrope du tenseur de pression $\bar{\Pi}$:

$$\begin{aligned}
-4(\varepsilon - \varepsilon_{iso}) &= -\nabla_{\ell} \cdot < \delta\rho\delta(\frac{\bar{\Pi}}{\rho}) \cdot \delta \mathbf{v} > - < 2\rho\delta(\frac{\bar{\Pi}}{\rho}) : \nabla' \mathbf{v}' - 2\rho'\delta(\frac{\bar{\Pi}}{\rho}) : \nabla \mathbf{v} > \\
&\quad + < \mathbf{v} \cdot ((\frac{\bar{\Pi}}{\rho})\delta\rho - \rho\delta(\frac{\bar{\Pi}}{\rho})) \cdot \frac{\nabla' \rho'}{\rho'} - \mathbf{v}' \cdot ((\frac{\bar{\Pi}'}{\rho'})\delta\rho - \rho'\delta(\frac{\bar{\Pi}}{\rho})) \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} >
\end{aligned}$$

(II.1.21)

Nous quantifierons et analyserons cette contribution grâce à des simulations dans la partie III.

Dans le cas d'un tenseur de pression gyrotrope, on peut faire apparaître p_{\parallel} et p_{\perp} :

$$\begin{aligned}
 -4\varepsilon &= \nabla_{\boldsymbol{\ell}} \cdot <(\delta(\rho\boldsymbol{v}) \cdot \delta\boldsymbol{v} + \delta(\rho\boldsymbol{v}_A) \cdot \delta\boldsymbol{v}_A \delta\boldsymbol{v} - (\delta(\rho\boldsymbol{v}_A) \cdot \delta\boldsymbol{v} + \delta(\rho\boldsymbol{v}) \cdot \delta\boldsymbol{v}_A) \delta\boldsymbol{v}_A> \\
 &+ \nabla_{\boldsymbol{\ell}} \cdot <\delta\rho\delta\left(\frac{p_{\perp} + p_{\parallel} + p_m}{\rho}\right)\delta\boldsymbol{v} + \delta\rho\delta\left(\frac{p_{\perp} - p_{\parallel}}{\rho}\right)\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}\cdot\delta\boldsymbol{v}> \\
 &+ <(\rho\boldsymbol{v} \cdot \delta\boldsymbol{v} + \frac{1}{2}\rho\boldsymbol{v}_A \cdot \delta\boldsymbol{v}_A - \frac{1}{2}\delta(\rho\boldsymbol{v}_A) \cdot \boldsymbol{v}_A + \rho\delta\left(\frac{p_{\parallel}}{\rho}\right))\nabla' \cdot \boldsymbol{v}'> \\
 &- <(\rho'\boldsymbol{v}' \cdot \delta\boldsymbol{v} + \frac{1}{2}\rho'\boldsymbol{v}'_A \cdot \delta\boldsymbol{v}_A - \frac{1}{2}\delta(\rho\boldsymbol{v}_A) \cdot \boldsymbol{v}'_A + \rho'\delta\left(\frac{p_{\parallel}}{\rho}\right))\nabla \cdot \boldsymbol{v}> \\
 &+ 2 <\rho\delta\left(\frac{p_{\perp} - p_{\parallel}}{\rho}\right)\boldsymbol{b}\boldsymbol{b} : \nabla'\boldsymbol{v}' - \rho'\delta\left(\frac{p_{\perp} - p_{\parallel}}{\rho}\right)\boldsymbol{b}\boldsymbol{b} : \nabla\boldsymbol{v}> \\
 &+ <(2\rho'\boldsymbol{v}' \cdot \delta\boldsymbol{v}_A - \delta(\rho\boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{v}'_A + \rho'\boldsymbol{v}'_A \cdot \delta\boldsymbol{v})\nabla \cdot \boldsymbol{v}_A> \\
 &- <(2\rho\boldsymbol{v} \cdot \delta\boldsymbol{v}_A - \delta(\rho\boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{v}_A + \rho\boldsymbol{v}_A \cdot \delta\boldsymbol{v})\nabla' \cdot \boldsymbol{v}'_A> \\
 &+ <\left(\frac{p_{\perp} + p_m}{\rho}\boldsymbol{v}\delta\rho - \rho\boldsymbol{v}\delta\left(\frac{p_{\perp} + p_m}{\rho}\right) + \frac{p_{\parallel} - p_{\perp}}{\rho}\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{b}\boldsymbol{b}\delta\rho - \rho\boldsymbol{v} \cdot \delta\left(\frac{p_{\parallel} - p_{\perp}}{\rho}\right)\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}\right) \cdot \frac{\nabla'\rho'}{\rho'}> \\
 &- <\left(\frac{p'_{\perp} + p'_m}{\rho'}\boldsymbol{v}'\delta\rho - \rho'\boldsymbol{v}'\delta\left(\frac{p_{\perp} + p_m}{\rho}\right) + \frac{p'_{\parallel} - p'_{\perp}}{\rho'}\boldsymbol{v}' \cdot \boldsymbol{b}'\boldsymbol{b}'\delta\rho - \rho'\boldsymbol{v}' \cdot \delta\left(\frac{p_{\parallel} - p_{\perp}}{\rho}\right)\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}\right) \cdot \frac{\nabla\rho}{\rho}>
 \end{aligned} \tag{II.1.22}$$

Cette loi est valable pour le modèle CGL. Si besoin est, on peut y expliciter p_{\parallel} et p_{\perp} en fonction de ρ , \boldsymbol{v}_A grâce à (II.1.9).

On peut aussi faire apparaître a_p et β_{\parallel} dans (II.1.22) pour identifier les termes potentiellement impactés par les instabilités. Ainsi, on obtient :

$$\begin{aligned}
 -4\varepsilon &= \nabla_{\boldsymbol{\ell}} \cdot <(\delta(\rho\boldsymbol{v}) \cdot \delta\boldsymbol{v} + \delta(\rho\boldsymbol{v}_A) \cdot \delta\boldsymbol{v}_A \delta\boldsymbol{v} - (\delta(\rho\boldsymbol{v}_A) \cdot \delta\boldsymbol{v} + \delta(\rho\boldsymbol{v}) \cdot \delta\boldsymbol{v}_A) \delta\boldsymbol{v}_A> \\
 &+ \frac{1}{2}\nabla_{\boldsymbol{\ell}} \cdot <\delta\rho\delta(\boldsymbol{v}_A^2(\beta_{\parallel}(a_p + 1) + 1))\delta\boldsymbol{v} + \delta\rho\delta(\beta_{\parallel}(a_p - 1)\boldsymbol{v}_A\boldsymbol{v}_A)\cdot\delta\boldsymbol{v}> \\
 &+ <(\rho\boldsymbol{v} \cdot \delta\boldsymbol{v} + \frac{1}{2}\rho\boldsymbol{v}_A \cdot \delta\boldsymbol{v}_A - \frac{1}{2}\delta(\rho\boldsymbol{v}_A) \cdot \boldsymbol{v}_A + \frac{1}{2}\rho\delta(\boldsymbol{v}_A^2\beta_{\parallel}))\nabla' \cdot \boldsymbol{v}'> \\
 &- <(\rho'\boldsymbol{v}' \cdot \delta\boldsymbol{v} + \frac{1}{2}\rho'\boldsymbol{v}'_A \cdot \delta\boldsymbol{v}_A - \frac{1}{2}\delta(\rho\boldsymbol{v}_A) \cdot \boldsymbol{v}'_A + \frac{1}{2}\rho'\delta(\boldsymbol{v}_A^2\beta_{\parallel}))\nabla \cdot \boldsymbol{v}> \\
 &+ <\rho\delta(\beta_{\parallel}(a_p - 1)\boldsymbol{v}_A\boldsymbol{v}_A) : \nabla'\boldsymbol{v}' - \rho'\delta(\beta_{\parallel}(a_p - 1)\boldsymbol{v}_A\boldsymbol{v}_A) : \nabla\boldsymbol{v}> \\
 &+ <(2\rho'\boldsymbol{v}' \cdot \delta\boldsymbol{v}_A - \delta(\rho\boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{v}'_A + \rho'\boldsymbol{v}'_A \cdot \delta\boldsymbol{v})\nabla \cdot \boldsymbol{v}_A> \\
 &- <(2\rho\boldsymbol{v} \cdot \delta\boldsymbol{v}_A - \delta(\rho\boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{v}_A + \rho\boldsymbol{v}_A \cdot \delta\boldsymbol{v})\nabla' \cdot \boldsymbol{v}'_A> \\
 &+ \frac{1}{2} <(\boldsymbol{v}_A^2(\beta_{\parallel}a_p + 1)\delta\rho - \rho\delta(\boldsymbol{v}_A^2(\beta_{\parallel}a_p + 1)))\boldsymbol{v} \cdot \frac{\nabla'\rho'}{\rho'}> \\
 &- \frac{1}{2} <(\boldsymbol{v}'_A^2(\beta'_{\parallel}a'_p + 1)\delta\rho - \rho'\delta(\boldsymbol{v}_A^2(\beta_{\parallel}a_p + 1)))\boldsymbol{v}' \cdot \frac{\nabla\rho}{\rho}> \\
 &+ \frac{1}{2} <\boldsymbol{v} \cdot (\beta_{\parallel}(a_p - 1)\boldsymbol{v}_A\boldsymbol{v}_A\delta\rho - \rho\delta(\beta_{\parallel}(a_p - 1)\boldsymbol{v}_A\boldsymbol{v}_A)) \cdot \frac{\nabla'\rho'}{\rho'}> \\
 &- \frac{1}{2} <\boldsymbol{v}' \cdot (\beta'_{\parallel}(a'_p - 1)\boldsymbol{v}'_A\boldsymbol{v}'_A\delta\rho - \rho'\delta(\beta_{\parallel}(a_p - 1)\boldsymbol{v}_A\boldsymbol{v}_A)) \cdot \frac{\nabla\rho}{\rho}>
 \end{aligned} \tag{II.1.23}$$

Les critères d'instabilité linéaires n'y sont pas explicites mais on voit que certains termes dépendent de $a_p - 1$, en particulier un terme de type flux. Par conséquent, le signe de ces termes va dépendre du régime de pression dans le système, si p_{\parallel} ou p_{\perp} domine, et est ainsi lié au type d'instabilité pouvant s'y développer. Comme ces termes dépendent de quantités incrémentales, il est néanmoins difficile de conclure sur leur apport au taux de cascade total sans regarder dans des simulations. Ce sera l'un des objectifs de la partie ???. On remarque que ces termes sont présents dans la contribution anisotrope (II.1.21) au taux de cascade.

1.4 Synthèse de l'étude analytique de turbulence compressible avec pression tensorielle et modèle CGL

Fermeture CGL : $\nabla \cdot \bar{\bar{q}} = 0$ et $\bar{\bar{P}} = p\bar{\bar{I}} + \bar{\bar{\Pi}} = \frac{2p_{\perp}+p_{\parallel}}{3}\bar{\bar{I}} + (p_{\parallel} - p_{\perp})(\mathbf{b}\mathbf{b} - \frac{1}{3}\bar{\bar{I}})$ avec $\mathbf{b} = \frac{\mathbf{v}_A}{|\mathbf{v}_A|}$. Energie interne définie telle que $\rho u = \frac{3}{2}p$.

$$\partial_t p_{\parallel} + \nabla \cdot (p_{\parallel} \mathbf{v}) + 2p_{\parallel} \mathbf{b} \mathbf{b} : \nabla \mathbf{v} = 0 \quad (\text{II.1.24})$$

$$\partial_t p_{\perp} + \nabla \cdot (p_{\perp} \mathbf{v}) + p_{\perp} \nabla \cdot \mathbf{v} - p_{\perp} \mathbf{b} \mathbf{b} : \nabla \mathbf{v} = 0 \quad (\text{II.1.25})$$

Linéarisation du modèle CGL :

- Relation de dispersion : (II.1.11)
- Mode d'Alfvén incompressible \Rightarrow instabilité firehose,
- Mode magnétosonique rapide : stable,
- Mode magnétosonique lent \Rightarrow instabilité firehose parallèle et miroir
- instabilité firehose si $1 - \frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0}) < 0$
- instabilité miroir si $1 + \beta_{\parallel 0}a_{p0}(1 - \frac{1}{6}a_{p0}) < 0$

Équations utilisées pour calculer la loi exacte générale avec tenseur de pression (zone inertielle isentrope) :

$$\partial_t \rho = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \quad (\text{II.1.26})$$

$$\partial_t \mathbf{v} = -\nabla \cdot (\mathbf{v} \mathbf{v}) + \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A) - \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \bar{\bar{P}}_* + (\mathbf{f}_c + \mathbf{d}_c) \quad (\text{II.1.27})$$

$$\partial_t \mathbf{v}_A = \nabla \cdot (\mathbf{v}_A \mathbf{v} - \mathbf{v} \mathbf{v}_A) - \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{v}_A + \frac{\mathbf{v}_A}{2} \nabla \cdot \mathbf{v} + (\mathbf{f}_m + \mathbf{d}_m) \quad (\text{II.1.28})$$

$$\partial_t u = -\nabla \cdot (u \mathbf{v}) + u \nabla \cdot \mathbf{v} - \frac{\bar{\bar{P}}}{\rho} : \nabla \mathbf{v} \quad (\text{II.1.29})$$

Fonctions de corrélation d'énergie totale considérée :

$$\mathcal{R} = \frac{1}{2} < \frac{1}{2}(\rho' + \rho) \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{2}(\rho' + \rho) \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A + \rho' u + \rho u' >$$

Lois exactes générales dérivées dans ce chapitre (formulation f2) :

- KHM générale $\forall \bar{\bar{P}}$: (II.1.19)
- K41 générale $\forall \bar{\bar{P}}$: (II.1.20)
- contribution de l'anisotropie de pression : (II.1.21)

Lois exactes K41 gyrotrope/CGL répondant à l'objectif initial (formulation f2) :

- fonction de p_{\parallel} et p_{\perp} : (II.1.22)
- fonction de $a_p = \frac{p_{\perp}}{p_{\parallel}}$ et $\beta_{\parallel} = \frac{p_{\parallel}}{p_m}$: (II.1.23)

Les résultats dérivés ici sont publiés dans SIMON et SAHRAOUI 2022.

PARTIE II : CHAPITRE 2

L ET DANS LE CAS INCOMPRESSIBLE ?

Sommaire

2.1	De la limite incompressible dans la loi exacte générale vers un nouveau modèle	83
2.2	Linéarisation du modèle incompressible gyrotrope proposé . .	85
2.3	Etude paramétrique des modes linéaires du modèle incompressible gyrotrope	86
2.4	Synthèse : Limite incompressible et piste d'étude numérique	91

Si l'on prend la limite incompressible de la loi exacte dépendant d'une pression isotrope (I.2.15), on retrouve la loi PP98 donnant le taux de cascade ε_{PP98} (.3.34). Mais est-ce aussi le cas si la pression est tensorielle ? De cette question émerge une autre question : qu'est-ce qu'un système incompressible avec pression tensorielle ? Dans ce chapitre, sera présenté le travail effectué pour tenter de répondre à ces questions. Ce travail n'a pas encore été publié.

2.1 De la limite incompressible dans la loi exacte générale vers un nouveau modèle

Si l'on considère la limite incompressible ($\rho = \rho_0, \delta\rho = 0, \nabla\rho = 0, \nabla\cdot\mathbf{v} = 0, \nabla\cdot\mathbf{v}_A = 0$) dans l'équation (II.1.21), $\varepsilon_{iso} \rightarrow \varepsilon_{PP98}$ et tous les termes s'annulent sauf :

$$-4(\varepsilon - \varepsilon_{PP98}) = -2 < \delta(\bar{\mathbf{P}}) : \nabla'\mathbf{v}' - \delta(\bar{\mathbf{P}}) : \nabla\mathbf{v} > \quad (\text{II.2.1})$$

car seule la trace de $\nabla\mathbf{v}$ s'annule par incompressibilité : $\bar{\mathbf{I}} : \nabla\mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$. On obtient ainsi une correction à la théorie PP98 dépendant de la composante anisotrope de la pression (participant à la déformation incompressible du plasma d'après CASSAK et BARHUIYA 2022) :

$$-4(\varepsilon - \varepsilon_{PP98}) = -2 < \delta(\bar{\mathbf{P}} - p\bar{\mathbf{I}}) : \delta(\nabla\mathbf{v}) > = -2 < \delta\bar{\mathbf{P}} : \delta(\nabla\mathbf{v}) > \quad (\text{II.2.2})$$

Et dans le cas particulier gyrotope, on obtient :

$$-4(\varepsilon - \varepsilon_{PP98}) = -2 < \delta((p_{\parallel} - p_{\perp})(\mathbf{b}\mathbf{b} - \frac{1}{3}\bar{\mathbf{I}})) : \delta(\nabla \mathbf{v}) > \quad (\text{II.2.3})$$

$$= -2 < \delta((p_{\parallel} - p_{\perp})\mathbf{b}\mathbf{b}) : \delta(\nabla \mathbf{v}) > \quad (\text{II.2.4})$$

Attention, en dehors du cas purement incompressible, (II.2.3) et (II.2.4) ne sont pas équivalentes. En effet, l'égalité n'est pas obtenue si $\bar{\mathbf{I}} : \nabla \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v} = \eta$ avec $\eta \ll 1$. Cela semble révéler qu'une part compressible subsisterait, cachée dans $\mathbf{b}\mathbf{b}$. Comme on le verra dans la partie ??, cela impacte l'application de cette loi incompressible dans des simulations quasi-incompressibles.

On remarque que cette correction dépend de $p_{\parallel} - p_{\perp}$, c'est à dire de $\beta_{\parallel}(1 - a_p)$. Analyser et valider cette correction de la loi PP98 serait donc numériquement plus simple que le cas compressible et permettrait de donner un début de réponse à l'impact des anisotropies de pression sur la cascade. Rigoureusement, cela nécessiterait l'utilisation de simulation incompressible. Mais aucune trace d'un modèle incompressible avec pression tensorielle n'a été trouvée dans la littérature. En fait, si l'on approche le problème sous un autre angle, celui des fermetures, on se rend compte que le cadre gyrotope est habituellement abordé à travers la fermeture CGL. Ajouter une fermeture incompressible signifierait alors, surcontraindre le système (une équation de trop par rapport au nombre de variables). Une équation de compatibilité doit alors être vérifiée par les solutions.

Par exemple, dans le cas linéaire, le modèle CGL donne l'équation de dispersion (II.1.10) que l'on va simplement notée $\bar{\mathbf{M}}\mathbf{v}_1 = 0$. Avec la contrainte incompressible $\nabla \cdot \mathbf{v}_1 = 0$, on peut écrire \mathbf{v}_1 sous la forme d'un potentiel vecteur $\Omega : \mathbf{v}_1 = \nabla \times \Omega = \bar{\mathbf{N}}\Omega$ avec $\bar{\mathbf{N}} = i\mathbf{k} \times \bar{\mathbf{I}} = i \begin{pmatrix} 0 & -k_{\parallel} & 0 \\ k_{\parallel} & 0 & -k_{\perp} \\ 0 & k_{\perp} & 0 \end{pmatrix}$. Le modèle CGL surcontraint par l'incompressibilité donnerait l'équation de dispersion : $\bar{\mathbf{M}}\bar{\mathbf{N}}\Omega = 0$ avec

$$\bar{\mathbf{M}}\bar{\mathbf{N}} = \begin{pmatrix} 0 & -k_{\parallel} \left(\frac{\omega^2 - \omega_A^2}{v_{A0}^2 k_{\parallel}^2} - \left(\frac{\beta_{\parallel 0}}{2} a_{p0} + 1 \right) \frac{k_{\perp}^2}{k_{\parallel}^2} \right) & 0 \\ k_{\parallel} \frac{\omega^2 - \omega_A^2}{v_{A0}^2 k_{\parallel}^2} & 0 & -k_{\perp} \frac{\omega^2 - \omega_A^2}{v_{A0}^2 k_{\parallel}^2} \\ 0 & k_{\perp} \left(\frac{\omega^2}{v_{A0}^2 k_{\parallel}^2} - \frac{\beta_{\parallel 0}}{2} (3 - a_{p0}) \right) & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{II.2.5})$$

où $\omega_A^2 = -v_{A0}^2 k_{\parallel}^2 \left(\frac{\beta_{\parallel 0}}{2} (1 - a_{p0}) - 1 \right)$ correspond au mode d'Alfvén incompressible gyrotope impacté par l'instabilité firehose. On remarque que ce mode est solution si $\Omega_y = 0$, c'est-à-dire pour une polarisation de la vitesse orientée suivant $(0, 1, 0)$.

Contrairement au modèle incompressible MHD, où la solution alfvénique est la seule solution existante, une autre solution non triviale existe. Pour la trouver, on va considérer que $\Omega_y \neq 0$, l'équation de dispersion peut alors s'écrire sous la forme du système :

$$k_{\parallel}(\omega^2 - \omega_A^2 - v_{A0}^2 \left(\frac{\beta_{\parallel 0}}{2} a_{p0} + 1 \right) k_{\perp}^2) = 0 \quad (\text{II.2.6})$$

$$k_{\perp}(\omega^2 - v_{A0}^2 \frac{\beta_{\parallel 0}}{2} (3 - a_{p0}) k_{\parallel}^2) = 0 \quad (\text{II.2.7})$$

$$k_{\parallel}\Omega_x - k_{\perp}\Omega_z = 0 \quad (\text{II.2.8})$$

On va étudier ce système en fonction de l'angle θ de propagation :

— $\theta = 0^\circ \Rightarrow k_{\perp} = 0$ et on suppose $k_{\parallel} \neq 0$, alors $\omega^2 = \omega_A^2$ et $\Omega_x = 0$. On retrouve le

- mode firehose parallèle et le champ de vitesse sera polarisé suivant $(1, 0, 0)$.
- $\theta = 90^\circ \Rightarrow k_{\parallel} = 0$ et on suppose $k_{\perp} \neq 0$, alors $\omega^2 = 0$ et $\Omega_z = 0$. On obtient un mode qui ne se propage pas et un champ de vitesse polarisé suivant $(0, 0, 1)$.
 - Si $k_{\parallel} \neq 0$ et $k_{\perp} \neq 0$, alors $\omega^2 = v_{A0}^2 \frac{\beta_{\parallel 0}}{2} (3 - a_{p0}) k_{\parallel}^2$ et θ doit vérifier $\tan^2 \theta = \frac{2(\beta_{\parallel 0}(2-a_{p0})-1)}{\beta_{\parallel 0}a_{p0}+2}$. La polarisation du champ de vitesse est alors $(1, 0, -\tan \theta)$.

Imposer l'incompressibilité dans le système CGL semble donc contraindre les modes magnétosonores suivant certaines directions de propagation : $k_{\parallel} = 0$, $k_{\perp} = 0$ ou $\tan^2 \theta = \frac{2(\beta_{\parallel 0}(2-a_{p0})-1)}{\beta_{\parallel 0}a_{p0}+2}$. Si l'on suppose l'isotropie de pression dans le dernier mode, on trouve un mode sonore : $\omega^2 = 2k_{\parallel}^2 \frac{p_0}{\rho_0}$.

On s'est alors demandé à quoi pourrait ressembler un modèle incompressible gyrotrope qui ne serait pas sur-constraint. Il serait a priori constitué de l'équation sur la vitesse (II.1.2) et de l'équation d'induction (II.1.4) avec ρ constant et $\bar{\mathbf{P}}$ gyrotrope, de la fermeture $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ et d'une autre équation de fermeture. Différentes possibilités sont envisageables pour cette équation de fermeture supplémentaire : garder l'une des équations de pression ((II.1.24) ou (II.1.25)) ou considérer une combinaison linéaire de ces équations. Afin de maintenir la cohérence avec la définition de l'énergie interne telle que $u = \frac{1}{2\rho_0}(2p_{\perp} + p_{\parallel})$, nous avons décidé de fermer le système avec l'équation sur la trace du tenseur de pression (II.1.5). Ce système est donc compatible avec la loi exacte (??). Dans la section 2.2, nous présenterons les solutions linéaires de ce système.

2.2 Linéarisation du modèle incompressible gyrotrope proposé

Le modèle incompressible gyrotrope envisagé est :

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \nabla \cdot \mathbf{v}_A = 0 \tag{II.2.9}$$

$$\partial_t \mathbf{v} + \nabla \cdot (\mathbf{v} \mathbf{v} - \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A + \frac{1}{\rho_0} \bar{\mathbf{P}}_*) = 0 \tag{II.2.10}$$

$$\partial_t p + \nabla \cdot (p \mathbf{v}) + \frac{2}{3} \bar{\mathbf{\Pi}} : \nabla \mathbf{v} = 0 \tag{II.2.11}$$

$$\partial_t \mathbf{v}_A - \nabla \cdot (\mathbf{v}_A \mathbf{v} - \mathbf{v} \mathbf{v}_A) = 0 \tag{II.2.12}$$

avec :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{P}} &= p \bar{\mathbf{I}} + \bar{\mathbf{\Pi}} = \frac{1}{3} (2p_{\perp} + p_{\parallel}) \bar{\mathbf{I}} + (p_{\parallel} - p_{\perp}) (\mathbf{b} \mathbf{b} - \frac{1}{3} \bar{\mathbf{I}}) \\ \nabla \cdot \bar{\mathbf{P}}_* &= \nabla(p_{\perp} + \frac{1}{2} \rho_0 \mathbf{v}_A^2) + \mathbf{b} \mathbf{b} \cdot \nabla(p_{\parallel} - p_{\perp}) + (p_{\parallel} - p_{\perp}) \frac{1}{\mathbf{v}_A^2} (\mathbf{v}_A \cdot \nabla \mathbf{v}_A - 2 \mathbf{v}_A \mathbf{b} \mathbf{b} : \nabla \mathbf{v}_A) \\ \bar{\mathbf{\Pi}} : \nabla \mathbf{v} &= (p_{\parallel} - p_{\perp}) \mathbf{b} \mathbf{b} : \nabla \mathbf{v} \end{aligned}$$

La forme linéaire de ce système d'équations obtenue en suivant la méthode résumée section 3.4 de l'Introduction est :

$$0 = k_{\perp}v_{1x} + k_{\parallel}v_{1z} \quad (\text{II.2.13})$$

$$0 = -\omega v_{1x} + \frac{p_{\perp 1}}{\rho_0}k_{\perp} + \left(\frac{p_{\parallel 0} - p_{\perp 0}}{\rho_0 v_{A0}^2} - 1\right)v_{A0}k_{\parallel}v_{A1x} + v_{A0}k_{\perp}v_{A1z} \quad (\text{II.2.14})$$

$$0 = -\omega v_{1y} + \left(\frac{p_{\parallel 0} - p_{\perp 0}}{\rho_0 v_{A0}^2} - 1\right)v_{A0}k_{\parallel}v_{A1y} \quad (\text{II.2.15})$$

$$0 = -\omega v_{1z} + \frac{p_{\parallel 1}}{\rho_0}k_{\parallel} - \frac{p_{\parallel 0} - p_{\perp 0}}{\rho_0 v_{A0}^2}v_{A0}k_{\parallel}v_{A1z} \quad (\text{II.2.16})$$

$$0 = -\omega(2p_{\perp 1} + p_{\parallel 1}) + 2(p_{\parallel 0} - p_{\perp 0})k_{\parallel}v_{1z} \quad (\text{II.2.17})$$

$$0 = -\omega \mathbf{v}_{A1} - k_{\parallel}v_{A0}\mathbf{v}_1 \quad (\text{II.2.18})$$

On retrouve le mode d'Alfvén incompressible polarisé suivant $(0, 1, 0)$ grâce aux composantes suivant y qui sont décorrélées des autres :

$$\left(\omega^2 + \left(\frac{p_{\parallel 0} - p_{\perp 0}}{\rho_0 v_{A0}^2} - 1\right)v_{A0}^2k_{\parallel}^2\right)v_{1y} = 0 \Rightarrow \frac{\omega^2}{v_{A0}^2k_{\parallel}^2} + \left(\frac{p_{\parallel 0} - p_{\perp 0}}{\rho_0 v_{A0}^2} - 1\right) = 0 \quad (\text{II.2.19})$$

Ce mode, identique au mode présent dans le système CGL, peut devenir instable via l'instabilité firehose.

Pour les autres directions, on peut remplacer v_{A1x} et v_{A1z} à l'aide de (II.2.18) dans (II.2.14) et (II.2.16) :

$$\omega \frac{p_{\perp 1}}{\rho_0}k_{\perp} = \left(\omega^2 + \left(\frac{p_{\parallel 0} - p_{\perp 0}}{\rho_0 v_{A0}^2} - 1\right)v_{A0}^2k_{\parallel}^2\right)v_{1x} + v_{A0}^2k_{\parallel}k_{\perp}v_{1z} \quad (\text{II.2.20})$$

$$\omega \frac{p_{\parallel 1}}{\rho_0}k_{\parallel} = \left(\omega^2 - \frac{p_{\parallel 0} - p_{\perp 0}}{\rho_0}k_{\parallel}^2\right)v_{1z} \quad (\text{II.2.21})$$

$$0 = k_{\perp}v_{1x} + k_{\parallel}v_{1z} \quad (\text{II.2.22})$$

$$0 = -2\omega \frac{p_{\perp 1}}{\rho_0} - \omega \frac{p_{\parallel 1}}{\rho_0} + 2\frac{p_{\parallel 0} - p_{\perp 0}}{\rho_0}k_{\parallel}v_{1z} \quad (\text{II.2.23})$$

Puis remplacer v_{1x} à l'aide de (II.2.22) et $p_{\perp 1}$ et $p_{\parallel 1}$ dans (II.2.23) pour obtenir une équation de dispersion ne dépendant plus que de v_{1z} et enfin la relation de dispersion :

$$\Rightarrow \frac{\omega^2}{v_{A0}^2k_{\parallel}^2} - \frac{2\left(\frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0}) - 1\right)k_{\parallel}^2 + (3\frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0}) - 2)k_{\perp}^2}{k_{\perp}^2 - 2k_{\parallel}^2} = 0 \quad (\text{II.2.24})$$

Le modèle incompressible proposé admet donc deux modes linéaires. Le premier est le mode d'Alfvén-firehose incompressible. Le deuxième est un mode encore inconnu polarisé suivant $(1, 0, -\tan \theta)$. Nous allons l'étudier dans la section 2.3.

2.3 Etude paramétrique des modes linéaires du modèle incompressible gyrotope

La linéarisation du système d'équation incompressible gyrotope proposé a abouti sur deux modes que l'on peut exprimer en fonction de θ :

- le mode d'Alfvén : $\omega^2 = \omega_A^2$ avec $\frac{\omega_A^2}{v_{A0}^2 k^2} = F \cos^2 \theta$ et $F = 1 - \frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0})$, et instable si $F < 0$ (instabilité firehose)
- un nouveau mode : $\omega^2 = \omega_N^2$ avec $\frac{\omega_N^2}{v_{A0}^2 k^2} = \frac{G \sin^2 \theta - 2F \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta - 2 \cos^2 \theta} \cos^2 \theta$ et $G = 3 \frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0}) - 2$

L'étude de la stabilité du nouveau mode est plus complexe. Par souci de vérification et pour illustrer l'analyse, j'ai sélectionné six couples $\{\beta_{\parallel 0}; a_{p0}\}$ (indiqués par les croix rouges sur la figure II.2.1).

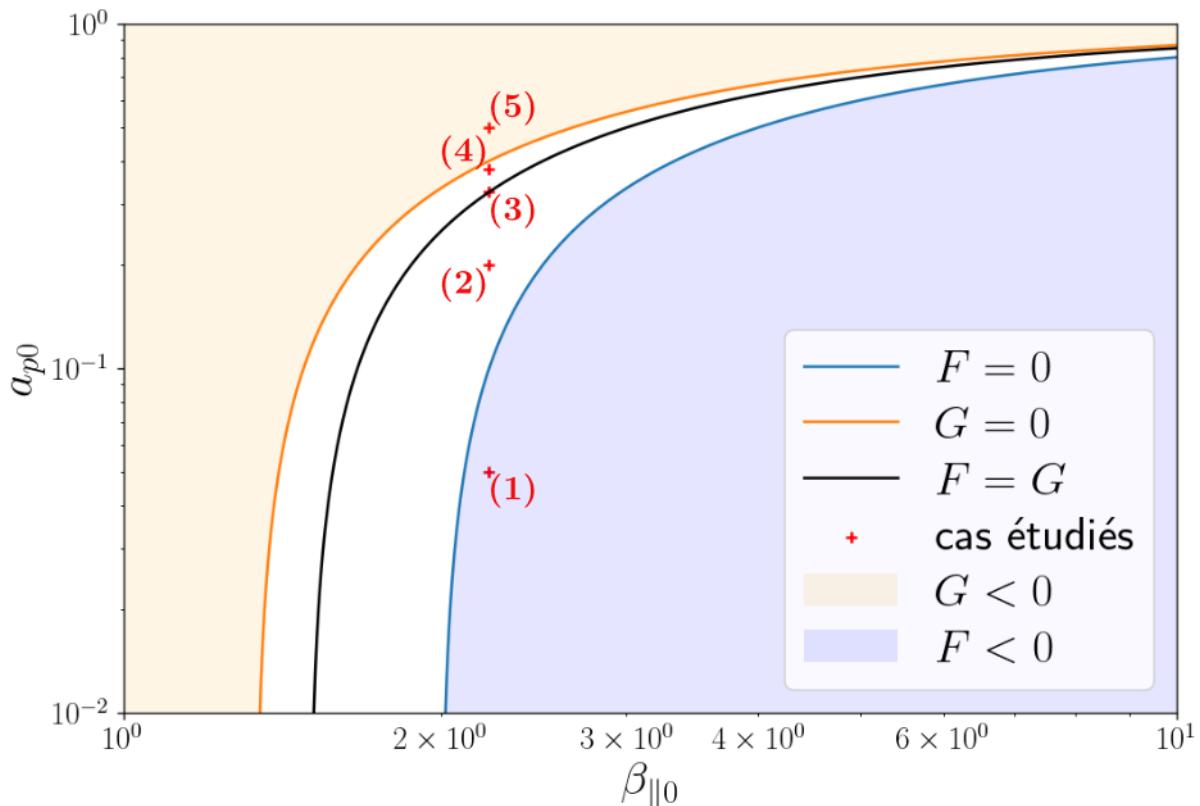


FIGURE II.2.1 – Diagramme $a_{p0} - \beta_{\parallel 0}$. Croix rouges : couples $\{\beta_{\parallel 0}; a_{p0}\}$ sélectionnés pour l'étude paramétrique de la figure II.2.2. Frontière d'instabilités firehose $F = 0$ (bleu) et zone instable ($F < 0$, bleue) associée. Frontière d'instabilités firehose perpendiculaire $G = 0$ (orange) et zone instable ($G < 0$, orange) associée. Ligne noire : ensemble des couples $\{\beta_{\parallel 0}; a_{p0}\}$ stable pour tout angle θ paramétrisé par $F = G$.

Sur l'ensemble de graphique de la figure II.2.2 sont tracés, pour chacun d'eux, en fonction de θ , la vitesse de phase normalisée par la vitesse d'Alfvén, c'est-à-dire la partie réelle de $\frac{\omega^2}{v_{A0}^2 k^2}$ (colonne a), ainsi que sa partie imaginaire (colonne b), qui caractérise la croissance des instabilités.

Si $\theta \sim 0^\circ$ ($k_{\parallel} \ll k_{\perp}$), $\frac{\omega_N^2}{v_{A0}^2 k^2} = F \cos^2 \theta$. Le nouveau mode doit donc converger vers le mode d'Alfvén. Sur la figure II.2.2, ω_N (vert) tend bien vers ω_A (bleu) si $\theta \rightarrow 0$ pour chaque couple. Ils sont même superposés pour (3a). Dans le cas du premier couple tel que $F < 0$, cette convergence apparaît dans le taux de croissance. On retrouve ainsi l'instabilité firehose parallèle observée pour le modèle CGL.

Si $\theta \sim 90^\circ$ ($k_{\perp} \ll k_{\parallel}$), $\frac{\omega_N^2}{v_{A0}^2 k^2} = G \cos^2 \theta$. Ce mode asymptotique sera noté ω_P et est

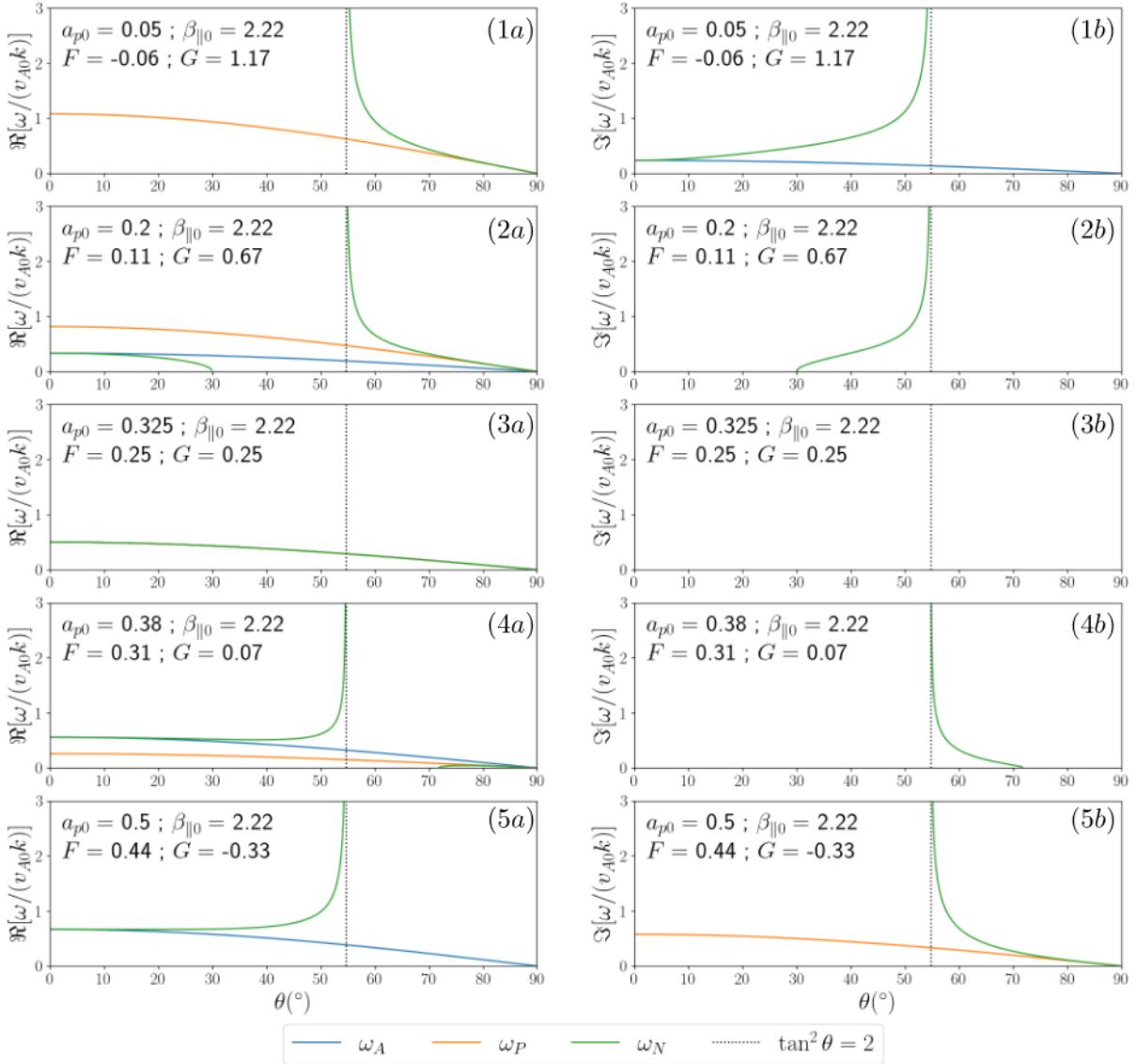


FIGURE II.2.2 – Vitesse de phase $\Re[\omega/(kv_{A0})]$ (colonne a) et taux de croissance des instabilités $\Im[\omega/(kv_{A0})]$ (colonne b) normalisées par v_{A0} en fonction de l’angle θ pour le modes d’Alfvén (ω_A , bleu), pour le nouveau mode incompressible (ω_N , vert) et le mode asymptotique (ω_P , orange). Première ligne : couple (1) tel que $a_{p0} = 0.05$, $\beta_{\parallel 0} = 20/9 \Rightarrow$ instabilité firehose ($F < 0$). Deuxième ligne : couple (2) tel que $a_{p0} = 0.2$, $\beta_{\parallel 0} = 20/9$. Troisième ligne : couple (3) tel que $a_{p0} = 0.325$, $\beta_{\parallel 0} = 20/9 \Rightarrow$ seul cas stable pour tout θ ($F = G$). Quatrième ligne : couple (4) tel que $a_{p0} = 0.38$, $\beta_{\parallel 0} = 20/9$. Cinquième ligne : couple (5) tel que $a_{p0} = 0.5$, $\beta_{\parallel 0} = 20/9 \Rightarrow$ instabilité firehose perpendiculaire ($G < 0$).

tracé en orange sur la figure II.2.2. Cette convergence est observée pour l’ensemble des couples sélectionnés. Si l’on compare G et F , on remarque qu’ils ont la même structure à un facteur $3/2$ et un signe près. On appellera l’instabilité résultante «instabilité firehose perpendiculaire», elle apparaît dans le cas (5).

A partir de F et G , on peut déduire que le système sera instable pour tout couple $\{\beta_{\parallel 0}; a_{p0}\}$ tel que $\frac{2}{3} > \frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0})$ (cas (5) et aire orange sur la figure II.2.1) ou $\frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 -$

$a_{p0}) > 1$ (cas (1) et aire bleue sur la figure II.2.1). On remarque sur si $G = 0, F = 1/3$ et si $F = 0, G = 1$. Donc dans la zone intermédiaire (blanche sur la figure II.2.1), $G > 0$ et $F > 0$.

Pour les angles θ plus obliques, les conditions de stabilité de ω_N sont plus difficiles à établir, le signe de $\sin^2 \theta - 2\cos^2 \theta$ venant compenser le signe de $G \sin^2 \theta - 2F \cos^2 \theta$. Une instabilité firehose hybride entre l'instabilité firehose parallèle et l'instabilité firehose perpendiculaire pourra émerger. On la nommera «instabilité firehose oblique». Elle apparaît pour les couples (2) et (4). La condition d'instabilité est obtenue pour $\beta_{\parallel 0}$ et a_{p0} tel que :

$$(\sin^2 \theta - 2\cos^2 \theta)(G \sin^2 \theta - 2F \cos^2 \theta) < 0 \quad (\text{II.2.25})$$

En supposant $\cos^2 \theta \neq 0$, on peut utiliser $\tan^2 \theta$. Ainsi :

$$(\tan^2 \theta - 2)(G \tan^2 \theta - 2F) < 0 \quad (\text{II.2.26})$$

Si $G \neq 0$, $(\tan^2 \theta - 2)(G \tan^2 \theta - 2F)$ a deux racines, $\tan^2 \theta = 2$ en laquelle $\omega_N^2 \rightarrow \infty$ (asymptote indiquée en pointillés sur la figure II.2.2) et $\tan^2 \theta = 2\frac{F}{G}$ en laquelle $\omega_N^2 \rightarrow 0$. Sur la figure II.2.1, apparaît en noir $F = G$. Au-dessus de cette courbe si $G > 0$, $\frac{F}{G} > 1$ et si $G < 0$, $\frac{F}{G} < 1$. En dessous, $\frac{F}{G} < 1$.

Si $G < 0$, $\frac{F}{G} < 1$, il y aura donc instabilité si $\tan^2 \theta > 2$ ou si $\tan^2 \theta < 2\frac{F}{G}$ (impossible puisque $\frac{F}{G} < 0$). Cette situation est illustrée par le couple (5), instable pour tout angle supérieur à l'asymptote en pointillés noirs $\tan^2 \theta = 2$. On peut raccrocher à cette condition le cas $G = 0$ puisque alors $F = 1/3$, et on sera instable si $\tan^2 \theta > 2$. Dans ces cas, on retrouve l'instabilité firehose perpendiculaire découverte asymptotiquement si $\theta \rightarrow 90^\circ$. On peut maintenant compléter sa définition par une borne angulaire inférieure telle que $\tan^2 \theta > 2$.

Si $G > 0$, il y a instabilité si $(\tan^2 \theta - 2)(G \tan^2 \theta - 2F) < 0$, plusieurs cas de figures se présentent alors :

- $2\frac{F}{G} > \tan^2 \theta > 2$, dans ce cas $F > G$ (couple (4))
- $2 > \tan^2 \theta > 2\frac{F}{G}$, dans ce cas $F < G$ (couples (2) et (1))

Le deuxième cas permet de donner une borne angulaire supérieure à l'instabilité firehose parallèle : $\tan^2 \theta < 2$.

Aucun couples $\{\beta_{\parallel 0}; a_{p0}\}$ étudié jusqu'à présent n'est donc stable pour tout θ . La dernière possibilité est le cas $F = G$, c'est à dire, le cas des couples $\{\beta_{\parallel 0}; a_{p0}\}$ situés sur la courbe noire de la figure II.2.1. Dans ce cas là, $\frac{\omega_N^2}{v_{A0}^2 k^2} = \cos^2 \theta$. Il n'est donc possible d'être stable pour tout θ que si $F = G$, c'est à dire pour $\beta_{\parallel 0}$ et a_{p0} tels que $\frac{3}{4} = \frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0})$. Alors ω_N , ω_P et ω_A sont confondus.

La zone de stabilité de ce système en fonction des paramètres $\beta_{\parallel 0}$ et a_{p0} est donc quasi-inexistante. Simuler un système instable est difficile, des gradients de plus en plus fort apparaissent et ont tendance à «casser» la simulation. Ce modèle incompressible sera donc difficilement implantable. Sachant que la problématique principale de ce travail se place dans le cadre compressible, l'implémentation de ce modèle ou la recherche d'un modèle alternatif plus stable afin d'étudier plus rigoureusement la loi exacte incompressible n'ont pas été engagés. Nous pouvons tout de même utiliser ce modèle afin d'estimer l'importance du terme correctif.

Si l'on imagine une situation dans laquelle $\frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_p)$ serait quasiment constant, alors

le terme correctif de la loi exacte à l'ordre 0 pourra s'écrire :

$$-4(\varepsilon - \varepsilon_{PP98}) = -2 < \delta \left(\frac{\beta_{\parallel}}{2} (1 - a_p) \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A \right) : \delta(\nabla \mathbf{v}) > \quad (\text{II.2.27})$$

$$\simeq -2 \frac{\beta_{\parallel 0}}{2} (1 - a_{p0}) < \delta(\mathbf{v}_A \mathbf{v}_A) : \delta(\nabla \mathbf{v}) > \quad (\text{II.2.28})$$

Dans le cas linéairement stable de notre modèle incompressible, cela donne :

$$-4(\varepsilon - \varepsilon_{PP98}) \simeq -\frac{3}{2} < \delta(\mathbf{v}_A \mathbf{v}_A) : \delta(\nabla \mathbf{v}) > \quad (\text{II.2.29})$$

Si $< \delta(\mathbf{v}_A \mathbf{v}_A) : \delta(\nabla \mathbf{v}) >$ devient de l'ordre de grandeur de ε_{PP98} , on pourra s'attendre à une correction de l'ordre de $3/8$, c'est-à-dire d'environ un tiers, de ε_{PP98} . Cette estimation, très incertaine, montre que la correction due à l'anisotropie de pression dans le système incompressible pourrait avoir son importance dans l'estimation du taux de chauffage turbulent.

2.4 Synthèse : Limite incompressible et piste d'étude numérique

Limite incompressible de la loi exacte avec pression tensorielle et cas gyrotrope :

$$-4(\varepsilon - \varepsilon_{PP98}) = -2 < \delta(\bar{\mathbf{P}} - p\bar{\mathbf{I}}) : \delta(\nabla \mathbf{v}) > = -2 < \delta\bar{\mathbf{\Pi}} : \delta(\nabla \mathbf{v}) > \quad (\text{II.2.30})$$

$$-4(\varepsilon - \varepsilon_{PP98}) = -2 < \delta((p_{\parallel} - p_{\perp})(\mathbf{b}\mathbf{b} - \frac{1}{3}\bar{\mathbf{I}})) : \delta(\nabla \mathbf{v}) > \quad (\text{II.2.31})$$

Modèle incompressible avec pression gyrotrope proposé pour l'étude numérique de turbulence incompressible :

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (\text{II.2.32})$$

$$\partial_t \mathbf{v} + \nabla \cdot (\mathbf{v}\mathbf{v} - \mathbf{v}_A\mathbf{v}_A + \frac{1}{\rho_0}\bar{\mathbf{P}}_*) = 0 \quad (\text{II.2.33})$$

$$\partial_t p + \nabla \cdot (p\mathbf{v}) + \frac{2}{3}\bar{\mathbf{\Pi}} : \nabla \mathbf{v} = 0 \quad (\text{II.2.34})$$

$$\partial_t \mathbf{v}_A - \nabla \cdot (\mathbf{v}_A\mathbf{v} - \mathbf{v}\mathbf{v}_A) = 0 \quad (\text{II.2.35})$$

avec $\bar{\mathbf{P}}_* = (p + p_m)\bar{\mathbf{I}} + \bar{\mathbf{\Pi}}$ $p_m = \frac{\rho_0|\mathbf{v}_A|^2}{2}$ $p = \frac{1}{3}(2p_{\perp} + p_{\parallel})$

$$\bar{\mathbf{\Pi}} = \bar{\mathbf{P}} - p\bar{\mathbf{I}} = (p_{\parallel} - p_{\perp})(\mathbf{b}\mathbf{b} - \frac{1}{3}\bar{\mathbf{I}})$$

Etude linéaire du modèle proposé :

— Mode d'Alfvén incompressible polarisé suivant $(0, 1, 0)$:

$$\frac{\omega^2}{v_{A0}^2 k_{\parallel}^2} + \frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0}) - 1 = 0 \quad (\text{II.2.36})$$

$$\text{Instabilité firehose : } \frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0}) - 1 > 0 \quad (\text{II.2.37})$$

— Nouveau mode polarisé suivant $(1, 0, -\tan \theta)$:

$$\frac{\omega^2}{v_{A0}^2 k_{\parallel}^2} - \frac{2(\frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0}) - 1) \cos^2 \theta + (3\frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0}) - 2) \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta - 2 \cos^2 \theta} = 0 \quad (\text{II.2.38})$$

$$\text{Critère d'instabilité (type firehose) : } \frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0}) \neq \frac{3}{4} \quad (\text{II.2.39})$$

\Rightarrow Ce modèle n'admet quasiment pas de zone de stabilité.

PARTIE II : CHAPITRE 3

SORTIR DU CADRE IDÉAL ET ALLER VERS LE BI-FLUIDE

Sommaire

3.1	La MHD Hall	93
3.2	Le modèle bi-fluide	95
3.3	Le modèle analysé numériquement dans la partie ??	103
3.4	Synthèse de l'extension de la théorie des lois exactes à d'autres régimes	107

Dans les chapitres précédents, l'équation d'induction (2.11) était supposée idéale et dans le cas CGL original, les électrons froids. Dans ce chapitre, nous allons relaxer les hypothèses sur l'équation d'induction en prenant d'abord en compte le terme Hall (section 3.1). Dans la section 3.2, nous dériverons une correction à la loi exacte associée à chaque niveau d'approximation de la loi d'Ohm en partant du modèle bi-fluide. Enfin dans la section 3.3, nous nous intéresserons au modèle utilisé dans les simulations étudiées dans la partie ?? : un modèle CGL prenant en compte la pression électronique dans la loi d'Ohm avec différentes fermetures (isotherme et CGL).

3.1 La MHD Hall

Comme on l'a vue dans le chapitre 2 de l'Introduction, le terme Hall doit être pris en compte dans l'équation d'induction si l'on regarde des échelles proches du rayon de Larmor des ions, généralement très proche de la longueur inertielle des ions, ou des fréquences proche de la fréquence cyclotron des ions. Par conséquent, la loi exacte obtenue avec une loi d'Ohm idéale perdra en validité en s'approchant de ces échelles. Afin de tirer la description de la cascade dans ce domaine ionique, on doit donc calculer une correction à partir du terme Hall. Diverses formulations existent pour cette contribution dans le cas MHD compressible avec pression isotrope mais que devient-elle dans le cadre d'une fermeture CGL ?

En prenant en compte le terme Hall, l'équation d'induction devient :

$$\partial_t \mathbf{v}_A = \nabla \cdot (\mathbf{v}_A \mathbf{u} - \mathbf{u} \mathbf{v}_A) - \mathbf{u} \nabla \cdot \mathbf{v}_A + \frac{\mathbf{v}_A}{2} \nabla \cdot \mathbf{u} - \frac{\lambda}{\sqrt{\rho}} \nabla \times \left(\frac{\mathbf{j}}{\sqrt{\rho}} \times \mathbf{v}_A \right) \quad (\text{II.3.1})$$

avec $\lambda = m_i/|q_e|$, constante analysée dans le chapitre 2 de l'Introduction, $\mathbf{j} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0}} \nabla \times (\sqrt{\rho} \mathbf{v}_A)$, la densité de courant et μ_0 la perméabilité du vide.

Puisque $\sqrt{\rho} \mathbf{v}_A \cdot \nabla \times \left(\frac{\mathbf{j}}{\sqrt{\rho}} \times \mathbf{v}_A \right) = \nabla \cdot ((\mathbf{j} \times \mathbf{v}_A) \times \mathbf{v}_A)$, l'équation d'énergie magnétique (I.1.6) devient :

$$\partial_t E_m + \nabla \cdot (E_m \mathbf{v} + \lambda (\mathbf{j} \times \mathbf{v}_A) \times \mathbf{v}_A) = \rho \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A : \nabla \mathbf{v} - p_m \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (\text{II.3.2})$$

Cette correction n'ajoute qu'un terme de type flux au bilan énergétique. Donc aucun autre terme ne doit être ajouté à la balance énergétique. De plus, le terme Hall ne dépend ni du tenseur de pression, ni de l'énergie interne. Par conséquent, elle n'influera pas littéralement sur les contributions du tenseur de pression et de l'énergie interne dans la loi exacte. Il faudra tout de même faire attention à ne pas utiliser les formes conservatives des pressions parallèle et perpendiculaire CGL (II.1.9) qui ne sont valables que dans le cas idéal, l'équation d'induction étant utilisée pour les obtenir.

En notant génériquement ε_{ideal} le taux de cascade compressible obtenu avec un modèle dans lequel le terme Hall est négligé et ε_{hall} la correction Hall, le nouveau taux de cascade sera $\varepsilon = \varepsilon_{ideal} + \varepsilon_{hall}$ avec :

$$\begin{aligned} -4\varepsilon_{hall} &= \lambda \nabla_\ell \cdot \left\langle (\mathbf{j} \times \mathbf{v}_A + \mathbf{j}' \times \mathbf{v}'_A) \times \delta \mathbf{v}_A - \delta \left(\frac{\mathbf{j}}{\rho} \times \mathbf{v}_A \right) \times (\rho \mathbf{v}_A + \rho' \mathbf{v}'_A) \right\rangle \\ &+ \frac{\lambda}{2} \left\langle (\rho' \mathbf{v}'_A \cdot \delta \mathbf{v}_A - \delta (\rho \mathbf{v}_A) \cdot \mathbf{v}'_A) \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{j}}{\rho} \right) - (\rho \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{v}_A - \delta (\rho \mathbf{v}_A) \cdot \mathbf{v}_A) \nabla' \cdot \left(\frac{\mathbf{j}'}{\rho'} \right) \right\rangle \\ &- \lambda \left\langle \left(\rho' \mathbf{v}'_A \cdot \delta \left(\frac{\mathbf{j}}{\rho} \right) - \mathbf{v}'_A \cdot \delta \mathbf{j} \right) \nabla \cdot \mathbf{v}_A - \left(\rho \mathbf{v}_A \cdot \delta \left(\frac{\mathbf{j}}{\rho} \right) - \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{j} \right) \nabla' \cdot \mathbf{v}'_A \right\rangle \end{aligned} \quad (\text{II.3.3})$$

Ce résultat est une adaptation à nos notations du résultat obtenu par ANDRÉS, GALTIER et SAHRAOUI 2018 qui utilise la même fonction de corrélations de l'énergie magnétique, $\mathcal{R}_m = \frac{1}{4} \langle (\rho' + \rho) \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A \rangle$, que nous. Dans le cas incompressible, diverses formes de ε_{hall} existent et ont été comparées par FERRAND, GALTIER, SAHRAOUI, MEYRAND et al. 2019. On retiendra la forme qu'ils ont dérivée et qui peut être retrouvée en prenant la limite incompressible de la correction (II.3.3) :

$$-4\varepsilon_{hall} \underset{\rho=\rho_0}{=} -\frac{\lambda}{2} \nabla_\ell \cdot \langle \delta \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{v}_A \delta \mathbf{j} - 2 \delta \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{j} \delta \mathbf{v}_A \rangle \quad (\text{II.3.4})$$

Linéairement, le terme Hall va adapter les modes MHD et CGL afin d'y faire apparaître le mouvement gyrotropique des ions lorsqu'on s'approche de la fréquence cyclotron ionique $\omega_{ci} = \frac{B_0}{\lambda}$. Des modes whistlers (sifflants) et cyclotron ionique vont émerger. Pour plus de détails, se référer à la dérivation effectuée par HUNANA et al. 2019. On notera que plus l'angle de propagation sera oblique par rapport à \mathbf{b}_0 et plus la correction Hall à la relation de dispersion sera affaiblie. En terme d'instabilité, l'instabilité firehose sera quelque peu stabilisée. En effet, le critère d'instabilité devient $\frac{\beta_{||0}}{2}(1 - a_{p0}) > 1 + \frac{k_{||}^2 v_{A0}^2}{4\omega_{ci}^2}$. Par conséquent, la zone de stabilité du cadran $a_{p0} < 1$ dans le diagramme $a_{p0} - \beta_{||0}$ (figure II.1.1) sera élargie : en $a_{p0} = 0$, le critère rejoindra $\beta_{||0} = 2 + \frac{k_{||}^2 v_{A0}^2}{2\omega_{ci}^2}$ qui est supérieur au $\beta_{||0} = 2$ obtenu

dans le cas CGL idéal. Le critère miroir ne sera quant à lui pas modifié.

3.2 Le modèle bi-fluide

Par curiosité, je me suis demandé à quoi ressemblerait la loi exacte si l'on prenait en compte l'ensemble de la loi d'Ohm généralisée (2.9) dans l'équation d'induction. Au lieu d'attaquer ce problème en relaxant petit à petit les approximations appliquées sur la loi d'Ohm, j'ai choisi de partir du modèle bi-fluide puis d'y prendre en compte la quasi-neutralité et de l'exprimer en fonction des grandeurs mono-fluide et enfin d'y injecter la loi d'Ohm généralisée. Il est ensuite possible de faire tendre la loi exacte obtenue vers différents régimes similairement au travail effectué par BANERJEE et ANDRÉS 2020. Contrairement à BANERJEE et ANDRÉS 2020 proposant une loi dérivée avec un modèle bi-fluide fermé polytropiquement et similairement à la dérivation effectuée dans le chapitre 1, on considérera des pressions tensorielles et les équations d'énergie interne associée à chaque espèce en négligeant les flux de chaleur.

La fonction de corrélation pour l'énergie électromagnétique sera choisie au plus près de celle utilisée jusqu'à présent c'est-à-dire $\langle \rho \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}'_A \rangle$.

Les équations bi-fluides utilisées sont :

$$\partial_t \rho_\alpha + \nabla \cdot (\rho_\alpha \mathbf{v}_\alpha) = 0 \quad (\text{II.3.5})$$

$$\partial_t (\rho_\alpha \mathbf{v}_\alpha) + \nabla \cdot (\rho_\alpha \mathbf{v}_\alpha \mathbf{v}_\alpha + \overline{\mathbf{P}_\alpha}) - Q_\alpha \mathbf{E} - \mathbf{j}_\alpha \times \mathbf{B} = 0 \quad (\text{II.3.6})$$

$$\partial_t u_\alpha + \mathbf{v}_\alpha \cdot \nabla u_\alpha + \frac{1}{\rho_\alpha} \overline{\mathbf{P}_\alpha} : \nabla \mathbf{v}_\alpha = 0 \quad (\text{II.3.7})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\text{II.3.8})$$

$$\partial_t \mathbf{B} + \nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (\text{II.3.9})$$

avec $Q = \sum_\alpha Q_\alpha = \sum_\alpha q_\alpha n_\alpha$, $\mathbf{j} = \sum_\alpha \mathbf{j}_\alpha = \sum_\alpha q_\alpha n_\alpha \mathbf{v}_\alpha$. Pour alléger un peu le calcul, on ne fait pas apparaître les termes de forçage, dissipation et flux de chaleur. De plus ces équations contiennent beaucoup de quantités constantes : m_α dans ρ_α , q_α pour chaque espèce, μ_0 , ϵ_0 . Afin de réduire ce nombre de constantes qui viendront alourdir les calculs et de faire ressortir des constantes caractéristiques du plasma, nous allons adimensionnaliser les équations¹. Ces constantes caractéristiques sont le rapport de masse $\mu = \frac{m_e}{m_i + m_e} \simeq \frac{m_e}{m_i}$ puisque $m_e \ll m_i$, qui permet d'accéder facilement aux régimes MHD ($\mu \rightarrow 0$) ou MHD électronique (EMHD, $\mu \rightarrow 1$) et une longueur inertielle sans dimension $\lambda = \frac{\sqrt{m_i + m_e}}{L_0 \sqrt{\mu_0 n_0 e^2}} \simeq \frac{\sqrt{m_i}}{L_0 \sqrt{\mu_0 n_0 e^2}}$ pendant sans dimension de la quantité λ utilisée dans la section précédente. Les vitesses seront adimensionnalisée par la vitesse de la lumière dans le vide c , et on note les quantités de références :

- Longueur : L_0
- Temps : $t_0 = \frac{L_0}{c}$
- Vitesse : $V_0 = c$
- Densité de particule : n_0
- Champ magnétique : $B_0 = c \sqrt{\mu_0 n_0 (m_i + m_e)}$
- Champ électrique : $E_0 = c B_0$
- Pression : $P_0 = (m_i + m_e) n_0 c^2$

1. Cela n'a pas été entrepris dans les modèles mono-fluides utilisés précédemment, car cela n'apportait aucune simplification ou information dans ces modèles.

On pourrait noter les quantités sans dimension avec un «~», par exemple $\tilde{\mathbf{v}}_i = \mathbf{v}_i/V_0$, etc. Mais pour la suite de cette section, on ne fera pas apparaître les «~» afin d'alléger les notations.

Le système sans dimension s'écrit donc :

$$\partial_t n_i + \nabla \cdot (n_i \mathbf{v}_i) = 0 \quad (\text{II.3.10})$$

$$\partial_t n_e + \nabla \cdot (n_e \mathbf{v}_e) = 0 \quad (\text{II.3.11})$$

$$\partial_t \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_i \cdot \nabla \mathbf{v}_i + \frac{1}{(1-\mu)n_i} \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}_i} - \frac{1}{(1-\mu)\lambda} \mathbf{E} - \frac{1}{(1-\mu)\lambda} \mathbf{v}_i \times \mathbf{B} = 0 \quad (\text{II.3.12})$$

$$\partial_t \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_e \cdot \nabla \mathbf{v}_e + \frac{1}{\mu n_e} \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}_e} + \frac{1}{\mu \lambda} \mathbf{E} + \frac{1}{\mu \lambda} \mathbf{v}_e \times \mathbf{B} = 0 \quad (\text{II.3.13})$$

$$\partial_t u_i + \mathbf{v}_i \cdot \nabla u_i + \frac{1}{(1-\mu)n_i} \overline{\mathbf{P}_i} : \nabla \mathbf{v}_i = 0 \quad (\text{II.3.14})$$

$$\partial_t u_e + \mathbf{v}_e \cdot \nabla u_e + \frac{1}{\mu n_e} \overline{\mathbf{P}_e} : \nabla \mathbf{v}_e = 0 \quad (\text{II.3.15})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\lambda} (n_i - n_e) \quad \nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{\lambda} (n_i \mathbf{v}_i - n_e \mathbf{v}_e) \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\text{II.3.16})$$

$$\partial_t \mathbf{B} + \nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (\text{II.3.17})$$

Les grandeurs mono-fluides seront alors définies telles que $\rho = (1-\mu)n_i + \mu n_e$ pour la densité, $\mathbf{v} = \frac{(1-\mu)n_i \mathbf{v}_i + \mu n_e \mathbf{v}_e}{(1-\mu)n_i + \mu n_e}$ pour la vitesse, $\mathbf{j} = \frac{1}{\lambda} (n_i \mathbf{v}_i - n_e \mathbf{v}_e)$ pour la densité de courant. Elles permettront de compacter un peu les équations. La loi d'Ohm généralisée sera aussi nécessaire, par exemple pour remplacer \mathbf{E} . Elle s'obtient à partir des équations (??), (II.3.12) et (II.3.13) en cherchant l'évolution de \mathbf{j} :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} = & -\frac{\rho}{\mu n_i + (1-\mu)n_e} \mathbf{v} \times \mathbf{B} - \frac{\lambda(2\mu-1)}{\mu n_i + (1-\mu)n_e} \mathbf{j} \times \mathbf{B} + \lambda \frac{\mu \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}_i} - (1-\mu) \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}_e}}{\mu n_i + (1-\mu)n_e} \\ & + \frac{\lambda^2 \mu (1-\mu)}{\mu n_i + (1-\mu)n_e} \left[\partial_t \mathbf{j} + \nabla \cdot \left(\frac{\rho \rho}{n_i n_e} \mathbf{v} \mathbf{j} + \frac{\rho \rho}{n_i n_e} \mathbf{j} \mathbf{v} + \frac{\lambda(2\mu-1)n_i}{n_i n_e} \mathbf{j} \mathbf{j} \right) \right] \\ & + \frac{\lambda \mu (1-\mu)}{\mu n_i + (1-\mu)n_e} \nabla \cdot \left(\frac{n_e - n_i}{n_i n_e} (\rho^2 \mathbf{v} \mathbf{v} + \mu^2 \lambda^2 \mathbf{j} \mathbf{j}) \right) \end{aligned} \quad (\text{II.3.18})$$

Contrairement à celle détaillée dans le chapitre 2 de l'Introduction, on n'y suppose ni la quasi-neutralité ($n_i = n_e = \rho$) qui vient annuler la dernière ligne, ni $\mu \rightarrow 0$.

On définit aussi la vitesse d'Alfvén $\mathbf{v}_A = \frac{\mathbf{B}}{\sqrt{(1-\mu)n_i + \mu n_e}}$. L'énergie totale de ce système peut ainsi être séparée entre une énergie totale ionique et une électronique :

$$E_{tot} = E_{toti} + E_{tote} = \frac{1}{2} (1-\mu)n_i(|\mathbf{v}_i|^2 + |\mathbf{v}_A|^2 + 2u_i) + \frac{1}{2}\mu n_e(|\mathbf{v}_e|^2 + |\mathbf{v}_A|^2 + 2u_e)$$

L'équation d'induction (II.3.17) s'écrit en fonction de la vitesse d'Alfvén :

$$\partial_t \mathbf{v}_A = -\frac{\nabla \times \mathbf{E}}{\sqrt{(1-\mu)n_i + \mu n_e}} + \frac{\mathbf{v}_A}{2} \frac{\nabla \cdot ((1-\mu)n_i \mathbf{v}_i + \mu n_e \mathbf{v}_e)}{(1-\mu)n_i + \mu n_e} \quad (\text{II.3.19})$$

$$(\text{II.3.20})$$

En appliquant la méthode résumée dans la section I.3 sur les fonctions de corrélations d'énergie totale ionique, $\mathcal{R}_{toti} = \frac{1-\mu}{4} \langle (n'_i + n_i)(\mathbf{v}'_i \cdot \mathbf{v}_i + \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A) + 2n'_i u_i + 2n_i u'_i \rangle$,

et électronique, $\mathcal{R}_{tote} = \frac{\mu}{4} \langle (n'_e + n_e)(\mathbf{v}'_e \cdot \mathbf{v}_e + \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A) + 2n'_e u_e + 2n_e u'_e \rangle$ puis en supposant les hypothèses de stationnarité statistique et de séparation d'échelles de Kolmogorov, on obtient les lois exactes pour les taux de cascade, ε_i et ε_e , associés à chaque fluide et exprimés dans la zone inertielle :

$$\begin{aligned}
-4\varepsilon_i &= (1 - \mu) (\nabla_\ell \cdot \langle \delta(n_i \mathbf{v}_i) \cdot \delta \mathbf{v}_i \delta \mathbf{v}_i \rangle + \langle \delta \mathbf{v}_i \cdot (n_i \mathbf{v}_i \nabla' \cdot \mathbf{v}'_i - n'_i \mathbf{v}'_i \nabla \cdot \mathbf{v}_i) \rangle) \\
&\quad + 2(1 - \mu) (\nabla_\ell \cdot \langle \delta n_i \delta u_i \delta \mathbf{v}_i \rangle + \langle \delta u_i (n_i \nabla' \cdot \mathbf{v}'_i - n'_i \nabla \cdot \mathbf{v}_i) \rangle) \\
&\quad + \nabla_\ell \cdot \left\langle \delta(n_i \mathbf{v}_i) \cdot \delta \overline{\mathbf{P}}_i \delta \left(\frac{1}{n_i} \right) \right\rangle + \left\langle \delta \overline{\mathbf{P}}_i : \left(n_i \mathbf{v}_i \nabla' \left(\frac{1}{n'_i} \right) - n'_i \mathbf{v}'_i \nabla \left(\frac{1}{n_i} \right) \right) \right\rangle \\
&\quad + 2 \left\langle \delta \left(\frac{\overline{\mathbf{P}}_i}{n_i} \right) : (n'_i \nabla \mathbf{v}_i - n_i \nabla' \mathbf{v}'_i) \right\rangle \\
&\quad + \frac{1 - \mu}{2} \left\langle \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A \left[\frac{(1 - \mu)(n'_i - n_i) - 2\mu n_e}{\rho} \nabla \cdot (n_i \mathbf{v}_i) + \frac{\mu(n'_i + n_i)}{\rho} \nabla \cdot (n_e \mathbf{v}_e) \right] \right\rangle \\
&\quad + \frac{1 - \mu}{2} \left\langle \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}'_A \left[\frac{(1 - \mu)(n_i - n'_i) - 2\mu n'_e}{\rho'} \nabla' \cdot (n'_i \mathbf{v}'_i) + \frac{\mu(n'_i + n_i)}{\rho'} \nabla' \cdot (n'_e \mathbf{v}'_e) \right] \right\rangle \\
&\quad + \frac{1}{\lambda} \left\langle (n'_i + n_i) \left(\mathbf{v}'_i \cdot \mathbf{v}_i \times (\sqrt{\rho} \mathbf{v}_A) + \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}'_i \times (\sqrt{\rho'} \mathbf{v}'_A) \right) \right\rangle \\
&\quad - (1 - \mu) \left\langle (n'_i + n_i) \left(\frac{\nabla' \cdot (\mathbf{E}' \times \mathbf{v}_A)}{\sqrt{\rho'}} + \frac{\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{v}'_A)}{\sqrt{\rho}} \right) \right\rangle \tag{II.3.21}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-4\varepsilon_e &= \mu (\nabla_\ell \cdot \langle \delta(n_e \mathbf{v}_e) \cdot \delta \mathbf{v}_e \delta \mathbf{v}_e \rangle + \langle \delta \mathbf{v}_e \cdot (n_e \mathbf{v}_e \nabla' \cdot \mathbf{v}'_e - n'_e \mathbf{v}'_e \nabla \cdot \mathbf{v}_e) \rangle) \\
&\quad + 2\mu (\nabla_\ell \cdot \langle \delta n_e \delta u_e \delta \mathbf{v}_e \rangle + \langle \delta u_e (n_e \nabla' \cdot \mathbf{v}'_e - n'_e \nabla \cdot \mathbf{v}_e) \rangle) \\
&\quad + \nabla_\ell \cdot \left\langle \delta(n_e \mathbf{v}_e) \cdot \delta \overline{\mathbf{P}}_e \delta \left(\frac{1}{n_e} \right) \right\rangle + \left\langle \delta \overline{\mathbf{P}}_e : \left(n_e \mathbf{v}_e \nabla' \left(\frac{1}{n'_e} \right) - n'_e \mathbf{v}'_e \nabla \left(\frac{1}{n_e} \right) \right) \right\rangle \\
&\quad + 2 \left\langle \delta \left(\frac{\overline{\mathbf{P}}_e}{n_e} \right) : (n'_e \nabla \mathbf{v}_e - n_e \nabla' \mathbf{v}'_e) \right\rangle \\
&\quad + \frac{\mu}{2} \left\langle \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A \left[\frac{\mu(n'_e - n_e) - 2(1 - \mu)n_i}{\rho} \nabla \cdot (n_e \mathbf{v}_e) + \frac{(1 - \mu)(n'_e + n_e)}{\rho} \nabla \cdot (n_i \mathbf{v}_i) \right] \right\rangle \\
&\quad + \frac{\mu}{2} \left\langle \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}'_A \left[\frac{\mu(n_e - n'_e) - 2(1 - \mu)n'_i}{\rho'} \nabla' \cdot (n'_e \mathbf{v}'_e) + \frac{(1 - \mu)(n'_e + n_e)}{\rho'} \nabla' \cdot (n'_i \mathbf{v}'_i) \right] \right\rangle \\
&\quad + \frac{1}{\lambda} \left\langle (n'_e + n_e) \left(\mathbf{v}'_e \cdot \mathbf{v}_e \times (\sqrt{\rho} \mathbf{v}_A) + \mathbf{v}_e \cdot \mathbf{v}'_e \times (\sqrt{\rho'} \mathbf{v}'_A) \right) \right\rangle \\
&\quad - \mu \left\langle (n'_e + n_e) \left(\frac{\nabla' \cdot (\mathbf{E}' \times \mathbf{v}_A)}{\sqrt{\rho'}} + \frac{\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{v}'_A)}{\sqrt{\rho}} \right) \right\rangle \tag{II.3.22}
\end{aligned}$$

On y retrouve des fonctions de structures et des termes sources similaires à ceux dérivés dans les cas MHD et CGL (voir équations (II.1.16), (II.1.18) et (I.2.21)) pour les contributions cinétique et thermodynamique (\mathbf{v}_i , \mathbf{v}_e , u_i , u_e , $\overline{\mathbf{P}}_i$ et $\overline{\mathbf{P}}_e$). Par contre, la contribution électromagnétique diffère (quatre dernières lignes de (II.3.21) et (II.3.22)). On remarque d'ailleurs qu'elle reflète le couplage des deux fluides par le champ électromagnétique étant donné que dans (II.3.21) comme dans (II.3.22) elle dépend de \mathbf{E} , \mathbf{v}_A , \mathbf{v}_i , \mathbf{v}_e , n_i et n_e . Pour réduire cette contribution, on doit sommer (II.3.21) et (II.3.22). On

obtient ainsi après quelques manipulations, la loi exacte pour l'énergie totale bi-fluide :

$$\begin{aligned}
 -4\varepsilon &= (1-\mu) (\nabla_\ell \cdot \langle \delta(n_i \mathbf{v}_i) \cdot \delta \mathbf{v}_i \delta \mathbf{v}_i \rangle + \langle \delta \mathbf{v}_i \cdot (n_i \mathbf{v}_i \nabla' \cdot \mathbf{v}'_i - n'_i \mathbf{v}'_i \nabla \cdot \mathbf{v}_i) \rangle) \\
 &\quad + \mu (\nabla_\ell \cdot \langle \delta(n_e \mathbf{v}_e) \cdot \delta \mathbf{v}_e \delta \mathbf{v}_e \rangle + \langle \delta \mathbf{v}_e \cdot (n_e \mathbf{v}_e \nabla' \cdot \mathbf{v}'_e - n'_e \mathbf{v}'_e \nabla \cdot \mathbf{v}_e) \rangle) \\
 &\quad + 2(1-\mu) (\nabla_\ell \cdot \langle \delta n_i \delta u_i \delta \mathbf{v}_i \rangle + \langle \delta u_i (n_i \nabla' \cdot \mathbf{v}'_i - n'_i \nabla \cdot \mathbf{v}_i) \rangle) \\
 &\quad + 2\mu (\nabla_\ell \cdot \langle \delta n_e \delta u_e \delta \mathbf{v}_e \rangle + \langle \delta u_e (n_e \nabla' \cdot \mathbf{v}'_e - n'_e \nabla \cdot \mathbf{v}_e) \rangle) \\
 &\quad + \nabla_\ell \cdot \left\langle \delta(n_i \mathbf{v}_i) \cdot \delta \bar{\mathbf{P}}_i \delta \left(\frac{1}{n_i}\right) \right\rangle + \left\langle \delta \bar{\mathbf{P}}_i : \left(n_i \mathbf{v}_i \nabla' \left(\frac{1}{n'_i}\right) - n'_i \mathbf{v}'_i \nabla \left(\frac{1}{n_i}\right)\right) \right\rangle \\
 &\quad + \nabla_\ell \cdot \left\langle \delta(n_e \mathbf{v}_e) \cdot \delta \bar{\mathbf{P}}_e \delta \left(\frac{1}{n_e}\right) \right\rangle + \left\langle \delta \bar{\mathbf{P}}_e : \left(n_e \mathbf{v}_e \nabla' \left(\frac{1}{n'_e}\right) - n'_e \mathbf{v}'_e \nabla \left(\frac{1}{n_e}\right)\right) \right\rangle \\
 &\quad + 2 \left\langle \delta \left(\frac{\bar{\mathbf{P}}_i}{n_i}\right) : (n'_i \nabla \mathbf{v}_i - n_i \nabla' \mathbf{v}'_i) + \delta \left(\frac{\bar{\mathbf{P}}_e}{n_e}\right) : (n'_e \nabla \mathbf{v}_e - n_e \nabla' \mathbf{v}'_e) \right\rangle \\
 &\quad - \nabla_\ell \cdot \left\langle (\rho' + \rho) \left(\frac{\mathbf{E}' \times \mathbf{v}_A}{\sqrt{\rho'}} - \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{v}'_A}{\sqrt{\rho}}\right) \right\rangle + \frac{1}{2} \left\langle (\rho' - \rho) \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}'_A (\nabla \cdot \mathbf{v} - \nabla' \cdot \mathbf{v}') \right\rangle \\
 &\quad + \left\langle (\rho' - \rho) \left(\left(-\frac{\mathbf{E} \times \mathbf{v}'_A}{\sqrt{\rho}} + \frac{1}{2} \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}'_A \mathbf{v}\right) \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} + \left(\frac{\mathbf{E}' \times \mathbf{v}_A}{\sqrt{\rho'}} - \frac{1}{2} \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A \mathbf{v}'\right) \cdot \frac{\nabla' \rho'}{\rho'}\right) \right\rangle \\
 &\quad + \frac{1}{\lambda} \left\langle (n'_i + n_i) (\mathbf{v}'_i \cdot \mathbf{v}_i \times (\sqrt{\rho} \mathbf{v}_A) + \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}'_i \times (\sqrt{\rho} \mathbf{v}'_A)) \right\rangle \\
 &\quad - \frac{1}{\lambda} \left\langle (n'_e + n_e) (\mathbf{v}'_e \cdot \mathbf{v}_e \times (\sqrt{\rho} \mathbf{v}_A) + \mathbf{v}_e \cdot \mathbf{v}'_e \times (\sqrt{\rho} \mathbf{v}'_A)) \right\rangle
 \end{aligned} \tag{II.3.23}$$

Cette loi dépend de μ , n_i , n_e , \mathbf{v}_i et \mathbf{v}_e explicitement et à travers ρ et \mathbf{v} . Elle dépend aussi de u_i , u_e , $\bar{\mathbf{P}}_i$ et $\bar{\mathbf{P}}_e$ et de λ , \mathbf{v}_A et \mathbf{E} . \mathbf{E} peut y être remplacé par la loi d'Ohm (II.3.18) si besoin.

On peut aussi exprimer la loi (II.3.23) en fonction des quantités mono-fluides en remplaçant \mathbf{v}_i et \mathbf{v}_e avec $\mathbf{v}_i = \frac{\rho}{n_i} \mathbf{v} + \frac{\lambda \mu}{n_i} \mathbf{j}$ et $\mathbf{v}_e = \frac{\rho}{n_e} \mathbf{v} - \frac{\lambda(1-\mu)}{n_e} \mathbf{j}$. On supposera aussi le fluide quasi-neutre, c'est-à-dire $n_i = n_e = \rho$ et on va travailler les termes séparément en fonction de leur dépendance.

Tout d'abord les deux premières lignes, purement cinétiques :

$$\begin{aligned}
 -4\varepsilon_{[1-2]} &= (1-\mu) (\nabla_\ell \cdot \langle \delta(n_i \mathbf{v}_i) \cdot \delta \mathbf{v}_i \delta \mathbf{v}_i \rangle + \langle \delta \mathbf{v}_i \cdot (n_i \mathbf{v}_i \nabla' \cdot \mathbf{v}'_i - n'_i \mathbf{v}'_i \nabla \cdot \mathbf{v}_i) \rangle) \\
 &\quad + \mu (\nabla_\ell \cdot \langle \delta(n_e \mathbf{v}_e) \cdot \delta \mathbf{v}_e \delta \mathbf{v}_e \rangle + \langle \delta \mathbf{v}_e \cdot (n_e \mathbf{v}_e \nabla' \cdot \mathbf{v}'_e - n'_e \mathbf{v}'_e \nabla \cdot \mathbf{v}_e) \rangle)
 \end{aligned} \tag{II.3.24}$$

$$\begin{aligned}
 &= \nabla_\ell \cdot \langle \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{v} \delta \mathbf{v} \rangle + \langle \delta \mathbf{v} \cdot (\rho \mathbf{v} \nabla' \cdot \mathbf{v}' - \rho' \mathbf{v}' \nabla \cdot \mathbf{v}) \rangle \\
 &\quad + \lambda^2 \mu (1-\mu) \nabla_\ell \cdot \left\langle \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \delta \left(\frac{\mathbf{j}}{\rho}\right) \delta \left(\frac{\mathbf{j}}{\rho}\right) + \delta \mathbf{j} \cdot \delta \mathbf{v} \delta \left(\frac{\mathbf{j}}{\rho}\right) + \delta \mathbf{j} \cdot \delta \left(\frac{\mathbf{j}}{\rho}\right) \delta \mathbf{v} \right\rangle \\
 &\quad + \lambda^2 \mu (1-\mu) \left\langle \delta \frac{\mathbf{j}}{\rho} \cdot (\mathbf{j} \nabla' \cdot \mathbf{v}' - \mathbf{j} \nabla \cdot \mathbf{v}) \right\rangle \\
 &\quad + \lambda^2 \mu (1-\mu) \left\langle \left(\mathbf{j} \cdot \delta \mathbf{v} + \rho \mathbf{v} \cdot \delta \frac{\mathbf{j}}{\rho}\right) \nabla' \cdot \frac{\mathbf{j}'}{\rho'} - \left(\mathbf{j}' \cdot \delta \mathbf{v} + \rho \mathbf{v} \cdot \delta \frac{\mathbf{j}}{\rho}\right) \nabla \cdot \frac{\mathbf{j}}{\rho} \right\rangle \\
 &\quad + \lambda^3 \mu (1-\mu) (2\mu - 1) \left(\nabla_\ell \cdot \left\langle \delta \mathbf{j} \cdot \delta \left(\frac{\mathbf{j}}{\rho}\right) \delta \left(\frac{\mathbf{j}}{\rho}\right) \right\rangle + \left\langle \delta \left(\frac{\mathbf{j}}{\rho}\right) \cdot \left(\mathbf{j} \nabla' \cdot \frac{\mathbf{j}'}{\rho'} - \mathbf{j}' \nabla \cdot \frac{\mathbf{j}}{\rho}\right) \right\rangle \right)
 \end{aligned} \tag{II.3.25}$$

Lorsque $\mu \rightarrow 0$ (MHD) ou $\mu \rightarrow 1$ (EMHD), seule la première ligne de (II.3.25) subsiste. On remarque aussi que les lignes suivantes sont en λ^2 et λ^3 , par conséquent ils tendront rapidement vers 0 pour des échelles L_0 grandes devant la longueur d'inertie du plasma.

Ensuite les deux lignes dépendant de l'énergie interne nous donne, en notant $u =$

$(1 - \mu) u_i + \mu u_e :$

$$\begin{aligned} -4\varepsilon_{[3-4]} &= 2(1 - \mu) (\nabla_\ell \cdot \langle \delta n_i \delta u_i \delta \mathbf{v}_i \rangle + \langle \delta u_i (n_i \nabla' \cdot \mathbf{v}'_i - n'_i \nabla \cdot \mathbf{v}_i) \rangle) \\ &\quad + 2\mu (\nabla_\ell \cdot \langle \delta n_e \delta u_e \delta \mathbf{v}_e \rangle + \langle \delta u_e (n_e \nabla' \cdot \mathbf{v}'_e - n'_e \nabla \cdot \mathbf{v}_e) \rangle) \quad (\text{II.3.26}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 2(\nabla_\ell \cdot \langle \delta \rho \delta u \delta \mathbf{v} \rangle + \langle \delta u (\rho \nabla' \cdot (\mathbf{v}') - \rho' \nabla \cdot (\mathbf{v})) \rangle) \\ &\quad + 2\lambda\mu(1 - \mu) \nabla_\ell \cdot \left\langle \delta \rho \delta (u_i - u_e) \delta \left(\frac{\mathbf{j}}{\rho} \right) \right\rangle \\ &\quad + 2\lambda\mu(1 - \mu) \left\langle \delta (u_i - u_e) \left(\rho \nabla' \cdot \left(\frac{\mathbf{j}'}{\rho'} \right) - \rho' \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{j}}{\rho} \right) \right) \right\rangle \quad (\text{II.3.27}) \end{aligned}$$

Ici aussi, lorsque $\mu \rightarrow 0$ (MHD) ou $\mu \rightarrow 1$ (EMHD), seule la première ligne de (II.3.27) subsiste.

Les trois lignes de (II.3.23) dépendant des tenseurs de pressions s'écrivent en notant $\overline{\mathbf{P}_i} = \overline{\mathbf{P}_i} + \overline{\mathbf{P}_e}$:

$$\begin{aligned} -4\varepsilon_{[5-7]} &= \nabla_\ell \cdot \left\langle \delta (n_i \mathbf{v}_i) \cdot \delta \overline{\mathbf{P}_i} \delta \left(\frac{1}{n_i} \right) \right\rangle + \left\langle \delta \overline{\mathbf{P}_i} : \left(n_i \mathbf{v}_i \nabla' \left(\frac{1}{n'_i} \right) - n'_i \mathbf{v}'_i \nabla \left(\frac{1}{n_i} \right) \right) \right\rangle \\ &\quad + \nabla_\ell \cdot \left\langle \delta (n_e \mathbf{v}_e) \cdot \delta \overline{\mathbf{P}_e} \delta \left(\frac{1}{n_e} \right) \right\rangle + \left\langle \delta \overline{\mathbf{P}_e} : \left(n_e \mathbf{v}_e \nabla' \left(\frac{1}{n'_e} \right) - n'_e \mathbf{v}'_e \nabla \left(\frac{1}{n_e} \right) \right) \right\rangle \\ &\quad + 2 \left\langle \delta \left(\frac{\overline{\mathbf{P}_i}}{n_i} \right) : (n'_i \nabla \mathbf{v}_i - n_i \nabla' \mathbf{v}'_i) + \delta \left(\frac{\overline{\mathbf{P}_e}}{n_e} \right) : (n'_e \nabla \mathbf{v}_e - n_e \nabla' \mathbf{v}'_e) \right\rangle \quad (\text{II.3.28}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \nabla_\ell \cdot \left\langle \delta (\rho \mathbf{v}) \cdot \delta \overline{\mathbf{P}} \delta \left(\frac{1}{\rho} \right) \right\rangle + \left\langle \delta \overline{\mathbf{P}} : \left(\rho \mathbf{v} \nabla' \left(\frac{1}{\rho'} \right) - \rho' \mathbf{v}' \nabla \left(\frac{1}{\rho} \right) \right) \right\rangle \\ &\quad + 2 \left\langle \delta \left(\frac{\overline{\mathbf{P}}}{\rho} \right) : (\rho' \nabla \mathbf{v} - \rho \nabla' \mathbf{v}') \right\rangle \\ &\quad + \lambda \nabla_\ell \cdot \left\langle \delta \mathbf{j} \cdot \delta (\mu \overline{\mathbf{P}_i} - (1 - \mu) \overline{\mathbf{P}_e}) \delta \left(\frac{1}{\rho} \right) \right\rangle \\ &\quad + \lambda \left\langle \delta (\mu \overline{\mathbf{P}_i} - (1 - \mu) \overline{\mathbf{P}_e}) : \left(\mathbf{j} \nabla' \left(\frac{1}{\rho'} \right) - \mathbf{j}' \nabla \left(\frac{1}{\rho} \right) \right) \right\rangle \\ &\quad + 2\lambda \left\langle \delta \left(\mu \frac{\overline{\mathbf{P}_i}}{\rho} - (1 - \mu) \frac{\overline{\mathbf{P}_e}}{\rho} \right) : \left(\rho' \nabla \left(\frac{\mathbf{j}}{\rho} \right) - \rho \nabla' \left(\frac{\mathbf{j}'}{\rho'} \right) \right) \right\rangle \quad (\text{II.3.29}) \end{aligned}$$

Dans les deux premières lignes de (II.3.29), on retrouve la formulation f3 (I.2.21) de la contribution du tenseur de pression de la loi générale MHD gyrotrope (II.1.20). Elles s'écrivent de la même manière, que les quantités soient sans dimension ou pas. Les lignes suivantes dépendent de la densité de courant \mathbf{j} et des tenseurs de pressions. Elles rappellent la contribution thermique de la loi d'Ohm (II.3.18) et ne s'annulent pas complètement si $\mu \rightarrow 0$ ou $\mu \rightarrow 1$.

Les quatre dernières lignes de (II.3.23) dépendant de la vitesse d'Alfvén et du champ

électrique. En y appliquant la même transformation qu'aux autres lignes, elles deviennent :

$$\begin{aligned}
 -4\varepsilon_{[8-11]} &= -\nabla_\ell \cdot \left\langle (\rho' + \rho) \left(\frac{\mathbf{E}' \times \mathbf{v}_A}{\sqrt{\rho'}} - \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{v}'_A}{\sqrt{\rho}} \right) \right\rangle + \frac{1}{2} \langle (\rho' - \rho) \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}'_A (\nabla \cdot \mathbf{v} - \nabla' \cdot \mathbf{v}') \rangle \\
 &\quad + \left\langle (\rho' - \rho) \left(\left(-\frac{\mathbf{E} \times \mathbf{v}'_A}{\sqrt{\rho}} + \frac{1}{2} \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}'_A \mathbf{v} \right) \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} + \left(\frac{\mathbf{E}' \times \mathbf{v}_A}{\sqrt{\rho'}} - \frac{1}{2} \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A \mathbf{v}' \right) \cdot \frac{\nabla' \rho'}{\rho'} \right) \right\rangle \\
 &\quad + \frac{1}{\lambda} \left\langle (n'_i + n_i) \left(\mathbf{v}'_i \cdot \mathbf{v}_i \times (\sqrt{\rho} \mathbf{v}_A) + \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}'_i \times (\sqrt{\rho'} \mathbf{v}'_A) \right) \right\rangle \\
 &\quad - \frac{1}{\lambda} \left\langle (n'_e + n_e) \left(\mathbf{v}'_e \cdot \mathbf{v}_e \times (\sqrt{\rho} \mathbf{v}_A) + \mathbf{v}_e \cdot \mathbf{v}'_e \times (\sqrt{\rho'} \mathbf{v}'_A) \right) \right\rangle \tag{II.3.30}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\nabla_\ell \cdot \left\langle (\rho' + \rho) \left(\frac{\mathbf{E}' \times \mathbf{v}_A}{\sqrt{\rho'}} - \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{v}'_A}{\sqrt{\rho}} \right) \right\rangle + \frac{1}{2} \langle (\rho' - \rho) \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}'_A (\nabla \cdot \mathbf{v} - \nabla' \cdot \mathbf{v}') \rangle \\
 &\quad + \frac{1}{2} \left\langle (\rho' - \rho) \left(\left(-\frac{\mathbf{E} \times \mathbf{v}'_A}{\sqrt{\rho}} + \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}'_A \mathbf{v} \right) \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} + \left(\frac{\mathbf{E}' \times \mathbf{v}_A}{\sqrt{\rho'}} - \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A \mathbf{v}' \right) \cdot \frac{\nabla' \rho'}{\rho'} \right) \right\rangle \\
 &\quad + \left\langle \left(\frac{1}{\rho'} + \frac{1}{\rho} \right) \left(\mathbf{j}' \cdot \rho \mathbf{v} \times (\sqrt{\rho} \mathbf{v}_A) + \mathbf{j} \cdot \rho' \mathbf{v}' \times (\sqrt{\rho'} \mathbf{v}'_A) \right) \right\rangle \\
 &\quad + \lambda (2\mu - 1) \left\langle \left(\frac{1}{\rho'} + \frac{1}{\rho} \right) \left(\mathbf{j}' \cdot \mathbf{j} \times (\sqrt{\rho} \mathbf{v}_A) + \mathbf{j} \cdot \mathbf{j}' \times (\sqrt{\rho'} \mathbf{v}'_A) \right) \right\rangle \\
 &\quad + \left\langle \left(\frac{1}{\rho'} + \frac{1}{\rho} \right) \left(\rho \mathbf{v}' \cdot \mathbf{j} \times (\sqrt{\rho} \mathbf{v}_A) + \rho' \mathbf{v} \cdot \mathbf{j}' \times (\sqrt{\rho'} \mathbf{v}'_A) \right) \right\rangle \tag{II.3.31}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\nabla_\ell \cdot \left\langle (\rho' + \rho) \left(\frac{\mathbf{E}' \times \mathbf{v}_A}{\sqrt{\rho'}} - \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{v}'_A}{\sqrt{\rho}} \right) \right\rangle + \frac{1}{2} \langle (\rho' - \rho) \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}'_A (\nabla \cdot \mathbf{v} - \nabla' \cdot \mathbf{v}') \rangle \\
 &\quad + \frac{1}{2} \left\langle (\rho' - \rho) \left(\left(-\frac{\mathbf{E} \times \mathbf{v}'_A}{\sqrt{\rho}} + \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}'_A \mathbf{v} \right) \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} + \left(\frac{\mathbf{E}' \times \mathbf{v}_A}{\sqrt{\rho'}} - \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A \mathbf{v}' \right) \cdot \frac{\nabla' \rho'}{\rho'} \right) \right\rangle \\
 &\quad + \left\langle \left(\frac{1}{\rho'} + \frac{1}{\rho} \right) \left(\mathbf{j}' \cdot \rho \mathbf{v} \times (\sqrt{\rho} \mathbf{v}_A) + \mathbf{j} \cdot \rho' \mathbf{v}' \times (\sqrt{\rho'} \mathbf{v}'_A) \right) \right\rangle \\
 &\quad + \lambda (2\mu - 1) \left\langle \left(\frac{1}{\rho'} + \frac{1}{\rho} \right) \left(\mathbf{j}' \cdot \mathbf{j} \times (\sqrt{\rho} \mathbf{v}_A) + \mathbf{j} \cdot \mathbf{j}' \times (\sqrt{\rho'} \mathbf{v}'_A) \right) \right\rangle \\
 &\quad + \nabla_\ell \cdot \langle (\rho + \rho') (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'_A \mathbf{v}'_A - \frac{1}{2} \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}'_A \mathbf{v} - \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A + \frac{1}{2} \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}_A \mathbf{v}') \rangle \\
 &\quad + \langle (\rho' \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A - \frac{1}{2} \rho' \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}_A \mathbf{v}') \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} + (\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'_A \mathbf{v}'_A - \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}'_A \mathbf{v}) \cdot \frac{\nabla' \rho'}{\rho'} \rangle \tag{II.3.32}
 \end{aligned}$$

La dernière égalité est obtenue en remplaçant \mathbf{j} par $\nabla \times (\sqrt{\rho} \mathbf{v}_A)$ dans la dernière ligne de (II.3.32). Les termes résultants rappellent les fonctions de structures $\langle \delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \delta \mathbf{v}_A \delta \mathbf{v} \rangle$, $\langle \delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \delta \mathbf{v} \delta \mathbf{v}_A \rangle$, $\langle \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{v}_A \delta \mathbf{v}_A \rangle$ et $\langle \delta(\rho \mathbf{v}) \delta(\frac{\rho \mathbf{v}_A^2}{2}) \delta(1/\rho) \rangle$ présentent dans les lois MHD. Pour les faire apparaître, il nous manque des termes qui sont cachés dans la première ligne. On doit y remplacer \mathbf{E} grâce à la loi d'Ohm (II.3.18). On peut aussi utiliser la loi d'Ohm pour remplacer \mathbf{E} dans la deuxième ligne et $\lambda(2\mu - 1) \mathbf{j} \times \sqrt{\rho} \mathbf{v}_A + \rho \mathbf{v} \times \sqrt{\rho} \mathbf{v}_A$ dans les troisième et quatrième lignes.

La loi d'Ohm (II.3.18) devient avec l'hypothèse quasi-neutre et en fonction de la vitesse

d'Alfvén :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} = & -\mathbf{v} \times \sqrt{\rho} \mathbf{v}_A - \frac{\lambda(2\mu - 1)}{\rho} \mathbf{j} \times \sqrt{\rho} \mathbf{v}_A + \lambda \frac{\mu \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}_i} - (1 - \mu) \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}_e}}{\rho} \\ & + \frac{\lambda^2 \mu (1 - \mu)}{\rho} \left[\partial_t \mathbf{j} + \nabla \cdot (\mathbf{v} \mathbf{j} + \mathbf{j} \mathbf{v} + \frac{\lambda(2\mu - 1)}{\rho} \mathbf{j} \mathbf{j}) \right] \end{aligned} \quad (\text{II.3.33})$$

Et en y supposant l'hypothèse quasi-relativiste, on obtient :

$$\begin{aligned} \rho \mathbf{v} \times \sqrt{\rho} \mathbf{v}_A + \lambda(2\mu - 1) \mathbf{j} \times \sqrt{\rho} \mathbf{v}_A = & \frac{\lambda^2 \mu (1 - \mu)}{\rho} [\partial_t \mathbf{j} + \nabla \cdot (\mathbf{v} \mathbf{j} + \mathbf{j} \mathbf{v} + \lambda(2\mu - 1) \mathbf{j} \mathbf{j})] \\ & + \lambda(\mu \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}_i} - (1 - \mu) \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}_e}) \end{aligned} \quad (\text{II.3.34})$$

On va maintenant appliquer (II.3.33) et (II.3.34) dans (II.3.32) contribution par contribution :

— Pour la contribution idéale :

$$\begin{aligned} -4 \varepsilon_{[8-11]}^{ideal} = & \nabla_{\ell} \cdot < (\rho + \rho') (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'_A \mathbf{v}'_A - \frac{1}{2} \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}'_A \mathbf{v} - \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A + \frac{1}{2} \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}_A \mathbf{v}') > \\ & + \nabla_{\ell} \cdot < (\rho' + \rho) ((\mathbf{v}' \times \mathbf{v}'_A) \times \mathbf{v}_A - (\mathbf{v} \times \mathbf{v}_A) \times \mathbf{v}'_A) > \\ & + \frac{1}{2} < (\rho' - \rho) \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}'_A (\nabla \cdot \mathbf{v} - \nabla' \cdot \mathbf{v}') > \\ & + \frac{1}{2} < (\rho' - \rho) ((\mathbf{v} \times \mathbf{v}_A) \times \mathbf{v}'_A + \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}'_A \mathbf{v}) \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} > \\ & - \frac{1}{2} < (\rho' - \rho) ((\mathbf{v}' \times \mathbf{v}'_A) \times \mathbf{v}_A + \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A \mathbf{v}') \cdot \frac{\nabla' \rho'}{\rho'} > \\ & + < (\rho' \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A - \frac{1}{2} \rho' \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}_A \mathbf{v}') \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} + (\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'_A \mathbf{v}'_A - \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}'_A \mathbf{v}) \cdot \frac{\nabla' \rho'}{\rho'} > \\ = & \nabla_{\ell} \cdot < \delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \delta \mathbf{v}'_A \delta \mathbf{v} + \delta(\frac{\rho' \mathbf{v}'_A}{2}) \delta(\rho \mathbf{v}) \delta(\frac{1}{\rho}) - \delta \mathbf{v}_A \cdot \delta(\rho \mathbf{v}) \delta \mathbf{v}_A - \delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \delta \mathbf{v} \delta \mathbf{v}_A > \\ & + \frac{1}{2} < (\delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \mathbf{v}'_A - \delta \mathbf{v}_A \cdot \rho' \mathbf{v}'_A) \nabla \cdot \mathbf{v} - (\delta(\rho' \mathbf{v}'_A) \cdot \mathbf{v}_A - \rho \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{v}_A) \nabla' \cdot \mathbf{v}' > \\ & + < \delta(\frac{\rho \mathbf{v}_A}{2}) (\rho \mathbf{v} \cdot \nabla' \frac{1}{\rho'} - \rho' \mathbf{v}' \cdot \nabla \frac{1}{\rho}) > \\ & - < (2\rho \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v}_A + \rho \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{v}) - \mathbf{v}_A \cdot \delta(\rho \mathbf{v}) \nabla' \cdot \mathbf{v}'_A > \\ & + < (2\rho' \mathbf{v}' \cdot \delta \mathbf{v}_A + \rho' \mathbf{v}'_A \cdot \delta \mathbf{v} - \mathbf{v}'_A \cdot \delta(\rho \mathbf{v})) \nabla \cdot \mathbf{v}_A > \end{aligned} \quad (\text{II.3.35})$$

On retrouve bien la contribution électromagnétique dérivée dans le cas idéal (voir équations (??) et (I.2.21) pour les termes de pression magnétique)². Elle ne dépend ni de μ ni de λ donc elle restera ne différera pas que l'on soit dans le régime MHD ou EMHD.

2. On a fait en sorte de choisir les quantités servant à normaliser le système d'équation telles que les résultats présentés dans ce mémoire se recoupent.

— Pour la contribution Hall :

$$\begin{aligned}
-4\varepsilon_{[8-11]}^{Hall} &= \lambda(2\mu - 1) \nabla_\ell \cdot \left\langle (\rho' + \rho) \left(\left(\frac{1}{\rho'} \mathbf{j}' \times \mathbf{v}'_A \right) \times \mathbf{v}_A - \left(\frac{1}{\rho} \mathbf{j} \times \mathbf{v}_A \right) \times \mathbf{v}'_A \right) \right\rangle \\
&\quad - \frac{\lambda(2\mu - 1)}{2} \left\langle (\rho' - \rho) \left(\left(\frac{1}{\rho} \mathbf{j} \times \mathbf{v}_A \right) \times \mathbf{v}'_A \cdot \frac{\nabla\rho}{\rho} - \left(\frac{1}{\rho'} \mathbf{j}' \times \mathbf{v}'_A \right) \times \mathbf{v}_A \cdot \frac{\nabla'\rho'}{\rho'} \right) \right\rangle \\
&= -\lambda(2\mu - 1) \nabla_\ell \cdot \left\langle (\mathbf{j}' \times \mathbf{v}'_A + \mathbf{j} \times \mathbf{v}_A) \times \delta\mathbf{v}_A - \delta \left(\frac{1}{\rho} \mathbf{j} \times \mathbf{v}_A \right) \times (\rho' \mathbf{v}'_A + \rho \mathbf{v}_A) \right\rangle \\
&\quad + \lambda(2\mu - 1) \left\langle \left(\frac{\rho'}{\rho} - 1 \right) \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{j} \nabla \cdot \mathbf{v}_A + \left(\frac{\rho}{\rho'} - 1 \right) \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{j}' \nabla' \cdot \mathbf{v}'_A \right\rangle \\
&\quad - \frac{\lambda(2\mu - 1)}{2} \left\langle (\rho' - \rho) \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A \nabla \cdot \frac{\mathbf{j}}{\rho} - (\rho' - \rho) \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}'_A \nabla' \cdot \frac{\mathbf{j}'}{\rho'} \right\rangle
\end{aligned} \tag{II.3.36}$$

Dans le cas $\mu \rightarrow 0$, on retrouve le résultat de la section 3.1 (II.3.3).

— Pour la contribution des pressions :

$$\begin{aligned}
-4\varepsilon_{[8-11]}^{Pem} &= -\lambda\mu \nabla_\ell \cdot \left\langle (\rho' + \rho) \left(\frac{1}{\sqrt{\rho'}} \left(\frac{1}{\rho'} \nabla' \cdot \overline{\mathbf{P}'_i} \right) \times \mathbf{v}_A - \frac{1}{\sqrt{\rho}} \left(\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}_i} \right) \times \mathbf{v}'_A \right) \right\rangle \\
&\quad + \lambda\mu \left\langle (\rho' - \rho) \left(\frac{1}{\sqrt{\rho}} \left(\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}_i} \right) \times \mathbf{v}'_A \cdot \frac{\nabla\rho}{\rho} - \frac{1}{\sqrt{\rho'}} \left(\frac{1}{\rho'} \nabla' \cdot \overline{\mathbf{P}'_i} \right) \times \mathbf{v}_A \cdot \frac{\nabla'\rho'}{\rho'} \right) \right\rangle \\
&\quad + \lambda\mu \left\langle \left(\frac{1}{\rho'} + \frac{1}{\rho} \right) (\mathbf{j} \cdot \nabla' \cdot \overline{\mathbf{P}'_i} + \mathbf{j}' \cdot \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}_i}) \right\rangle \\
&\quad + \lambda(1 - \mu) \nabla_\ell \cdot \left\langle (\rho' + \rho) \left(\frac{1}{\sqrt{\rho'}} \left(\frac{1}{\rho'} \nabla' \cdot \overline{\mathbf{P}'_e} \right) \times \mathbf{v}_A - \frac{1}{\sqrt{\rho}} \left(\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}_e} \right) \times \mathbf{v}'_A \right) \right\rangle \\
&\quad - \lambda(1 - \mu) \left\langle (\rho' - \rho) \left(\frac{1}{\sqrt{\rho}} \left(\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}_e} \right) \times \mathbf{v}'_A \cdot \frac{\nabla\rho}{\rho} - \frac{1}{\sqrt{\rho'}} \left(\frac{1}{\rho'} \nabla' \cdot \overline{\mathbf{P}'_e} \right) \times \mathbf{v}_A \cdot \frac{\nabla'\rho'}{\rho'} \right) \right\rangle \\
&\quad - \lambda(1 - \mu) \left\langle \left(\frac{1}{\rho'} + \frac{1}{\rho} \right) (\mathbf{j} \cdot \nabla' \cdot \overline{\mathbf{P}'_e} + \mathbf{j}' \cdot \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}_e}) \right\rangle
\end{aligned} \tag{II.3.37}$$

Dans la section 3.3, nous verrons (dans le cadre $\mu \rightarrow 0$) une autre formulation de cette contribution prenant en compte les termes présents dans (II.3.29).

— Pour la contribution inertielle :

$$\begin{aligned}
 & - 4 \varepsilon_{[8-11]}^{inert} \\
 &= -\lambda^2 \mu (1-\mu) \nabla_\ell \cdot \left\langle \frac{\rho' + \rho}{\rho' \sqrt{\rho'}} \left[\partial_t \mathbf{j}' + \nabla' \cdot \left(\mathbf{v}' \mathbf{j}' + \mathbf{j}' \mathbf{v}' + \frac{(2\mu-1)}{\rho'} \lambda \mathbf{j}' \mathbf{j}' \right) \right] \times \mathbf{v}_A \right\rangle \\
 &+ \lambda^2 \mu (1-\mu) \nabla_\ell \cdot \left\langle \frac{\rho' + \rho}{\rho \sqrt{\rho}} \left[\partial_t \mathbf{j} + \nabla \cdot \left(\mathbf{v} \mathbf{j} + \mathbf{j} \mathbf{v} + \frac{(2\mu-1)}{\rho} \lambda \mathbf{j} \mathbf{j} \right) \right] \times \mathbf{v}'_A \right\rangle \\
 &+ \lambda^2 \mu (1-\mu) \left\langle \frac{\rho' + \rho}{\rho \sqrt{\rho}} \left[\partial_t \mathbf{j} + \nabla \cdot \left(\mathbf{v} \mathbf{j} + \mathbf{j} \mathbf{v} + \frac{(2\mu-1)}{\rho} \lambda \mathbf{j} \mathbf{j} \right) \right] \times \mathbf{v}'_A \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} \right\rangle \\
 &- \lambda^2 \mu (1-\mu) \left\langle \frac{\rho' + \rho}{\rho' \sqrt{\rho'}} \left[\partial_t \mathbf{j}' + \nabla' \cdot \left(\mathbf{v}' \mathbf{j}' + \mathbf{j}' \mathbf{v}' + \frac{(2\mu-1)}{\rho'} \lambda \mathbf{j}' \mathbf{j}' \right) \right] \times \mathbf{v}_A \cdot \frac{\nabla' \rho'}{\rho'} \right\rangle \\
 &+ \lambda^2 \mu (1-\mu) \left\langle \left(\frac{1}{\rho'} + \frac{1}{\rho} \right) \mathbf{j}' \cdot \left[\partial_t \mathbf{j} + \nabla \cdot \left(\mathbf{v} \mathbf{j} + \mathbf{j} \mathbf{v} + \frac{(2\mu-1)}{\rho} \lambda \mathbf{j} \mathbf{j} \right) \right] \right\rangle \\
 &+ \lambda^2 \mu (1-\mu) \left\langle \left(\frac{1}{\rho'} + \frac{1}{\rho} \right) \mathbf{j} \cdot \left[\partial_t \mathbf{j}' + \nabla' \cdot \left(\mathbf{v}' \mathbf{j}' + \mathbf{j}' \mathbf{v}' + \frac{(2\mu-1)}{\rho'} \lambda \mathbf{j}' \mathbf{j}' \right) \right] \right\rangle
 \end{aligned} \tag{II.3.38}$$

Cette contribution est nulle si $\mu \rightarrow 0$ (cas MHD) mais aussi si $\mu \rightarrow 1$ (cas EMHD). Ces termes, en λ^2 sont aussi nuls aux grandes échelles. Cette expression est gardée brute car on ne l'utilisera pas par la suite, mais, si besoin est, on pourrait y appliquer la stationnarité statistique et l'équation de continuité pour supprimer la dépendance en $\partial_t \mathbf{j}$.

En dérivant une loi exacte pour un modèle bi-fluide, puis en travaillant sur les différentes contributions avec la loi d'Ohm généralisée et l'hypothèse de quasi-neutralité, on vient d'obtenir différents niveaux de correction qui viennent étendre la description de la cascade turbulente d'énergie totale à de multiples systèmes par exemple les deux régimes asymptotiques (MHD et EMHD). **A noter que la loi exacte obtenue est valable pour des fermetures quelconque appliquée aux ions et aux électrons tant qu'elles sont en accord avec les équations d'énergie interne (II.3.14) et (II.3.15).** En fonction de l'usage, il sera toujours possible de retravailler les termes pour obtenir des formulations potentiellement plus pratiques à analyser. Les termes dépendant de la pression électroniques présents dans (II.3.29) et (II.3.37) seront par exemple reformulés dans le cadre $\mu \rightarrow 0$, dans la section 3.3.

3.3 Le modèle analysé numériquement dans la partie ??

Originellement, le modèle CGL est pensé en supposant des électrons dit «froids» c'est-à-dire en considérant un mono-fluide d'ions HUNANA et al. 2019. Les quantités électroniques n'interviennent donc pas. Dans le modèle analysé numériquement dans la partie ??, cette condition est relaxée. Ce modèle, tel que $\mu \ll 1$, prend en compte la correction Hall donnée dans la section 3.1 et retrouvée dans la section 3.2 ainsi que le tenseur de pression électronique. Il faudra donc prendre en compte les termes dépendant de la pression électroniques présents dans (II.3.29) et (II.3.37). Nous allons ici les analyser plus en détail.

Le modèle simulé est constitué des équations suivantes :

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (\text{II.3.39})$$

$$\partial_t (\rho \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v} - \rho \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A) + \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}_*} = 0 \quad (\text{II.3.40})$$

$$\partial_t \overline{\mathbf{P}_i} + \nabla \cdot (\mathbf{v} \overline{\mathbf{P}_i}) + (\overline{\mathbf{P}_i} \cdot \nabla \mathbf{v})^S = 0 \quad (\text{II.3.41})$$

$$\partial_t \overline{\mathbf{P}_e} + \nabla \cdot (\mathbf{v} \overline{\mathbf{P}_e}) + (\overline{\mathbf{P}_e} \cdot \nabla \mathbf{v})^S = \lambda \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{j}}{\rho} \overline{\mathbf{P}_e} \right) + \lambda \left(\overline{\mathbf{P}_e} \cdot \nabla \left(\frac{\mathbf{j}}{\rho} \right) \right)^S \quad (\text{II.3.42})$$

$$\partial_t \mathbf{v}_A - \nabla \cdot (\mathbf{v}_A \mathbf{v} - \mathbf{v} \mathbf{v}_A) + \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{v}_A - \frac{\mathbf{v}_A}{2} \nabla \cdot \mathbf{v} = -\frac{\lambda}{\sqrt{\rho}} \nabla \times \left(\frac{\mathbf{j}}{\sqrt{\rho}} \times \mathbf{v}_A \right) + \frac{\lambda}{\sqrt{\mu_0 \rho}} \nabla \times \left(\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}_e} \right) \quad (\text{II.3.42})$$

avec $\overline{\mathbf{P}_*} = \overline{\mathbf{P}_i} + \overline{\mathbf{P}_e} + p_m \overline{\mathbf{I}}$ et $p_m = \frac{1}{2} \rho |\mathbf{v}_A|^2$. Dans un premier lot de simulation, la pression électronique sera considérée comme isotrope isotherme et dans le deuxième comme gyrotope. A noter que dans le cas où la pression électronique est isotrope et que le premier principe thermodynamique (I.1.30) est valable, on peut définir une enthalpie électronique telle que $h = u_e + \frac{m_i p_e}{m_e \rho}$. Si l'hypothèse adiabatique/isentrope s'applique dans le système, alors le terme thermique de l'équation d'induction (II.3.42) s'annule puisque $\nabla \times \left(\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}_e} \right) = \nabla \times \left(\frac{1}{\rho} \nabla p_e \right) = \frac{m_i}{m_e} \nabla \times \nabla h = 0$. Par principe de précaution, nous le prendrons tout de même en compte dans notre analyse.

En terme d'énergétique, l'équation de densité d'énergie cinétique (I.1.5) n'est modifiée que par la prise en compte de la pression électronique dans la pression totale (sa forme ne changera pas). Celle de densité d'énergie magnétique devient :

$$\begin{aligned} \partial_t E_m &+ \nabla \cdot \left(E_m \mathbf{v} + \lambda \left((\mathbf{j} \times \mathbf{v}_A) \times \mathbf{v}_A + \frac{\mathbf{v}_A}{\sqrt{\mu_0 \rho}} \times \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}_e} - \frac{\mathbf{j}}{\rho} \cdot \overline{\mathbf{P}_e} \right) \right) \\ &= \rho \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A : \nabla \mathbf{v} - p_m \nabla \cdot \mathbf{v} - \lambda \overline{\mathbf{P}_e} : \nabla \left(\frac{\mathbf{j}}{\rho} \right) \end{aligned} \quad (\text{II.3.43})$$

sachant que :

$$\sqrt{\frac{\rho}{\mu_0}} \mathbf{v}_A \cdot \nabla \times \left(\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}_e} \right) = -\nabla \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{\mu_0 \rho}} \mathbf{v}_A \times \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}_e} \right) + \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{j}}{\rho} \cdot \overline{\mathbf{P}_e} \right) - \overline{\mathbf{P}_e} : \nabla \left(\frac{\mathbf{j}}{\rho} \right) \quad (\text{II.3.44})$$

Et celle d'énergie interne, définie telle que $\rho u = \rho_i u_i + \rho_e u_e = \frac{1}{2} \overline{\mathbf{P}_i} : \overline{\mathbf{I}} + \frac{1}{2} \overline{\mathbf{P}_e} : \overline{\mathbf{I}}$, :

$$\partial_t (\rho u) + \nabla \cdot (\rho u \mathbf{v}) + (\overline{\mathbf{P}_i} + \overline{\mathbf{P}_e}) : \nabla \mathbf{v} = \lambda \nabla \cdot \left(\frac{m_e}{m_i} u_e \mathbf{j} \right) + \lambda \overline{\mathbf{P}_e} : \nabla \left(\frac{\mathbf{j}}{\rho} \right) \quad (\text{II.3.45})$$

Puisque $\mu \ll 1$, a priori le terme $\lambda \nabla \cdot \left(\frac{m_e}{m_i} u_e \mathbf{j} \right)$ pourra être négligé. Similairement, $\rho \simeq \rho_i$ donc on pourrait négliger u_e dans $u = u_i + \frac{m_e}{m_i} u_e$. Mais en pratique, il s'avèrera que ce ne sera pas tout à fait le cas. On va donc les prendre en compte. Le dernier terme de (II.3.45) étant relié à $\sqrt{\rho} \mathbf{v}_A \cdot \nabla \times \left(\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}_e} \right)$ et à des termes flux via (II.3.44), sa contribution en tant que source dans le bilan énergétique s'annulera dans le cas particulier où l'on peut faire apparaître l'enthalpie h . Dans le bilan énergétique total, ce dernier terme vient compenser le terme $-\lambda \overline{\mathbf{P}_e} : \nabla \left(\frac{\mathbf{j}}{\rho} \right)$ émergeant dans (II.3.43) à cause de la prise en compte de la pression électronique dans l'équation d'induction (II.3.42).

Les termes contribuant au taux de cascade qui n'ont pas été pris en compte dans (II.1.20) ni (II.3.3) seront donc $\frac{\lambda}{\sqrt{\mu_0\rho}}\nabla\times\left(\frac{1}{\rho}\nabla\cdot\overline{\mathbf{P}_e}\right)$ dans (II.3.42) et $\lambda\nabla\cdot\left(\frac{m_e}{m_i}u_e\mathbf{j}\right)+\lambda\overline{\mathbf{P}_e}:\nabla\left(\frac{\mathbf{j}}{\rho}\right)$ dans (II.3.45). La correction résultante à la loi exacte s'écrit après quelques manipulations :

$$\begin{aligned}
 & -4\varepsilon_{pe} \\
 &= \frac{\lambda}{\sqrt{\mu_0}} < (\rho'+\rho)(\mathbf{v}_A\cdot(\frac{1}{\sqrt{\rho'}}\nabla'\times(\frac{1}{\rho'}\nabla'\cdot\overline{\mathbf{P}'_e})) + \mathbf{v}'_A\cdot(\frac{1}{\sqrt{\rho}}\nabla\times(\frac{1}{\rho}\nabla\cdot\overline{\mathbf{P}_e}))) > \\
 &\quad + 2\lambda < \frac{\rho'}{\rho}(\nabla\cdot(\mu u_e\mathbf{j}) + \overline{\mathbf{P}_e}:\nabla(\frac{\mathbf{j}}{\rho})) + \frac{\rho}{\rho'}(\nabla'\cdot(\mu u'_e\mathbf{j}') + \overline{\mathbf{P}'_e}:\nabla'(\frac{\mathbf{j}'}{\rho'})) > \\
 &= -2\lambda(\nabla_\ell\cdot < \delta\rho\delta(\frac{\mathbf{j}}{\rho}\cdot\overline{\mathbf{P}_e})\delta(\frac{1}{\rho}) > - < (\rho'\nabla(\frac{1}{\rho}) - \rho\nabla'(\frac{1}{\rho'}))\cdot\delta(\frac{\mathbf{j}}{\rho}\cdot\overline{\mathbf{P}_e}) >) \\
 &\quad + 2\frac{\lambda}{\sqrt{\mu_0}}(\nabla_\ell\cdot < \delta\rho\delta(\frac{\mathbf{v}_A}{\sqrt{\rho}}\times\nabla\cdot\overline{\mathbf{P}_e})\delta(\frac{1}{\rho}) > - < (\rho'\nabla(\frac{1}{\rho}) - \rho\nabla'(\frac{1}{\rho'}))\cdot\delta(\frac{\mathbf{v}_A}{\sqrt{\rho}}\times\nabla\cdot\overline{\mathbf{P}_e}) >) \\
 &\quad + \frac{\lambda}{\sqrt{\mu_0}} < (\mathbf{v}_A\delta\rho - 2\rho\delta\mathbf{v}_A)\cdot(\frac{1}{\sqrt{\rho'}}\nabla'\times(\frac{1}{\rho'}\nabla'\cdot\overline{\mathbf{P}'_e})) - (\mathbf{v}'_A\delta\rho - 2\rho'\delta\mathbf{v}_A)\cdot(\frac{1}{\sqrt{\rho}}\nabla\times(\frac{1}{\rho}\nabla\cdot\overline{\mathbf{P}_e})) > \\
 &\quad - 2\lambda\mu(\nabla_\ell\cdot < \delta\rho\delta u_e\delta(\frac{\mathbf{j}}{\rho}) > - < (\rho'\nabla\cdot(\frac{\mathbf{j}}{\rho}) - \rho\nabla'\cdot(\frac{\mathbf{j}'}{\rho'}))\delta u_e >)
 \end{aligned} \tag{II.3.46}$$

Les deux premières lignes de l'équation (??) correspondent aux formes brutes de la correction. L'égalité suivante, dépendant de termes flux et sources, est obtenue en injectant (II.3.44) et en identifiant les fonctions de structures $< \delta\rho\delta(\frac{\mathbf{v}_A}{\sqrt{\rho}}\times\nabla\cdot\overline{\mathbf{P}_e})\delta(\frac{1}{\rho}) >$, $< \delta\rho\delta(\frac{\mathbf{j}}{\rho}\cdot\overline{\mathbf{P}_e})\delta(\frac{1}{\rho}) >$ et $< \delta\rho\delta u_e\delta(\frac{\mathbf{j}}{\rho}) >$. Dans le cas où l'on peut faire apparaître d'enthalpie h , l'avant-dernière ligne de (II.3.46) sera nulle. La contribution du terme $\lambda\nabla\cdot\left(\frac{m_e}{m_i}u_e\mathbf{j}\right)$ correspond à la dernière ligne. On s'attend à ce que cette correction, dépendant de λ , prenne de l'importance près des échelles ioniques similairement à la correction Hall.

Si l'on compare avec les résultats de la section 3.2, on retrouve partiellement

$$\begin{aligned}
 & 2\lambda\mu(1-\mu)\nabla_\ell\cdot\left\langle\delta\rho\delta(u_i-u_e)\delta\left(\frac{\mathbf{j}}{\rho}\right)\right\rangle \\
 &+ 2\lambda\mu(1-\mu)\left\langle\delta(u_i-u_e)\left(\rho\nabla'\cdot\left(\frac{\mathbf{j}'}{\rho'}\right) - \rho'\nabla\cdot\left(\frac{\mathbf{j}}{\rho}\right)\right)\right\rangle
 \end{aligned}$$

présent dans la contribution d'énergie interne (II.3.27). Seuls les termes en μ et dépendant de u_e sont conservés, ceux dépendant de μ^2 ou de u_i sont négligés. Pour u_i , c'est une conséquence de la négligence de la vitesse électronique dans la vitesse fluide \mathbf{v} . Pour μ^2 , cela provient de $m_e \ll m_i$, μ^2 est alors négligeable devant μ . Les termes dépendants de $\overline{\mathbf{P}_e}$ proviennent quant à eux d'un mélange de (II.3.37) et des trois dernières lignes de (II.3.29). L'équivalence, technique à obtenir, ne sera pas présentée ici. On notera tout de même la présence de la constante μ_0 qui provient du caractère dimensionné des équations utilisées dans cette section.

Dans la limite incompressible, la majorité des termes de (??) s'annulent et il ne reste que la dernière ligne qui s'écrit :

$$-4\varepsilon_{hallpe} \quad \overline{\rho=\rho_0} \quad -2\frac{\lambda}{\sqrt{\mu_0}} < \delta\mathbf{v}_A\cdot\delta(\nabla\times\nabla\cdot\overline{\mathbf{P}_e}) > \tag{II.3.47}$$

Elle s'annule si $\overline{\mathbf{P}_e}$ est isotrope.

Linéairement, la prise en compte de la pression électronique va venir modifier les critères d'instabilités comme l'ont montré par exemple **pantellini_electron_1995**; **hellinger_comment_2007** pour le critère miroir cinétique. La correction sera différente si elle est isotrope ou gyrotrope. Dans le cas isotrope avec $p_e \propto \rho$, le critère firehose

ne sera pas modifié mais le critère miroir (voir synthèse 1.4) deviendra :

$$\frac{3}{2}\beta_{\parallel 0}(1 + \beta_{\parallel 0}a_{p0}(1 - \frac{1}{6}a_{p0})) + \frac{\beta_{e0}}{2}(\frac{3}{2}\beta_{\parallel 0} + 1) < 0 \quad (\text{II.3.48})$$

Les calculs, non détaillés ici, sont similaires à ceux effectués dans le chapitre 1. Dans le cas $p_e \propto \rho$, la correction à la loi d'Ohm ne contribue pas. Le cas gyrotron nous intéresse moins, dans les simulations dans lesquelles les électrons seront gyrotroniques, le modèle sera complété d'une fermeture dite Landau-fluide choisie telle que les critères cinétiques sont retrouvé, par conséquent, on considérera le critère dérivé par **pantellini_electron_1995**.

3.4 Synthèse de l'extension de la théorie des lois exactes à d'autres régimes

Correction Hall

- Théorie linéaire : apparitions des modes whistlers et cyclotron ionique, critère miroir inchangé mais décallage du critère firehose suivant le vecteur d'onde.
 - Correction turbulente compressible : (II.3.3)
 - Correction incompressible à la loi exacte PP98 : (II.3.4)
- ⇒ Contribution turbulente indépendante des tenseurs de pressions

Dérivations des contributions provenant de la loi d'Ohm généralisée à partir du modèle bi-fluide

- Modèle bi-fluide **sans dimension** et ouvert utilisé pour obtenir la loi exacte généralisée : équations (II.3.10), (II.3.11), (II.3.12), (II.3.13), (II.3.14), (II.3.15), (II.3.16), (II.3.17)
 - Loi exacte K41 généralisée écrite avec les quantités bi-fluide : (II.3.23)
 - Ecriture de la loi exacte K41 bi-fluide avec les quantités mono-fluide et l'hypothèse quasi-neutre :
 - Contribution cinétique : (II.3.25)
 - Contribution d'énergie interne : (II.3.27)
 - Contribution des tenseur de pression : (II.3.29)
 - Contribution électromagnétique : (II.3.32)
 - Décomposition de (II.3.32) suivant les différentes contributions présentes dans la loi d'Ohm généralisée quasi-neutre (II.3.33) :
 - Contribution idéale : (II.3.35)
 - Contribution Hall : (II.3.36) équivalente à (II.3.3)
 - Contribution thermique : (II.3.37)
 - Contribution inertuelle : (II.3.38)
- ⇒ Ouvre le champ d'études potentielles au régime EMHD par exemple et à l'étude plus rigoureuse de l'impact sur la cascade turbulente des différentes approximations appliquées à la loi d'Ohm.

Modèle utilisé dans la partie ??

- Modèle ouvert utilisé pour obtenir la correction turbulente : équations (II.3.39), (II.3.40), (II.3.42), (II.3.45).
- Théorie linéaire : la pression électronique va venir impacter le critère d'instabilité miroir.
- Correction turbulente compressible : (II.3.46)
- Correction incompressible à la loi exacte PP98 : (II.3.47)

Ces résultats n'ont pas encore été publiés.

CONCLUSION

Dans cette partie, nous avons dérivé un cadre d'étude complet et rigoureux des écoulements turbulents (zone inertielle supposée isentrope) allant du régime mono-fluide au régime bi-fluide, et dépendant de pressions tensorielles.

Dans le chapitre 1 (synthèse 1.4), a été présenté une extension de la théorie de Kolmogorov à un écoulement magnétisé idéal dépendant d'une pression tensorielle. Un tenseur de pression gyrotope a ensuite été appliqué dans cette extension afin de répondre analytiquement à la question de l'impact des anisotropies de pression décrites par le modèle CGL sur la cascade turbulente. De nouveaux termes pouvant nourrir ou réduire la cascade et dépendant de $1 - a_p$ avec a_p le taux d'anisotropie p_{\perp}/p_{\parallel} ont été découverts. Linéairement, le signe de $1 - a_p$ est une condition nécessaire à l'existence d'instabilité firehose ou miroir dans l'écoulement, comme cela a été redémontré dans la section 1.2. On aurait donc potentiellement un lien entre instabilités linéaires et régimes turbulents qui pourrait venir expliquer les observations de K OSMAN et al. 2013; LZ HADID, SAHRAOUI, GALTIER et SY HUANG 2018 dans le vent solaire mais une étude numérique est nécessaire afin d'affiner l'interprétation de la loi exacte.

Parmi les nouveaux termes dépendant de l'anisotropie de pression émergeant dans la loi exacte, un terme source survit dans la limite incompressible. Par curiosité, nous nous sommes alors demandés à quoi pourrait ressembler un modèle incompressible gyrotope dans le chapitre 2 (synthèse 2.4). Un tel modèle incompressible, fermé par l'équation sur la trace du tenseur de pression, a alors été proposé et linéarisé. En plus de l'onde d'Alfvén-firehose, un nouveau mode y apparaît. On y retrouve le critère d'instabilité firehose parallèle mais aussi un critère d'instabilité firehose inversé apparaissant dans le cas quasi-perpendiculaire et venant réduire la zone de stabilité du modèle en fonction du taux d'instabilité moyen a_{p0} et du paramètre $\beta_{\parallel 0}$. Après une étude plus fine en fonction de l'angle de propagation, ce mode s'est révélé instable pour tout couple de paramètres $\beta_{\parallel 0}$ et a_{p0} . Une étude numérique rigoureuse de la correction incompressible dans un modèle incompressible avec anisotropie de pression ne pourra donc se faire avec ce modèle compatible avec la loi exacte mais a priori instable.

Enfin, dans le chapitre 3 (synthèse 3.4), les approximations appliquées sur l'équation d'induction, ont été relaxées les unes après les autres à partir d'un modèle bi-fluide. Des corrections prenant en compte l'effet Hall puis le tenseur de pression électronique ont été dérivées pour compléter la loi exacte et l'adapter au modèle qui sera étudié numériquement dans la partie ???. Ces corrections serviront à refléter au mieux la cascade turbulente simulée.