

## PARTIE II : CHAPITRE 2

## ET DANS LE CAS INCOMPRESSIBLE ?

### Sommaire

2.1	De la limite incompressible dans la loi exacte générale vers un nouveau modèle . . . . .	15
2.2	Proposition d'un modèle incompressible gyrotrope non sur-contraint . . . . .	17
2.3	Etude paramétrique des modes linéaires du modèle incompressible gyrotrope . . . . .	18
2.4	Synthèse : Limite incompressible et pistes d'étude . . . . .	23

Si l'on prend la limite incompressible de la loi exacte dépendant d'une pression isotrope  $(??)$ , on retrouve la loi PP98 donnant le taux de cascade  $\varepsilon_{PP98}$   $(??)$ . Mais est-ce aussi le cas si la pression est tensorielle ? De cette question émerge une autre question : qu'est-ce qu'un système incompressible avec pression tensorielle ? Dans ce chapitre, sera présenté le travail effectué pour tenter de répondre à ces questions. Ce travail n'a pas encore été publié.

### 2.1 De la limite incompressible dans la loi exacte générale vers un nouveau modèle

Si l'on considère la limite incompressible ( $\rho = \rho_0$ ,  $\delta\rho = 0$ ,  $\nabla\rho = 0$ ,  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ ,  $\nabla \cdot \mathbf{v}_A = 0$ ) dans l'équation (I.1.21),  $\varepsilon_{iso} \rightarrow \varepsilon_{PP98}$  et tous les termes s'annulent sauf :

$$-4(\varepsilon - \varepsilon_{PP98}) = -2 \langle \delta(\bar{\Pi}) : \nabla' \mathbf{v}' - \delta(\bar{\Pi}) : \nabla \mathbf{v} \rangle \quad (\text{I.2.1})$$


car seule la trace de  $\nabla \mathbf{v}$  s'annule par incompressibilité :  $\bar{\mathbf{I}} : \nabla \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ . On obtient ainsi une correction à la théorie PP98 dépendant de la composante anisotrope de la pression (participant à la déformation incompressible du plasma d'après CASSAK et BARBHUIYA 2022) :

$$\boxed{-4(\varepsilon - \varepsilon_{PP98}) = -2 \langle \delta(\bar{\mathbf{P}} - p\bar{\mathbf{I}}) : \delta(\nabla \mathbf{v}) \rangle = -2 \langle \delta\bar{\Pi} : \delta(\nabla \mathbf{v}) \rangle} \quad (\text{I.2.2})$$


Et dans le cas particulier gyrotrope, on obtient :

$$-4(\varepsilon - \varepsilon_{PP98}) = -2 \left\langle \delta((p_{\parallel} - p_{\perp})(\mathbf{b}\mathbf{b} - \frac{1}{3}\bar{\mathbf{I}})) : \delta(\nabla\mathbf{v}) \right\rangle \quad (\text{I.2.3})$$

$$= -2 \left\langle \delta((p_{\parallel} - p_{\perp})\mathbf{b}\mathbf{b}) : \delta(\nabla\mathbf{v}) \right\rangle \quad (\text{I.2.4})$$

Attention, en dehors du cas purement incompressible, (I.2.3) et (I.2.4) ne sont pas équivalentes. En effet, l'égalité n'est pas obtenue si  $\bar{\mathbf{I}} : \nabla\mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v} = \eta$  avec  $\eta \ll 1$ . Cela semble révéler qu'une part compressible subsisterait, cachée dans  $\mathbf{b}\mathbf{b}$ . Comme on le verra dans la partie II, cela impacte l'application de cette loi incompressible dans des simulations quasi-incompressibles. 

On remarque que cette correction dépend de  $p_{\parallel} - p_{\perp}$ , c'est à dire de  $\beta_{\parallel}(1 - a_p)$ . Dans le vent solaire, faiblement compressible, la correction d'ordre zéro à PP98 pourrait donc ne pas être les fluctuations de densité mais plutôt l'anisotropie de pression. La dépendance en  $\beta_{\parallel}(1 - a_p)$  rappelant toujours les critères d'instabilité, on s'est demandé quel effet pourrait avoir l'anisotropie de pression sur un modèle incompressible et si un tel modèle pourrait être instable. Mais aucune trace d'un modèle incompressible avec pression tensorielle n'a été trouvée dans la littérature. En fait, si l'on approche le problème sous un autre angle, celui des fermetures, on se rend compte que le cadre gyrotrope est habituellement abordé à travers la fermeture CGL. Ajouter une fermeture incompressible signifierait alors, surcontraindre le système : une équation de trop par rapport au nombre de variables. Cette équation deviendrait une équation de compatibilité qui devra être vérifiée par les solutions.

Par exemple, dans le cas linéaire, le modèle CGL donne l'équation de dispersion (I.2.19) que l'on va simplement noter  $\bar{\mathbf{M}}\mathbf{v}_1 = 0$ . Avec la contrainte incompressible  $\nabla \cdot \mathbf{v}_1 = 0$ , on peut écrire  $\mathbf{v}_1$  sous la forme d'un potentiel vecteur  $\Omega$  :  $\mathbf{v}_1 = \nabla \times \Omega = \bar{\mathbf{N}}\Omega$  avec 

$\bar{\mathbf{N}} = i\mathbf{k} \times \bar{\mathbf{I}} = i \begin{pmatrix} 0 & -k_{\parallel} & 0 \\ k_{\parallel} & 0 & -k_{\perp} \\ 0 & k_{\perp} & 0 \end{pmatrix}$ . Surcontraindre le modèle CGL via l'incompressibilité

s'exprime alors dans le cadre linéaire à travers l'équation de dispersion :  $\bar{\mathbf{M}}\bar{\mathbf{N}}\Omega = 0$  avec

$$\bar{\mathbf{M}}\bar{\mathbf{N}} = \begin{pmatrix} 0 & -k_{\parallel}(\frac{\omega^2 - \omega_A^2}{v_{A0}^2 k_{\parallel}^2} - (\frac{\beta_{\parallel 0}}{2} a_{p0} + 1)\frac{k_{\perp}^2}{k_{\parallel}^2}) & 0 \\ k_{\parallel} \frac{\omega^2 - \omega_A^2}{v_{A0}^2 k_{\parallel}^2} & 0 & -k_{\perp} \frac{\omega^2 - \omega_A^2}{v_{A0}^2 k_{\parallel}^2} \\ 0 & k_{\perp}(\frac{\omega^2}{v_{A0}^2 k_{\parallel}^2} - \frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(3 - a_{p0})) & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{I.2.5})$$

où  $\omega_A^2 = -v_{A0}^2 k_{\parallel}^2 (\frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0}) - 1)$  correspond au mode d'Alfvén incompressible gyrotrope impacté par l'instabilité firehose. On remarque que ce mode est solution si  $\Omega_y = 0$ , c'est-à-dire pour une polarisation de la vitesse orientée suivant  $(0, 1, 0)$ .

Contrairement au modèle incompressible MHD, où la solution alfvénique est la seule solution existante, une autre solution non triviale existe. Pour la trouver, on va considérer que  $\Omega_y \neq 0$ , l'équation de dispersion peut alors s'écrire sous la forme du système :

$$k_{\parallel}(\omega^2 - \omega_A^2 - v_{A0}^2(\frac{\beta_{\parallel 0}}{2} a_{p0} + 1)k_{\perp}^2) = 0 \quad (\text{I.2.6})$$

$$k_{\perp}(\omega^2 - v_{A0}^2 \frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(3 - a_{p0})k_{\parallel}^2) = 0 \quad (\text{I.2.7})$$

$$k_{\parallel}\Omega_x - k_{\perp}\Omega_z = 0 \quad (\text{I.2.8})$$

On va étudier ce système en fonction de l'angle  $\theta$  de propagation :

- $\theta = 0^\circ \Rightarrow k_\perp = 0$  et on suppose  $k_\parallel \neq 0$ , alors  $\omega^2 = \omega_A^2$  et  $\Omega_x = 0$ . On retrouve le mode firehose parallèle et le champ de vitesse sera polarisé suivant  $(1, 0, 0)$ .
- $\theta = 90^\circ \Rightarrow k_\parallel = 0$  et on suppose  $k_\perp \neq 0$ , alors  $\omega^2 = 0$  et  $\Omega_z = 0$ . On obtient un mode qui ne se propage pas et un champ de vitesse polarisé suivant  $(0, 0, 1)$ .
- Si  $k_\parallel \neq 0$  et  $k_\perp \neq 0$ , alors  $\omega^2 = v_{A0}^2 \frac{\beta_{\parallel 0}}{2} (3 - a_{p0}) k_\parallel^2$  et  $\theta$  doit vérifier  $\tan^2 \theta = \frac{2(\beta_{\parallel 0}(2-a_{p0})-1)}{\beta_{\parallel 0}a_{p0}+2}$ . La polarisation du champ de vitesse est alors  $(1, 0, -\tan \theta)$ .

Imposer l'incompressibilité dans le système CGL semble donc contraindre les modes magnétosoniques suivant certaines directions de propagation :  $k_\perp = 0$  ou  $\tan^2 \theta = \frac{2(\beta_{\parallel 0}(2-a_{p0})-1)}{\beta_{\parallel 0}a_{p0}+2}$ .

Si l'on suppose l'isotropie de pression dans le dernier mode, on trouve un mode sonore :  $\omega^2 = 2k_\parallel^2 \frac{p_0}{\rho_0}$ .

La survie du mode d'Alfvén-firehose, si le modèle CGL incompressible est viable, indique que  $\beta_{\parallel}(1-a_p)$  présent dans la correction de la loi PP98, pourrait refléter l'instabilité firehose dans la dynamique turbulente. Cette observation apporte une nouvelle piste de travail : que deviendrait la turbulence Alfvénique étudiée massivement jusqu'à présent quand on change le mode d'Alfvén par le firehose ?

## 2.2 Proposition d'un modèle incompressible gyrotrope non surcontraint

Le modèle **CGL incompressible** étant surcontraint, la question de sa viabilité reste à confirmer. On s'est alors demandé à quoi pourrait ressembler un modèle **incompressible gyrotrope** qui ne serait pas sur-contraint. Il serait a priori constitué de l'équation sur la vitesse (I.1.2) et de l'équation d'induction (I.1.4) avec  $\rho$  constant et  $\overline{\mathbf{P}}$  gyrotrope, de la fermeture  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$  et d'une autre équation de fermeture. Différentes possibilités sont envisageables pour cette équation de fermeture supplémentaire : garder l'une des équations de pression ((I.1.24) ou (I.1.25)) ou considérer une combinaison linéaire de ces équations. Afin de maintenir la cohérence avec la définition de l'énergie interne telle que  $u = \frac{1}{2\rho_0}(2p_\perp + p_\parallel)$ , nous avons décidé de fermer le système avec l'équation sur la trace du tenseur de pression (I.1.5). Ce système est donc compatible avec la loi exacte (??). Afin de se faire une petite idée de son comportement, voici ci-après une analyse linéaire.

Le modèle incompressible gyrotrope envisagé est :

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \nabla \cdot \mathbf{v}_A = 0 \quad (I.2.9)$$

$$\partial_t \mathbf{v} + \nabla \cdot (\mathbf{v}\mathbf{v} - \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A + \frac{1}{\rho_0} \overline{\mathbf{P}}_*) = 0 \quad (I.2.10)$$

$$\partial_t p + \nabla \cdot (p\mathbf{v}) + \frac{2}{3} \overline{\mathbf{\Pi}} : \nabla \mathbf{v} = 0 \quad (I.2.11)$$

$$\partial_t \mathbf{v}_A - \nabla \cdot (\mathbf{v}_A \mathbf{v} - \mathbf{v} \mathbf{v}_A) = 0 \quad (I.2.12)$$

avec :

$$\overline{\mathbf{P}} = p\overline{\mathbf{I}} + \overline{\mathbf{\Pi}} = \frac{1}{3}(2p_\perp + p_\parallel)\overline{\mathbf{I}} + (p_\parallel - p_\perp)(\mathbf{b}\mathbf{b} - \frac{1}{3}\overline{\mathbf{I}})$$

$$\nabla \cdot \overline{\mathbf{P}}_* = \nabla(p_\perp + \frac{1}{2}\rho_0 \mathbf{v}_A^2) + \mathbf{b}\mathbf{b} \cdot \nabla(p_\parallel - p_\perp) + (p_\parallel - p_\perp) \frac{1}{\mathbf{v}_A^2} (\mathbf{v}_A \cdot \nabla \mathbf{v}_A - 2\mathbf{v}_A \mathbf{b}\mathbf{b} : \nabla \mathbf{v}_A)$$

$$\overline{\mathbf{\Pi}} : \nabla \mathbf{v} = (p_\parallel - p_\perp) \mathbf{b}\mathbf{b} : \nabla \mathbf{v}$$

La forme linéaire de ce système d'équations obtenue en suivant la méthode résumée section ?? de l'Introduction est :

$$0 = k_{\perp} v_{1x} + k_{\parallel} v_{1z} \quad (\text{I.2.13})$$

$$0 = -\omega v_{1x} + \frac{p_{\perp 1}}{\rho_0} k_{\perp} + \left( \frac{p_{\parallel 0} - p_{\perp 0}}{\rho_0 v_{A0}^2} - 1 \right) v_{A0} k_{\parallel} v_{A1x} + v_{A0} k_{\perp} v_{A1z} \quad (\text{I.2.14})$$

$$0 = -\omega v_{1y} + \left( \frac{p_{\parallel 0} - p_{\perp 0}}{\rho_0 v_{A0}^2} - 1 \right) v_{A0} k_{\parallel} v_{A1y} \quad (\text{I.2.15})$$

$$0 = -\omega v_{1z} + \frac{p_{\parallel 1}}{\rho_0} k_{\parallel} - \frac{p_{\parallel 0} - p_{\perp 0}}{\rho_0 v_{A0}^2} v_{A0} k_{\parallel} v_{A1z} \quad (\text{I.2.16})$$

$$0 = -\omega(2p_{\perp 1} + p_{\parallel 1}) + 2(p_{\parallel 0} - p_{\perp 0}) k_{\parallel} v_{1z} \quad (\text{I.2.17})$$

$$0 = -\omega \mathbf{v}_{A1} - k_{\parallel} v_{A0} \mathbf{v}_1 \quad (\text{I.2.18})$$

Après quelques manipulations, ce système peut s'écrire sous l'équation de dispersion  $\overline{\mathbf{M}} \cdot \mathbf{v}_1 = 0$  avec la matrice

$$\overline{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} k_{\perp} & 0 & k_{\parallel} \\ 0 & \omega^2 - F v_{A0}^2 k_{\parallel}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2(k_{\perp}^2 - 2k_{\parallel}^2) - (G k_{\perp}^2 + 2F k_{\parallel}^2) v_{A0}^2 k_{\parallel}^2 \end{pmatrix} \quad (\text{I.2.19})$$

En notant  $F = 1 - \frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0})$  et  $G = 3\frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0}) - 2$ .

La relation de dispersion est donc :

$$(\omega^2 - F v_{A0}^2 k_{\parallel}^2)(\omega^2(k_{\perp}^2 - 2k_{\parallel}^2) - (G k_{\perp}^2 + 2F k_{\parallel}^2) v_{A0}^2 k_{\parallel}^2) = 0 \quad (\text{I.2.20})$$

On retrouve le mode d'Alfvén incompressible firehose  $\omega_A^2 = F v_{A0}^2 k_{\parallel}^2$  polarisé suivant  $(0, 1, 0)$  et nouveau mode apparaît,  $\omega_N^2 = \frac{G k_{\perp}^2 + 2F k_{\parallel}^2}{k_{\perp}^2 - 2k_{\parallel}^2} v_{A0}^2 k_{\parallel}^2$ , polarisé suivant  $(1, 0, -\tan \theta)$ . Nous allons l'étudier ce dernier dans la section 3.4.

Les autres quantités peuvent s'écrire en fonction de  $\mathbf{v}_1$  :

$$\mathbf{v}_{A1} = -\frac{k_{\parallel} v_{A0}}{\omega} \mathbf{v}_1 \quad (\text{I.2.21})$$

$$p_{\parallel 1} = \frac{\rho_0}{k_{\parallel} \omega} (\omega^2 + (F - 1) v_{A0}^2 k_{\parallel}^2) \quad (\text{I.2.22})$$

$$p_{\perp 1} = \frac{\rho_0}{k_{\perp}^2 \omega} k_{\parallel} (\omega^2 - (F k_{\parallel}^2 + k_{\perp}^2) v_{A0}^2) \quad (\text{I.2.23})$$

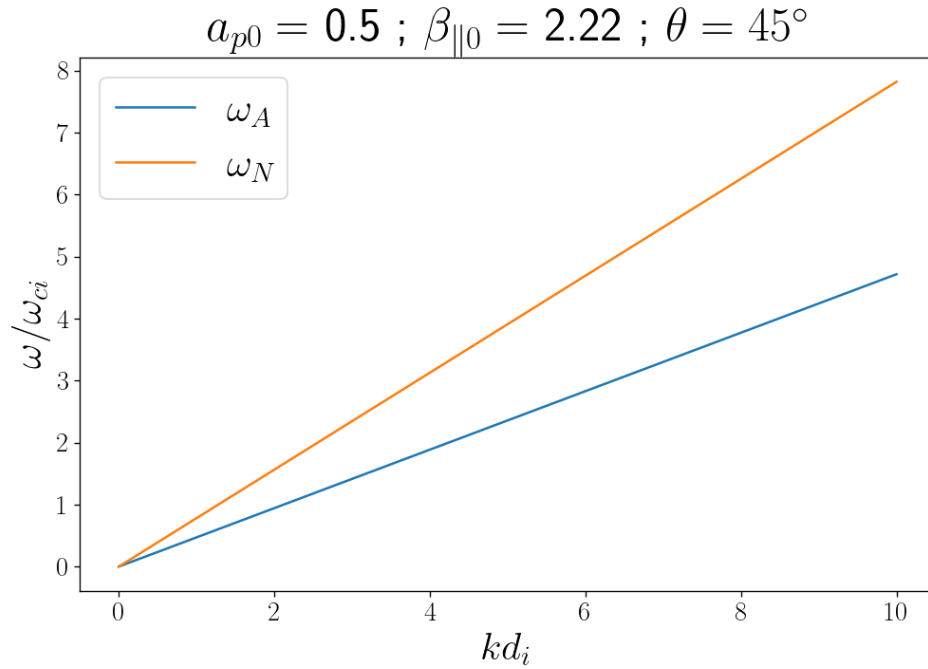
## 2.3 Etude paramétrique des modes linéaires du modèle incompressible gyrotrope

La linéarisation du système d'équation incompressible gyrotrope proposé a abouti sur deux modes que l'on peut exprimer en fonction de  $\theta$  :

- le mode d'Alfvén-firehose :  $\omega^2 = \omega_A^2$  avec  $\frac{\omega_A^2}{v_{A0}^2 k^2} = F \cos^2 \theta$  et  $F = 1 - \frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0})$ ,
- un nouveau mode :  $\omega^2 = \omega_N^2$  avec  $\frac{\omega_N^2}{v_{A0}^2 k^2} = \frac{G \sin^2 \theta - 2F \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta - 2 \cos^2 \theta} \cos^2 \theta$  et  $G = 3\frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0}) - 2$

Tout comme le mode d'Alfvén-firehose qui s'écrit  $\omega_A = \pm \sqrt{F} v_{A0} k \cos \theta$ , le nouveau mode

est linéaire en  $v_{A0}k$  avec une pente dépendant de  $\theta$ ,  $a_{p0}$  et  $\beta_{\parallel 0}$ . Ils sont représentés sur la figure I.2.1 normalisé par  $\omega_{ci}$  la pulsation cyclotron des ions, et en fonction de  $kd_i = kv_{A0}/\omega_{ci}$  avec  $d_i$  la longueur inertielle ionique.



**FIGURE** I.2.1 – Mode d’Alfvén-firehose ( $\omega_A$ , bleu) et nouveau mode ( $\omega_N$ , orange) normalisés par  $\omega_{ci}$  la pulsation cyclotron des ions et représentés en fonction de  $kd_i$ , avec  $d_i = v_{A0}/\omega_{ci}$ , la longueur inertielle ionique.

La stabilité de ces modes se résume au caractère réel ou imaginaire de la pente  $\frac{\omega}{v_{A0}k}$ . Pour le mode d’Alfvén-firehose, la pente  $\sqrt{F} \cos \theta$  est imaginaire si  $F < 0$  (instabilité firehose). Le critère d’instabilité ne dépend donc que de  $a_{p0}$  et  $\beta_{\parallel 0}$ . L’étude de la stabilité du nouveau mode est plus compliquée. Elle dépend, en plus de  $a_{p0}$  et  $\beta_{\parallel 0}$ , de  $\theta$ . Pour l’étudier, j’ai sélectionné six couples  $\{\beta_{\parallel 0}; a_{p0}\}$ , indiqués par les croix rouges sur le diagramme  $a_{p0} - \beta_{\parallel 0}$  de la figure I.2.2. Les éléments apparaissant sur cette figure seront expliqués petits à petits.

Sur l’ensemble de graphiques de la figure I.2.3 sont tracés en fonction de  $\theta$ , pour chacun des couples sélectionnés et chaque mode, la partie réelle de la pente qui correspond à la vitesse de phase normalisée par la vitesse d’Alfvén de l’onde ( $\Re[\omega/(kv_{A0})]$ , colonne a), ainsi que sa partie imaginaire ( $\Im[\omega/(kv_{A0})]$ , colonne a), qui correspond au taux de croissance des instabilités. Ces graphiques serviront à illustrer les différentes situations rencontrées dans la démonstration des critères d’instabilités du nouveau mode.

**Etude asymptotique préliminaire de l’instabilité du nouveau mode :** Si  $\theta \rightarrow 0^\circ$  ( $k_{\parallel} \ll k_{\perp}$ ),  $\frac{\omega_N^2}{v_{A0}^2 k^2} \rightarrow F \cos^2 \theta$ . On s’attend donc à voir converger lorsque  $\theta \rightarrow 0$ , le nouveau mode ( $\omega_N$ , courbes vertes) vers le mode d’Alfvén ( $\omega_A$ , courbes bleues). C’est en effet le cas pour chaque couple. Ils sont même superposés pour le couple (3) (graphique (3a)). Pour le couple (1), choisi tel que  $F < 0$ , cette convergence apparaît dans la colonne du taux de croissance (graphique (1b)). On retrouve ainsi l’instabilité firehose «parallèle».

Si  $\theta \rightarrow 90^\circ$  ( $k_{\perp} \ll k_{\parallel}$ ),  $\frac{\omega_N^2}{v_{A0}^2 k^2} \rightarrow G \cos^2 \theta$ . Ce mode asymptotique sera noté  $\omega_P$  et est tracé en orange sur la figure I.2.3. Cette convergence est observée pour l’ensemble des

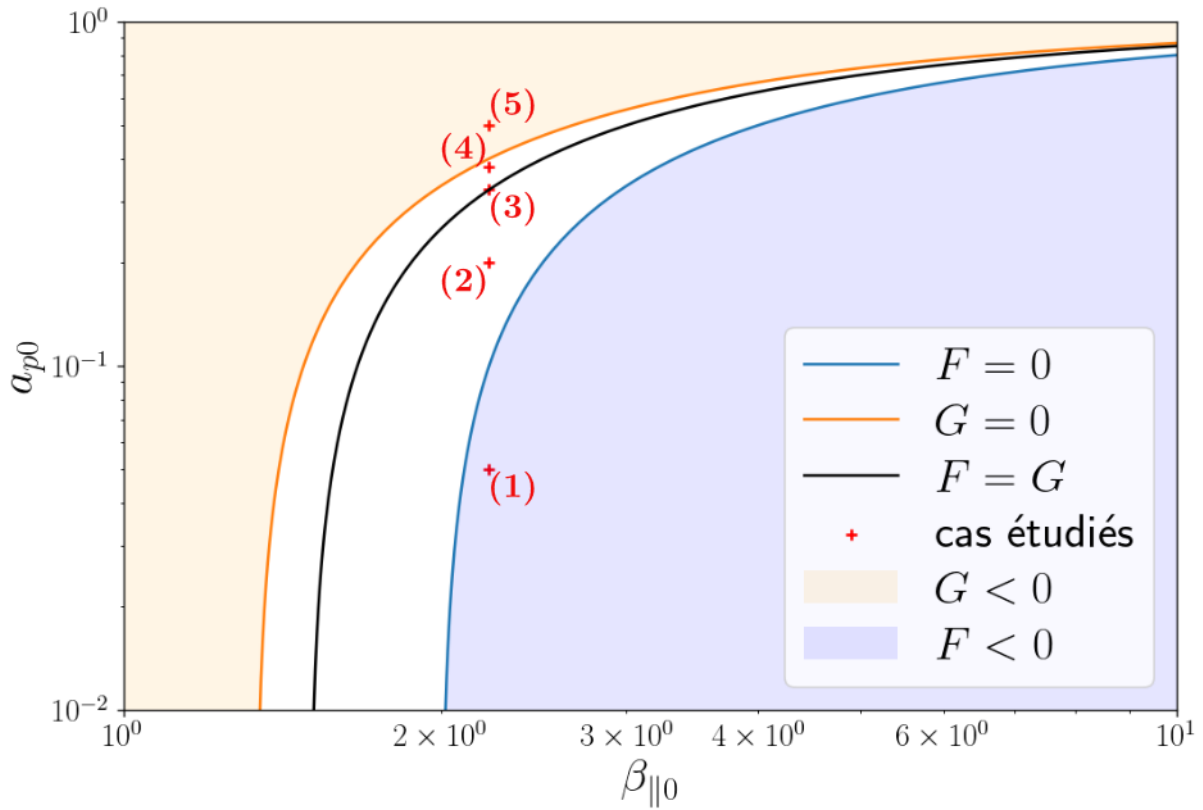


FIGURE I.2.2 – Diagramme  $a_{p0} - \beta_{\parallel 0}$ . Croix rouges : couples  $\{\beta_{\parallel 0}; a_{p0}\}$  sélectionnés pour l'étude paramétrique de la figure I.2.3. Frontière d'instabilités firehose  $F = 0$  (bleu) et zone instable ( $F < 0$ , bleue) associée. Frontière d'instabilités firehose perpendiculaire  $G = 0$  (orange) et zone instable ( $G < 0$ , orange) associée. Ligne noire : ensemble des couples  $\{\beta_{\parallel 0}; a_{p0}\}$  stable pour tout angle  $\theta$  paramétrisé par  $F = G$ .

couples sélectionnés. Il est instable si  $G < 0$ . La comparaison de  $G$  et  $F$ , qui ont la même structure à un facteur  $3/2$  et un signe près, nous inspirant, on appellera cette instabilité «instabilité firehose perpendiculaire»<sup>1</sup>. Elle apparaît pour le couple (5) (graphique (5b)).

Ainsi grâce à  $F$  et  $G$ , on peut déduire qu'une instabilité pourra se développer dans le système pour tout couple  $\{\beta_{\parallel 0}; a_{p0}\}$  tel que  $\frac{2}{3} > \frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0})$  (instabilité firehose perpendiculaire, couple (5) et aire orange sur la figure I.2.2) ou  $\frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0}) > 1$  (instabilité firehose parallèle, couple (1) et aire bleue sur la figure I.2.2). On remarque que si  $G = 0$ ,  $F = 1/3$  et si  $F = 0$ ,  $G = 1$ . Donc dans la zone intermédiaire (blanche sur la figure I.2.2),  $G > 0$  et  $F > 0$ .

**Etude angulaire complète de l'instabilité du nouveau mode :** Pour les angles  $\theta$  plus obliques, les conditions de stabilité de  $\omega_N$  sont plus difficiles à établir, le signe de  $\sin^2 \theta - 2 \cos^2 \theta$  venant compenser le signe de  $G \sin^2 \theta - 2F \cos^2 \theta$ . Une instabilité, entre l'instabilité firehose parallèle et l'instabilité firehose perpendiculaire, pourra émerger. On la nommera «instabilité firehose oblique». Elle apparaît pour les couples (2) (graphique (2b)) et (4) (graphique (4b)). La condition d'instabilité est obtenue pour  $\beta_{\parallel 0}$  et  $a_{p0}$  tel

1. Cette dénomination n'est proposée qu'à cause de la similarité des critères d'instabilités. Le comportement des quantités n'a pas été vérifié.

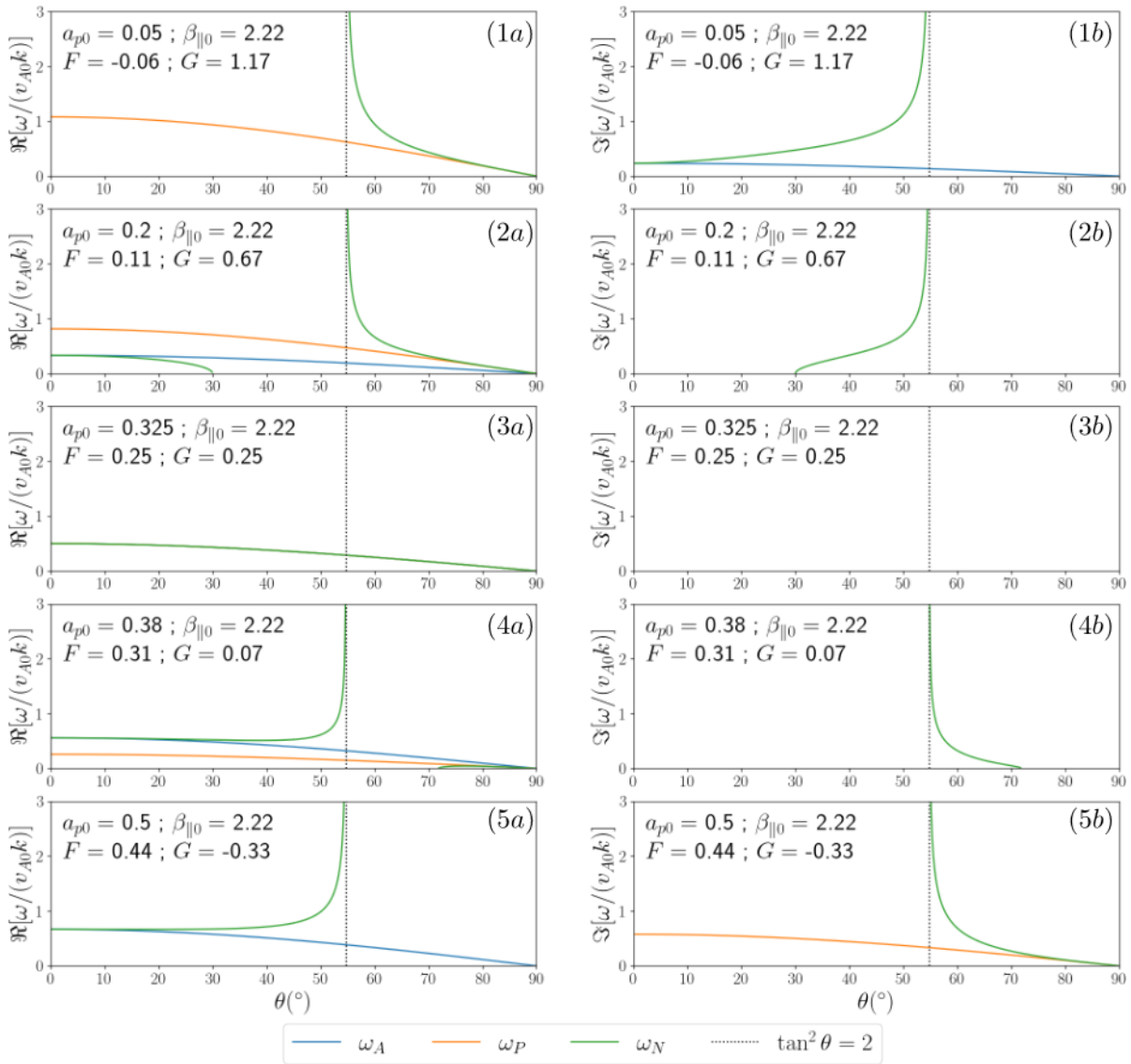


FIGURE I.2.3 – Vitesse de phase  $\Re[\omega/(kv_{A0})]$  (colonne a) et taux de croissance des instabilités  $\Im[\omega/(kv_{A0})]$  (colonne b) normalisés par  $v_{A0}$  en fonction de l'angle  $\theta$  pour le modes d'Alfvén ( $\omega_A$ , bleu), pour le nouveau mode incompressible ( $\omega_N$ , vert) et le mode asymptotique ( $\omega_P$ , orange). Première ligne : couple (1) tel que  $a_{p0} = 0.05$ ,  $\beta_{\parallel 0} = 20/9 \Rightarrow$  instabilité firehose ( $F < 0$ ). Deuxième ligne : couple (2) tel que  $a_{p0} = 0.2$ ,  $\beta_{\parallel 0} = 20/9$ . Troisième ligne : couple (3) tel que  $a_{p0} = 0.325$ ,  $\beta_{\parallel 0} = 20/9 \Rightarrow$  seul cas stable pour tout  $\theta$  ( $F = G$ ). Quatrième ligne : couple (4) tel que  $a_{p0} = 0.38$ ,  $\beta_{\parallel 0} = 20/9$ . Cinquième ligne : couple (5) tel que  $a_{p0} = 0.5$ ,  $\beta_{\parallel 0} = 20/9 \Rightarrow$  instabilité firehose perpendiculaire ( $G < 0$ ).

que :

$$(\tan^2 \theta - 2)(G \tan^2 \theta - 2F) < 0 \quad (\text{I.2.24})$$

$g(\theta) = (\tan^2 \theta - 2)(G \tan^2 \theta - 2F)$  est une parabole présentant deux racines :

- $\tan^2 \theta = 2$  en laquelle  $\omega_N^2 \rightarrow \infty$  (asymptote verticale indiquée en pointillés sur la figure I.2.3), on la note  $\theta_2$ ,



—  $\tan^2 \theta = 2\frac{F}{G}$  en laquelle  $\omega_N^2 \rightarrow 0$ , on la note  $\theta_{F/G}$ .

La stabilité du nouveau mode dépendra donc de la position de  $\theta$  par rapport à  $\theta_2$  et  $\theta_{F/G}$ .

Si  $F = G$ ,  $g(\theta) = (\tan^2 \theta - 2)^2 > 0$ . Dans ce cas, le nouveau mode est stable pour tout  $\theta$  et  $\omega_N = \omega_A = \omega_P$ . Sur la figure I.2.2, ce critère, qui s'écrit aussi  $\frac{3}{4} = \frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0})$ , est indiquée par la courbe noire et il est illustré par le couple (3) (graphiques (3a) et (3b)).

$F = G$ ,  $G = 0$  et  $F = 0$  découpent le diagramme de la figure I.2.2 en quatre zones que l'on va étudier séparément.

Si  $G < 0$  (zone orange), alors  $F > 0$ . Dans ce cas,  $g(\theta) < 0$  si  $\theta > \theta_2$ . Cette situation est illustrée par le couple (5) (graphiques (5a) et (5b)), instable pour tout angle supérieur à  $\theta_2$ . On peut raccrocher à cette condition le cas  $G = 0$  puisque alors  $F = 1/3$ , et la parabole sera négative si  $\tan^2 \theta > 2$ . Dans ces cas, on retrouve l'instabilité firehose perpendiculaire découverte asymptotiquement si  $\theta \rightarrow 90^\circ$ . On peut maintenant compléter ses conditions d'existence qui deviennent : **l'instabilité firehose perpendiculaire peut se développer si  $G < 0$  pour tout angle  $\theta > \theta_2$ .**

Si  $G > 0$  et  $F/G > 1$  (zone blanche délimitée par les courbes orange et noire),  $g(\theta) < 0$  si  $2\frac{F}{G} > \tan^2 \theta > 2$ . Cette situation est illustrée par le couple (4) (graphiques (4a) et (4b)). L'instabilité s'y développant est l'instabilité firehose oblique.

Si  $G > 0$  et  $F/G < 1$  (zone blanche délimitée par les courbes bleue et noire et zone bleue),  $g(\theta) < 0$  si  $2 > \tan^2 \theta > 2\frac{F}{G}$ . **Si  $F < 0$ , l'instabilité firehose parallèle se développe pour tout angle  $\theta < \theta_2$ .** Ce cas est illustré par le couple (1) (graphiques (1a) et (1b)). Si  $F > 0$ , la situation est illustrée par le couple (2) (graphiques (2a) et (2b)). L'instabilité visible est encore une fois l'instabilité firehose oblique. Sa condition d'apparition est donc : **l'instabilité firehose perpendiculaire peut se développer si  $G > 0$  et  $F > 0$  mais  $G \neq F$ , pour tout angle  $\theta$  entre  $\theta_2$  et  $\theta_{F/G}$ .**

La zone de stabilité de ce système en fonction des paramètres  $\beta_{\parallel 0}$  et  $a_{p0}$  est donc quasi-inexistante. Sachant que la problématique principale de ce travail se place dans le cadre compressible, l'implémentation de ce modèle ou la recherche d'un modèle alternatif plus stable afin d'étudier plus rigoureusement la loi exacte incompressible n'ont pas été engagés. Nous pouvons tout de même utiliser ce modèle afin d'estimer l'importance du terme correctif.

Si l'on imagine une situation dans laquelle  $\frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_p)$  serait quasiment constant, alors le terme correctif de la loi exacte à l'ordre 0 pourra s'écrire :

$$-4(\varepsilon - \varepsilon_{PP98}) = -2 \left\langle \delta \left( \frac{\beta_{\parallel 0}}{2} (1 - a_p) \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A \right) : \delta(\nabla \mathbf{v}) \right\rangle \quad (\text{I.2.25})$$

$$\simeq -2 \frac{\beta_{\parallel 0}}{2} (1 - a_{p0}) \langle \delta(\mathbf{v}_A \mathbf{v}_A) : \delta(\nabla \mathbf{v}) \rangle \quad (\text{I.2.26})$$

Dans le cas linéairement stable de notre modèle incompressible ( $\frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0}) = \frac{3}{4}$ ), cela donne :

$$-4(\varepsilon - \varepsilon_{PP98}) \simeq -\frac{3}{2} \langle \delta(\mathbf{v}_A \mathbf{v}_A) : \delta(\nabla \mathbf{v}) \rangle \quad (\text{I.2.27})$$

Si  $\langle \delta(\mathbf{v}_A \mathbf{v}_A) : \delta(\nabla \mathbf{v}) \rangle$  devient de l'ordre de grandeur de  $\varepsilon_{PP98}$ , on pourra s'attendre à une correction de l'ordre de  $3/8$ , c'est-à-dire d'environ un tiers, de  $\varepsilon_{PP98}$ . Cette estimation, très incertaine, montre que la correction due à l'anisotropie de pression dans le système incompressible pourrait avoir son importance dans l'estimation du taux de chauffage turbulent.



## 2.4 Synthèse : Limite incompressible et pistes d'étude

**Limite incompressible de la loi exacte avec pression tensorielle et cas gyrotrope :**

$$-4(\varepsilon - \varepsilon_{PP98}) = -2 \langle \delta(\bar{\mathbf{P}} - p\bar{\mathbf{I}}) : \delta(\nabla \mathbf{v}) \rangle = -2 \langle \delta\bar{\mathbf{\Pi}} : \delta(\nabla \mathbf{v}) \rangle \quad (\text{I.2.28})$$

$$-4(\varepsilon - \varepsilon_{PP98}) = -2 \left\langle \delta((p_{\parallel} - p_{\perp})(\mathbf{b}\mathbf{b} - \frac{1}{3}\bar{\mathbf{I}})) : \delta(\nabla \mathbf{v}) \right\rangle \quad (\text{I.2.29})$$

⇒ Questionne l'existence d'un modèle incompressible gyrotrope.

**Modèle CGL incompressible**

- Modèle surcontraint (est-il viable?)
- Survie du mode d'Alfvén-firehose

⇒ Que devient la turbulence alfvénique si l'on altère le mode d'Alfvén afin d'obtenir un mode d'Alfvén-firehose?

**Modèle incompressible avec pression gyrotrope proposé pour l'étude numérique de turbulence incompressible :**

$$\partial_t \mathbf{v} + \nabla \cdot (\mathbf{v}\mathbf{v} - \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A + \frac{1}{\rho_0} \bar{\mathbf{P}}_*) = 0 \quad (\text{I.2.30})$$

$$\partial_t p + \nabla \cdot (p\mathbf{v}) + \frac{2}{3} \bar{\mathbf{\Pi}} : \nabla \mathbf{v} = 0 \quad (\text{I.2.31})$$

$$\partial_t \mathbf{v}_A - \nabla \cdot (\mathbf{v}_A \mathbf{v} - \mathbf{v} \mathbf{v}_A) = 0 \quad (\text{I.2.32})$$

$$\text{avec } \bar{\mathbf{P}}_* = (p + p_m)\bar{\mathbf{I}} + \bar{\mathbf{\Pi}}, \quad p_m = \frac{\rho_0 |\mathbf{v}_A|^2}{2}, \quad p = \frac{1}{3}(2p_{\perp} + p_{\parallel}),$$

$$\bar{\mathbf{\Pi}} = (p_{\parallel} - p_{\perp})(\mathbf{b}\mathbf{b} - \frac{1}{3}\bar{\mathbf{I}}), \quad \mathbf{b} = \frac{\mathbf{v}_A}{|\mathbf{v}_A|}, \quad \text{et } \nabla \cdot \mathbf{v} = 0.$$

**Etude linéaire du modèle proposé :**

- Mode d'Alfvén incompressible polarisé suivant  $(0, 1, 0)$  :

$$\frac{\omega^2}{v_{A0}^2 k_{\parallel}^2} + \frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0}) - 1 = 0 \quad (\text{I.2.33})$$

$$\text{Instabilité firehose : } \frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0}) - 1 > 0 \quad (\text{I.2.34})$$

- Nouveau mode polarisé suivant  $(1, 0, -\tan \theta)$  :

$$\frac{\omega^2}{v_{A0}^2 k_{\parallel}^2} - \frac{2(\frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0}) - 1) \cos^2 \theta + (3\frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0}) - 2) \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta - 2 \cos^2 \theta} = 0 \quad (\text{I.2.35})$$

$$\text{Critère d'instabilité (type firehose ?) : } \frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0}) \neq \frac{3}{4} \quad (\text{I.2.36})$$

⇒ Ce modèle n'admet quasiment pas de zone de stabilité.

Les questions posées dans cette synthèse n'ont pas été traitées... pour l'instant.