

PARTIE II : CHAPITRE 2

ET DANS LE CAS INCOMPRESSIBLE ?

Sommaire

2.1	De la limite incompressible dans la loi exacte générale vers un nouveau modèle	61
2.2	Linéarisation du nouveau modèle proposé	63
2.3	Etude des solutions linéaires du modèle proposé	64
2.4	Synthèse : Limite incompressible et piste d'étude numérique	68

Si l'on prend la limite incompressible de la loi exacte dépendant d'une pression isotrope (I.3.15), on retrouve la loi PP98 donnant le taux de cascade ε_{PP98} (I.1.34). Mais est-ce aussi le cas si la pression est tensorielle ? De cette question à émerger une autre question : qu'est-ce qu'un système incompressible avec pression tensorielle ? Dans ce chapitre, sera présenté le travail effectué pour tenter de répondre à ces questions. Ce travail n'a pas encore été publié.

2.1 De la limite incompressible dans la loi exacte générale vers un nouveau modèle

Si l'on considère la limite incompressible ($\rho = \rho_0$, $\delta\rho = 0$, $\nabla\rho = 0$, $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$, $\nabla \cdot \mathbf{v}_A = 0$) dans l'équation (II.1.22), $\varepsilon_{iso} \rightarrow \varepsilon_{PP98}$, tous les termes s'annulent sauf :

$$\begin{aligned} -4(\varepsilon - \varepsilon_{PP98}) &= -2 < \delta((p_{\parallel} - p_{\perp})\mathbf{bb}) : \nabla' \mathbf{v}' - \delta((p_{\parallel} - p_{\perp})\mathbf{bb}) : \nabla \mathbf{v} > \\ &= -2 < \delta((p_{\parallel} - p_{\perp})\mathbf{bb}) : \delta(\nabla \mathbf{v}) > \end{aligned} \quad (\text{II.2.1})$$

car seule la trace de $\nabla \mathbf{v}$ s'annule par incompressibilité : $\bar{\mathbf{I}} : \nabla \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$. On obtient ainsi une correction à la théorie PP98 dépendant de l'anisotropie de pression.

Plus généralement, seule la composante isotrope du tenseur de pression peut annuler ce terme en y faisant ressortir $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ par produit dual avec l'identité. La correction générale, ne dépendant que de la composante participant à la déformation incompressible (CASSAK et BARBHUIYA 2022), serait donc :

$$\boxed{-4(\varepsilon - \varepsilon_{PP98}) = -2 < \delta(\bar{\mathbf{P}} - p\bar{\mathbf{I}}) : \delta(\nabla \mathbf{v}) > = -2 < \delta\bar{\mathbf{\Pi}} : \delta(\nabla \mathbf{v}) >} \quad (\text{II.2.2})$$

Et dans le cas particulier gyrotrope, on aurait :

$$\boxed{-4(\varepsilon - \varepsilon_{PP98}) = -2 < \delta((p_{\parallel} - p_{\perp})(\mathbf{b}\mathbf{b} - \frac{1}{3}\bar{\mathbf{I}})) : \delta(\nabla\mathbf{v}) >} \quad (\text{II.2.3})$$

cela semble révéler qu'une part compressible subsisterait dans (II.2.1), cachée dans $\mathbf{b}\mathbf{b}$.

On remarque que ce terme dépend de $p_{\parallel} - p_{\perp}$, c'est à dire de $\beta_{\parallel}(1 - a_p)$. Analyser et valider cette correction de la loi PP98 serait donc numériquement plus simple que le cas compressible et permettrait de donner un début de réponse à l'impact des instabilités sur la cascade. Rigoureusement, cela nécessiterait l'utilisation de simulation incompressible. Mais aucune trace d'un modèle incompressible avec pression tensorielle n'a été trouvée dans la littérature. En fait, si l'on approche le problème sous un autre angle, celui des fermetures, on se rend compte que le cadre gyrotrope est habituellement abordé à travers la fermeture CGL. Ajouter une fermeture incompressible signifierait alors, surcontraindre le système (une équation de trop par rapport au nombre de variables). Une équation de compatibilité doit alors être vérifiée par les solutions.

Par exemple, dans le cas linéaire, le modèle CGL donne l'équation de dispersion (II.1.10) que l'on va simplement noter $\bar{\mathbf{M}}\mathbf{v}_1 = 0$. Avec la contrainte incompressible $\nabla \cdot \mathbf{v}_1 = 0$, on peut écrire \mathbf{v}_1 sous la forme d'un potentiel vecteur $\Omega : \mathbf{v}_1 = \nabla \times \Omega = \bar{\mathbf{N}}\Omega$ avec $\bar{\mathbf{N}} = i\mathbf{k} \times \bar{\mathbf{I}} = i \begin{pmatrix} 0 & -k_{\parallel} & 0 \\ k_{\parallel} & 0 & -k_{\perp} \\ 0 & k_{\perp} & 0 \end{pmatrix}$. Le modèle CGL surcontraint incompressiblement donnerait l'équation de dispersion : $\bar{\mathbf{M}}\bar{\mathbf{N}}\Omega = 0$ avec

$$\bar{\mathbf{M}}\bar{\mathbf{N}} = \begin{pmatrix} 0 & -k_{\parallel}(\frac{\omega^2 - \omega_F^2}{v_{A0}^2 k_{\parallel}^2} - (\frac{\beta_{\parallel 0}}{2} a_{p0} + 1)\frac{k_{\perp}^2}{k_{\parallel}^2}) & 0 \\ k_{\parallel} \frac{\omega^2 - \omega_F^2}{v_{A0}^2 k_{\parallel}^2} & 0 & -k_{\perp} \frac{\omega^2 - \omega_F^2}{v_{A0}^2 k_{\parallel}^2} \\ 0 & k_{\perp}(\frac{\omega^2}{v_{A0}^2 k_{\parallel}^2} - \frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(3 - a_{p0})) & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{II.2.4})$$

où $\omega_F^2 = -v_{A0}^2 k_{\parallel}^2 (\frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0}) - 1)$ correspond à l'onde d'Alfvén incompressible gyrotrope. Le déterminant de cette matrice est nul, le système admet donc ou une infinité de solutions ou aucune solution mais il ne peut nous aider à les déterminer. On remarque que si $\omega^2 = \omega_F^2$, alors il faut que $\Omega_y = 0$, c-à-d que l'ensemble solution soit une droite orientée suivant $\mathbf{v}_1 = (0, 1, 0)$. On retrouve le mode d'Alfvén gyrotrope. Mais contrairement au modèle incompressible MHD, une autre solution existe. L'autre possibilité non triviale, telle que $\Omega_y \neq 0$, est de considérer $k_{\parallel}\Omega_x - k_{\perp}\Omega_z = 0$, c'est à dire l'ensemble de droites de vecteur directeur $\mathbf{v}_1 = (-k_{\parallel}, 0, k_{\perp})$, dans ce cas $\omega^2 = v_{A0}^2 k_{\parallel}^2 \frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(3 - a_{p0})$. Cet ensemble de solution est contraint par l'équation de compatibilité $\tan^2 \theta = \frac{k_{\perp}^2}{k_{\parallel}^2} = \frac{2(\beta_{\parallel 0}(2 - a_{p0}) - 1)}{\beta_{\parallel 0} a_{p0} + 2}$ et n'est donc pas valable pour tout k_{\parallel} et k_{\perp} . Si l'on suppose l'isotropie de pression dans ce mode, on trouve un mode sonore : $\omega^2 = 2k_{\parallel}^2 \frac{p_0}{\rho_0}$. Imposer l'incompressibilité dans le système CGL ne semble donc pas influencer sur le mode d'Alfvén mais contraindre les modes magnéto-sonores en un mode sonique improbable dans le cas MHD et n'existant que pour un certain angle entre \mathbf{k} et \mathbf{b}_0 .

On s'est alors demandé à quoi pourrait ressembler un modèle incompressible gyrotrope qui serait viable (non sur-contraint). Il serait a priori constitué de l'équation sur la vitesse (II.1.2) et de l'équation d'induction (II.1.4) avec ρ constant et $\bar{\mathbf{P}}$ gyrotrope, de la fermeture $\nabla \cdot \mathbf{v}$ et d'une autre équation de fermeture. Différentes possibilités sont envisageables pour cette équation supplémentaire : garder l'une des équations de pression ou considérer une

combinaison linéaire des pressions. Afin de maintenir la cohérence avec le bilan énergétique et l'équation d'énergie interne, nous avons décidé de fermer le système avec l'équation sur la trace du tenseur de pression (II.1.5). Ce système est donc compatible avec la loi exacte (II.2.3). Dans la section 2.2, nous présenterons les solutions linéaires de ce système. Puis dans la section ??, une étude paramétrique de ces solutions linéaires.

2.2 Linéarisation du nouveau modèle proposé

Le modèle incompressible gyrotrope envisagé est :

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \nabla \cdot \mathbf{v}_A = 0 \quad (\text{II.2.5})$$

$$\partial_t \mathbf{v} + \nabla \cdot (\mathbf{v} \mathbf{v} - \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A + \frac{1}{\rho_0} \overline{\mathbf{P}}_*) = 0 \quad (\text{II.2.6})$$

$$\partial_t p + \nabla \cdot (p \mathbf{v}) + \frac{2}{3} \overline{\Pi} : \nabla \mathbf{v} = 0 \quad (\text{II.2.7})$$

$$\partial_t \mathbf{v}_A - \nabla \cdot (\mathbf{v}_A \mathbf{v} - \mathbf{v} \mathbf{v}_A) = 0 \quad (\text{II.2.8})$$

avec $\overline{\mathbf{P}} = p \overline{\mathbf{I}} + \overline{\Pi} = \frac{1}{3}(2p_\perp + p_\parallel) \overline{\mathbf{I}} + (p_\parallel - p_\perp)(\mathbf{b}\mathbf{b} - \frac{1}{3} \overline{\mathbf{I}})$. $\nabla \cdot \overline{\mathbf{P}}_*$ et $\overline{\Pi} : \nabla \mathbf{v}$ y sont donc :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}}_* &= \nabla(p_\perp + \frac{1}{2}\rho_0 \mathbf{v}_A^2) + \mathbf{b}\mathbf{b} \cdot \nabla(p_\parallel - p_\perp) + (p_\parallel - p_\perp) \frac{1}{\mathbf{v}_A^2} (\mathbf{v}_A \cdot \nabla \mathbf{v}_A - 2\mathbf{v}_A \mathbf{b}\mathbf{b} : \nabla \mathbf{v}_A) \\ \overline{\Pi} : \nabla \mathbf{v} &= (p_\parallel - p_\perp) \mathbf{b}\mathbf{b} : \nabla \mathbf{v} \end{aligned}$$

Les équations linéarisées en suivant la méthode résumée section I.1.4 sont :

$$0 = k_\perp v_{1x} + k_\parallel v_{1z} \quad (\text{II.2.9})$$

$$0 = -\omega v_{1x} + \frac{p_{\perp 1}}{\rho_0} k_\perp + (\frac{p_{\parallel 0} - p_{\perp 0}}{\rho_0 v_{A0}^2} - 1) v_{A0} k_\parallel v_{A1x} + v_{A0} k_\perp v_{A1z} \quad (\text{II.2.10})$$

$$0 = -\omega v_{1y} + (\frac{p_{\parallel 0} - p_{\perp 0}}{\rho_0 v_{A0}^2} - 1) v_{A0} k_\parallel v_{A1y} \quad (\text{II.2.11})$$

$$0 = -\omega v_{1z} + \frac{p_{\parallel 1}}{\rho_0} k_\parallel - \frac{p_{\parallel 0} - p_{\perp 0}}{\rho_0 v_{A0}^2} v_{A0} k_\parallel v_{A1z} \quad (\text{II.2.12})$$

$$0 = -\omega(2p_{\perp 1} + p_{\parallel 1}) + 2(p_{\parallel 0} - p_{\perp 0}) k_\parallel v_{1z} \quad (\text{II.2.13})$$

$$0 = -\omega \mathbf{v}_{A1} - k_\parallel v_{A0} \mathbf{v}_1 \quad (\text{II.2.14})$$

On retrouve le mode d'Alfvén incompressible polarisé suivant $(0, 1, 0)$ grâce aux composantes suivant y qui sont décorréliées des autres :

$$(\omega^2 + (\frac{p_{\parallel 0} - p_{\perp 0}}{\rho_0 v_{A0}^2} - 1) v_{A0}^2 k_\parallel^2) v_{1y} = 0 \Rightarrow \frac{\omega^2}{v_{A0}^2 k_\parallel^2} + (\frac{p_{\parallel 0} - p_{\perp 0}}{\rho_0 v_{A0}^2} - 1) = 0 \quad (\text{II.2.15})$$

Ce mode, identique au mode présent dans le système CGL, peut devenir instable. On retrouve ainsi l'instabilité firehose. Il est aussi polarisé suivant y .

Pour les autres directions, on peut remplacer v_{A1x} et v_{A1z} à l'aide de (II.2.14) dans

(II.2.10) et (II.2.12) :

$$\omega \frac{p_{\perp 1}}{\rho_0} k_{\perp} = (\omega^2 + (\frac{p_{\parallel 0} - p_{\perp 0}}{\rho_0 v_{A0}^2} - 1) v_{A0}^2 k_{\parallel}^2) v_{1x} + v_{A0}^2 k_{\parallel} k_{\perp} v_{1z} \quad (\text{II.2.16})$$

$$\omega \frac{p_{\parallel 1}}{\rho_0} k_{\parallel} = (\omega^2 - \frac{p_{\parallel 0} - p_{\perp 0}}{\rho_0} k_{\parallel}^2) v_{1z} \quad (\text{II.2.17})$$

$$0 = k_{\perp} v_{1x} + k_{\parallel} v_{1z} \quad (\text{II.2.18})$$

$$0 = -2\omega \frac{p_{\perp 1}}{\rho_0} - \omega \frac{p_{\parallel 1}}{\rho_0} + 2 \frac{p_{\parallel 0} - p_{\perp 0}}{\rho_0} k_{\parallel} v_{1z} \quad (\text{II.2.19})$$

Puis remplacer v_{1x} à l'aide de (II.2.18) et $p_{\perp 1}$ et $p_{\parallel 1}$ dans (II.2.19) pour obtenir une équation de dispersion ne dépendant plus que de v_{1z} et enfin la relation de dispersion :

$$\Rightarrow \frac{\omega^2}{v_{A0}^2 k_{\parallel}^2} - \frac{2(\frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0}) - 1)k_{\parallel}^2 + (3\frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0}) - 2)k_{\perp}^2}{k_{\perp}^2 - 2k_{\parallel}^2} = 0 \quad (\text{II.2.20})$$

Ce mode est polarisé suivant $(1, 0, -\frac{k_{\perp}}{k_{\parallel}}) = (1, 0, -\tan \theta)$. On y retrouve l'instabilité firehose parallèle ($\frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0}) - 1 > 0$) si $k_{\parallel} \gg k_{\perp}$. Si $k_{\parallel} \ll k_{\perp}$, un autre type d'instabilité est visible, de critère $\frac{3}{2}\frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0}) - 1 < 0$. Ce critère ressemble beaucoup au critère firehose mais avec un signe inverse et un facteur $\frac{3}{2}$. On va le nommer «firehose inverse».

2.3 Etude des solutions linéaires du modèle proposé

La question que l'on peut se poser maintenant est : est-ce qu'il existe un intervalle pour a_{p0} et $\beta_{\parallel 0}$ tel que le système ne devienne pas instable ? Répondre à cette question est nécessaire pour savoir si ce système peut être linéairement viable et pourrait être simulé (les instabilités sont difficilement gérables numériquement). En regardant les critères, on se rend compte que le système semble être stable si $\frac{2}{3} < \frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0}) < 1$. Sa zone de stabilité semble donc extrêmement réduite comme on peut le voir sur le diagramme a_{p0} vs $\beta_{\parallel 0}$ de la figure II.2.1 (zone grise foncée).

Ensuite, on peut comparer le mode donné par la relation (II.2.20) avec les modes compressibles et le mode d'Alfvén incompressible. Sur la figure II.2.1, quatre croix rouges correspondent à quatre couples $\{\beta_{\parallel 0}; a_{p0}\}$ sélectionnés afin de refléter les différents comportements possibles des modes linéaires.

On notera :

- $F = 1 - \frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0})$, le critère firehose. $F < 0$ indique l'instabilité des modes d'Alfvén, magnétosonique lent et du nouveau mode incompressible.
- $I = 3\frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0}) - 2$, le critère firehose inverse. $I < 0$ indique l'instabilité du nouveau mode incompressible.
- $M = 1 + \beta_{\parallel 0}a_{p0}(1 - \frac{a_{p0}}{6})$, le critère miroir CGL. $M < 0$ indique l'instabilité du mode magnétosonique lent.

La figure II.2.2 montre pour chaque mode (associé à une couleur) et chaque couple de paramètres (associée à une ligne de graphiques), les vitesses de propagation $\frac{\omega}{k}$ normalisée par kv_{A0} (colonne de gauche) et les taux de croissance des instabilités γ normalisé par kv_{A0} (colonne de droite) en fonctions de l'angle θ défini entre \mathbf{k} et \mathbf{b}_0 . La vitesse de propagation correspond $\frac{\omega}{k}$ réel, si elle est non nulle, le mode se propage, et le taux de croissance correspond à la part imaginaire. On remarque que les modes considérés sont ou purement

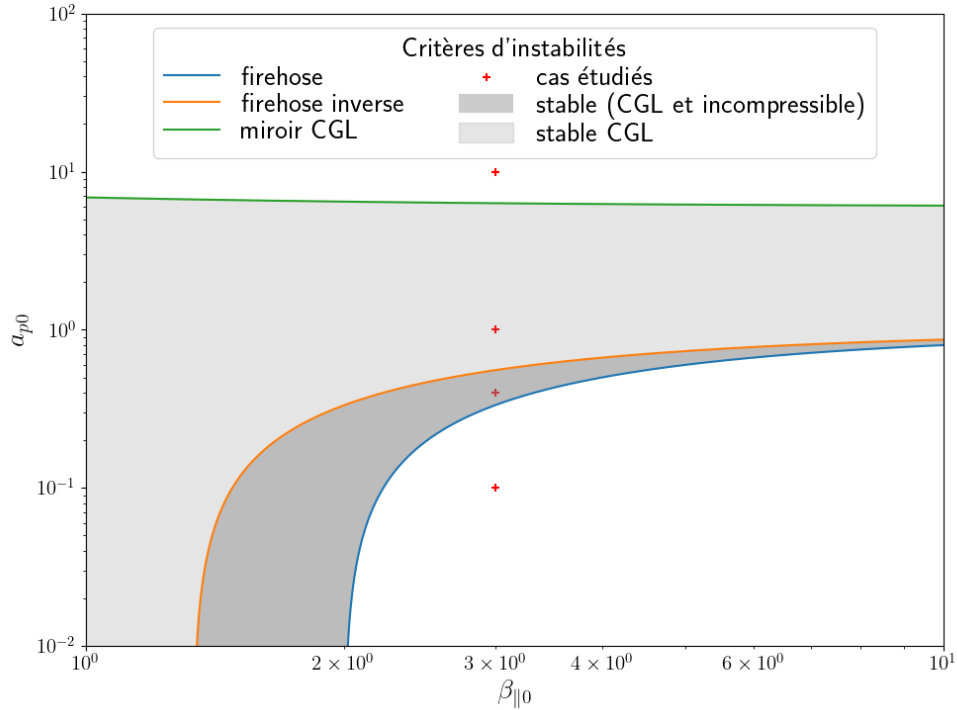


FIGURE II.2.1 – Diagramme $a_{p0} - \beta_{||0}$. Zones de stabilités des modèles CGL et incompressible proposé grisées. Critères d'instabilités firehose (F , bleu) firehose inverse (I , orange) et miroir (M , vert). Points rouges : cas détaillés dans la figure II.2.2.

réels, ou purement imaginaire. Cela se retrouve sur la figure II.2.2 où, pour un angle donné, un mode n'apparaîtra que sur le graphique de gauche ou celui de droite. Ainsi, on retrouve la stabilité attendue du mode magnétosonique rapide (rouge), qui n'apparaît que sur les graphiques de gauche, et celle du mode d'Alfvén (bleu) tant que $F > 0$ indépendamment de θ . La stabilité du nouveau mode (orange) et celle du mode magnétosonique lent (vert) dépendent quant à elles de θ . On retrouve l'instabilité firehose du mode magnétosonique lent si $F < 0$ et pour θ autour de 0° (première ligne) et l'instabilité miroir si $M < 0$ et pour θ autour de 90° (quatrième ligne). Similairement, le nouveau mode se montre instable de type firehose si $F < 0$ autour de 0° (première ligne) et de type firehose inverse si $I < 0$ et pour θ autour de 90° (troisième et quatrième ligne).

Si l'on analyse, un peu plus finement, la relation de dispersion (équation (??)), on remarque que le dénominateur va changer de signe si $\tan \theta = \sqrt{2}$, c'est-à-dire, si $\theta \simeq 55^\circ$. En cet angle singulier, la vitesse de phase de ce mode tend vers l'infini. Ce changement de signe va venir compenser le changement de signe du numérateur. D'où la croissance de l'instabilité firehose si $\theta < 55^\circ$ dans le cas de la première ligne (le numérateur est alors défini positif) ou de l'instabilité firehose inverse dans les troisième et quatrième lignes si $\theta > 55^\circ$, le numérateur étant défini négatif. Par contre, la deuxième ligne montre que ce mode peut devenir instable pour une plage angulaire oblique si $F > 0$ et $I > 0$. En effet, si $F > 0$ et $I > 0$, le signe du numérateur sera imposé par le signe de $F > 0$ proche de $\theta = 0^\circ$ (il sera alors négatif) mais par le signe de $F > 0$ proche de $\theta = 90^\circ$ (il sera alors positif). Si $\theta > 55^\circ$ et le signe du numérateur imposé par $I > 0$, le dénominateur est positif et le mode stable (cas Isup), mais si le signe du numérateur est imposé par $F > 0$, le mode sera instable (cas Fsup). Similairement, si $\theta < 55^\circ$, le signe du numérateur imposé par $F > 0$, les signes se compensent et le mode est stable (cas Finf), mais si le signe du

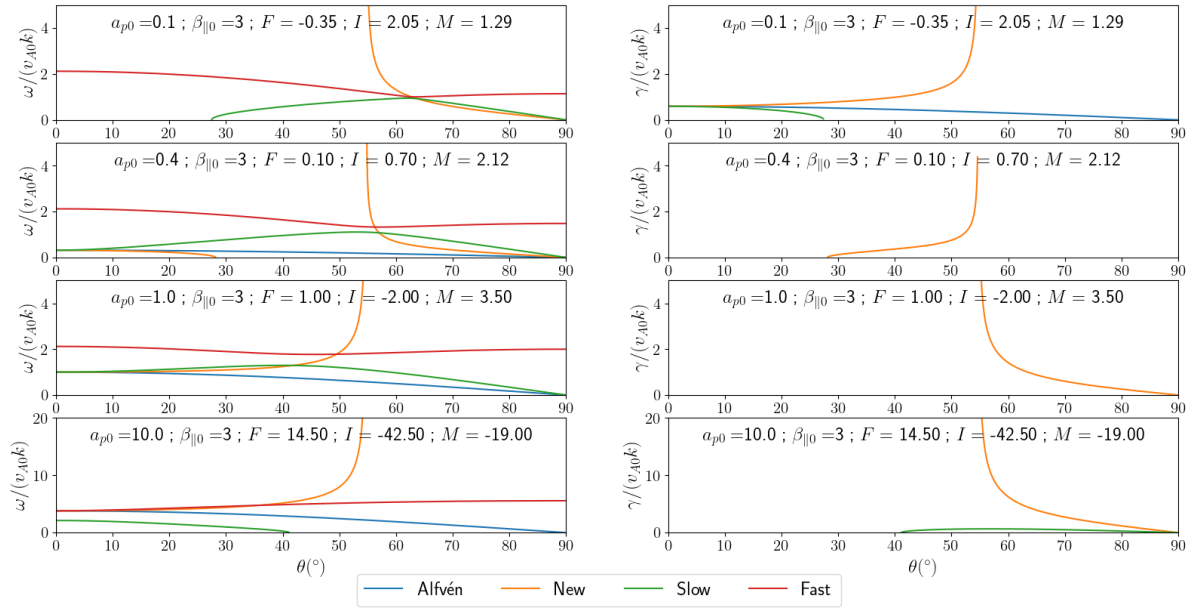


FIGURE II.2.2 – Vitesse de phase ω/k (à gauche) et taux de croissance des instabilités γ/k (à droite) normalisés par v_{A0} en fonction de l'angle θ pour les modes d'Alfvén (bleu), magnétosoniques CGL lent (vert) et rapide (rouge) et pour le nouveau mode incompressible (orange). Première ligne : $a_{p0} = 0.1$, $\beta_{||0} = 3 \Rightarrow$ instabilité firehose (F). Deuxième ligne : $a_{p0} = 0.4$, $\beta_{||0} = 3 \Rightarrow$ a priori stable. Troisième ligne : $a_{p0} = 1$, $\beta_{||0} = 3 \Rightarrow$ instabilité firehose inverse (I). Quatrième ligne : $a_{p0} = 10$, $\beta_{||0} = 3 \Rightarrow$ instabilité firehose inverse (I) et miroir (M).

numérateur est imposé par $I > 0$, le mode sera instable (cas linf). Dans le cas présenté sur la deuxième ligne, le numérateur change de signe autour de 27° , avant 27° on est dans le cas Finf, entre 27° et 55° , dans le cas linf et après 55° dans le cas Isup. L'instabilité firehose inverse va donc pouvoir croître entre 27° et 55° . Le cas Finf n'est pas illustré ici.

Sur le diagramme de la figure II.2.1, on peut faire figurer une frontière d'instabilité oblique indiquant à partir de quel jeu de paramètre, l'instabilité apparaissant pour des angles obliques sera firehose ou firehose inverse. Le changement de signe du numérateur ayant lieu lorsque $\tan^2 \theta = \frac{2F}{I}$ et celui du dénominateur lorsque $\tan^2 \theta = 2$, cette nouvelle frontière sera paramétrisée par $F = I$, c'est à dire :

$$0 = 1 - \frac{2}{3}\beta_{||0}(1 - a_{p0}). \quad (\text{II.2.21})$$

Cette frontière est affichée sur la figure II.2.3 avec les régions associées à chaque type d'instabilités qui peuvent se développer dans le système suivant le couple $\{\beta_{||0}; a_{p0}\}$. Finalement, il n'existe pas de configuration $\{\beta_{||0}; a_{p0}\}$ telle que le nouveau mode soit stable. Ce modèle incompressible proposé sera donc difficilement implémentable voir impossible à implémenter. Sachant que l'objectif principal de ce travail se place dans le cadre compressible, la recherche d'un modèle alternatif permettant l'étude numérique rigoureuse de la loi exacte incompressible n'a pas été engagée.

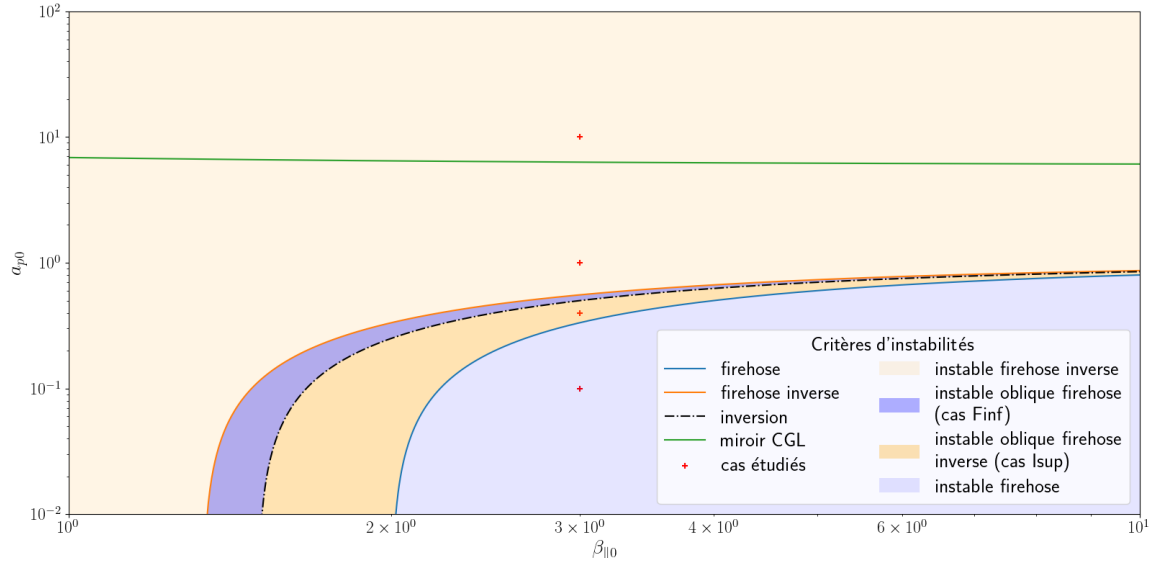


FIGURE II.2.3 – Diagramme $a_{p0} - \beta_{\parallel 0}$. Zones d'instabilité du modèle incompressible proposé. Critères d'instabilité firehose (F , bleu) firehose inverse (I , orange) et miroir (M , vert). Ligne segmentée : Frontière des types d'instabilité obliques (équation (II.2.21)). Points rouges : cas détaillés dans la figure II.2.2.

2.4 Synthèse : Limite incompressible et piste d'étude numérique

Limite incompressible de la loi exacte avec pression tensorielle et cas gyrotrope :

$$-4(\varepsilon - \varepsilon_{PP98}) = -2 < \delta(\bar{\mathbf{P}} - p\bar{\mathbf{I}}) : \delta(\nabla \mathbf{v}) > = -2 < \delta\bar{\mathbf{\Pi}} : \delta(\nabla \mathbf{v}) > \quad (\text{II.2.22})$$

$$-4(\varepsilon - \varepsilon_{PP98}) = -2 < \delta((p_{\parallel} - p_{\perp})(\mathbf{b}\mathbf{b} - \frac{1}{3}\bar{\mathbf{I}})) : \delta(\nabla \mathbf{v}) > \quad (\text{II.2.23})$$

Modèle incompressible avec pression gyrotrope proposé pour l'étude numérique de turbulence incompressible :

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (\text{II.2.24})$$

$$\partial_t \mathbf{v} + \nabla \cdot (\mathbf{v}\mathbf{v} - \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A + \frac{1}{\rho_0} \bar{\mathbf{P}}_*) = 0 \quad (\text{II.2.25})$$

$$\partial_t p + \nabla \cdot (p\mathbf{v}) + \frac{2}{3} \bar{\mathbf{\Pi}} : \nabla \mathbf{v} = 0 \quad (\text{II.2.26})$$

$$\partial_t \mathbf{v}_A - \nabla \cdot (\mathbf{v}_A \mathbf{v} - \mathbf{v} \mathbf{v}_A) = 0 \quad (\text{II.2.27})$$

$$\text{avec } \bar{\mathbf{P}}_* = (p + p_m)\bar{\mathbf{I}} + \bar{\mathbf{\Pi}} \quad p_m = \frac{\rho_0 |\mathbf{v}_A|^2}{2} \quad p = \frac{1}{3}(2p_{\perp} + p_{\parallel})$$

$$\bar{\mathbf{\Pi}} = \bar{\mathbf{P}} - p\bar{\mathbf{I}} = (p_{\parallel} - p_{\perp})(\mathbf{b}\mathbf{b} - \frac{1}{3}\bar{\mathbf{I}})$$

Etude linéaire du modèle proposé :

— Mode d'Alfvén incompressible polarisé suivant $(0, 1, 0)$:

$$\frac{\omega^2}{v_{A0}^2 k_{\parallel}^2} + \frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0}) - 1 = 0 \quad (\text{II.2.28})$$

$$\text{Instabilité firehose : } \frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0}) - 1 > 0 \quad (\text{II.2.29})$$

— Nouveau mode polarisé suivant $(1, 0, -\tan \theta)$:

$$\frac{\omega^2}{v_{A0}^2 k_{\parallel}^2} - \frac{2(\frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0}) - 1) \cos^2 \theta + (3\frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0}) - 2) \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta - 2 \cos^2 \theta} = 0 \quad (\text{II.2.30})$$

$$\text{Instabilité firehose parallèle } (\theta \ll 90^\circ) : 1 < \frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0}) \quad (\text{II.2.31})$$

$$\text{Instabilité firehose inverse perpendiculaire } (0^\circ \ll \theta) : \frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0}) < \frac{2}{3} \quad (\text{II.2.32})$$

$$\text{Instabilité firehose obliques } (0^\circ \ll \theta \ll 90^\circ) : \frac{2}{3} < \frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0}) < \frac{3}{4} \quad (\text{II.2.33})$$

$$\text{Instabilité firehose inverse obliques : } \frac{3}{4} < \frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0}) < 1 \quad (\text{II.2.34})$$

\Rightarrow Ce modèle proposé n'est donc linéairement pas stable et sera difficilement implémentable.