
PARTIE I : De l'incompressibilité à la compressibilité dans cas d'une pression isotrope pour un plasma idéal

There is even a humorous statement about this by a well-known theoretical physicist who compared the theory of turbulence without pressure with a someone who has lost his manhood.

Sergey G. CHEFRANOV et Artem S. CHEFRANOV¹

Ce n'est que 57 ans après l'apport de Kolmogorov à la compréhension de la turbulence que l'idée de chercher des lois exactes dans un fluide magnétisé, ou plasma, a émergé. Ainsi, POLITANO et POUQUET 1998a ; POLITANO et POUQUET 1998b a étendu la théorie hydrodynamique à la MHD idéale en restant dans le cadre incompressible. Cette avancée historique a apporté un cadre à l'étude de la turbulence dans les plasmas spatiaux. Dans le laboratoire qu'est le vent solaire, elle a permis de trouver des éléments de réponses à des problèmes tels que ceux du chauffage ou de l'accélération du vent par exemple (BRUNO et CARBONE 2013 ; ALEXANDROVA et al. 2013 ; SAHRAOUI, L HADID et S HUANG 2020 ; MARINO et SORRISO-VALVO 2023).

Dans le chapitre 1, nous reprendrons les résultats analytiques incompressibles afin d'introduire simplement les méthodes qui seront appliquées par la suite dans le cas compressible.

Dans le chapitre 2, sera présenté le modèle compressible sur lequel seules deux contraintes seront imposées dans cette partie I : une pression de type isotrope et une équation d'induction de type idéale. Diverses relations thermodynamiques y seront analysées pour fermer ce modèle fluide.

Dans le chapitre 3, sera résumé l'extension analytique compressible avec pression isotrope de la théorie de Kolmogorov à travers les premiers résultats que j'ai obtenus.

Dans le chapitre 4, nous parlerons observation et données in-situ à travers une application de nos premiers résultats analytique dans les premières données obtenues près du Soleil par la sonde Parker Solar Probe (PSP). Cette étude de cas effectuée, j'ai ensuite amorcé une étude statistique dans des données relevées dans la magnétogaine par la mission Magnetospheric Multiscale (MMS).

Chaque chapitre sera achevé par une synthèse des méthodes et résultats. L'apport du travail présenté ici y sera encadré en rouge et les résultats provenant de l'état de l'art y seront encadrés en bleu.

PARTIE I : CHAPITRE 1

RAPPEL DU CAS INCOMPRESSIBLE

Sommaire

1.1	Le modèle et l'énergie totale	5
1.2	Le cas linéaire et les ondes d'Alfvén	6
1.3	Décrire la cascade turbulente incompressible avec une loi exacte	7
1.4	Synthèse des définitions et méthodes (cadre IMHD)	11

Le modèle incompressible magnétohydrodynamique idéal avec pression isotrope (IMHD) est le modèle fluide le plus simple abordé dans ce mémoire. Très étudié, aucun nouveau résultat ne sera introduit dans ce chapitre qui va nous permettre d'introduire des méthodes et notions clefs utilisées, pour étudier la cascade turbulente d'énergie totale ou encore la méthode de linéarisation communément appliquée sur des modèles fluides en physique des plasmas.

1.1 Le modèle et l'énergie totale

Contrairement au modèle hydrodynamique incompressible qui ne contient qu'une équation principale – l'équation de Navier-Stokes –, dans le cas d'un plasma, il est nécessaire de prendre en compte le couplage entre le fluide et le champ magnétique et d'ajouter l'équation d'induction. L'incompressibilité s'exprime, quant à elle, à travers une densité de masse constante, ρ_0 qui se traduit via l'équation de continuité (voir introduction), par la contrainte $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$. Le modèle magnétohydrodynamique incompressible (IMHD) est alors :

$$\partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} - \mathbf{v}_A \cdot \nabla \mathbf{v}_A + \frac{1}{\rho_0} \nabla p_* = 0 \quad (\text{I.1.1})$$

$$\partial_t \mathbf{v}_A + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}_A - \mathbf{v}_A \cdot \nabla \mathbf{v} = 0 \quad (\text{I.1.2})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (\text{I.1.3})$$

Le champ magnétique apparaît dans ces équations à travers la vitesse d'Alfvén $\mathbf{v}_A = \mathbf{B}/\sqrt{\mu_0 \rho_0}$ et la pression magnétique $p_m = \rho_0 \mathbf{v}_A^2/2$ contenue dans la pression totale $p_* = p + p_m$. On remarque qu'il y a 3 équations (7 en termes de composantes) et 3 inconnues

(2 vectorielles, \mathbf{v} et \mathbf{v}_A et une scalaire, p). Le système se retrouve donc fermé grâce à la contrainte incompressible. On peut rappeler aussi que le champ magnétique est aussi contraint tel que $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, ce qui implique dans le cas incompressible : $\nabla \cdot \mathbf{v}_A = 0$ (contrainte implicitement prise en compte dans l'équation d'induction). En appliquant la divergence sur l'équation (I.1.1), on obtient l'équilibre de pression, $-\frac{1}{\rho_0} \nabla^2 p_* = \nabla \mathbf{v} : \nabla \mathbf{v} - \nabla \mathbf{v}_A : \nabla \mathbf{v}_A$, qui indique que la pression totale est directement reliée aux non-linéarités du système.¹

Dans ce système apparaissent deux canaux énergétiques, cinétique de densité $E_c = \frac{1}{2} \rho_0 \mathbf{v}^2$ et magnétique, $E_m = \frac{1}{2} \rho_0 \mathbf{v}_A^2$. On définit aussi la densité d'hélicité croisée couplant les deux champs : $H_c = \rho_0 \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}$. Les équations de densité d'énergie cinétique et magnétique, obtenue respectivement à partir de (I.1.1) et (I.1.2), et celle de densité d'énergie totale $E_{tot} = E_c + E_m$ sont alors :

$$\partial_t E_c + \nabla \cdot (E_c \mathbf{v} + H_c \mathbf{v}_A + p_* \mathbf{v}) = -\rho_0 \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A : \nabla \mathbf{v} \quad (\text{I.1.5})$$

$$\partial_t E_m + \nabla \cdot (E_m \mathbf{v}) = \rho_0 \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A : \nabla \mathbf{v} \quad (\text{I.1.6})$$

$$\partial_t E_{tot} + \nabla \cdot (E_{tot} \mathbf{v} + H_c \mathbf{v}_A + p_* \mathbf{v}) = 0 \quad (\text{I.1.7})$$

L'équation (I.1.7) indique que l'énergie totale moyenne $\langle E_{tot} \rangle$ est conservée puisque pour toute quantité \mathbf{X} , la moyenne, ici spatiale, $\langle \rangle$, implique $\langle \nabla \cdot \mathbf{X} \rangle = 0$. Les équations (I.1.5) et (I.1.6) nous indiquent un échange entre les canaux énergétiques se faisant à travers le terme de droite.

1.2 Le cas linéaire et les ondes d'Alfvén

La théorie linéaire est la principale voie nous donnant des informations ondulatoires sur un modèle. Ainsi, dans le modèle IMHD, elle vient révéler l'existence des ondes dites d'Alfvén.

Pour cela, on doit linéariser le système, c'est-à-dire négliger tout terme non-linéaire (d'ordre supérieur à 1). Les moyennes des quantités impliquées seront indiquées par un 0 (ordre 0) et les fluctuations d'ordre 1 seront indiquées par un 1. Ainsi, par exemple, $\mathbf{v} \simeq \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1$. On considèrera aussi que $\mathbf{v}_0 = 0$ et $\mathbf{v}_{A0} = v_{A0} \mathbf{b}_0$.

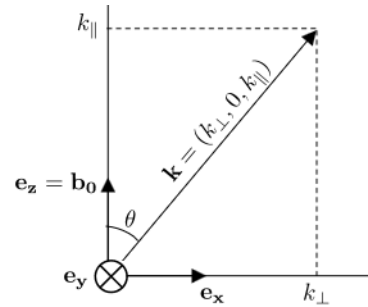


FIGURE I.1.1 – Système de coordonnées et vecteur d'onde dans le cadre linéaire.

1. Ce système peut aussi être symétrisé grâce aux variables d'Elsässer, $\mathbf{z}^\pm = \mathbf{v} \pm \mathbf{v}_A$:

$$\partial_t \mathbf{z}^\pm + \mathbf{z}^\mp \cdot \nabla \mathbf{z}^\pm = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p_* \quad \nabla \cdot \mathbf{z}^\pm = 0 \quad (\text{I.1.4})$$

Leur somme $\frac{1}{4} \rho_0 (\mathbf{z}^{+2} + \mathbf{z}^{-2})$ donne l'énergie totale E_{tot} et leur différence, l'hélicité croisée H_c . La dynamique non-linéaire est alors contenue dans le terme $\mathbf{z}^\mp \cdot \nabla \mathbf{z}^\pm$. De telles variables semblent parfaites dans l'étude de ce système incompressible et sont largement utilisées pour simplifier les calculs. Il est nécessaire de garder en tête qu'en termes de mathématique fondamentale, elles ne peuvent exister, car les champs de vitesse (vectoriel) et magnétique (pseudo-vectoriel) sont incompatibles. Dans un effort de cohérence avec le cadre compressible dans lequel elles sont mal définies (MAGYAR 2019), elles ne seront pas utilisées ici.

La deuxième étape consiste à passer dans l'espace de Fourier, c'est-à-dire remplacer ∂_t par la pulsation $-i\omega$ et ∇ par le vecteur d'onde $i\mathbf{k}$. On supposera sans perte de généralité, le système de coordonnées cartésien orienté tel que $\mathbf{e}_z = \mathbf{b}_0$ et la composante suivant \mathbf{e}_y du vecteur d'onde, $k_y = 0$. On notera k la norme du vecteur d'onde, k_{\parallel} sa composante le long de \mathbf{e}_z , parallèle au champ magnétique moyen, k_{\perp} sa composante le long de \mathbf{e}_x et θ l'angle formé avec \mathbf{e}_z (voir Figure I.1.1). Le système IMHD devient alors :

$$\omega \mathbf{v}_1 + \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_{A0} \mathbf{v}_{A1} - \frac{1}{\rho_0} \mathbf{k} p_{*1} = 0 \quad (\text{I.1.8})$$

$$\omega \mathbf{v}_{A1} + \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_{A0} \mathbf{v}_1 = 0 \quad (\text{I.1.9})$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_1 = 0 \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_{A1} = 0 \quad (\text{I.1.10})$$

Ensuite, on injecte les équations (I.1.9) et (I.1.10) dans l'équation (I.1.8) :

— $\mathbf{k} \cdot (\text{I.1.8}) \Rightarrow p_{*1} = 0$, en excluant le cas trivial où $\mathbf{k} = 0$, d'où $p_1 = -v_{A0} v_{A1z}$ qui nous informe sur l'équilibre de pression linéaire.

— $\omega \cdot (\text{I.1.8}) \Rightarrow (\omega^2 - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_{A0})^2) \mathbf{v}_1 = 0$ (dite équation de dispersion), d'où la relation de dispersion :

$$\omega = \pm \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_{A0} = \pm k_{\parallel} v_{A0} = \pm v_{A0} k \cos \theta \quad (\text{I.1.11})$$

— (I.1.9) et (I.1.11) $\Rightarrow \mathbf{v}_1 = \pm \mathbf{v}_{A1}$.

La relation de dispersion (I.1.11) nous indique qu'il peut y avoir dans le système IMHD, des ondes dites d'Alfvén, couplant champ magnétique et champ de vitesse.

Les ondes sont très importantes dans l'étude de la turbulence en physique des plasmas où deux théories coexistent : la turbulence faible ou turbulence d'ondes où la cascade d'énergie est supposément développée par des interactions faiblement non-linéaires entre paquets d'ondes et, la turbulence forte où ondes et structures cohérentes (de type vortex par exemple) coexistent.

1.3 Décrire la cascade turbulente incompressible avec une loi exacte

Le calcul des lois exactes, nommée ainsi car aucune approximation de type linéaire, perturbative, etc. n'est supposée pour les obtenir, fait par définition partie intégrante de la théorie de la turbulence forte et, s'appuie sur les hypothèses de Kolmogorov exposées dans l'introduction et rappelées ci-après. Historiquement, de multiples versions de la loi exacte décrivant la cascade IMHD et de la méthode pour l'obtenir existent (POLITANO et POUQUET 1998a; GALTIER 2018; MACBRIDE, SMITH et MA FORMAN 2008). On la nommera dans la suite "PP98" du nom des deux chercheuses ayant dérivé la première version en 1998 POLITANO et POUQUET 1998b; POLITANO et POUQUET 1998a.

D'après les hypothèses de Kolmogorov (FRISCH 1995), la zone inertielle est définie comme l'ensemble des échelles où le transfert s'effectue conservativement. L'énergie totale (cinétique + magnétique) étant un invariant du système IMHD, il peut a priori cascader de manière conservative. Une cascade d'énergie implique une source d'injection et un canal de dissipation, respectivement à grandes et petites échelles. Le canal de dissipation transfère l'énergie au niveau interne, particulière du fluide en augmentant son entropie (par exemple, une dissipation visqueuse ou résistive) et le canal d'injection est nécessaire pour entretenir la cascade et maintenir le bilan énergétique (dans le cas incompressible) (GALTIER 2021). Pour refléter cela dans les équations, on va ajouter une force \mathbf{f}_c d'in-

jection agissant à grande échelle et un terme dissipatif (visqueux), \mathbf{d}_c , agissant à petite échelle, dans l'équation (I.1.1) et, pour permettre la visualisation de ce que deviennent ces sources si elles sont définies magnétiquement, on va ajouter \mathbf{f}_m et \mathbf{d}_m (résistif) dans l'équation d'induction (I.1.2). On restera dans un cadre général en ne détaillant pas leur contenu. Ainsi :

$$\partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} - \mathbf{v}_A \cdot \nabla \mathbf{v}_A + \frac{1}{\rho_0} \nabla p_* = \mathbf{f}_c + \mathbf{d}_c \quad (\text{I.1.12})$$

$$\partial_t \mathbf{v}_A + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}_A - \mathbf{v}_A \cdot \nabla \mathbf{v} = \mathbf{f}_m + \mathbf{d}_m \quad (\text{I.1.13})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \nabla \cdot \mathbf{v}_A = 0 \quad (\text{I.1.14})$$

On se réfèrera au chapitre introduction REF à propos des notations. Maintenant, si l'on veut une loi exacte sur l'énergie totale, on doit choisir une fonction de corrélation qui, lorsque $\mathbf{x}' = \mathbf{x}$, est égale à l'énergie totale moyenne, ici $\langle E_{tot} \rangle = \langle E_c + E_m \rangle = \langle \frac{1}{2} \rho_0 \mathbf{v}^2 + \frac{1}{2} \rho_0 \mathbf{v}_A^2 \rangle$. Cela nous donne bien des choix de formulation : $\langle \sqrt{E_{tot}} \cdot \sqrt{E'_{tot}} \rangle$, $\langle \sqrt{E_c} \cdot \sqrt{E'_c} + \sqrt{E_m} \cdot \sqrt{E'_m} \rangle$, et pourquoi pas d'autres puissances ? Ici, c'est la même quantité à une constante près, mais on pourrait avoir à choisir en \mathbf{B} ou \mathbf{v}_A , ou encore utiliser les variables d'Elsässer. Une autre possibilité est de définir cette fonction à l'aide des incréments de quantités (type incrémentale), dans ce cas, il faut s'assurer que, lorsque $\mathbf{x}' = \mathbf{x}$, le résultat soit nul. Du choix de cette fonction va dépendre la difficulté du calcul, la sauvegarde du sens physique (que voudrait dire $\mathbf{v}^{1/5}$?) et potentiellement l'élégance et la compacité du résultat. Une question fondamentale subsiste et ne sera qu'en partie traitée dans ce mémoire : regarde-t-on la même chose quel que soit le choix de fonction de corrélation ?² On prendra comme exemple la fonction d'auto-corrélation pour chaque canal d'énergie : $\mathcal{R} = \frac{1}{2} \rho_0 \langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}' + \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}'_A \rangle$, $\rho_0/2$ étant une constante dans ce cadre incompressible.

Ensuite, on doit dériver une équation pour cette fonction de corrélation, elle s'obtient en notant que $\partial_t \mathcal{R} = \frac{1}{2} \rho_0 (\langle \partial_t(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}' + \mathbf{v} \cdot \partial_t(\mathbf{v}') \rangle + \langle \partial_t(\mathbf{v}_A) \cdot \mathbf{v}'_A + \mathbf{v}_A \cdot \partial_t(\mathbf{v}'_A) \rangle)$ et en remplaçant les dérivées temporelles grâce aux équations (I.1.12) et (I.1.13). Pour alléger la démonstration, on peut noter que $\langle \partial_t(\mathbf{v}') \cdot \mathbf{v} \rangle$ est le conjugué de $\langle \partial_t(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}' \rangle$, c'est-à-dire en échangeant les rôles (prime ou pas) de chacun des points. Ainsi, on obtient en jouant un peu avec l'hypothèse d'homogénéité statistique et les contraintes (I.1.14) :

$$\langle \mathbf{v}' \cdot \partial_t \mathbf{v} \rangle = \nabla_{\ell} \cdot \langle \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v} \mathbf{v} - \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A \rangle + \langle \mathbf{v}' \cdot \mathbf{f}_c + \mathbf{v}' \cdot \mathbf{d}_c \rangle \quad (\text{I.1.15})$$

$$\langle \mathbf{v}'_A \cdot \partial_t \mathbf{v}_A \rangle = \nabla_{\ell} \cdot \langle \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A \mathbf{v} - \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v} \mathbf{v}_A \rangle + \langle \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{f}_m + \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{d}_m \rangle \quad (\text{I.1.16})$$

puisque $-\langle \mathbf{v}' \cdot \nabla p_* \rangle = \nabla_{\ell} \cdot \langle p_* \mathbf{v}' \rangle = \langle p_* \nabla' \cdot \mathbf{v}' \rangle = 0$.

On peut chercher à faire apparaître par factorisation dans les termes dit «de flux» (sous l'opérateur ∇_{ℓ}) des équations (I.1.15) et (I.1.16), des fonctions de structures, c'est-à-dire des multiplications d'incrémentes tel que $\langle \delta \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v} \delta \mathbf{v} \rangle$. Via les hypothèses d'homogénéité

2. On regardera la différence analytique entre les fonctions de type incrémentale ou non (traitée numériquement dans les cadres Hall-MHD incompressible et compressible par FERRAND, GALTIER, SAHRAOUI, MEYRAND et al. 2019 ; FERRAND, SAHRAOUI et al. 2022). La question de la convergence de taux de cascade obtenus avec des lois du même type (incrémental ou non) mais différentes formulations (exemple des différentes puissances) reste un problème ouvert qui n'a, à notre connaissance, pas été traité rigoureusement.

et les contraintes (I.1.14), on peut faire ainsi ressortir :

$$\begin{aligned}
\nabla_{\ell} \cdot &< \delta \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v} \delta \mathbf{v} > \\
&= \nabla_{\ell} \cdot < \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}' \mathbf{v}' - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \mathbf{v} - \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}' \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \mathbf{v}' + 2\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}' \mathbf{v} - 2\mathbf{v}' \cdot \mathbf{v} \mathbf{v}' > \\
&= 2\nabla_{\ell} \cdot < \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}' \mathbf{v} - \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v} \mathbf{v}' >
\end{aligned} \tag{I.1.17}$$

Et de même :

$$\nabla_{\ell} \cdot < \delta \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{v}_A \delta \mathbf{v} > = 2\nabla_{\ell} \cdot < \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}'_A \mathbf{v} - \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A \mathbf{v}' > \tag{I.1.18}$$

$$\nabla_{\ell} \cdot < \delta \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v}_A \delta \mathbf{v}_A > = \nabla_{\ell} \cdot < \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'_A \mathbf{v}_A - \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}_A \mathbf{v}'_A + \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'_A \mathbf{v}'_A > \tag{I.1.19}$$

Les fonctions de structures d'ordre 3, $< \delta \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v} \delta \mathbf{v} >$ et $< \delta \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{v}_A \delta \mathbf{v} >$, rappellent la convection de l'énergie, respectivement cinétique et magnétique, par le champ de vitesse présente dans l'équation d'énergie totale (I.1.7), et $< \delta \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v}_A \delta \mathbf{v}_A >$ rappelle la convection de l'hélicité croisée par le champ magnétique.

Ainsi, l'équation de la fonction de corrélation de l'énergie totale obtenue avec $\mathcal{R} = < \frac{1}{2}\rho_0 \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}' + \frac{1}{2}\rho_0 \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}'_A >$ peut s'écrire :

$$\partial_t \mathcal{R} = \frac{1}{4}\rho_0 \nabla_{\ell} \cdot < \delta \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v} \delta \mathbf{v} + \delta \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{v}_A \delta \mathbf{v} + 2\delta \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v}_A \delta \mathbf{v}_A > \tag{I.1.20}$$

$$+ \frac{1}{2}\rho_0 < \mathbf{v}' \cdot \mathbf{f}_c + \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}'_c + \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{f}_m + \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{f}'_m > \tag{I.1.21}$$

$$+ \frac{1}{2}\rho_0 < \mathbf{v}' \cdot \mathbf{d}_c + \mathbf{v} \cdot \mathbf{d}'_c + \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{d}_m + \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{d}'_m > \tag{I.1.22}$$

où dans le terme de droite la première ligne décrit la cascade non-linéaire, la deuxième, l'injection au taux ε_F ($=$ (I.1.21)), et la troisième, la dissipation (ε_D = (I.1.22)). Cette équation est une loi exacte de type von Karman, Howarth et Monin (KHM) (KARMAN et HOWARTH 1938 ; FRISCH 1995 ; GALTIER 2021). Elle est valable dans et en dehors de la zone inertielle. En $\ell = 0$, on retrouve l'équation de densité d'énergie totale moyenne dans ce système : $\partial_t < E_{tot} > = < E_F > + < E_D >$ avec $< E_F > = \rho_0 < \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}_c + \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{f}_m >$, la densité d'énergie moyenne injectée et $< E_D > = \rho_0 < \mathbf{v} \cdot \mathbf{d}_c + \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{d}_m >$, la densité d'énergie moyenne dissipée. Si le système est conservatif, $< E_F > = - < E_D >$.³

Pour définir le taux de cascade, ε_{NL} , on doit appliquer les hypothèses de stationnarité statistique et de séparations d'échelle de Kolmogorov : les taux de cascade, injection, ε_F , et dissipation, ε_D , considéré dans leur domaine d'échelles respectif, doivent s'égaliser. En effet, en cas de stationnarité statistique, le terme d'évolution temporelle s'annule et avec la séparation d'échelles, l'énergie qui est injectée à grande échelle n'a pas d'autre choix que de cascader avant d'être dissipée. On notera ce taux de transfert à l'équilibre ε . Ainsi si l'on regarde en une frontière, ℓ_f par exemple entre la zone d'injection et la zone inertielle, (I.1.22) s'annule, (I.1.21) = $\varepsilon_F(\ell_f^+) = \varepsilon_{NL}(\ell_f^-) = \varepsilon$ et finalement :

$$\varepsilon = -\frac{1}{4}\rho_0 \nabla_{\ell} \cdot < \delta \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v} \delta \mathbf{v} + \delta \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{v}_A \delta \mathbf{v} + 2\delta \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v}_A \delta \mathbf{v}_A > \tag{I.1.23}$$

Cette équation est la loi exacte PP98 pour l'énergie totale du modèle IMHD, obtenue à partir de la théorie de Kolmogorov (similairement aux lois exactes dites génériquement

3. Afin que $< E_F > = - < E_D >$ soit respecté ε_F ne doit pas s'annuler aux échelles où le forçage n'a pas d'influence mais plutôt être égal à $< E_F >$. $\varepsilon_F(\ell)$ ne représente donc pas l'énergie qui est injecté à l'échelle ℓ mais plutôt l'énergie qui a été injecté dans la cascade aux échelles $> \ell$, où le forçage est actif.

«KHM», on appellera ces lois exactes obtenues à partir de la théorie de Kolmogorov, «lois K41»). Cette formule du taux de cascade ε_{NL} nous permet, dans le vent solaire par exemple, d'estimer le taux de transfert à l'équilibre ε (valeur dans la zone inertielle) et donc le taux de dissipation turbulente (i.e. permis par la cascade turbulente) pour répondre par exemple au problème du chauffage (BRUNO et CARBONE 2013). En effet, ce taux est difficile à estimer directement : il faudrait définir quels processus cinétiques dissipent l'énergie et surpasser les limites de résolutions des instruments de mesures.

Phénoménologiquement, ε étant supposé constant et avec l'hypothèse d'isotropie, on remarque que : $(\delta \mathbf{v})^3 \sim (\delta \mathbf{v}_A)^3 \sim \varepsilon \ell \Rightarrow (\delta \mathbf{v})^2 \sim (\delta \mathbf{v}_A)^2 \sim \ell^{2/3}$, ce qui donne les spectres 1D d'énergie cinétique et magnétique en $E(k) \sim k(\delta \mathbf{v}(k))^2 \sim k(\delta \mathbf{v}_A(k))^2 \sim k^{-5/3}$. On retrouve ainsi la loi phénoménologique des spectres en $-5/3$ de Kolmogorov étendue aux fluides magnétisés.⁴

Pour en revenir à la différence entre les fonctions de corrélation, regardons ce qu'il se passe si l'on considère une fonction incrémentale, par exemple $\mathcal{S} = \langle \frac{1}{2}\rho_0\delta \mathbf{v}^2 + \frac{1}{2}\rho_0\delta \mathbf{v}_A^2 \rangle$ formée de fonctions de structure d'ordre 2 qui rappelle celles d'ordre 3 impliquées dans le taux de cascade. On remarque que $\mathcal{S} = 2 \langle E_{tot} \rangle - 2\mathcal{R}$. Ainsi la loi exacte KHM (I.1.20) devient :

$$\partial_t \mathcal{S} = -\frac{1}{2}\rho_0 \nabla_{\ell} \cdot \langle \delta \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v} \delta \mathbf{v} + \delta \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{v}_A \delta \mathbf{v} + 2\delta \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v}_A \delta \mathbf{v}_A \rangle \quad (\text{I.1.24})$$

$$+ \rho_0 \langle \delta \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{f}_c + \delta \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{f}_m \rangle \quad (\text{I.1.25})$$

$$+ \rho_0 \langle \delta \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{d}_c + \delta \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{d}_m \rangle \quad (\text{I.1.26})$$

Similairement aux appellations lois KHM et K41, on utilisera le nom générique «KHMS» pour indiquer le type de lois obtenu avec une fonction incrémentale. La partie non-linéaire, le taux de cascade, n'est pas impactée. Mais une question émerge : les définitions des taux de forçage et de dissipations dépendants de \mathbf{f}_c , \mathbf{f}_m et \mathbf{d}_c , \mathbf{d}_m extraites de (I.1.20) et celles extraites de (I.1.24) sont-elles équivalentes ? Regarder \mathcal{S} ou \mathcal{R} revient à regarder ou une quantité énergétique incrémentale ou celle restant dans un bilan énergétique total moyen, $\langle E_{tot} \rangle = \mathcal{S}/2 + \mathcal{R}$ définit suivant les échelles. C'est la même chose pour les définitions des taux d'injection et de dissipation. Le choix de la définition, incrémentale ou non, des taux, dépend donc du point de vue que l'on veut étudier et comme on vient de le voir, il est très facile de passer, analytiquement, d'une loi KHM à une loi KHMS.

4. Lorsque le champ magnétique est important, de l'anisotropie apparaît dans l'espace de Fourier entre la direction parallèle au champ magnétique et le plan perpendiculaire. La description phénoménologique doit donc être complétée par exemple par la condition dite de "critical balance" (GOLDREICH et SRIDHAR 1995 ; HORBURY, M FORMAN et OUGHTON 2008).

1.4 Synthèse des définitions et méthodes (cadre IMHD)

Modèle contraint tel que $\rho = \rho_0 \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$:

$$\partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} - \mathbf{v}_A \cdot \nabla \mathbf{v}_A + \frac{1}{\rho_0} \nabla p_* = \mathbf{f}_c + \mathbf{d}_c \quad (\text{I.1.27})$$

$$\partial_t \mathbf{v}_A + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}_A - \mathbf{v}_A \cdot \nabla \mathbf{v} = \mathbf{f}_m + \mathbf{d}_m \quad (\text{I.1.28})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \nabla \cdot \mathbf{v}_A = 0 \quad (\text{I.1.29})$$

Points méthodologiques de linéarisation (voir figure I.1.1) :

- Négliger toutes quantités ou termes n'étant pas d'ordre 0 ou 1
- $\mathbf{v} \simeq \mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_A \simeq \mathbf{v}_{A0} + \mathbf{v}_{A1}$ avec $\mathbf{v}_{A0} = v_{A0} \mathbf{b}_0$ et $\mathbf{b}_0 = \mathbf{e}_z$
- Passage dans l'espace de Fourier : $\partial_t \rightarrow -i\omega$ et $\nabla \rightarrow i\mathbf{k}$ avec

$$\mathbf{k} = k_\perp \mathbf{e}_x + k_\parallel \mathbf{e}_z = k(\sin \theta \mathbf{e}_x + \cos \theta \mathbf{e}_z)$$

Relation de dispersion linéaire : Existence de modes d'Alfvén

$$\omega = \pm k_\parallel v_{A0} = \pm v_{A0} k \cos \theta \quad (\text{I.1.30})$$

Hypothèses de Kolmogorov :

- Homogénéité statistique
- Stationnarité statistique
- Séparation des gammes d'échelles d'injection/forçage (où le taux ε_F agit seul), de cascade/inertielle (resp. ε_{NL}), et de dissipation/chauffage (resp. ε_D).

$\Rightarrow \varepsilon_{NL} = \varepsilon_F = \varepsilon_D$ chacun considéré dans sa zone d'échelles. Cette valeur sera notée ε .

Fonctions de corrélation d'énergie totale et moyennes statistiques :

- $\mathcal{R} = \frac{1}{2} \rho_0 < \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}' + \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}'_A >$
- $\mathcal{S} = \frac{1}{2} \rho_0 < (\delta \mathbf{v})^2 + (\delta \mathbf{v}_A)^2 > = 2 < E_{tot} > - 2\mathcal{R}$
- $< E_{tot} > = \mathcal{R}(\ell = 0)$, $< E_F > = \varepsilon_F(\ell = 0)$, $< E_D > = \varepsilon_D(\ell = 0)$

Equations statistiques (énergie totale moyenne, lois exactes KHM et KHMS) :

$$\partial_t < E_{tot} > = < E_F > + < E_D > \quad (\text{I.1.31})$$

$$\begin{aligned} \partial_t \mathcal{R} = -\varepsilon_{NL} + \varepsilon_F + \varepsilon_D &= \frac{1}{4} \rho_0 \nabla_\ell \cdot < \delta \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v} \delta \mathbf{v} + \delta \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{v}_A \delta \mathbf{v} + 2 \delta \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v}_A \delta \mathbf{v}_A > \\ &+ \frac{1}{2} \rho_0 < \mathbf{v}' \cdot \mathbf{f}_c + \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}'_c + \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{f}_m + \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{f}'_m > \\ &+ \frac{1}{2} \rho_0 < \mathbf{v}' \cdot \mathbf{d}_c + \mathbf{v} \cdot \mathbf{d}'_c + \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{d}_m + \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{d}'_m > \end{aligned} \quad (\text{I.1.32})$$

$$\begin{aligned} \partial_t \mathcal{S} = -\varepsilon_{NL} + \varepsilon_F + \varepsilon_D &= -\frac{1}{2} \rho_0 \nabla_\ell \cdot < \delta \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v} \delta \mathbf{v} + \delta \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{v}_A \delta \mathbf{v} + 2 \delta \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v}_A \delta \mathbf{v}_A > \\ &+ \rho_0 < \delta \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{f}_c + \delta \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{f}_m > \\ &+ \rho_0 < \delta \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{d}_c + \delta \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{d}_m > \end{aligned} \quad (\text{I.1.33})$$

Loi exacte PP98 sur les taux d'énergie (type K41) :

$$\varepsilon = -\frac{1}{4} \rho_0 \nabla_\ell \cdot < \delta \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v} \delta \mathbf{v} + \delta \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{v}_A \delta \mathbf{v} + 2 \delta \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v}_A \delta \mathbf{v}_A > \quad (\text{I.1.34})$$

PARTIE I : CHAPITRE 2

QUE SAIT-ON SUR LE MODÈLE COMPRESSIBLE ?

Sommaire

2.1	Energétique du modèle non fermé	13
2.2	Fermetures thermodynamique	14
2.3	Propriétés linéaires	18
2.4	Synthèse sur le modèle compressible avec pression isotrope	20

Lorsque la contrainte d'incompressibilité qui servait de fermeture au système d'équation est relaxée, le modèle n'est plus fermé. Dans ce chapitre, seront définis différents types de fermetures en considérant toujours une pression isotrope. On regardera ce qu'il advient du taux de cascade dans le chapitre suivant.

2.1 Energétique du modèle non fermé

Si l'on reprend les équations du modèle MHD idéal dérivées du modèle cinétique dans l'introduction et que l'on suppose une pression isotrope, on obtient le système écrit avec la vitesse d'Alfvén, $\mathbf{v}_A = \frac{\mathbf{B}}{\sqrt{\mu_0 \rho}}$, :

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (\text{I.2.1})$$

$$\partial_t (\rho \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v} - \rho \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A) + \nabla p_* = 0 \quad (\text{I.2.2})$$

$$3\partial_t p + \nabla \cdot (3p \mathbf{v} + 2\mathbf{q}) + 2p \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (\text{I.2.3})$$

$$\partial_t \mathbf{v}_A - \nabla \cdot (\mathbf{v}_A \mathbf{v} - \mathbf{v} \mathbf{v}_A) + \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{v}_A - \frac{\mathbf{v}_A}{2} \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (\text{I.2.4})$$

La contrainte sur le champ magnétique peut s'écrire : $\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}_A) = -\rho \nabla \cdot \mathbf{v}_A$. Ce système n'est pas fermé, mais avant de le fermer, regardons ce qu'il nous indique en terme d'énergétique. L'équation de densité d'énergie cinétique $E_c = \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}^2$ obtenue via (I.2.1) et (I.2.2) est :

$$\partial_t E_c + \nabla \cdot (E_c \mathbf{v} + p_* \mathbf{v} - \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A) = -\rho \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A : \nabla \mathbf{v} + p_* \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (\text{I.2.5})$$

L'équation de densité d'énergie magnétique $E_m = \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}_A^2$ obtenue via (I.2.1) et (I.2.4) est :

$$\partial_t E_m + \nabla \cdot (E_m \mathbf{v}) = \rho \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A : \nabla \mathbf{v} - p_m \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (\text{I.2.6})$$

On remarque que l'échange entre ces deux canaux énergétiques se fait à travers la pression magnétique et un terme croisé (termes de droite de (I.2.6)) similaire au cas incompressible. La densité d'énergie totale moyenne $\langle E_{tot} = E_c + E_m + E_u \rangle$ est un invariant de système, ce qui nous autorise a priori à appliquer la méthode résumée dans la section 1.4 pour en étudier la cascade. Afin que cette énergie soit conservée, il faut ajouter une équation annulant le terme source dépendant de p dans l'équation d'énergie cinétique (I.2.5). Cette équation est l'équation de densité d'énergie interne, $E_u = \rho u$ avec u l'énergie interne spécifique, dans laquelle on doit aussi faire figurer un terme de flux de chaleur, $\nabla \cdot \mathbf{q}$, :

$$\partial_t E_u + \nabla \cdot (E_u \mathbf{v} + \mathbf{q}) = -p \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (\text{I.2.7})$$

L'équation de densité d'énergie totale, $E_{tot} = E_c + E_m + E_u$, est alors :

$$\partial_t E_{tot} + \nabla \cdot (E_{tot} \mathbf{v} + p_* \mathbf{v} - \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A + \mathbf{q}) = 0 \quad (\text{I.2.8})$$

On peut remarquer que dans le cas incompressible, l'énergie interne (I.2.7) est découplée de l'énergie cinétique (I.2.5) et par ce biais de l'énergie magnétique (I.2.6) puisque $p \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$. Via cette méthode basée sur un bilan, nous obtenons, indépendamment de la fermeture, une équation d'évolution pour l'énergie interne ECKART 1940. L'obtention d'une équation de densité d'énergie totale est donc possible sans expliciter de fermeture qui pourra donc être injectée par la suite. Ces équations ((I.2.7) et (I.2.8)) sont générales car elles sont applicable à toutes données, tous modèles respectant le comportement des premiers moments fluides obtenu via l'équation de Vlasov (ρ (I.2.1) et \mathbf{v} (I.2.2)) et l'équation d'induction (I.2.4), mais elle n'est pas complète, pas fermée, rien n'y impose le respect de l'équation (I.2.3) concernant p qui pourrait être défini autrement et \mathbf{q} reste indéfini. Cette observation présage la possibilité d'obtenir une loi exacte tout aussi générale sur la cascade de densité d'énergie totale comme on le verra dans le chapitre 3.

2.2 Fermetures thermodynamique

En MHD compressible avec pression isotrope, l'équation de fermeture est souvent une relation entre la pression, p , et la densité, ρ , issue de la thermodynamique et venant se substituer à l'équation sur la pression (I.2.3).¹ Par la suite, on appellera thermodynamique tout ce qui est relatif à la densité, la pression, l'énergie interne, etc. (grandeurs supposément définies et convergentes dans le cadre fluide) et pouvant relever du champ de discipline empirique de la thermodynamique à l'équilibre (BOREL et FAVRAT 2005) possiblement étendu au cadre hors équilibre (LIVADIOTIS et MCCOMAS 2012).

Le premier principe de la thermodynamique peut s'écrire

$$du = \delta q + \delta w = T ds + \frac{p}{\rho^2} d\rho \quad (\text{I.2.9})$$

avec q la chaleur et w le travail de pression. En y formant la dérivée temporelle totale à partir des dérivées partielles : $d_t = \partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla$ et en injectant l'équation de densité de

1. On pourrait aussi fermer au niveau des moments suivant via une loi de Fourier sur le flux de chaleur, $\mathbf{q} = -\kappa \nabla T$, (**belmont_introduction_2018**) ou la fermeture à l'ordre 4 proposé par CHUST et BELMONT 2006 par exemple. On ne détaillera pas ces possibilités ici mais on notera que le flux de chaleur peut, via κ , la viscosité thermique, n'avoir un impact qu'aux petites échelles, telle que les dissipations visqueuse et résistive (EYINK et DRIVAS 2018).

masse (I.2.1), on retrouve une équation sur la densité d'énergie interne :

$$d_t(\rho u) = \rho T d_t s - (p + \rho u) \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (\text{I.2.10})$$

Cette équation est compatible avec l'équation (I.2.7) si $\nabla \cdot \mathbf{q} = -\rho T d_t s$, s étant l'entropie spécifique et T la température. Ces équations sont compatibles avec l'équation de pression (I.2.3) si l'on impose $\rho u = \frac{3}{2}p$. On verra que ce n'est pas forcément le cas avec les fermetures de type thermodynamique.

La définition originale, thermodynamique (BOREL et FAVRAT 2005), des dénominations «polytrophe», «isochore», «isobare», «isotherme» ou «isentropie» ne s'applique qu'à des transformations :

- isochore (ou incompressible puisque $\rho = m/V$) signifie à volume V constant
- isobare signifie à pression P constante,
- isotherme signifie à température T constante,
- isentropie signifie à entropie s constante, elle ne peut être ni créée ni échangée par transfert thermique,
- adiabatique signifie sans transfert thermique δq , c'est-à-dire sans échange d'entropie,
- polytrophe signifie à $\sigma = \frac{T ds}{V dP}$, le facteur polytrophe, constant.

La transformation adiabatique est synonyme de l'isentropie si aucune entropie n'est créée (cas réversible). En astrophysique et physique des plasmas, on entend ces termes en tant que caractéristique du système et ils sont utilisés pour qualifier une fermeture. Ici, dans une volonté de clarifier cet usage, on considérera qu'un système décrit idéalement avec l'une de ces caractéristiques est un système dans lequel la quantité caractérisée ne pourra évoluer qu'en suivant le type de transformation associée. En réalité, ces caractéristiques coexistent souvent, l'une pouvant dominer les autres, par exemple dans les plasmas spatiaux (LIVADIOTIS et MCCOMAS 2012). L'hypothèse polytrophe est particulière dans le sens où suivant la valeur de σ , on peut se retrouver dans le cadre des hypothèses isochore, isobare, isotherme, adiabatique ou isentropie (BOREL et FAVRAT 2005).

D'après HOREDT 2004, l'hypothèse polytrophe, introduite par CHANDRASEKHAR 1939 en astrophysique est définie telle que pV^γ constant avec $\gamma = \frac{c_p - c}{c_v - c}$, nommé indice spectral ou indice polytropique, $c = \frac{dQ}{dT}$ étant la chaleur spécifique, c_p la chaleur spécifique à pression constante et c_v celle à volume constant. Cette définition rappelle celle de l'indice adiabatique $\gamma_a = c_p/c_v$. On peut d'ailleurs réécrire γ en fonction de γ_a en se plaçant dans le cadre d'un gaz parfait ($PV \propto T$) et en utilisant les relations (1.2.19) à (1.2.24) de HOREDT 2004. Ainsi $\gamma = (\gamma_a - 1)K + \gamma_a$ avec $K = \frac{\delta q}{\delta w} = \frac{T ds}{-P dV}$. Sachant que $d(pV^\gamma) = 0$, le lien entre pV^γ et $\sigma = \frac{T ds}{V dP}$ est $\sigma = K/\gamma = \frac{1 - \gamma_a/\gamma}{\gamma_a - 1}$. D'où l'équivalence des définitions via σ et γ .²

La figure I.2.1 inspirée de LIVADIOTIS et MCCOMAS 2012, complétée avec les valeurs de σ et quelques exemples de plasmas spatiaux données par LIVADIOTIS 2018 résume le lien entre les différentes fermetures et l'hypothèse polytrophe. Les plasmas spatiaux pouvant être modélisés comme des gaz parfaits monoatomiques, $\gamma_a = 5/3$ et dans le cas isochore, $\sigma = \frac{1}{\gamma_a - 1} = 3/2$.

Dans le premier principe (I.2.9) et l'équation d'énergie interne (I.2.10), l'utilisation de

2. L'intérêt de la définition via σ met en lumière la différence entre les transformations polytropes et les transformations adiabatiques/isentropie qui semblent souvent confondues en astrophysique (EYINK et DRIVAS 2018), en particulier car le flux de chaleur semble "disparaître" dans l'obtention de la forme explicite de l'énergie interne.

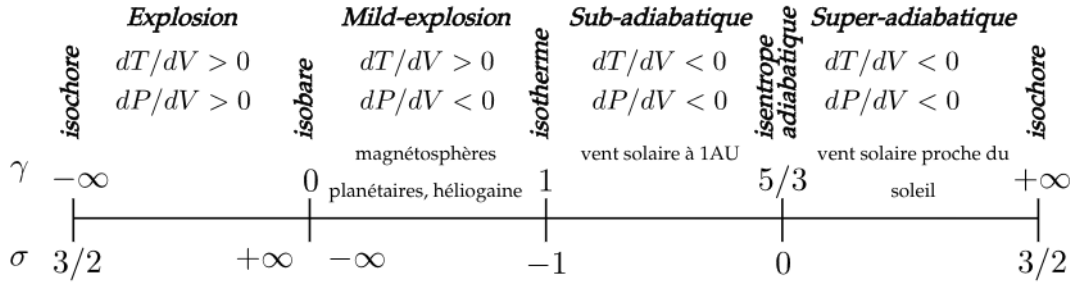


FIGURE I.2.1 – Transformations thermodynamiques et intervalles en fonction du γ du milieu (LIVADIOTIS et MCCOMAS 2012) et du σ (BOREL et FAVRAT 2005), exemple de plasmas spatiaux (LIVADIOTIS 2018). Adiabatique et isentrope y sont confondus dans le cas réversible.

σ permet d'écrire :

$$du = \delta q + \delta w = (K + 1)\delta w = (\sigma\gamma + 1)\delta w \quad (\text{I.2.11})$$

$$d_t(\rho u) = -[(\sigma\gamma + 1)p + \rho u]\nabla \cdot \mathbf{v} \quad (\text{I.2.12})$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{q} = -\rho T d_t s = \sigma\gamma p \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (\text{I.2.13})$$

D'un autre côté, la relation entre p et V peut s'écrire $p \propto \rho^\gamma$. Cela donne l'équation :

$$d_t p = -\gamma p \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (\text{I.2.14})$$

Cette équation est compatible avec l'équation de pression du modèle fluide (I.2.3) si :

$$\left(\frac{5}{3} - \gamma\right)p \nabla \cdot \mathbf{v} = -\frac{2}{3}\nabla \cdot \mathbf{q} \Rightarrow \left(\frac{5}{3} + \left(\frac{2}{3}\sigma - 1\right)\gamma\right)p \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (\text{I.2.15})$$

Par ces relations, on remarque que l'hypothèse polytrophe peut nous permettre de fermer le modèle fluide au niveau du 3ème moment \mathbf{q} en injectant (I.2.13) dans l'équation de p (I.2.3), ou au niveau du 2ème, p , en utilisant γ et en injectant $p \propto \rho^\gamma$ dans (I.2.2). L'hypothèse adiabatique, isentrope si réversible, $\gamma = \gamma_a$ et $\nabla \cdot \mathbf{q} = 0$, est retrouvée dans l'évolution fluide de p si l'on se place dans le cadre d'un gaz parfait monoatomique $\gamma_a = 5/3$ d'après (I.2.15). Dans le cas isotherme, on retrouve dans (I.2.15) ou (I.2.11), $\delta w = -\delta q$, c'est-à-dire $du = 0$. En effet, l'énergie interne d'un gaz parfait ne dépendant que de la température, elle ne peut qu'être nulle sous l'hypothèse d'isothermie. Les cas isochore (ou incompressible) et isobare sont plus délicats. Dans le cas isochore, le produit $\gamma \nabla \cdot \mathbf{v}$ qui apparaît dans toutes les expressions de (I.2.11) à (I.2.15), tend vers $\infty \times 0$. Dans le cas isobare, $\infty \times 0$ apparaît dès que $\sigma\gamma$ est présent dans l'équation. Ces limites du cas polytrophe sont donc problématiques dans la définition de u . Elles doivent être traitées indépendamment. Cela a été fait dans le chapitre sur la cascade incompressible pour le cas isochore. L'hypothèse isobare, quant à elle, ferme le système fluide au niveau de l'équation (I.2.2) et empêche tout échange énergétique entre les canaux interne et cinétique-magnétique.

Dans le cadre de la fermeture polytrophe, $p = \frac{c_s^2}{\gamma} \rho^\gamma$, avec $c_s^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho}$ le carré de la vitesse

thermique. Pour ce qui est de la variation d'énergie interne spécifique, elle devient :

$$du = (\sigma\gamma + 1) \frac{p}{\rho^2} d\rho = (\sigma\gamma + 1) \frac{p}{\rho^\gamma} \rho^{\gamma-2} d\rho \quad (\text{I.2.16})$$

$$= \begin{cases} \frac{\sigma\gamma+1}{\gamma-1} \frac{p}{\rho^\gamma} d\rho^{\gamma-1} & \text{si } \gamma \neq 1 \\ (\sigma+1) \frac{p}{\rho} d(\ln \rho) & \text{si } \gamma = 1 \end{cases} \quad (\text{I.2.17})$$

Et par intégration :

$$u - u_0 = \begin{cases} \frac{\sigma\gamma+1}{\gamma-1} \frac{p}{\rho^\gamma} (\rho^{\gamma-1} - \rho_0^{\gamma-1}) & \text{si } \gamma \neq 1 \\ (\sigma+1) \frac{p}{\rho} \ln \frac{\rho}{\rho_0} & \text{si } \gamma = 1 \end{cases} \quad (\text{I.2.18})$$

en notant u_0 et ρ_0 les constantes d'intégrations. Dans le cas particulier de la fermeture isotherme : $\gamma = 1$, $\sigma = -1$, $p = c_s^2 \rho$ avec c_s constante et $du = 0$.

La cascade turbulente est, dans les plasmas spatiaux peu collisionnels, une réponse au problème du chauffage. En définissant le chauffage comme la variation de température et sachant que pour un gaz parfait la relation entre énergie interne et température est linéaire, il est facile de définir le chauffage comme tout transfert d'énergie vers l'énergie interne, appelée aussi énergie thermique (CASSAK et BARBHUIYA 2022). Le terme de pression dans l'équation (I.2.2) s'interprète alors comme les termes visqueux et résistifs abordés dans le chapitre 1, c'est à dire comme un terme "dissipatif". Mais ce serait oublier que la cascade turbulente permet de faire le lien entre les grandes échelles, fluides où la température est définie, et les petites, cinétique/particulaire/locale. Dans le cadre cinétique/particulaire, on ne peut pas définir de température et le chauffage sera visible dans le mouvement, de plus en plus désordonné, des particules. Ce désordre est mesurable macroscopiquement à travers l'entropie. Chauffer à petite échelle a donc un impact entropique. C'est possible via les termes visqueux par exemple. D'après EYINK et DRIVAS 2018, ils transfèrent l'énergie cinétique à l'énergie interne tout en contribuant à l'équation d'entropie contrairement au terme de pression isotrope. C'est aussi le cas du flux de chaleur s'il est défini via la loi de Fourier et la viscosité thermique κ . Pour répondre à la question de chauffage, le taux de cascade doit donc prendre en compte l'énergie étant transférée isentropiquement à l'énergie interne. Cette interprétation justifie l'hypothèse que seul le terme de travail de l'énergie interne affecte la cascade dans la zone inertielle proposée par GALTIER et BANERJEE 2011. Cette hypothèse revenant à supposer une zone inertielle isentrope telle que $\sigma = 0$. Si le système global fermé tel que $\gamma \neq \gamma_a$, le terme de chaleur joue un rôle aux autres échelles et s'adapte afin que les relations thermodynamiques soient respectées. La fermeture considérée par GALTIER et BANERJEE 2011 est la fermeture isotherme qui alors implique dans la zone inertielle : $\gamma = 1$, $\sigma = 0$, $p = c_s^2 \rho$ avec c_s constante et $du = \delta w \Rightarrow u - u_0 = \frac{p}{\rho} \ln \frac{\rho}{\rho_0}$. On appellera cette fermeture «isentrope-isotherme». En suivant cette logique, je me suis intéressée dans SIMON et SAHRAOUI 2021 à la fermeture «isentrope-polytrophe» : $\sigma = 0$, $p = \frac{c_s^2}{\gamma} \rho^\gamma$ et

$$u - u_0 = \begin{cases} \frac{1}{\gamma-1} \frac{p}{\rho^\gamma} (\rho^{\gamma-1} - \rho_0^{\gamma-1}) & \text{si } \gamma \neq 1 \\ \frac{p}{\rho} \ln \frac{\rho}{\rho_0} & \text{si } \gamma = 1 \end{cases} \quad (\text{I.2.19})$$

Dans l'usage des formes explicite de l'énergie interne dans les calculs de lois exactes avec l'hypothèse polytrophe, les constantes sont souvent annulées entre elles. Par exemple, dans le cas «isentrope-polytrophe», BANERJEE et GALTIER 2014 considère comme forme

explicite de l'énergie interne $\rho u = \frac{1}{(\gamma-1)}p$. Contrairement à ce travail, nous avons choisi de maintenir une forme de compatibilité avec la fermeture «isentrope-isotherme» de GALTIER et BANERJEE 2011 (si $u = u_0$ alors $u = 0$) dans nos choix de constantes.

ALUIE, S LI et H LI 2012 observent en détail la cascade d'énergie cinétique et magnétique dans différentes simulations subsoniques à transsoniques. Le transfert cinétique-interne via la pression semble n'avoir lieu qu'à grande échelle dans une zone qu'ils appellent «zone de conversion», à plus petites échelles cette contribution reste constante. Ils en déduisent un découplage des cascades d'énergie cinétique et d'énergie interne et l'existence d'une zone inertielle cinétique. EYINK et DRIVAS 2018 déduisent aussi, analytiquement, un effet à grande échelle de la pression qui permettrait d'alimenter des structures cohérentes et de réduire l'entropie à grande échelle. Cela induirait une cascade inverse d'entropie vers les grandes échelles et un équilibre s'établirait entre les cascades énergétique totale et d'entropie. Aucun de ces résultats ne prouve que l'énergie interne de cascade pas. Ne pas la prendre en compte dans l'estimation du taux de chauffage comme le propose HELLINGER, VERDINI et al. 2018 est donc hasardeux et n'est justifiable que dans le cas subsonique ou à suffisamment petites échelles où sa contribution semble mineure (ANDRÉS, SAHRAOUI, GALTIER, LZ HADID, DMITRUK et al. 2018; FERRAND, GALTIER, SAHRAOUI et FEDERRATH 2020). Etudier la cascade dans une zone inertielle où la pression ne transférerait pas d'énergie vers l'énergie interne, c'est à dire ne varierait pas, correspondrait à regarder une zone inertielle isobare et ne semble donc pas physiquement absurde mais étant intéressés par l'impact de la pression sur la cascade turbulente totale, cette hypothèse réductrice n'a été que brièvement envisagée.

Sont résumés dans la table 2.2, les caractéristiques, dénominations et choix de constante des fermetures définies polytropiquement qui serviront par la suite.

Nom	Paramètres polytropes	Pression	Energie interne explicite
Polytrope	$\{\sigma, \gamma\}$	$\frac{p}{\rho} = \frac{c_s^2}{\gamma}$	$u = \frac{\sigma+1}{\gamma-1} \frac{c_s^2 - c_{s0}^2}{\gamma}$ ou $(\sigma + 1)c_s^2 \ln \frac{\rho}{\rho_0}$
Isotherme	$\{-1, 1\}$	$\frac{p}{\rho} = c_s^2$	$u = 0$
Isentrope-polytrope	$\{0, \gamma\}$	$\frac{p}{\rho} = \frac{c_s^2}{\gamma}$	$u = \frac{1}{\gamma-1} \frac{c_s^2 - c_{s0}^2}{\gamma}$ ou $c_s^2 \ln \frac{\rho}{\rho_0}$
Isentrope-isotherme	$\{0, 1\}$	$\frac{p}{\rho} = c_s^2$	$u = c_s^2 \ln \frac{\rho}{\rho_0}$

TABLE I.2.1 – Fermetures et relations associées. La forme de l'énergie interne de l'isentrope-isotherme est calquée sur celle utilisée dans le papier GALTIER et BANERJEE 2011. Les autres sont définies de telle sorte à maintenir une forme de compatibilité : si $u = u_0$ alors $u = 0$. Celle de l'isentrope-polytrope est donc légèrement différente de celle utilisée par BANERJEE et GALTIER 2014.

2.3 Propriétés linéaires

Dans le cadre de l'obtention d'une relation de dispersion compressible, on fermera le système avec la fermeture polytrope pour rester dans le cas le plus général possible. Ainsi,

on utilise le système d'équations :

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (\text{I.2.20})$$

$$\partial_t (\rho \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v} - \rho \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A) + \nabla p_* = 0 \quad (\text{I.2.21})$$

$$\partial_t \mathbf{v}_A - \nabla \cdot (\mathbf{v}_A \mathbf{v} - \mathbf{v} \mathbf{v}_A) + \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{v}_A - \frac{\mathbf{v}_A}{2} \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (\text{I.2.22})$$

fermé par et $p = \frac{c_s^2}{\gamma} \rho$.

L'application de la méthode de linéarisation présentée dans le chapitre I.1 nous donne l'équation de dispersion suivante :

$$\begin{pmatrix} \frac{\omega^2}{k_{\parallel}^2 v_{A0}^2} - (1 + \frac{\gamma}{2} \beta_0) \frac{k_{\perp}^2}{k_{\parallel}^2} - 1 & 0 & -\frac{\gamma}{2} \beta_0 \frac{k_{\perp}}{k_{\parallel}} \\ 0 & \frac{\omega^2}{k_{\parallel}^2 v_{A0}^2} - 1 & 0 \\ -\frac{\gamma}{2} \beta_0 \frac{k_{\perp}}{k_{\parallel}} & 0 & \frac{\omega^2}{k_{\parallel}^2 v_{A0}^2} - \frac{\gamma}{2} \beta_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_x^{(1)} \\ v_y^{(1)} \\ v_z^{(1)} \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{I.2.23})$$

avec $\beta_0 = \frac{2\langle p \rangle}{\langle \rho \rangle v_{A0}^2}$ le paramètre β linéarisé du plasma (la notation indicelle 0 telle que définie dans le chapitre 1 n'est pas utilisée pour p et ρ afin d'éviter toute confusion avec les constantes d'intégrations définies dans la section 2.2). La relation de dispersion est donnée par l'annulation du déterminant de la matrice, c'est-à-dire, :

$$0 = \left(\frac{\omega^2}{k_{\parallel}^2 v_{A0}^2} - 1 \right) \left(\frac{\omega^2}{k^2 v_{A0}^2} - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\gamma}{2} \beta_0 \pm \sqrt{\Delta} \right) \right) \quad (\text{I.2.24})$$

avec $\Delta = (1 - \frac{\gamma}{2} \beta_0)^2 + 2\gamma \beta_0 \sin^2 \theta = (1 + \frac{\gamma}{2} \beta_0)^2 - 2\gamma \beta_0 \cos^2 \theta$ en notant θ l'angle entre \mathbf{k} et \mathbf{e}_z . La première racine correspond au mode d'Alfvén incompressible et les deux autres aux modes magnéto-sonores rapide (+) et lent (-). Ces modes sont stables, puisque $\Delta > 0$ et $\frac{1}{2}(1 + \frac{\gamma}{2} \beta_0 \pm \sqrt{\Delta}) > 0$. Ces modes peuvent participer à la cascade, mais le mode d'Alfvén semble dominant (ANDRÉS, CLARK DI LEONI et al. 2017; BRODIANO, ANDRÉS et DMITRUK 2021).

2.4 Synthèse sur le modèle compressible avec pression isotrope

Modèle :

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (\text{I.2.25})$$

$$\partial_t (\rho \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v} - \rho \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A) + \nabla p_* = 0 \quad (\text{I.2.26})$$

$$\partial_t \mathbf{v}_A - \nabla \cdot (\mathbf{v}_A \mathbf{v} - \mathbf{v} \mathbf{v}_A) + \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{v}_A - \frac{\mathbf{v}_A}{2} \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (\text{I.2.27})$$

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}_A) + \rho \nabla \cdot \mathbf{v}_A = 0 \quad (\text{I.2.28})$$

Fermetures écrites dans le cadre général polytrophe et formes explicites de l'énergie interne spécifiques considérées (telles que $u_0 = u(\rho = \rho_0) = 0$) :

$$p = \rho \frac{c_s^2}{\gamma}, \quad c_s^2 \propto \rho^{\gamma-1}, \quad \sigma = \frac{\nabla \cdot \mathbf{q}}{\gamma p \nabla \cdot \mathbf{v}}$$

- cas polytrophe hors isotherme : $u = \frac{\sigma\gamma+1}{\gamma(\gamma-1)}(c_s^2 - c_{s0}^2)$
- cas isotherme : $\sigma = -1$, $\gamma = 1$, $u = 0$ et c_s constants
- cas isentrope-polytrophe hors isotherme : $\sigma = 0$ et $u = \frac{c_s^2 - c_{s0}^2}{\gamma(\gamma-1)}$
- cas isentrope-isotherme : $\sigma = 0$, $\gamma = 1$, c_s constant et $u = c_s^2 \ln \frac{\rho}{\rho_0}$

Equation d'énergie interne :

$$\text{Formulation générale :} \quad \partial_t (\rho u) + \nabla \cdot (\rho u \mathbf{v} + \mathbf{q}) = -p \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (\text{I.2.29})$$

$$\text{Premier principe thermo :} \quad du = \delta q + \delta w = T ds + \frac{p}{\rho^2} d\rho \quad (\text{I.2.30})$$

$$\text{Formulation thermo :} \quad \partial_t (\rho u) + \nabla \cdot (\rho u \mathbf{v}) - \rho T d_t s = -p \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (\text{I.2.31})$$

$$\Rightarrow \text{Compatibilité :} \quad \nabla \cdot \mathbf{q} = -\rho T d_t s \quad (\text{I.2.32})$$

$$\text{Formulation polytrophe :} \quad \partial_t (\rho u) + \nabla \cdot (\rho u \mathbf{v}) = -(\sigma\gamma + 1)p \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (\text{I.2.33})$$

Equation de pression :

$$\text{Modèle fluide non fermé :} \quad \partial_t p + \nabla \cdot (p \mathbf{v} + \frac{2}{3} \mathbf{q}) + \frac{2}{3} p \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (\text{I.2.34})$$

$$\text{Fermeture polytrophe } (p \propto \rho^\gamma) : \quad \partial_t p + \mathbf{v} \cdot \nabla p - \gamma p \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (\text{I.2.35})$$

$$\Rightarrow \text{Compatibilité :} \quad \left(\frac{5}{3} + \left(\frac{2}{3}\sigma - 1\right)\gamma\right) \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (\text{I.2.36})$$

Relation de dispersion linéaire :

$$0 = \left(\frac{\omega^2}{k_{\parallel}^2 v_{A0}^2} - 1\right) \left(\frac{\omega^2}{k^2 v_{A0}^2} - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\gamma}{2} \beta_0 \pm \sqrt{\left(1 - \frac{\gamma}{2} \beta_0\right)^2 + 2\gamma \beta_0 \sin^2 \theta}\right)\right) \quad (\text{I.2.37})$$

La première racine correspond au mode d'Alfvén similaire à celui obtenu en incompressible et les deux autres aux modes magnéto-sonores rapide (+) et lent (-).

PARTIE I : CHAPITRE 3

DÉCRIRE LA CASCADE COMPRESSIBLE

Sommaire

3.1	Dérivation d'une loi exacte compressible générale pour décrire un écoulement turbulent polytrope	22
3.2	Reformulation de la loi K41 générale dépendant d'une pression isotrope	26
3.3	Contribution du flux de chaleur dans la loi KHM et deuxième reformulation	27
3.4	Synthèse de l'étude analytique de turbulence compressible avec pression isotrope	31

La variation du résultat de l'estimation d'un indice polytropique dans différents types de plasmas spatiaux (voir Figure I.2.1) vient motiver la dérivation d'une loi exacte polytrope pour étudier la cascade d'énergie totale dans ces milieux. L'objectif initial du travail présenté dans cette partie et dont la contribution originale analytique est introduite dans ce chapitre, était de dériver une loi exacte MHD polytrope, une extension des modèles MHD isothermes (BANERJEE et GALTIER 2013; ANDRÉS et SAHRAOUI 2017; ANDRÉS, GALTIER et SAHRAOUI 2018; FERRAND, GALTIER et SAHRAOUI 2021) et HD polytrope (BANERJEE et GALTIER 2014) existant. La cascade y est supposée isentrope dans la zone inertielle telle qu'initialement décrite par GALTIER et BANERJEE 2011 (cas HD isotherme). L'hypothèse d'une fermeture polytrope (resp. isotherme) avec une zone inertielle isentrope revient à la fermeture "isentrope-polytrope" (resp. isentrope-isotherme) discutée au chapitre précédent.

La méthode de calcul envisagée pour atteindre l'objectif initial à en réalité permis d'obtenir une loi exacte générale valable pour toutes les fermetures du système tant que l'isentropie est imposée dans la zone inertielle. Ce travail dont l'application à la fermeture "isentrope-polytrope" répond à l'objectif initial est présenté dans la section 3.1. Dans la section 3.2, on détaillera l'impact des fermetures sur une autre formulation de la loi qui a émergé du travail de relaxation de l'hypothèse d'isotropie de pression qui sera présenté dans le chapitre 1 de la partie II. Bien après avoir atteint l'objectif initial, on s'est posé la question de l'impact du flux de chaleur (a priori attendu en dehors de la zone inertielle) et on l'a pris en compte dans la loi KHM qui, ainsi, a réellement pris une dimension générale. Notre loi a alors adopté une troisième formulation qui sera présentée dans la section 3.3.

Des applications isobare, isotherme et polytrophe y seront abordées en tant qu'exemple d'application clôturant ce travail de généralisation.

3.1 Dérivation d'une loi exacte compressible générale pour décrire un écoulement turbulent polytrophe

La méthode utilisée ici pour dériver une loi exacte compressible correspond à celle détaillée dans le cas incompressible et résumée dans la section I.1.4. La première étape est de définir une fonction de corrélation. La pluralité de possibilités est plus importante que dans le cas incompressible puisque cette fois la compression ($\rho \neq 0$) impacte les densités d'énergie : $E_{tot} = \frac{1}{2}\rho\mathbf{v}^2 + \frac{1}{2}\rho\mathbf{v}_A^2 + \rho u$. Pour l'énergie cinétique, la volonté de considérer une forme de type auto-corrélation, a inspiré des études HD et MHD considérant sa racine-carré en $\sqrt{\rho}\mathbf{v}$ (ex : HELLINGER, PAPINI et al. 2021) tandis que d'autres ont privilégié le sens physique de la quantité de mouvement $\rho\mathbf{v}$ (ex : GALTIER et BANERJEE 2011). Pour l'énergie magnétique, la question est la même : \mathbf{B} (ex : FERRAND, GALTIER et SAHRAOUI 2021) ou $\rho\mathbf{v}_A$ (ex : ANDRÉS et SAHRAOUI 2017) ? Et pour l'énergie interne, les choix présents dans la littérature ont été en partie orientés suivant le type de fermeture : dans le cas polytrophe par exemple, la forme explicite de l'énergie interne spécifique peut s'écrire tel que le carré de la vitesse thermique, d'où $\rho\sqrt{u}$ (BANERJEE et GALTIER 2014) ou $\sqrt{\rho u}$ alors que, dans le cas isotherme (ex : GALTIER et BANERJEE 2011), le choix était plutôt orienté vers la conservation de son intégrité et de prendre ρ en un point et u en un autre. Trois possibilités ont été envisagées pour chaque type d'énergie (dont la forme est ici généralisée en $E_X = \rho X^2$) :

- l'auto-corrélation : $\mathcal{R}_{X1} = \langle \sqrt{\rho'}X' \cdot \sqrt{\rho}X \rangle$ de fonction incrémentale associée : $\mathcal{S}_{X1} = \langle (\delta(\sqrt{\rho}X))^2 \rangle$ puisque $\mathcal{S}_{X1} = 2 \langle E_X \rangle - 2\mathcal{R}_{X1}$
- la moyenne de densité : $\mathcal{R}_{X2} = \frac{1}{2} \langle (\rho' + \rho)X' \cdot X \rangle$ de fonction incrémentale associée : $\mathcal{S}_{X2} = \langle \delta(\rho X) \cdot \delta X \rangle$
- la corrélation avec la densité : $\mathcal{R}_{X3} = \frac{1}{2} \langle \rho'X^2 + \rho X'^2 \rangle$ de fonction incrémentale associée : $\mathcal{S}_{X3} = \langle \delta\rho\delta X^2 \rangle$

Il s'avère qu'utiliser des formes prenant en compte des racines carrées a tendance à compliquer le calcul et le résultat. Les formes finalement choisies sont donc : $\mathcal{R}_c = \mathcal{R}_{c2} = \langle \frac{1}{4}(\rho' + \rho)\mathbf{v}' \cdot \mathbf{v} \rangle$, $\mathcal{R}_m = \mathcal{R}_{m2} = \langle \frac{1}{4}(\rho' + \rho)\mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A \rangle$ et $\mathcal{R}_u = \mathcal{R}_{u3} = \frac{1}{2} \langle \rho'u + \rho u' \rangle$. Ce choix concorde avec celui de ANDRÉS, SAHRAOUI, GALTIER, LZ HADID, DMITRUK et al. 2018 dont les résultats de simulation permettront l'étude dans les données in-situ du chapitre 4 et serviront de base de comparaison afin de valider les résultats de simulations présentés dans la partie III.

Pour ce qui est du modèle considéré, la première idée était d'appliquer la méthode de calcul des lois exactes sur le modèle fermé par l'hypothèse $p \propto \rho^\gamma$, dans la lignée des dérivations compressible effectuées par exemple par GALTIER et BANERJEE 2011 ; ANDRÉS et SAHRAOUI 2017. Mais il s'est avéré qu'un autre choix plus judicieux existait. En effet, comme pour obtenir l'équation d'énergie totale (I.2.8), nous pouvons obtenir une loi exacte "générale" en utilisant l'équation de densité d'énergie interne (I.2.29) et sans expliciter la forme de p ni celle de u . En première approximation, l'hypothèse isentrope qui implique $\nabla \cdot \mathbf{q} = 0$ via l'équation de compatibilité (I.2.32), a d'abord été posée. Ce travail fait partie des résultats publiés dans SIMON et SAHRAOUI 2021. La loi KHM générale qui y est obtenue n'est alors valable que dans la zone inertielle où l'hypothèse isentrope est supposée effective et ne sert que d'étape de calcul vers une loi K41. Dans une

volonté de donner un résultat pour la loi KHM générale valable pour toutes les échelles, nous prendrons en compte $\nabla \cdot \mathbf{q}$ dans cette section, mais nous garderons sa contribution brute, sans travail analytique en accord avec le cheminement chronologique voulu pour ce chapitre.

Les équations considérées sont celles de densité de masse (I.2.25), vitesse (I.2.26), induction (I.2.27) et énergie interne (I.2.29) avec des termes de forçage et de dissipations définis comme dans le cas incompressible (voir (I.1.27) et (I.1.28)). Ainsi :

$$\partial_t \rho = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \quad (\text{I.3.1})$$

$$\partial_t \mathbf{v} = -\nabla \cdot (\mathbf{v} \mathbf{v}) + \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A) - \frac{1}{\rho} \nabla p_* + \mathbf{f}_c + \mathbf{d}_c \quad (\text{I.3.2})$$

$$\partial_t \mathbf{v}_A = \nabla \cdot (\mathbf{v}_A \mathbf{v} - \mathbf{v} \mathbf{v}_A) - \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{v}_A + \frac{\mathbf{v}_A}{2} \nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{f}_m + \mathbf{d}_m \quad (\text{I.3.3})$$

$$\partial_t u = -\nabla \cdot (u \mathbf{v}) + u \nabla \cdot \mathbf{v} - \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{q} - \frac{p}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (\text{I.3.4})$$

(I.3.5) et (I.3.6) peuvent aussi s'écrire en prenant en compte (I.3.1) :

$$\partial_t (\rho \mathbf{v}) = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A) - \nabla p_* + \rho \mathbf{f}_c + \rho \mathbf{d}_c \quad (\text{I.3.5})$$

$$\partial_t (\rho \mathbf{v}_A) = \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}_A \mathbf{v} - \rho \mathbf{v} \mathbf{v}_A) + \rho \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{v}_A - \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}_A \nabla \cdot \mathbf{v} + \rho \mathbf{f}_m + \rho \mathbf{d}_m \quad (\text{I.3.6})$$

Si l'on regarde la forme des fonctions de corrélations de type incrémentales associées aux formes des fonctions choisies, on peut s'attendre à pouvoir identifier les fonctions de structure $\langle \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{v} \delta \mathbf{v} \rangle$, $\langle \delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \delta \mathbf{v}_A \delta \mathbf{v} \rangle$ et $\langle \delta \rho \delta u \delta \mathbf{v} \rangle$ et, similairement au cas incompressible, $\langle \delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \delta \mathbf{v} \delta \mathbf{v}_A \rangle$ ou $\langle \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{v}_A \delta \mathbf{v}_A \rangle$. Le calcul de l'évolution temporelle des fonctions de corrélation pour chaque canal énergétique nous donne en effet :

— Canal d'énergie cinétique : $\mathcal{R}_c = \frac{1}{4} \langle (\rho' + \rho) \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v} \rangle$

$$\begin{aligned} 4\partial_t \mathcal{R}_c &= \langle \partial_t (\rho' \mathbf{v}') \cdot \mathbf{v} + \rho' \mathbf{v}' \cdot \partial_t \mathbf{v} + \partial_t (\rho \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}' + \rho \mathbf{v} \cdot \partial_t \mathbf{v}' \rangle \\ &= \nabla_{\mathcal{L}} \cdot \langle \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{v} \delta \mathbf{v} - (\delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \delta \mathbf{v} \delta \mathbf{v}_A + \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{v}_A \delta \mathbf{v}_A) \rangle \\ &\quad + \nabla_{\mathcal{L}} \cdot \langle \rho' \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v} \mathbf{v}_A - \rho \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}' \mathbf{v}'_A - \rho' \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}_A \mathbf{v}'_A + \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'_A \mathbf{v}_A \rangle \\ &\quad + \langle \rho \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v} \nabla' \cdot \mathbf{v}' - \rho' \mathbf{v}' \cdot \delta \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{v} + 2\rho' \mathbf{v}' \cdot \delta \mathbf{v}_A \nabla \cdot \mathbf{v}_A - 2\rho \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v}_A \nabla' \cdot \mathbf{v}'_A \rangle \\ &\quad + \nabla_{\mathcal{L}} \cdot \langle (1 + \frac{\rho'}{\rho}) p_* \mathbf{v}' - (1 + \frac{\rho}{\rho'}) p'_* \mathbf{v} \rangle - \langle \frac{\rho'}{\rho} p_* \mathbf{v}' \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} + \frac{\rho}{\rho'} p'_* \mathbf{v} \cdot \frac{\nabla' \rho'}{\rho'} \rangle \\ &\quad + \langle (\rho' + \rho) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{f}'_c + \mathbf{v}' \cdot \mathbf{f}_c) \rangle + \langle (\rho' + \rho) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{d}'_c + \mathbf{v}' \cdot \mathbf{d}_c) \rangle \end{aligned} \quad (\text{I.3.7})$$

— Canal d'énergie magnétique : $\mathcal{R}_m = \frac{1}{4} \langle (\rho' + \rho) \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A \rangle$

$$\begin{aligned} 4\partial_t \mathcal{R}_m &= \langle \partial_t (\rho' \mathbf{v}'_A) \cdot \mathbf{v}_A + \rho' \mathbf{v}'_A \cdot \partial_t \mathbf{v}_A + \partial_t (\rho \mathbf{v}_A) \cdot \mathbf{v}'_A + \rho \mathbf{v}_A \cdot \partial_t \mathbf{v}'_A \rangle \\ &= \nabla_{\mathcal{L}} \cdot \langle \delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \delta \mathbf{v}_A \delta \mathbf{v} \rangle + \langle (\rho \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{v}_A - \frac{1}{2} (\rho' + \rho) \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A) \nabla' \cdot \mathbf{v}' \rangle \\ &\quad - \langle (\rho' \mathbf{v}'_A \cdot \delta \mathbf{v}_A + \frac{1}{2} (\rho' + \rho) \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A) \nabla \cdot \mathbf{v} \rangle \\ &\quad + \langle (\rho' \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v} - \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'_A) \nabla \cdot \mathbf{v}_A \rangle + \langle (\rho' \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}_A - \rho \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}') \nabla' \cdot \mathbf{v}'_A \rangle \\ &\quad - \nabla_{\mathcal{L}} \cdot \langle \rho' \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v} \mathbf{v}_A - \rho \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}' \mathbf{v}'_A - \rho' \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}_A \mathbf{v}'_A + \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'_A \mathbf{v}_A \rangle \\ &\quad + \langle (\rho' + \rho) (\mathbf{v}_A \cdot \mathbf{f}'_m + \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{f}_m) \rangle + \langle (\rho' + \rho) (\mathbf{v}_A \cdot \mathbf{d}'_m + \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{d}_m) \rangle \end{aligned} \quad (\text{I.3.8})$$

— Canal d'énergie interne : $\mathcal{R}_u = \frac{1}{2} < \rho' u + \rho u' >$

$$\begin{aligned} 2\partial_t \mathcal{R}_u &= < \partial_t(\rho')u + \rho' \partial_t u + \partial_t(\rho)u' + \rho \partial_t u' > \\ &= \nabla_{\ell} \cdot < \delta \rho \delta u \delta \mathbf{v} > + < \rho \delta u \nabla \cdot \mathbf{v}' - \rho' \delta u \nabla \cdot \mathbf{v} > \\ &\quad - < \rho' \frac{p}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{v} + \rho \frac{p'}{\rho'} \nabla' \cdot \mathbf{v}' > - < \frac{\rho}{\rho'} \nabla' \cdot \mathbf{q}' + \frac{\rho'}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{q} > \quad (\text{I.3.9}) \end{aligned}$$

D'où pour l'énergie totale avec $\mathcal{R} = \mathcal{R}_c + \mathcal{R}_m + \mathcal{R}_u$:

[1]		$4\partial_t \mathcal{R} = \nabla_{\ell} \cdot < (\delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{v} + \delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \delta \mathbf{v}_A \delta \mathbf{v} - (\delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \delta \mathbf{v} + \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{v}_A) \delta \mathbf{v}_A >$
[2]		$+ < (\rho \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v} + \rho \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{v}_A - \frac{1}{2}(\rho' + \rho) \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A) \nabla' \cdot \mathbf{v}' >$
[3]		$- < \rho' \mathbf{v}' \cdot \delta \mathbf{v} + \rho' \mathbf{v}'_A \cdot \delta \mathbf{v}_A + \frac{1}{2}(\rho' + \rho) \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A \nabla \cdot \mathbf{v} >$
[4]		$+ < (2\rho' \mathbf{v}' \cdot \delta \mathbf{v}_A + \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'_A - \rho' \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}) \nabla \cdot \mathbf{v}_A >$
[5]		$- < (2\rho \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v}_A - \rho' \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}_A + \rho \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}') \nabla' \cdot \mathbf{v}'_A >$
[6]		$+ 2\nabla_{\ell} \cdot < \delta \rho \delta u \delta \mathbf{v} > + 2 < (\rho \delta u - \rho \frac{p'}{\rho'}) \nabla' \cdot \mathbf{v}' - (\rho' \delta u + \rho' \frac{p}{\rho}) \nabla \cdot \mathbf{v} >$
[7]		$+ \nabla_{\ell} \cdot < (1 + \frac{p'}{\rho}) p_* \mathbf{v}' - (1 + \frac{p}{\rho'}) p'_* \mathbf{v} > - < \frac{p'}{\rho} p_* \mathbf{v}' \cdot \frac{\nabla p}{\rho} + \frac{p}{\rho'} p'_* \mathbf{v} \cdot \frac{\nabla' p'}{\rho'} >$
[8]		$- 2 < \frac{p}{\rho'} \nabla' \cdot \mathbf{q}' + \frac{p'}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{q} >$
[9]		$+ < (\rho' + \rho) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{f}'_c + \mathbf{v}' \cdot \mathbf{f}_c + \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{f}'_m + \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{f}_m) >$
[10]		$+ < (\rho' + \rho) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{d}'_c + \mathbf{v}' \cdot \mathbf{d}_c + \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{d}'_m + \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{d}_m) >$

(I.3.10)

Cette loi KHM est valable à toutes les échelles où est valable le modèle MHD idéal, quelle que soit la fermeture du modèle et quelque soit l'hypothèse thermodynamique considérée dans la zone inertielle. C'est le premier résultat majeur obtenu, il a été par la suite reformulé comme on le verra dans les sections suivantes. La ligne [1] contient la contribution à la cascade qui survit dans la limite incompressible, ces termes flux sont souvent nommés «Yaglom compressible» (suivant un autre nom de la loi PP98). Cette contribution est de type flux. Les lignes [2] à [4] contiennent des termes compressibles, dits «sources», liés à la dilation du fluide et du champ magnétique (resp. $\nabla \cdot \mathbf{v}$ et $\nabla \cdot \mathbf{v}_A$). La ligne [6] contient des contributions d'énergie interne et de pression convectées par le champ de vitesse. La ligne [7] contient la contribution de pression totale qui peut être écrite en factorisant la pression magnétique en fonction du paramètre $\beta = p/p_m$ du plasma et qui contient la majorité des termes nommés «hybrides» par ANDRÉS et SAHRAOUI 2017. Cette ligne sera principalement affectée par les reformulations présentées dans les sections 3.2 et 3.3. La ligne [8] contient la contribution du flux de chaleur qui sera abordé et reformulée dans la section 3.3. Et pour finir, les lignes [9] et [10] correspondent aux taux d'injection et de dissipation de l'énergie totale compressible.

Dans le cadre d'une zone inertielle isentropique, il faut prendre en compte les lignes [1] à [7] dans le taux de cascade :

-4ε		$= \nabla_{\ell} \cdot < (\delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{v} + \delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \delta \mathbf{v}_A \delta \mathbf{v} - (\delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \delta \mathbf{v} + \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{v}_A) \delta \mathbf{v}_A >$
		$+ < (\rho \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v} + \rho \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{v}_A - \frac{1}{2}(\rho' + \rho) \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A) \nabla' \cdot \mathbf{v}' >$
		$- < \rho' \mathbf{v}' \cdot \delta \mathbf{v} + \rho' \mathbf{v}'_A \cdot \delta \mathbf{v}_A + \frac{1}{2}(\rho' + \rho) \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A \nabla \cdot \mathbf{v} >$
		$+ < (2\rho' \mathbf{v}' \cdot \delta \mathbf{v}_A + \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'_A - \rho' \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}) \nabla \cdot \mathbf{v}_A >$
		$- < (2\rho \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v}_A - \rho' \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}_A + \rho \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}') \nabla' \cdot \mathbf{v}'_A >$
		$+ 2\nabla_{\ell} \cdot < \delta \rho \delta u \delta \mathbf{v} > + 2 < (\rho \delta u - \rho \frac{p'}{\rho'}) \nabla' \cdot \mathbf{v}' - (\rho' \delta u + \rho' \frac{p}{\rho}) \nabla \cdot \mathbf{v} >$
		$+ \nabla_{\ell} \cdot < (1 + \frac{p'}{\rho}) p_* \mathbf{v}' - (1 + \frac{p}{\rho'}) p'_* \mathbf{v} > - < \frac{p'}{\rho} p_* \mathbf{v}' \cdot \frac{\nabla p}{\rho} + \frac{p}{\rho'} p'_* \mathbf{v} \cdot \frac{\nabla' p'}{\rho'} >$

(I.3.11)

On obtient ainsi la «loi exacte générale de type Kolmogorov dans le cadre d'une zone inertielle supposée isentrope». Grâce au premier principe de thermodynamique (I.2.30) qui peut alors s'écrire $\rho^2 \partial u = p \partial \rho$, on peut reformuler le dernier terme en fonction de l'énergie interne et du paramètre caractéristique en physique des plasmas $\beta = p/p_m$ local :

$$\begin{aligned} & < \frac{\rho'}{\rho} p_* \mathbf{v}' \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} + \frac{\rho}{\rho'} p'_* \mathbf{v} \cdot \frac{\nabla' \rho'}{\rho'} > = < (1 + \frac{p_m}{p}) \rho' \mathbf{v}' \cdot \nabla u + (1 + \frac{p'_m}{p'}) \rho \mathbf{v} \cdot \nabla' u' > \\ & = \nabla_{\mathbf{e}} \cdot < \rho u' \mathbf{v} - \rho' u \mathbf{v}' > + < \frac{1}{\beta} \nabla \cdot (\rho' u \mathbf{v}') + \frac{1}{\beta'} \nabla' \cdot (\rho u' \mathbf{v}) > \end{aligned} \quad (\text{I.3.12})$$

On retrouve ainsi le résultat général publié et analysé dans SIMON et SAHRAOUI 2021 (équation 18). Il y est alors direct d'y injecter les fermetures isentrope-isotherme ou isentrope-polytrophe. Dans le cas de la fermeture isentrope-isotherme, après quelques manipulations et introduction d'autres notations, il est possible de retrouver la loi proposée par ANDRÉS et SAHRAOUI 2017 comme le montre SIMON et SAHRAOUI 2021. L'injection de la fermeture isentrope-polytrophe permet de répondre à l'objectif initial : trouver une loi exacte MHD polytrophe. Le résultat dans le cas $\gamma \neq 1$ est alors en fonction de γ et c_s^2 :

$$\begin{aligned} -4\epsilon &= \nabla_{\mathbf{e}} \cdot < (\delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{v} + \delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \delta \mathbf{v}_A) \delta \mathbf{v} - (\delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \delta \mathbf{v} + \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{v}_A) \delta \mathbf{v}_A > \\ &+ < (\rho \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v} + \rho \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{v}_A - \frac{1}{2}(\rho' + \rho) \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A) \nabla' \cdot \mathbf{v}' > \\ &- < \rho' \mathbf{v}' \cdot \delta \mathbf{v} + \rho' \mathbf{v}'_A \cdot \delta \mathbf{v}_A + \frac{1}{2}(\rho' + \rho) \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A \nabla \cdot \mathbf{v} > \\ &+ < (2\rho' \mathbf{v}' \cdot \delta \mathbf{v}_A + \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'_A - \rho' \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}) \nabla \cdot \mathbf{v}_A > \\ &- < (2\rho \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v}_A - \rho' \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}_A + \rho \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}') \nabla' \cdot \mathbf{v}'_A > \\ &+ \frac{2}{\gamma(\gamma-1)} \nabla_{\mathbf{e}} \cdot < \delta \rho \delta c_s^2 \delta \mathbf{v} > + \frac{2}{\gamma} < \rho (\frac{1}{\gamma-1} \delta c_s^2 - c_s'^2) \nabla' \cdot \mathbf{v}' - \rho' ((\frac{1}{\gamma-1} \delta c_s^2 + c_s^2) \nabla \cdot \mathbf{v} > \\ &+ \nabla_{\mathbf{e}} \cdot < (\rho + \rho') (\frac{c_s^2}{\gamma} + \frac{\mathbf{v}_A^2}{2}) \mathbf{v}' - (\rho + \rho') (\frac{c_s'^2}{\gamma} + \frac{\mathbf{v}_A'^2}{2}) \mathbf{v} > \\ &- < \rho' (\frac{c_s^2}{\gamma} + \frac{\mathbf{v}_A^2}{2}) \mathbf{v}' \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} + \rho (\frac{c_s'^2}{\gamma} + \frac{\mathbf{v}_A'^2}{2}) \mathbf{v} \cdot \frac{\nabla' \rho'}{\rho'} > \end{aligned} \quad (\text{I.3.13})$$

On remarque que la partie constante de l'énergie interne dépendant de c_{s0}^2 ne survit pas étant donné que cette énergie n'apparaît que sous forme incrémentale. C'est aussi le cas avec la reformulation (I.3.12) où l'énergie interne apparaît dérivée. En considérant $\mathbf{v}_A = 0$, on peut trouver une loi exacte pour le cas hydrodynamique compressible :

$$\begin{aligned} -4\epsilon &= \nabla_{\mathbf{e}} \cdot < (\delta \rho \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{v} \delta \mathbf{v} + \frac{2}{\gamma(\gamma-1)} \delta \rho \delta c_s^2 \delta \mathbf{v} > + < \rho \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v} \nabla' \cdot \mathbf{v}' - \rho' \mathbf{v}' \cdot \delta \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{v} > \\ &+ \frac{2}{\gamma} < \rho (\frac{1}{\gamma-1} \delta c_s^2 - c_s'^2) \nabla' \cdot \mathbf{v}' - \rho' ((\frac{1}{\gamma-1} \delta c_s^2 + c_s^2) \nabla \cdot \mathbf{v} > \\ &+ \nabla_{\mathbf{e}} \cdot < (\rho + \rho') \frac{c_s^2}{\gamma} \mathbf{v}' - (\rho + \rho') \frac{c_s'^2}{\gamma} \mathbf{v} > - < \rho' \frac{c_s^2}{\gamma} \mathbf{v}' \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} + \rho \frac{c_s'^2}{\gamma} \mathbf{v} \cdot \frac{\nabla' \rho'}{\rho'} > \end{aligned} \quad (\text{I.3.14})$$

On n'y reconnaît pas la loi proposée par BANERJEE et GALTIER 2014 car ces derniers considèrent comme fonction de corrélation pour l'énergie interne : $< \frac{\rho c_s c_s'}{\gamma(\gamma-1)} >$. Passer de $< \frac{\rho c_s'^2 c_s'}{\gamma(\gamma-1)} >$ à $< \frac{\rho c_s c_s'}{\gamma(\gamma-1)} >$ n'est analytiquement pas possible, on doit supprimer la contribution de l'une et la remplacer par celle de l'autre. L'étude de la convergence de ces différentes formes de fonction de corrélation dans des simulations n'a pas été traitée dans ce travail.

3.2 Reformulation de la loi K41 générale dépendant d'une pression isotrope

Dans le chapitre 1 de la partie II, nous dériverons une loi exacte de type K41 pour un modèle où l'isotropie de pression sera relaxée. Y imposer, après obtention, l'isotropie de pression, nous apporte la formulation suivante pour la loi générale (I.3.11) :

$$\begin{aligned}
 -4\varepsilon &= \nabla_{\ell} \cdot \langle (\delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{v} + \delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \delta \mathbf{v}_A) \delta \mathbf{v} - (\delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \delta \mathbf{v} + \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{v}_A) \delta \mathbf{v}_A \rangle \\
 &\quad + \nabla_{\ell} \cdot \langle \delta \rho (2\delta u - \delta(\frac{p_*}{\rho})) \delta \mathbf{v} \rangle \\
 &\quad + \langle (\rho \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v} + \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{v}_A - \frac{1}{2} \mathbf{v}_A \cdot \delta(\rho \mathbf{v}_A) + 2\rho(\delta u - \delta(\frac{p}{\rho}))) \nabla' \cdot \mathbf{v}' \rangle \\
 &\quad - \langle (\rho' \mathbf{v}' \cdot \delta \mathbf{v} + \frac{1}{2} \rho' \mathbf{v}'_A \cdot \delta \mathbf{v}_A - \frac{1}{2} \mathbf{v}'_A \cdot \delta(\rho \mathbf{v}_A) + 2\rho'(\delta u - \delta(\frac{p}{\rho}))) \nabla \cdot \mathbf{v} \rangle \\
 &\quad + \langle (2\rho' \mathbf{v}' \cdot \delta \mathbf{v}_A + \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}'_A - \rho' \mathbf{v}'_A \cdot \delta \mathbf{v}) \nabla \cdot \mathbf{v}_A \rangle \\
 &\quad - \langle (2\rho \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v}_A + \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}_A - \rho \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{v}) \nabla' \cdot \mathbf{v}'_A \rangle \\
 &\quad + \langle (\frac{p_*}{\rho} \delta \rho - \rho \delta(\frac{p_*}{\rho})) \mathbf{v} \cdot \frac{\nabla' \rho'}{\rho'} - (\frac{p'_*}{\rho'} \delta \rho - \rho' \delta(\frac{p'_*}{\rho'})) \mathbf{v}' \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} \rangle
 \end{aligned}
 \tag{I.3.15}$$

Cette formulation est plus élégante que la précédente, car les termes flux apparaissent tous sous la forme de fonctions de structure grâce à l'introduction de $\langle \delta \rho \delta(\frac{p_*}{\rho}) \delta \mathbf{v} \rangle$ et les termes sources s'écrivent tous sous une forme généralisée du type $\langle X \delta Y \nabla' Z' \rangle$ ou $\langle X' \delta Y \nabla Z \rangle$ avec l'opération entre ∇ et Z pouvant être une divergence si Z est une quantité vectorielle (ex : \mathbf{v}) ou un gradient ($\frac{\nabla \rho}{\rho} = \nabla(\ln \rho)$). Cette forme rend évident qu'en $\ell = 0$, $\varepsilon = 0$. Le passage d'une forme à l'autre s'effectue en remarquant que les contributions de pression (notée ε_p) et de pression magnétique (notée ε_{pm}) peuvent s'écrire :

$$\begin{aligned}
 -4\varepsilon_p &= \nabla_{\ell} \cdot \langle (1 + \frac{\rho'}{\rho}) p \mathbf{v}' - (1 + \frac{\rho}{\rho'}) p' \mathbf{v} \rangle - 2 \langle \rho \frac{p'}{\rho'} \nabla \cdot \mathbf{v}' + \rho' \frac{p}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{v} \rangle \\
 &= -\nabla_{\ell} \cdot \langle \delta \rho \delta \frac{p}{\rho} \delta \mathbf{v} \rangle + \langle 2\rho' \delta(\frac{p}{\rho}) \nabla \cdot \mathbf{v} - 2\rho \delta(\frac{p}{\rho}) \nabla' \cdot \mathbf{v}' - \rho \frac{p'}{\rho'} \mathbf{v} \cdot \frac{\nabla' \rho'}{\rho'} - \rho' \frac{p}{\rho} \mathbf{v}' \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} \rangle \\
 &\quad + \langle (\delta \rho \frac{p_*}{\rho} - \rho \delta(\frac{p}{\rho})) \mathbf{v} \cdot \frac{\nabla' \rho'}{\rho'} - (\delta \rho \frac{p'}{\rho'} - \rho' \delta(\frac{p'_*}{\rho'})) \mathbf{v}' \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} \rangle
 \end{aligned}
 \tag{I.3.16}$$

$$\begin{aligned}
 -4\varepsilon_{pm} &= \nabla_{\ell} \cdot \langle (1 + \frac{\rho'}{\rho}) p_m \mathbf{v}' - (1 + \frac{\rho}{\rho'}) p'_m \mathbf{v} \rangle - \langle \rho \frac{p'_m}{\rho'} \mathbf{v} \cdot \frac{\nabla' \rho'}{\rho'} + \rho' \frac{p_m}{\rho} \mathbf{v}' \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} \rangle \\
 &\quad + \langle (\rho \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{v}_A - \frac{1}{2}(\rho' + \rho) \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A) \nabla' \cdot \mathbf{v}' - (\rho' \mathbf{v}'_A \cdot \delta \mathbf{v}_A + \frac{1}{2}(\rho' + \rho) \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A) \nabla \cdot \mathbf{v} \rangle \\
 &= -\nabla_{\ell} \cdot \langle \delta \rho \delta \frac{p_m}{\rho} \delta \mathbf{v} \rangle + \langle (\delta \rho \frac{p_m}{\rho} - \rho \delta(\frac{p_m}{\rho})) \mathbf{v} \cdot \frac{\nabla' \rho'}{\rho'} - (\delta \rho \frac{p'_m}{\rho'} - \rho' \delta(\frac{p'_m}{\rho'})) \mathbf{v}' \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} \rangle \\
 &\quad + \frac{1}{2} \langle (\rho \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{v}_A - \mathbf{v}_A \cdot \delta(\rho \mathbf{v}_A)) \nabla' \cdot \mathbf{v}' - (\rho' \mathbf{v}'_A \cdot \delta \mathbf{v}_A - \mathbf{v}'_A \cdot \delta(\rho \mathbf{v}_A)) \nabla \cdot \mathbf{v} \rangle
 \end{aligned}
 \tag{I.3.17}$$

Dans le cas isentrope-polytrophe avec $\gamma \neq 1$, $\delta(u - p/\rho) = \delta[(2 - \gamma) \frac{c_s^2}{\gamma(\gamma - 1)}] = (2 - \gamma) \delta u$ et de même, $\delta(2u - p/\rho) = (3 - \gamma) \delta u$. Dans le cas isentrope-isotherme, c'est-à-dire avec $\gamma = 1$ et c_s constant, $\delta(u - p/\rho) = \delta u = (2 - \gamma) \delta u$ et $\delta(2u - p/\rho) = (3 - \gamma) \delta u$. De plus, $p_*/\rho = (1 + \beta) \mathbf{v}_A^2/2$. Ainsi, on peut déduire de (I.3.15), une formulation de la loi exacte isentrope-polytrophe valable pour tout γ , incluant donc la fermeture isentrope-isotherme,

et dépendant de u , γ et β :

$$\begin{aligned}
-4\varepsilon = & \nabla_{\ell} \cdot \langle (\delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{v} + \delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \delta \mathbf{v}_A) \delta \mathbf{v} - (\delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \delta \mathbf{v} + \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{v}_A) \delta \mathbf{v}_A \rangle \\
& + \nabla_{\ell} \cdot \langle \delta \rho \delta \left((3 - \gamma)u - \frac{\mathbf{v}_A^2}{2} \right) \delta \mathbf{v} \rangle \\
& + \langle (\rho \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v} + \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{v}_A - \frac{1}{2} \mathbf{v}_A \cdot \delta(\rho \mathbf{v}_A) + 2(2 - \gamma) \rho \delta u) \nabla' \cdot \mathbf{v}' \rangle \\
& - \langle (\rho' \mathbf{v}' \cdot \delta \mathbf{v} + \frac{1}{2} \rho' \mathbf{v}'_A \cdot \delta \mathbf{v}_A - \frac{1}{2} \mathbf{v}'_A \cdot \delta(\rho \mathbf{v}_A) + 2(2 - \gamma) \rho' \delta u) \nabla \cdot \mathbf{v} \rangle \\
& + \langle (2 \rho' \mathbf{v}' \cdot \delta \mathbf{v}_A + \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}'_A - \rho' \mathbf{v}'_A \cdot \delta \mathbf{v}) \nabla \cdot \mathbf{v}_A \rangle \\
& - \langle (2 \rho \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v}_A + \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}_A - \rho \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{v}) \nabla' \cdot \mathbf{v}'_A \rangle \\
& + \langle \left(\frac{\mathbf{v}_A^2}{2} (1 + \beta) \delta \rho - \rho \delta \left(\frac{\mathbf{v}_A^2}{2} (1 + \beta) \right) \right) \mathbf{v} \cdot \frac{\nabla' \rho'}{\rho'} \rangle \\
& - \langle \left(\frac{\mathbf{v}'_A^2}{2} (1 + \beta') \delta \rho - \rho' \delta \left(\frac{\mathbf{v}'_A^2}{2} (1 + \beta') \right) \right) \mathbf{v}' \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} \rangle
\end{aligned}$$

(I.3.18)

La réécriture des termes de pression via les formules (I.3.16) et (I.3.17) ne dépend pas de l'hypothèse d'isentropie de la zone inertielle et sont applicables dans la loi KHM générale (I.3.10) :

$$\begin{aligned}
4\partial_t \mathcal{R} = & \nabla_{\ell} \cdot \langle (\delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{v} + \delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \delta \mathbf{v}_A) \delta \mathbf{v} - (\delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \delta \mathbf{v} + \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{v}_A) \delta \mathbf{v}_A \rangle \\
& + \nabla_{\ell} \cdot \langle \delta \rho (2\delta u - \delta(\frac{p_*}{\rho})) \delta \mathbf{v} \rangle \\
& + \langle (\rho \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v} + \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{v}_A - \frac{1}{2} \mathbf{v}_A \cdot \delta(\rho \mathbf{v}_A) + 2\rho(\delta u - \delta(\frac{p}{\rho}))) \nabla' \cdot \mathbf{v}' \rangle \\
& - \langle (\rho' \mathbf{v}' \cdot \delta \mathbf{v} + \frac{1}{2} \rho' \mathbf{v}'_A \cdot \delta \mathbf{v}_A - \frac{1}{2} \mathbf{v}'_A \cdot \delta(\rho \mathbf{v}_A) + 2\rho'(\delta u - \delta(\frac{p}{\rho}))) \nabla \cdot \mathbf{v} \rangle \\
& + \langle (2 \rho' \mathbf{v}' \cdot \delta \mathbf{v}_A + \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}'_A - \rho' \mathbf{v}'_A \cdot \delta \mathbf{v}) \nabla \cdot \mathbf{v}_A \rangle \\
& - \langle (2 \rho \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v}_A + \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}_A - \rho \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{v}) \nabla' \cdot \mathbf{v}'_A \rangle \\
& + \langle \left(\frac{p_*}{\rho} \delta \rho - \rho \delta \left(\frac{p_*}{\rho} \right) \right) \mathbf{v} \cdot \frac{\nabla' \rho'}{\rho'} - \left(\frac{p'_*}{\rho'} \delta \rho - \rho' \delta \left(\frac{p'_*}{\rho'} \right) \right) \mathbf{v}' \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} \rangle \\
& - 2 \langle \frac{\rho}{\rho'} \nabla' \cdot \mathbf{q}' + \frac{\rho'}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{q} \rangle \\
& + \langle (\rho' + \rho) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{f}'_c + \mathbf{v}' \cdot \mathbf{f}_c + \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{f}'_m + \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{f}_m) \rangle \\
& + \langle (\rho' + \rho) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{d}'_c + \mathbf{v}' \cdot \mathbf{d}_c + \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{d}'_m + \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{d}_m) \rangle
\end{aligned}$$

(I.3.19)

3.3 Contribution du flux de chaleur dans la loi KHM et deuxième reformulation

L'approche présentée dans la section 3.1 pour répondre à l'objectif initial est empreinte d'une volonté de généralisation des résultats dans le but de permettre à de futures études de ne pas avoir à redémontrer de A à Z une loi exacte pour une nouvelle fermeture. Le résultat obtenu peut même être utilisé pour étudier d'autre forme de zone inertielle comme celle proposée par ALUIE, S LI et H LI 2012 et HELLINGER, PAPINI et al. 2021, où l'énergie cinétique/magnétique pourrait casquer indépendamment de l'énergie interne, sans transfert de pression. Comme discuté dans la section I.2.2, cela revient à supposer une zone inertielle isobare dans laquelle la description de cette cascade d'énergie via une loi exacte ne dépendrait d'aucune grandeur thermodynamique autre que la densité. Elle peut s'obtenir à partir de notre loi exacte générale (I.3.19) en supposant $\delta u \rightarrow 0$ pour

supprimer la contribution d'énergie interne et $p \rightarrow 0$ pour supprimer celle de p . Ainsi :

$$\begin{aligned}
-4\varepsilon &= \nabla_{\ell} \cdot < (\delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{v} + \delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \delta \mathbf{v}_A - \delta \rho \delta(\frac{\mathbf{v}_A^2}{2})) \delta \mathbf{v} - (\delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \delta \mathbf{v} + \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{v}_A) \delta \mathbf{v}_A > \\
&+ < (\rho \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v} + \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{v}_A - \frac{1}{2} \mathbf{v}_A \cdot \delta(\rho \mathbf{v}_A)) \nabla' \cdot \mathbf{v}' > \\
&- < (\rho' \mathbf{v}' \cdot \delta \mathbf{v} + \frac{1}{2} \rho' \mathbf{v}'_A \cdot \delta \mathbf{v}_A - \frac{1}{2} \mathbf{v}'_A \cdot \delta(\rho \mathbf{v}_A)) \nabla \cdot \mathbf{v} > \\
&+ < (2\rho' \mathbf{v}' \cdot \delta \mathbf{v}_A + \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}'_A - \rho' \mathbf{v}'_A \cdot \delta \mathbf{v}) \nabla \cdot \mathbf{v}_A > \\
&- < (2\rho \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v}_A + \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}_A - \rho \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{v}) \nabla' \cdot \mathbf{v}'_A > \\
&+ < (\frac{\mathbf{v}_A^2}{2} \delta \rho - \rho \delta(\frac{\mathbf{v}_A^2}{2})) \mathbf{v} \cdot \frac{\nabla' \rho'}{\rho'} - (\frac{\mathbf{v}'_A^2}{2} \delta \rho - \rho' \delta(\frac{\mathbf{v}'_A^2}{2})) \mathbf{v}' \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} >
\end{aligned} \tag{I.3.20}$$

On rappelle que l'utilisation de ce résultat dans le but d'estimer le taux de chauffage turbulent doit à priori être complété une estimation du taux de cascade d'énergie interne qui semble être visible à travers le terme, de type flux à travers les échelles, $\nabla_{\ell} \cdot < \delta \rho \delta u \delta \mathbf{v} >$.

Mais l'hypothèse principale de notre approche étant une zone inertielle isentrope, une contribution y a été omise : la contribution du flux de chaleur. Cette contribution est une fenêtre s'ouvrant sur l'entropie à travers le terme de flux de chaleur présent dans l'équation d'énergie interne, comme on l'a vu dans la section I.2.2. De plus, EYINK et DRIVAS 2018 a démontré via la théorie du «coarse-graining»¹ l'existence d'une cascade d'entropie. Est-ce que cette cascade d'entropie aurait un impact sur la cascade d'énergie ? Est-ce que le flux de chaleur n'agit bien qu'à petite échelle ? Ces questions seront posées dans la partie ?? mais ici on peut déjà répondre à la question : est-il possible d'obtenir analytiquement un terme de type flux dépendant du flux de chaleur dans la description générale (KHM) de la cascade turbulente ? La réponse est oui, et elle va même nous permettre de retravailler les termes de pression.

La contribution du flux de chaleur, gardée brute dans la relation KHM générale (I.3.10) et que l'on va noter ε_q , peut s'écrire :

$$\begin{aligned}
-4\varepsilon_q &= -2 < \frac{\rho'}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{q} + \frac{\rho}{\rho'} \nabla' \cdot \mathbf{q}' > \\
&= \nabla_{\ell} \cdot < 2\delta \rho \delta \mathbf{q} \delta(1/\rho) > + < 2\rho \delta \mathbf{q} \cdot \nabla'(\frac{1}{\rho'}) - 2\rho' \delta \mathbf{q} \cdot \nabla(\frac{1}{\rho}) >
\end{aligned}$$

De plus, si l'on compare les termes flux écrits avec la formulation précédente ((I.3.15)) et auxquels on ajoute celui de flux de chaleur (à gauche) avec les termes flux de l'équation de densité d'énergie totale (I.2.8) (à droite) :

$$\begin{array}{l|l}
\nabla_{\ell} \cdot < (\delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{v} + \delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \delta \mathbf{v}_A + 2\delta u) \delta \mathbf{v} > & \frac{1}{2} \nabla \cdot ((\rho \mathbf{v}^2 + \rho \mathbf{v}_A^2 + 2\rho u) \mathbf{v}) \\
-\nabla_{\ell} \cdot < (\delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \delta \mathbf{v} + \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{v}_A) \delta \mathbf{v}_A > & -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A) \\
-\nabla_{\ell} \cdot < \delta \rho \delta(\frac{p_*}{\rho}) \delta \mathbf{v} > & \nabla \cdot (p_* \mathbf{v}) \\
\nabla_{\ell} \cdot < 2\delta \rho \delta \mathbf{q} \delta(1/\rho) > & \nabla \cdot (\mathbf{q})
\end{array}$$

on peut se demander s'il n'existerait pas une formulation de la contribution de pression totale dans la loi exacte qui aurait un signe correspondant à celui présent dans l'équation de densité d'énergie totale. En effet, en s'inspirant de la forme de la fonction de structure

1. Cette autre approche de l'étude de la cascade turbulente implique schématiquement un filtrage de type passe-haut des échelles et permet une représentation locale dans l'espace et en échelle.

dépendant du flux de chaleur, on remarque que la contribution de la pression totale peut s'écrire :

$$\begin{aligned}
 -4\varepsilon_{p*} &= -\nabla_{\ell} \cdot \left\langle \delta\rho\delta\frac{p_*}{\rho}\delta\mathbf{v} \right\rangle + \left\langle \left(\delta\rho\frac{p_*}{\rho} - \rho\delta\left(\frac{p_*}{\rho}\right)\right)\mathbf{v} \cdot \frac{\nabla'\rho'}{\rho'} - \left(\delta\rho\frac{p'_*}{\rho'} - \rho'\delta\left(\frac{p_*}{\rho}\right)\right)\mathbf{v}' \cdot \frac{\nabla\rho}{\rho} \right\rangle \\
 &= \nabla_{\ell} \cdot \left\langle \delta p_*\delta(1/\rho)\delta(\rho\mathbf{v}) \right\rangle + \left\langle \delta(p_*)\rho\mathbf{v} \cdot \nabla'\left(\frac{1}{\rho'}\right) - \delta(p_*)\rho'\mathbf{v}' \cdot \nabla\left(\frac{1}{\rho}\right) \right\rangle
 \end{aligned}$$

Le nombre de termes est ainsi réduit de 5 à 3 et la loi KHM générale s'écrit :

$$\begin{aligned}
 4\partial_t\mathcal{R} &= \nabla_{\ell} \cdot \left\langle (\delta(\rho\mathbf{v}) \cdot \delta\mathbf{v} + \delta(\rho\mathbf{v}_A) \cdot \delta\mathbf{v}_A)\delta\mathbf{v} - (\delta(\rho\mathbf{v}_A) \cdot \delta\mathbf{v} + \delta(\rho\mathbf{v}) \cdot \delta\mathbf{v}_A)\delta\mathbf{v}_A \right\rangle \\
 &\quad + \nabla_{\ell} \cdot \left\langle 2\delta\rho\delta u\delta\mathbf{v} + \delta p_*\delta(1/\rho)\delta(\rho\mathbf{v}) + 2\delta\rho\delta\mathbf{q}\delta(1/\rho) \right\rangle \\
 &\quad + \left\langle (\rho\mathbf{v} \cdot \delta\mathbf{v} + \frac{1}{2}\rho\mathbf{v}_A \cdot \delta\mathbf{v}_A - \frac{1}{2}\mathbf{v}_A \cdot \delta(\rho\mathbf{v}_A) + 2\rho(\delta u - \delta(\frac{p}{\rho})))\nabla' \cdot \mathbf{v}' \right\rangle \\
 &\quad - \left\langle (\rho'\mathbf{v}' \cdot \delta\mathbf{v} + \frac{1}{2}\rho'\mathbf{v}'_A \cdot \delta\mathbf{v}_A - \frac{1}{2}\mathbf{v}'_A \cdot \delta(\rho\mathbf{v}_A) + 2\rho'(\delta u - \delta(\frac{p}{\rho})))\nabla \cdot \mathbf{v} \right\rangle \\
 &\quad + \left\langle (2\rho'\mathbf{v}' \cdot \delta\mathbf{v}_A + \delta(\rho\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}'_A - \rho'\mathbf{v}'_A \cdot \delta\mathbf{v})\nabla \cdot \mathbf{v}_A \right\rangle \\
 &\quad - \left\langle (2\rho\mathbf{v} \cdot \delta\mathbf{v}_A + \delta(\rho\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}_A - \rho\mathbf{v}_A \cdot \delta\mathbf{v})\nabla' \cdot \mathbf{v}'_A \right\rangle \\
 &\quad + \left\langle (\rho\mathbf{v}\delta(p_*) + 2\rho\delta\mathbf{q}) \cdot \nabla'\left(\frac{1}{\rho'}\right) - (\rho'\mathbf{v}'\delta(p_*) + 2\rho'\delta\mathbf{q}) \cdot \nabla\left(\frac{1}{\rho}\right) \right\rangle \\
 &\quad + \left\langle (\rho' + \rho)(\mathbf{v} \cdot \mathbf{f}'_c + \mathbf{v}' \cdot \mathbf{f}_c + \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{f}'_m + \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{f}_m) \right\rangle \\
 &\quad + \left\langle (\rho' + \rho)(\mathbf{v} \cdot \mathbf{d}'_c + \mathbf{v}' \cdot \mathbf{d}_c + \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{d}'_m + \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{d}_m) \right\rangle
 \end{aligned}$$

(I.3.21)

L'équation (I.3.21) est la formulation finale de la loi KHM compressible générale décrivant la cascade d'énergie totale à l'aide de la fonction de corrélation $\mathcal{R} = \left\langle \frac{1}{4}(\rho' + \rho)\mathbf{v}' \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{4}(\rho' + \rho)\mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A + \frac{1}{2}(\rho'u + \rho u') \right\rangle$. Cette formulation rappelle l'équation d'énergie totale générale (I.2.8) et, tout comme elle, dépend de p , u et \mathbf{q} restant à définir à l'aide d'une équation de fermeture et/ou à annuler en fonction du type de zone inertielle que l'on veut considérer. Son application dans des données ou des simulations n'impose qu'un postulat : que les équations de continuité (I.3.1), vitesse (I.3.5), induction (I.3.6) et énergie interne générale (I.3.4)² soient valides. En fonction du cas d'application, les autres formulations des contributions de pression ε_p (I.3.16), pression magnétique ε_{pm} (I.3.17), pression totale ε_{p*} (I.3.21) et flux de chaleur ε_q (I.3.21) ou celle en appliquant le premier principe thermodynamique avec l'hypothèse d'isentropie (I.3.12) pourront tout à fait être préférées.

Par exemple, si l'on veut utiliser l'expression du flux de chaleur en fonction de σ pour obtenir une loi exacte de type K41 dans le cadre d'une zone inertielle de type encore indéfinie (isobare, isentrope ou autre) mais pour un modèle fermé avec la fermeture polytrophe, il semble plus à propos d'utiliser la formulation de ε_q dépendant de $\nabla \cdot \mathbf{q}$ qui devient, puisque $\nabla \cdot \mathbf{q} = \sigma\gamma p \nabla \cdot \mathbf{v}$, : $-4\varepsilon_q = -2\sigma\gamma \left\langle \rho'\frac{p}{\rho}\nabla \cdot \mathbf{v} + \rho'\frac{p'}{\rho'}\nabla' \cdot \mathbf{v}' \right\rangle$. Ainsi en posant $p_* = \rho\mathbf{v}'_A{}^2(\beta + 1)/2$, $c_2^s/\gamma = \mathbf{v}'_A{}^2\beta/2$ et $\tilde{u} = \frac{1}{\gamma-1}$ si $\gamma \neq 1$ ou $\ln(\rho/\rho_0)$ si $\gamma = 1$, on

2. Hors cas isobare.

obtient :

$$\begin{aligned}
4\partial_t \mathcal{R} = & \nabla_{\ell} \cdot < (\delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{v} + \delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \delta \mathbf{v}_A) \delta \mathbf{v} - (\delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \delta \mathbf{v} + \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{v}_A) \delta \mathbf{v}_A > \\
& + \nabla_{\ell} \cdot < \delta \rho \delta(\mathbf{v}'_A)^2 \beta (\sigma + 1) \tilde{u} \delta \mathbf{v} + \delta(\rho \mathbf{v}'_A)^2 (\beta + 1)/2 \delta(1/\rho) \delta(\rho \mathbf{v}) > \\
& + < (\rho \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v} + \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{v}_A - \frac{1}{2} \mathbf{v}_A \cdot \delta(\rho \mathbf{v}_A)) \nabla' \cdot \mathbf{v}' > \\
& + < (\rho \delta(\mathbf{v}'_A)^2 \beta ((\sigma \gamma + 1) \tilde{u} - 1)) - \sigma \gamma \rho \mathbf{v}'_A^2 \beta' \nabla' \cdot \mathbf{v}' > \\
& - < (\rho' \mathbf{v}' \cdot \delta \mathbf{v} + \frac{1}{2} \rho' \mathbf{v}'_A \cdot \delta \mathbf{v}_A - \frac{1}{2} \mathbf{v}'_A \cdot \delta(\rho \mathbf{v}_A)) \nabla \cdot \mathbf{v} > \\
& - < (\rho' \delta(\mathbf{v}'_A)^2 \beta ((\sigma \gamma + 1) \tilde{u} - 1)) + \sigma \gamma \rho' \mathbf{v}'_A^2 \beta \nabla \cdot \mathbf{v} > \\
& + < (2 \rho' \mathbf{v}' \cdot \delta \mathbf{v}_A + \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}'_A - \rho' \mathbf{v}'_A \cdot \delta \mathbf{v}) \nabla \cdot \mathbf{v}_A > \\
& - < (2 \rho \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v}_A + \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}_A - \rho \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{v}) \nabla' \cdot \mathbf{v}'_A > \\
& + < (\rho \mathbf{v} \delta(\rho \mathbf{v}'_A)^2 (\beta + 1)/2) \cdot \nabla'(\frac{1}{\rho'}) - (\rho' \mathbf{v}' \delta(\rho \mathbf{v}'_A)^2 (\beta + 1)/2) \cdot \nabla(\frac{1}{\rho}) > \\
& + < (\rho' + \rho)(\mathbf{v} \cdot \mathbf{f}'_c + \mathbf{v}' \cdot \mathbf{f}_c + \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{f}'_m + \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{f}_m) > \\
& + < (\rho' + \rho)(\mathbf{v} \cdot \mathbf{d}'_c + \mathbf{v}' \cdot \mathbf{d}_c + \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{d}'_m + \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{d}_m) >
\end{aligned}
\tag{I.3.22}$$

Dans le cadre d'une zone inertielle isentrope, $\sigma = 0$, et on y retrouve la loi exacte (I.3.18) écrite avec la dernière formulation des termes de pression totale. Si le système est fermé de manière isotherme et qu'aucune hypothèse thermodynamique ne contraint la zone inertielle, alors $\gamma = 1$, $\sigma = -1$, c_s^2 constant et :

$$\begin{aligned}
4\partial_t \mathcal{R} = & \nabla_{\ell} \cdot < (\delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{v} + \delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \delta \mathbf{v}_A) \delta \mathbf{v} - (\delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \delta \mathbf{v} + \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{v}_A) \delta \mathbf{v}_A > \\
& + \nabla_{\ell} \cdot < \delta(\rho \mathbf{v}'_A)^2 / 2 \delta(1/\rho) \delta(\rho \mathbf{v}) > + c_s^2 < (\rho \nabla' \cdot \mathbf{v}' + \rho' \nabla \cdot \mathbf{v}) > \\
& + < (\rho \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v} + \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{v}_A - \frac{1}{2} \mathbf{v}_A \cdot \delta(\rho \mathbf{v}_A)) \nabla' \cdot \mathbf{v}' > \\
& - < (\rho' \mathbf{v}' \cdot \delta \mathbf{v} + \frac{1}{2} \rho' \mathbf{v}'_A \cdot \delta \mathbf{v}_A - \frac{1}{2} \mathbf{v}'_A \cdot \delta(\rho \mathbf{v}_A)) \nabla \cdot \mathbf{v} > \\
& + < (2 \rho' \mathbf{v}' \cdot \delta \mathbf{v}_A + \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}'_A - \rho' \mathbf{v}'_A \cdot \delta \mathbf{v}) \nabla \cdot \mathbf{v}_A > \\
& - < (2 \rho \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v}_A + \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}_A - \rho \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{v}) \nabla' \cdot \mathbf{v}'_A > \\
& + < (\rho \mathbf{v} \delta(\rho \mathbf{v}'_A)^2 / 2) \cdot \nabla'(\frac{1}{\rho'}) - (\rho' \mathbf{v}' \delta(\rho \mathbf{v}'_A)^2 / 2) \cdot \nabla(\frac{1}{\rho}) > \\
& + < (\rho' + \rho)(\mathbf{v} \cdot \mathbf{f}'_c + \mathbf{v}' \cdot \mathbf{f}_c + \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{f}'_m + \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{f}_m) > \\
& + < (\rho' + \rho)(\mathbf{v} \cdot \mathbf{d}'_c + \mathbf{v}' \cdot \mathbf{d}_c + \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{d}'_m + \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{d}_m) >
\end{aligned}
\tag{I.3.23}$$

La contribution thermodynamique est alors très simple : $c_s^2 < (\rho \nabla' \cdot \mathbf{v}' + \rho' \nabla \cdot \mathbf{v}) >$. Sans elle, on obtiendrait la loi KHM décrivant la cascade isobare d'énergie cinétique-magnétique.

La loi exacte KHM (I.3.22) peut donc décrire la cascade énergétique à travers les échelles qu'il existe ou non une zone inertielle, et cela dans tout modèle fermé avec une fermeture thermodynamique polytropique.³ Elle prend en compte les canaux de dissipations et injections d'énergie ainsi que la contribution du flux de chaleur.

Cette étude analytique analysant la prise en compte des fermetures thermodynamiques dans l'extension compressible de la théorie des lois exactes nous apporte donc un cadre général applicable à toute étude de cascade turbulente dans des modèles MHD idéaux avec pression isotrope. On verra dans le chapitre II.3 qu'en ajoutant quelques termes indépendants de la pression, ces résultats seront aussi valables pour les modèles MHD Hall.

3. Attention par contre à l'interprétation des résultats aux plus petites échelles où le modèle MHD idéal n'est pas valable. On reviendra sur ce point dans le chapitre II.3.

3.4 Synthèse de l'étude analytique de turbulence compressible avec pression isotrope

Equations utilisées pour calculer la loi générale (modèle MHD idéal) :

$$\partial_t \rho = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \quad (\text{I.3.24})$$

$$\partial_t \mathbf{v} = -\nabla \cdot (\mathbf{v} \mathbf{v}) + \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A) - \frac{1}{\rho} \nabla p_* + \mathbf{f}_c + \mathbf{d}_c \quad (\text{I.3.25})$$

$$\partial_t \mathbf{v}_A = \nabla \cdot (\mathbf{v}_A \mathbf{v} - \mathbf{v} \mathbf{v}_A) - \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{v}_A + \frac{\mathbf{v}_A}{2} \nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{f}_m + \mathbf{d}_m \quad (\text{I.3.26})$$

$$\partial_t u = -\nabla \cdot (u \mathbf{v}) + u \nabla \cdot \mathbf{v} - \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{q} - \frac{p}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (\text{I.3.27})$$

Fonctions de corrélation d'énergie totale considérée (autres possibilités évoquées section 3.1) : $\mathcal{R} = \frac{1}{2} < \frac{1}{2}(\rho' + \rho) \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{2}(\rho' + \rho) \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A + \rho' u + \rho u' >$ de fonction incrémentale associée $\mathcal{S} = \frac{1}{2} < \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{v} + \delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \delta \mathbf{v}_A + 2\delta \rho \delta u >$

Formulations (f1, f2 et f3) des lois exactes générales KHM et K41 et applications aux fermetures isentrope-polytrope et polytrope :

- KHM f1 : (I.3.10)
- K41 f1 : (I.3.11)
- K41 isentrope-polytrope f1 : (I.3.13) [Résultat répondant à l'objectif initial]
- KHM f2 : (I.3.19)
- K41 f2 : (I.3.15)
- K41 isentrope-polytrope f2 : (I.3.18)
- KHM f3 : (I.3.21)
- KHM polytrope F3 : (I.3.22)

Réécriture des contributions de pression et flux de chaleur :

- Prise en compte le premier principe de la thermodynamique et de l'hypothèse d'isentropie dans f1 : (I.3.12)
- Contributions de pression ε_p (f1 vers f2) : (I.3.16)
- Contributions de pression magnétique ε_{pm} (f1 vers f2) : (I.3.17)
- Contributions de pression totale ε_{p*} (f2 vers f3) : (I.3.21)
- Contributions du flux de chaleur ε_q (f1 et f2 vers f3) : (I.3.21)

Des applications aux autres fermetures définies dans le chapitre I.2 sont données au fil des sections 3.1, 3.2 et 3.3. Les résultats écrits avec la F1 (section 3.1) sont publiés dans SIMON et SAHRAOUI 2021.

PARTIE I : CHAPITRE 4

ETUDES DE CAS DANS LES DONNÉES IN-SITU

Sommaire

4.1	Données et conditions d'adaptation d'une loi exacte dans des observations issues d'une seule sonde	33
4.2	Comparaison des lois incompressible vs compressible-isentrope-polytrophe avec $\gamma = 1$ (isotherme) et $\gamma = 5/3$ (adiabatique) . .	38
4.3	Application statistique préliminaire dans des données localisées dans la magnétogaine	40
4.4	Synthèse de l'étude de cas observationnelle dans les données de PSP	43

Ce chapitre résume le travail de comparaison de la loi incompressible PP98, et de deux cas de la loi compressible isentrope-polytrophe dans deux jeux de données issus de Parker Solar Probe (PSP). Dans le premier cas, elle est fermée tel que $\gamma = 1$ (isotherme) et dans le second, tel que $\gamma = 5/3$. Ce travail, effectué pour comprendre l'apport de la loi polytrophe dans l'estimation du taux de chauffage dans le vent solaire, a été publié dans SIMON et SAHRAOUI 2021 puis étendue statistiquement dans le cadre d'une étude préliminaire dans des données relevées dans la magnétogaine terrestre par la mission Magnetospheric Multiscales (MMS). La formulation des lois compressibles utilisée est la formulation f1 donnée par la loi exacte générale (I.3.11).

4.1 Données et conditions d'adaptation d'une loi exacte dans des observations issues d'une seule sonde

Le 12 août 2018, la sonde Parker Solar Probe commence son voyage à bord d'une fusée Delta IV-Heavy. Cette mission lancée par la NASA devra s'approcher au maximum du Soleil afin de permettre la compréhension de la dynamique énergétique insufflée par le Soleil dans son environnement, du chauffage et accélération de la couronne solaire et du vent solaire à ceux des particules énergétiques (FOX et al. 2016). Un tel objectif résonne avec l'application des lois exactes dans les données afin d'estimer le taux de chauffage turbulent (PARASHAR et MATTHAEUS 2022). De plus, comme indiqué sur la figure I.2.1,

le γ estimé près du Soleil est plus proche, voire supérieur, de $5/3$ que de 1. Relaxer l'isothermie dans la loi exacte et y regarder une loi polytrophe y semble donc plus réaliste.

Pour estimer le taux de chauffage avec une loi exacte MHD, nous avons besoin du champ magnétique et des moments mono-fluide de la fonction de distribution. Ces données sont relevées par deux expériences de PSP (voir Figure I.4.1) : FIELDS («Fields Experiment») et SWEAP («Solar Wind Electrons Alpha and Protons Investigation»).

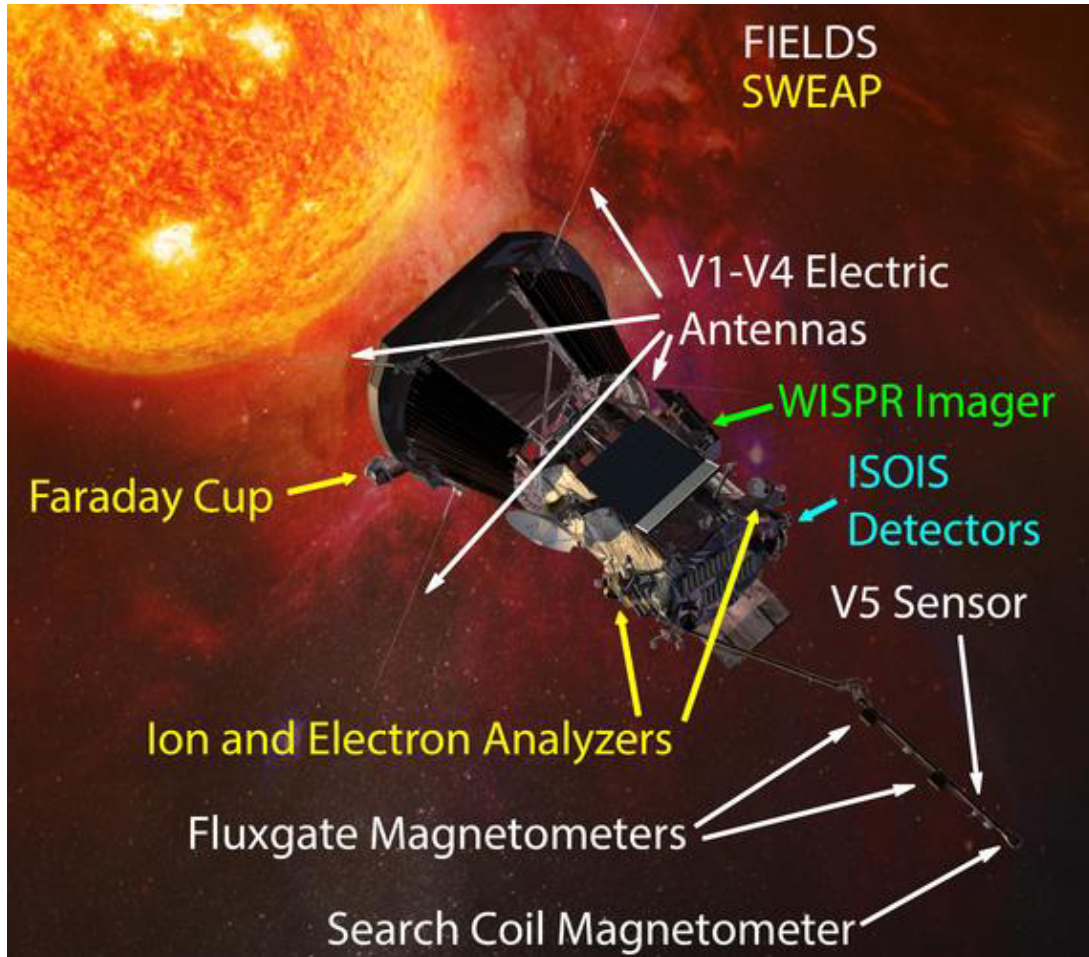


FIGURE I.4.1 – Localisation instruments de mesure sur PSP. Les instruments de la expérience FIELDS sont notés en blanc, et ceux de SWEAP en jaune. Les données utilisées ici proviennent des Fluxgate Magnetometers (MAGs) situés sur le bras et de la Faraday Cup (SPC) située juste à côté du bouclier et orientée vers le Soleil. Crédits : la page web de FIELDS (fields.ssl.berkeley.edu) et Johns Hopkins University Applied Physics Laboratory.

FIELDS (BALE, GOETZ et al. 2016) mesure le champ magnétique grâce à deux magnétomètres à saturation («fluxgate» en anglais), MAGs, mesurant la composante continue (DC) et les fluctuations à basse fréquence du champ (MHD-ionique) et un de type fluxmètre («search-coil»), SCM, donnant accès aux hautes fréquences (ionique-électronique). SWEAP (KASPER et al. 2016) est quant à elle composée d'une coupe de Faraday («Faraday Cup»), SPC, mesurant les flux globaux ionique et électronique, et d'analyseurs électrostatiques d'ions et d'électrons, SPAN, permettant de séparer leur état de charge. Notre étude concernant plutôt les échelles MHD, les données utilisées proviennent des instruments MAGs et SPC.

Les données publiquement disponibles au moment où cette étude a été menée (fin 2020) provenaient des trois-quatre premières orbites (Figure I.4.2). Nous avons choisi

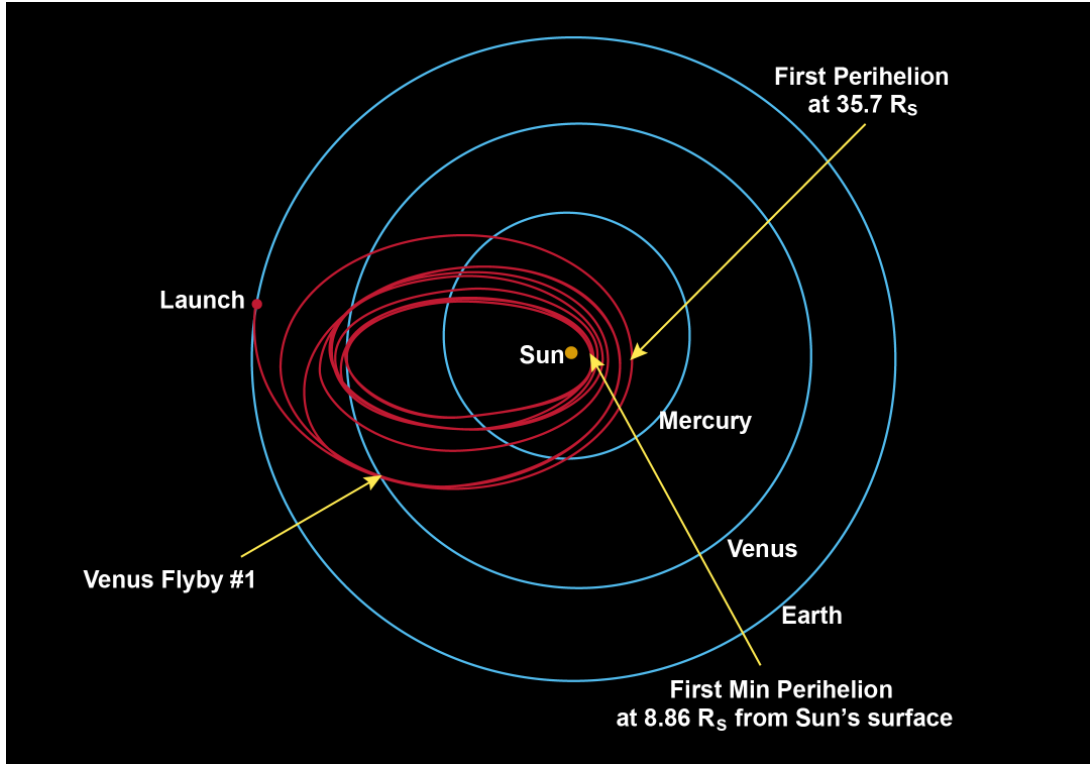


FIGURE I.4.2 – Orbites de PSP depuis la date de lancement, le 12 août 2018 à 7h31 UTC. Le premier périhélie à 35.7 R_s a été atteint le 6 novembre 2018 à 03h27 UTC. Crédits : la page web de PSP (<http://parkersolarprobe.jhuapl.edu>) et Johns Hopkins University Applied Physics Laboratory.

d'analyser les données relevées lorsque PSP était proche de son premier périhélie atteint le 6 novembre 2018 à 03h27 UTC vers 35.7 R_s . Autour de cette position, les données sont relevées dans le vent solaire près du Soleil. Peu de lots de données comprenaient les relevés provenant de SPC et ceux provenant de MAGs avec assez peu de trous pour pouvoir les traiter conjointement dans cette étude. Finalement, le jeu choisi a été relevé le 4 novembre entre 00h00 et 02h30. Les données provenant de MAGs y sont résolues à une cadence d'environ 7 ms sans trous tandis que celles provenant de SPC sont résolues à 0.873 s et montrent 0.15% de trous situés entre 01h08 et 01h13. Ces trous seront comblés par interpolation linéaire et afin d'avoir la même cadence de données, les données MAGs sont rééchantillonnées sur la cadence de SPC. Les données analysées sont montrées sur la figure I.4.3.

Les sous-intervalles choisis pour le calcul des taux de cascade sont marqués en rouge et sont associés à deux niveaux de compressibilité différents. Le compressibilité noté c est calculé en prenant la déviation standard std des fluctuations de densité, c'est-à-dire $c = \text{std}(\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}) = \text{std}(\frac{\delta \rho}{\rho_0})$. Le premier sous-intervalle, de 00h35 à 01h05 a une compressibilité très faible, $c \sim 8\%$, tandis que le second, de 01h45 à 02h15, est plus compressible, $c \sim 20\%$. Grâce à ces deux intervalles, nous pouvons étudier l'impact des différents niveaux de fluctuation de densité sur le taux de cascade calculé avec la loi isentrope-polytrophe et la loi incompressible.

Ces choix de sous-intervalles ont été effectués en considérant un certain nombre d'hypo-

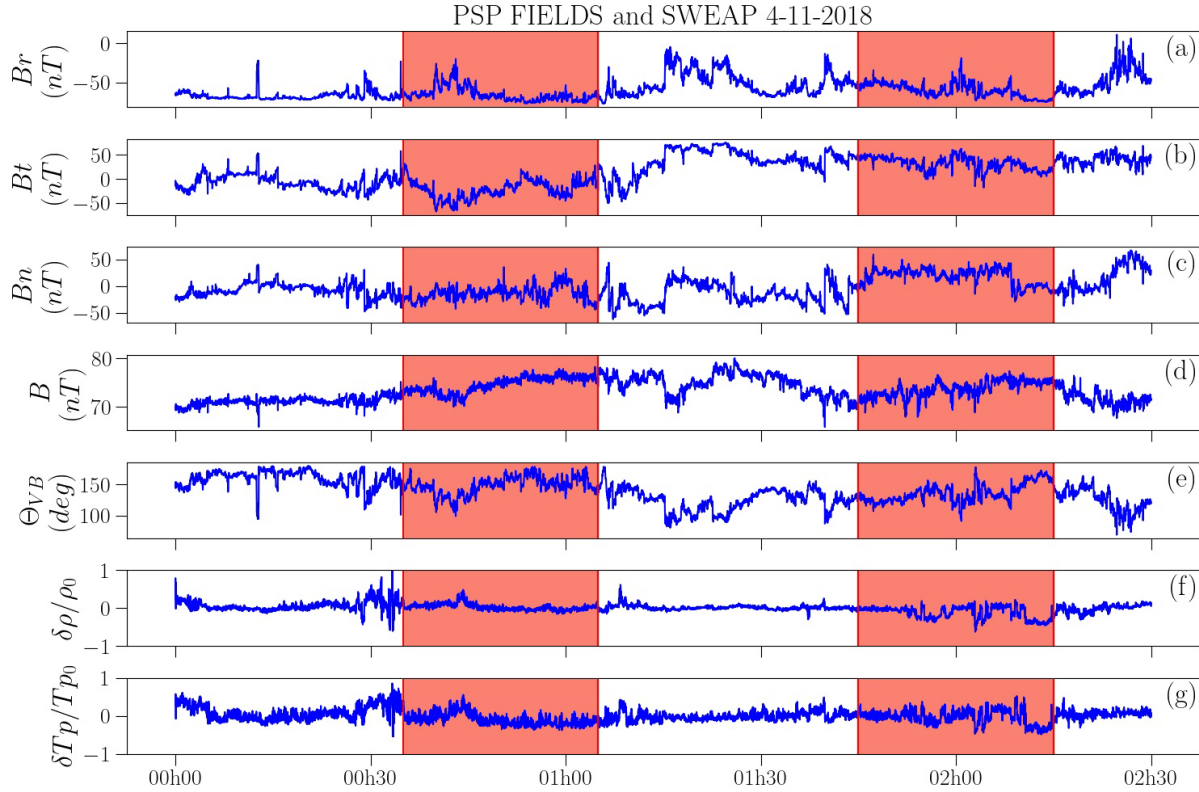


FIGURE I.4.3 – Données PSP mesurées dans l’héliosphère interne le 4 novembre 2018. (a) à (c) : les trois composantes du champ magnétique dans le système de représentation RTN. (d) : Norme du champs magnétique. (e) : angle entre le champ de vitesse du fluide et le champ magnétique. (f) et (g) : fluctuations de densité et température relative des protons. Les zones rouges représentent les sous-intervalles utilisés pour le calculer des taux de cascade.

thèses permettant de calculer un taux de cascade tout en réduisant l’incertitude du résultat. Les séries étant temporelles, on utilise l’hypothèse de Taylor¹ (**taylor_spectrum_1938**) qui présuppose que les variations temporelles relevées par la sonde peuvent être interprétées comme des variations spatiales convectées par le flot de plasma à la vitesse moyenne \mathbf{v}_0 . Ainsi, on peut estimer l’incrément spatial ℓ à partir de l’incrément temporel τ via $\ell \sim \mathbf{v}_0 \tau$. Estimer l’échelle spatiale à l’aide de l’hypothèse de Taylor suppose que les incréments longitudinaux sont orientés suivant la direction moyenne du flot. Or le couplage entre le champ magnétique et le fluide implique une forte anisotropie entre les directions parallèles et perpendiculaires au champ magnétique. Par conséquent, si l’angle entre la vitesse et le champ magnétique, θ_{VB} , varie trop fortement, d’importantes variations pourront apparaître dans les résultats du taux de cascade, comme l’ont observé LZ HADID, SAHRAOUI et GALTIER 2017. Les intervalles ont donc été choisis tel que θ_{VB} soit relativement stationnaire (ligne (e) de la figure I.4.3). On a aussi considéré des séries temporelles relativement stationnaires pour les autres quantités afin d’assurer une certaine stationnarité/homogénéité statistique.

1. La validité de l’hypothèse de Taylor dans le vent solaire et en particulier le long de la trajectoire de PSP peut être remise en question (**treumann_applicability_2019**; **chhiber_contextual_2019**) mais l’obtention d’une hypothèse de remplacement est encore une question ouverte (PARASHAR et MATTHAEUS 2022) que l’on n’a pas adressée au cours de ce travail.

L'estimation des moyennes dans le calcul du taux de cascade demande une statistique suffisante, c'est-à-dire des intervalles de durée supérieure à plusieurs fois le temps de corrélation des fluctuations turbulentes (COBURN et al. 2015). PARASHAR, GOLDSTEIN et al. 2020 ont estimé le temps de corrélation des données relevées par PSP entre le 3 et le 10 novembre avec des intervalles glissants de 4h, 8h et 24h. En se fiant à cette estimation, le temps de corrélation pour les données utilisées ici (le 4 novembre entre 00h00 et 02h30) est autour de 500 s c'est-à-dire un peu moins du tiers de la longueur de nos sous-intervalles (30 min). On supposera donc que leur durée convient au calcul d'un taux de cascade.

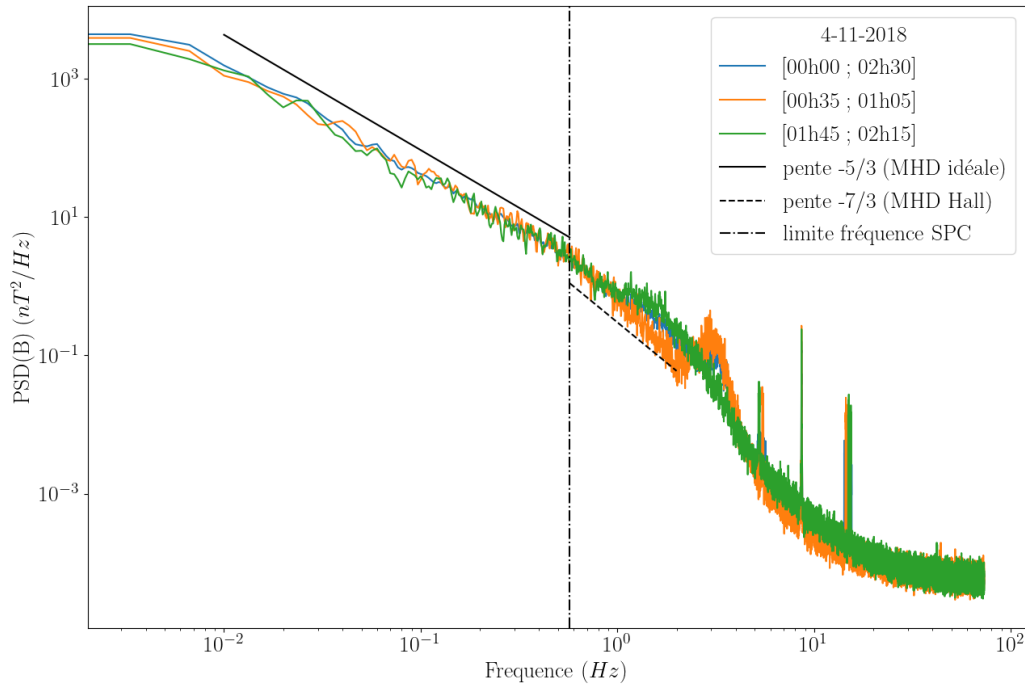


FIGURE I.4.4 – Spectre des fluctuations magnétiques pour l'intervalle complet de données (bleu), et les sous-intervalles (orange et vert) obtenue avec les données MAGs non rééchantillonnées à la cadence de SPC. La ligne noire continue indique la pente attendue dans la zone MHD idéale (spectre de type Kolmogorov en $-5/3$), la ligne en pointillés celle attendue dans la zone MHD Hall ($-7/3$) et l'axe vertical la fréquence maximale accessible avec la cadence de SPC.

Sur la figure I.4.4, sont affichés les spectres des fluctuations magnétiques obtenus avec les données MAGs non rééchantillonnées de l'intervalle complet et des deux sous-intervalles. Les fréquences qui nous intéressent sont les fréquences inférieures à la cadence de SPC. Pour ces fréquences, la pente des spectres semble être plus proche de $-5/3$ (attendue dans la zone MHD idéale) que de $-7/3$ (attendue dans la zone MHD Hall). La loi exacte du modèle MHD idéal y semble donc applicable.

4.2 Comparaison des lois incompressible vs compressible-isentrope-polytrophe avec $\gamma = 1$ (isotherme) et $\gamma = 5/3$ (adiabatique)

Pour ce qui est de la forme de la loi exacte, l'utilisation d'une seule sonde impose deux autres hypothèses. La première correspond à la négligence des termes sources. Ces derniers ne peuvent pas être calculés à cause de leur dépendance en des dérivées locales (∇ et ∇') qui ne sont accessibles qu'avec des missions multi-sondes telles que MMS ou CLUSTER envoyées autour de la Terre (ANDRÉS, SAHRAOUI, GALTIER, LZ HADID, FERRAND et al. 2019). Physiquement, une telle hypothèse pourrait avoir un impact significatif, mais d'après l'étude numérique de ANDRÉS, SAHRAOUI, GALTIER, LZ HADID, FERRAND et al. 2019 en turbulence MHD subsonique sur une loi exacte isentrope-isotherme formulée telle que (I.3.11) (formulation qui sera considérée ici), seuls les termes flux écrits sous la forme de fonctions de structure sont dominants, les termes sources et les termes hybrides sont négligeables ou se compensent. La deuxième hypothèse est celle d'isotropie des fluctuations qui permet d'intégrer tridimensionnellement la loi exacte dans une boule de rayon $\ell = |\ell|$. Cette hypothèse simplificatrice est largement utilisée PARASHAR et MATTHAEUS 2022 mais sa validité peut être remise en cause par l'anisotropie du plasma due au champ magnétique.² L'expression du taux de cascade calculée ici est alors :

$$\varepsilon = -\frac{3}{4|\mathbf{v}_0|\tau} < (\delta(\rho\mathbf{v}) \cdot \delta\mathbf{v} + \delta(\rho\mathbf{v}_A) \cdot \delta\mathbf{v}_A + 2\delta\rho\delta u)\delta\mathbf{v} - (\delta(\rho\mathbf{v}_A) \cdot \delta\mathbf{v} + \delta(\rho\mathbf{v}) \cdot \delta\mathbf{v}_A)\delta\mathbf{v}_A > \quad (\text{I.4.1})$$

avec, suivant les fermetures définies sur la Table 2.2, :

- incompressible (IMHD) : $\rho = \rho_0$, pas de u nécessaire
- isentrope-isotherme (CMHDi) : $u = c_s^2 \ln(\frac{\rho}{\rho_0})$ obtenu avec la fermeture isentrope-polytrophe et $\gamma = 1$
- isentrope-adiabatique (CMHDp) : $u = \frac{c_s^2 - c_{s0}^2}{\gamma(\gamma-1)}$ obtenu avec la fermeture isentrope-polytrophe et $\gamma = 5/3$

La vitesse du son est obtenue grâce à la relation des gaz parfaits : $c_s^2 = \gamma k_B T_p / m_p$ avec k_B , la constante de Boltzmann et T_p et m_p , la température et la masse des protons.

Sur la figure I.4.5 apparaissent les résultats pour les deux sous-intervalles, le quasi-incompressible à gauche (1) et le plus compressible à droite (2). La première ligne ((a1) et (a2)) montre l'estimation du taux de cascade avec la loi incompressible PP98 en bleu, la loi isentrope-isotherme en vert et adiabatique en rouge. Sur la deuxième ligne ((b1) et (b2)), la contribution d'énergie interne $-\frac{3}{4|\mathbf{v}_0|\tau} < 2\delta\rho\delta u\delta\mathbf{v} >$ notée F_2 est comparé aux autres termes résumés sous la notation F_1 dans le cas isotherme (vert) et le cas adiabatique (rouge). L'impact de la fermeture thermodynamique n'étant portée que par F_2 , le ratio entre les F_2 adiabatique (F_{2p}) et isotherme (F_{2i}) est donné sur la troisième ligne ((c1) et (c2)). F_1 représente les termes flux dit quasi-incompressibles ou Yaglom compressibles car ne s'annulant pas dans la loi PP98.

N'est représenté que la valeur absolue des différentes quantités. Leur signe nécessite des intervalles plus longs pour statistiquement converger (COBURN et al. 2015 ; LZ HADID, SAHRAOUI et GALTIER 2017). La question de l'inversion de la cascade potentiellement visualisée à travers le signe du taux ne peut donc pas être étudiée ici. Un signe constant

2. Un taux de cascade incompressible intégré anisotropiquement a été investigué par ANDRÉS, SAHRAOUI, S HUANG et al. 2022 mais une extension compressible reste à faire.

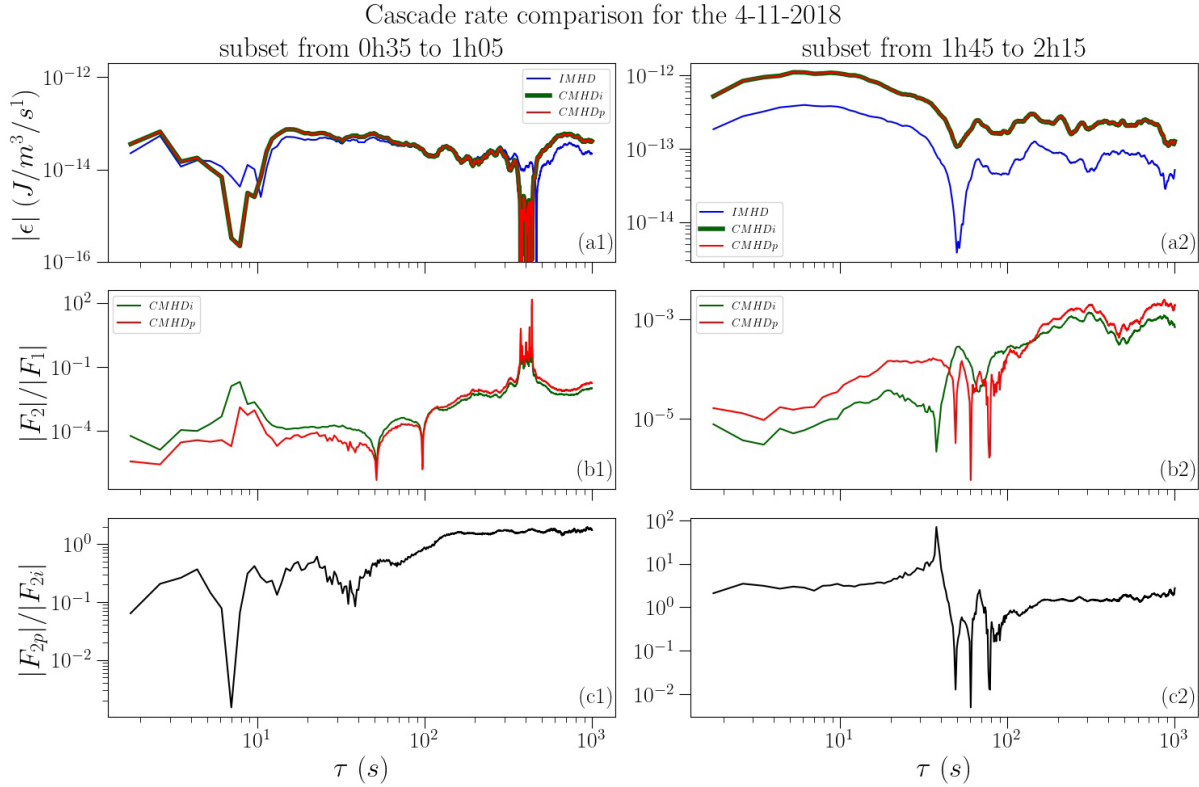


FIGURE I.4.5 – Comparaison des taux de cascade obtenus avec l’expression de la loi exacte (I.4.1) et différentes fermetures pour le sous-intervalle $\{00\text{h}35\text{--}01\text{h}05\}$ à gauche et $\{01\text{h}45\text{--}02\text{h}15\}$ à droite. (a1)–(a2) : valeur absolue des taux de cascade obtenus avec les fermetures incompressible (IMHD) en bleu, compressible isentrope-isotherme (CMHDi) en vert et adiabatique (CMHDP) en rouge. (b1)–(b2) : ratio entre la contribution d’énergie interne F_2 et celle quasi-incompressible F_1 dans le cas isotherme (vert) et le cas adiabatique (rouge). (c1)–(c2) : ratio entre les contributions de l’énergie interne adiabatique F_{2p} et isotherme F_{2i} .

peut par contre témoigner d’un rapprochement de la convergence. On va donc utiliser la variation de signe pour définir partiellement une zone inertielle. Pour le premier intervalle, le signe montre des variations avant $\tau \sim 10$ s et après $\tau \sim 400$ s et reste constant et positif au centre. On supposera donc que cette zone centrale correspond à une zone inertielle. À grande échelle, ces variations proviennent de F_1 et se reflètent dans la brusque augmentation apparaissant sur la deuxième ligne de graphiques. Pour le second intervalle, le signe ne varie pas, il reste positif contrairement à ce que pourrait laisser présager le creux apparaissant en $\tau \sim 50$ s. Malgré tout, nous limitons l’interprétation d’une zone inertielle à l’intervalle $\tau \in [50; 800]$ s où le niveau moyen reste quasiment constant.

Figure I.4.5(a2) met en avant le rôle de la prise en compte de la compression dans le taux de cascade : les taux de cascade compressible sont plus élevés d’un facteur 2 à 3 par rapport au taux incompressible alors que Figure I.4.5(a1) provenant de données bien moins compressible montre des niveaux similaires. Cette observation coïncide avec de précédentes issues de données du vent solaire (BANERJEE, LZ HADID et al. 2016 ; LZ HADID, SAHRAOUI et GALTIER 2017 ; ANDRÉS, SAHRAOUI, LZ HADID et al. 2021). Par contre, les deux modèles compressibles montrent les mêmes résultats. La raison de cette convergence est révélée par les graphiques I.4.5(b1)–(b2) : la contribution de F_2 est bien

négligeable devant celle de F_1 . Le facteur 3 observé précédemment provient donc de la prise en compte de la densité dans F_1 . Même si l'impact du terme dépendant de la fermeture à une importance moindre dans le taux total, nous pouvons en examiner l'effet dans le graphique I.4.5(c1)–(c2). À large échelles ($\tau > 100$ s), les deux fermetures apportent une contribution similaire tandis qu'à plus faible échelle (hors de la suspectée zone inertielle pour le deuxième intervalle), un ordre de grandeur de différence apparaît. Dans le cas du premier intervalle, la fermeture isotherme contribue plus que l'adiabatique tandis que dans le cas du deuxième intervalle, c'est le contraire. Une interprétation complète de cette différence de comportement ne peut être apportée avec cette étude de cas et nécessite une analyse statistique. Cette analyse, effectuée ultérieurement par BRODIANO, ANDRÉS et DMITRUK 2022 dans les données PSP montre que $\langle F_2 \rangle$ (en notant $\langle \rangle$ la moyenne sur les échelles et en adoptant nos notations des contributions aux taux de cascade) apparaît statistiquement un à deux ordres de grandeur en dessous de $\langle F_1 \rangle$ et que le facteur 3 entre les taux compressibles et le taux incompressible n'est pas retrouvé sauf pour des cas particuliers. Les cas que nous avons étudiés semblent donc dans la norme pour le premier point vérifié, mais, pour le dernier point, notre deuxième sous-intervalle entre dans la classe des cas particuliers. Ils montrent aussi que plus la compressibilité est forte, plus $\langle F_2 \rangle$ peut venir concurrencer $\langle F_1 \rangle$ voire, pour certains cas, le surpasser. Près de Soleil, ils notent aussi que $\langle F_{2p} \rangle$ est supérieur à $\langle F_{2i} \rangle$ en moyenne.

Cette étude de cas préliminaire publiée par SIMON et SAHRAOUI 2021 et validée statistiquement par BRODIANO, ANDRÉS et DMITRUK 2022 a donc permis de visualiser l'impact de la compression sur l'estimation du taux de cascade et l'apport potentiel d'une fermeture par rapport à une autre dans des données réelles du vent solaire.

4.3 Application statistique préliminaire dans des données localisées dans la magnétogaine

Le plasma dans la magnétogaine est plus compressible que dans le vent solaire (LZ HADID, SAHRAOUI, GALTIER et SY HUANG 2018) et d'après LIVADIOTIS 2018, $1 < \gamma < 5/3$. Il est aussi parcouru par de multiples missions en particulier des missions multi-sondes comme la mission Magnetospheric Multiscale (MMS) qui comprend quatre satellites en orbites autour de la Terre depuis 2015 (figure I.4.6). Leur caractéristique «multi-sonde» pourrait permettre de calculer les termes sources des lois exactes compressibles tel qu'effectué par ANDRÉS, SAHRAOUI, GALTIER, LZ HADID, FERRAND et al. 2019.

Par curiosité, on a choisi une douzaine de cas parmi les cas utilisés par ANDRÉS, SAHRAOUI, GALTIER, LZ HADID, FERRAND et al. 2019 pour regarder d'une manière un peu plus statistique si l'on retrouve les résultats sur les termes flux de notre étude de cas effectuée dans PSP. Les données utilisées ont été relevées par les instruments FPI («Fast Plasma Investigation») pour ce qui est des moments de la fonction de distribution des particules et FGM («Fluxgate Magnetometer») pour le champ magnétique pendant 12 intervalles de temps entre 2015 et 2017. L'étude, similaire à celle effectuée dans les données PSP, est menée séparément sur les quatre satellites de la constellation (48 résultats). La figure I.4.7 montre l'emplacement des 48 résultats pour lesquels la fluctuation de densité (compressibilité, c) varie de 20% à 60% (visualisé via l'échelle de couleur) dans deux diagrammes ayant pour abscisse le rapport entre les taux moyen compressible $\langle \varepsilon_{CMHD} \rangle$ obtenu avec $\gamma = 5/3$ (loi adiabatique, CMHDp) et incompressible $\langle \varepsilon_{IMHD} \rangle$. et $\langle \varepsilon_i \rangle$ obtenu avec $\gamma = 1$ (loi isotherme, CMHDi). Le diagramme de gauche a pour ordonnée le

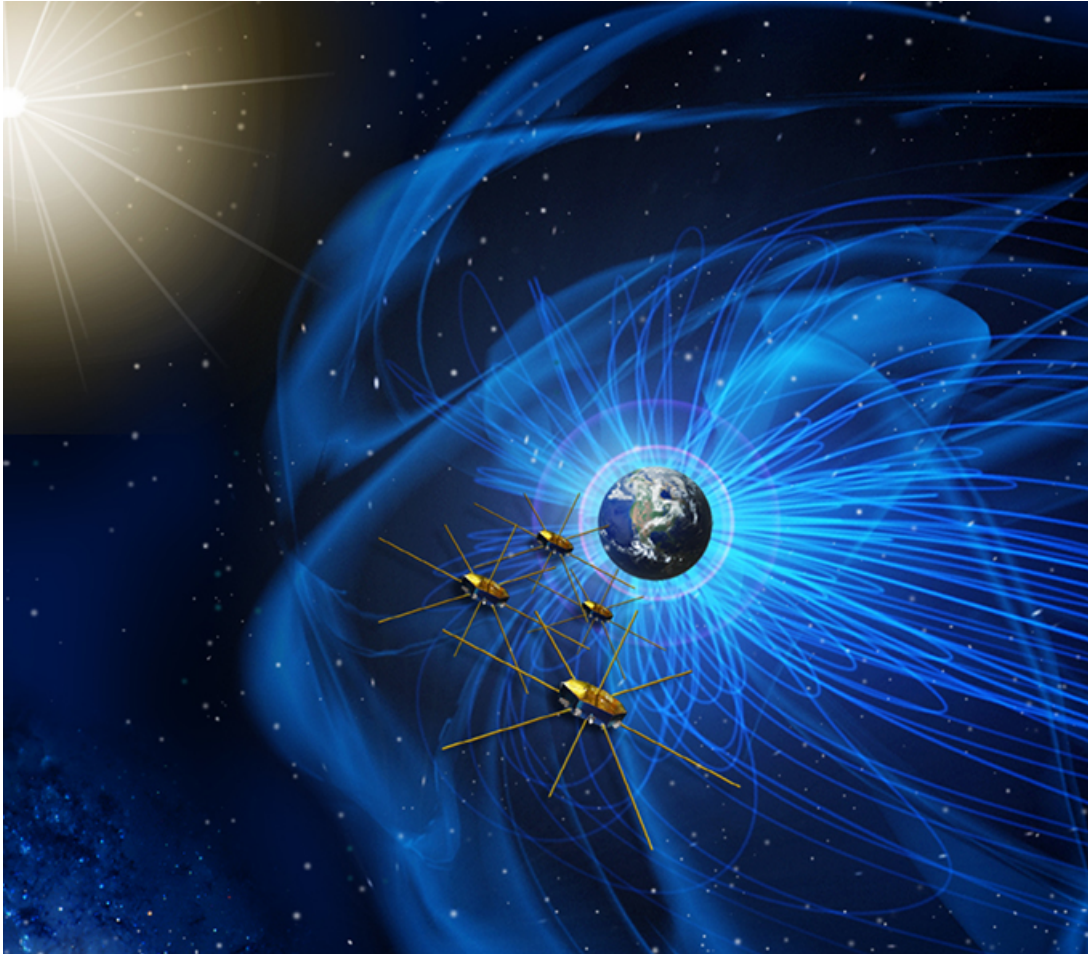


FIGURE I.4.6 – Vue d’artiste de la mission MMS. Crédits : la page web de MMS/NASA (https://www.nasa.gov/mission_pages/mms).

rapport entre les contributions d’énergie interne $\langle F_{2p} \rangle$ et quasi-incompressible $\langle F_1 \rangle$ à la loi adiabatique et celui de droite le rapport entre les contributions d’énergie interne adiabatique et isotherme, $\langle F_{2p} \rangle$ et $\langle F_{2i} \rangle$. Cette étude révèle de plus importantes fluctuations de densité dans la magnétogaine que celles relevées pour les données PSP. Dans les cas les plus compressibles, le taux de cascade compressible semble pouvoir doubler par rapport au taux incompressible (points rouges éloignés de la verticale centrale). Mais la contribution d’énergie interne moyenne y est encore plus négligeable que dans les données PSP, 5 à 8 ordres de grandeurs plus faible que la contribution quasi-incompressible moyenne comme le montre le premier diagramme. Sur le diagramme de droite, on voit que $\langle F_{2p} \rangle$ a tendance à être un peu plus faible que $\langle F_{2i} \rangle$ mais qu’il peut aussi être environ deux fois plus important. Cette dernière observation montre un comportement inverse du comportement moyen observé à tout rayon solaire dans le vent solaire par BRODIANO, ANDRÉS et DMITRUK 2022, mais demanderait plus de statistique pour être confirmée.

Cette étude dans les données MMS est restée préliminaire, l’intérêt du travail ayant dévié vers l’effet de l’anisotropie de pression (voir partie II). Par la suite, une autre contribution pourrait être étudiée grâce à la constellation de satellites de MMS : celles des termes sources, impossible à analyser avec PSP. Il serait aussi intéressant d’étudier dans les données les contributions au taux de cascade apportées par les différentes formulations ayant

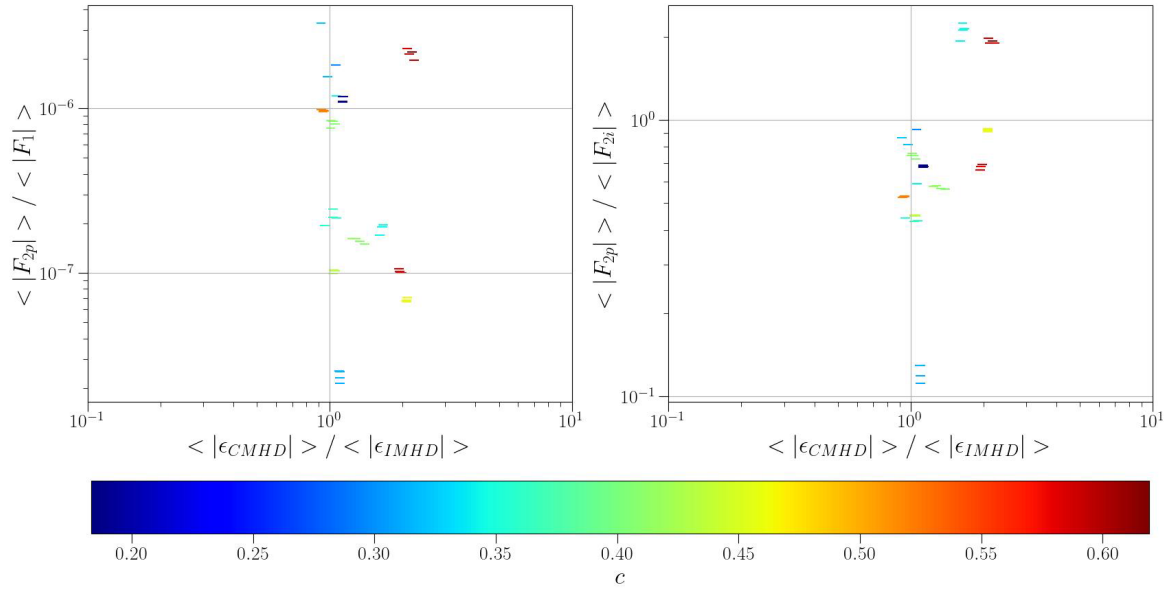


FIGURE I.4.7 – Résumé de l'étude statistique préliminaire menée sur 12 intervalles de type "burstmode" des quatre satellites de MMS. Les points sont colorés suivant la compressibilité c du jeu de données associé. En abscisses : rapport entre les taux de cascade compressible (CMHD, $\gamma = 5/3$) et incompressible (IMHD). Ordonnée à gauche : rapport entre les contributions d'énergie interne (cas $\gamma = 5/3$) et quasi-incompressible. Ordonnée à droite : rapport entre les contributions d'énergie interne adiabatique (cas $\gamma = 5/3$) et isotherme ($\gamma = 1$).

été analytiquement dérivées dans le chapitre précédent, en particulier les contributions des termes flux dépendant des pressions magnétique et thermodynamique ou du flux de chaleur.

4.4 Synthèse de l'étude de cas observationnelle dans les données de PSP

Données choisies : instrument SPC/SWEAP et MAGs/FIELDS présents sur la sonde PSP, mesures relevées le 4 Novembre 2018, comparaison d'un intervalle quasi-incompressible et d'un plus compressible.

Hypothèses nécessaires à l'utilisation de données in-situ issues d'une mission composée d'une seule sonde pour l'estimation de taux de cascade :

- taille d'intervalle supérieur à plusieurs fois le temps de corrélation des fluctuations turbulentes.
- hypothèse de Taylor, $\ell \sim \mathbf{v}_0 \tau$, valide si angle θ_{VB} quasi-stationnaire.
- négligence des termes sources dans la loi exacte, valide si vent subsonique et avec la formulation de loi étudiée ici.
- intégration isotrope de la loi exacte, validité à nuancer tant que l'angle θ_{VB} reste quasi-stationnaire.

Loi exacte analysée : $\varepsilon = F_1 + F_2$ avec

$$F_1 = -\frac{3}{4|\mathbf{v}_0|\tau} < (\delta(\rho\mathbf{v}) \cdot \delta\mathbf{v} + \delta(\rho\mathbf{v}_A) \cdot \delta\mathbf{v}_A)\delta\mathbf{v} - (\delta(\rho\mathbf{v}_A) \cdot \delta\mathbf{v} + \delta(\rho\mathbf{v}) \cdot \delta\mathbf{v}_A)\delta\mathbf{v}_A >$$

$$F_2 = -\frac{3}{4|\mathbf{v}_0|\tau} < 2\delta\rho\delta u\delta\mathbf{v} >$$

Fermetures :

- incompressible : $\rho = \rho_0$, pas de u nécessaire
- isentrope-isotherme : $u = c_s^2 \ln(\frac{\rho}{\rho_0})$ et $\gamma = 1$
- isentrope-adiabatique : $u = \frac{c_s^2 - c_{s0}^2}{\gamma(\gamma-1)}$ et $\gamma = 5/3$

Conclusion :

- apport potentiellement substantiel de la compression via la densité dans les termes de type F_1 indépendant de la fermeture
- apport de la fermeture important dans F_2 à petite échelle
- F_2 négligeable devant F_1 pour les fermetures compressibles et dans les cas analysés

Ces résultats sont publiés dans SIMON et SAHRAOUI 2021, statistiquement validés par BRODIANO, ANDRÉS et DMITRUK 2022 et étendus dans la magnétogaine à travers une étude statistique préliminaire effectué dans les données MMS.

Depuis 1998 et la loi exacte de POLITANO et POUQUET 1998a étendant aux modèles fluides magnétisés incompressibles, la théorie de Kolmogorov décrivant la cascade turbulence forte à travers des lois exactes, de multiples extensions ont été proposées prenant en compte la compressibilité.

Dans cette partie I, nous nous sommes concentrés sur l'effet de fermetures thermodynamiques dépendant d'une pression isotrope. Dans un premier chapitre (synthèse section 1.4), nous avons revu la théorie incompressible afin d'illustrer simplement l'application de la théorie de Kolmogorov à des plasmas. Le second chapitre (synthèse section 2.4) pose le problème de la compressibilité dans les modèles fluide et analyse différentes possibilités de fermeture basée sur la théorie thermodynamique. La question qui se pose alors est celle de l'impact de la compressibilité sur la turbulence. Ma contribution pour y répondre est développée à travers les chapitres 3 et 4.

Dans le chapitre 3 (synthèse section 3.4), un cadre analytique est démontré à travers l'extension de la théorie des lois exactes. La stratégie mise en œuvre ne repose pas sur une fermeture thermodynamique, a contrario de celles entreprises dans la littérature (GALTIER et BANERJEE 2011 ; BANERJEE et GALTIER 2013 ; BANERJEE et GALTIER 2014 ; ANDRÉS et SAHRAOUI 2017), mais plutôt, sur l'équation de densité d'énergie interne. La loi exacte résultante, générale, obtient ainsi un caractère général et la fermeture ne devient qu'un «détail», une hypothèse, à ne considérer qu'à la fin du calcul en fonction du besoin. Par ce biais, est abordée l'objectif initial de cette partie du travail : obtenir une loi valable dans la zone inertielle isentrope pour une fermeture polytrophe décrivant ainsi la cascade turbulente dans différents plasmas présents dans l'univers de manière plus réaliste et versatile que la fermeture isotherme utilisée jusqu'à présent. La première formulation (f1) proposée pour répondre à cet objectif est inspirée du travail dans le cadre isentrope-isotherme de ANDRÉS, SAHRAOUI, GALTIER, LZ HADID, DMITRUK et al. 2018. Elle a permis l'étude comparative, dans deux jeux de données issus de la mission PSP, de l'impact de la compression et des fermetures isentropes-isotherme ($\gamma = 1$) et isentrope-adiabatique ($\gamma = 5/3$) sur la cascade turbulente. Cette étude fait l'objet du chapitre 4 (synthèse section 4.4) où elle est étendue dans la magnétogaine à travers l'amorçage d'une étude statistique dans les données de MMS. L'intérêt de la formulation f1 est que les termes sources impossibles à calculer à cause des caractéristiques de la mission PSP (une seule sonde) ont préalablement été numériquement démontrés comme négligeable dans le taux de cascade total par ANDRÉS, SAHRAOUI, GALTIER, LZ HADID, DMITRUK et al. 2018. La deuxième formulation (f2) de la loi exacte a initialement vu le jour comme une

conséquence du travail analytique qui sera présenté dans la partie II, relaxant l'isotropie de pression, mais le résultat, dépendant de p/ρ , peut s'avérer plus adapté à l'application d'une fermeture thermodynamique. La troisième et dernière formulation (f3) est la plus récente et s'inspire du travail sur le flux de chaleur dans l'équation d'énergie interne qui s'est révélée nécessaire lors de l'étude numérique qui sera présentée dans la partie ???. Ce résumé des résultats obtenus avec pression isotrope reflète la structure chronologique de l'ensemble du travail effectué et présenté dans ces trois parties, la méthode scientifique mise en œuvre et les points méthodologiques utilisés.

En termes de physique, cette partie propose un cadre d'étude de l'impact de la compression dans sa forme la plus "simple" : une densité variable, une pression isotrope, une énergie interne et un flux de chaleur souvent négligé. Ces grandeurs nous permettent de fermer le modèle fluide par des relations basées sur des hypothèses thermodynamiques telles que l'isentropie, l'isothermie ou la polytropie. À travers l'analyse de ces hypothèses et leur application dans les anciennes descriptions de la cascade turbulente, quatre possibilités majeures de fermeture ont émergées. La première, isentrope-isotherme est la première à avoir été utilisée dans l'extension des lois exactes (GALTIER et BANERJEE 2011 ; BANERJEE et GALTIER 2013 ; ANDRÉS et SAHRAOUI 2017). La deuxième, isentrope-polytrophe, introduite en HD (BANERJEE et GALTIER 2014), est celle qui nous a permis de généraliser la méthode d'obtention des lois exactes à toutes fermetures en utilisant l'équation d'énergie interne, elle prend en compte l'existence d'un γ et reflète un peu mieux la pluralité de transformations thermodynamiques observée dans les plasmas spatiaux et astrophysiques. La troisième, polytropique, basée sur un γ et un σ , lie le flux de chaleur au travail de pression et étend un peu plus loin les possibilités d'application des lois exactes. De la dernière, isotherme, émerge la loi exacte compressible qui semble la plus simple malgré la prise en compte des flux de chaleur.

Pour ce qui est de l'impact de la compression et des fermetures observé dans l'étude du taux de cascade dans le vent solaire, l'étude de cas comparative montre que la compression peut jouer un rôle important dans la cascade, mais, dans les cas étudiés, la fermeture isentrope-adiabatique ou isentrope-isotherme a peu d'impact malgré le rôle qu'elle joue à travers l'énergie interne. Les termes dominants s'avèrent en effet être ceux n'en dépendant pas. On peut aussi les interpréter comme ceux subsistant dans le cas d'une fermeture isobare. Ce travail pose ainsi les bases d'une étude observationnelle, plus générale, complète et systématique, de l'impact de compression et des fermetures sur la turbulence dans les plasmas spatiaux. Cette étude est laissée au futur car le vent solaire ayant la particularité d'être peu collisionnel et magnétisé, une autre question, un autre type de fermeture se sont posés et ont orienté le travail dans une autre direction : celle de l'effet de l'anisotropie de pression.

PARTIE II : Etude analytique de l'effet de l'anisotropie de pression

Quelle citation ?
Auteur

Les fonctions de distributions des ions observées dans le vent solaire montrent une différence de largeur entre les directions parallèle et perpendiculaires au champ magnétique (CASSAK et BARBHUIYA 2022 ; CASSAK, BARBHUIYA et WELDON 2022). Cette observation s'explique par l'existence d'un champ magnétique, favorisant une certaine direction, et par le manque de collisions dans le milieu. Ce type d'anisotropie a tout d'abord été modélisé par CHEW, GOLDBERGER et LOW 1956 à travers une pression de forme tensorielle et diagonale (gyrotrope) et supposant l'isentropie du modèle. Ce modèle, nommé CGL en hommage aux auteurs, sera présenté plus en détail dans le chapitre 1 de cette deuxième partie. Il y sera accompagné de l'extension proposée pour la théorie de Kolmogorov prenant en compte un tenseur de pression. Dans le chapitre 2, nous nous poserons la question suivante : l'incompressibilité est-elle compatible avec la gyrotropie de pression ? Et dans le 3, nous sortirons du cadre idéal de l'équation d'induction pour tendre vers le modèle bi-fluide.

Dans cette partie qui concentre le cœur analytique du travail effectué, nous conserverons l'hypothèse d'une zone inertielle isentrope et nous ne regarderons pas en détail les termes non gyrotrope du tenseur de pression.

PARTIE II : CHAPITRE 1

LOI EXACTE POUR LE MODÈLE CGL

Sommaire

1.1	D'un tenseur de pression dans le modèle fluide au modèle CGL	51
1.2	Instabilités linéaires et potentiel impact sur la turbulence du vent solaire	53
1.3	Loi exacte générale pour tout type de pression et application au modèle CGL	55
1.4	Synthèse de l'étude analytique de turbulence compressible avec pression tensorielle et modèle CGL	60

Dans le vent solaire, utiliser un modèle MHD compressible avec pression isotrope peut s'avérer ardue à justifier et devient injustifiable dès que l'on aborde les propriétés de fort champ magnétique ou de faibles collisions. Il faut prendre en compte, à minima, une pression gyrotrope par exemple en utilisant le modèle dit «CGL» du nom des auteurs de l'article fondateur CHEW, GOLDBERGER et LOW 1956. C'est la direction que l'on propose via ce chapitre pour notre étude de la cascade turbulente : décrire la cascade turbulente d'énergie totale à travers une loi exacte associée au modèle CGL. Encore une fois, on ne réduira le champ d'application qu'après avoir obtenue une loi plus générale, valable pour tout tenseur de pression. Les nouveaux résultats exposés ici ont fait l'objet principal de l'article SIMON et SAHRAOUI 2022.

1.1 D'un tenseur de pression dans le modèle fluide au modèle CGL

Dans le cadre général défini à partir de l'équation de Vlasov et menant au modèle MHD, la pression et le flux de chaleur sont défini tensoriellement, tel que des tenseurs de dimension 3×3 et $3 \times 3 \times 3$. La pression, \overline{P} , est un tenseur symétrique obtenu en effectuant le produit de deux vecteurs vitesse tandis que le flux de chaleur s'obtient à partir du produit de trois vecteurs vitesse. Dans cette partie, nous négligerons ce dernier, nous plaçant ainsi dans une situation similaire à la fermeture isentropique. Cette hypothèse est la première du modèle CGL. Elle sera relaxée dans la partie III.

Fondamentalement, le modèle CGL n'est pas un modèle mono-fluide défini en prenant le même point de vue que pour le modèle MHD, même si les équations sont similaires. Dans le modèle MHD, les électrons sont accrochés aux ions et aux lignes de champ magnétique. Dans le modèle CGL, seul le mouvement des ions est pris en compte, les électrons sont considérés comme froids, immobiles, et n'agissent que via le courant grâce à leur charge. Dans le premier cas, le fluide est modélisé comme des particules de fluides neutres, dans le deuxième, c'est un mono-fluide d'ions dans un environnement froid mais neutralisant. Nous reviendrons sur ce point dans le chapitre 3.

Dans la partie I, la pression était supposée isotrope, c'est à dire $\bar{\mathbf{P}} = p\bar{\mathbf{I}}$ avec $\bar{\mathbf{I}}$ le tenseur identité. Dans le modèle CGL, elle est définie comme gyrotrope et alignée sur le champ magnétique (de direction \mathbf{b}), c'est-à-dire que l'on considère 2 pressions, une dite parallèle p_{\parallel} et une perpendiculaire p_{\perp} . Dans un repère cartésien orienté tel que \mathbf{b} coïncide avec la direction \mathbf{e}_z , le tenseur gyrotrope devient :

$$\bar{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} p_{\perp} & 0 & 0 \\ 0 & p_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & p_{\parallel} \end{pmatrix}$$

Plus généralement, on peut l'écrire : $\bar{\mathbf{P}} = p_{\perp}\bar{\mathbf{I}} + (p_{\parallel} - p_{\perp})\mathbf{b}\mathbf{b}$. La part isotrope de la pression est obtenue en faisant le produit dual ":" entre $\bar{\mathbf{P}}$ et $\bar{\mathbf{I}}$, ce qui revient à considérer la trace de $\bar{\mathbf{P}}$. Ainsi : $p = \frac{1}{3}\bar{\mathbf{P}} : \bar{\mathbf{I}} = \frac{1}{3}(2p_{\perp} + p_{\parallel})$. Cela permet de réécrire le tenseur de pression en séparant la part isotrope de la composante dite anisotrope : $\bar{\mathbf{P}} = p\bar{\mathbf{I}} + (p_{\parallel} - p_{\perp})(\mathbf{b}\mathbf{b} - \frac{1}{3}\bar{\mathbf{I}})$, on notera la composante anisotrope $\bar{\Pi}$. Dans le cas général non-gyrotrope, d'autres composantes non isotropes sont à ajouter. On n'abordera pas leur détail et on les résumera simplement par la notation $\bar{\Pi}_{ng}$. D'après CASSAK et BARBHUIYA 2022, $\bar{\Pi} = (p_{\parallel} - p_{\perp})(\mathbf{b}\mathbf{b} - \frac{1}{3}\bar{\mathbf{I}}) + \bar{\Pi}_{ng}$ contribue à la déformation incompressible du fluide par compression/expansion et cisaillement à travers le terme $\bar{\mathbf{P}} : \nabla \mathbf{v}$ tandis que p résulte en sa dilatation, compressible. En mécanique des fluides, ces termes de pression anisotrope sont souvent une réécriture des termes de dissipation visqueuse d'où leur interprétation dissipative.

On définira le modèle général fermé tel que dépendant des moments $\rho, \mathbf{v}, \bar{\mathbf{P}}$:

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (\text{II.1.1})$$

$$\partial_t (\rho \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v} - \rho \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A) + \nabla \bar{\mathbf{P}}_* = 0 \quad (\text{II.1.2})$$

$$\partial_t \bar{\mathbf{P}} + \nabla \cdot (\mathbf{v} \bar{\mathbf{P}}) + (\bar{\mathbf{P}} \cdot \nabla \mathbf{v})^S + \Omega_g (\mathbf{b} \times \bar{\Pi}_{ng})^S = 0 \quad (\text{II.1.3})$$

$$\partial_t \mathbf{v}_A - \nabla \cdot (\mathbf{v}_A \mathbf{v} - \mathbf{v} \mathbf{v}_A) + \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{v}_A - \frac{\mathbf{v}_A}{2} \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (\text{II.1.4})$$

sachant que $\mathbf{b} \times \bar{\mathbf{I}} = 0$ et $\mathbf{b} \times \mathbf{b}\mathbf{b} = 0$, et en notant $\bar{\mathbf{P}}_* = \bar{\mathbf{P}} + p_m \bar{\mathbf{I}}$, le tenseur de pression totale. On utilisera ce modèle pour obtenir une loi exacte générale sur l'énergie totale applicable sous l'hypothèse d'une cascade isentrope quelque soit la forme de la pression. Comme dans le cas avec pression isotrope, l'équation II.1.3 ne servira pas complètement : seule sa trace, sa composante isotrope, obtenue en effectuant le produit dual avec l'identité et liée à l'énergie interne sera considérée, c'est-à-dire :

$$\partial_t p + \nabla \cdot (p \mathbf{v}) + \frac{2}{3} \bar{\mathbf{P}} : \nabla \mathbf{v} = 0 \quad (\text{II.1.5})$$

puisque $\bar{\Pi}_{ng}$ étant symétrique $(\mathbf{b} \times \bar{\Pi}) : \bar{\mathbf{I}} = 0$. L'énergie interne sera définie par $\rho u = \frac{1}{2} \bar{\mathbf{P}}$:

$\bar{\mathbf{I}} = \frac{3}{2}p = \frac{1}{2}(2p_{\perp} + p_{\parallel})$, la dernière formulation étant associé au cas particulier gyrotrope (HAZELTINE, MAHAJAN et MORRISON 2013). On retrouve donc l'équation (I.2.29) écrit pour un tenseur de pression général et avec l'hypothèse $\nabla \cdot \mathbf{q} = 0$:

$$\partial_t(\rho u) + \nabla \cdot (\rho u \mathbf{v}) + \bar{\mathbf{P}} : \nabla \mathbf{v} = 0 \quad (\text{II.1.6})$$

Cette équation est assez générale et peut-être obtenue indépendamment de l'expression de u en fonction de p et de l'équation (II.1.3), avec un bilan énergétique, comme celui que l'on a effectué dans le chapitre I.2 (ECKART 1940 ; HAZELTINE, MAHAJAN et MORRISON 2013).

Dans le modèle CGL, l'équation tensorielle de pression prend la forme de deux équations (voir HUNANA et al. 2019 pour les détails de dérivations) :

$$\partial_t p_{\parallel} + \nabla \cdot (p_{\parallel} \mathbf{v}) + 2p_{\parallel} \mathbf{b}\mathbf{b} : \nabla \mathbf{v} = 0 \quad (\text{II.1.7})$$

$$\partial_t p_{\perp} + \nabla \cdot (p_{\perp} \mathbf{v}) + p_{\perp} \nabla \cdot \mathbf{v} - p_{\perp} \mathbf{b}\mathbf{b} : \nabla \mathbf{v} = 0 \quad (\text{II.1.8})$$

En les sommant, on retrouve l'équation d'énergie interne. En les manipulant avec l'équation d'induction, ces deux équations de pressions peuvent s'écrire dans le cadre de l'hypothèse d'une loi d'Ohm idéale, sous les formes conservatives :

$$d_t\left(\frac{p_{\parallel} \mathbf{v}_A^2}{\rho^2}\right) = 0 \quad d_t\left(\frac{p_{\perp}}{\rho^{3/2} |\mathbf{v}_A|}\right) \quad (\text{II.1.9})$$

De ce lien, entre $p_{\parallel, \perp}$ et des puissances de ρ , proviennent la deuxième appellation du modèle, «bi-adiabatique», et les formes explicites des pressions : $p_{\parallel} \propto \frac{\rho^2}{v_A^2}$ et $p_{\perp} \propto \rho^{3/2} |\mathbf{v}_A|$.

1.2 Instabilités linéaires et potentiel impact sur la turbulence du vent solaire

Contrairement au modèle MHD, le modèle gyrotrope a la particularité d'être potentiellement linéairement instable. Sa linéarisation (voir méthode dans le chapitre I.1 et pour plus de détail le chapitre 3 de HUNANA et al. 2019) nous donne l'équation de dispersion suivante :

$$\begin{pmatrix} \frac{\omega^2}{v_{A0}^2 k_{\parallel}^2} - (\beta_{\parallel 0} a_{p0} + 1) \frac{k_{\perp}^2}{k_{\parallel}^2} + (\frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0}) - 1) & 0 & -\frac{\beta_{\parallel 0}}{2} a_{p0} \frac{k_{\perp}}{k_{\parallel}} \\ 0 & \frac{\omega^2}{v_{A0}^2 k_{\parallel}^2} + (\frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0}) - 1) & 0 \\ -\frac{\beta_{\parallel 0}}{2} a_{p0} \frac{k_{\perp}}{k_{\parallel}} & 0 & \frac{\omega^2}{v_{A0}^2 k_{\parallel}^2} - \frac{3}{2} \beta_{\parallel 0} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_{x1} \\ v_{y1} \\ v_{z1} \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{II.1.10})$$

où $a_{p0} = \frac{p_{\perp 0}}{p_{\parallel 0}}$ est appelé taux d'anisotropie et $\beta_{\parallel 0} = \frac{2p_{\parallel 0}}{\rho_0 v_{A0}^2}$ est le paramètre β linéaire du plasma calculé avec la pression parallèle. La relation de dispersion s'écrit alors :

$$0 = \left(\frac{\omega^2}{k_{\parallel}^2 v_{A0}^2} - 1 + \frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0}) \right) \left(\frac{\omega^2}{k^2 v_{A0}^2} - \frac{1}{2}(A \pm \sqrt{A^2 - 4B}) \right) \quad (\text{II.1.11})$$

avec

$$\begin{aligned}
A &= 1 + \beta_{\parallel 0} a_{p0} \left(1 - \frac{1}{2} \cos^2 \theta\right) + \beta_{\parallel 0} \cos^2 \theta \\
B &= \frac{3}{2} \beta_{\parallel 0} \cos^2 \theta \left(\left(1 - \frac{\beta_{\parallel 0}}{2} (1 - a_{p0})\right) \cos^2 \theta + \left(1 + \beta_{\parallel 0} a_{p0} \left(1 - \frac{1}{6} a_{p0}\right)\right) \sin^2 \theta \right) \\
&= \frac{3}{2} \beta_{\parallel 0} \cos^2 \theta \left(1 + \beta_{\parallel 0} a_{p0} \left(1 - \frac{1}{2} \cos^2 \theta\right) - \frac{\beta_{\parallel 0}}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{6} \beta_{\parallel 0} a_{p0}^2 \sin^2 \theta\right) \\
A^2 - 4B &= \left(1 + \beta_{\parallel 0} a_{p0} \left(1 - \frac{1}{2} \cos^2 \theta\right) - \beta_{\parallel 0} \cos^2 \theta\right)^2 + 3\beta_{\parallel 0}^2 \cos^4 \theta + \beta_{\parallel 0} a_{p0}^2 \sin^2 \theta
\end{aligned}$$

Dans le premier mode $\frac{\omega^2}{k_{\parallel}^2 v_{A0}^2} + \left(\frac{\beta_{\parallel 0}}{2} (1 - a_{p0}) - 1\right) = 0$, on retrouve le mode d'Alfvén incompressible si $a_{p0} = 1$. Ce mode est instable si $1 - \frac{\beta_{\parallel 0}}{2} (1 - a_{p0}) < 0$. Cette instabilité est l'instabilité firehose («lance d'incendie» ou «tuyau d'arrosage»). Son nom provient du comportement des tubes de flux magnétique qui ressemble à celui d'un tuyau d'arrosage devenu fou après avoir été lâché par son utilisateur : la pression parallèle qui joue le rôle de la force centrifuge est alors trop importante et n'est plus compensée par les pressions perpendiculaire (force de pression thermique extérieure au tuyau d'arrosage) et magnétique (tension du tube).

Les deux autres modes visibles dans la relation (II.1.11) sont les modes magnétosoniques rapide (+) et lent (−) du modèle CGL. Même en y considérant $a_{p0} = 1$, il est impossible de retrouver les modes magnétosoniques MHD dans les expressions des modes CGL. Cela est dû à l'utilisation des équations de pression dans le calcul pour obtenir les relations de dispersion. On ne pourra donc pas s'attendre à retrouver le comportement MHD dans des simulations CGL initialisée à $a_{p0} = 1$. En effet, comme cela a été remarqué par HUNANA et al. 2019 et comme on pourra l'observer dans la partie ??, de l'anisotropie de pression pourra s'y développer. D'après l'expression de $A^2 - 4B$, le mode rapide va rester stable. Le mode lent peut quant à lui devenir instable si $B < 0$. Cela peut arriver dans deux cas de figure :

- $1 - \frac{\beta_{\parallel 0}}{2} (1 - a_{p0}) < 0$ correspondant à l'instabilité firehose, qui est dans ce cas de figure nommée firehose parallèle puisque qu'elle apparaît principalement si $k_{\parallel} \gg k_{\perp}$,
- $1 + \beta_{\parallel 0} a_{p0} \left(1 - \frac{1}{6} a_{p0}\right) < 0$ correspondant à l'instabilité miroir.

L'expression du critère d'instabilité miroir est légèrement différente de celle provenant de la théorie linéaire cinétique à cause du facteur $1/6$. Ce facteur d'erreur translate la condition nécessaire pour qu'il y ait des instabilités miroir à $a_{p0} > 6$ au lieu de $a_{p0} > 1$ comme on peut le voir sur la figure II.1.1. La condition nécessaire pour qu'il y ait apparition d'instabilité firehose est, quant à elle, $a_{p0} < 1$ et en accord avec la théorie cinétique. Dans le vent solaire, ces critères d'instabilité semblent avoir un impact majeur puisque l'état du plasma semble maintenu, sur les diagrammes $a_p - \beta_{\parallel}$, dans une zone qu'ils semblent délimiter comme l'a observé HELLINGER, TRÁVNÍČEK et al. 2006 dans les données relevées par la sonde WIND.

Dans le chapitre I.1, nous avons rappelé l'importance des ondes d'Alfvén dans les théories turbulentes et dans le chapitre I.2, nous avons rappelé que le sujet de l'impact des ondes compressibles MHD est toujours ouvert (BRODIANO, ANDRÉS et DMITRUK 2021). On peut donc s'attendre à ce que ces instabilités et la cascade turbulente s'influencent. Cela semble en effet être le cas si l'on regarde les résultats de l'étude de la température isotrope (LIU et al. 2006), des fluctuations magnétiques et de l'âge collisionnel du plasma (BALE, KASPER et al. 2009) et du taux de cascade incompressible OSMAN et al. 2013

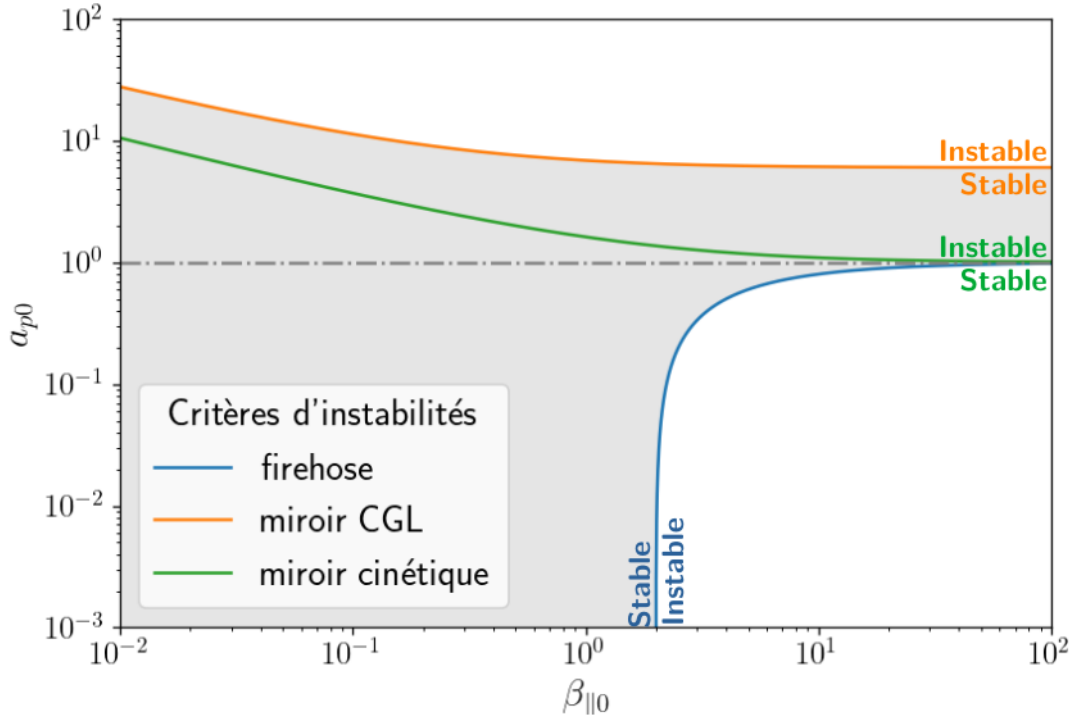


FIGURE II.1.1 – Zones de stabilité du modèle CGL (zone grisée). Critères d'instabilité firehose (bleu), miroir (orange) et miroir cinétique. Horizontale $a_p = 1$ en gris.

dans les données relevées par WIND et ceux du taux compressible isotherme observés par LZ HADID, SAHRAOUI, GALTIER et SY HUANG 2018 dans les données des missions THEMIS et CLUSTER : sur les diagrammes $a_p - \beta_{\parallel}$, près des frontières des zones instables, la température des protons semble plus chaude, le champ magnétique, plus fluctuant, le plasma plus jeune et les taux de cascade plus importants. Mais la relation entre instabilités et turbulence reste à clarifier : est-ce que le plasma est plus chaud et turbulent parcequ'il est plus jeunes ou est-ce que les instabilités jouent un rôle dans son chauffage ? Et est-ce que ce chauffage s'effectue via la cascade turbulente ? Ces questions viennent motiver l'obtention d'une loi exacte pour un écoulement avec pression gyrotrope permettant de calculer un taux de cascade plus réaliste, potentiellement lié aux anisotropies de pressions, et de mettre en place un cadre d'étude rigoureux afin d'étudier l'influence des instabilités linéaires sur la cascade non-linéaire turbulente.

1.3 Loi exacte générale pour tout type de pression et application au modèle CGL

Pour obtenir une loi exacte pour le modèle CGL, nous avons utilisé la méthode mise en place dans le chapitre I.3 : prendre en compte l'équation d'énergie interne (II.1.6) et non la forme explicite des pressions parallèle et perpendiculaire (II.1.9). Le modèle utilisé

est donc :

$$\partial_t \rho = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \quad (\text{II.1.12})$$

$$\partial_t \mathbf{v} = -\nabla \cdot (\mathbf{v} \mathbf{v}) + \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A) - \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}}_* + \mathbf{f}_c + \mathbf{d}_c \quad (\text{II.1.13})$$

$$\partial_t \mathbf{v}_A = \nabla \cdot (\mathbf{v}_A \mathbf{v} - \mathbf{v} \mathbf{v}_A) - \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{v}_A + \frac{\mathbf{v}_A}{2} \nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{f}_m + \mathbf{d}_m \quad (\text{II.1.14})$$

$$\partial_t u = -\nabla \cdot (u \mathbf{v}) + u \nabla \cdot \mathbf{v} - \frac{\overline{\mathbf{P}}}{\rho} : \nabla \mathbf{v} \quad (\text{II.1.15})$$

Toujours de manière cohérente avec les choix effectués dans le chapitre I.3, la fonction de corrélation d'énergie totale choisie est : $\mathcal{R} = \mathcal{R}_c + \mathcal{R}_m + \mathcal{R}_u$ avec $\mathcal{R}_c = \langle \frac{1}{4}(\rho' + \rho) \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v} \rangle$, $\mathcal{R}_m = \langle \frac{1}{4}(\rho' + \rho) \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A \rangle$ et $\mathcal{R}_u = \frac{1}{2} \langle \rho' u + \rho u' \rangle$.

Et en appliquant la même méthode que celle utilisée pour obtenir (I.3.7), (I.3.8) et (I.3.9), on obtient l'évolution temporelle des fonctions de corrélation associées à chaque canal énergétique :

— Canal d'énergie cinétique : $\mathcal{R}_c = \langle (\rho' + \rho) \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v} \rangle / 4$

$$\begin{aligned} 4\partial_t \mathcal{R}_c &= \nabla_{\ell} \cdot \langle \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{v} \delta \mathbf{v} - (\delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \delta \mathbf{v} \delta \mathbf{v}_A + \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{v}_A \delta \mathbf{v}_A) \rangle \\ &\quad + \nabla_{\ell} \cdot \langle \rho' \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v} \mathbf{v}_A - \rho \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}' \mathbf{v}'_A - \rho' \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}_A \mathbf{v}'_A + \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'_A \mathbf{v}_A \rangle \\ &\quad + \langle \rho \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v} \nabla' \cdot \mathbf{v}' - \rho' \mathbf{v}' \cdot \delta \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{v} + 2\rho' \mathbf{v}' \cdot \delta \mathbf{v}_A \nabla \cdot \mathbf{v}_A - 2\rho \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v}_A \nabla' \cdot \mathbf{v}'_A \rangle \\ &\quad + \nabla_{\ell} \cdot \langle (\rho + \rho') \frac{\overline{\mathbf{P}}_*}{\rho} \cdot \mathbf{v}' - (\rho' + \rho) \frac{\overline{\mathbf{P}}'}{\rho'} \cdot \mathbf{v} \rangle \\ &\quad - \langle \frac{\rho'}{\rho} \mathbf{v}' \cdot \overline{\mathbf{P}}_* \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} + \frac{\rho}{\rho'} \mathbf{v} \cdot \overline{\mathbf{P}}' \cdot \frac{\nabla' \rho'}{\rho'} \rangle \\ &\quad + \langle (\rho' + \rho)(\mathbf{v} \cdot \mathbf{f}'_c + \mathbf{v}' \cdot \mathbf{f}_c) \rangle + \langle (\rho' + \rho)(\mathbf{v} \cdot \mathbf{d}'_c + \mathbf{v}' \cdot \mathbf{d}_c) \rangle \end{aligned} \quad (\text{II.1.16})$$

— Canal d'énergie magnétique : $\mathcal{R}_m = \langle (\rho' + \rho) \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A \rangle / 4$

$$\begin{aligned} 4\partial_t \mathcal{R}_m &= \nabla_{\ell} \cdot \langle \delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \delta \mathbf{v}_A \delta \mathbf{v} \rangle \\ &\quad - \nabla_{\ell} \cdot \langle \rho' \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v} \mathbf{v}_A - \rho \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}' \mathbf{v}'_A - \rho' \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}_A \mathbf{v}'_A + \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'_A \mathbf{v}_A \rangle \\ &\quad + \langle (\rho \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{v}_A - \frac{1}{2}(\rho' + \rho) \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A) \nabla' \cdot \mathbf{v}' \rangle \\ &\quad - \langle (\rho' \mathbf{v}'_A \cdot \delta \mathbf{v}_A + \frac{1}{2}(\rho' + \rho) \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A) \nabla \cdot \mathbf{v} \rangle \\ &\quad + \langle (\rho' \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v} - \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'_A) \nabla \cdot \mathbf{v}_A \rangle + \langle (\rho' \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}_A - \rho \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}') \nabla' \cdot \mathbf{v}'_A \rangle \\ &\quad + \langle (\rho' + \rho)(\mathbf{v}_A \cdot \mathbf{f}'_m + \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{f}_m) \rangle + \langle (\rho' + \rho)(\mathbf{v}_A \cdot \mathbf{d}'_m + \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{d}_m) \rangle \end{aligned} \quad (\text{II.1.17})$$

— Canal d'énergie interne : $\mathcal{R}_u = \langle \rho' u + \rho u' \rangle / 2$

$$\begin{aligned} 2\partial_t \mathcal{R}_u &= \nabla_{\ell} \cdot \langle \delta \rho \delta u \delta \mathbf{v} \rangle + \langle \rho \delta u \nabla' \cdot \mathbf{v}' - \rho' \delta u \nabla \cdot \mathbf{v} \rangle \\ &\quad - \langle \rho' \frac{\overline{\mathbf{P}}}{\rho} : \nabla \mathbf{v} + \rho \frac{\overline{\mathbf{P}}'}{\rho'} : \nabla' \mathbf{v}' \rangle \end{aligned} \quad (\text{II.1.18})$$

Le résultat pour le canal d'énergie magnétique n'est pas influencé par le type de pression (tensoriel ou isotrope) contrairement à ceux des canaux d'énergie cinétique et interne. La question qui s'est posée alors était : est-il possible d'améliorer la formulation des termes

dépendants de la pression ? de faire apparaître l'influence de la pression dans les termes de type flux sous la forme d'une fonction de structure ? En remarquant que $\overline{\mathbf{P}}$ ou $\overline{\mathbf{P}}_*$ est, dans tous les termes, accompagné de $\frac{1}{\rho}$ pris au même point, l'idée de travailler sur la fonction de structure $\langle \delta\rho\delta\frac{\overline{\mathbf{P}}}{\rho} \cdot \delta\mathbf{v} \rangle$ puis sur la fonction $\langle \delta\rho\delta\frac{\overline{\mathbf{P}}_*}{\rho} \cdot \delta\mathbf{v} \rangle$ a émergé. Développer cette dernière sous la divergence locale en utilisant l'hypothèse d'homogénéité de Kolmogorov et l'indépendance des points donne :

$$\nabla_{\ell} \cdot \langle \delta\rho\delta\frac{\overline{\mathbf{P}}_*}{\rho} \cdot \delta\mathbf{v} \rangle = \nabla_{\ell} \cdot \langle (\rho - \rho')\frac{\overline{\mathbf{P}}_*}{\rho'} \cdot \mathbf{v} + (\rho - \rho')\frac{\overline{\mathbf{P}}_*}{\rho} \cdot \mathbf{v}' + \rho'\frac{\overline{\mathbf{P}}_*}{\rho} \cdot \mathbf{v} - \rho\frac{\overline{\mathbf{P}}_*}{\rho'} \cdot \mathbf{v}' \rangle$$

On va donc pouvoir remplacer dans (II.1.16) ou $\nabla_{\ell} \cdot \langle \rho'\frac{\overline{\mathbf{P}}_*}{\rho} \cdot \mathbf{v}' - \rho\frac{\overline{\mathbf{P}}_*}{\rho'} \cdot \mathbf{v} \rangle$ ou $\nabla_{\ell} \cdot \langle \overline{\mathbf{P}}_* \cdot \mathbf{v}' - \overline{\mathbf{P}}'_* \cdot \mathbf{v} \rangle$. En voyant que ce dernier s'écrit aussi $\langle \rho\frac{\overline{\mathbf{P}}_*}{\rho} : \nabla'\mathbf{v}' + \rho'\frac{\overline{\mathbf{P}}'_*}{\rho'} : \nabla\mathbf{v} \rangle$ qui rappelle les termes dépendant de la pression de l'équation (II.1.18), nous avons choisi la première possibilité. Ainsi :

$$\begin{aligned} \nabla_{\ell} \cdot \langle (\rho' + \rho)\frac{\overline{\mathbf{P}}_*}{\rho} \cdot \mathbf{v}' - (\rho' + \rho)\frac{\overline{\mathbf{P}}'_*}{\rho'} \cdot \mathbf{v} \rangle \\ = -\nabla_{\ell} \cdot \langle \delta\rho\delta\frac{\overline{\mathbf{P}}_*}{\rho} \cdot \delta\mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v} \cdot \frac{\overline{\mathbf{P}}_*}{\rho} \cdot \nabla'\rho' + \mathbf{v}' \cdot \frac{\overline{\mathbf{P}}'_*}{\rho'} \cdot \nabla\rho \rangle \\ + \langle 2\rho\frac{\overline{\mathbf{P}}}{\rho} : \nabla'\mathbf{v}' + 2\rho'\frac{\overline{\mathbf{P}}'}{\rho'} : \nabla\mathbf{v} + \rho\mathbf{v}_A^2\nabla' \cdot \mathbf{v}' + \rho'\mathbf{v}'_A^2\nabla \cdot \mathbf{v} \rangle \end{aligned}$$

La loi KHM générale pour l'énergie totale avec $\mathcal{R} = \mathcal{R}_c + \mathcal{R}_m + \mathcal{R}_u$ devient alors :

[1]	$4\partial_t\mathcal{R} = \nabla_{\ell} \cdot \langle (\delta(\rho\mathbf{v}) \cdot \delta\mathbf{v} + \delta(\rho\mathbf{v}_A) \cdot \delta\mathbf{v}_A\delta\mathbf{v} - (\delta(\rho\mathbf{v}_A) \cdot \delta\mathbf{v} + \delta(\rho\mathbf{v}) \cdot \delta\mathbf{v}_A)\delta\mathbf{v}_A \rangle$
[2]	$+ \langle (\rho\mathbf{v} \cdot \delta\mathbf{v} + \frac{1}{2}\rho\mathbf{v}_A \cdot \delta\mathbf{v}_A - \frac{1}{2}\delta(\rho\mathbf{v}_A) \cdot \mathbf{v}_A)\nabla' \cdot \mathbf{v}' \rangle$
[3]	$- \langle (\rho'\mathbf{v}' \cdot \delta\mathbf{v} + \frac{1}{2}\rho'\mathbf{v}'_A \cdot \delta\mathbf{v}_A - \frac{1}{2}\delta(\rho\mathbf{v}_A) \cdot \mathbf{v}'_A)\nabla \cdot \mathbf{v} \rangle$
[4]	$+ \langle (2\rho'\mathbf{v}' \cdot \delta\mathbf{v}_A - \delta(\rho\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}'_A + \rho'\mathbf{v}'_A \cdot \delta\mathbf{v})\nabla \cdot \mathbf{v}_A \rangle$
[5]	$- \langle (2\rho\mathbf{v} \cdot \delta\mathbf{v}_A - \delta(\rho\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}_A + \rho\mathbf{v}_A \cdot \delta\mathbf{v})\nabla' \cdot \mathbf{v}'_A \rangle$
[6]	$+ \nabla_{\ell} \cdot \langle 2\delta\rho\delta u\delta\mathbf{v} - \delta\rho\delta\frac{\overline{\mathbf{P}}_*}{\rho} \cdot \delta\mathbf{v} \rangle + 2 \langle \rho\delta u\nabla' \cdot \mathbf{v}' - \rho'\delta u\nabla \cdot \mathbf{v} \rangle$
[7]	$- \nabla_{\ell} \cdot \langle \delta\rho\delta\frac{\overline{\mathbf{P}}_*}{\rho} \cdot \delta\mathbf{v} \rangle - 2 \langle \rho\delta\frac{\overline{\mathbf{P}}}{\rho} : \nabla'\mathbf{v}' - \rho'\delta\frac{\overline{\mathbf{P}}}{\rho} : \nabla\mathbf{v} \rangle$
[8]	$+ \langle \mathbf{v} \cdot (\frac{\overline{\mathbf{P}}_*}{\rho}\delta\rho - \rho\delta\frac{\overline{\mathbf{P}}_*}{\rho}) \cdot \frac{\nabla'\rho'}{\rho'} - \mathbf{v}' \cdot (\frac{\overline{\mathbf{P}}'_*}{\rho'}\delta\rho - \rho'\delta\frac{\overline{\mathbf{P}}'_*}{\rho'}) \cdot \frac{\nabla\rho}{\rho} \rangle$
[9]	$+ \langle (\rho' + \rho)(\mathbf{v} \cdot \mathbf{f}'_c + \mathbf{v}' \cdot \mathbf{f}_c + \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{f}'_m + \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{f}_m) \rangle$
[10]	$+ \langle (\rho' + \rho)(\mathbf{v} \cdot \mathbf{d}'_c + \mathbf{v}' \cdot \mathbf{d}_c + \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{d}'_m + \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{d}_m) \rangle$

(II.1.19)

Les lignes [7] et [8] contiennent les contributions des tenseurs de pression et de pression

totale. La loi exacte générale de type Kolmogorov est alors :

$$\begin{aligned}
 -4\varepsilon = & \nabla_{\ell} \cdot < (\delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{v} + \delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \delta \mathbf{v}_A \delta \mathbf{v} - (\delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \delta \mathbf{v} + \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{v}_A) \delta \mathbf{v}_A > \\
 & + \nabla_{\ell} \cdot < 2\delta\rho\delta u\delta \mathbf{v} - \delta\rho\delta\frac{\overline{P}_*}{\rho} \cdot \delta \mathbf{v} > \\
 & + < (\rho \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v} + \frac{1}{2}\rho \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{v}_A - \frac{1}{2}\delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \mathbf{v}_A + 2\rho\delta u)\nabla' \cdot \mathbf{v}' - 2\rho\delta\frac{\overline{P}}{\rho} : \nabla' \mathbf{v}' > \\
 & - < (\rho' \mathbf{v}' \cdot \delta \mathbf{v} + \frac{1}{2}\rho' \mathbf{v}'_A \cdot \delta \mathbf{v}_A - \frac{1}{2}\delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \mathbf{v}'_A + 2\rho'\delta u)\nabla \cdot \mathbf{v} - 2\rho'\delta\frac{\overline{P}}{\rho} : \nabla \mathbf{v} > \\
 & + < (2\rho' \mathbf{v}' \cdot \delta \mathbf{v}_A - \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}'_A + \rho' \mathbf{v}'_A \cdot \delta \mathbf{v})\nabla \cdot \mathbf{v}_A > \\
 & - < (2\rho \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v}_A - \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}_A + \rho \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{v})\nabla' \cdot \mathbf{v}'_A > \\
 & + < \mathbf{v} \cdot (\frac{\overline{P}_*}{\rho}\delta\rho - \rho\delta\frac{\overline{P}_*}{\rho}) \cdot \frac{\nabla'\rho'}{\rho'} - \mathbf{v}' \cdot (\frac{\overline{P}_*}{\rho'}\delta\rho - \rho'\delta\frac{\overline{P}_*}{\rho'}) \cdot \frac{\nabla\rho}{\rho} >
 \end{aligned}
 \tag{II.1.20}$$

Cette loi est valable quelle que soit la forme du tenseur de pression ou de l'énergie interne tant que la zone inertielle est supposée isentrope. Si l'on considère la pression sous forme isotrope $\overline{P} = p\overline{\mathbf{I}}$, on trouve la loi (I.3.15) analysée dans la section I.3.2.

Dans le cas d'un tenseur de pression gyrotrope/CGL, on peut faire apparaître p_{\parallel} et p_{\perp} :

$$\begin{aligned}
 -4\varepsilon = & \nabla_{\ell} \cdot < (\delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{v} + \delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \delta \mathbf{v}_A \delta \mathbf{v} - (\delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \delta \mathbf{v} + \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{v}_A) \delta \mathbf{v}_A > \\
 & + \nabla_{\ell} \cdot < \delta\rho\delta(\frac{p_{\perp} + p_{\parallel} + p_m}{\rho})\delta \mathbf{v} + \delta\rho\delta(\frac{p_{\perp} - p_{\parallel}}{\rho}\mathbf{bb}) \cdot \delta \mathbf{v} > \\
 & + < (\rho \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v} + \frac{1}{2}\rho \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{v}_A - \frac{1}{2}\delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \mathbf{v}_A + \rho\delta(\frac{p_{\parallel}}{\rho}))\nabla' \cdot \mathbf{v}' > \\
 & - < (\rho' \mathbf{v}' \cdot \delta \mathbf{v} + \frac{1}{2}\rho' \mathbf{v}'_A \cdot \delta \mathbf{v}_A - \frac{1}{2}\delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \mathbf{v}'_A + \rho'\delta(\frac{p_{\parallel}}{\rho}))\nabla \cdot \mathbf{v} > \\
 & + 2 < \rho\delta(\frac{p_{\perp} - p_{\parallel}}{\rho}\mathbf{bb}) : \nabla' \mathbf{v}' - \rho'\delta(\frac{p_{\perp} - p_{\parallel}}{\rho}\mathbf{bb}) : \nabla \mathbf{v} > \\
 & + < (2\rho' \mathbf{v}' \cdot \delta \mathbf{v}_A - \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}'_A + \rho' \mathbf{v}'_A \cdot \delta \mathbf{v})\nabla \cdot \mathbf{v}_A > \\
 & - < (2\rho \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v}_A - \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}_A + \rho \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{v})\nabla' \cdot \mathbf{v}'_A > \\
 & + < (\frac{p_{\perp} + p_m}{\rho}\mathbf{v}\delta\rho - \rho\mathbf{v}\delta(\frac{p_{\perp} + p_m}{\rho}) + \frac{p_{\parallel} - p_{\perp}}{\rho}\mathbf{v} \cdot \mathbf{bb}\delta\rho - \rho\mathbf{v} \cdot \delta(\frac{p_{\parallel} - p_{\perp}}{\rho}\mathbf{bb})) \cdot \frac{\nabla'\rho'}{\rho'} > \\
 & - < (\frac{p'_{\perp} + p'_m}{\rho'}\mathbf{v}'\delta\rho - \rho'\mathbf{v}'\delta(\frac{p_{\perp} + p_m}{\rho}) + \frac{p'_{\parallel} - p'_{\perp}}{\rho'}\mathbf{v}' \cdot \mathbf{b'b'}\delta\rho - \rho'\mathbf{v}' \cdot \delta(\frac{p_{\parallel} - p_{\perp}}{\rho}\mathbf{bb})) \cdot \frac{\nabla\rho}{\rho} >
 \end{aligned}
 \tag{II.1.21}$$

Pour obtenir la loi associée au modèle CGL idéal, il faudrait y expliciter p_{\parallel} et p_{\perp} en fonction de ρ , \mathbf{v}_A à partir de (II.1.9) mais à cause des constantes et des puissances, aucune simplification n'apparaît. Afin de faire ressortir l'apport du modèle gyrotrope ou CGL par rapport au modèle isotrope dans le taux de cascade, il est plus intéressant d'y faire apparaître p . Cela nous permet d'isoler la contribution de pression anisotrope :

$$\begin{aligned}
 -4(\varepsilon - \varepsilon_{iso}) = & -\nabla_{\ell} \cdot < \delta\rho\delta(\frac{p_{\parallel} - p_{\perp}}{\rho}(\mathbf{bb} - \frac{1}{3}\overline{\mathbf{I}})) \cdot \delta \mathbf{v} > \\
 & - < 2\rho\delta(\frac{p_{\parallel} - p_{\perp}}{\rho}(\mathbf{bb} - \frac{1}{3}\overline{\mathbf{I}})) : \nabla' \mathbf{v}' - 2\rho'\delta(\frac{p_{\parallel} - p_{\perp}}{\rho}(\mathbf{bb} - \frac{1}{3}\overline{\mathbf{I}})) : \nabla \mathbf{v} > \\
 & + < \mathbf{v} \cdot ((\frac{p_{\parallel} - p_{\perp}}{\rho}(\mathbf{bb} - \frac{1}{3}\overline{\mathbf{I}}))\delta\rho - \rho\delta(\frac{p_{\parallel} - p_{\perp}}{\rho}(\mathbf{bb} - \frac{1}{3}\overline{\mathbf{I}}))) \cdot \frac{\nabla'\rho'}{\rho'} > \\
 & - < \mathbf{v}' \cdot ((\frac{p'_{\parallel} - p'_{\perp}}{\rho'}(\mathbf{b'b'} - \frac{1}{3}\overline{\mathbf{I}}))\delta\rho - \rho'\delta(\frac{p_{\parallel} - p_{\perp}}{\rho}(\mathbf{bb} - \frac{1}{3}\overline{\mathbf{I}}))) \cdot \frac{\nabla\rho}{\rho} >
 \end{aligned}
 \tag{II.1.22}$$

en notant ε_{iso} le taux de cascade dépendant de la pression isotrope donné par (I.3.15).

Nous quantifierons et analyserons cette contribution grâce à des simulations dans la partie III.

On peut aussi faire apparaître a_p et β_{\parallel} dans (II.1.21) pour identifier les termes potentiellement impactés par les instabilités. Ainsi :

$$\begin{aligned}
 -4\varepsilon = & \nabla_{\ell} \cdot < (\delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{v} + \delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \delta \mathbf{v}_A \delta \mathbf{v} - (\delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \delta \mathbf{v} + \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{v}_A) \delta \mathbf{v}_A > \\
 & + \frac{1}{2} \nabla_{\ell} \cdot < \delta \rho \delta(\mathbf{v}_A^2 (\beta_{\parallel} (a_p + 1) + 1)) \delta \mathbf{v} + \delta \rho \delta(\beta_{\parallel} (a_p - 1) \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A) \cdot \delta \mathbf{v} > \\
 & + < (\rho \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v} + \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{v}_A - \frac{1}{2} \delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \mathbf{v}_A + \frac{1}{2} \rho \delta(\mathbf{v}_A^2 \beta_{\parallel})) \nabla' \cdot \mathbf{v}' > \\
 & - < (\rho' \mathbf{v}' \cdot \delta \mathbf{v} + \frac{1}{2} \rho' \mathbf{v}'_A \cdot \delta \mathbf{v}_A - \frac{1}{2} \delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \mathbf{v}'_A + \frac{1}{2} \rho' \delta(\mathbf{v}_A^2 \beta_{\parallel})) \nabla \cdot \mathbf{v} > \\
 & + < \rho \delta(\beta_{\parallel} (a_p - 1) \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A) : \nabla' \mathbf{v}' - \rho' \delta(\beta_{\parallel} (a_p - 1) \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A) : \nabla \mathbf{v} > \\
 & + < (2 \rho' \mathbf{v}' \cdot \delta \mathbf{v}_A - \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}'_A + \rho' \mathbf{v}'_A \cdot \delta \mathbf{v}) \nabla \cdot \mathbf{v}_A > \\
 & - < (2 \rho \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v}_A - \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}_A + \rho \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{v}) \nabla' \cdot \mathbf{v}'_A > \\
 & + \frac{1}{2} < (\mathbf{v}_A^2 (\beta_{\parallel} a_p + 1) \delta \rho - \rho \delta(\mathbf{v}_A^2 (\beta_{\parallel} a_p + 1))) \mathbf{v} \cdot \frac{\nabla' \rho'}{\rho'} > \\
 & - \frac{1}{2} < (\mathbf{v}'_A^2 (\beta'_{\parallel} a'_p + 1) \delta \rho - \rho' \delta(\mathbf{v}_A^2 (\beta_{\parallel} a_p + 1))) \mathbf{v}' \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} > \\
 & + \frac{1}{2} < \mathbf{v} \cdot (\beta_{\parallel} (a_p - 1) \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A \delta \rho - \rho \delta(\beta_{\parallel} (a_p - 1) \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A)) \cdot \frac{\nabla' \rho'}{\rho'} > \\
 & - \frac{1}{2} < \mathbf{v}' \cdot (\beta'_{\parallel} (a'_p - 1) \mathbf{v}'_A \mathbf{v}'_A \delta \rho - \rho' \delta(\beta_{\parallel} (a_p - 1) \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A)) \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} >
 \end{aligned}
 \tag{II.1.23}$$

Les critères d'instabilité linéaires n'y sont pas explicites mais on voit que certains termes dépendent de $a_p - 1$, en particulier un terme de type flux. Par conséquent, le signe de ces termes va dépendre du régime de pression dans le système, si p_{\parallel} ou p_{\perp} domine, et est ainsi lié au type d'instabilité pouvant s'y développer. Comme ces termes dépendent de quantités incrémentales, il est néanmoins difficile de conclure sur leur apport au taux de cascade total sans regarder dans des simulations. Ce sera l'un des objectifs de la partie ???. On remarque que ces termes sont présents dans la contribution anisotrope (II.1.22) au taux de cascade.

1.4 Synthèse de l'étude analytique de turbulence compressible avec pression tensorielle et modèle CGL

Fermeture CGL (gyrotrope + $\nabla \cdot \mathbf{q} = 0$) : $\overline{\mathbf{P}} = \frac{2p_{\perp} + p_{\parallel}}{3} \overline{\mathbf{I}} + (p_{\parallel} - p_{\perp})(\mathbf{b}\mathbf{b} - \frac{1}{3}\overline{\mathbf{I}}) = p\overline{\mathbf{I}} + \overline{\Pi}$
 et $\rho u = \frac{3}{2}p$ avec $\mathbf{b} = \frac{\mathbf{v}_A}{|\mathbf{v}_A|}$

$$\partial_t p_{\parallel} + \nabla \cdot (p_{\parallel} \mathbf{v}) + 2p_{\parallel} \mathbf{b}\mathbf{b} : \nabla \mathbf{v} = 0 \quad (\text{II.1.24})$$

$$\partial_t p_{\perp} + \nabla \cdot (p_{\perp} \mathbf{v}) + p_{\perp} \nabla \cdot \mathbf{v} - p_{\perp} \mathbf{b}\mathbf{b} : \nabla \mathbf{v} = 0 \quad (\text{II.1.25})$$

Linéarisation du modèle CGL :

- Relation de dispersion : (II.1.11)
- Mode d'Alfvén incompressible \Rightarrow instabilité firehose,
- Mode magnétosonique rapide gyrotrope : stable,
- Mode magnétosonique rapide gyrotrope \Rightarrow instabilité firehose parallèle et miroir
- instabilité firehose si $1 - \frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0}) < 0$
- instabilité miroir si $1 + \beta_{\parallel 0} a_{p0}(1 - \frac{1}{6}a_{p0}) < 0$

Equations utilisées pour calculer la loi générale avec tenseur de pression ($\nabla \cdot \mathbf{q}$ négligé) :

$$\partial_t \rho = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \quad (\text{II.1.26})$$

$$\partial_t \mathbf{v} = -\nabla \cdot (\mathbf{v}\mathbf{v}) + \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A) - \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}}_* + (\mathbf{f}_c + \mathbf{d}_c) \quad (\text{II.1.27})$$

$$\partial_t \mathbf{v}_A = \nabla \cdot (\mathbf{v}_A \mathbf{v} - \mathbf{v} \mathbf{v}_A) - \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{v}_A + \frac{\mathbf{v}_A}{2} \nabla \cdot \mathbf{v} + (\mathbf{f}_m + \mathbf{d}_m) \quad (\text{II.1.28})$$

$$\partial_t u = -\nabla \cdot (u \mathbf{v}) + u \nabla \cdot \mathbf{v} - \frac{\overline{\mathbf{P}}}{\rho} : \nabla \mathbf{v} \quad (\text{II.1.29})$$

Fonctions de corrélation d'énergie totale considérée :

$$\mathcal{R} = \frac{1}{2} < \frac{1}{2}(\rho' + \rho) \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{2}(\rho' + \rho) \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A + \rho' u + \rho u' >$$

Lois exactes dérivées dans ce chapitre (formulation f2) :

- KHM générale $\forall \overline{\mathbf{P}}$: (II.1.19)
- K41 générale $\forall \overline{\mathbf{P}}$: (II.1.20)
- K41 gyrotrope/CGL : (II.1.21) [Résultat répondant à l'objectif initial]
- K41 gyrotrope/CGL apport anisotropie de pression : (II.1.22)
- K41 gyrotrope/CGL fonction de $a_p = \frac{p_{\perp}}{p_{\parallel}}$ et $\beta_{\parallel} = \frac{p_{\parallel}}{p_m}$: (II.1.23)

Les résultats dérivés ici sont publiés dans SIMON et SAHRAOUI 2022.

PARTIE II : CHAPITRE 2

ET DANS LE CAS INCOMPRESSIBLE ?

Sommaire

2.1	De la limite incompressible dans la loi exacte générale vers un nouveau modèle	61
2.2	Etude linéaire du nouveau modèle	63
2.3	Etude numérique des solutions linéaires du nouveau modèle .	65
2.4	Synthèse de l'étude analytique et paramétrique du modèle incompressible avec pression gyrotrope	66

Si l'on prend la limite incompressible de la loi exacte dépendant d'une pression isotrope (I.3.15), on retrouve la loi PP98 donnant le taux de cascade ε_{PP98} (I.1.34). Mais est-ce aussi le cas si la pression est tensorielle ? De cette question à émerger une autre question : qu'est-ce qu'un système incompressible avec pression tensorielle ? Dans ce chapitre, sera présenté le travail effectué pour tenter de répondre à ces questions. Ce travail n'a pas encore été publié.

2.1 De la limite incompressible dans la loi exacte générale vers un nouveau modèle

Si l'on considère la limite incompressible ($\rho = \rho_0$, $\delta\rho = 0$, $\nabla\rho = 0$, $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$, $\nabla \cdot \mathbf{v}_A = 0$) dans l'équation (II.1.22), $\varepsilon_{iso} \rightarrow \varepsilon_{PP98}$, tous les termes s'annulent sauf :

$$\begin{aligned}
 -4(\varepsilon - \varepsilon_{PP98}) &= -2 < \delta((p_{\parallel} - p_{\perp})\mathbf{bb}) : \nabla' \mathbf{v}' - \delta((p_{\parallel} - p_{\perp})\mathbf{bb}) : \nabla \mathbf{v} > \\
 &= -2 < \delta((p_{\parallel} - p_{\perp})\mathbf{bb}) : \delta(\nabla \mathbf{v}) >
 \end{aligned}
 \tag{II.2.1}$$

car seule la trace de $\nabla \mathbf{v}$ s'annule par incompressibilité : $\bar{\mathbf{I}} : \nabla \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$. On obtient ainsi une correction à la théorie PP98 dépendant de l'anisotropie de pression.

Plus généralement, seule la composante isotrope du tenseur de pression peut annuler ce terme en y faisant ressortir $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ par produit dual avec l'identité. La correction générale, ne dépendant que de la composante participant à la déformation incompressible

(CASSAK et BARBHUIYA 2022), serait donc :

$$\boxed{-4(\varepsilon - \varepsilon_{PP98}) = -2 < \delta(\bar{\mathbf{P}} - p\bar{\mathbf{I}}) : \delta(\nabla \mathbf{v}) > = -2 < \delta\bar{\mathbf{\Pi}} : \delta(\nabla \mathbf{v}) >} \quad (\text{II.2.2})$$

Et dans le cas particulier gyrotrope, on aurait :

$$\boxed{-4(\varepsilon - \varepsilon_{PP98}) = -2 < \delta((p_{\parallel} - p_{\perp})(\mathbf{b}\mathbf{b} - \frac{1}{3}\bar{\mathbf{I}})) : \delta(\nabla \mathbf{v}) >} \quad (\text{II.2.3})$$

cela semble révéler qu'une part compressible subsisterait dans (II.2.1), cachée dans $\mathbf{b}\mathbf{b}$.

On remarque que ce terme dépend de $p_{\parallel} - p_{\perp}$, c'est à dire de $\beta_{\parallel}(1 - a_p)$. Analyser et valider cette correction de la loi PP98 serait donc numériquement plus simple que le cas compressible et permettrait de donner un début de réponse à l'impact des instabilités sur la cascade. Rigoureusement, cela nécessiterait l'utilisation de simulation incompressible. Mais aucune trace d'un modèle incompressible avec pression tensorielle n'a été trouvée dans la littérature. En fait, si l'on approche le problème sous un autre angle, celui des fermetures, on se rend compte que le cadre gyrotrope est habituellement abordé à travers la fermeture CGL. Ajouter une fermeture incompressible signifierait alors, surcontraindre le système (une équation de trop par rapport au nombre de variables). Une équation de compatibilité doit alors être vérifiée par les solutions.

Par exemple, dans le cas linéaire, le modèle CGL donne l'équation de dispersion (II.1.10) que l'on va simplement noter $\bar{\mathbf{M}}\mathbf{v}_1 = 0$. Avec la contrainte incompressible $\nabla \cdot \mathbf{v}_1 = 0$, on peut écrire \mathbf{v}_1 sous la forme d'un potentiel vecteur $\mathbf{\Omega} : \mathbf{v}_1 = \nabla \times \mathbf{\Omega} = \bar{\mathbf{N}}\mathbf{\Omega}$ avec $\bar{\mathbf{N}} = i\mathbf{k} \times \bar{\mathbf{I}} = i \begin{pmatrix} 0 & -k_{\parallel} & 0 \\ k_{\parallel} & 0 & -k_{\perp} \\ 0 & k_{\perp} & 0 \end{pmatrix}$. Le modèle CGL surcontraint incompressiblement donnerait l'équation de dispersion : $\bar{\mathbf{M}}\bar{\mathbf{N}}\mathbf{\Omega} = 0$ avec

$$\bar{\mathbf{M}}\bar{\mathbf{N}} = \begin{pmatrix} 0 & -k_{\parallel}(\frac{\omega^2 - \omega_F^2}{v_{A0}^2 k_{\parallel}^2} - (\frac{\beta_{\parallel 0}}{2} a_{p0} + 1) \frac{k_{\perp}^2}{k_{\parallel}^2}) & 0 \\ k_{\parallel} \frac{\omega^2 - \omega_F^2}{v_{A0}^2 k_{\parallel}^2} & 0 & -k_{\perp} \frac{\omega^2 - \omega_F^2}{v_{A0}^2 k_{\parallel}^2} \\ 0 & k_{\perp}(\frac{\omega^2}{v_{A0}^2 k_{\parallel}^2} - \frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(3 - a_{p0})) & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{II.2.4})$$

où $\omega_F^2 = -v_{A0}^2 k_{\parallel}^2 (\frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0}) - 1)$ correspond à l'onde d'Alfvén incompressible gyrotrope. Le déterminant de cette matrice est nul, le système admet donc ou une infinité de solutions ou aucune solution mais il ne peut nous aider à les déterminer. On remarque que si $\omega^2 = \omega_F^2$, alors il faut que $\Omega_y = 0$, c-à-d que l'ensemble solution soit une droite orientée suivant $\mathbf{v}_1 = (0, 1, 0)$. On retrouve le mode d'Alfvén gyrotrope. Mais contrairement au modèle incompressible MHD, une autre solution existe. L'autre possibilité non triviale, telle que $\Omega_y \neq 0$, est de considérer $k_{\parallel}\Omega_x - k_{\perp}\Omega_z = 0$, c'est à dire l'ensemble de droites de vecteur directeur $\mathbf{v}_1 = (-k_{\parallel}, 0, k_{\perp})$, dans ce cas $\omega^2 = v_{A0}^2 k_{\parallel}^2 \frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(3 - a_{p0})$. Cet ensemble de solution est contraint par l'équation de compatibilité $\tan^2 \theta = \frac{k_{\perp}^2}{k_{\parallel}^2} = \frac{2(\beta_{\parallel 0}(2 - a_{p0}) - 1)}{\beta_{\parallel 0} a_{p0} + 2}$ et n'est donc pas valable pour tout k_{\parallel} et k_{\perp} . Si l'on suppose l'isotropie de pression dans ce mode, on trouve un mode sonore : $\omega^2 = 2k_{\parallel}^2 \frac{p_0}{\rho_0}$. Imposer l'incompressibilité dans le système CGL ne semble donc pas influencer sur le mode d'Alfvén mais contraindre les modes magnéto-sonores en un mode sonique improbable dans le cas MHD et n'existant que pour un certain angle entre \mathbf{k} et \mathbf{b}_0 .

On s'est alors demandé à quoi pourrait ressembler un modèle incompressible gyrotrope

qui serait viable (non sur-contraint). Il serait a priori constitué de l'équation sur la vitesse (II.1.2) et de l'équation d'induction (II.1.4) avec ρ constant et $\overline{\mathbf{P}}$ gyrotrope, de la fermeture $\nabla \cdot \mathbf{v}$ et d'une autre équation de fermeture. Différentes possibilités sont envisageables pour cette équation supplémentaire : garder l'une des équations de pression ou considérer une combinaison linéaire des pressions. Afin de maintenir la cohérence avec le bilan énergétique et l'équation d'énergie interne, nous avons décidé de fermer le système avec l'équation sur la trace du tenseur de pression (II.1.5). Ce système peut donc permettre d'étudier la loi exacte (II.2.3). Dans la section 2.2, nous présenterons les solutions linéaires de ce système. Connaissant la charge de travail nécessaire à l'implémentation d'un modèle de telle sorte que les jeux de données simulés permettent une étude de turbulence forte et, sachant que l'objectif principal de ce travail se place dans le cadre compressible, l'étude numérique rigoureuse de la loi exacte avec ce modèle n'a pas été engagée.

2.2 Etude linéaire du nouveau modèle

Le modèle incompressible gyrotrope envisagé est :

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \nabla \cdot \mathbf{v}_A = 0 \quad (\text{II.2.5})$$

$$\partial_t \mathbf{v} + \nabla \cdot (\mathbf{v}\mathbf{v} - \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A + \frac{1}{\rho_0} \overline{\mathbf{P}}_*) = 0 \quad (\text{II.2.6})$$

$$\partial_t p + \nabla \cdot (p\mathbf{v}) + \frac{2}{3} \overline{\Pi} : \nabla \mathbf{v} = 0 \quad (\text{II.2.7})$$

$$\partial_t \mathbf{v}_A - \nabla \cdot (\mathbf{v}_A \mathbf{v} - \mathbf{v} \mathbf{v}_A) = 0 \quad (\text{II.2.8})$$

avec $\overline{\mathbf{P}} = p\overline{\mathbf{I}} + \overline{\Pi} = \frac{1}{3}(2p_\perp + p_\parallel)\overline{\mathbf{I}} + (p_\parallel - p_\perp)(\mathbf{b}\mathbf{b} - \frac{1}{3}\overline{\mathbf{I}})$. $\nabla \cdot \overline{\mathbf{P}}_*$ et $\overline{\Pi} : \nabla \mathbf{v}$ y sont donc :

$$\nabla \cdot \overline{\mathbf{P}}_* = \nabla(p_\perp + \frac{1}{2}\rho_0 \mathbf{v}_A^2) + \mathbf{b}\mathbf{b} \cdot \nabla(p_\parallel - p_\perp) + (p_\parallel - p_\perp) \frac{1}{\mathbf{v}_A^2} (\mathbf{v}_A \cdot \nabla \mathbf{v}_A - 2\mathbf{v}_A \mathbf{b}\mathbf{b} : \nabla \mathbf{v}_A)$$

$$\overline{\Pi} : \nabla \mathbf{v} = (p_\parallel - p_\perp) \mathbf{b}\mathbf{b} : \nabla \mathbf{v}$$

Les équations linéarisées en suivant la méthode résumée section I.1.4 sont :

$$0 = k_\perp v_{1x} + k_\parallel v_{1z} \quad (\text{II.2.9})$$

$$0 = -\omega v_{1x} + \frac{p_{\perp 1}}{\rho_0} k_\perp + (\frac{p_{\parallel 0} - p_{\perp 0}}{\rho_0 v_{A0}^2} - 1) v_{A0} k_\parallel v_{A1x} + v_{A0} k_\perp v_{A1z} \quad (\text{II.2.10})$$

$$0 = -\omega v_{1y} + (\frac{p_{\parallel 0} - p_{\perp 0}}{\rho_0 v_{A0}^2} - 1) v_{A0} k_\parallel v_{A1y} \quad (\text{II.2.11})$$

$$0 = -\omega v_{1z} + \frac{p_{\parallel 1}}{\rho_0} k_\parallel - \frac{p_{\parallel 0} - p_{\perp 0}}{\rho_0 v_{A0}^2} v_{A0} k_\parallel v_{A1z} \quad (\text{II.2.12})$$

$$0 = -\omega(2p_{\perp 1} + p_{\parallel 1}) + 2(p_{\parallel 0} - p_{\perp 0}) k_\parallel v_{1z} \quad (\text{II.2.13})$$

$$0 = -\omega \mathbf{v}_{A1} - k_\parallel v_{A0} \mathbf{v}_1 \quad (\text{II.2.14})$$

On retrouve le mode d'Alfvén incompressible polarisé suivant $(0, 1, 0)$ grâce aux composantes suivant y qui sont décorréliées des autres :

$$(\omega^2 + (\frac{p_{\parallel 0} - p_{\perp 0}}{\rho_0 v_{A0}^2} - 1) v_{A0}^2 k_\parallel^2) v_{1y} = 0 \Rightarrow \frac{\omega^2}{v_{A0}^2 k_\parallel^2} + (\frac{p_{\parallel 0} - p_{\perp 0}}{\rho_0 v_{A0}^2} - 1) = 0 \quad (\text{II.2.15})$$

Ce mode, identique au mode présent dans le système CGL, peut devenir instable. On retrouve ainsi l'instabilité firehose. Il est aussi polarisé suivant y .

Pour les autres directions, on peut remplacer v_{A1x} et v_{A1z} à l'aide de (II.2.14) dans (II.2.10) et (II.2.12) :

$$\omega \frac{p_{\perp 1}}{\rho_0} k_{\perp} = (\omega^2 + (\frac{p_{\parallel 0} - p_{\perp 0}}{\rho_0 v_{A0}^2} - 1) v_{A0}^2 k_{\parallel}^2) v_{1x} + v_{A0}^2 k_{\parallel} k_{\perp} v_{1z} \quad (\text{II.2.16})$$

$$\omega \frac{p_{\parallel 1}}{\rho_0} k_{\parallel} = (\omega^2 - \frac{p_{\parallel 0} - p_{\perp 0}}{\rho_0} k_{\parallel}^2) v_{1z} \quad (\text{II.2.17})$$

$$0 = k_{\perp} v_{1x} + k_{\parallel} v_{1z} \quad (\text{II.2.18})$$

$$0 = -2\omega \frac{p_{\perp 1}}{\rho_0} - \omega \frac{p_{\parallel 1}}{\rho_0} + 2 \frac{p_{\parallel 0} - p_{\perp 0}}{\rho_0} k_{\parallel} v_{1z} \quad (\text{II.2.19})$$

Puis remplacer v_{1x} à l'aide de (II.2.18) et $p_{\perp 1}$ et $p_{\parallel 1}$ dans (II.2.19) pour obtenir une équation de dispersion ne dépendant plus que de v_{1z} et enfin la relation de dispersion :

$$\Rightarrow \frac{\omega^2}{v_{A0}^2 k_{\parallel}^2} - \frac{2(\frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0}) - 1)k_{\parallel}^2 + (3\frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0}) - 2)k_{\perp}^2}{k_{\perp}^2 - 2k_{\parallel}^2} = 0 \quad (\text{II.2.20})$$

Ce mode est polarisé suivant $(1, 0, -\frac{k_{\perp}}{k_{\parallel}}) = (1, 0, -\tan \theta)$. On y retrouve l'instabilité firehose parallèle ($\frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0}) - 1 > 0$) si $k_{\parallel} \gg k_{\perp}$. Si $k_{\parallel} \ll k_{\perp}$, un autre type d'instabilité est visible, de critère $\frac{3}{2}\frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0}) - 1 < 0$. Ce critère ressemble beaucoup au critère firehose mais avec un signe inverse et un facteur $\frac{3}{2}$. On va le nommer «firehose inverse» ou «firehose perpendiculaire».

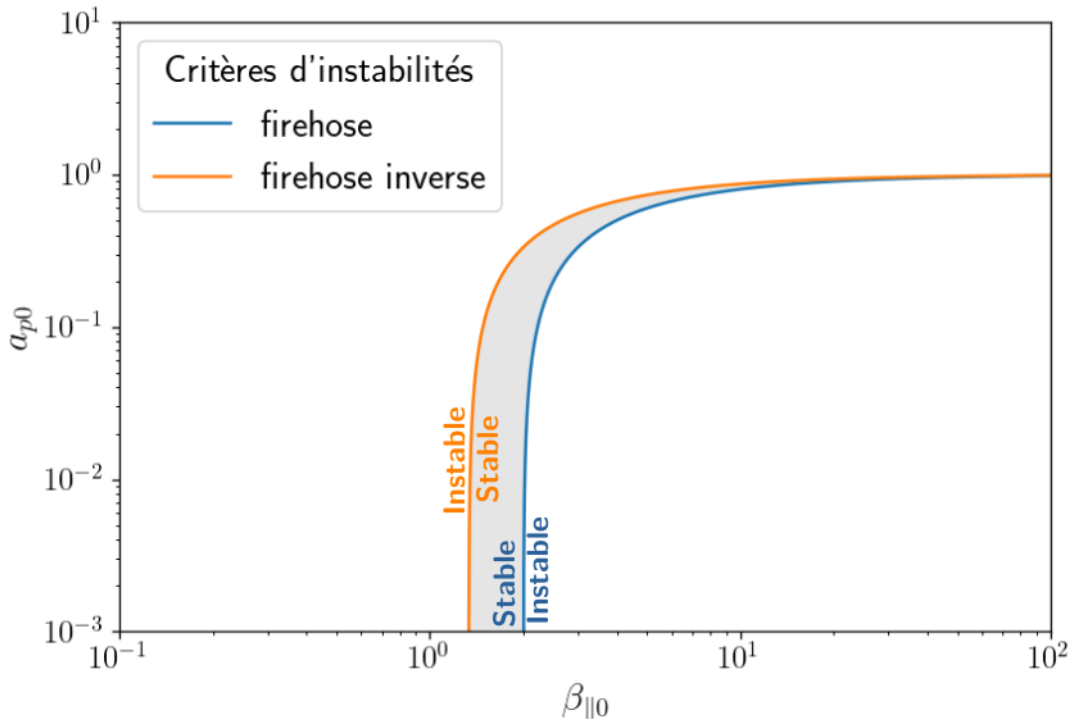


FIGURE II.2.1 – Zones de stabilité du modèle incompressible proposé (zone grisée). Critères d'instabilité firehose (bleu) et firehose inverse (orange).

La question que l'on peut se poser maintenant est : est-ce qu'il existe un intervalle pour a_{p0} et $\beta_{||0}$ tel que le système ne devienne pas instable ? Répondre à cette question est nécessaire pour savoir si ce système peut être linéairement viable et pourrait être simulé (les instabilités sont difficilement gérables numériquement). En regardant les critères, on se rend compte que le système pourra être stable pour tout θ seulement si $\frac{2}{3} < \frac{\beta_{||0}}{2}(1 - a_{p0}) < 1$. Donc il peut être stable, mais sa zone de stabilité est extrêmement réduite comme on peut le voir sur le diagramme a_{p0} vs $\beta_{||0}$ de la figure II.2.1 (zone grise).

2.3 Etude numérique des solutions linéaires du nouveau modèle

Par curiosité, je me suis demandée à quoi ressemblait ce nouveau mode par comparaison avec les modes compressibles et le mode d'Alfvén incompressible.

2.4 Synthèse de l'étude analytique et paramétrique du modèle incompressible avec pression gyrotrope

Limite incompressible de la loi exacte avec pression tensorielle et cas gyrotrope :

$$-4(\varepsilon - \varepsilon_{PP98}) = -2 < \delta(\bar{\mathbf{P}} - p\bar{\mathbf{I}}) : \delta(\nabla \mathbf{v}) > = -2 < \delta\bar{\mathbf{\Pi}} : \delta(\nabla \mathbf{v}) > \quad (\text{II.2.21})$$

$$-4(\varepsilon - \varepsilon_{PP98}) = -2 < \delta((p_{\parallel} - p_{\perp})(\mathbf{b}\mathbf{b} - \frac{1}{3}\bar{\mathbf{I}})) : \delta(\nabla \mathbf{v}) > \quad (\text{II.2.22})$$

Nouveau modèle incompressible avec pression gyrotrope :

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (\text{II.2.23})$$

$$\partial_t \mathbf{v} + \nabla \cdot (\mathbf{v}\mathbf{v} - \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A + \frac{1}{\rho_0} \bar{\mathbf{P}}_*) = 0 \quad (\text{II.2.24})$$

$$\partial_t p + \nabla \cdot (p\mathbf{v}) + \frac{2}{3} \bar{\mathbf{\Pi}} : \nabla \mathbf{v} = 0 \quad (\text{II.2.25})$$

$$\partial_t \mathbf{v}_A - \nabla \cdot (\mathbf{v}_A \mathbf{v} - \mathbf{v} \mathbf{v}_A) = 0 \quad (\text{II.2.26})$$

$$\text{avec } \bar{\mathbf{P}}_* = (p + p_m)\bar{\mathbf{I}} + \bar{\mathbf{\Pi}} \quad p_m = \frac{\rho_0 |\mathbf{v}_A|^2}{2} \quad p = \frac{1}{3}(2p_{\perp} + p_{\parallel})$$

$$\bar{\mathbf{\Pi}} = \bar{\mathbf{P}} - p\bar{\mathbf{I}} = (p_{\parallel} - p_{\perp})(\mathbf{b}\mathbf{b} - \frac{1}{3}\bar{\mathbf{I}})$$

Etude linéaire du nouveau modèle :

— Mode d'Alfvén incompressible polarisé suivant $(0, 1, 0)$:

$$\frac{\omega^2}{v_{A0}^2 k_{\parallel}^2} + \frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0}) - 1 = 0 \quad (\text{II.2.27})$$

— Mode bi-alfvénique polarisé suivant $(1, 0, -\tan \theta)$:

$$\frac{\omega^2}{v_{A0}^2 k_{\parallel}^2} - \frac{2(\frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0}) - 1) \cos^2 \theta + (3\frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0}) - 2) \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta - 2 \cos^2 \theta} = 0 \quad (\text{II.2.28})$$

— Instabilité firehose oblique et parallèle : $\frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0}) - 1 > 0$

— Instabilité firehose inverse ou perpendiculaire : $\frac{3}{2}\frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0}) - 1 < 0$

PARTIE II : CHAPITRE 3

SORTIR DU CADRE IDÉAL ET ALLER VERS LE BI-FLUIDE

Sommaire

3.1	L'hypothèse Hall : sans conséquences sur la pression dans la loi exacte	67
3.2	Chauffer les électrons : conséquences sur l'équation d'énergie interne et nouveaux termes dans la loi exacte	68
3.3	Du modèle bi-fluide vers l'impact des différentes approximations de la loi d'Ohm sur la loi exacte mono-fluide	70
3.4	Synthèse de l'extension de la théorie des lois exactes à d'autres régimes	80

Dans les chapitres précédents, l'équation d'induction était supposée idéale (cas MHD) ou les électrons froids (cas CGL original) : eqB . Dans ce chapitre, nous allons relaxer petit à petit les hypothèses sur l'équation d'induction en prenant d'abord en compte le terme Hall (section 3.1) puis la pression électronique (section 3.2) et finalement, nous aboutirons sur une loi exacte bi-fluide (section 3.3).

3.1 L'hypothèse Hall : sans conséquences sur la pression dans la loi exacte

La correction Hall signifie que les effets du champ magnétique sur la vitesse d'ensemble électronique est perceptible $\mathbf{v}_e = \mathbf{v} - \lambda \frac{\mathbf{j}}{\rho}$ avec $\lambda = m_i/|q_e|$, une constante, et $\mathbf{j} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0}} \nabla \times (\sqrt{\rho} \mathbf{v}_A)$ avec μ_0 la perméabilité du vide.

En prenant en compte la correction Hall, l'équation d'induction devient :

$$\frac{\partial \mathbf{v}_A}{\partial t} = \nabla \cdot (\mathbf{v}_A \mathbf{u} - \mathbf{u} \mathbf{v}_A) - \mathbf{u} \nabla \cdot \mathbf{v}_A + \frac{\mathbf{v}_A}{2} \nabla \cdot \mathbf{u} - \frac{\lambda}{\sqrt{\rho}} \nabla \times \left(\frac{\mathbf{j}}{\sqrt{\rho}} \times \mathbf{v}_A \right) \quad (\text{II.3.1})$$

Et, puisque $\sqrt{\rho} \mathbf{v}_A \cdot \nabla \times \left(\frac{\mathbf{j}}{\sqrt{\rho}} \times \mathbf{v}_A \right) = \nabla \cdot ((\mathbf{j} \times \mathbf{v}_A) \times \mathbf{v}_A)$, l'équation d'énergie magnétique

(I.2.6) devient :

$$\partial_t E_m + \nabla \cdot (E_m \mathbf{v} + \lambda(\mathbf{j} \times \mathbf{v}_A) \times \mathbf{v}_A) = \rho \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A : \nabla \mathbf{v} - p_m \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (\text{II.3.2})$$

Les autres équations du modèle ne sont pas modifiées tant que les électrons restent froids (hypothèse $\overline{\mathbf{P}_e} = 0$). Cette correction n'ajoutant qu'un terme de type flux au bilan énergétique, elle n'influera pas littéralement sur les contributions de la pression, du tenseur de pression et de l'énergie interne dans la loi exacte. En effet, en notant génériquement ε_{ideal} le taux de cascade compressible obtenu avec un modèle dans lequel le terme Hall est négligé et ε_{hall} la correction Hall, le nouveau taux de cascade sera $\varepsilon = \varepsilon_{ideal} + \varepsilon_{hall}$ et :

$$\begin{aligned} -4\varepsilon_{hall} = & \lambda \nabla_{\ell} \cdot \langle (\mathbf{j} \times \mathbf{v}_A + \mathbf{j}' \times \mathbf{v}'_A) \times \delta \mathbf{v}_A - \delta(\frac{1}{\rho} \mathbf{j} \times \mathbf{v}_A) \times (\rho \mathbf{v}_A + \rho' \mathbf{v}'_A) \rangle > \\ & + \frac{\lambda}{2} \langle (\rho' \mathbf{v}'_A \cdot \delta \mathbf{v}_A - \delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \mathbf{v}'_A) \nabla \cdot (\frac{\mathbf{j}}{\rho}) - (\rho \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{v}_A - \delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \mathbf{v}_A) \nabla' \cdot (\frac{\mathbf{j}'}{\rho'}) \rangle > \\ & - \lambda \langle (\rho' \mathbf{v}'_A \cdot \delta(\frac{\mathbf{j}}{\rho}) - \delta(\mathbf{j}) \cdot \mathbf{v}'_A) \nabla \cdot \mathbf{v}_A - (\rho \mathbf{v}_A \cdot \delta(\frac{\mathbf{j}}{\rho}) - \delta(\mathbf{j}) \cdot \mathbf{v}_A) \nabla' \cdot \mathbf{v}'_A \rangle > \end{aligned} \quad (\text{II.3.3})$$

Ce résultat est une adaptation à nos notations du résultat obtenu par ANDRÉS, GALTIER et SAHRAOUI 2018 qui utilise la même fonction de corrélations de l'énergie magnétique, $\mathcal{R}_m = \frac{1}{4} \langle (\rho' + \rho) \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A \rangle$, que nous. Dans le cas incompressible, diverses formes de ε_{hall} existent et ont été comparées par FERRAND, GALTIER, SAHRAOUI, MEYRAND et al. 2019. On retiendra la forme qu'ils ont dérivée :

$$-4\varepsilon_{hall} \xrightarrow{\rho=\rho_0} -\frac{\lambda}{2} \nabla_{\ell} \cdot \langle \delta \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{v}_A \delta \mathbf{j} - 2 \delta \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{j} \delta \mathbf{v}_A \rangle \quad (\text{II.3.4})$$

qui peut être retrouvée en termes de limite incompressible de la correction (II.3.3).

Linéairement, le terme Hall couple les directions du champ magnétique. Dans le cas incompressible MHD, le mode d'Alfvén se découple et on voit apparaître des modes dits whistlers polarisés circulairement autour de la direction \mathbf{e}_y qui tendent à basse fréquence vers un mode cyclotron ionique. Dans le cas compressible MHD, le couplage va avoir lieu principalement dans le cas parallèle ($\mathbf{k} \parallel \mathbf{b}_0$, $\theta = 0$) où les modes d'Alfvén et magnéto-ioniques vont se coupler en des modes whistlers et cyclotron ionique. Plus l'angle de propagation sera oblique par rapport à \mathbf{b}_0 et plus la correction Hall à la relation de dispersion sera affaiblie. Dans le cas CGL, la situation sera similaire HUNANA et al. 2019. En terme d'instabilité, l'instabilité firehose sera quelque peu stabilisée, le critère d'instabilité devenant $1 + \frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(a_{p0} - 1) < \frac{k_{\parallel}^2 v_{A0}^2}{4\omega_{ci}^2}$ avec $\omega_{ci} = \frac{B_0}{\lambda}$, la fréquence cyclotron ionique. Le critère miroir ne sera pas modifié.

3.2 Chauffer les électrons : conséquences sur l'équation d'énergie interne et nouveaux termes dans la loi exacte

Si l'on prend en compte le terme thermique dans l'équation d'induction, il semble plus logique d'exprimer le système en fonction de $\{\rho, \mathbf{v}, \mathbf{v}_A, \mathbf{j}, \overline{\mathbf{P}_i}, \overline{\mathbf{P}_e}\}$. Cela correspond à un modèle hybride : $\{\rho, \mathbf{v}, \mathbf{v}_A, \mathbf{j}\}$ sont des grandeurs mono-fluides et $\{\overline{\mathbf{P}_i}, \overline{\mathbf{P}_e}\}$, bi-fluides. L'inertie des électrons est toujours négligée, mais leur agitation influe sur et est influencée

par le champ magnétique. Les équations du modèle sont alors (cas sans non-gyrotropie) :

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (\text{II.3.5})$$

$$\partial_t (\rho \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v} - \rho \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A) + \nabla \overline{\mathbf{P}}_* = 0 \quad (\text{II.3.6})$$

$$\partial_t \overline{\mathbf{P}}_i + \nabla \cdot (\mathbf{v} \overline{\mathbf{P}}_i) + (\overline{\mathbf{P}}_i \cdot \nabla \mathbf{v})^S = 0 \quad (\text{II.3.7})$$

$$\partial_t \overline{\mathbf{P}}_e + \nabla \cdot (\mathbf{v} \overline{\mathbf{P}}_e) + (\overline{\mathbf{P}}_e \cdot \nabla \mathbf{v})^S = \lambda \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{j}}{\rho} \overline{\mathbf{P}}_e \right) + \lambda (\overline{\mathbf{P}}_e \cdot \nabla \left(\frac{\mathbf{j}}{\rho} \right))^S \quad (\text{II.3.8})$$

$$\partial_t \mathbf{v}_A - \nabla \cdot (\mathbf{v}_A \mathbf{v} - \mathbf{v} \mathbf{v}_A) + \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{v}_A - \frac{\mathbf{v}_A}{2} \nabla \cdot \mathbf{v} = -\frac{\lambda}{\sqrt{\rho}} \nabla \times \left(\frac{\mathbf{j}}{\sqrt{\rho}} \times \mathbf{v}_A \right) + \frac{\lambda}{\sqrt{\mu_0 \rho}} \nabla \times \left(\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}}_e \right) \quad (\text{II.3.9})$$

avec $\overline{\mathbf{P}}_* = \overline{\mathbf{P}}_i + \overline{\mathbf{P}}_e + p_m \overline{\mathbf{I}}$ et $p_m = \frac{1}{2} \rho |\mathbf{v}_A|^2$. Dans le cas où la pression électronique est isotrope, que le premier principe thermodynamique (I.2.30) est valable, que l'on peut définir une enthalpie électronique telle que $h = u_e + \frac{m_i}{m_e} \frac{p_e}{\rho}$ et que l'hypothèse adiabatique/isentrope s'applique dans le système, alors le terme thermique de l'équation d'induction s'annule puisque $\nabla \times \left(\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}}_e \right) = \nabla \times \left(\frac{1}{\rho} \nabla p_e \right) = \frac{m_i}{m_e} \nabla \times \nabla h = 0$.

En terme d'énergétique, l'équation de densité d'énergie cinétique (I.2.5) n'est modifiée que par la prise en compte de la pression électronique dans la pression totale et celle de densité d'énergie magnétique devient :

$$\partial_t E_m + \nabla \cdot (E_m \mathbf{v} + \lambda ((\mathbf{j} \times \mathbf{v}_A) \times \mathbf{v}_A + \frac{\mathbf{v}_A}{\sqrt{\mu_0 \rho}} \times \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}}_e - \frac{\mathbf{j}}{\rho} \cdot \overline{\mathbf{P}}_e)) = \rho \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A : \nabla \mathbf{v} - p_m \nabla \cdot \mathbf{v} - \lambda \overline{\mathbf{P}}_e : \nabla \left(\frac{\mathbf{j}}{\rho} \right) \quad (\text{II.3.10})$$

sachant que :

$$\sqrt{\frac{\rho}{\mu_0}} \mathbf{v}_A \cdot \nabla \times \left(\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}}_e \right) = -\nabla \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{\mu_0 \rho}} \mathbf{v}_A \times \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}}_e \right) + \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{j}}{\rho} \cdot \overline{\mathbf{P}}_e \right) - \overline{\mathbf{P}}_e : \nabla \left(\frac{\mathbf{j}}{\rho} \right) \quad (\text{II.3.11})$$

Pour que la conservation de l'énergie totale soit respectée, l'équation de densité d'énergie interne doit contenir le terme $\lambda \overline{\mathbf{P}}_e : \nabla \left(\frac{\mathbf{j}}{\rho} \right)$. A partir des équations de pression (II.3.7) et (II.3.8) et en définissant la densité d'énergie interne telle que $\rho u = \rho_i u_i + \rho_e u_e = \frac{1}{2} \overline{\mathbf{P}}_i : \overline{\mathbf{I}} + \frac{1}{2} \overline{\mathbf{P}}_e : \overline{\mathbf{I}}$, on obtient l'équation de densité d'énergie interne :

$$\partial_t (\rho u) + \nabla \cdot (\rho u \mathbf{v}) + (\overline{\mathbf{P}}_i + \overline{\mathbf{P}}_e) : \nabla \mathbf{v} = \lambda \nabla \cdot (\mu u_e \mathbf{j}) + \lambda \overline{\mathbf{P}}_e : \nabla \left(\frac{\mathbf{j}}{\rho} \right) \quad (\text{II.3.12})$$

en notant $\mu = \frac{\rho_e}{\rho}$. En général, dans le cadre MHD ou CGL, on considère que $\mu \rightarrow 0$ comme on le verra dans la section 3.3. Les simulations qui seront utilisées dans la partie ?? concernent le modèle dérivé dans cette section avec μ proche mais différent de 0. Par conséquent, nous garderons la contribution en dépendant dans l'équation (II.3.12) afin de dériver une loi exacte reflétant au mieux le modèle simulé.

Le dernier terme de cette équation pouvant être relié à $\sqrt{\rho} \mathbf{v}_A \cdot \nabla \times \left(\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}}_e \right)$ et à des termes flux, sa contribution en tant que source dans le bilan énergétique s'annulera dans le cas particulier où l'on peut faire apparaître l'enthalpie h . L'équation de densité d'énergie

totale est donc dans le cas d'un modèle hybride (+ hypothèse adiabatique/isentrope) :

$$\partial_t E_{tot} + \nabla \cdot (E_{tot} \mathbf{v} + \overline{\mathbf{P}}_* \cdot \mathbf{v} - \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A + \lambda((\mathbf{j} \times \mathbf{v}_A) \times \mathbf{v}_A + \frac{\mathbf{v}_A}{\sqrt{\mu_0 \rho}} \times \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}}_e - \frac{\mathbf{j}}{\rho} \cdot \overline{\mathbf{P}}_e - \mu u_e \mathbf{j})) = 0 \quad (\text{II.3.13})$$

Pour ce qui est des corrections aux taux de cascade, $\varepsilon = \varepsilon_{ideal} + \varepsilon_{hall} + \varepsilon_{hallpe}$ avec :

$$\begin{aligned} - & 4 \quad \varepsilon_{hallpe} \\ = & \frac{\lambda}{\sqrt{\mu_0}} < (\rho' + \rho)(\mathbf{v}_A \cdot (\frac{1}{\sqrt{\rho'}} \nabla' \times (\frac{1}{\rho'} \nabla' \cdot \overline{\mathbf{P}}_e')) + \mathbf{v}'_A \cdot (\frac{1}{\sqrt{\rho}} \nabla \times (\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}}_e))) > \\ & + 2\lambda < \frac{\rho'}{\rho} (\nabla \cdot (\mu u_e \mathbf{j}) + \overline{\mathbf{P}}_e : \nabla(\frac{\mathbf{j}}{\rho})) + \frac{\rho}{\rho'} (\nabla' \cdot (\mu u'_e \mathbf{j}') + \overline{\mathbf{P}}'_e : \nabla'(\frac{\mathbf{j}'}{\rho'})) > \\ = & 2 \frac{\lambda}{\sqrt{\mu_0}} (\nabla_{\mathbf{e}} \cdot < \delta \rho \delta(\frac{\mathbf{v}_A}{\sqrt{\rho}} \times \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}}_e) \delta(\frac{1}{\rho}) > - < (\rho' \nabla(\frac{1}{\rho}) - \rho \nabla'(\frac{1}{\rho'})) \cdot \delta(\frac{\mathbf{v}_A}{\sqrt{\rho}} \times \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}}_e) >) \\ & - 2\lambda (\nabla_{\mathbf{e}} \cdot < \delta \rho \delta(\frac{\mathbf{j}}{\rho} \cdot \overline{\mathbf{P}}_e) \delta(\frac{1}{\rho}) > - < (\rho' \nabla(\frac{1}{\rho}) - \rho \nabla'(\frac{1}{\rho'})) \cdot \delta(\frac{\mathbf{j}}{\rho} \cdot \overline{\mathbf{P}}_e) >) \\ & - 2\lambda \mu (\nabla_{\mathbf{e}} \cdot < \delta \rho \delta u_e \delta(\frac{\mathbf{j}}{\rho}) > - < (\rho' \nabla \cdot (\frac{\mathbf{j}}{\rho}) - \rho \nabla' \cdot (\frac{\mathbf{j}'}{\rho'})) \delta u_e >) \\ & + \frac{\lambda}{\sqrt{\mu_0}} < (\mathbf{v}_A \delta \rho - 2\rho \delta \mathbf{v}_A) \cdot (\frac{1}{\sqrt{\rho'}} \nabla' \times (\frac{1}{\rho'} \nabla' \cdot \overline{\mathbf{P}}_e')) - (\mathbf{v}'_A \delta \rho - 2\rho' \delta \mathbf{v}_A) \cdot (\frac{1}{\sqrt{\rho}} \nabla \times (\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}}_e)) > \end{aligned} \quad (\text{II.3.14})$$

et en prenant en compte $\frac{m_e}{m_i} u_e$ et $\overline{\mathbf{P}}_e$ dans l'énergie interne u et les tenseurs de pression $\overline{\mathbf{P}}$ et $\overline{\mathbf{P}}_*$ présents dans ε_{ideal} . Les deux premières lignes de l'équation (II.3.14) correspondent aux formes brutes de la correction. L'égalité suivante, dépendant de termes flux et sources, est obtenue en injectant (II.3.11) et en identifiant les fonctions de structures $< \delta \rho \delta(\frac{\mathbf{v}_A}{\sqrt{\rho}} \times \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}}_e) \delta(\frac{1}{\rho}) >$, $< \delta \rho \delta(\frac{\mathbf{j}}{\rho} \cdot \overline{\mathbf{P}}_e) \delta(\frac{1}{\rho}) >$ et $< \delta \rho \delta u_e \delta(\frac{\mathbf{j}}{\rho}) >$. Dans le cas où l'on peut faire apparaître d'enthalpie h , la dernière ligne de (II.3.14) sera nulle. Ces corrections serviront dans l'étude numérique de la partie ?? puisque le modèle simulé est le modèle hybride.

Dans la limite incompressible, la majorité des termes de (II.3.14) s'annulent et il ne reste que la dernière ligne qui s'écrit :

$$\boxed{-4\varepsilon_{hallpe} \xrightarrow{\rho=\rho_0} -2 \frac{\lambda}{\sqrt{\rho_0}} < \delta \mathbf{v}_A \cdot \delta(\nabla \times \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}}_e) >} \quad (\text{II.3.15})$$

qui s'annule si $\overline{\mathbf{P}}_e$ est isotrope.

Linéairement, la prise en compte de la pression électronique va venir modifier les critères d'instabilités comme l'ont montré par exemple **pantellini_electron_1995** ; **hellinger_comment_2007** pour le critère miroir. Dans la partie ??, on calculera les corrections à apporter aux différents critères en fonction des modèles simulés.

3.3 Du modèle bi-fluide vers l'impact des différentes approximations de la loi d'Ohm sur la loi exacte mono-fluide

Par curiosité, je me suis demandé à quoi ressemblerait la loi exacte si l'on prenait en compte l'ensemble de l'équation d'induction. Prendre en compte le terme inertiel électronique dans l'équation d'induction en plus des termes Hall et thermique, revient à considérer le modèle bi-fluide avec l'hypothèse de quasi-neutralité ($q_i = -q_e$) qui implique pour la densité de particules $n_i \simeq n_e = n$). On propose donc ici, de chercher à obtenir une loi exacte généralisée sur le modèle bi-fluide ouvert et ensuite de tendre vers la quasi-neutralité. Contrairement à BANERJEE et ANDRÉS 2020 proposant une loi

bi-fluide polytrophe, le système restera ouvert et la fonction de corrélation pour l'énergie électromagnétique sera choisie au plus près de celle utilisée dans l'ensemble de ces travaux c'est-à-dire $\langle \rho \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}'_A \rangle$ et non $\langle \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} \rangle$. Les équations bi-fluides non relativiste¹ utilisée avec $r = i, e$ sont :

$$\partial_t n_r + \nabla \cdot (n_r \mathbf{v}_r) = 0 \quad (\text{II.3.16})$$

$$\partial_t \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_r \cdot \nabla \mathbf{v}_r + \frac{1}{m_r n_r} \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}}_r = \frac{q_r}{m_r} \mathbf{v}_r \times \mathbf{B} (+ \frac{q_r}{m_r} \mathbf{E}) \quad (\text{II.3.17})$$

$$\partial_t u_r + \mathbf{v}_r \cdot \nabla u_r + \frac{1}{m_r n_r} \overline{\mathbf{P}}_r : \nabla \mathbf{v}_r = 0 \quad (\text{II.3.18})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \sum_r \frac{q_r n_r}{\varepsilon_0} \quad (\text{II.3.19})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\text{II.3.20})$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \sum_r q_r n_r \mathbf{v}_r \quad (\text{II.3.21})$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B} \quad (\text{II.3.22})$$

Les charges q_r et masses m_r sont des constantes caractéristiques de chaque fluide. Pour alléger un peu le calcul, on ne fait pas apparaître les termes de forçage, dissipation et flux de chaleur et on va adimensionnaliser les équations (les définitions utilisées pour cela ne seront valables que dans cette section). Pour cela, on va considérer $\mu = \frac{m_e}{M} = \frac{m_e}{m_i + m_e}$, une vitesse d'Alfvén de référence égale à la vitesse du son dans le vide $v_{A0} = \frac{B_0}{\sqrt{\mu_0 n_0 M}} = c$, une longueur et un temps caractéristiques L_0 et $t_0 = \frac{L_0}{v_{A0}}$, la pression de référence sera $p_0 = M n_0 v_{A0}^2$, l'énergie spécifique v_{A0}^2 , le champ électrique $E_0 = B_0 v_{A0}$ et on définit une longueur inertielle sans dimension $\lambda = \frac{L_0 \sqrt{\mu_0 n_0 e^2}}{\sqrt{M}}$. Le système devient :

$$\tilde{\partial}_t \tilde{n}_r + \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{n}_r \tilde{\mathbf{v}}_r) = 0 \quad (\text{II.3.23})$$

$$\tilde{\partial}_t \tilde{\mathbf{v}}_i + \tilde{\mathbf{v}}_i \cdot \tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{v}}_i + \frac{1}{(1-\mu)\tilde{n}_i} \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\overline{\mathbf{P}}}_i = \frac{\lambda}{(1-\mu)} \tilde{\mathbf{v}}_i \times \tilde{\mathbf{B}} (+ \frac{\lambda}{(1-\mu)} \tilde{\mathbf{E}}) \quad (\text{II.3.24})$$

$$\tilde{\partial}_t \tilde{\mathbf{v}}_e + \tilde{\mathbf{v}}_e \cdot \tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{v}}_e + \frac{1}{\mu \tilde{n}_e} \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\overline{\mathbf{P}}}_e = -\frac{\lambda}{\mu} \tilde{\mathbf{v}}_e \times \tilde{\mathbf{B}} (-\frac{\lambda}{\mu} \tilde{\mathbf{E}}) \quad (\text{II.3.25})$$

$$\tilde{\partial}_t \tilde{u}_i + \tilde{\mathbf{v}}_i \cdot \tilde{\nabla} \tilde{u}_i + \frac{1}{(1-\mu)\tilde{n}_i} \tilde{\overline{\mathbf{P}}}_i : \tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{v}}_i = 0 \quad (\text{II.3.26})$$

$$\tilde{\partial}_t \tilde{u}_e + \tilde{\mathbf{v}}_e \cdot \tilde{\nabla} \tilde{u}_e + \frac{1}{\mu \tilde{n}_e} \tilde{\overline{\mathbf{P}}}_e : \tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{v}}_e = 0 \quad (\text{II.3.27})$$

$$\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{E}} = \lambda(\tilde{n}_i - \tilde{n}_e) \quad (\text{II.3.28})$$

$$\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{B}} = 0 \quad (\text{II.3.29})$$

$$\tilde{\nabla} \times \tilde{\mathbf{B}} = \lambda(\tilde{n}_i \tilde{\mathbf{v}}_i - \tilde{n}_e \tilde{\mathbf{v}}_e) \quad (\text{II.3.30})$$

$$\tilde{\nabla} \times \tilde{\mathbf{E}} = -\tilde{\partial}_t \tilde{\mathbf{B}} \quad (\text{II.3.31})$$

en notant les quantités sans dimension avec un « \sim ». Pour la suite de cette section, on ne fera pas apparaître les « \sim » afin d'alléger les notations.

1. L'hypothèse non-relativiste nous permet de négliger $q_r n_r \mathbf{E}$ devant $q_r n_r \mathbf{v}_r \times \mathbf{B}$ dans (II.3.17) (on l'y indique entre parenthèse car on en aura besoin dans la loi d'Ohm généralisée) et $\varepsilon_0 \mu_0 \partial_t \mathbf{E}$ devant $\nabla \times \mathbf{B}$ dans (II.3.21).

L'énergie totale de ce système est :

$$E_{tot} = \frac{1}{2}(1-\mu)n_i|\mathbf{v}_i|^2 + \frac{1}{2}\mu n_e|\mathbf{v}_e|^2 + (1-\mu)n_i u_i + \mu n_e u_e + \frac{|\mathbf{B}|^2}{2}$$

En définissant la vitesse d'Alfvén telle que $\mathbf{v}_A = \frac{\mathbf{B}}{\sqrt{(1-\mu)n_i + \mu n_e}}$, on peut écrire l'énergie magnétique $\frac{|\mathbf{B}|^2}{2} = \frac{1}{2}((1-\mu)n_i + \mu n_e)|\mathbf{v}_A|^2$ et l'équation d'induction :

$$\partial_t \mathbf{v}_A = -\frac{\nabla \times \mathbf{E}}{\sqrt{(1-\mu)n_i + \mu n_e}} + \frac{\mathbf{v}_A}{2} \frac{(1-\mu)\nabla \cdot (n_i \mathbf{v}_i) + \mu \nabla \cdot (n_e \mathbf{v}_e)}{(1-\mu)n_i + \mu n_e} \quad (\text{II.3.32})$$

$$= -\frac{\nabla \times \mathbf{E}}{\sqrt{(1-\mu)n_i + \mu n_e}} + \frac{\mathbf{v}_A}{2} \frac{\nabla \cdot ((1-\mu)n_i \mathbf{v}_i + \mu n_e \mathbf{v}_e)}{(1-\mu)n_i + \mu n_e} \quad (\text{II.3.33})$$

$$(\text{II.3.34})$$

La loi d'Ohm généralisée sera aussi nécessaire, par exemple pour remplacer \mathbf{E} . Elle s'obtient à partir des équations (II.3.23), (II.3.24) et (II.3.25) en cherchant l'évolution de $\mathbf{j} = \lambda(n_i \mathbf{v}_i - n_e \mathbf{v}_e)$:

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{j} = & -\nabla \cdot \left(\lambda \frac{n_e - n_i}{n_i n_e} (\rho^2 \mathbf{v} \mathbf{v} + \frac{\mu^2}{\lambda^2} \mathbf{j} \mathbf{j}) + \frac{\rho \rho}{n_i n_e} \mathbf{v} \mathbf{j} + \frac{\rho \rho}{n_i n_e} \mathbf{j} \mathbf{v} + \frac{(2\mu - 1)n_i}{n_i n_e} \frac{1}{\lambda} \mathbf{j} \mathbf{j} \right) \\ & - \lambda \frac{\mu \nabla \cdot \bar{\mathbf{P}}_i - (1-\mu) \nabla \cdot \bar{\mathbf{P}}_e}{(1-\mu)\mu} + \frac{\lambda^2}{(1-\mu)\mu} \rho \mathbf{v} \times \mathbf{B} + \frac{\lambda(2\mu - 1)}{(1-\mu)\mu} \mathbf{j} \times \mathbf{B} \\ & \left[+ \frac{\lambda^2(\mu n_i + (1-\mu)n_e)}{\mu(1-\mu)} \mathbf{E} \right] \end{aligned} \quad (\text{II.3.35})$$

Afin de compacter un peu le résultat, on y a fait apparaître les grandeurs mono-fluides $\rho = (1-\mu)n_i + \mu n_e$ et $\mathbf{v} = \frac{(1-\mu)n_i \mathbf{v}_i + \mu n_e \mathbf{v}_e}{(1-\mu)n_i + \mu n_e}$.

En appliquant la méthode résumée dans la section I.1 sur les fonctions de corrélations d'énergie totale ionique, $\mathcal{R}_{toti} = \frac{1-\mu}{4} < (n'_i + n_i)(\mathbf{v}'_i \cdot \mathbf{v}_i + \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A) + 2n'_i u_i + 2n_i u'_i >$, et électronique, $\mathcal{R}_{tote} = \frac{\mu}{4} < (n'_e + n_e)(\mathbf{v}'_e \cdot \mathbf{v}_e + \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A) + 2n'_e u_e + 2n_e u'_e >$ puis en supposant les hypothèses de stationnarité statistique et de séparation d'échelles de Kolmogorov, on obtient les taux de cascade, ε_i et ε_e , associés à chaque fluide et exprimé dans la zone inertielle :

$$\begin{aligned} -4\varepsilon_i = & (1-\mu)(\nabla_{\ell} \cdot < \delta(n_i \mathbf{v}_i) \cdot \delta \mathbf{v}_i \delta \mathbf{v}_i > + < \delta \mathbf{v}_i \cdot (n_i \mathbf{v}_i \nabla' \cdot \mathbf{v}'_i - n'_i \mathbf{v}'_i \nabla \cdot \mathbf{v}_i) >) \\ & + 2(1-\mu)(\nabla_{\ell} \cdot < \delta n_i \delta u_i \delta \mathbf{v}_i > + < \delta u_i (n_i \nabla' \cdot \mathbf{v}'_i - n'_i \nabla \cdot \mathbf{v}_i) >) \\ & + \nabla_{\ell} \cdot < \delta(n_i \mathbf{v}_i) \cdot \delta \bar{\mathbf{P}}_i \delta(\frac{1}{n_i}) > + < \delta \bar{\mathbf{P}}_i : (n_i \mathbf{v}_i \nabla'(\frac{1}{n'_i}) - n'_i \mathbf{v}'_i \nabla(\frac{1}{n_i})) > \\ & + 2 < \delta(\frac{\bar{\mathbf{P}}_i}{n_i}) : (n'_i \nabla \mathbf{v}_i - n_i \nabla' \mathbf{v}'_i) > \\ & + \frac{1-\mu}{2} < \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A \frac{((1-\mu)(n'_i - n_i) - 2\mu n_e) \nabla \cdot (n_i \mathbf{v}_i) + \mu(n'_i + n_i) \nabla \cdot (n_e \mathbf{v}_e)}{(1-\mu)n_i + \mu n_e} > \\ & + \frac{1-\mu}{2} < \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}'_A \frac{((1-\mu)(n_i - n'_i) - 2\mu n'_e) \nabla' \cdot (n'_i \mathbf{v}'_i) + \mu(n'_i + n_i) \nabla' \cdot (n'_e \mathbf{v}'_e)}{(1-\mu)n'_i + \mu n'_e} > \\ & + \lambda < (n'_i + n_i)(\mathbf{v}'_i \cdot \mathbf{v}_i \times \mathbf{B} + \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}'_i \times \mathbf{B}') > \\ & - (1-\mu) < (n'_i + n_i) \left(\frac{\nabla' \cdot (\mathbf{E}' \times \mathbf{v}_A)}{\sqrt{(1-\mu)n'_i + \mu n'_e}} + \frac{\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{v}'_A)}{\sqrt{(1-\mu)n_i + \mu n_e}} \right) > \end{aligned} \quad (\text{II.3.36})$$

$$\begin{aligned}
-4\varepsilon_e = & \mu(\nabla_{\ell} \cdot \langle \delta(n_e \mathbf{v}_e) \cdot \delta \mathbf{v}_e \delta \mathbf{v}_e \rangle + \langle \delta \mathbf{v}_e \cdot (n_e \mathbf{v}_e \nabla' \cdot \mathbf{v}'_e - n'_e \mathbf{v}'_e \nabla \cdot \mathbf{v}_e) \rangle) \\
& + 2\mu(\nabla_{\ell} \cdot \langle \delta n_e \delta u_e \delta \mathbf{v}_e \rangle + \langle \delta u_e (n_e \nabla' \cdot \mathbf{v}'_e - n'_e \nabla \cdot \mathbf{v}_e) \rangle) \\
& + \nabla_{\ell} \cdot \langle \delta(n_e \mathbf{v}_e) \cdot \delta \overline{\mathbf{P}}_e \delta(\frac{1}{n_e}) \rangle + \langle \delta \overline{\mathbf{P}}_e : (n_e \mathbf{v}_e \nabla'(\frac{1}{n'_e}) - n'_e \mathbf{v}'_e \nabla(\frac{1}{n_e})) \rangle \\
& + 2 \langle \delta(\frac{\overline{\mathbf{P}}_e}{n_e}) : (n'_e \nabla \mathbf{v}_e - n_e \nabla' \mathbf{v}'_e) \rangle \\
& + \frac{\mu}{2} \langle \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A \frac{(1-\mu)(n'_e+n_e)\nabla' \cdot (n_i \mathbf{v}_i) + (\mu(n'_e-n_e) - 2(1-\mu)n_i)\nabla \cdot (n_e \mathbf{v}_e)}{(1-\mu)n_i + \mu n_e} \rangle \\
& + \frac{\mu}{2} \langle \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}'_A \frac{(1-\mu)(n'_e+n_e)\nabla' \cdot (n'_i \mathbf{v}'_i) + (\mu(n_e-n'_e) - 2(1-\mu)n'_i)\nabla \cdot (n'_e \mathbf{v}'_e)}{(1-\mu)n'_i + \mu n'_e} \rangle \\
& - \lambda \langle (n'_e + n_e)(\mathbf{v}'_e \cdot \mathbf{v}_e \times \mathbf{B} + \mathbf{v}_e \cdot \mathbf{v}'_e \times \mathbf{B}') \rangle \\
& - \mu \langle (n'_e + n_e) \left(\frac{\nabla' \cdot (\mathbf{E}' \times \mathbf{v}_A)}{\sqrt{(1-\mu)n'_i + \mu n'_e}} + \frac{\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{v}'_A)}{\sqrt{(1-\mu)n_i + \mu n_e}} \right) \rangle
\end{aligned}
\tag{II.3.37}$$

On y retrouve des fonctions de structures et des termes sources similaires à ceux dérivés dans le cas mono-fluide (voir équations (II.1.16), (II.1.18) et (I.3.21)) pour les contributions cinétique et thermodynamique (\mathbf{v}_i , \mathbf{v}_e , u_i , u_e , $\overline{\mathbf{P}}_i$ et $\overline{\mathbf{P}}_e$). Par contre, la contribution électromagnétique diffère (quatre dernières lignes de (II.3.36) et (II.3.37)). On remarque d'ailleurs qu'elle reflète le couplage des deux fluides par le champ électromagnétique étant donné que dans (II.3.36) comme dans (II.3.37) elle dépend de \mathbf{v}_i , \mathbf{v}_e , \mathbf{v}_i , n_i et n_e .

Si l'on somme les quatre premières lignes de (II.3.36) et (II.3.37), on obtient la contribution bi-fluide cinétique et thermique notée ε_{TH} :

$$\begin{aligned}
-4 \varepsilon_{TH} = & (1-\mu)(\nabla_{\ell} \cdot \langle \delta(n_i \mathbf{v}_i) \cdot \delta \mathbf{v}_i \delta \mathbf{v}_i \rangle + \langle \delta \mathbf{v}_i \cdot (n_i \mathbf{v}_i \nabla' \cdot \mathbf{v}'_i - n'_i \mathbf{v}'_i \nabla \cdot \mathbf{v}_i) \rangle) \\
& + 2(1-\mu)(\nabla_{\ell} \cdot \langle \delta n_i \delta u_i \delta \mathbf{v}_i \rangle + \langle \delta u_i (n_i \nabla' \cdot \mathbf{v}'_i - n'_i \nabla \cdot \mathbf{v}_i) \rangle) \\
& + \nabla_{\ell} \cdot \langle \delta(n_i \mathbf{v}_i) \cdot \delta \overline{\mathbf{P}}_i \delta(\frac{1}{n_i}) \rangle + \langle \delta \overline{\mathbf{P}}_i : (n_i \mathbf{v}_i \nabla'(\frac{1}{n'_i}) - n'_i \mathbf{v}'_i \nabla(\frac{1}{n_i})) \rangle \\
& + 2 \langle \delta \frac{\overline{\mathbf{P}}_i}{n_i} : (n'_i \nabla \mathbf{v}_i - n_i \nabla' \mathbf{v}'_i) \rangle \\
& + \mu(\nabla_{\ell} \cdot \langle \delta(n_e \mathbf{v}_e) \cdot \delta \mathbf{v}_e \delta \mathbf{v}_e \rangle + \langle \delta \mathbf{v}_e \cdot (n_e \mathbf{v}_e \nabla' \cdot \mathbf{v}'_e - n'_e \mathbf{v}'_e \nabla \cdot \mathbf{v}_e) \rangle) \\
& + 2\mu(\nabla_{\ell} \cdot \langle \delta n_e \delta u_e \delta \mathbf{v}_e \rangle + \langle \delta u_e (n_e \nabla' \cdot \mathbf{v}'_e - n'_e \nabla \cdot \mathbf{v}_e) \rangle) \\
& + \nabla_{\ell} \cdot \langle \delta(n_e \mathbf{v}_e) \cdot \delta \overline{\mathbf{P}}_e \delta(\frac{1}{n_e}) \rangle + \langle \delta \overline{\mathbf{P}}_e : (n_e \mathbf{v}_e \nabla'(\frac{1}{n'_e}) - n'_e \mathbf{v}'_e \nabla(\frac{1}{n_e})) \rangle \\
& + 2 \langle \delta \frac{\overline{\mathbf{P}}_e}{n_e} : (n'_e \nabla \mathbf{v}_e - n_e \nabla' \mathbf{v}'_e) \rangle
\end{aligned}
\tag{II.3.38}$$

On peut y faire apparaître les grandeurs mono-fluide $\rho = (1-\mu)n_i + \mu n_e$ et $\mathbf{v} = \frac{(1-\mu)n_i \mathbf{v}_i + \mu n_e \mathbf{v}_e}{(1-\mu)n_i + \mu n_e}$ et remplacer \mathbf{v}_i et \mathbf{v}_e par $\mathbf{j} = \lambda(n_i \mathbf{v}_i - n_e \mathbf{v}_e)$ et \mathbf{v} .² On se place aussi

2. Si $\mathbf{j} = \lambda(n_i \mathbf{v}_i - n_e \mathbf{v}_e)$ et $\rho \mathbf{v} = (1-\mu)n_i \mathbf{v}_i + \mu n_e \mathbf{v}_e$ alors $\mathbf{v}_i = \frac{1}{n_i} \rho \mathbf{v} + \frac{\mu}{\lambda n_i} \mathbf{j} = \mathbf{v} + \frac{\mu}{\lambda} \frac{\mathbf{j}}{\rho}$ et $\mathbf{v}_e = \frac{1}{n_e} \rho \mathbf{v} - \frac{1-\mu}{\lambda n_e} \mathbf{j} = \mathbf{v} - \frac{1-\mu}{\lambda} \frac{\mathbf{j}}{\rho}$.

dans le cadre quasi-neutre ($n_i = n_e = \rho$). Ainsi :

$$\begin{aligned}
 -4 \quad \varepsilon_{TH} = & \nabla_{\ell} \cdot \langle \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{v} \delta \mathbf{v} \rangle + \frac{\mu(1-\mu)(2\mu-1)}{\lambda^3} \nabla_{\ell} \cdot \langle \delta(\mathbf{j}) \cdot \delta(\frac{1}{\rho} \mathbf{j}) \delta(\frac{1}{\rho} \mathbf{j}) \rangle \\
 & + \frac{\mu(1-\mu)}{\lambda} \nabla_{\ell} \cdot \langle \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \delta(\frac{1}{\rho} \mathbf{j}) \delta(\frac{1}{\rho} \mathbf{j}) + \delta(\mathbf{j}) \cdot \delta(\mathbf{v}) \delta(\frac{1}{\rho} \mathbf{j}) + \delta(\mathbf{j}) \cdot \delta(\frac{1}{\rho} \mathbf{j}) \delta(\mathbf{v}) \rangle \\
 & + \langle \delta \mathbf{v} \cdot (\rho \mathbf{v} \nabla' \cdot \mathbf{v}' - \rho' \mathbf{v}' \nabla \cdot \mathbf{v}) \rangle + \frac{\mu(1-\mu)}{\lambda} \langle \delta \frac{\mathbf{j}}{\rho} \cdot (\mathbf{j} \nabla' \cdot \mathbf{v}' - \mathbf{j}' \nabla \cdot \mathbf{v}) \rangle \\
 & + \frac{\mu(1-\mu)}{\lambda} \langle (\delta \mathbf{v} + \frac{(2\mu-1)}{\lambda^2} \delta \frac{\mathbf{j}}{\rho}) \cdot (\mathbf{j} \nabla' \cdot \frac{\mathbf{j}'}{\rho'} - \mathbf{j}' \nabla \cdot \frac{\mathbf{j}}{\rho}) \rangle \\
 & + \frac{\mu(1-\mu)}{\lambda} \langle \delta \frac{\mathbf{j}}{\rho} \cdot (\rho \mathbf{v} \nabla' \cdot \frac{\mathbf{j}'}{\rho'} - \rho \mathbf{v}' \nabla \cdot \frac{\mathbf{j}}{\rho}) \rangle \\
 & + 2 \nabla_{\ell} \cdot \langle \delta \rho \delta((1-\mu)u_i + \mu u_e) \delta(\mathbf{v}) \rangle \\
 & + 2 \langle \delta((1-\mu)u_i + \mu u_e) (\rho \nabla' \cdot (\mathbf{v}') - \rho' \nabla \cdot (\mathbf{v})) \rangle \\
 & + 2 \frac{(1-\mu)\mu}{\lambda} (\nabla_{\ell} \cdot \langle \delta \rho \delta(u_i - u_e) \delta(\frac{\mathbf{j}}{\rho}) \rangle + \langle \delta(u_i - u_e) (\rho \nabla' \cdot (\frac{\mathbf{j}'}{\rho'}) - \rho' \nabla \cdot (\frac{\mathbf{j}}{\rho})) \rangle) \\
 & + \nabla_{\ell} \cdot \langle \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \delta(\overline{\mathbf{P}}_i + \overline{\mathbf{P}}_e) \delta(\frac{1}{\rho}) \rangle + \langle \delta(\overline{\mathbf{P}}_i + \overline{\mathbf{P}}_e) : (\rho \mathbf{v} \nabla'(\frac{1}{\rho'}) - \rho' \mathbf{v}' \nabla(\frac{1}{\rho})) \rangle \\
 & + \frac{1}{\lambda} \nabla_{\ell} \cdot \langle \delta(\mathbf{j}) \cdot \delta(\mu \overline{\mathbf{P}}_i + (1-\mu) \overline{\mathbf{P}}_e) \delta(\frac{1}{\rho}) \rangle \\
 & + \frac{1}{\lambda} \langle \delta(\mu \overline{\mathbf{P}}_i + (1-\mu) \overline{\mathbf{P}}_e) : (\mathbf{j} \nabla'(\frac{1}{\rho'}) - \mathbf{j}' \nabla(\frac{1}{\rho})) \rangle \\
 & + 2 \langle \delta(\frac{\overline{\mathbf{P}}_i}{\rho} + \frac{\overline{\mathbf{P}}_e}{\rho}) : (\rho' \nabla(\mathbf{v}) - \rho \nabla'(\mathbf{v}')) \rangle \\
 & + \frac{2}{\lambda} \langle \delta(\mu \frac{\overline{\mathbf{P}}_i}{\rho} - (1-\mu) \frac{\overline{\mathbf{P}}_e}{\rho}) : (\rho' \nabla(\frac{\mathbf{j}}{\rho}) - \rho \nabla'(\frac{\mathbf{j}'}{\rho'})) \rangle
 \end{aligned}
 \tag{II.3.39}$$

Si $\mu \rightarrow 0$, on obtient :

$$\begin{aligned}
 -4 \quad \varepsilon_{TH} \\
 \xrightarrow{\mu=0} & \nabla_{\ell} \cdot \langle \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{v} \delta \mathbf{v} \rangle + \langle \delta \mathbf{v} \cdot (\rho \mathbf{v} \nabla' \cdot \mathbf{v}' - \rho' \mathbf{v}' \nabla \cdot \mathbf{v}) \rangle \\
 & + 2 (\nabla_{\ell} \cdot \langle \delta \rho \delta(u_i) \delta(\mathbf{v}) \rangle + \langle \delta(u_i) (\rho \nabla' \cdot (\mathbf{v}') - \rho' \nabla \cdot (\mathbf{v})) \rangle) \\
 & + \nabla_{\ell} \cdot \langle \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \delta(\overline{\mathbf{P}}_i + \overline{\mathbf{P}}_e) \delta(\frac{1}{\rho}) \rangle + \langle \delta(\overline{\mathbf{P}}_i + \overline{\mathbf{P}}_e) : (\rho \mathbf{v} \nabla'(\frac{1}{\rho'}) - \rho' \mathbf{v}' \nabla(\frac{1}{\rho})) \rangle \\
 & + \frac{1}{\lambda} (\nabla_{\ell} \cdot \langle \delta(\mathbf{j}) \cdot \delta(\overline{\mathbf{P}}_e) \delta(\frac{1}{\rho}) \rangle + \langle \delta(\overline{\mathbf{P}}_e) : (\mathbf{j} \nabla'(\frac{1}{\rho'}) - \mathbf{j}' \nabla(\frac{1}{\rho})) \rangle) \\
 & + 2 \langle \delta(\frac{\overline{\mathbf{P}}_i}{\rho} + \frac{\overline{\mathbf{P}}_e}{\rho}) : (\rho' \nabla(\mathbf{v}) - \rho \nabla'(\mathbf{v}')) \rangle - \frac{2}{\lambda} \langle \delta(\frac{\overline{\mathbf{P}}_e}{\rho}) : (\rho' \nabla(\frac{\mathbf{j}}{\rho}) - \rho \nabla'(\frac{\mathbf{j}'}{\rho'})) \rangle
 \end{aligned}
 \tag{II.3.40}$$

On y reconnaît les termes dérivés dans le cas idéal CGL section 1.3 mais aussi la contribution idéale de la pression électronique abordée dans la section 3.2 ainsi que des termes dépendant de $\overline{\mathbf{P}}_e$ et \mathbf{j} qui font partie (moins explicitement) de la correction (II.3.14).

Si l'on somme les contributions électromagnétiques présentées dans (II.3.36) et (II.3.37), on obtient après quelques manipulations et en injectant ρ et \mathbf{v} et \mathbf{j} , la contribution notée

ε_{EM} :

$$\begin{aligned}
-4 \varepsilon_{EM} &= -\nabla_{\ell} \cdot < (\rho' + \rho) \left(\frac{\mathbf{E}' \times \mathbf{v}_A}{\sqrt{\rho'}} - \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{v}'_A}{\sqrt{\rho}} \right) > + \frac{1}{2} < (\rho' - \rho) \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}'_A (\nabla \cdot \mathbf{v} - \nabla' \cdot \mathbf{v}') > \\
&+ < (\rho' - \rho) \left(\left(-\frac{\mathbf{E} \times \mathbf{v}'_A}{\sqrt{\rho}} + \frac{1}{2} \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}'_A \mathbf{v} \right) \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} + \left(\frac{\mathbf{E}' \times \mathbf{v}_A}{\sqrt{\rho'}} - \frac{1}{2} \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A \mathbf{v}' \right) \cdot \frac{\nabla' \rho'}{\rho'} \right) > \\
&+ \lambda < (n'_i + n_i) (\mathbf{v}'_i \cdot \mathbf{v}_i \times \mathbf{B} + \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}'_i \times \mathbf{B}') - (n'_e + n_e) (\mathbf{v}'_e \cdot \mathbf{v}_e \times \mathbf{B} + \mathbf{v}_e \cdot \mathbf{v}'_e \times \mathbf{B}') > \\
&= -\nabla_{\ell} \cdot < (\rho' + \rho) \left(\frac{\mathbf{E}' \times \mathbf{v}_A}{\sqrt{\rho'}} - \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{v}'_A}{\sqrt{\rho}} \right) > + \frac{1}{2} < (\rho' - \rho) \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}'_A (\nabla \cdot \mathbf{v} - \nabla' \cdot \mathbf{v}') > \\
&+ \frac{1}{2} < (\rho' - \rho) \left(\left(-\frac{\mathbf{E} \times \mathbf{v}'_A}{\sqrt{\rho}} + \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}'_A \mathbf{v} \right) \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} + \left(\frac{\mathbf{E}' \times \mathbf{v}_A}{\sqrt{\rho'}} - \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A \mathbf{v}' \right) \cdot \frac{\nabla' \rho'}{\rho'} \right) > \\
&- \lambda < \left(\frac{n'_i - n'_e}{n'_i n'_e} + \frac{n_i - n_e}{n_i n_e} \right) \rho \rho' (\mathbf{v}' \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{B} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}' \times \mathbf{B}') > \\
&+ < \left(\frac{\rho'}{n'_i n'_e} + \frac{\rho}{n_i n_e} \right) (\rho \mathbf{j}' \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{B} + \rho' \mathbf{j} \cdot \mathbf{v}' \times \mathbf{B}' + \rho \mathbf{v}' \cdot \mathbf{j} \times \mathbf{B} + \rho' \mathbf{v} \cdot \mathbf{j}' \times \mathbf{B}') > \\
&+ \frac{1}{\lambda} < \left(\mu^2 \frac{n'_i + n_i}{n'_i n_i} - (1 - \mu)^2 \frac{n'_e + n_e}{n'_e n_e} \right) (\mathbf{j}' \cdot \mathbf{j} \times \mathbf{B} + \mathbf{j} \cdot \mathbf{j}' \times \mathbf{B}') > \quad (\text{II.3.41})
\end{aligned}$$

Puis en remplaçant \mathbf{j} par $\nabla \times \mathbf{B}$, et \mathbf{B} par $\sqrt{\rho}$ et en réarrangeant les termes :

$$\begin{aligned}
-4\varepsilon_{EM} &= \nabla_{\ell} \cdot < \left(\frac{\rho' \rho' \rho}{n'_i n'_e} + \frac{\rho' \rho \rho}{n_i n_e} \right) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'_A \mathbf{v}'_A - \frac{1}{2} \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}'_A \mathbf{v} - \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A + \frac{1}{2} \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}_A \mathbf{v}') > \\
&- < (\rho' \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A - \frac{1}{2} \rho' \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}_A \mathbf{v}') \cdot \left(\nabla \left(\frac{\rho \rho}{n_i n_e} \right) - \frac{\rho}{n_i n_e} \nabla \rho \right) > \\
&- < (\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'_A \mathbf{v}'_A - \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}'_A \mathbf{v}) \cdot \left(\nabla' \left(\frac{\rho' \rho'}{n'_i n'_e} \right) - \frac{\rho'}{n'_i n'_e} \nabla' \rho' \right) > \\
&- \nabla_{\ell} \cdot < (\rho' + \rho) \left(\frac{\mathbf{E}' \times \mathbf{v}_A}{\sqrt{\rho'}} - \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{v}'_A}{\sqrt{\rho}} \right) > + \frac{1}{2} < (\rho' - \rho) \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}'_A (\nabla \cdot \mathbf{v} - \nabla' \cdot \mathbf{v}') > \\
&+ \frac{1}{2} < (\rho' - \rho) \left(\left(-\frac{\mathbf{E} \times \mathbf{v}'_A}{\sqrt{\rho}} + \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}'_A \mathbf{v} \right) \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} + \left(\frac{\mathbf{E}' \times \mathbf{v}_A}{\sqrt{\rho'}} - \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A \mathbf{v}' \right) \cdot \frac{\nabla' \rho'}{\rho'} \right) > \\
&+ < \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\rho'}{n'_i n'_e} + \frac{\rho}{n_i n_e} \right) \mathbf{j}' \cdot ((2\mu - 1) \mathbf{j} \times \mathbf{B} + \lambda \rho \mathbf{v} \times \mathbf{B}) > \\
&+ < \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\rho'}{n'_i n'_e} + \frac{\rho}{n_i n_e} \right) \mathbf{j} \cdot ((2\mu - 1) \mathbf{j}' \times \mathbf{B}' + \lambda \rho' \mathbf{v}' \times \mathbf{B}') > \\
&+ \frac{\mu(\mu - 1)}{\lambda} < \left(\frac{n'_i - n'_e}{n'_i n'_e} + \frac{n_i - n_e}{n_i n_e} \right) (\mathbf{j}' \cdot \mathbf{j} \times \mathbf{B} + \mathbf{j} \cdot \mathbf{j}' \times \mathbf{B}') > \\
&- \lambda < \left(\frac{n'_i - n'_e}{n'_i n'_e} + \frac{n_i - n_e}{n_i n_e} \right) \rho \rho' (\mathbf{v}' \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{B} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}' \times \mathbf{B}') > \quad (\text{II.3.42})
\end{aligned}$$

Dans cette équation, on a gardé intact les termes qui nous rappelaient les termes de la loi d'Ohm généralisée (II.3.35), c'est-à-dire ceux contenant \mathbf{E} , $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ ou $\rho \mathbf{v} \times \mathbf{B}$. La première ligne correspond à des termes flux. Mais pour pouvoir y faire apparaître les fonctions de structures $< \delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \delta \mathbf{v}_A \delta \mathbf{v} >$, $< \delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \delta \mathbf{v} \delta \mathbf{v}_A >$, $< \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{v}_A \delta \mathbf{v}_A >$ et $< \delta(\rho \mathbf{v}) \delta \left(\frac{\rho \mathbf{v}_A^2}{2} \right) \delta(1/\rho) >$, il nous manque des termes qui sont cachés dans la quatrième

ligne. On doit y remplacer \mathbf{E} grâce à la loi d'Ohm (II.3.35). On peut aussi utiliser la loi d'Ohm pour remplacer \mathbf{E} dans la cinquième ligne et $(2\mu - 1)\mathbf{j} \times \mathbf{B} + \lambda\rho\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ dans les six et septième lignes. Mais avant de faire ces modifications, on va appliquer l'hypothèse de quasi-neutralité.

Dans le cas quasi-neutre ($n_i = n_e = \rho$), les deux dernières lignes de (II.3.42) s'annulent ainsi que $\nabla(\frac{\rho\rho}{n_i n_e})$, cela nous donne :

$$\begin{aligned}
 -4\varepsilon_{EM} = & \nabla_{\mathbf{E}} \cdot < (\rho + \rho')(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'_{\mathbf{A}} \mathbf{v}'_{\mathbf{A}} - \frac{1}{2} \mathbf{v}'_{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{v}'_{\mathbf{A}} \mathbf{v} - \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{A}} \mathbf{v}_{\mathbf{A}} + \frac{1}{2} \mathbf{v}_{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{A}} \mathbf{v}') > \\
 & + < (\rho' \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{A}} \mathbf{v}_{\mathbf{A}} - \frac{1}{2} \rho' \mathbf{v}_{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{A}} \mathbf{v}') \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} + (\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'_{\mathbf{A}} \mathbf{v}'_{\mathbf{A}} - \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}'_{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{v}'_{\mathbf{A}} \mathbf{v}) \cdot \frac{\nabla \rho'}{\rho'} > \\
 & - \nabla_{\mathbf{E}} \cdot < (\rho' + \rho) \left(\frac{\mathbf{E}' \times \mathbf{v}_{\mathbf{A}}}{\sqrt{\rho'}} - \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{v}'_{\mathbf{A}}}{\sqrt{\rho}} \right) > + \frac{1}{2} < (\rho' - \rho) \mathbf{v}_{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{v}'_{\mathbf{A}} (\nabla \cdot \mathbf{v} - \nabla' \cdot \mathbf{v}') > \\
 & + \frac{1}{2} < (\rho' - \rho) \left(\left(-\frac{\mathbf{E} \times \mathbf{v}'_{\mathbf{A}}}{\sqrt{\rho}} + \mathbf{v}_{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{v}'_{\mathbf{A}} \mathbf{v} \right) \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} + \left(\frac{\mathbf{E}' \times \mathbf{v}_{\mathbf{A}}}{\sqrt{\rho'}} - \mathbf{v}'_{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{A}} \mathbf{v}' \right) \cdot \frac{\nabla' \rho'}{\rho'} \right) > \\
 & + < \frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{\rho'} + \frac{1}{\rho} \right) \mathbf{j}' \cdot ((2\mu - 1)\mathbf{j} \times \mathbf{B} + \lambda\rho\mathbf{v} \times \mathbf{B}) > \\
 & + < \frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{\rho'} + \frac{1}{\rho} \right) \mathbf{j} \cdot ((2\mu - 1)\mathbf{j}' \times \mathbf{B}' + \lambda\rho'\mathbf{v}' \times \mathbf{B}') >
 \end{aligned}
 \tag{II.3.43}$$

Cette expression de ε_{EM} , sommée à (II.3.39) forment la loi exacte mono-fluide obtenue à partir du modèle bi-fluide. Dans la suite de cette section, nous allons décomposer ε_{EM} en fonctions des différentes contributions présentes dans la loi d'Ohm (II.3.35).

La loi d'Ohm (II.3.35) devient avec l'hypothèse quasi-neutre :

$$\begin{aligned}
 \partial_t \mathbf{j} = & -\nabla \cdot (\mathbf{v}\mathbf{j} + \mathbf{j}\mathbf{v} + \frac{(2\mu - 1)}{\rho} \frac{1}{\lambda} \mathbf{j}\mathbf{j}) - \lambda \frac{\mu \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}_i} - (1 - \mu) \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}_e}}{(1 - \mu)\mu} \\
 & + \frac{\lambda^2}{(1 - \mu)\mu} \rho \mathbf{v} \times \mathbf{B} + \frac{\lambda(2\mu - 1)}{(1 - \mu)\mu} \mathbf{j} \times \mathbf{B} \left[+ \frac{\lambda^2}{\mu(1 - \mu)} \rho \mathbf{E} \right]
 \end{aligned}
 \tag{II.3.44}$$

Et avec l'hypothèse de quasi-stationnarité de Kolmogorov :

$$\begin{aligned}
 0 = & -\mu(1 - \mu) \nabla \cdot (\mathbf{v}\mathbf{j} + \mathbf{j}\mathbf{v} + \frac{(2\mu - 1)}{\rho} \frac{1}{\lambda} \mathbf{j}\mathbf{j}) - \lambda(\mu \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}_i} - (1 - \mu) \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}_e}) \\
 & + \lambda^2 \rho \mathbf{v} \times \mathbf{B} + \lambda(2\mu - 1) \mathbf{j} \times \mathbf{B} \left[+ \lambda^2 \rho \mathbf{E} \right]
 \end{aligned}
 \tag{II.3.45}$$

Le dernier terme dépendant de \mathbf{E} s'annule en supposant l'hypothèse non-relativiste ou nous aide à remplacer \mathbf{E} dans (II.3.43), le terme en $\rho\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ correspond au terme idéal, celui en $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ à la correction Hall. Le terme dépendant des pressions est la contribution thermique. Et la contribution sous la divergence correspond à la contribution inertielle.

En appliquant la loi d'Ohm (II.3.45) dans la contribution électromagnétique ε_{TEM} donnée par l'équation (II.3.43), on obtient :

— Pour la contribution idéale :

$$\begin{aligned}
-4 \varepsilon_{EM}^{ideal} &= \nabla_{\ell} \cdot < (\rho + \rho')(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'_A \mathbf{v}'_A - \frac{1}{2} \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}'_A \mathbf{v} - \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A + \frac{1}{2} \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}_A \mathbf{v}') > \\
&\quad + \nabla_{\ell} \cdot < (\rho' + \rho)((\mathbf{v}' \times \mathbf{v}'_A) \times \mathbf{v}_A - (\mathbf{v} \times \mathbf{v}_A) \times \mathbf{v}'_A) > \\
&\quad + \frac{1}{2} < (\rho' - \rho) \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}'_A (\nabla \cdot \mathbf{v} - \nabla' \cdot \mathbf{v}') > \\
&\quad + \frac{1}{2} < (\rho' - \rho)((\mathbf{v} \times \mathbf{v}_A) \times \mathbf{v}'_A + \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}'_A \mathbf{v}) \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} > \\
&\quad - \frac{1}{2} < (\rho' - \rho)((\mathbf{v}' \times \mathbf{v}'_A) \times \mathbf{v}_A + \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A \mathbf{v}') \cdot \frac{\nabla' \rho'}{\rho'} > \\
&\quad + < (\rho' \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A - \frac{1}{2} \rho' \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}_A \mathbf{v}') \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} + (\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'_A \mathbf{v}'_A - \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}'_A \mathbf{v}) \cdot \frac{\nabla' \rho'}{\rho'} > \\
&= \nabla_{\ell} \cdot < \delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \delta \mathbf{v}'_A \delta \mathbf{v} + \delta(\frac{\rho' \mathbf{v}'_A{}^2}{2}) \delta(\rho \mathbf{v}) \delta(\frac{1}{\rho}) - \delta \mathbf{v}_A \cdot \delta(\rho \mathbf{v}) \delta \mathbf{v}_A - \delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \delta \mathbf{v} \delta \mathbf{v}_A > \\
&\quad + \frac{1}{2} < (\delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \mathbf{v}'_A - \delta \mathbf{v}_A \cdot \rho' \mathbf{v}'_A) \nabla \cdot \mathbf{v} - (\delta(\rho' \mathbf{v}'_A) \cdot \mathbf{v}_A - \rho \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{v}_A) \nabla' \cdot \mathbf{v}' > \\
&\quad + < \delta(\frac{\rho \mathbf{v}_A{}^2}{2})(\rho \mathbf{v} \cdot \nabla' \frac{1}{\rho'} - \rho' \mathbf{v}' \cdot \nabla \frac{1}{\rho}) > \\
&\quad - < (2 \rho \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v}_A + \rho \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{v}) - \mathbf{v}_A \cdot \delta(\rho \mathbf{v}) \nabla' \cdot \mathbf{v}'_A > \\
&\quad + < (2 \rho' \mathbf{v}' \cdot \delta \mathbf{v}_A + \rho' \mathbf{v}'_A \cdot \delta \mathbf{v} - \mathbf{v}'_A \cdot \delta(\rho \mathbf{v})) \nabla \cdot \mathbf{v}_A >
\end{aligned} \tag{II.3.46}$$

On retrouve bien la contribution électromagnétique dérivée dans le cas idéal (voir équations (??) et (I.3.21) pour les termes de pression magnétique). Elle ne dépend ni de μ ni de λ donc elle restera toujours la même tant que l'hypothèse de quasi-neutralité est valable.

— Pour la contribution Hall :

$$\begin{aligned}
-4 \varepsilon_{EM}^{Hall} &= \frac{2\mu - 1}{\lambda} \nabla_{\ell} \cdot < (\rho' + \rho)((\frac{1}{\rho'} \mathbf{j}' \times \mathbf{v}'_A) \times \mathbf{v}_A - (\frac{1}{\rho} \mathbf{j} \times \mathbf{v}_A) \times \mathbf{v}'_A) > \\
&\quad - \frac{2\mu - 1}{\lambda} < (\rho' - \rho)((\frac{1}{\rho'} \mathbf{j} \times \mathbf{v}_A) \times \mathbf{v}'_A) \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} - (\frac{1}{\rho'} \mathbf{j}' \times \mathbf{v}'_A) \times \mathbf{v}_A \cdot \frac{\nabla' \rho'}{\rho'} > \\
&= \frac{2\mu - 1}{\lambda} \nabla_{\ell} \cdot < -(\mathbf{j}' \times \mathbf{v}'_A + \mathbf{j} \times \mathbf{v}_A) \times \delta \mathbf{v}_A + \delta(\frac{1}{\rho} \mathbf{j} \times \mathbf{v}_A) \times (\rho' \mathbf{v}'_A + \rho \mathbf{v}_A) > \\
&\quad + 2 \frac{2\mu - 1}{\lambda} < (\frac{\rho'}{\rho} - 1) \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{j} \nabla \cdot \mathbf{v}_A + (\frac{\rho}{\rho'} - 1) \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{j}' \nabla' \cdot \mathbf{v}'_A > \\
&\quad - \frac{2\mu - 1}{\lambda} < (\rho' - \rho) \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A \nabla \cdot \frac{\mathbf{j}}{\rho} - (\rho' - \rho) \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}'_A \nabla' \cdot \frac{\mathbf{j}'}{\rho'} >
\end{aligned} \tag{II.3.47}$$

Dans le cas $\mu \rightarrow 0$, on retrouve le résultat de la section 3.1 (attention à la définition de λ)³. Si $\mu \rightarrow 1$, on obtient un résultat pour le modèle dit de MHD électronique

3. Dans cette section, on utilise des équations sans dimension, mais on a fait en sorte de choisir les quantités telles que les résultats présentés dans ce mémoire se recoupent. Attention toute fois à la définition de λ (différente dans cette section et dans les sections 3.1 et 3.2) et à la constante μ_0 absente

(EMHD) où les ions sont considérés comme immobiles et les électrons en mouvement.

— Pour la contribution des pressions :

$$\begin{aligned}
& -4 \varepsilon_{EM}^P \\
&= -\frac{\mu}{\lambda} \nabla_{\mathbf{e}} \cdot \langle (\rho' + \rho) \left(\frac{1}{\sqrt{\rho'}} \left(\left(\frac{1}{\rho'} \nabla' \cdot \overline{\mathbf{P}}'_i \right) \times \mathbf{v}_A - \frac{1}{\sqrt{\rho}} \left(\left(\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}}_i \right) \times \mathbf{v}'_A \right) \right) \right) \rangle \\
&+ \frac{\mu}{\lambda} \langle (\rho' - \rho) \left(\frac{1}{\sqrt{\rho}} \left(\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}}_i \right) \times \mathbf{v}'_A \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} - \frac{1}{\sqrt{\rho'}} \left(\frac{1}{\rho'} \nabla' \cdot \overline{\mathbf{P}}'_i \right) \times \mathbf{v}_A \cdot \frac{\nabla' \rho'}{\rho'} \right) \rangle \\
&+ \frac{\mu}{\lambda} \langle \left(\frac{1}{\rho'} + \frac{1}{\rho} \right) (\mathbf{j} \cdot \nabla' \cdot \overline{\mathbf{P}}'_i + \mathbf{j}' \cdot \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}}_i) \rangle \\
&+ \frac{1-\mu}{\lambda} \nabla_{\mathbf{e}} \cdot \langle (\rho' + \rho) \left(\frac{1}{\sqrt{\rho'}} \left(\left(\frac{1}{\rho'} \nabla' \cdot \overline{\mathbf{P}}'_e \right) \times \mathbf{v}_A - \frac{1}{\sqrt{\rho}} \left(\left(\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}}_e \right) \times \mathbf{v}'_A \right) \right) \right) \rangle \\
&- (1-\mu) \lambda \langle (\rho' - \rho) \left(\frac{1}{\sqrt{\rho}} \left(\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}}_e \right) \times \mathbf{v}'_A \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} - \frac{1}{\sqrt{\rho'}} \left(\frac{1}{\rho'} \nabla' \cdot \overline{\mathbf{P}}'_e \right) \times \mathbf{v}_A \cdot \frac{\nabla' \rho'}{\rho'} \right) \rangle \\
&- \frac{1-\mu}{\lambda} \langle \left(\frac{1}{\rho'} + \frac{1}{\rho} \right) (\mathbf{j} \cdot \nabla' \cdot \overline{\mathbf{P}}'_e + \mathbf{j}' \cdot \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}}_e) \rangle
\end{aligned} \tag{II.3.48}$$

Cette contribution diffère, en prenant $\mu \rightarrow 0$, de celle dérivée dans la section 3.2 (équation (II.3.14)). En effet, cette dernière prend en compte tous les termes de pression électronique dépendant du champ magnétique ou du courant alors que tous les termes ne sont pas présents dans (II.3.48), on en a découvert quelques-uns dans ε_{TH} (II.3.39). Ce travail fastidieux pour passer de (II.3.48) à (II.3.14) ne sera pas présenté ici.

— Pour la contribution inertielle :

$$\begin{aligned}
-4\varepsilon_{EM}^{inert} &= -\frac{\mu(1-\mu)}{\lambda^2} \nabla_{\mathbf{e}} \cdot \langle \frac{\rho' + \rho}{\rho' \sqrt{\rho'}} \nabla' \cdot (\mathbf{v}' \mathbf{j}' + \mathbf{j}' \mathbf{v}' + \frac{(2\mu-1)}{\rho'} \frac{1}{\lambda} \mathbf{j}' \mathbf{j}') \times \mathbf{v}_A \rangle \\
&+ \frac{\mu(1-\mu)}{\lambda^2} \nabla_{\mathbf{e}} \cdot \langle \frac{\rho' + \rho}{\rho \sqrt{\rho}} \nabla \cdot (\mathbf{v} \mathbf{j} + \mathbf{j} \mathbf{v} + \frac{(2\mu-1)}{\rho} \frac{1}{\lambda} \mathbf{j} \mathbf{j}) \times \mathbf{v}'_A \rangle \\
&+ \frac{\mu(1-\mu)}{\lambda^2} \langle \frac{\rho' + \rho}{\rho \sqrt{\rho}} \nabla \cdot (\mathbf{v} \mathbf{j} + \mathbf{j} \mathbf{v} + \frac{(2\mu-1)}{\rho} \frac{1}{\lambda} \mathbf{j} \mathbf{j}) \times \mathbf{v}'_A \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} \rangle \\
&- \frac{\mu(1-\mu)}{\lambda^2} \langle \frac{\rho' + \rho}{\rho' \sqrt{\rho'}} \nabla' \cdot (\mathbf{v}' \mathbf{j}' + \mathbf{j}' \mathbf{v}' + \frac{(2\mu-1)}{\rho'} \frac{1}{\lambda} \mathbf{j}' \mathbf{j}') \times \mathbf{v}_A \cdot \frac{\nabla' \rho'}{\rho'} \rangle \\
&+ \frac{\mu(1-\mu)}{\lambda^2} \langle \left(\frac{1}{\rho'} + \frac{1}{\rho} \right) \mathbf{j}' \cdot \nabla \cdot (\mathbf{v} \mathbf{j} + \mathbf{j} \mathbf{v} + \frac{(2\mu-1)}{\rho} \frac{1}{\lambda} \mathbf{j} \mathbf{j}) \rangle \\
&+ \frac{\mu(1-\mu)}{\lambda^2} \langle \left(\frac{1}{\rho'} + \frac{1}{\rho} \right) \mathbf{j} \cdot \nabla' \cdot (\mathbf{v}' \mathbf{j}' + \mathbf{j}' \mathbf{v}' + \frac{(2\mu-1)}{\rho'} \frac{1}{\lambda} \mathbf{j}' \mathbf{j}') \rangle \tag{II.3.49}
\end{aligned}$$

Cette contribution est nulle si $\mu \rightarrow 0$ (cas MHD) mais aussi si $\mu \rightarrow 1$ (cas EMHD).

En dérivant une loi exacte pour un modèle bi-fluide quasi-neutre, puis en travaillant sur les termes électromagnétiques avec la loi d'Ohm généralisée, on vient d'obtenir différents niveaux de correction ainsi que deux régimes asymptotiques qui viennent étendre la description de la cascade turbulente d'énergie totale à de multiples systèmes. En fonction

dans les termes de pression (voir section 3.2) sans dimension.

de l'usage, il sera toujours possible de retravailler les termes pour obtenir des formulations potentiellement plus pratiques à analyser. Dans la partie suivante, nous reviendrons dans le cadre MHD ($\mu \rightarrow 0$) afin d'étudier les effets de l'anisotropie de pression dans des simulations turbulentes. Afin de refléter au mieux la physique dans ces simulations, nous utiliserons les corrections Hall (section 3.1) et HallPe (section 3.2) dérivées dans ce chapitre. Comme on l'a vu partiellement dans cette section, ces corrections peuvent être retrouvées à partir du modèle bi-fluide.

3.4 Synthèse de l'extension de la théorie des lois exactes à d'autres régimes

Correction Hall

- Théorie linéaire : apparitions des ondes whistlers et cyclotron ionique, critère miroir inchangé mais décalage du critère firehose suivant le vecteur d'onde.
 - Correction turbulente compressible : (II.3.3)
 - Correction incompressible à la loi exacte PP98 : (II.3.4)
- ⇒ Contribution turbulente indépendante des tenseurs de pressions

Modèle hybride et correction HallPe

- Modèle ouvert utilisé pour obtenir la correction turbulente : équations (II.3.5), (II.3.6), (II.3.7), (II.3.8), (II.3.9)
- Théorie linéaire : la pression électronique va venir impacter les critères d'instabilités qui seront recalculé si nécessaire dans la partie ??
- Correction turbulente compressible : (II.3.14)
- Correction incompressible à la loi exacte PP98 : (II.3.15)

Dérivations des contributions provenant de la loi d'Ohm généralisée à partir du modèle bi-fluide

- Modèle bi-fluide **sans dimension** et ouvert utilisé pour obtenir la loi exacte généralisée : équations (II.3.23), (II.3.24), (II.3.25), (II.3.26), (II.3.27), (II.3.28), (II.3.29), (II.3.30), (II.3.31)
 - Loi exacte KHM généralisée écrite avec les quantités bi-fluide : (II.3.36) (part ionique) + (II.3.37) (part électronique)
 - Loi exacte KHM généralisée quasi-neutre écrite avec les quantités mono-fluide : (II.3.39) + (II.3.43)
 - Décomposition de (II.3.43) suivant les différentes contributions présentes dans la loi d'Ohm généralisée quasi-neutre (II.3.44) :
 - Contribution idéale : (II.3.46)
 - Contribution Hall : (II.3.47) équivalente à (II.3.3)
 - Contribution thermique : (II.3.48) doit être complétée par quelques termes présents dans (II.3.39) pour correspondre à (II.3.14)
 - Contribution inertielle : (II.3.49)
- ⇒ Ouvre le champ d'études potentielles au régime EMHD par exemple et à l'étude plus rigoureuse de l'impact sur la cascade turbulente des différentes approximations appliquées à la loi d'Ohm.

Ces résultats n'ont pas encore été publiés.

Dans cette partie, nous avons dérivé un cadre d'étude complet et rigoureux des écoulements turbulents (zone inertielle supposée isentrope) allant du régime mono-fluide au régime bi-fluide, et dépendant de pressions tensorielles.

Dans le chapitre 1 (synthèse 1.4), a été présenté une extension de la théorie de Kolmogorov à un écoulement magnétisé idéal dépendant d'une pression tensorielle. Cette extension a ensuite été appliquée à un tenseur de pression gyrotrope ou CGL afin de répondre analytiquement à la question de l'impact des anisotropies de pression sur la cascade turbulente. De nouveaux termes pouvant nourrir ou réduire la cascade et dépendant de $1 - a_p$ avec a_p le taux d'anisotropie p_\perp/p_\parallel ont été découverts. Linéairement, le signe de $1 - a_p$ est une condition nécessaire à l'existence d'instabilité firehose ou miroir dans l'écoulement, comme cela a été redémontré dans la section 1.2. On aurait donc potentiellement un lien entre instabilités linéaires et régimes turbulents qui pourrait venir expliquer les observations de OSMAN et al. 2013 ; LZ HADID, SAHRAOUI, GALTIER et SY HUANG 2018 dans le vent solaire mais une étude numérique est nécessaire afin d'affiner l'interprétation de la loi exacte.

Parmi les nouveaux termes dépendant de l'anisotropie de pression émergeant dans la loi exacte, un terme source survit dans la limite incompressible. Par curiosité, nous nous sommes alors demandés à quoi pourrait ressembler un modèle incompressible gyrotrope dans le chapitre 2 (synthèse 2.4). Un tel modèle incompressible, fermé par l'équation sur la trace du tenseur de pression, a alors été proposé et linéarisé. En plus de l'onde d'Alfvén-firehose, un nouveau mode potentiellement instable peut y apparaître. On y retrouve le critère d'instabilité firehose parallèle mais aussi un critère d'instabilité firehose inversé apparaissant dans le cas quasi-perpendiculaire et venant réduire la zone de stabilité du modèle en fonction du taux d'instabilité moyen a_{p0} et du paramètre $\beta_{\parallel 0}$.

Enfin, dans le chapitre 3 (synthèse 3.4), les approximations appliquées sur l'équation d'induction, ont été relaxées les unes après les autres. Des corrections prenant en compte l'effet Hall puis le tenseur de pression électronique ont été dérivées pour compléter la loi exacte idéale jusqu'à atteindre une description bi-fluide. Ces corrections serviront à refléter au mieux la cascade turbulente étudiée dans les simulations utilisés dans la partie ??.