
PARTIE II : Etude analytique de l'effet de l'anisotropie de pression

*La collision de tous les sentiments
contradictaires qui l'agitaient avait produit la
neutralité, et aucun d'eux n'était capable de
lui communiquer le mouvement.*

Thomas HARDY⁷ (1849-1927), artiste,
écrivain, poète, romancier

7. LOIN DE LA FOULE DÉCHAINÉE, publiée en version originale anglaise en 1874

Les fonctions de distributions en vitesse des ions observées dans le vent solaire sont généralement anisotrope le long des directions parallèle et perpendiculaires au champ magnétique (**marsch_pronounced_1981** ; MATTEINI *et al.* 2007 ; BALE *et al.* 2009). Le champ magnétique, interagissant avec les ions, rend le milieu anisotrope et les collisions, trop peu nombreuses, échouent à l'isotropiser. Ce type d'anisotropie a tout d'abord été modélisé par CHEW *et al.* 1956 à travers une pression de forme tensorielle et diagonale (gyrotrope) et supposant l'isentropie du modèle. Ce modèle, nommé CGL en hommage aux auteurs, sera présenté plus en détail dans le chapitre 4 de cette deuxième partie. Il y sera accompagné de l'extension de la théorie de Kolmogorov proposée prenant en compte un tenseur de pression. Dans le chapitre 5, nous nous poserons la question suivante : l'incompressibilité est-elle compatible avec la gyrotropie de pression ? Et dans le 6, nous généraliserons la loi pour la MHD au modèle bi-fluide.

Dans cette partie qui concentre le cœur analytique du travail effectué, nous conserverons l'hypothèse d'une zone inertielle isentropie et nous ne regarderons pas en détail l'impact sur la cascade des composantes non gyrotrope du tenseur de pression.

Sommaire

4.1	D'un tenseur de pression dans le modèle fluide au modèle CGL	39
4.2	Instabilités linéaires et potentiel impact sur la turbulence du vent solaire	41
4.3	Loi exacte générale pour pression tensorielle et réduction au modèle CGL	44
4.4	Synthèse de l'étude analytique de turbulence compressible avec pression tensorielle et modèle CGL	49

Dans le vent solaire, utiliser un modèle MHD compressible avec pression isotrope peut s'avérer ardu à justifier en présence d'un champ magnétique et d'un faible nombre de collisions. Il faut prendre en compte, à minima, une pression gyrotrope par exemple en utilisant le modèle dit «CGL». C'est le but de ce chapitre : décrire la cascade turbulente d'énergie totale à travers une loi exacte associée au modèle CGL. Encore une fois, on ne réduira le champ d'application qu'après avoir obtenu une loi plus générale, valable pour tout tenseur de pression. Les nouveaux résultats exposés ici ont fait l'objet principal de l'article SIMON et SAHRAOUI 2022.

4.1 D'un tenseur de pression dans le modèle fluide au modèle CGL

Dans le cadre général défini à partir de l'équation de Vlasov et menant au modèle MHD, la pression et le flux de chaleur sont définis comme des tenseurs d'ordre 2 et 3 respectivement. La pression, $\overline{\mathbf{P}}$, est un tenseur symétrique obtenu en effectuant le produit de deux vecteurs vitesse tandis que le flux de chaleur s'obtient à partir du produit de trois vecteurs vitesse.

Dans la partie I, la pression était supposée isotrope, c'est à dire $\overline{\mathbf{P}} = p\overline{\mathbf{I}}$ avec $\overline{\mathbf{I}}$ le tenseur identité. Dans le modèle CGL, elle est définie comme gyrotrope dans la direction favorisée par le champ magnétique, notée \mathbf{b} . On considère donc deux pressions, une dite parallèle p_{\parallel} et une perpendiculaire p_{\perp} et dans un repère cartésien orienté tel que \mathbf{b} coïncide avec la direction \mathbf{e}_z , le tenseur s'écrit :

$$\overline{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} p_{\perp} & 0 & 0 \\ 0 & p_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & p_{\parallel} \end{pmatrix}$$

Plus généralement, on peut l'écrire : $\overline{\mathbf{P}} = p_{\perp}\overline{\mathbf{I}} + (p_{\parallel} - p_{\perp})\mathbf{b}\mathbf{b}$. La partie isotrope de

la pression est obtenue en faisant le produit dual ":" entre $\overline{\mathbf{P}}$ et $\overline{\mathbf{I}}$, ce qui revient à considérer la trace de $\overline{\mathbf{P}}$. Ainsi : $p = \frac{1}{3} \overline{\mathbf{P}} : \overline{\mathbf{I}} = \frac{1}{3} (2p_{\perp} + p_{\parallel})$. Cela permet de réécrire le tenseur de pression en séparant la partie isotrope de la composante dite anisotrope : $\overline{\mathbf{P}} = p\overline{\mathbf{I}} + (p_{\parallel} - p_{\perp}) (\mathbf{bb} - \frac{1}{3}\overline{\mathbf{I}})$, on notera la composante anisotrope $\overline{\Pi}$. Dans le cas général non-gyrotrope, d'autres composantes apparaissent. On n'abordera pas leur détail et on les résumera simplement par la notation $\overline{\Pi}_{ng}$. D'après CASSAK et BARBHUIYA 2022, $\overline{\Pi} = (p_{\parallel} - p_{\perp}) (\mathbf{bb} - \frac{1}{3}\overline{\mathbf{I}}) + \overline{\Pi}_{ng}$ contribue à la déformation incompressible du fluide par compression/expansion et cisaillement à travers le terme $\overline{\mathbf{P}} : \nabla \mathbf{v}$ tandis que p résulte en sa dilatation, compressible. En mécanique des fluides, ces termes de pression anisotrope sont souvent une réécriture des termes de dissipation visqueuse d'où leur interprétation dissipative.

On rappelle le modèle non fermé dépendant des moments $\rho, \mathbf{v}, \overline{\mathbf{P}}$ et $\overline{\mathbf{q}}$ et de la loi d'Ohm idéale exprimée à travers l'équation d'induction (II.4.4) :

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (\text{II.4.1})$$

$$\partial_t (\rho \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v} - \rho \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A) + \nabla \overline{\mathbf{P}}_* = 0 \quad (\text{II.4.2})$$

$$\partial_t \overline{\mathbf{P}} + \nabla \cdot (\mathbf{v} \overline{\mathbf{P}}) + (\overline{\mathbf{P}} \cdot \nabla \mathbf{v})^S + \Omega_g (\mathbf{b} \times \overline{\Pi}_{ng})^S = -\nabla \cdot \overline{\mathbf{q}} \quad (\text{II.4.3})$$

$$\partial_t \mathbf{v}_A - \nabla \cdot (\mathbf{v}_A \mathbf{v} - \mathbf{v} \mathbf{v}_A) + \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{v}_A - \frac{\mathbf{v}_A}{2} \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (\text{II.4.4})$$

sachant que $\mathbf{b} \times \overline{\mathbf{I}} = 0$ et $\mathbf{b} \times \mathbf{bb} = 0$, et en notant $\overline{\mathbf{P}}_* = \overline{\mathbf{P}} + p_m \overline{\mathbf{I}}$, le tenseur de pression totale. Aucune hypothèse sur la forme des tenseurs de pression et flux de chaleur n'est faite dans ce modèle.

Ce modèle peut nous servir à obtenir une loi exacte générale sur l'énergie totale applicable sous l'hypothèse d'une cascade isentrope, quelle que soit la forme de la pression et du flux de chaleur. En effet, comme dans le cas avec pression isotrope, l'équation (II.4.3) ne servira pas dans la dérivation de la loi exacte. On utilisera seulement l'équation d'énergie interne que l'on peut obtenir à partir de l'équation sur la composante isotrope du tenseur de pression :

$$\partial_t p + \nabla \cdot (p \mathbf{v}) + \frac{2}{3} \overline{\mathbf{P}} : \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{3} \nabla \cdot (\overline{\mathbf{q}} : \overline{\mathbf{I}}) \quad (\text{II.4.5})$$

puisque $\overline{\Pi}_{ng}$ étant symétrique ($\mathbf{b} \times \overline{\Pi}_{ng}$) : $\overline{\mathbf{I}} = 0$. L'énergie interne sera définie par $\rho u = \frac{1}{2} \overline{\mathbf{P}} : \overline{\mathbf{I}} = \frac{3}{2} p = \frac{1}{2} (2p_{\perp} + p_{\parallel})$, la dernière formulation étant associée au cas particulier gyrotrope (HAZELTINE *et al.* 2013). On retrouve donc l'équation (??) écrite pour un tenseur de pression quelconque :

$$\partial_t (\rho u) + \nabla \cdot (\rho u \mathbf{v}) + \overline{\mathbf{P}} : \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{2} \nabla \cdot (\overline{\mathbf{q}} : \overline{\mathbf{I}}) \quad (\text{II.4.6})$$

Cette équation est assez générale et peut-être obtenue indépendamment de l'expression de u en fonction de p et de l'équation (II.4.3), avec un bilan énergétique, comme celui que l'on a effectué dans le chapitre I.?? (ECKART 1940 ; HAZELTINE *et al.* 2013). On peut y faire apparaître l'isotropie à travers l'hypothèse : $\nabla \cdot (\overline{\mathbf{q}} : \overline{\mathbf{I}}) = 0$.

La fermeture CGL consiste à annuler la divergence du flux de chaleur $\nabla \cdot \overline{\mathbf{q}}$ dans l'équation (II.4.3) et à considérer un tenseur de pression de forme gyrotrope. L'équation tensorielle de pression prend alors la forme de deux équations (voir HUNANA *et al.* 2019

pour les détails de dérivations) :

$$\partial_t p_{\parallel} + \nabla \cdot (p_{\parallel} \mathbf{v}) + 2p_{\parallel} \mathbf{b}\mathbf{b} : \nabla \mathbf{v} = 0 \quad (\text{II.4.7})$$

$$\partial_t p_{\perp} + \nabla \cdot (p_{\perp} \mathbf{v}) + p_{\perp} \nabla \cdot \mathbf{v} - p_{\perp} \mathbf{b}\mathbf{b} : \nabla \mathbf{v} = 0 \quad (\text{II.4.8})$$

En les sommant, on retrouve l'équation d'énergie interne (II.4.6) avec l'hypothèse d'isotropie. Pour simplifier les calculs dans cette partie II, nous supposons, dans le cas général, $\nabla \cdot \bar{\mathbf{q}} = 0$ (équation (II.4.3)). Cette hypothèse est, comme on vient de le voir, cohérente avec l'hypothèse d'isotropie de la cascade turbulente et avec le modèle CGL qui nous intéresse. Elle pourra être facilement relaxée, si besoin est, en prenant en compte, dans la loi exacte, la correction (??) qui a été dérivée dans la section I.??.

En les manipulant les équations de pression du modèle CGL, (II.4.7) et (II.4.8), avec l'équation d'induction (II.4.4), on obtient les formes conservatives :

$$d_t \left(\frac{p_{\parallel} \mathbf{v}_A^2}{\rho^2} \right) = 0 \quad d_t \left(\frac{p_{\perp}}{\rho^{3/2} |\mathbf{v}_A|} \right) = 0 \quad (\text{II.4.9})$$

De ce lien, entre $p_{\parallel, \perp}$ et des puissances de ρ , provient la deuxième appellation du modèle, «bi-adiabatique», et les formes explicites des pressions : $p_{\parallel} \propto \frac{\rho^2}{\mathbf{v}_A^2}$ et $p_{\perp} \propto \rho^{3/2} |\mathbf{v}_A|$.

4.2 Instabilités linéaires et potentiel impact sur la turbulence du vent solaire

Les anisotropies de pression peuvent rendre le plasma instable. On utilise la théorie linéaire pour approcher ce problème comme on a approché celui des ondes d'Alfvén et magnéto-sonore dans les modèles MHD (voir chapitre 3 et ??). Le pendant non linéaire de ces instabilités est en effet difficile à établir.

La linéarisation du modèle CGL (voir méthode dans la section-synthèse du chapitre 3 de l'introduction et pour plus de détails, le chapitre 3 de HUNANA *et al.* 2019) nous donne l'équation de dispersion suivante :

$$\begin{pmatrix} \frac{\omega^2}{v_{A0}^2 k_{\parallel}^2} - (\beta_{\parallel 0} a_{p0} + 1) \frac{k_{\perp}^2}{k_{\parallel}^2} + (\frac{\beta_{\parallel 0}}{2} (1 - a_{p0}) - 1) & 0 & -\frac{\beta_{\parallel 0}}{2} a_{p0} \frac{k_{\perp}}{k_{\parallel}} \\ 0 & \frac{\omega^2}{v_{A0}^2 k_{\parallel}^2} + (\frac{\beta_{\parallel 0}}{2} (1 - a_{p0}) - 1) & 0 \\ -\frac{\beta_{\parallel 0}}{2} a_{p0} \frac{k_{\perp}}{k_{\parallel}} & 0 & \frac{\omega^2}{v_{A0}^2 k_{\parallel}^2} - \frac{3}{2} \beta_{\parallel 0} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_{x1} \\ v_{y1} \\ v_{z1} \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{II.4.10})$$

où $a_{p0} = \frac{p_{\perp 0}}{p_{\parallel 0}}$ est appelé taux d'anisotropie et $\beta_{\parallel 0} = \frac{2p_{\parallel 0}}{\rho_0 v_{A0}^2}$ est le paramètre β linéaire du plasma calculé avec la pression parallèle. La relation de dispersion s'écrit alors :

$$0 = \left(\frac{\omega^2}{k_{\parallel}^2 v_{A0}^2} - 1 + \frac{\beta_{\parallel 0}}{2} (1 - a_{p0}) \right) \left(\frac{\omega^2}{k^2 v_{A0}^2} - \frac{1}{2} (A \pm \sqrt{A^2 - 4B}) \right) \quad (\text{II.4.11})$$

avec

$$\begin{aligned}
A &= 1 + \beta_{\parallel 0} a_{p0} \left(1 - \frac{1}{2} \cos^2 \theta\right) + \beta_{\parallel 0} \cos^2 \theta \\
B &= \frac{3}{2} \beta_{\parallel 0} \cos^2 \theta \left(\left(1 - \frac{\beta_{\parallel 0}}{2} (1 - a_{p0})\right) \cos^2 \theta + \left(1 + \beta_{\parallel 0} a_{p0} \left(1 - \frac{1}{6} a_{p0}\right)\right) \sin^2 \theta \right) \\
&= \frac{3}{2} \beta_{\parallel 0} \cos^2 \theta \left(1 + \beta_{\parallel 0} a_{p0} \left(1 - \frac{1}{2} \cos^2 \theta\right) - \frac{\beta_{\parallel 0}}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{6} \beta_{\parallel 0} a_{p0}^2 \sin^2 \theta\right) \\
A^2 - 4B &= \left(1 + \beta_{\parallel 0} a_{p0} \left(1 - \frac{1}{2} \cos^2 \theta\right) - \beta_{\parallel 0} \cos^2 \theta\right)^2 + 3\beta_{\parallel 0}^2 \cos^4 \theta + \beta_{\parallel 0} a_{p0}^2 \sin^2 \theta
\end{aligned}$$

Dans le premier mode $\frac{\omega^2}{k_{\parallel}^2 v_{A0}^2} + \left(\frac{\beta_{\parallel 0}}{2} (1 - a_{p0}) - 1\right) = 0$, on retrouve le mode d'Alfvén incompressible si $a_{p0} = 1$. Il est polarisé tel que $\mathbf{v}_1 \propto (0, 1, 0)$. Ce mode est instable si $1 - \frac{\beta_{\parallel 0}}{2} (1 - a_{p0}) < 0$. Cette instabilité est l'instabilité firehose (« lance d'incendie » ou « tuyau d'arrosage »). Son nom provient du comportement des tubes de flux magnétique qui ressemble à celui d'un tuyau d'arrosage devenu fou après avoir été lâché par son utilisateur¹.

Les deux autres modes visibles dans la relation (II.6.49) sont les modes magnéto-soniques rapide (+) et lent (−) du modèle CGL. Même en y considérant $a_{p0} = 1$, il est impossible de retrouver les modes magnéto-soniques MHD dans les expressions des modes CGL. Cela est dû à l'utilisation des équations de pression dans le calcul pour obtenir les relations de dispersion. D'après l'expression de $A^2 - 4B$, le mode rapide va rester stable. Le mode lent peut quant à lui devenir instable si $B < 0$. Cela peut arriver dans deux cas de figure :

- $1 - \frac{\beta_{\parallel 0}}{2} (1 - a_{p0}) < 0$ correspondant à l'instabilité firehose, qui est dans ce cas nommée firehose parallèle puisqu'elle apparaît principalement si $k_{\parallel} \gg k_{\perp}$,
- $1 + \beta_{\parallel 0} a_{p0} \left(1 - \frac{1}{6} a_{p0}\right) < 0$ correspondant à l'instabilité miroir.

L'expression du critère d'instabilité miroir est légèrement différente de celle provenant de la théorie linéaire cinétique à cause du facteur $1/6$ (FERRIÈRE et ANDRÉ 2002). Ce facteur d'erreur translate la condition nécessaire pour qu'il y ait des instabilités miroir à $a_{p0} > 6$ au lieu de $a_{p0} > 1$ comme on peut le voir sur FIGURE II.4.1. La condition nécessaire pour qu'il y ait apparition d'instabilité firehose est, quant à elle, $a_{p0} < 1$ et en accord avec la théorie cinétique. Dans le vent solaire, ces critères d'instabilité semblent avoir un impact majeur puisque l'état du plasma semble maintenu, sur les diagrammes $a_p - \beta_{\parallel}$, dans une zone qu'ils semblent délimiter, comme l'a observé HELLINGER *et al.* 2006 dans les données relevées par la sonde WIND.

Dans le chapitre 3 de l'introduction, nous avons rappelé l'importance des ondes d'Alfvén dans les théories de turbulence et, dans le chapitre ?? de la partie I, que le sujet de l'impact des ondes compressibles MHD sur la cascade turbulente est toujours ouvert (BRODIANO *et al.* 2021). Similairement, on peut se demander quel impact ont les instabilités sur la turbulence ? Et en particulier, quelle influence ont les instabilités des ondes d'Alfvén sur la turbulence Alfvénique ? Si l'on regarde les résultats de l'étude de la tem-

1. Soit un tube de flux magnétique que l'on perturbe légèrement en le courbant avec rayon R . Sa tension correspond à la force de pression magnétique qui s'écrit $\rho_0 v_{A0}^2 / R$. La pression parallèle (liée à v_{\parallel}^2) va induire une force centrifuge en $\rho_0 v_{\parallel}^2 / R$ poussant le plasma dans le tube vers l'extérieur de la courbe. La pression perpendiculaire correspondant à la pression thermique du plasma à l'extérieur du tube, induit une force de pression en $p_{\perp 0} / R$. Si $p_{\parallel 0} > p_{\perp 0} + 2p_{m0}$ (critère d'instabilité firehose), la force centrifuge ne sera pas compensée par la force externe et la tension du tube. La courbe va se resserrer, le rayon diminué et la perturbation s'amplifier.

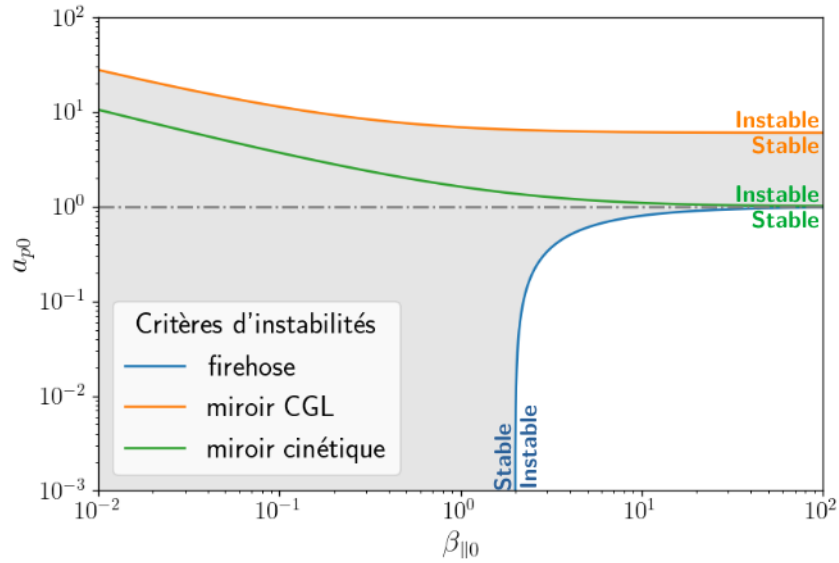


FIGURE II.4.1 – Zones de stabilité du modèle CGL (zone grisée). Critères d'instabilité firehose (bleu), miroir (orange) et miroir cinétique (vert). Horizontale $a_p = 1$ en gris.

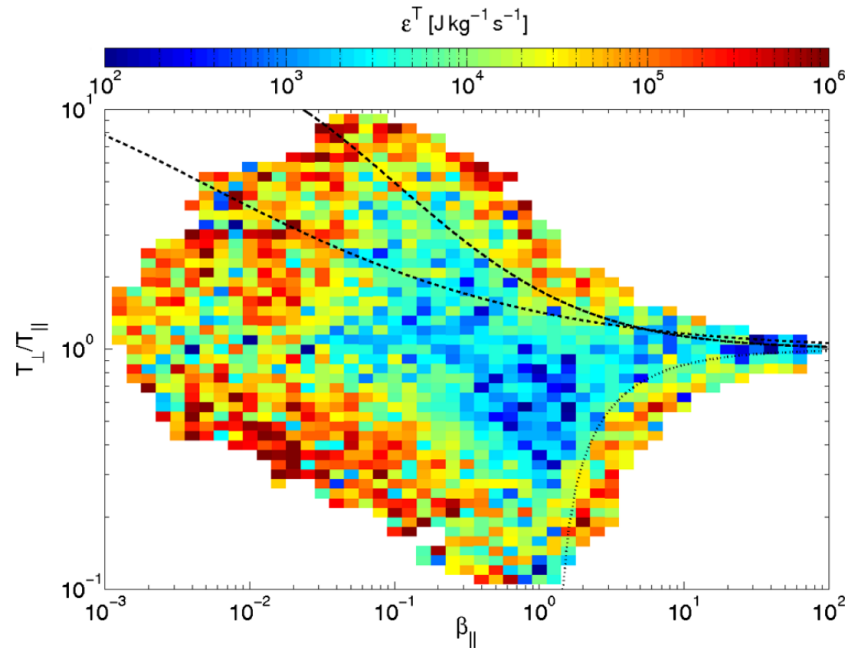


FIGURE II.4.2 – Distribution statistique en fonction de $a_p = \frac{p_\perp}{p_\parallel} = \frac{T_\perp}{T_\parallel}$ et β_\parallel d'échantillons relevés entre 1995 et 2011 dans le vent solaire par la sonde WIND en orbite autour de la Terre. Pour chacun d'eux, le taux de cascade est calculé avec la loi exacte PP98 et indiqué par l'échelle chromatique. Les lignes indiquent les frontières associées aux instabilités cinétiques miroir (décroissante supérieure), cyclotron (décroissante inférieure) et firehose (croissante). Crédits : OSMAN *et al.* 2013.

pérature isotrope (LIU *et al.* 2006), des fluctuations magnétiques (BALE *et al.* 2009) et du taux de cascade incompressible OSMAN *et al.* 2013 (voir FIGURE II.4.2) dans les données relevées par WIND et ceux du taux compressible isotherme observés par HADID *et al.* 2018 dans les données des missions THEMIS et CLUSTER : sur les diagrammes $a_p - \beta_\parallel$,

près des frontières des zones instables, la température des protons semble plus élevée, les fluctuations du champ magnétique et les taux de cascade plus importants. Mais la relation entre instabilités et turbulence reste à clarifier : est-ce que le plasma est plus chaud et turbulent parceque les instabilités jouent un rôle dans son chauffage ? Et est-ce que ce chauffage s'effectue via la cascade turbulente ? Est-ce lié à l'âge collisionnel du plasma comme le propose BALE *et al.* 2009 ?

De multiples études se sont attaquées à ces questions à travers des études comparatives de spectres, du taux d'anisotropie de pression et des taux de croissance des instabilités cinétiques linéaires et quasi-linéaires (parmi les plus récentes il y a **markovskii_effect_2022** ; **bandyopadhyay_interplay_2022** ; QUDSI *et al.* 2020 ; OPIE *et al.* 2022 ; NAVARRO et MOYA 2023). De notre côté, nous l'attaquons analytiquement, à partir des échelles fluides et de la théorie des lois exactes, dans le but d'offrir un cadre permettant d'étudier plus rigoureusement l'impact des anisotropies et instabilités de pression sur la cascade turbulente.

4.3 Loi exacte générale pour pression tensorielle et réduction au modèle CGL

Pour obtenir une loi exacte pour le modèle CGL, nous avons utilisé la méthode mise en place dans le chapitre I.?? : prendre en compte l'équation d'énergie interne (II.4.6) et non la forme explicite des pressions parallèle et perpendiculaire (II.4.9). Le modèle utilisé est donc :

$$\partial_t \rho = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \quad (\text{II.4.12})$$

$$\partial_t \mathbf{v} = -\nabla \cdot (\mathbf{v} \mathbf{v}) + \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A) - \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}}_* + \mathbf{f}_c + \mathbf{d}_c \quad (\text{II.4.13})$$

$$\partial_t \mathbf{v}_A = \nabla \cdot (\mathbf{v}_A \mathbf{v} - \mathbf{v} \mathbf{v}_A) - \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{v}_A + \frac{\mathbf{v}_A}{2} \nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{f}_m + \mathbf{d}_m \quad (\text{II.4.14})$$

$$\partial_t u = -\nabla \cdot (u \mathbf{v}) + u \nabla \cdot \mathbf{v} - \frac{\overline{\mathbf{P}}}{\rho} : \nabla \mathbf{v} \quad (\text{II.4.15})$$

De manière cohérente avec les choix effectués dans le chapitre I.??, la fonction de corrélation d'énergie totale choisie est : $\mathcal{R} = \mathcal{R}_c + \mathcal{R}_m + \mathcal{R}_u$ avec $\mathcal{R}_c = \langle \frac{1}{4}(\rho' + \rho) \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v} \rangle$, $\mathcal{R}_m = \langle \frac{1}{4}(\rho' + \rho) \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A \rangle$ et $\mathcal{R}_u = \frac{1}{2} \langle \rho' u + \rho u' \rangle$.

Et en appliquant la même méthode que celle utilisée pour obtenir (??), (??) et (??), on obtient l'évolution temporelle des fonctions de corrélation associées à chaque énergie :

— Energie cinétique : $\mathcal{R}_c = \langle (\rho' + \rho) \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v} \rangle / 4$

$$\begin{aligned} 4\partial_t \mathcal{R}_c = & \nabla_\ell \cdot \langle \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{v} \delta \mathbf{v} - (\delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \delta \mathbf{v} \delta \mathbf{v}_A + \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{v}_A \delta \mathbf{v}_A) \rangle \\ & + \nabla_\ell \cdot \langle \rho' \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v} \mathbf{v}_A - \rho \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}' \mathbf{v}'_A - \rho' \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}_A \mathbf{v}'_A + \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'_A \mathbf{v}_A \rangle \\ & + \langle \rho \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v} \nabla' \cdot \mathbf{v}' - \rho' \mathbf{v}' \cdot \delta \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{v} + 2\rho' \mathbf{v}' \cdot \delta \mathbf{v}_A \nabla \cdot \mathbf{v}_A - 2\rho \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v}_A \nabla' \cdot \mathbf{v}'_A \rangle \\ & + \nabla_\ell \cdot \left\langle \rho' \frac{\overline{\mathbf{P}}_*}{\rho} \cdot \mathbf{v}' - \rho \frac{\overline{\mathbf{P}}'_*}{\rho'} \cdot \mathbf{v} + \overline{\mathbf{P}}_* \cdot \mathbf{v}' - \overline{\mathbf{P}}'_* \cdot \mathbf{v} \right\rangle \\ & - \left\langle \frac{\rho'}{\rho} \mathbf{v}' \cdot \overline{\mathbf{P}}_* \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} + \frac{\rho}{\rho'} \mathbf{v} \cdot \overline{\mathbf{P}}'_* \cdot \frac{\nabla' \rho'}{\rho'} \right\rangle \\ & + \langle (\rho' + \rho)(\mathbf{v} \cdot \mathbf{f}'_c + \mathbf{v}' \cdot \mathbf{f}_c) \rangle + \langle (\rho' + \rho)(\mathbf{v} \cdot \mathbf{d}'_c + \mathbf{v}' \cdot \mathbf{d}_c) \rangle \end{aligned} \quad (\text{II.4.16})$$

— Energie magnétique : $\mathcal{R}_m = \langle (\rho' + \rho) \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A \rangle / 4$

$$\begin{aligned}
4\partial_t \mathcal{R}_m &= \nabla_\ell \cdot \langle \delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \delta \mathbf{v}_A \delta \mathbf{v} \rangle \\
&\quad - \nabla_\ell \cdot \langle \rho' \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v} \mathbf{v}_A - \rho \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}' \mathbf{v}'_A - \rho' \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}_A \mathbf{v}'_A + \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'_A \mathbf{v}_A \rangle \\
&\quad + \left\langle (\rho \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{v}_A - \frac{1}{2}(\rho' + \rho) \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A) \nabla' \cdot \mathbf{v}' \right\rangle \\
&\quad - \left\langle (\rho' \mathbf{v}'_A \cdot \delta \mathbf{v}_A + \frac{1}{2}(\rho' + \rho) \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A) \nabla \cdot \mathbf{v} \right\rangle \\
&\quad + \langle (\rho' \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v} - \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'_A) \nabla \cdot \mathbf{v}_A \rangle + \langle (\rho' \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}_A - \rho \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}') \nabla' \cdot \mathbf{v}'_A \rangle \\
&\quad + \langle (\rho' + \rho)(\mathbf{v}_A \cdot \mathbf{f}'_m + \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{f}_m) \rangle + \langle (\rho' + \rho)(\mathbf{v}_A \cdot \mathbf{d}'_m + \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{d}_m) \rangle
\end{aligned} \tag{II.4.17}$$

— Energie interne : $\mathcal{R}_u = \langle \rho' u + \rho u' \rangle / 2$

$$\begin{aligned}
2\partial_t \mathcal{R}_u &= \nabla_\ell \cdot \langle \delta \rho \delta u \delta \mathbf{v} \rangle + \langle \rho \delta u \nabla' \cdot \mathbf{v}' - \rho' \delta u \nabla \cdot \mathbf{v} \rangle \\
&\quad - \left\langle \rho' \frac{\overline{\mathbf{P}}}{\rho} : \nabla \mathbf{v} + \rho \frac{\overline{\mathbf{P}'}}{\rho'} : \nabla' \mathbf{v}' \right\rangle
\end{aligned} \tag{II.4.18}$$

Le résultat pour l'énergie magnétique n'est pas influencé par le type de pression (tensoriel ou isotrope) contrairement à ceux des énergies cinétique et interne. La question qui s'est posée alors était : est-il possible d'améliorer la formulation des termes dépendants de la pression ? de faire apparaître l'influence de la pression dans les termes de type flux sous la forme d'une fonction de structure ? En remarquant que $\overline{\mathbf{P}}$ ou $\overline{\mathbf{P}_*}$ est, dans tous les termes, accompagné de $\frac{1}{\rho}$ pris au même point, l'idée de travailler sur la fonction de structure $\langle \delta \rho \delta \frac{\overline{\mathbf{P}}}{\rho} \cdot \delta \mathbf{v} \rangle$ puis sur la fonction $\langle \delta \rho \delta \frac{\overline{\mathbf{P}_*}}{\rho} \cdot \delta \mathbf{v} \rangle$ a émergé. Développer cette dernière sous la divergence locale en utilisant l'hypothèse d'homogénéité statistique et l'indépendance des positions \mathbf{x} et \mathbf{x}' donne :

$$\begin{aligned}
\nabla_\ell \cdot \left\langle \delta \rho \delta \frac{\overline{\mathbf{P}_*}}{\rho} \cdot \delta \mathbf{v} \right\rangle &= \nabla_\ell \cdot \left\langle \left[\rho \frac{\overline{\mathbf{P}'}}{\rho'} \cdot \mathbf{v} - \rho' \frac{\overline{\mathbf{P}_*}}{\rho} \cdot \mathbf{v}' \right] + [\overline{\mathbf{P}_*} \cdot \mathbf{v}' - \overline{\mathbf{P}'}_* \cdot \mathbf{v}] \right\rangle \\
&\quad + \nabla_\ell \cdot \left\langle \rho' \frac{\overline{\mathbf{P}_*}}{\rho} \cdot \mathbf{v} - \rho \frac{\overline{\mathbf{P}'}}{\rho'} \cdot \mathbf{v}' \right\rangle
\end{aligned}$$

On va donc pouvoir remplacer dans (II.4.16) $\nabla_\ell \cdot \left\langle \rho' \frac{\overline{\mathbf{P}_*}}{\rho} \cdot \mathbf{v}' - \rho \frac{\overline{\mathbf{P}'}}{\rho'} \cdot \mathbf{v} \right\rangle$ ou $\nabla_\ell \cdot \left\langle \overline{\mathbf{P}_*} \cdot \mathbf{v}' - \overline{\mathbf{P}'}_* \cdot \mathbf{v} \right\rangle$.

En voyant que ce dernier s'écrit aussi $\left\langle \rho \frac{\overline{\mathbf{P}_*}}{\rho} : \nabla' \mathbf{v}' + \rho' \frac{\overline{\mathbf{P}'}}{\rho'} : \nabla \mathbf{v} \right\rangle$ qui rappelle les termes dépendant de la pression de l'équation (II.4.18), nous avons choisi la première possibilité.

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\nabla_{\ell} & \cdot \left\langle \rho' \frac{\overline{\mathbf{P}}_*}{\rho} \cdot \mathbf{v}' - \rho \frac{\overline{\mathbf{P}}'_*}{\rho'} \cdot \mathbf{v} + \overline{\mathbf{P}}_* \cdot \mathbf{v}' - \overline{\mathbf{P}}'_* \cdot \mathbf{v} \right\rangle \\
& = -\nabla_{\ell} \cdot \left\langle \delta \rho \delta \frac{\overline{\mathbf{P}}_*}{\rho} \cdot \delta \mathbf{v} \right\rangle + \left\langle \mathbf{v} \cdot \frac{\overline{\mathbf{P}}_*}{\rho} \cdot \nabla' \rho' + \mathbf{v}' \cdot \frac{\overline{\mathbf{P}}'_*}{\rho'} \cdot \nabla \rho \right\rangle \\
& \quad + \left\langle 2\rho \frac{\overline{\mathbf{P}}}{\rho} : \nabla' \mathbf{v}' + 2\rho' \frac{\overline{\mathbf{P}}'}{\rho'} : \nabla \mathbf{v} + \rho \mathbf{v}_A^2 \nabla' \cdot \mathbf{v}' + \rho' \mathbf{v}'_A^2 \nabla \cdot \mathbf{v} \right\rangle
\end{aligned}$$

La loi KHM générale pour l'énergie totale avec $\mathcal{R} = \mathcal{R}_c + \mathcal{R}_m + \mathcal{R}_u$ devient alors :

[1]	$4\partial_t \mathcal{R} = \nabla_{\ell} \cdot \langle (\delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{v} + \delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \delta \mathbf{v}_A \delta \mathbf{v} - (\delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \delta \mathbf{v} + \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{v}_A) \delta \mathbf{v}_A) \rangle$
[2]	$+ \langle (\rho \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v} + \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{v}_A - \frac{1}{2} \delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \mathbf{v}_A) \nabla' \cdot \mathbf{v}' \rangle$
[3]	$- \langle (\rho' \mathbf{v}' \cdot \delta \mathbf{v} + \frac{1}{2} \rho' \mathbf{v}'_A \cdot \delta \mathbf{v}_A - \frac{1}{2} \delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \mathbf{v}'_A) \nabla \cdot \mathbf{v} \rangle$
[4]	$+ \langle (2\rho' \mathbf{v}' \cdot \delta \mathbf{v}_A - \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}'_A + \rho' \mathbf{v}'_A \cdot \delta \mathbf{v}) \nabla \cdot \mathbf{v}_A \rangle$
[5]	$- \langle (2\rho \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v}_A - \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}_A + \rho \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{v}) \nabla' \cdot \mathbf{v}'_A \rangle$
[6]	$+ \nabla_{\ell} \cdot \langle 2\delta \rho \delta u \delta \mathbf{v} \rangle + 2 \langle \rho \delta u \nabla' \cdot \mathbf{v}' - \rho' \delta u \nabla \cdot \mathbf{v} \rangle$
[7]	$- \nabla_{\ell} \cdot \left\langle \delta \rho \delta \frac{\overline{\mathbf{P}}_*}{\rho} \cdot \delta \mathbf{v} \right\rangle - 2 \left\langle \rho \delta \frac{\overline{\mathbf{P}}}{\rho} : \nabla' \mathbf{v}' - \rho' \delta \frac{\overline{\mathbf{P}}}{\rho} : \nabla \mathbf{v} \right\rangle$
[8]	$+ \left\langle \mathbf{v} \cdot \left(\frac{\overline{\mathbf{P}}_*}{\rho} \delta \rho - \rho \delta \frac{\overline{\mathbf{P}}_*}{\rho} \right) \cdot \frac{\nabla' \rho'}{\rho'} - \mathbf{v}' \cdot \left(\frac{\overline{\mathbf{P}}'}{\rho'} \delta \rho - \rho' \delta \frac{\overline{\mathbf{P}}'}{\rho'} \right) \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} \right\rangle$
[9]	$+ \langle (\rho' + \rho)(\mathbf{v} \cdot \mathbf{f}'_c + \mathbf{v}' \cdot \mathbf{f}_c + \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{f}'_m + \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{f}_m) \rangle$
[10]	$+ \langle (\rho' + \rho)(\mathbf{v} \cdot \mathbf{d}'_c + \mathbf{v}' \cdot \mathbf{d}_c + \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{d}'_m + \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{d}_m) \rangle$

(II.4.19)

Les lignes [7] et [8] contiennent les contributions des tenseurs de pression et de pression totale. La loi exacte générale de type Kolmogorov est alors :

-4ε	$= \nabla_{\ell} \cdot \langle (\delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{v} + \delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \delta \mathbf{v}_A \delta \mathbf{v} - (\delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \delta \mathbf{v} + \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{v}_A) \delta \mathbf{v}_A) \rangle$
	$+ \nabla_{\ell} \cdot \left\langle 2\delta \rho \delta u \delta \mathbf{v} - \delta \rho \delta \frac{\overline{\mathbf{P}}_*}{\rho} \cdot \delta \mathbf{v} \right\rangle$
	$+ \left\langle (\rho \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v} + \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{v}_A - \frac{1}{2} \delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \mathbf{v}_A + 2\rho \delta u) \nabla' \cdot \mathbf{v}' - 2\rho \delta \frac{\overline{\mathbf{P}}}{\rho} : \nabla' \mathbf{v}' \right\rangle$
	$- \left\langle (\rho' \mathbf{v}' \cdot \delta \mathbf{v} + \frac{1}{2} \rho' \mathbf{v}'_A \cdot \delta \mathbf{v}_A - \frac{1}{2} \delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \mathbf{v}'_A + 2\rho' \delta u) \nabla \cdot \mathbf{v} - 2\rho' \delta \frac{\overline{\mathbf{P}}}{\rho} : \nabla \mathbf{v} \right\rangle$
	$+ \left\langle (2\rho' \mathbf{v}' \cdot \delta \mathbf{v}_A - \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}'_A + \rho' \mathbf{v}'_A \cdot \delta \mathbf{v}) \nabla \cdot \mathbf{v}_A \right\rangle$
	$- \left\langle (2\rho \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v}_A - \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}_A + \rho \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{v}) \nabla' \cdot \mathbf{v}'_A \right\rangle$
	$+ \left\langle \mathbf{v} \cdot \left(\frac{\overline{\mathbf{P}}_*}{\rho} \delta \rho - \rho \delta \frac{\overline{\mathbf{P}}_*}{\rho} \right) \cdot \frac{\nabla' \rho'}{\rho'} - \mathbf{v}' \cdot \left(\frac{\overline{\mathbf{P}}'}{\rho'} \delta \rho - \rho' \delta \frac{\overline{\mathbf{P}}'}{\rho'} \right) \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} \right\rangle$

(II.4.20)

Cette loi est valable quelle que soit la forme du tenseur de pression ou de l'énergie interne tant que la zone inertielle est supposée isentrope. Si l'on considère la pression sous forme isotrope $\overline{\mathbf{P}} = p\overline{\mathbf{I}}$, on trouve la loi (??) analysée dans la section I.???. On va noter ce résultat ε_{iso} . On peut alors isoler dans le taux de cascade, la contribution de la composante anisotrope du tenseur de pression $\overline{\Pi}$:

$-4(\varepsilon - \varepsilon_{iso})$	$= -\nabla_{\ell} \cdot \left\langle \delta \rho \delta \left(\frac{\overline{\Pi}}{\rho} \right) \cdot \delta \mathbf{v} \right\rangle - \left\langle 2\rho \delta \left(\frac{\overline{\Pi}}{\rho} \right) : \nabla' \mathbf{v}' - 2\rho' \delta \left(\frac{\overline{\Pi}}{\rho} \right) : \nabla \mathbf{v} \right\rangle$
	$+ \left\langle \mathbf{v} \cdot \left(\left(\frac{\overline{\Pi}}{\rho} \right) \delta \rho - \rho \delta \left(\frac{\overline{\Pi}}{\rho} \right) \right) \cdot \frac{\nabla' \rho'}{\rho'} - \mathbf{v}' \cdot \left(\left(\frac{\overline{\Pi}'}{\rho'} \right) \delta \rho - \rho' \delta \left(\frac{\overline{\Pi}'}{\rho'} \right) \right) \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} \right\rangle$

(II.4.21)

Nous quantifierons et analyserons cette contribution grâce à des simulations dans la partie III.

Dans le cas d'un tenseur de pression gyrotrope, on peut faire apparaître p_{\parallel} et p_{\perp} :

$$\begin{aligned}
-4\varepsilon = & \nabla_{\ell} \cdot \langle (\delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{v} + \delta(\rho \mathbf{v}_{\mathbf{A}}) \cdot \delta \mathbf{v}_{\mathbf{A}} \delta \mathbf{v} - (\delta(\rho \mathbf{v}_{\mathbf{A}}) \cdot \delta \mathbf{v} + \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{v}_{\mathbf{A}}) \delta \mathbf{v}_{\mathbf{A}}) \\
& + \nabla_{\ell} \cdot \left\langle \delta \rho \delta \left(\frac{p_{\perp} + p_{\parallel} + p_m}{\rho} \right) \delta \mathbf{v} + \delta \rho \delta \left(\frac{p_{\perp} - p_{\parallel}}{\rho} \mathbf{b} \mathbf{b} \right) \cdot \delta \mathbf{v} \right\rangle \\
& + \left\langle (\rho \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v} + \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}_{\mathbf{A}} \cdot \delta \mathbf{v}_{\mathbf{A}} - \frac{1}{2} \delta(\rho \mathbf{v}_{\mathbf{A}}) \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{A}} + \rho \delta \left(\frac{p_{\parallel}}{\rho} \right)) \nabla' \cdot \mathbf{v}' \right\rangle \\
& - \left\langle (\rho' \mathbf{v}' \cdot \delta \mathbf{v} + \frac{1}{2} \rho' \mathbf{v}'_{\mathbf{A}} \cdot \delta \mathbf{v}_{\mathbf{A}} - \frac{1}{2} \delta(\rho \mathbf{v}_{\mathbf{A}}) \cdot \mathbf{v}'_{\mathbf{A}} + \rho' \delta \left(\frac{p_{\parallel}}{\rho} \right)) \nabla \cdot \mathbf{v} \right\rangle \\
& + 2 \left\langle \rho \delta \left(\frac{p_{\perp} - p_{\parallel}}{\rho} \mathbf{b} \mathbf{b} \right) : \nabla' \mathbf{v}' - \rho' \delta \left(\frac{p_{\perp} - p_{\parallel}}{\rho} \mathbf{b} \mathbf{b} \right) : \nabla \mathbf{v} \right\rangle \\
& + \langle (2 \rho' \mathbf{v}' \cdot \delta \mathbf{v}_{\mathbf{A}} - \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}'_{\mathbf{A}} + \rho' \mathbf{v}'_{\mathbf{A}} \cdot \delta \mathbf{v}) \nabla \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{A}} \rangle \\
& - \langle (2 \rho \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v}_{\mathbf{A}} - \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{A}} + \rho \mathbf{v}_{\mathbf{A}} \cdot \delta \mathbf{v}) \nabla' \cdot \mathbf{v}'_{\mathbf{A}} \rangle \\
& + \left\langle \left(\frac{p_{\perp} + p_m}{\rho} \mathbf{v} \delta \rho - \rho \mathbf{v} \delta \left(\frac{p_{\perp} + p_m}{\rho} \right) + \frac{p_{\parallel} - p_{\perp}}{\rho} \mathbf{v} \cdot \mathbf{b} \mathbf{b} \delta \rho - \rho \mathbf{v} \cdot \delta \left(\frac{p_{\parallel} - p_{\perp}}{\rho} \mathbf{b} \mathbf{b} \right) \right) \cdot \frac{\nabla' \rho'}{\rho'} \right\rangle \\
& - \left\langle \left(\frac{p'_{\perp} + p'_m}{\rho'} \mathbf{v}' \delta \rho - \rho' \mathbf{v}' \delta \left(\frac{p_{\perp} + p_m}{\rho} \right) + \frac{p'_{\parallel} - p'_{\perp}}{\rho'} \mathbf{v}' \cdot \mathbf{b}' \mathbf{b}' \delta \rho - \rho' \mathbf{v}' \cdot \delta \left(\frac{p_{\parallel} - p_{\perp}}{\rho} \mathbf{b} \mathbf{b} \right) \right) \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} \right\rangle
\end{aligned} \tag{II.4.22}$$

Cette loi est valable pour le modèle CGL. Si besoin est, on peut y expliciter p_{\parallel} et p_{\perp} en fonction de ρ , $\mathbf{v}_{\mathbf{A}}$ grâce à (II.4.9).

On peut aussi faire apparaître a_p et β_{\parallel} dans (II.4.22) pour identifier les termes potentiellement impactés par les instabilités. Ainsi, on obtient :

$$\begin{aligned}
-4\varepsilon = & \nabla_{\ell} \cdot \langle (\delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{v} + \delta(\rho \mathbf{v}_{\mathbf{A}}) \cdot \delta \mathbf{v}_{\mathbf{A}} \delta \mathbf{v} - (\delta(\rho \mathbf{v}_{\mathbf{A}}) \cdot \delta \mathbf{v} + \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{v}_{\mathbf{A}}) \delta \mathbf{v}_{\mathbf{A}}) \\
& + \frac{1}{2} \nabla_{\ell} \cdot \langle \delta \rho \delta (\mathbf{v}_{\mathbf{A}}^2 (\beta_{\parallel} (a_p + 1) + 1)) \delta \mathbf{v} + \delta \rho \delta (\beta_{\parallel} (a_p - 1) \mathbf{v}_{\mathbf{A}} \mathbf{v}_{\mathbf{A}}) \cdot \delta \mathbf{v} \rangle \\
& + \langle (\rho \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v} + \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}_{\mathbf{A}} \cdot \delta \mathbf{v}_{\mathbf{A}} - \frac{1}{2} \delta(\rho \mathbf{v}_{\mathbf{A}}) \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{A}} + \frac{1}{2} \rho \delta (\mathbf{v}_{\mathbf{A}}^2 \beta_{\parallel})) \nabla' \cdot \mathbf{v}' \rangle \\
& - \langle (\rho' \mathbf{v}' \cdot \delta \mathbf{v} + \frac{1}{2} \rho' \mathbf{v}'_{\mathbf{A}} \cdot \delta \mathbf{v}_{\mathbf{A}} - \frac{1}{2} \delta(\rho \mathbf{v}_{\mathbf{A}}) \cdot \mathbf{v}'_{\mathbf{A}} + \frac{1}{2} \rho' \delta (\mathbf{v}_{\mathbf{A}}^2 \beta_{\parallel})) \nabla \cdot \mathbf{v} \rangle \\
& + \langle \rho \delta (\beta_{\parallel} (a_p - 1) \mathbf{v}_{\mathbf{A}} \mathbf{v}_{\mathbf{A}}) : \nabla' \mathbf{v}' - \rho' \delta (\beta_{\parallel} (a_p - 1) \mathbf{v}_{\mathbf{A}} \mathbf{v}_{\mathbf{A}}) : \nabla \mathbf{v} \rangle \\
& + \langle (2 \rho' \mathbf{v}' \cdot \delta \mathbf{v}_{\mathbf{A}} - \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}'_{\mathbf{A}} + \rho' \mathbf{v}'_{\mathbf{A}} \cdot \delta \mathbf{v}) \nabla \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{A}} \rangle \\
& - \langle (2 \rho \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v}_{\mathbf{A}} - \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{A}} + \rho \mathbf{v}_{\mathbf{A}} \cdot \delta \mathbf{v}) \nabla' \cdot \mathbf{v}'_{\mathbf{A}} \rangle \\
& + \frac{1}{2} \left\langle (\mathbf{v}_{\mathbf{A}}^2 (\beta_{\parallel} a_p + 1) \delta \rho - \rho \delta (\mathbf{v}_{\mathbf{A}}^2 (\beta_{\parallel} a_p + 1))) \mathbf{v} \cdot \frac{\nabla' \rho'}{\rho'} \right\rangle \\
& - \frac{1}{2} \left\langle (\mathbf{v}'_{\mathbf{A}}^2 (\beta'_{\parallel} a'_p + 1) \delta \rho - \rho' \delta (\mathbf{v}_{\mathbf{A}}^2 (\beta_{\parallel} a_p + 1))) \mathbf{v}' \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} \right\rangle \\
& + \frac{1}{2} \left\langle \mathbf{v} \cdot (\beta_{\parallel} (a_p - 1) \mathbf{v}_{\mathbf{A}} \mathbf{v}_{\mathbf{A}} \delta \rho - \rho \delta (\beta_{\parallel} (a_p - 1) \mathbf{v}_{\mathbf{A}} \mathbf{v}_{\mathbf{A}})) \cdot \frac{\nabla' \rho'}{\rho'} \right\rangle \\
& - \frac{1}{2} \left\langle \mathbf{v}' \cdot (\beta'_{\parallel} (a'_p - 1) \mathbf{v}'_{\mathbf{A}} \mathbf{v}'_{\mathbf{A}} \delta \rho - \rho' \delta (\beta_{\parallel} (a_p - 1) \mathbf{v}_{\mathbf{A}} \mathbf{v}_{\mathbf{A}})) \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} \right\rangle
\end{aligned} \tag{II.4.23}$$

Les critères d'instabilité linéaires n'y sont pas explicites mais on voit que certains termes dépendent de $a_p - 1$, en particulier un terme de type flux. Par conséquent, le signe de ces termes va dépendre du régime de pression dans le système, si p_{\parallel} ou p_{\perp} domine, et est ainsi lié au type d'instabilité pouvant s'y développer. Comme ces termes dépendent de quantités incrémentales, il est néanmoins difficile de conclure sur leur apport au taux de cascade total sans regarder dans des simulations. Ce sera l'un des objectifs de la partie

III. On remarque que ces termes sont présents dans la contribution anisotrope (II.4.21) au taux de cascade.

4.4 Synthèse de l'étude analytique de turbulence compressible avec pression tensorielle et modèle CGL

Fermeture CGL : $\nabla \cdot \bar{\mathbf{q}} = 0$ et $\bar{\mathbf{P}} = p\bar{\mathbf{I}} + \bar{\Pi} = \frac{2p_\perp + p_\parallel}{3}\bar{\mathbf{I}} + (p_\parallel - p_\perp)(\mathbf{b}\mathbf{b} - \frac{1}{3}\bar{\mathbf{I}})$ avec $\mathbf{b} = \frac{\mathbf{v}_A}{|\mathbf{v}_A|}$. Energie interne définie telle que $\rho u = \frac{3}{2}p$.

$$\partial_t p_\parallel + \nabla \cdot (p_\parallel \mathbf{v}) + 2p_\parallel \mathbf{b}\mathbf{b} : \nabla \mathbf{v} = 0 \quad (\text{II.4.24})$$

$$\partial_t p_\perp + \nabla \cdot (p_\perp \mathbf{v}) + p_\perp \nabla \cdot \mathbf{v} - p_\perp \mathbf{b}\mathbf{b} : \nabla \mathbf{v} = 0 \quad (\text{II.4.25})$$

Linéarisation du modèle CGL :

- Relation de dispersion : (II.6.49)
- Mode d'Alfvén incompressible \Rightarrow instabilité firehose,
- Mode magnétosonique rapide : stable,
- Mode magnétosonique lent \Rightarrow instabilité firehose parallèle et miroir
- instabilité firehose si $1 - \frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0}) < 0$
- instabilité miroir si $1 + \beta_{\parallel 0}a_{p0}(1 - \frac{1}{6}a_{p0}) < 0$

Equations utilisées pour calculer la loi exacte générale avec tenseur de pression (zone inertielle isentrope) :

$$\partial_t \rho = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \quad (\text{II.4.26})$$

$$\partial_t \mathbf{v} = -\nabla \cdot (\mathbf{v}\mathbf{v}) + \mathbf{v}\nabla \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{\rho}\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A) - \frac{1}{\rho}\nabla \cdot \bar{\mathbf{P}}_* + (\mathbf{f}_c + \mathbf{d}_c) \quad (\text{II.4.27})$$

$$\partial_t \mathbf{v}_A = \nabla \cdot (\mathbf{v}_A \mathbf{v} - \mathbf{v}\mathbf{v}_A) - \mathbf{v}\nabla \cdot \mathbf{v}_A + \frac{\mathbf{v}_A}{2}\nabla \cdot \mathbf{v} + (\mathbf{f}_m + \mathbf{d}_m) \quad (\text{II.4.28})$$

$$\partial_t u = -\nabla \cdot (u\mathbf{v}) + u\nabla \cdot \mathbf{v} - \frac{\bar{\mathbf{P}}}{\rho} : \nabla \mathbf{v} \quad (\text{II.4.29})$$

Fonctions de corrélation d'énergie totale considérée :

$$\mathcal{R} = \frac{1}{2} \langle \frac{1}{2}(\rho' + \rho)\mathbf{v}' \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{2}(\rho' + \rho)\mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A + \rho' u + \rho u' \rangle$$

Lois exactes générales dérivées dans ce chapitre (formulation f2) :

- KHM générale $\forall \bar{\mathbf{P}}$: (II.4.19)
- K41 générale $\forall \bar{\mathbf{P}}$: (II.4.20)
- contribution de l'anisotropie de pression : (II.4.21)

Lois exactes K41 gyrotrope/CGL répondant à l'objectif initial (formulation f2) :

- fonction de p_\parallel et p_\perp : (II.4.22)
- fonction de $a_p = \frac{p_\perp}{p_\parallel}$ et $\beta_\parallel = \frac{p_\parallel}{p_m}$: (II.4.23)

Les résultats dérivés ici sont publiés dans SIMON et SAHRAOUI 2022.

PARTIE II : CHAPITRE 5

ET DANS LE CAS INCOMPRESSIBLE ?

Sommaire

5.1	De la limite incompressible dans la loi exacte générale vers un nouveau modèle	51
5.2	Proposition d'un modèle incompressible gyrotrope	52
5.3	Etude paramétrique des modes linéaires du modèle incompressible gyrotrope	55
5.4	Limite incompressible du modèle CGL	59
5.5	Synthèse : Limite incompressible et pistes d'étude	61

Si l'on prend la limite incompressible de la loi exacte dépendant d'une pression isotrope (??), on retrouve la loi PP98 donnant le taux de cascade ε_{PP98} (.3.34). Mais est-ce aussi le cas si la pression est tensorielle ? De cette question émerge une autre question : qu'est-ce qu'un système incompressible avec pression tensorielle ? Dans ce chapitre, sera présenté le travail effectué pour tenter de répondre à ces questions. Ce travail n'a pas encore été publié.

5.1 De la limite incompressible dans la loi exacte générale vers un nouveau modèle

Si l'on considère la limite incompressible ($\rho = \rho_0$, $\delta\rho = 0$, $\nabla\rho = 0$, $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$, $\nabla \cdot \mathbf{v}_A = 0$) dans l'équation (II.4.21), $\varepsilon_{iso} \rightarrow \varepsilon_{PP98}$ et tous les termes s'annulent sauf :

$$-4(\varepsilon - \varepsilon_{PP98}) = -2 \langle \delta(\bar{\Pi}) : \nabla' \mathbf{v}' - \delta(\bar{\Pi}) : \nabla \mathbf{v} \rangle \quad (\text{II.5.1})$$

car la contribution de la trace de $\nabla \mathbf{v}$ s'annule par incompressibilité : $\bar{\mathbf{I}} : \nabla \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$. On obtient ainsi une correction à la théorie PP98 dépendant de la composante anisotrope de la pression (participant à la déformation incompressible du plasma d'après CASSAK et BARBHUIYA 2022) :

$$\boxed{-4(\varepsilon - \varepsilon_{PP98}) = -2 \langle \delta(\bar{\mathbf{P}} - p\bar{\mathbf{I}}) : \delta(\nabla \mathbf{v}) \rangle = -2 \langle \delta\bar{\Pi} : \delta(\nabla \mathbf{v}) \rangle} \quad (\text{II.5.2})$$

Une question émerge de ce résultat : dans des plasmas faiblement compressibles dépendant d'une pression tensorielle tels que le vent solaire, la correction anisotrope aurait-elle plus de poids que la prise en compte de la compression via les fluctuations de densité ?

Dans le cas particulier gyrotrope, on obtient :

$$-4(\varepsilon - \varepsilon_{PP98}) = -2 \left\langle \delta((p_{\parallel} - p_{\perp})(\mathbf{b}\mathbf{b} - \frac{1}{3}\bar{\mathbf{I}})) : \delta(\nabla\mathbf{v}) \right\rangle \quad (\text{II.5.3})$$

$$= -2 \left\langle \delta((p_{\parallel} - p_{\perp})\mathbf{b}\mathbf{b}) : \delta(\nabla\mathbf{v}) \right\rangle \quad (\text{II.5.4})$$

On observe que la ligne (II.5.3) dépend de $\bar{\mathbf{I}} : \nabla\mathbf{v}$, on annule donc ce terme dans la ligne suivante (II.5.4). Dans le cas incompressible, ces deux expressions sont donc équivalentes. Dans des plasmas quasi-incompressibles par contre, si l'on veut estimer le taux de cascade à l'aide de la loi exacte incompressible corrigée, les deux expressions ne seront plus équivalentes. Dans la première, on s'assure de n'utiliser que la part incompressible de la pression (la contribution de la trace de $\mathbf{b}\mathbf{b}$ étant annulée grâce à $-\frac{1}{3}\bar{\mathbf{I}}$). Dans la seconde, ce n'est pas le cas, le résultat pourra alors être impacté.

On remarque que cette correction dépend de $p_{\parallel} - p_{\perp}$, c'est à dire de $\beta_{\parallel}(1 - a_p)$ qui rappelle les critères d'instabilités. Dans le cas CGL, on a vu que ces critères dépendent fortement de $\beta_{\parallel 0}(1 - a_{p0})$. Si l'on se place dans une situation dans laquelle $\frac{\beta_{\parallel}}{2}(1 - a_p)$ serait quasiment constant, alors le terme correctif de la loi exacte à l'ordre 0 pourra s'écrire :

$$-4(\varepsilon - \varepsilon_{PP98}) = -2 \left\langle \delta(\frac{\beta_{\parallel}}{2}(1 - a_p)\mathbf{v}_A\mathbf{v}_A) : \delta(\nabla\mathbf{v}) \right\rangle \quad (\text{II.5.5})$$

$$\simeq -2\frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0}) \left\langle \delta(\mathbf{v}_A\mathbf{v}_A) : \delta(\nabla\mathbf{v}) \right\rangle \quad (\text{II.5.6})$$

$\langle \delta(\mathbf{v}_A\mathbf{v}_A) : \delta(\nabla\mathbf{v}) \rangle$ étant potentiellement du même ordre que les termes de ε_{PP98} , le résultat très approximatif obtenu ici semble aller dans le sens d'une correction anisotrope plus significative qu'une correction compressible.

Par curiosité, on s'est demandé quelle était la physique derrière notre terme correctif. Dans le cadre des modèles avec pression isotrope, on sait que le mode d'Alfvén polarisé suivant $(0, 1, 0)$ n'est pas influencé par la compression et la loi PP98, révèle sa contribution à la cascade non-linéaire. Notre terme correctif serait-il une trace de la correction du mode d'Alfvén pouvant induire l'instabilité firehose dans la cascade non-linéaire incompressible ?

Afin de répondre à cette question, nous avons voulu vérifier dans un modèle incompressible dépendant d'une pression gyrotrope si le mode d'Alfvén-firehose existait. Mais aucune trace d'un modèle incompressible avec pression tensorielle n'a été trouvée dans la littérature. En fait, si l'on approche le problème sous un autre angle, celui des fermetures, on se rend compte que le cadre gyrotrope est habituellement abordé à travers la fermeture CGL. Ajouter une fermeture incompressible signifierait alors, surcontraindre le système : une équation de trop par rapport au nombre de variables. La viabilité du système serait remise en cause.

5.2 Proposition d'un modèle incompressible gyrotrope

Nous avons construit un nouveau modèle en partant de la question : comment décrire un écoulement magnétisé et incompressible dépendant d'une pression gyrotrope ?

Dans un tel écoulement, la contrainte $\rho = \rho_0$ et donc $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ s'impose. Elle induit pour le champ magnétique $\nabla \cdot \mathbf{v}_A = 0$. On a aussi besoin d'une équation sur la vitesse (premier moment) et d'une équation sur le champ magnétique (équation d'induction). L'hypothèse d'une pression gyrotrope va s'exprimer dans l'équation sur la vitesse à travers $\nabla \cdot \bar{\mathbf{P}}$. On

a alors 7 équations (la contrainte incompressible, les trois composantes de la vitesse et les trois composantes du champ magnétique) pour 8 variables scalaires (les composantes de la vitesses et du champ magnétique, et les pressions parallèles et perpendiculaires). Il manque donc une équation pour fermer le système. Afin de maintenir la cohérence avec la définition de l'énergie interne telle que $u = \frac{1}{2\rho_0}(2p_\perp + p_\parallel)$, nous avons décidé de fermer le système avec l'équation sur la trace du tenseur de pression avec $\nabla \cdot \mathbf{q} = 0$. Ce système est donc compatible avec la loi exacte (??) qui n'a pas été obtenue à partir des équations de pressions.

Par conséquent le modèle incompressible gyrotrope envisagé est :

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \nabla \cdot \mathbf{v}_A = 0 \quad (\text{II.5.7})$$

$$\partial_t \mathbf{v} + \nabla \cdot (\mathbf{v}\mathbf{v} - \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A + \frac{1}{\rho_0} \overline{\mathbf{P}}_*) = 0 \quad (\text{II.5.8})$$

$$\partial_t p + \nabla \cdot (p\mathbf{v}) + \frac{2}{3} \overline{\mathbf{\Pi}} : \nabla \mathbf{v} = 0 \quad (\text{II.5.9})$$

$$\partial_t \mathbf{v}_A - \nabla \cdot (\mathbf{v}_A \mathbf{v} - \mathbf{v} \mathbf{v}_A) = 0 \quad (\text{II.5.10})$$

avec :

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{P}} &= p\overline{\mathbf{I}} + \overline{\mathbf{\Pi}} = \frac{1}{3}(2p_\perp + p_\parallel)\overline{\mathbf{I}} + (p_\parallel - p_\perp)(\mathbf{b}\mathbf{b} - \frac{1}{3}\overline{\mathbf{I}}) \\ \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}}_* &= \nabla(p_\perp + \frac{1}{2}\rho_0 \mathbf{v}_A^2) + \mathbf{b}\mathbf{b} \cdot \nabla(p_\parallel - p_\perp) + (p_\parallel - p_\perp) \frac{1}{\mathbf{v}_A^2} (\mathbf{v}_A \cdot \nabla \mathbf{v}_A - 2\mathbf{v}_A \mathbf{b}\mathbf{b} : \nabla \mathbf{v}_A) \\ \overline{\mathbf{\Pi}} : \nabla \mathbf{v} &= (p_\parallel - p_\perp) \mathbf{b}\mathbf{b} : \nabla \mathbf{v} \end{aligned}$$

L'obtention des modes non linéaires étant compliqué mais un reflet de ces modes subsistant a priori à travers la théorie linéaire, nous proposons de linéariser ce nouveau modèle. Sa forme linéaire obtenue en suivant la méthode résumée section 3.4 est :

$$0 = k_\perp v_{1x} + k_\parallel v_{1z} \quad (\text{II.5.11})$$

$$0 = -\omega v_{1x} + \frac{p_{\perp 1}}{\rho_0} k_\perp + (\frac{p_{\parallel 0} - p_{\perp 0}}{\rho_0 v_{A0}^2} - 1) v_{A0} k_\parallel v_{A1x} + v_{A0} k_\perp v_{A1z} \quad (\text{II.5.12})$$

$$0 = -\omega v_{1y} + (\frac{p_{\parallel 0} - p_{\perp 0}}{\rho_0 v_{A0}^2} - 1) v_{A0} k_\parallel v_{A1y} \quad (\text{II.5.13})$$

$$0 = -\omega v_{1z} + \frac{p_{\parallel 1}}{\rho_0} k_\parallel - \frac{p_{\parallel 0} - p_{\perp 0}}{\rho_0 v_{A0}^2} v_{A0} k_\parallel v_{A1z} \quad (\text{II.5.14})$$

$$0 = -\omega(2p_{\perp 1} + p_{\parallel 1}) + 2(p_{\parallel 0} - p_{\perp 0}) k_\parallel v_{1z} \quad (\text{II.5.15})$$

$$0 = -\omega \mathbf{v}_{A1} - k_\parallel v_{A0} \mathbf{v}_1 \quad (\text{II.5.16})$$

Après quelques manipulations, ce système peut s'écrire sous l'équation de dispersion $\overline{\mathbf{M}} \cdot \mathbf{v}_1 = 0$ avec la matrice

$$\overline{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} k_\perp & 0 & k_\parallel \\ 0 & \omega^2 - F v_{A0}^2 k_\parallel^2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2(k_\perp^2 - 2k_\parallel^2) - (G k_\perp^2 + 2F k_\parallel^2) v_{A0}^2 k_\parallel^2 \end{pmatrix} \quad (\text{II.5.17})$$

En notant $F = 1 - \frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0})$ et $G = 3\frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0}) - 2$.

La relation de dispersion est donc :

$$(\omega^2 - Fv_{A0}^2 k_{\parallel}^2)(\omega^2(k_{\perp}^2 - 2k_{\parallel}^2) - (Gk_{\perp}^2 + 2Fk_{\parallel}^2)v_{A0}^2 k_{\parallel}^2) = 0 \quad (\text{II.5.18})$$

On retrouve le mode d'Alfvén incompressible firehose $\omega_A = \pm\sqrt{F}v_{A0}k_{\parallel}$ polarisé suivant $(0, 1, 0)$. Cette solution s'exprime à travers les différentes quantités :

$$\mathbf{v}_1 = (0, 1, 0) \quad (\text{II.5.19})$$

$$\mathbf{v}_{A1} = \pm \frac{1}{\sqrt{F}} \mathbf{v}_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0})}} \mathbf{v}_1 \quad (\text{II.5.20})$$

$$p_{\parallel 1} = (2F - 1)\rho_0 v_{A0} v_{A1z} = 0 \quad (\text{II.5.21})$$

$$p_{\perp 1} = \rho_0 v_{A0} v_{A1z} = 0 \quad (\text{II.5.22})$$

On retrouve bien le comportement du mode d'Alfvén incompressible au niveau des pressions et la relation linéaire entre la vitesse et le champ magnétique. On note que cette relation est altérée par critère firehose. Ce résultat tend en faveur d'un effet de l'anisotropie de pression sur la cascade turbulence à travers l'altération firehose du mode d'Alfvén. Notre correction à la loi incompressible semble en être le reflet, mais une surprise nous attend : un nouveau mode émerge de la relation de dispersion (II.5.18).

Ce nouveau mode, polarisé suivant $(1, 0, -\tan \theta)$, est :

$$\omega_N = \pm \sqrt{\frac{Gk_{\perp}^2 + 2Fk_{\parallel}^2}{k_{\perp}^2 - 2k_{\parallel}^2}} v_{A0} k_{\parallel} = \pm \sqrt{\frac{(3\frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0}) - 2)k_{\perp}^2 + 2(1 - \frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0}))k_{\parallel}^2}{k_{\perp}^2 - 2k_{\parallel}^2}} v_{A0} k_{\parallel} \quad (\text{II.5.23})$$

Les différentes quantités sont alors :

$$\mathbf{v}_1 = (1, 0, -\tan \theta) \quad (\text{II.5.24})$$

$$\mathbf{v}_{A1} = \pm \sqrt{\frac{k_{\perp}^2 - 2k_{\parallel}^2}{Gk_{\perp}^2 + 2Fk_{\parallel}^2}} \mathbf{v}_1 \quad (\text{II.5.25})$$

$$p_{\parallel 1} = \frac{(G + F - 1)k_{\perp}^2 + 2k_{\parallel}^2}{k_{\perp}^2 - 2k_{\parallel}^2} \rho_0 v_{A0} v_{A1z} = \frac{(\beta_{\parallel 0}(1 - a_{p0}) - 2)k_{\perp}^2 + 2k_{\parallel}^2}{k_{\perp}^2 - 2k_{\parallel}^2} \rho_0 v_{A0} v_{A1z} \quad (\text{II.5.26})$$

$$\begin{aligned} p_{\perp 1} &= \frac{\rho_0}{k_{\perp}^2} \frac{4Fk_{\parallel}^2 k_{\parallel}^2 + (G - F + 2)k_{\perp}^2 k_{\parallel}^2 - k_{\perp}^2 k_{\perp}^2}{k_{\perp}^2 - 2k_{\parallel}^2} v_{A0} v_{A1z} \\ &= \frac{(2\beta_{\parallel 0}(1 - a_{p0}) - 1)(k_{\perp}^2 - k_{\parallel}^2)k_{\parallel}^2 + 3k_{\parallel}^2 k_{\parallel}^2 - k_{\perp}^2 k_{\perp}^2}{k_{\perp}^2 (k_{\perp}^2 - 2k_{\parallel}^2)} \rho_0 v_{A0} v_{A1z} \end{aligned} \quad (\text{II.5.27})$$

On retrouve des résultats similaires au mode pseudo-alfvénique donnant une pression non nulle proportionnelle à v_{A1z} mais avec des facteurs portant une dépendance angulaire complexes mêlées à l'anisotropie de pression. considérer une gyrotropie de pression semble donc lever la dégénérescence observée dans le cas incompressible avec pression isotrope (voir Chapitre 3).

Ce modèle proposé admet donc deux modes potentiellement non linéaires. Ils forment donc deux canaux de développement de la cascade. Par curiosité, une étude comparative

et paramétrique des modes d'Alfvén-firehose et du nouveau mode a été menée. Elle est résumée dans la section 5.3.

5.3 Etude paramétrique des modes linéaires du modèle incompressible gyrotrope

La linéarisation du système d'équation incompressible gyrotrope proposé a abouti sur deux modes que l'on peut exprimer en fonction de θ :

- le mode d'Alfvén-firehose : $\omega = \omega_A$ avec $\frac{\omega_A^2}{v_{A0}^2 k_{\parallel}^2} = F$ et $F = 1 - \frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0})$,
- un nouveau mode : $\omega = \omega_N$ avec $\frac{\omega_N^2}{v_{A0}^2 k_{\parallel}^2} = \frac{G \sin^2 \theta - 2F \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta - 2\cos^2 \theta}$ et $G = 3\frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0}) - 2$

Le mode d'Alfvén-firehose qui s'écrit $\omega_A = \pm \sqrt{F} v_{A0} k_{\parallel}$ est linéaire en $v_{A0} k_{\parallel}$ avec une pente dépendant de a_{p0} et $\beta_{\parallel 0}$. Le nouveau mode est aussi linéaire en $v_{A0} k_{\parallel}$ mais sa pente va aussi dépendre de θ . Ils sont représentés sur la FIGURE II.5.1 normalisé par ω_{ci} la pulsation cyclotron des ions, et en fonction de $k_{\parallel} d_i = k_{\parallel} v_{A0} / \omega_{ci}$ avec d_i la longueur inertielle ionique. Le mode d'Alfvén est représenté en bleu et le nouveau mode dans des couleurs chaudes (orange pour $\theta = 25^\circ$ et rouge pour $\theta = 70^\circ$). On remarque que le

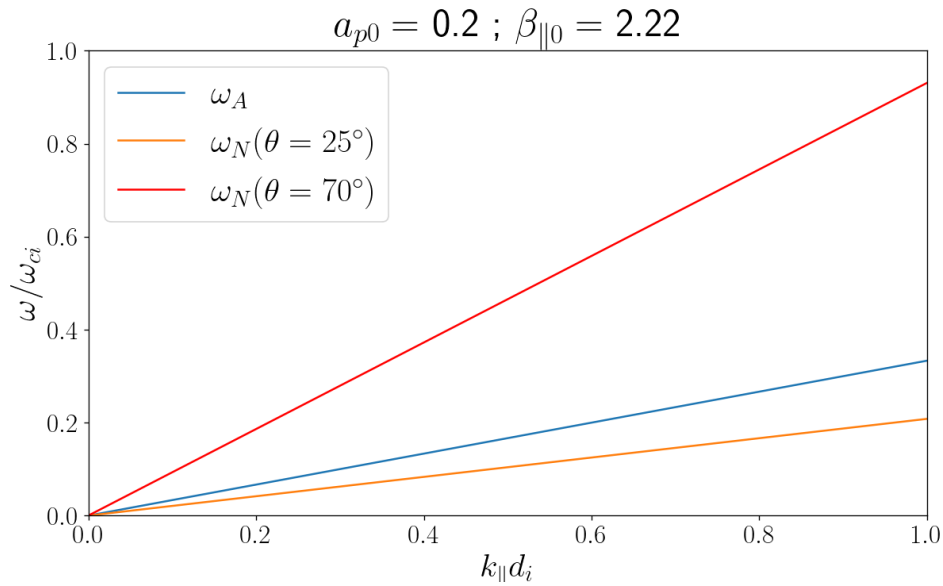


FIGURE II.5.1 – Mode d'Alfvén-firehose (ω_A , bleu) et nouveau mode (ω_N , orange pour $\theta = 25^\circ$ et rouge pour $\theta = 70^\circ$) normalisés par ω_{ci} la pulsation cyclotron des ions et représentés en fonction de $k_{\parallel} d_i$, avec $d_i = v_{A0} / \omega_{ci}$, la longueur inertielle ionique.

nouveau mode peut être plus lent ou plus rapide que le mode d'Alfvén en fonction de θ . Cela nous a amené à faire une étude paramétrique en fonction de θ des pentes de ces deux modes. Ces pentes pouvant être ou purement réelles ou purement imaginaires, cette étude est devenue une étude de stabilité. La partie imaginaire d'un mode est en effet le taux de croissance de son instabilité. La partie réelle correspond à sa vitesse de phase. Pour ces modes, le développement d'une instabilité entraîne une annulation de la vitesse de phase.

Au cours de cette étude, on a observé cinq comportements différents pour le nouveau mode suivant la valeur du couple $\{\beta_{\parallel 0}; a_{p0}\}$. Ces comportements sont résumés sur la figure II.5.2 à travers cinq couples représentatifs. Sur l'ensemble de graphiques de FIGURE II.5.2 sont tracés en fonction de θ , pour cinq couples représentatifs et chaque mode, la partie

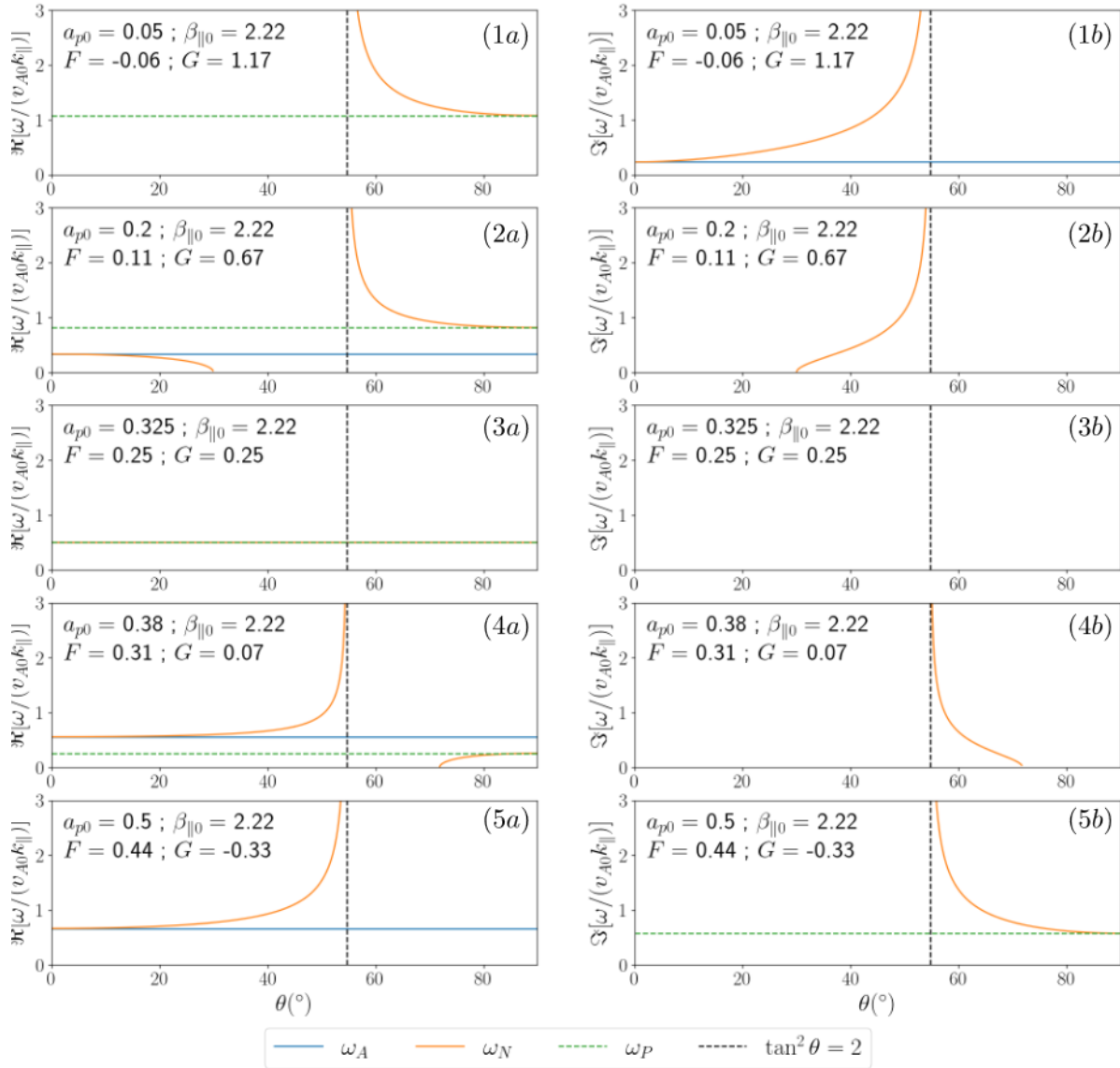


FIGURE II.5.2 – Vitesse de phase $\Re[\omega/(kv_{A0})]$ (colonne a) et taux de croissance des instabilités $\Im[\omega/(kv_{A0})]$ (colonne b) normalisées par v_{A0} en fonction de l'angle θ pour le nouveau mode incompressible (ω_N , orange) et pour le mode d'Alfvén (ω_A , bleu). Des asymptotes sont tracées en lignes discontinues. En vert : mode asymptotique ω_P . En noir : angle asymptotique θ_2 . Première ligne : couple (1) tel que $a_{p0} = 0.05$, $\beta_{\parallel 0} = 20/9 \Rightarrow$ instabilité firehose ($F < 0$). Deuxième ligne : couple (2) tel que $a_{p0} = 0.2$, $\beta_{\parallel 0} = 20/9$. Troisième ligne : couple (3) tel que $a_{p0} = 0.325$, $\beta_{\parallel 0} = 20/9 \Rightarrow$ seul cas stable pour tout θ ($F = G$). Quatrième ligne : couple (4) tel que $a_{p0} = 0.38$, $\beta_{\parallel 0} = 20/9$. Cinquième ligne : couple (5) tel que $a_{p0} = 0.5$, $\beta_{\parallel 0} = 20/9 \Rightarrow$ instabilité pseudo-firehose perpendiculaire ($G < 0$). Sauf graphique (3a) où tous les modes coïncident, lorsque qu'un mode disparaît d'un graphique de la colonne a, il apparaît sur le graphique de la colonne b.

réelle de la pente qui correspond à la vitesse de phase normalisée par la vitesse d'Alfvén de l'onde ($\Re[\omega/(kv_{A0})]$, colonne a), ainsi que sa partie imaginaire ($\Im[\omega/(kv_{A0})]$, colonne a), qui correspond au taux de croissance des instabilités. Le caractère instable firehose

du mode d'Alfvén (bleu) est retrouvé lorsque $F < 0$. Le nouveau mode semble tendre asymptotiquement vers le mode d'Alfvén pour $\theta \sim 0^\circ$ et vers un mode asymptotique, noté ω_P et représenté en part une ligne discontinue vert, pour $\theta \sim 90^\circ$. Une asymptote angulaire est aussi visible en un angle que l'on note θ_2 , on verra par la suite que cet angle est solution de $\tan^2 \theta = 2$. La stabilité du nouveau mode à une dépendance forte en θ : pour tout couple, il existe une gamme angulaire telle que le mode soit stable et, à l'exception du couple (3), une gamme telle que le mode est instable.

On propose maintenant de vérifier si les comportements identifiés pour le nouveau mode ont une forme d'universalité en fonction de a_{p0} et $\beta_{\parallel 0}$ ou s'ils sont des cas particuliers. Au fil de cette démonstration, on va construire le diagramme de la FIGURE II.5.3. Les emplacements des différents couples présentés sur la figure FIGURE II.5.2 sont indiqués par des croix rouges.

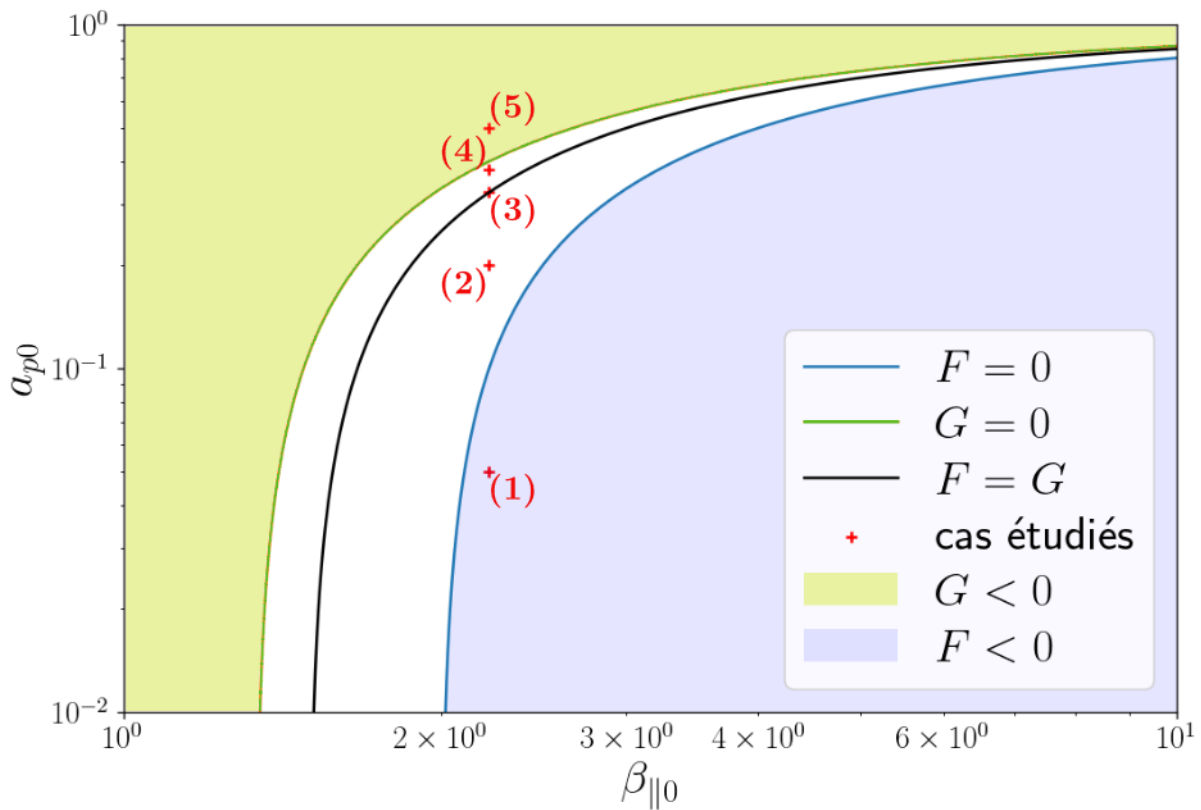


FIGURE II.5.3 – Diagramme $a_{p0} - \beta_{\parallel 0}$. Croix rouges : couples $\{\beta_{\parallel 0}; a_{p0}\}$ sélectionnés pour l'étude paramétrique de FIGURE II.5.2. Frontière d'instabilités firehose $F = 0$ (bleu) et zone instable ($F < 0$, bleue) associée. Frontière d'instabilités pseudo-firehose perpendiculaire $G = 0$ (verte) et zone instable ($G < 0$, verte) associée. Ligne noire : ensemble des couples $\{\beta_{\parallel 0}; a_{p0}\}$ stable pour tout angle θ paramétrisé par $F = G$.

Etude asymptotique angulaire : Si $\theta \rightarrow 0^\circ$ ($k_{\parallel} \gg k_{\perp}$), alors $\frac{\omega_N^2}{v_{A0}^2 k^2} \rightarrow F \cos^2 \theta$. La convergence vers le mode d'Alfvén-firehose du nouveau mode observée en $\theta \rightarrow 0^\circ$ sur la FIGURE II.5.2 est ainsi vérifiée. Comme cette limite peut être stable ou instable en fonction du signe de F , on a représenté sur la FIGURE II.5.3, la frontière $F = 0$ en bleue et bleutée la zone où $F < 0$. On retrouve dans ce comportement stable/instable

l'instabilité firehose «parallèle» qui est présente par exemple pour le mode lent dans le cadre compressible. Le couple (1), tel que $F < 0$, est un exemple instable : le nouveau mode et le mode d'Alfvén apparaissent dans la colonne du taux de croissance (graphique (1b)).

Si $\theta \rightarrow 90^\circ$ ($k_\perp \ll k_\parallel$), alors $\frac{\omega_N^2}{v_{A0}^2 k^2} \rightarrow G \cos^2 \theta$. On retrouve le mode asymptotique noté ω_P et tracé en vert sur FIGURE II.5.2. Il est instable si $G < 0$. La comparaison de G et F , qui ont la même structure à un facteur $3/2$ et un signe près, nous inspirant, on appellera cette instabilité «instabilité pseudo-firehose perpendiculaire»¹. Elle apparaît pour le couple (5) (graphique (5b)). Sur la FIGURE II.5.3, on indique la frontière $G = 0$ en vert et la zone où $G < 0$ par une aire verte.

Ainsi grâce à F et G , on peut déduire qu'une instabilité pourra se développer dans le système pour tout couple $\{\beta_{\parallel 0}; a_{p0}\}$ tel que $\frac{2}{3} > \frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1-a_{p0})$ (instabilité pseudo-firehose perpendiculaire, couple (5) et aire verte sur FIGURE II.5.3) ou $\frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1-a_{p0}) > 1$ (instabilité firehose parallèle, couple (1) et aire bleue sur FIGURE II.5.3). Dans la zone intermédiaire (blanche sur la FIGURE II.5.3), $G > 0$ et $F > 0$.

Etude angulaire complète du nouveau mode : Pour les angles θ plus obliques, le comportement de ω_N est plus difficile à établir, le signe de $\sin^2 \theta - 2 \cos^2 \theta$ venant compenser le signe de $G \sin^2 \theta - 2F \cos^2 \theta$. Une instabilité, entre l'instabilité firehose parallèle et l'instabilité pseudo-firehose perpendiculaire, pourra émerger. On la nommera «instabilité pseudo-firehose oblique». Elle apparaît pour les couples (2) (graphique (2b)) et (4) (graphique (4b)). La condition d'instabilité est obtenue pour F et G tels que :

$$(\tan^2 \theta - 2)(G \tan^2 \theta - 2F) < 0 \quad (\text{II.5.28})$$

$g(\theta) = (\tan^2 \theta - 2)(G \tan^2 \theta - 2F)$ est une parabole présentant deux racines :

- $\tan^2 \theta = 2$ en laquelle $\omega_N^2 \rightarrow \infty$ (asymptote verticale indiquée en pointillés sur FIGURE II.5.2), on la note θ_2 ,
- $\tan^2 \theta = 2\frac{F}{G}$ en laquelle $\omega_N^2 \rightarrow 0$, on la note $\theta_{F/G}$.

La stabilité du nouveau mode dépendra donc de la position de θ par rapport à θ_2 et $\theta_{F/G}$.

Pour que le nouveau mode soit stable pour tout θ , il faut $g(\theta) > 0$ pour tout θ . Cela n'est possible que si $F = G$, alors $g(\theta) = (\tan^2 \theta - 2)^2 > 0$. Dans ce cas, $\omega_N = \omega_A = \omega_P$. Sur la FIGURE II.5.3, le critère $F = G$ est indiqué par la courbe noire et il est illustré par le couple (3) (graphiques (3a) et (3b)). **Par conséquent, en fonction de a_{p0} et $\beta_{\parallel 0}$, le nouveau mode sera stable pour tout θ si et seulement si $\frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1-a_{p0}) = \frac{3}{4}$.**

$F = G$, $G = 0$ et $F = 0$ découpent le diagramme de la FIGURE II.5.3 en quatre zones que l'on va étudier séparément.

Si $G < 0$ (zone verte), alors $F > 0$. Dans ce cas, $g(\theta) < 0$ si $\theta > \theta_2$. Cette situation est illustrée par le couple (5) (graphiques (5a) et (5b)), instable pour tout angle supérieur à θ_2 . On peut raccrocher à cette condition le cas $G = 0$ puisque alors $F = 1/3$, et la parabole sera négative si $\tan^2 \theta > 2$. Dans ces cas, on retrouve l'instabilité pseudo-firehose perpendiculaire découverte asymptotiquement si $\theta \rightarrow 90^\circ$. On peut maintenant compléter ses conditions d'existence qui deviennent : **l'instabilité pseudo-firehose perpendiculaire peut se développer si $G < 0$ pour tout angle $\theta > \theta_2$.**

Si $G > 0$ et $F/G > 1$ (zone blanche délimitée par les courbes verte et noire), $g(\theta) < 0$

1. Cette dénomination n'est proposée qu'à cause de la similarité des critères d'instabilités. Le comportement des quantités n'a pas été vérifié.

si $2\frac{F}{G} > \tan^2 \theta > 2$. Cette situation est illustrée par le couple (4) (graphiques (4a) et (4b)). L'instabilité s'y développant est l'instabilité pseudo-firehose perpendiculaire.

Si $G > 0$ et $F/G < 1$ (zone blanche délimitée par les courbes bleue et noire et zone bleue), $g(\theta) < 0$ si $2 > \tan^2 \theta > 2\frac{F}{G}$. **Si $F < 0$, l'instabilité firehose parallèle se développe pour tout angle $\theta < \theta_2$.** Ce cas est illustré par le couple (1) (graphiques (1a) et (1b)). Si $F > 0$, la situation est illustrée par le couple (2) (graphiques (2a) et (2b)). L'instabilité visible est encore une fois l'instabilité pseudo-firehose perpendiculaire. Sa condition d'apparition est donc : **l'instabilité pseudo-firehose perpendiculaire peut se développer si $G > 0$ et $F > 0$ mais $G \neq F$, pour tout angle θ entre θ_2 et $\theta_{F/G}$.**

La zone de stabilité de ce nouveau mode en fonction des paramètres $\beta_{\parallel 0}$ et a_{p0} est donc quasi-inexistante. Sachant que la problématique principale de ce travail se place dans le cadre compressible, l'implémentation de ce modèle ou la recherche d'un modèle alternatif plus stable afin d'étudier plus rigoureusement la loi exacte incompressible n'ont pas été engagés.

5.4 Limite incompressible du modèle CGL

Dans le cas MHD compressible avec pression isotrope, le mode pseudo-alfvénique apparaît comme un résidu de la limite incompressible des modes compressibles magnétosoniques. Similairement, on s'est demandé si l'on pouvait retrouver une trace du nouveau mode dans la limite incompressible du modèle CGL linéaire.

Dans le cas linéaire, le modèle CGL donne l'équation de dispersion (II.6.48) que l'on va simplement noter $\overline{\mathbf{M}}\mathbf{v}_1 = 0$. Avec la contrainte incompressible $\nabla \cdot \mathbf{v}_1 = 0$, on peut écrire \mathbf{v}_1 sous la forme d'un potentiel vecteur Ω : $\mathbf{v}_1 = \nabla \times \Omega = \overline{\mathbf{N}}\Omega$ avec $\overline{\mathbf{N}} = i\mathbf{k} \times \overline{\mathbf{I}} = i \begin{pmatrix} 0 & -k_{\parallel} & 0 \\ k_{\parallel} & 0 & -k_{\perp} \\ 0 & k_{\perp} & 0 \end{pmatrix}$. Le modèle CGL linéaire surcontraint via l'incompressibilité s'exprime

alors à travers l'équation de dispersion : $\overline{\mathbf{M}}\overline{\mathbf{N}}\Omega = 0$ avec

$$\overline{\mathbf{M}}\overline{\mathbf{N}} = \begin{pmatrix} 0 & -k_{\parallel}(\frac{\omega^2 - \omega_A^2}{v_{A0}^2 k_{\parallel}^2} - (\frac{\beta_{\parallel 0}}{2} a_{p0} + 1)\frac{k_{\perp}^2}{k_{\parallel}^2}) & 0 \\ k_{\parallel} \frac{\omega^2 - \omega_A^2}{v_{A0}^2 k_{\parallel}^2} & 0 & -k_{\perp} \frac{\omega^2 - \omega_A^2}{v_{A0}^2 k_{\parallel}^2} \\ 0 & k_{\perp}(\frac{\omega^2}{v_{A0}^2 k_{\parallel}^2} - \frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(3 - a_{p0})) & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{II.5.29})$$

où $\omega_A^2 = -v_{A0}^2 k_{\parallel}^2 (\frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0}) - 1)$ correspond au mode d'Alfvén-firehose incompressible. On remarque que ce mode est solution si $\Omega_y = 0$, c'est-à-dire pour une polarisation de la vitesse orientée suivant $(0, 1, 0)$.

On a vu dans la section 5.2 que le nouveau mode est polarisé suivant $(\cos \theta, 0, -\sin \theta)$. Si l'on impose cette polarisation dans Ω on obtient $\Omega_y \neq 0$. Dans ce cas l'équation de dispersion peut alors s'écrire sous la forme du système :

$$k_{\parallel}(\omega^2 - \omega_A^2 - v_{A0}^2(\frac{\beta_{\parallel 0}}{2} a_{p0} + 1)k_{\perp}^2) = 0 \quad (\text{II.5.30})$$

$$k_{\perp}(\omega^2 - v_{A0}^2 \frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(3 - a_{p0})k_{\parallel}^2) = 0 \quad (\text{II.5.31})$$

$$k_{\parallel}\Omega_x - k_{\perp}\Omega_z = 0 \quad (\text{II.5.32})$$

On va étudier ce système en fonction de l'angle θ de propagation :

- $\theta = 0^\circ \Rightarrow k_\perp = 0$ et on suppose $k_\parallel \neq 0$, alors $\omega^2 = \omega_A^2$ et $\Omega_x = 0$. On retrouve le mode firehose parallèle associé à un champ de vitesse sera polarisé suivant $(1, 0, 0)$.
- $\theta = 90^\circ \Rightarrow k_\parallel = 0$ et on suppose $k_\perp \neq 0$, alors $\omega^2 = 0$ et $\Omega_z = 0$. On obtient un mode qui ne se propage pas et un champ de vitesse polarisé suivant $(0, 0, 1)$.
- Si $k_\parallel \neq 0$ et $k_\perp \neq 0$, alors $\omega^2 = v_{A0}^2 \frac{\beta_{\parallel 0}}{2} (3 - a_{p0}) k_\parallel^2$ et θ doit vérifier $\tan^2 \theta = \frac{2(\beta_{\parallel 0}(2-a_{p0})-1)}{\beta_{\parallel 0}a_{p0}+2}$.

Après quelques manipulations de $\omega^2 = v_{A0}^2 \frac{\beta_{\parallel 0}}{2} (3 - a_{p0}) k_\parallel^2$ et de la condition $\tan^2 \theta = \frac{2(\beta_{\parallel 0}(2-a_{p0})-1)}{\beta_{\parallel 0}a_{p0}+2}$, il est possible de faire ressortir la relation de dispersion du nouveau mode.

De plus, surcontraindre le modèle CGL par l'incompressibilité revenant à surcontraindre le modèle incompressible proposé par une équation au choix entre l'équation sur la pression parallèle ou celle sur la pression perpendiculaire, l'expression du nouveau mode présent dans un modèle incompressible avec pression gyrotrope dépendra de la fermeture imposée sur les pressions.

5.5 Synthèse : Limite incompressible et pistes d'étude

Limite incompressible de la loi exacte avec pression tensorielle et cas gyrotrope :

$$-4(\varepsilon - \varepsilon_{PP98}) = -2 \langle \delta(\bar{\mathbf{P}} - p\bar{\mathbf{I}}) : \delta(\nabla \mathbf{v}) \rangle = -2 \langle \delta\bar{\mathbf{\Pi}} : \delta(\nabla \mathbf{v}) \rangle \quad (\text{II.5.33})$$

$$-4(\varepsilon - \varepsilon_{PP98}) = -2 \left\langle \delta((p_{\parallel} - p_{\perp})(\mathbf{b}\mathbf{b} - \frac{1}{3}\bar{\mathbf{I}})) : \delta(\nabla \mathbf{v}) \right\rangle \quad (\text{II.5.34})$$

⇒ Questionne l'existence d'un modèle incompressible gyrotrope.

Modèle incompressible avec pression gyrotrope proposé compatible avec la loi exacte :

$$\partial_t \mathbf{v} + \nabla \cdot (\mathbf{v}\mathbf{v} - \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A + \frac{1}{\rho_0} \bar{\mathbf{P}}_*) = 0 \quad (\text{II.5.35})$$

$$\partial_t p + \nabla \cdot (p\mathbf{v}) + \frac{2}{3} \bar{\mathbf{\Pi}} : \nabla \mathbf{v} = 0 \quad (\text{II.5.36})$$

$$\partial_t \mathbf{v}_A - \nabla \cdot (\mathbf{v}_A \mathbf{v} - \mathbf{v} \mathbf{v}_A) = 0 \quad (\text{II.5.37})$$

$$\text{avec } \bar{\mathbf{P}}_* = (p + p_m)\bar{\mathbf{I}} + \bar{\mathbf{\Pi}}, \quad p_m = \frac{\rho_0 |\mathbf{v}_A|^2}{2}, \quad p = \frac{1}{3}(2p_{\perp} + p_{\parallel}),$$

$$\bar{\mathbf{\Pi}} = (p_{\parallel} - p_{\perp})(\mathbf{b}\mathbf{b} - \frac{1}{3}\bar{\mathbf{I}}), \quad \mathbf{b} = \frac{\mathbf{v}_A}{|\mathbf{v}_A|}, \quad \text{et } \nabla \cdot \mathbf{v} = 0.$$

Etude linéaire du modèle proposé :

— Mode d'Alfvén incompressible polarisé suivant $(0, 1, 0)$:

$$\frac{\omega^2}{v_{A0}^2 k_{\parallel}^2} + \frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0}) - 1 = 0 \quad (\text{II.5.38})$$

$$\text{Instabilité firehose : } \frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0}) - 1 > 0 \quad (\text{II.5.39})$$

— Nouveau mode polarisé suivant $(1, 0, -\tan \theta)$:

$$\frac{\omega^2}{v_{A0}^2 k_{\parallel}^2} - \frac{2(\frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0}) - 1) \cos^2 \theta + (3\frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0}) - 2) \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta - 2 \cos^2 \theta} = 0 \quad (\text{II.5.40})$$

$$\text{Critère d'instabilité pseudo-firehose : } \frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0}) \neq \frac{3}{4} \quad (\text{II.5.41})$$

Limite incompressible du modèle CGL :

- Survie du mode d'Alfvén-firehose ⇒ Solution non-linéaire, pendant gyrotrope du mode d'Alfvén non linéaire ?
- Apparition d'un mode surcontraint correspondant au nouveau mode incompressible.

PARTIE II : CHAPITRE 6

SORTIR DU CADRE MHD ET ALLER VERS LE BI-FLUIDE

Sommaire

6.1	La MHD Hall	63
6.2	Le modèle bi-fluide	64
6.3	Le modèle analysé numériquement dans la partie III	73
6.4	Synthèse de l'extension de la théorie des lois exactes à d'autres régimes	78

Dans les chapitres précédents, l'équation d'induction (??) était celle de l'approximation MHD. Dans ce chapitre, nous allons relaxer les hypothèses sur l'équation d'induction en prenant d'abord en compte le terme Hall (section 6.1). Dans la section 6.2, nous dériverons une correction à la loi exacte associée à chaque niveau d'approximation de la loi d'Ohm en partant du modèle bi-fluide. Enfin dans la section 6.3, nous nous intéresserons au modèle utilisé dans les simulations étudiées dans la partie III : un modèle CGL prenant en compte la pression électronique dans la loi d'Ohm avec différentes fermetures (isotherme et CGL).

6.1 La MHD Hall

Comme on l'a vu dans le chapitre 2 de l'Introduction, le terme Hall doit être pris en compte dans l'équation d'induction si l'on regarde des échelles proches de la longueur inertielle des ions, ou des fréquences proche de la fréquence cyclotron des ions. Par conséquent, la loi exacte obtenue avec une loi d'Ohm idéale perdra en validité en s'approchant de ces échelles. Afin de tirer la description de la cascade dans ce domaine ionique, on doit donc calculer une correction à partir du terme Hall. Diverses formulations existent pour cette contribution dans le cas des modèles dépendant d'une pression isotrope mais que devient-elle dans le cadre d'une fermeture avec pression tensorielle ?

En prenant en compte le terme Hall, l'équation d'induction devient :

$$\partial_t \mathbf{v}_A = \nabla \cdot (\mathbf{v}_A \mathbf{u} - \mathbf{u} \mathbf{v}_A) - \mathbf{u} \nabla \cdot \mathbf{v}_A + \frac{\mathbf{v}_A}{2} \nabla \cdot \mathbf{u} - \frac{\lambda}{\sqrt{\rho}} \nabla \times \left(\frac{\mathbf{j}}{\sqrt{\rho}} \times \mathbf{v}_A \right) \quad (\text{II.6.1})$$

avec $\lambda = m_i/|q_e|$, constante analysée dans le chapitre 2 de l'Introduction, $\mathbf{j} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0}} \nabla \times (\sqrt{\rho} \mathbf{v}_A)$, la densité de courant et μ_0 la perméabilité du vide.

Puisque $\sqrt{\rho} \mathbf{v}_A \cdot \nabla \times \left(\frac{\mathbf{j}}{\sqrt{\rho}} \times \mathbf{v}_A \right) = \nabla \cdot ((\mathbf{j} \times \mathbf{v}_A) \times \mathbf{v}_A)$, l'équation d'énergie magnétique (??) devient :

$$\partial_t E_m + \nabla \cdot (E_m \mathbf{v} + \lambda (\mathbf{j} \times \mathbf{v}_A) \times \mathbf{v}_A) = \rho \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A : \nabla \mathbf{v} - p_m \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (\text{II.6.2})$$

Cette correction n'ajoute qu'un terme de type flux au bilan énergétique et n'impactera pas l'équation d'énergie interne. De plus, le terme Hall ne dépend pas du tenseur de pression. Par conséquent, elle n'influera pas littéralement sur les contributions du tenseur de pression et de l'énergie interne dans la loi exacte. Il faudra tout de même faire attention à ne pas utiliser les formes conservatives des pressions parallèle et perpendiculaire CGL (II.4.9) qui ne sont valables que dans le cas MHD, l'équation d'induction MHD étant utilisée pour les obtenir.

En notant génériquement ε_{mhd} le taux de cascade compressible obtenu avec un modèle dans lequel le terme Hall est négligé et ε_{hall} la correction Hall, le nouveau taux de cascade sera $\varepsilon = \varepsilon_{mhd} + \varepsilon_{hall}$ avec :

$$\begin{aligned}
 -4\varepsilon_{hall} = & \lambda \nabla_{\ell} \cdot \left\langle (\mathbf{j} \times \mathbf{v}_A + \mathbf{j}' \times \mathbf{v}'_A) \times \delta \mathbf{v}_A - \delta \left(\frac{\mathbf{j}}{\rho} \times \mathbf{v}_A \right) \times (\rho \mathbf{v}_A + \rho' \mathbf{v}'_A) \right\rangle \\
 & + \frac{\lambda}{2} \left\langle (\rho' \mathbf{v}'_A \cdot \delta \mathbf{v}_A - \delta (\rho \mathbf{v}_A) \cdot \mathbf{v}'_A) \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{j}}{\rho} \right) - (\rho \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{v}_A - \delta (\rho \mathbf{v}_A) \cdot \mathbf{v}_A) \nabla' \cdot \left(\frac{\mathbf{j}'}{\rho'} \right) \right\rangle \\
 & - \lambda \left\langle \left(\rho' \mathbf{v}'_A \cdot \delta \left(\frac{\mathbf{j}}{\rho} \right) - \mathbf{v}'_A \cdot \delta \mathbf{j} \right) \nabla \cdot \mathbf{v}_A - \left(\rho \mathbf{v}_A \cdot \delta \left(\frac{\mathbf{j}}{\rho} \right) - \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{j} \right) \nabla' \cdot \mathbf{v}'_A \right\rangle
 \end{aligned}
 \tag{II.6.3}$$

Ce résultat est une adaptation à nos notations du résultat obtenu par ANDRÉS *et al.* 2018 qui utilise la même fonction de corrélations de l'énergie magnétique, $\mathcal{R}_m = \frac{1}{4} \langle (\rho' + \rho) \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A \rangle$, que nous.

Dans le cas incompressible avec pression isotrope, diverses formes de ε_{hall} existent et ont été comparées par FERRAND, GALTIER *et al.* 2019. On retiendra la forme qu'ils ont dérivée et qui peut être retrouvée en prenant la limite incompressible de la correction (II.6.3) :

$$-4\varepsilon_{hall} \xrightarrow{\rho=\rho_0} -\frac{\lambda}{2} \nabla_{\ell} \cdot \langle \delta \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{v}_A \delta \mathbf{j} - 2 \delta \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{j} \delta \mathbf{v}_A \rangle
 \tag{II.6.4}$$

Similairement à la correction compressible, cette correction est applicable à notre loi incompressible avec pression gyrotrope.

Linéairement, le terme Hall va adapter les modes MHD et CGL afin d'y faire apparaître le mouvement gyrotropique des ions lorsqu'on s'approche de la fréquence cyclotron ionique $\omega_{ci} = \frac{B_0}{\lambda}$. Des modes whistlers (sifflants) et cyclotron ionique vont émerger. Pour plus de détails, se référer à la dérivation effectuée par HUNANA *et al.* 2019. On notera que plus l'angle de propagation sera oblique par rapport à \mathbf{b}_0 et plus la correction Hall à la relation de dispersion sera affaiblie. En terme d'instabilité, l'instabilité firehose sera quelque peu stabilisée. En effet, le critère d'instabilité devient $\frac{\beta_{\parallel 0}}{2} (1 - a_{p0}) > 1 + \frac{k_{\parallel}^2 v_{A0}^2}{4\omega_{ci}^2}$. Par conséquent, la zone de stabilité du cadran $a_{p0} < 1$ dans le diagramme $a_{p0} - \beta_{\parallel 0}$ (FIGURE II.4.1) sera élargie : en $a_{p0} = 0$, le critère rejoindra $\beta_{\parallel 0} = 2 + \frac{k_{\parallel}^2 v_{A0}^2}{2\omega_{ci}^2}$ qui est supérieur au $\beta_{\parallel 0} = 2$ obtenu dans le cas CGL idéal. Le critère miroir ne sera quant à lui pas modifié.

6.2 Le modèle bi-fluide

Par curiosité, je me suis demandé à quoi ressemblerait la loi exacte si l'on prenait en compte l'ensemble de la loi d'Ohm généralisée (.2.13) dans l'équation d'induction. Au lieu d'attaquer ce problème en relaxant petit à petit les approximations appliquées sur la loi d'Ohm, j'ai choisi de partir du modèle bi-fluide puis d'y prendre en compte la quasi-neutralité et de l'exprimer en fonction des grandeurs mono-fluide et enfin d'y injecter la loi d'Ohm généralisée. Il est ensuite possible de faire tendre la loi exacte obtenue

vers différents régimes similairement au travail effectué par BANERJEE et ANDRÉS 2020. Contrairement à BANERJEE et ANDRÉS 2020 proposant une loi dérivée avec un modèle bi-fluide fermé polytropiquement et similairement à la dérivation effectuée dans le chapitre 4, on considèrera des pressions tensorielles et les équations d'énergie interne associée à chaque espèce en négligeant les flux de chaleur. Pour alléger un peu le calcul, on ne fait pas apparaître non plus les termes de forçage et dissipation.

La fonction de corrélation pour l'énergie électromagnétique sera choisie au plus près de celle utilisée jusqu'à présent c'est-à-dire $\langle \rho \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}'_A \rangle$.

Les équations bi-fluides utilisées sont :

$$\partial_t \rho_\alpha + \nabla \cdot (\rho_\alpha \mathbf{v}_\alpha) = 0 \quad (\text{II.6.5})$$

$$\partial_t (\rho_\alpha \mathbf{v}_\alpha) + \nabla \cdot (\rho_\alpha \mathbf{v}_\alpha \mathbf{v}_\alpha + \overline{\mathbf{P}_\alpha}) - Q_\alpha \mathbf{E} - \mathbf{j}_\alpha \times \mathbf{B} = 0 \quad (\text{II.6.6})$$

$$\partial_t u_\alpha + \mathbf{v}_\alpha \cdot \nabla u_\alpha + \frac{1}{\rho_\alpha} \overline{\mathbf{P}_\alpha} : \nabla \mathbf{v}_\alpha = 0 \quad (\text{II.6.7})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E} \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\text{II.6.8})$$

$$\partial_t \mathbf{B} + \nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (\text{II.6.9})$$

avec $Q = \sum_\alpha Q_\alpha = \sum_\alpha q_\alpha n_\alpha$, $\mathbf{j} = \sum_\alpha \mathbf{j}_\alpha = \sum_\alpha q_\alpha n_\alpha \mathbf{v}_\alpha$.

Ces équations contiennent beaucoup de quantités constantes : m_α dans ρ_α , q_α pour chaque espèce, μ_0 , ε_0 . Afin de réduire ce nombre de constantes qui viendront alourdir les calculs et de faire ressortir des constantes caractéristiques du plasma, nous allons normaliser les équations¹. Ces constantes caractéristiques sont le rapport de masse $\mu = \frac{m_e}{m_i + m_e} \simeq \frac{m_e}{m_i}$ puisque $m_e \ll m_i$, qui permet d'accéder facilement aux régimes MHD ($\mu \rightarrow 0$) ou MHD électronique (EMHD, $\mu \rightarrow 1$) et une longueur inertielle sans dimension $\lambda = \frac{\sqrt{m_i + m_e}}{L_0 \sqrt{\mu_0 n_0 e^2}} \simeq \frac{\sqrt{m_i}}{L_0 \sqrt{\mu_0 n_0 e^2}}$. Les vitesses seront normalisées par la vitesse de la lumière dans le vide c , et l'on note les quantités de références :

- Longueur : L_0
- Temps : $t_0 = \frac{L_0}{c}$
- Vitesse : $V_0 = c$
- Densité de particule : n_0
- Champ magnétique : $B_0 = c \sqrt{\mu_0 n_0 (m_i + m_e)}$
- Champ électrique : $E_0 = c B_0$
- Pression : $P_0 = (m_i + m_e) n_0 c^2$

On pourrait noter les quantités sans dimension avec un « \sim », par exemple $\tilde{\mathbf{v}}_i = \mathbf{v}_i / V_0$, etc. Cependant, dans la suite de cette section, on ne fera pas apparaître les « \sim » afin d'alléger les notations.

1. Cela n'a pas été entrepris dans les modèles mono-fluides utilisés précédemment, car cela n'apportait aucune simplification ou information dans ces modèles.

Le système sans dimension s'écrit donc :

$$\partial_t n_i + \nabla \cdot (n_i \mathbf{v}_i) = 0 \quad (\text{II.6.10})$$

$$\partial_t n_e + \nabla \cdot (n_e \mathbf{v}_e) = 0 \quad (\text{II.6.11})$$

$$\partial_t \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_i \cdot \nabla \mathbf{v}_i + \frac{1}{(1-\mu)n_i} \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}}_i - \frac{1}{(1-\mu)\lambda} \mathbf{E} - \frac{1}{(1-\mu)\lambda} \mathbf{v}_i \times \mathbf{B} = 0 \quad (\text{II.6.12})$$

$$\partial_t \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_e \cdot \nabla \mathbf{v}_e + \frac{1}{\mu n_e} \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}}_e + \frac{1}{\mu\lambda} \mathbf{E} + \frac{1}{\mu\lambda} \mathbf{v}_e \times \mathbf{B} = 0 \quad (\text{II.6.13})$$

$$\partial_t u_i + \mathbf{v}_i \cdot \nabla u_i + \frac{1}{(1-\mu)n_i} \overline{\mathbf{P}}_i : \nabla \mathbf{v}_i = 0 \quad (\text{II.6.14})$$

$$\partial_t u_e + \mathbf{v}_e \cdot \nabla u_e + \frac{1}{\mu n_e} \overline{\mathbf{P}}_e : \nabla \mathbf{v}_e = 0 \quad (\text{II.6.15})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\lambda} (n_i - n_e) \quad \nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{\lambda} (n_i \mathbf{v}_i - n_e \mathbf{v}_e) + \partial_t \mathbf{E} \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\text{II.6.16})$$

$$\partial_t \mathbf{B} + \nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (\text{II.6.17})$$

Les grandeurs mono-fluides seront alors définies telles que $\rho = (1-\mu)n_i + \mu n_e$ pour la densité, $\mathbf{v} = \frac{(1-\mu)n_i \mathbf{v}_i + \mu n_e \mathbf{v}_e}{(1-\mu)n_i + \mu n_e}$ pour la vitesse, $\mathbf{j} = \frac{1}{\lambda} (n_i \mathbf{v}_i - n_e \mathbf{v}_e)$ pour la densité de courant. Elles permettront de compacter un peu les équations. En combinant les équations (??), (II.6.12) et (II.6.13), on obtient l'évolution de \mathbf{j} qui sera nécessaire pour remplacer \mathbf{E} dans (II.6.17) :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} = & -\frac{\rho}{\mu n_i + (1-\mu)n_e} \mathbf{v} \times \mathbf{B} - \frac{\lambda(2\mu-1)}{\mu n_i + (1-\mu)n_e} \mathbf{j} \times \mathbf{B} + \lambda \frac{\mu \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}}_i - (1-\mu) \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}}_e}{\mu n_i + (1-\mu)n_e} \\ & + \frac{\lambda^2 \mu (1-\mu)}{\mu n_i + (1-\mu)n_e} \left[\partial_t \mathbf{j} + \nabla \cdot \left(\frac{\rho \rho}{n_i n_e} \mathbf{v} \mathbf{j} + \frac{\rho \rho}{n_i n_e} \mathbf{j} \mathbf{v} + \frac{\lambda(2\mu-1)n_i}{n_i n_e} \mathbf{j} \mathbf{j} \right) \right] \\ & + \frac{\lambda \mu (1-\mu)}{\mu n_i + (1-\mu)n_e} \nabla \cdot \left(\frac{n_e - n_i}{n_i n_e} (\rho^2 \mathbf{v} \mathbf{v} + \mu^2 \lambda^2 \mathbf{j} \mathbf{j}) \right) \end{aligned} \quad (\text{II.6.18})$$

Contrairement à la loi d'Ohm détaillée dans le chapitre 2, on n'y suppose ni la quasi-neutralité ($n_i = n_e = \rho$) qui vient annuler la dernière ligne, ni $\mu \rightarrow 0$. A partir d'ici, on supposera l'hypothèse non-relativiste, qui permet de négliger les termes dépendant de \mathbf{E} devant ceux dépendant de \mathbf{B} dans (II.6.12) et (II.6.13) et (II.6.16). Comme on a besoin de l'équation d'induction, on doit garder le champ électrique dans l'équation (II.6.18) et (II.6.17). L'hypothèse non relativiste sera donc appliquée sur (II.6.18) en fonction de l'usage.

On définit aussi la vitesse d'Alfvén telle que $\mathbf{v}_A = \frac{\mathbf{B}}{\sqrt{(1-\mu)n_i + \mu n_e}}$. L'énergie totale non relativiste de ce système peut ainsi être séparée entre une énergie totale ionique et une électronique :

$$E_{tot} = E_{toti} + E_{tote} = \frac{1}{2} (1-\mu)n_i (|\mathbf{v}_i|^2 + |\mathbf{v}_A|^2 + 2u_i) + \frac{1}{2} \mu n_e (|\mathbf{v}_e|^2 + |\mathbf{v}_A|^2 + 2u_e)$$

L'équation d'induction (II.6.17) s'écrit en fonction de la vitesse d'Alfvén :

$$\partial_t \mathbf{v}_A = -\frac{\nabla \times \mathbf{E}}{\sqrt{(1-\mu)n_i + \mu n_e}} + \frac{\mathbf{v}_A \nabla \cdot ((1-\mu)n_i \mathbf{v}_i + \mu n_e \mathbf{v}_e)}{2(1-\mu)n_i + \mu n_e} \quad (\text{II.6.19})$$

$$(\text{II.6.20})$$

En appliquant la méthode résumée dans la section I.3 sur les fonctions de corrélations d'énergie totale ionique, $\mathcal{R}_{toti} = \frac{1-\mu}{4} \langle (n'_i + n_i)(\mathbf{v}'_i \cdot \mathbf{v}_i + \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A) + 2n'_i u_i + 2n_i u'_i \rangle$, et électronique, $\mathcal{R}_{tote} = \frac{\mu}{4} \langle (n'_e + n_e)(\mathbf{v}'_e \cdot \mathbf{v}_e + \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A) + 2n'_e u_e + 2n_e u'_e \rangle$ puis en supposant les hypothèses de stationnarité statistique et de séparation d'échelles de Kolmogorov, on obtient les lois exactes pour les taux de cascade, ε_i et ε_e , associés à chaque fluide et exprimés dans la zone inertielle :

$$\begin{aligned}
-4\varepsilon_i = & (1-\mu) \left(\nabla_\ell \cdot \langle \delta(n_i \mathbf{v}_i) \cdot \delta \mathbf{v}_i \delta \mathbf{v}_i \rangle + \langle \delta \mathbf{v}_i \cdot (n_i \mathbf{v}_i \nabla' \cdot \mathbf{v}'_i - n'_i \mathbf{v}'_i \nabla \cdot \mathbf{v}_i) \rangle \right) \\
& + 2(1-\mu) \left(\nabla_\ell \cdot \langle \delta n_i \delta u_i \delta \mathbf{v}_i \rangle + \langle \delta u_i (n_i \nabla' \cdot \mathbf{v}'_i - n'_i \nabla \cdot \mathbf{v}_i) \rangle \right) \\
& + \nabla_\ell \cdot \left\langle \delta(n_i \mathbf{v}_i) \cdot \delta \overline{\mathbf{P}}_i \delta \left(\frac{1}{n_i} \right) \right\rangle + \left\langle \delta \overline{\mathbf{P}}_i : \left(n_i \mathbf{v}_i \nabla' \left(\frac{1}{n'_i} \right) - n'_i \mathbf{v}'_i \nabla \left(\frac{1}{n_i} \right) \right) \right\rangle \\
& + 2 \left\langle \delta \left(\frac{\overline{\mathbf{P}}_i}{n_i} \right) : (n'_i \nabla \mathbf{v}_i - n_i \nabla' \mathbf{v}'_i) \right\rangle \\
& + \frac{1-\mu}{2} \left\langle \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A \left[\frac{(1-\mu)(n'_i - n_i) - 2\mu n_e}{\rho} \nabla \cdot (n_i \mathbf{v}_i) + \frac{\mu(n'_i + n_i)}{\rho} \nabla \cdot (n_e \mathbf{v}_e) \right] \right\rangle \\
& + \frac{1-\mu}{2} \left\langle \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}'_A \left[\frac{(1-\mu)(n_i - n'_i) - 2\mu n'_e}{\rho'} \nabla' \cdot (n'_i \mathbf{v}'_i) + \frac{\mu(n'_i + n_i)}{\rho'} \nabla' \cdot (n'_e \mathbf{v}'_e) \right] \right\rangle \\
& + \frac{1}{\lambda} \left\langle (n'_i + n_i) \left(\mathbf{v}'_i \cdot \mathbf{v}_i \times (\sqrt{\rho} \mathbf{v}_A) + \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}'_i \times (\sqrt{\rho'} \mathbf{v}'_A) \right) \right\rangle \\
& - (1-\mu) \left\langle (n'_i + n_i) \left(\frac{\nabla' \cdot (\mathbf{E}' \times \mathbf{v}_A)}{\sqrt{\rho'}} + \frac{\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{v}'_A)}{\sqrt{\rho}} \right) \right\rangle \tag{II.6.21}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-4\varepsilon_e = & \mu \left(\nabla_\ell \cdot \langle \delta(n_e \mathbf{v}_e) \cdot \delta \mathbf{v}_e \delta \mathbf{v}_e \rangle + \langle \delta \mathbf{v}_e \cdot (n_e \mathbf{v}_e \nabla' \cdot \mathbf{v}'_e - n'_e \mathbf{v}'_e \nabla \cdot \mathbf{v}_e) \rangle \right) \\
& + 2\mu \left(\nabla_\ell \cdot \langle \delta n_e \delta u_e \delta \mathbf{v}_e \rangle + \langle \delta u_e (n_e \nabla' \cdot \mathbf{v}'_e - n'_e \nabla \cdot \mathbf{v}_e) \rangle \right) \\
& + \nabla_\ell \cdot \left\langle \delta(n_e \mathbf{v}_e) \cdot \delta \overline{\mathbf{P}}_e \delta \left(\frac{1}{n_e} \right) \right\rangle + \left\langle \delta \overline{\mathbf{P}}_e : \left(n_e \mathbf{v}_e \nabla' \left(\frac{1}{n'_e} \right) - n'_e \mathbf{v}'_e \nabla \left(\frac{1}{n_e} \right) \right) \right\rangle \\
& + 2 \left\langle \delta \left(\frac{\overline{\mathbf{P}}_e}{n_e} \right) : (n'_e \nabla \mathbf{v}_e - n_e \nabla' \mathbf{v}'_e) \right\rangle \\
& + \frac{\mu}{2} \left\langle \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A \left[\frac{\mu(n'_e - n_e) - 2(1-\mu)n_i}{\rho} \nabla \cdot (n_e \mathbf{v}_e) + \frac{(1-\mu)(n'_e + n_e)}{\rho} \nabla \cdot (n_i \mathbf{v}_i) \right] \right\rangle \\
& + \frac{\mu}{2} \left\langle \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}'_A \left[\frac{\mu(n_e - n'_e) - 2(1-\mu)n'_i}{\rho'} \nabla' \cdot (n'_e \mathbf{v}'_e) + \frac{(1-\mu)(n'_e + n_e)}{\rho'} \nabla' \cdot (n'_i \mathbf{v}'_i) \right] \right\rangle \\
& + \frac{1}{\lambda} \left\langle (n'_e + n_e) \left(\mathbf{v}'_e \cdot \mathbf{v}_e \times (\sqrt{\rho} \mathbf{v}_A) + \mathbf{v}_e \cdot \mathbf{v}'_e \times (\sqrt{\rho'} \mathbf{v}'_A) \right) \right\rangle \\
& - \mu \left\langle (n'_e + n_e) \left(\frac{\nabla' \cdot (\mathbf{E}' \times \mathbf{v}_A)}{\sqrt{\rho'}} + \frac{\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{v}'_A)}{\sqrt{\rho}} \right) \right\rangle \tag{II.6.22}
\end{aligned}$$

On y retrouve des fonctions de structures et des termes sources similaires à ceux dérivés dans les cas MHD et CGL (voir équations (II.4.16), (II.4.18) et (??)) pour les contributions cinétique et thermodynamique (\mathbf{v}_i , \mathbf{v}_e , u_i , u_e , $\overline{\mathbf{P}}_i$ et $\overline{\mathbf{P}}_e$). Par contre, la contribution électromagnétique diffère (quatre dernières lignes de (II.6.21) et (II.6.22)). On remarque d'ailleurs qu'elle reflète le couplage des deux fluides par le champ électromagnétique étant donné que dans (II.6.21) comme dans (II.6.22) elle dépend de \mathbf{E} , \mathbf{v}_A , \mathbf{v}_i , \mathbf{v}_e , n_i et n_e .

Pour réduire cette contribution, on doit sommer (II.6.21) et (II.6.22). On obtient ainsi après quelques manipulations, la loi exacte pour l'énergie totale bi-fluide :

$$\begin{aligned}
 -4\varepsilon = & (1 - \mu) \left(\nabla_\ell \cdot \langle \delta(n_i \mathbf{v}_i) \cdot \delta \mathbf{v}_i \delta \mathbf{v}_i \rangle + \langle \delta \mathbf{v}_i \cdot (n_i \mathbf{v}_i \nabla' \cdot \mathbf{v}'_i - n'_i \mathbf{v}'_i \nabla \cdot \mathbf{v}_i) \rangle \right) \\
 & + \mu \left(\nabla_\ell \cdot \langle \delta(n_e \mathbf{v}_e) \cdot \delta \mathbf{v}_e \delta \mathbf{v}_e \rangle + \langle \delta \mathbf{v}_e \cdot (n_e \mathbf{v}_e \nabla' \cdot \mathbf{v}'_e - n'_e \mathbf{v}'_e \nabla \cdot \mathbf{v}_e) \rangle \right) \\
 & + 2(1 - \mu) \left(\nabla_\ell \cdot \langle \delta n_i \delta u_i \delta \mathbf{v}_i \rangle + \langle \delta u_i (n_i \nabla' \cdot \mathbf{v}'_i - n'_i \nabla \cdot \mathbf{v}_i) \rangle \right) \\
 & + 2\mu \left(\nabla_\ell \cdot \langle \delta n_e \delta u_e \delta \mathbf{v}_e \rangle + \langle \delta u_e (n_e \nabla' \cdot \mathbf{v}'_e - n'_e \nabla \cdot \mathbf{v}_e) \rangle \right) \\
 & + \nabla_\ell \cdot \left\langle \delta(n_i \mathbf{v}_i) \cdot \delta \overline{\mathbf{P}}_i \delta \left(\frac{1}{n_i} \right) \right\rangle + \left\langle \delta \overline{\mathbf{P}}_i : \left(n_i \mathbf{v}_i \nabla' \left(\frac{1}{n'_i} \right) - n'_i \mathbf{v}'_i \nabla \left(\frac{1}{n_i} \right) \right) \right\rangle \\
 & + \nabla_\ell \cdot \left\langle \delta(n_e \mathbf{v}_e) \cdot \delta \overline{\mathbf{P}}_e \delta \left(\frac{1}{n_e} \right) \right\rangle + \left\langle \delta \overline{\mathbf{P}}_e : \left(n_e \mathbf{v}_e \nabla' \left(\frac{1}{n'_e} \right) - n'_e \mathbf{v}'_e \nabla \left(\frac{1}{n_e} \right) \right) \right\rangle \\
 & + 2 \left\langle \delta \left(\frac{\overline{\mathbf{P}}_i}{n_i} \right) : (n'_i \nabla \mathbf{v}_i - n_i \nabla' \mathbf{v}'_i) + \delta \left(\frac{\overline{\mathbf{P}}_e}{n_e} \right) : (n'_e \nabla \mathbf{v}_e - n_e \nabla' \mathbf{v}'_e) \right\rangle \\
 & - \nabla_\ell \cdot \left\langle (\rho' + \rho) \left(\frac{\mathbf{E}' \times \mathbf{v}_A}{\sqrt{\rho'}} - \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{v}'_A}{\sqrt{\rho}} \right) \right\rangle + \frac{1}{2} \langle (\rho' - \rho) \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}'_A (\nabla \cdot \mathbf{v} - \nabla' \cdot \mathbf{v}') \rangle \\
 & + \left\langle (\rho' - \rho) \left(\left(-\frac{\mathbf{E} \times \mathbf{v}'_A}{\sqrt{\rho}} + \frac{1}{2} \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}'_A \mathbf{v} \right) \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} + \left(\frac{\mathbf{E}' \times \mathbf{v}_A}{\sqrt{\rho'}} - \frac{1}{2} \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A \mathbf{v}' \right) \cdot \frac{\nabla' \rho'}{\rho'} \right) \right\rangle \\
 & + \frac{1}{\lambda} \left\langle (n'_i + n_i) (\mathbf{v}'_i \cdot \mathbf{v}_i \times (\sqrt{\rho} \mathbf{v}_A) + \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}'_i \times (\sqrt{\rho'} \mathbf{v}'_A)) \right\rangle \\
 & - \frac{1}{\lambda} \left\langle (n'_e + n_e) (\mathbf{v}'_e \cdot \mathbf{v}_e \times (\sqrt{\rho} \mathbf{v}_A) + \mathbf{v}_e \cdot \mathbf{v}'_e \times (\sqrt{\rho'} \mathbf{v}'_A)) \right\rangle
 \end{aligned}
 \tag{II.6.23}$$

Cette loi dépend de μ , n_i , n_e , \mathbf{v}_i et \mathbf{v}_e explicitement et à travers ρ et \mathbf{v} . Elle dépend aussi de u_i , u_e , $\overline{\mathbf{P}}_i$ et $\overline{\mathbf{P}}_e$ et de λ , \mathbf{v}_A et \mathbf{E} . \mathbf{E} peut y être remplacé par la loi d'Ohm (II.6.18) si besoin.

On peut aussi exprimer la loi (II.6.23) en fonction des quantités mono-fluides en remplaçant \mathbf{v}_i et \mathbf{v}_e avec $\mathbf{v}_i = \frac{\rho}{n_i} \mathbf{v} + \frac{\lambda \mu}{n_i} \mathbf{j}$ et $\mathbf{v}_e = \frac{\rho}{n_e} \mathbf{v} - \frac{\lambda(1-\mu)}{n_e} \mathbf{j}$. On supposera aussi le fluide quasi-neutre, c'est-à-dire $n_i = n_e = \rho$ et on va travailler les termes séparément en fonction de leur dépendance.

Tout d'abord les deux premières lignes, purement cinétiques :

$$\begin{aligned}
 -4\varepsilon_{[1-2]} = & (1 - \mu) \left(\nabla_\ell \cdot \langle \delta(n_i \mathbf{v}_i) \cdot \delta \mathbf{v}_i \delta \mathbf{v}_i \rangle + \langle \delta \mathbf{v}_i \cdot (n_i \mathbf{v}_i \nabla' \cdot \mathbf{v}'_i - n'_i \mathbf{v}'_i \nabla \cdot \mathbf{v}_i) \rangle \right) \\
 & + \mu \left(\nabla_\ell \cdot \langle \delta(n_e \mathbf{v}_e) \cdot \delta \mathbf{v}_e \delta \mathbf{v}_e \rangle + \langle \delta \mathbf{v}_e \cdot (n_e \mathbf{v}_e \nabla' \cdot \mathbf{v}'_e - n'_e \mathbf{v}'_e \nabla \cdot \mathbf{v}_e) \rangle \right)
 \end{aligned}
 \tag{II.6.24}$$

$$\begin{aligned}
 = & \nabla_\ell \cdot \langle \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{v} \delta \mathbf{v} \rangle + \langle \delta \mathbf{v} \cdot (\rho \mathbf{v} \nabla' \cdot \mathbf{v}' - \rho' \mathbf{v}' \nabla \cdot \mathbf{v}) \rangle \\
 & + \lambda^2 \mu (1 - \mu) \nabla_\ell \cdot \left\langle \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \delta \left(\frac{\mathbf{j}}{\rho} \right) \delta \left(\frac{\mathbf{j}}{\rho} \right) + \delta \mathbf{j} \cdot \delta \mathbf{v} \delta \left(\frac{\mathbf{j}}{\rho} \right) + \delta \mathbf{j} \cdot \delta \left(\frac{\mathbf{j}}{\rho} \right) \delta \mathbf{v} \right\rangle \\
 & + \lambda^2 \mu (1 - \mu) \left\langle \delta \frac{\mathbf{j}}{\rho} \cdot (\mathbf{j} \nabla' \cdot \mathbf{v}' - \mathbf{j} \nabla \cdot \mathbf{v}) \right\rangle \\
 & + \lambda^2 \mu (1 - \mu) \left\langle \left(\mathbf{j} \cdot \delta \mathbf{v} + \rho \mathbf{v} \cdot \delta \frac{\mathbf{j}}{\rho} \right) \nabla' \cdot \frac{\mathbf{j}'}{\rho'} - \left(\mathbf{j}' \cdot \delta \mathbf{v} + \rho \mathbf{v} \cdot \delta \frac{\mathbf{j}}{\rho} \right) \nabla \cdot \frac{\mathbf{j}}{\rho} \right\rangle \\
 & + \lambda^3 \mu (1 - \mu) (2\mu - 1) \left(\nabla_\ell \cdot \left\langle \delta \mathbf{j} \cdot \delta \left(\frac{\mathbf{j}}{\rho} \right) \delta \left(\frac{\mathbf{j}}{\rho} \right) \right\rangle + \left\langle \delta \left(\frac{\mathbf{j}}{\rho} \right) \cdot \left(\mathbf{j} \nabla' \cdot \frac{\mathbf{j}'}{\rho'} - \mathbf{j}' \nabla \cdot \frac{\mathbf{j}}{\rho} \right) \right\rangle \right)
 \end{aligned}
 \tag{II.6.25}$$

Lorsque $\mu \rightarrow 0$ (MHD) ou $\mu \rightarrow 1$ (EMHD), seule la première ligne de (II.6.25) subsiste. On remarque aussi que les lignes suivantes sont en λ^2 et λ^3 , par conséquent ils tendront rapidement vers 0 pour des échelles L_0 grandes devant la longueur d'inertie du plasma.

Ensuite les deux lignes dépendant de l'énergie interne nous donne, en notant $u =$

$(1 - \mu) u_i + \mu u_e :$

$$\begin{aligned} -4\varepsilon_{[3-4]} &= 2(1 - \mu) (\nabla_{\ell} \cdot \langle \delta n_i \delta u_i \delta \mathbf{v}_i \rangle + \langle \delta u_i (n_i \nabla' \cdot \mathbf{v}'_i - n'_i \nabla \cdot \mathbf{v}_i) \rangle) \\ &\quad + 2\mu (\nabla_{\ell} \cdot \langle \delta n_e \delta u_e \delta \mathbf{v}_e \rangle + \langle \delta u_e (n_e \nabla' \cdot \mathbf{v}'_e - n'_e \nabla \cdot \mathbf{v}_e) \rangle) \end{aligned} \quad (\text{II.6.26})$$

$$\begin{aligned} &= 2 (\nabla_{\ell} \cdot \langle \delta \rho \delta u \delta \mathbf{v} \rangle + \langle \delta u (\rho \nabla' \cdot (\mathbf{v}') - \rho' \nabla \cdot (\mathbf{v})) \rangle) \\ &\quad + 2\lambda \mu (1 - \mu) \nabla_{\ell} \cdot \left\langle \delta \rho \delta (u_i - u_e) \delta \left(\frac{\mathbf{j}}{\rho} \right) \right\rangle \\ &\quad + 2\lambda \mu (1 - \mu) \left\langle \delta (u_i - u_e) \left(\rho \nabla' \cdot \left(\frac{\mathbf{j}'}{\rho'} \right) - \rho' \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{j}}{\rho} \right) \right) \right\rangle \end{aligned} \quad (\text{II.6.27})$$

Ici aussi, Lorsque $\mu \rightarrow 0$ (MHD) ou $\mu \rightarrow 1$ (EMHD), seule la première ligne de (II.6.27) subsiste.

Les trois lignes de (II.6.23) dépendant des tenseurs de pressions s'écrivent en notant $\overline{\mathbf{P}}_i = \overline{\mathbf{P}}_i + \overline{\mathbf{P}}_e :$

$$\begin{aligned} -4\varepsilon_{[5-7]} &= \nabla_{\ell} \cdot \left\langle \delta (n_i \mathbf{v}_i) \cdot \delta \overline{\mathbf{P}}_i \delta \left(\frac{1}{n_i} \right) \right\rangle + \left\langle \delta \overline{\mathbf{P}}_i : \left(n_i \mathbf{v}_i \nabla' \left(\frac{1}{n'_i} \right) - n'_i \mathbf{v}'_i \nabla \left(\frac{1}{n_i} \right) \right) \right\rangle \\ &\quad + \nabla_{\ell} \cdot \left\langle \delta (n_e \mathbf{v}_e) \cdot \delta \overline{\mathbf{P}}_e \delta \left(\frac{1}{n_e} \right) \right\rangle + \left\langle \delta \overline{\mathbf{P}}_e : \left(n_e \mathbf{v}_e \nabla' \left(\frac{1}{n'_e} \right) - n'_e \mathbf{v}'_e \nabla \left(\frac{1}{n_e} \right) \right) \right\rangle \\ &\quad + 2 \left\langle \delta \left(\frac{\overline{\mathbf{P}}_i}{n_i} \right) : (n'_i \nabla \mathbf{v}_i - n_i \nabla' \mathbf{v}'_i) + \delta \left(\frac{\overline{\mathbf{P}}_e}{n_e} \right) : (n'_e \nabla \mathbf{v}_e - n_e \nabla' \mathbf{v}'_e) \right\rangle \end{aligned} \quad (\text{II.6.28})$$

$$\begin{aligned} &= \nabla_{\ell} \cdot \left\langle \delta (\rho \mathbf{v}) \cdot \delta \overline{\mathbf{P}} \delta \left(\frac{1}{\rho} \right) \right\rangle + \left\langle \delta \overline{\mathbf{P}} : \left(\rho \mathbf{v} \nabla' \left(\frac{1}{\rho'} \right) - \rho' \mathbf{v}' \nabla \left(\frac{1}{\rho} \right) \right) \right\rangle \\ &\quad + 2 \left\langle \delta \left(\frac{\overline{\mathbf{P}}}{\rho} \right) : (\rho' \nabla \mathbf{v} - \rho \nabla' \mathbf{v}') \right\rangle \\ &\quad + \lambda \nabla_{\ell} \cdot \left\langle \delta \mathbf{j} \cdot \delta (\mu \overline{\mathbf{P}}_i - (1 - \mu) \overline{\mathbf{P}}_e) \delta \left(\frac{1}{\rho} \right) \right\rangle \\ &\quad + \lambda \left\langle \delta (\mu \overline{\mathbf{P}}_i - (1 - \mu) \overline{\mathbf{P}}_e) : \left(\mathbf{j} \nabla' \left(\frac{1}{\rho'} \right) - \mathbf{j}' \nabla \left(\frac{1}{\rho} \right) \right) \right\rangle \\ &\quad + 2\lambda \left\langle \delta \left(\mu \frac{\overline{\mathbf{P}}_i}{\rho} - (1 - \mu) \frac{\overline{\mathbf{P}}_e}{\rho} \right) : \left(\rho' \nabla \left(\frac{\mathbf{j}}{\rho} \right) - \rho \nabla' \left(\frac{\mathbf{j}'}{\rho'} \right) \right) \right\rangle \end{aligned} \quad (\text{II.6.29})$$

Dans les deux premières lignes de (II.6.29), on retrouve la formulation f3 (??) de la contribution du tenseur de pression de la loi générale MHD gyrotrope (II.4.20). Elles s'écrivent de la même manière, que les quantités soient sans dimension ou pas. Les lignes suivantes dépendent de la densité de courant \mathbf{j} et des tenseurs de pressions. Elles rappellent la contribution thermique de la loi d'Ohm (II.6.18) et ne s'annulent pas complètement si $\mu \rightarrow 0$ ou $\mu \rightarrow 1$.

Les quatre dernières lignes de (II.6.23) dépendant de la vitesse d'Alfvén et du champ

électrique. En y appliquant la même transformation qu'aux autres lignes, elles deviennent :

$$\begin{aligned}
 & - 4 \quad \varepsilon_{[8-11]} \\
 & = -\nabla_{\ell} \cdot \left\langle (\rho' + \rho) \left(\frac{\mathbf{E}' \times \mathbf{v}_A}{\sqrt{\rho'}} - \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{v}'_A}{\sqrt{\rho}} \right) \right\rangle + \frac{1}{2} \langle (\rho' - \rho) \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}'_A (\nabla \cdot \mathbf{v} - \nabla' \cdot \mathbf{v}') \rangle \\
 & + \left\langle (\rho' - \rho) \left(\left(-\frac{\mathbf{E} \times \mathbf{v}'_A}{\sqrt{\rho}} + \frac{1}{2} \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}'_A \mathbf{v} \right) \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} + \left(\frac{\mathbf{E}' \times \mathbf{v}_A}{\sqrt{\rho'}} - \frac{1}{2} \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A \mathbf{v}' \right) \cdot \frac{\nabla' \rho'}{\rho'} \right) \right\rangle \\
 & + \frac{1}{\lambda} \left\langle (n'_i + n_i) \left(\mathbf{v}'_i \cdot \mathbf{v}_i \times (\sqrt{\rho} \mathbf{v}_A) + \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}'_i \times (\sqrt{\rho'} \mathbf{v}'_A) \right) \right\rangle \\
 & - \frac{1}{\lambda} \left\langle (n'_e + n_e) \left(\mathbf{v}'_e \cdot \mathbf{v}_e \times (\sqrt{\rho} \mathbf{v}_A) + \mathbf{v}_e \cdot \mathbf{v}'_e \times (\sqrt{\rho'} \mathbf{v}'_A) \right) \right\rangle \quad (\text{II.6.30})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & = -\nabla_{\ell} \cdot \left\langle (\rho' + \rho) \left(\frac{\mathbf{E}' \times \mathbf{v}_A}{\sqrt{\rho'}} - \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{v}'_A}{\sqrt{\rho}} \right) \right\rangle + \frac{1}{2} \langle (\rho' - \rho) \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}'_A (\nabla \cdot \mathbf{v} - \nabla' \cdot \mathbf{v}') \rangle \\
 & + \frac{1}{2} \left\langle (\rho' - \rho) \left(\left(-\frac{\mathbf{E} \times \mathbf{v}'_A}{\sqrt{\rho}} + \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}'_A \mathbf{v} \right) \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} + \left(\frac{\mathbf{E}' \times \mathbf{v}_A}{\sqrt{\rho'}} - \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A \mathbf{v}' \right) \cdot \frac{\nabla' \rho'}{\rho'} \right) \right\rangle \\
 & + \left\langle \left(\frac{1}{\rho'} + \frac{1}{\rho} \right) \left(\mathbf{j}' \cdot \rho \mathbf{v} \times (\sqrt{\rho} \mathbf{v}_A) + \mathbf{j} \cdot \rho' \mathbf{v}' \times (\sqrt{\rho'} \mathbf{v}'_A) \right) \right\rangle \\
 & + \lambda (2\mu - 1) \left\langle \left(\frac{1}{\rho'} + \frac{1}{\rho} \right) \left(\mathbf{j}' \cdot \mathbf{j} \times (\sqrt{\rho} \mathbf{v}_A) + \mathbf{j} \cdot \mathbf{j}' \times (\sqrt{\rho'} \mathbf{v}'_A) \right) \right\rangle \\
 & + \left\langle \left(\frac{1}{\rho'} + \frac{1}{\rho} \right) \left(\rho \mathbf{v}' \cdot \mathbf{j} \times (\sqrt{\rho} \mathbf{v}_A) + \rho' \mathbf{v} \cdot \mathbf{j}' \times (\sqrt{\rho'} \mathbf{v}'_A) \right) \right\rangle \quad (\text{II.6.31})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & = -\nabla_{\ell} \cdot \left\langle (\rho' + \rho) \left(\frac{\mathbf{E}' \times \mathbf{v}_A}{\sqrt{\rho'}} - \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{v}'_A}{\sqrt{\rho}} \right) \right\rangle + \frac{1}{2} \langle (\rho' - \rho) \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}'_A (\nabla \cdot \mathbf{v} - \nabla' \cdot \mathbf{v}') \rangle \\
 & + \frac{1}{2} \left\langle (\rho' - \rho) \left(\left(-\frac{\mathbf{E} \times \mathbf{v}'_A}{\sqrt{\rho}} + \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}'_A \mathbf{v} \right) \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} + \left(\frac{\mathbf{E}' \times \mathbf{v}_A}{\sqrt{\rho'}} - \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A \mathbf{v}' \right) \cdot \frac{\nabla' \rho'}{\rho'} \right) \right\rangle \\
 & + \left\langle \left(\frac{1}{\rho'} + \frac{1}{\rho} \right) \left(\mathbf{j}' \cdot \rho \mathbf{v} \times (\sqrt{\rho} \mathbf{v}_A) + \mathbf{j} \cdot \rho' \mathbf{v}' \times (\sqrt{\rho'} \mathbf{v}'_A) \right) \right\rangle \\
 & + \lambda (2\mu - 1) \left\langle \left(\frac{1}{\rho'} + \frac{1}{\rho} \right) \left(\mathbf{j}' \cdot \mathbf{j} \times (\sqrt{\rho} \mathbf{v}_A) + \mathbf{j} \cdot \mathbf{j}' \times (\sqrt{\rho'} \mathbf{v}'_A) \right) \right\rangle \\
 & + \nabla_{\ell} \cdot \left\langle (\rho + \rho') \left(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'_A \mathbf{v}'_A - \frac{1}{2} \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}'_A \mathbf{v} - \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A + \frac{1}{2} \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}_A \mathbf{v}' \right) \right\rangle \\
 & + \left\langle (\rho' \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A - \frac{1}{2} \rho' \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}_A \mathbf{v}') \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} + (\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'_A \mathbf{v}'_A - \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}'_A \mathbf{v}) \cdot \frac{\nabla' \rho'}{\rho'} \right\rangle \quad (\text{II.6.32})
 \end{aligned}$$

La dernière égalité est obtenue en remplaçant \mathbf{j} par $\nabla \times (\sqrt{\rho} \mathbf{v}_A)$ dans la dernière ligne de (II.6.32). Les termes résultants rappellent les fonctions de structures $\langle \delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \delta \mathbf{v}_A \delta \mathbf{v} \rangle$, $\langle \delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \delta \mathbf{v} \delta \mathbf{v}_A \rangle$, $\langle \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{v}_A \delta \mathbf{v}_A \rangle$ et $\left\langle \delta(\rho \mathbf{v}) \delta \left(\frac{\rho \mathbf{v}_A^2}{2} \right) \delta(1/\rho) \right\rangle$ présentent dans les lois MHD. Pour les faire apparaître, il nous manque des termes qui sont cachés dans la première ligne. On doit y remplacer \mathbf{E} qui provient de l'équation d'induction grâce à la loi d'Ohm (II.6.18). On peut aussi l'utiliser pour remplacer \mathbf{E} dans la deuxième ligne. Et sa version non relativiste permettra de remplacer $\lambda(2\mu - 1) \mathbf{j} \times \sqrt{\rho} \mathbf{v}_A + \rho \mathbf{v} \times \sqrt{\rho} \mathbf{v}_A$ dans les troisième et quatrième lignes.

La loi d'Ohm (II.6.18) devient avec l'hypothèse quasi-neutre et en fonction de la vitesse

d'Alfvén :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} = & -\mathbf{v} \times \sqrt{\rho} \mathbf{v}_A - \frac{\lambda(2\mu-1)}{\rho} \mathbf{j} \times \sqrt{\rho} \mathbf{v}_A + \lambda \frac{\mu \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}}_i - (1-\mu) \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}}_e}{\rho} \\ & + \frac{\lambda^2 \mu (1-\mu)}{\rho} \left[\partial_t \mathbf{j} + \nabla \cdot (\mathbf{v} \mathbf{j} + \mathbf{j} \mathbf{v} + \frac{\lambda(2\mu-1)}{\rho} \mathbf{j} \mathbf{j}) \right] \end{aligned} \quad (\text{II.6.33})$$

Sa version non relativiste est :

$$\begin{aligned} \rho \mathbf{v} \times \sqrt{\rho} \mathbf{v}_A + \lambda(2\mu-1) \mathbf{j} \times \sqrt{\rho} \mathbf{v}_A = & \frac{\lambda^2 \mu (1-\mu)}{\rho} [\partial_t \mathbf{j} + \nabla \cdot (\mathbf{v} \mathbf{j} + \mathbf{j} \mathbf{v} + \lambda(2\mu-1) \mathbf{j} \mathbf{j})] \\ & + \lambda(\mu \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}}_i - (1-\mu) \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}}_e) \end{aligned} \quad (\text{II.6.34})$$

On va maintenant appliquer (II.6.33) et (II.6.34) dans (II.6.32) contribution par contribution :

— Pour la contribution MHD :

$$\begin{aligned} -4 \quad \varepsilon_{[8-11]}^{MHD} &= \nabla_\ell \cdot \left\langle (\rho + \rho') (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'_A \mathbf{v}'_A - \frac{1}{2} \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}'_A \mathbf{v} - \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A + \frac{1}{2} \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}_A \mathbf{v}') \right\rangle \\ &+ \nabla_\ell \cdot \langle (\rho' + \rho) ((\mathbf{v}' \times \mathbf{v}'_A) \times \mathbf{v}_A - (\mathbf{v} \times \mathbf{v}_A) \times \mathbf{v}'_A) \rangle \\ &+ \frac{1}{2} \langle (\rho' - \rho) \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}'_A (\nabla \cdot \mathbf{v} - \nabla' \cdot \mathbf{v}') \rangle \\ &+ \frac{1}{2} \left\langle (\rho' - \rho) ((\mathbf{v} \times \mathbf{v}_A) \times \mathbf{v}'_A + \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}'_A \mathbf{v}) \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} \right\rangle \\ &- \frac{1}{2} \left\langle (\rho' - \rho) ((\mathbf{v}' \times \mathbf{v}'_A) \times \mathbf{v}_A + \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A \mathbf{v}') \cdot \frac{\nabla' \rho'}{\rho'} \right\rangle \\ &+ \left\langle (\rho' \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A - \frac{1}{2} \rho' \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}_A \mathbf{v}') \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} + (\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'_A \mathbf{v}'_A - \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}'_A \mathbf{v}) \cdot \frac{\nabla' \rho'}{\rho'} \right\rangle \\ &= \nabla_\ell \cdot \left\langle \delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \delta \mathbf{v}'_A \delta \mathbf{v} + \delta(\frac{\rho' \mathbf{v}'_A^2}{2}) \delta(\rho \mathbf{v}) \delta(\frac{1}{\rho}) - \delta \mathbf{v}_A \cdot \delta(\rho \mathbf{v}) \delta \mathbf{v}_A - \delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \delta \mathbf{v} \delta \mathbf{v}_A \right\rangle \\ &+ \frac{1}{2} \langle (\delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \mathbf{v}'_A - \delta \mathbf{v}_A \cdot \rho' \mathbf{v}'_A) \nabla \cdot \mathbf{v} - (\delta(\rho' \mathbf{v}'_A) \cdot \mathbf{v}_A - \rho \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{v}_A) \nabla' \cdot \mathbf{v}' \rangle \\ &+ \left\langle \delta(\frac{\rho \mathbf{v}_A^2}{2}) (\rho \mathbf{v} \cdot \nabla' \frac{1}{\rho'} - \rho' \mathbf{v}' \cdot \nabla \frac{1}{\rho}) \right\rangle \\ &- \langle (2\rho \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v}_A + \rho \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{v}) - \mathbf{v}_A \cdot \delta(\rho \mathbf{v}) \rangle \nabla' \cdot \mathbf{v}'_A \\ &+ \langle (2\rho' \mathbf{v}' \cdot \delta \mathbf{v}_A + \rho' \mathbf{v}'_A \cdot \delta \mathbf{v} - \mathbf{v}'_A \cdot \delta(\rho \mathbf{v})) \nabla \cdot \mathbf{v}_A \rangle \end{aligned} \quad (\text{II.6.35})$$

On retrouve bien la contribution électromagnétique dérivée dans le cas MHD (voir équations (??) et (??) pour les termes de pression magnétique)². Elle ne dépend ni de μ ni de λ donc elle ne diffèrera pas que l'on soit dans le régime MHD ou EMHD.

2. On a fait en sorte de choisir les quantités servant à normaliser le système d'équation telles que les résultats présentés dans ce mémoire se recoupent.

— Pour la contribution Hall :

$$\begin{aligned}
-4\varepsilon_{[8-11]}^{Hall} &= \lambda(2\mu-1) \nabla_{\ell} \cdot \left\langle (\rho' + \rho) \left(\left(\frac{1}{\rho'} \mathbf{j}' \times \mathbf{v}'_A \right) \times \mathbf{v}_A - \left(\frac{1}{\rho} \mathbf{j} \times \mathbf{v}_A \right) \times \mathbf{v}'_A \right) \right\rangle \\
&\quad - \frac{\lambda(2\mu-1)}{2} \left\langle (\rho' - \rho) \left(\left(\frac{1}{\rho} \mathbf{j} \times \mathbf{v}_A \right) \times \mathbf{v}'_A \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} - \left(\frac{1}{\rho'} \mathbf{j}' \times \mathbf{v}'_A \right) \times \mathbf{v}_A \cdot \frac{\nabla' \rho'}{\rho'} \right) \right\rangle \\
&= -\lambda(2\mu-1) \nabla_{\ell} \cdot \left\langle (\mathbf{j}' \times \mathbf{v}'_A + \mathbf{j} \times \mathbf{v}_A) \times \delta \mathbf{v}_A - \delta \left(\frac{1}{\rho} \mathbf{j} \times \mathbf{v}_A \right) \times (\rho' \mathbf{v}'_A + \rho \mathbf{v}_A) \right\rangle \\
&\quad + \lambda(2\mu-1) \left\langle \left(\frac{\rho'}{\rho} - 1 \right) \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{j} \nabla \cdot \mathbf{v}_A + \left(\frac{\rho}{\rho'} - 1 \right) \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{j}' \nabla' \cdot \mathbf{v}'_A \right\rangle \\
&\quad - \frac{\lambda(2\mu-1)}{2} \left\langle (\rho' - \rho) \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A \nabla \cdot \frac{\mathbf{j}}{\rho} - (\rho' - \rho) \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}'_A \nabla' \cdot \frac{\mathbf{j}'}{\rho'} \right\rangle
\end{aligned} \tag{II.6.36}$$

Dans le cas $\mu \rightarrow 0$, on retrouve le résultat de la section 6.1 (II.6.3).

— Pour la contribution des pressions :

$$\begin{aligned}
-4 \varepsilon_{[8-11]}^{\nabla P} &= -\lambda\mu \nabla_{\ell} \cdot \left\langle (\rho' + \rho) \left(\frac{1}{\sqrt{\rho'}} \left(\frac{1}{\rho'} \nabla' \cdot \overline{\mathbf{P}}'_i \right) \times \mathbf{v}_A - \frac{1}{\sqrt{\rho}} \left(\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}}_i \right) \times \mathbf{v}'_A \right) \right\rangle \\
&\quad + \lambda\mu \left\langle (\rho' - \rho) \left(\frac{1}{\sqrt{\rho}} \left(\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}}_i \right) \times \mathbf{v}'_A \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} - \frac{1}{\sqrt{\rho'}} \left(\frac{1}{\rho'} \nabla' \cdot \overline{\mathbf{P}}'_i \right) \times \mathbf{v}_A \cdot \frac{\nabla' \rho'}{\rho'} \right) \right\rangle \\
&\quad + \lambda\mu \left\langle \left(\frac{1}{\rho'} + \frac{1}{\rho} \right) \left(\mathbf{j} \cdot \nabla' \cdot \overline{\mathbf{P}}'_i + \mathbf{j}' \cdot \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}}_i \right) \right\rangle \\
&\quad + \lambda(1-\mu) \nabla_{\ell} \cdot \left\langle (\rho' + \rho) \left(\frac{1}{\sqrt{\rho'}} \left(\frac{1}{\rho'} \nabla' \cdot \overline{\mathbf{P}}'_e \right) \times \mathbf{v}_A - \frac{1}{\sqrt{\rho}} \left(\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}}_e \right) \times \mathbf{v}'_A \right) \right\rangle \\
&\quad - \lambda(1-\mu) \left\langle (\rho' - \rho) \left(\frac{1}{\sqrt{\rho}} \left(\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}}_e \right) \times \mathbf{v}'_A \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} - \frac{1}{\sqrt{\rho'}} \left(\frac{1}{\rho'} \nabla' \cdot \overline{\mathbf{P}}'_e \right) \times \mathbf{v}_A \cdot \frac{\nabla' \rho'}{\rho'} \right) \right\rangle \\
&\quad - \lambda(1-\mu) \left\langle \left(\frac{1}{\rho'} + \frac{1}{\rho} \right) \left(\mathbf{j} \cdot \nabla' \cdot \overline{\mathbf{P}}'_e + \mathbf{j}' \cdot \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}}_e \right) \right\rangle
\end{aligned} \tag{II.6.37}$$

Dans la section 6.3, nous verrons (dans le cadre $\mu \rightarrow 0$) une autre formulation de cette contribution prenant en compte les termes présents dans (II.6.29).

— Pour la contribution inertielle :

$$\begin{aligned}
& - 4 \quad \varepsilon_{[8-11]}^{inert} \tag{II.6.38} \\
& = -\lambda^2 \mu (1 - \mu) \nabla_{\ell} \cdot \left\langle \frac{\rho' + \rho}{\rho' \sqrt{\rho'}} \left[\partial_t \mathbf{j}' + \nabla' \cdot \left(\mathbf{v}' \mathbf{j}' + \mathbf{j}' \mathbf{v}' + \frac{(2\mu - 1)}{\rho'} \lambda \mathbf{j}' \mathbf{j}' \right) \right] \times \mathbf{v}_A \right\rangle \\
& \quad + \lambda^2 \mu (1 - \mu) \nabla_{\ell} \cdot \left\langle \frac{\rho' + \rho}{\rho \sqrt{\rho}} \left[\partial_t \mathbf{j} + \nabla \cdot \left(\mathbf{v} \mathbf{j} + \mathbf{j} \mathbf{v} + \frac{(2\mu - 1)}{\rho} \lambda \mathbf{j} \mathbf{j} \right) \right] \times \mathbf{v}'_A \right\rangle \\
& \quad + \lambda^2 \mu (1 - \mu) \left\langle \frac{\rho' + \rho}{\rho \sqrt{\rho}} \left[\partial_t \mathbf{j} + \nabla \cdot \left(\mathbf{v} \mathbf{j} + \mathbf{j} \mathbf{v} + \frac{(2\mu - 1)}{\rho} \lambda \mathbf{j} \mathbf{j} \right) \right] \times \mathbf{v}'_A \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} \right\rangle \\
& \quad - \lambda^2 \mu (1 - \mu) \left\langle \frac{\rho' + \rho}{\rho' \sqrt{\rho'}} \left[\partial_t \mathbf{j}' + \nabla' \cdot \left(\mathbf{v}' \mathbf{j}' + \mathbf{j}' \mathbf{v}' + \frac{(2\mu - 1)}{\rho'} \lambda \mathbf{j}' \mathbf{j}' \right) \right] \times \mathbf{v}_A \cdot \frac{\nabla' \rho'}{\rho'} \right\rangle \\
& \quad + \lambda^2 \mu (1 - \mu) \left\langle \left(\frac{1}{\rho'} + \frac{1}{\rho} \right) \mathbf{j}' \cdot \left[\partial_t \mathbf{j} + \nabla \cdot \left(\mathbf{v} \mathbf{j} + \mathbf{j} \mathbf{v} + \frac{(2\mu - 1)}{\rho} \lambda \mathbf{j} \mathbf{j} \right) \right] \right\rangle \\
& \quad + \lambda^2 \mu (1 - \mu) \left\langle \left(\frac{1}{\rho'} + \frac{1}{\rho} \right) \mathbf{j} \cdot \left[\partial_t \mathbf{j}' + \nabla' \cdot \left(\mathbf{v}' \mathbf{j}' + \mathbf{j}' \mathbf{v}' + \frac{(2\mu - 1)}{\rho'} \lambda \mathbf{j}' \mathbf{j}' \right) \right] \right\rangle
\end{aligned}$$

Cette contribution est nulle si $\mu \rightarrow 0$ (cas MHD) mais aussi si $\mu \rightarrow 1$ (cas EMHD). Ces termes, en λ^2 sont aussi nuls aux grandes échelles. Cette expression est gardée brute car on ne l'utilisera pas par la suite, mais, si besoin est, on pourrait y appliquer la stationnarité statistique et l'équation de continuité pour supprimer la dépendance en $\partial_t \mathbf{j}$.

En dérivant une loi exacte pour un modèle bi-fluide, puis en travaillant sur les différentes contributions avec la loi d'Ohm généralisée et l'hypothèse de quasi-neutralité, on vient d'obtenir différents niveaux de correction qui viennent étendre la description de la cascade turbulente d'énergie totale à de multiples systèmes par exemple les deux régimes asymptotiques (MHD et EMHD). **A noter que la loi exacte obtenue est valable pour des fermetures quelconques appliquées aux ions et aux électrons tant qu'elles sont en accord avec les équations d'énergie interne (II.6.14) et (II.6.15).** En fonction de l'usage, il sera toujours possible de retravailler les termes pour obtenir des formulations potentiellement plus pratiques à analyser. Les termes dépendant de la pression électroniques présents dans (II.6.29) et (II.6.37) seront par exemple reformulés dans le cadre $\mu \rightarrow 0$, dans la section 6.3.

6.3 Le modèle analysé numériquement dans la partie III

Originellement, le modèle CGL est pensé en supposant des électrons dit «froids» ($\beta_e \gg 1$ avec $\beta_e = \frac{p_e}{p_m}$) c'est-à-dire en considérant un mono-fluide d'ions HUNANA *et al.* 2019. Les quantités électroniques n'interviennent donc pas. Dans la Partie III, nous allons analyser des résultats de simulations fluides prenant en compte l'anisotropie de pression. Le modèle simulé suppose $\mu \ll 1$, prend en compte la correction Hall donnée dans la section 6.1 et retrouvée dans la section 6.2 ainsi que la correction ∇P_e . Il faudra donc prendre en compte les termes dépendant de la pression électroniques présents dans (II.6.29) et (II.6.37). Nous allons ici les analyser plus en détail.

Le modèle simulé est constitué des équations suivantes :

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (\text{II.6.39})$$

$$\partial_t (\rho \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v} - \rho \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A) + \nabla \overline{\mathbf{P}}_* = 0 \quad (\text{II.6.40})$$

$$\partial_t \overline{\mathbf{P}}_i + \nabla \cdot (\mathbf{v} \overline{\mathbf{P}}_i) + (\overline{\mathbf{P}}_i \cdot \nabla \mathbf{v})^S = 0 \quad (\text{II.6.41})$$

$$\begin{aligned} \partial_t \overline{\mathbf{P}}_e + \nabla \cdot (\mathbf{v} \overline{\mathbf{P}}_e) + (\overline{\mathbf{P}}_e \cdot \nabla \mathbf{v})^S &= \lambda \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{j}}{\rho} \overline{\mathbf{P}}_e \right) + \lambda \left(\overline{\mathbf{P}}_e \cdot \nabla \left(\frac{\mathbf{j}}{\rho} \right) \right)^S \\ \partial_t \mathbf{v}_A - \nabla \cdot (\mathbf{v}_A \mathbf{v} - \mathbf{v} \mathbf{v}_A) + \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{v}_A - \frac{\mathbf{v}_A}{2} \nabla \cdot \mathbf{v} &= -\frac{\lambda}{\sqrt{\rho}} \nabla \times \left(\frac{\mathbf{j}}{\sqrt{\rho}} \times \mathbf{v}_A \right) + \frac{\lambda}{\sqrt{\mu_0 \rho}} \nabla \times \left(\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}}_e \right) \end{aligned} \quad (\text{II.6.42})$$

avec $\overline{\mathbf{P}}_* = \overline{\mathbf{P}}_i + \overline{\mathbf{P}}_e + p_m \overline{\mathbf{I}}$ et $p_m = \frac{1}{2} \rho |\mathbf{v}_A|^2$. Dans un premier lot de simulation, la pression électronique sera considérée comme isotrope isotherme et dans le deuxième comme gyrotrope. A noter que dans le cas où la pression électronique est isotrope et que le premier principe thermodynamique (??) est valable, on peut définir une enthalpie électronique telle que $h = u_e + \frac{m_i}{m_e} \frac{p_e}{\rho}$. Si l'hypothèse adiabatique/isentrope s'applique dans le système, alors le terme thermique de l'équation d'induction (II.6.42) s'annule puisque $\nabla \times \left(\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}}_e \right) = \nabla \times \left(\frac{1}{\rho} \nabla p_e \right) = \frac{m_i}{m_e} \nabla \times \nabla h = 0$. Par principe de précaution, nous le prendrons tout de même en compte dans notre analyse.

En terme d'énergétique, l'équation de densité d'énergie cinétique (??) n'est modifiée que par la prise en compte de la pression électronique dans la pression totale (sa forme ne changera pas). Celle de densité d'énergie magnétique devient :

$$\begin{aligned} \partial_t E_m + \nabla \cdot \left(E_m \mathbf{v} + \lambda \left((\mathbf{j} \times \mathbf{v}_A) \times \mathbf{v}_A + \frac{\mathbf{v}_A}{\sqrt{\mu_0 \rho}} \times \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}}_e - \frac{\mathbf{j}}{\rho} \cdot \overline{\mathbf{P}}_e \right) \right) \\ = \rho \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A : \nabla \mathbf{v} - p_m \nabla \cdot \mathbf{v} - \lambda \overline{\mathbf{P}}_e : \nabla \left(\frac{\mathbf{j}}{\rho} \right) \end{aligned} \quad (\text{II.6.43})$$

sachant que :

$$\sqrt{\frac{\rho}{\mu_0}} \mathbf{v}_A \cdot \nabla \times \left(\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}}_e \right) = -\nabla \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{\mu_0 \rho}} \mathbf{v}_A \times \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}}_e \right) + \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{j}}{\rho} \cdot \overline{\mathbf{P}}_e \right) - \overline{\mathbf{P}}_e : \nabla \left(\frac{\mathbf{j}}{\rho} \right) \quad (\text{II.6.44})$$

Et celle d'énergie interne, définie telle que $\rho u = \rho_i u_i + \rho_e u_e = \frac{1}{2} \overline{\mathbf{P}}_i : \overline{\mathbf{I}} + \frac{1}{2} \overline{\mathbf{P}}_e : \overline{\mathbf{I}}$:

$$\partial_t (\rho u) + \nabla \cdot (\rho u \mathbf{v}) + (\overline{\mathbf{P}}_i + \overline{\mathbf{P}}_e) : \nabla \mathbf{v} = \lambda \nabla \cdot \left(\frac{m_e}{m_i} u_e \mathbf{j} \right) + \lambda \overline{\mathbf{P}}_e : \nabla \left(\frac{\mathbf{j}}{\rho} \right) \quad (\text{II.6.45})$$

Puisque $\mu \ll 1$, a priori le terme $\lambda \nabla \cdot \left(\frac{m_e}{m_i} u_e \mathbf{j} \right)$ pourra être négligé. Similairement, $\rho \simeq \rho_i$ donc on pourrait négliger u_e dans $u = u_i + \frac{m_e}{m_i} u_e$. Mais en pratique, il s'avèrera que ce ne sera pas tout à fait le cas. On va donc les prendre en compte. Le dernier terme de (II.6.45) étant relié à $\sqrt{\rho} \mathbf{v}_A \cdot \nabla \times \left(\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}}_e \right)$ et à des termes flux via (II.6.44), sa contribution en tant que source dans le bilan énergétique s'annulera dans le cas particulier où l'on peut faire apparaître l'enthalpie h . Dans le bilan énergétique total, ce dernier terme vient compenser le terme $-\lambda \overline{\mathbf{P}}_e : \nabla \left(\frac{\mathbf{j}}{\rho} \right)$ émergeant dans (II.6.43) à cause de la prise en compte de la pression électronique dans l'équation d'induction (II.6.42).

Les termes contribuant au taux de cascade qui n'ont pas été pris en compte dans (II.4.20) ni (II.6.3) seront donc $\frac{\lambda}{\sqrt{\mu_0\rho}}\nabla \times \left(\frac{1}{\rho}\nabla \cdot \overline{\mathbf{P}_e}\right)$ dans (II.6.42) et $\lambda\nabla \cdot \left(\frac{m_e}{m_i}u_e\mathbf{j}\right) + \lambda\overline{\mathbf{P}_e} : \nabla \left(\frac{\mathbf{j}}{\rho}\right)$ dans (II.6.45). La correction résultante à la loi exacte s'écrit après quelques manipulations :

$$\begin{aligned}
 -4 \varepsilon_{pe} &= \frac{\lambda}{\sqrt{\mu_0}} \left\langle (\rho' + \rho)(\mathbf{v}_A \cdot (\frac{1}{\sqrt{\rho'}}\nabla' \times (\frac{1}{\rho'}\nabla' \cdot \overline{\mathbf{P}'_e})) + \mathbf{v}'_A \cdot (\frac{1}{\sqrt{\rho}}\nabla \times (\frac{1}{\rho}\nabla \cdot \overline{\mathbf{P}_e}))) \right\rangle \\
 &+ 2\lambda \left\langle \frac{\rho'}{\rho}(\nabla \cdot (\mu u_e \mathbf{j}) + \overline{\mathbf{P}_e} : \nabla(\frac{\mathbf{j}}{\rho})) + \frac{\rho}{\rho'}(\nabla' \cdot (\mu u'_e \mathbf{j}') + \overline{\mathbf{P}'_e} : \nabla'(\frac{\mathbf{j}'}{\rho'})) \right\rangle \\
 &= -2\lambda(\nabla_\ell \cdot \left\langle \delta\rho\delta(\frac{\mathbf{j}}{\rho} \cdot \overline{\mathbf{P}_e})\delta(\frac{1}{\rho}) \right\rangle - \left\langle (\rho'\nabla(\frac{1}{\rho}) - \rho\nabla'(\frac{1}{\rho'})) \cdot \delta(\frac{\mathbf{j}}{\rho} \cdot \overline{\mathbf{P}_e}) \right\rangle) \\
 &+ 2\frac{\lambda}{\sqrt{\mu_0}}(\nabla_\ell \cdot \left\langle \delta\rho\delta(\frac{\mathbf{v}_A}{\sqrt{\rho}} \times \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}_e})\delta(\frac{1}{\rho}) \right\rangle - \left\langle (\rho'\nabla(\frac{1}{\rho}) - \rho\nabla'(\frac{1}{\rho'})) \cdot \delta(\frac{\mathbf{v}_A}{\sqrt{\rho}} \times \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}_e}) \right\rangle) \\
 &+ \frac{\lambda}{\sqrt{\mu_0}} \left\langle (\mathbf{v}_A\delta\rho - 2\rho\delta\mathbf{v}_A) \cdot (\frac{1}{\sqrt{\rho'}}\nabla' \times (\frac{1}{\rho'}\nabla' \cdot \overline{\mathbf{P}'_e})) - (\mathbf{v}'_A\delta\rho - 2\rho'\delta\mathbf{v}_A) \cdot (\frac{1}{\sqrt{\rho}}\nabla \times (\frac{1}{\rho}\nabla \cdot \overline{\mathbf{P}_e})) \right\rangle \\
 &- 2\lambda\mu(\nabla_\ell \cdot \left\langle \delta\rho\delta u_e\delta(\frac{\mathbf{j}}{\rho}) \right\rangle - \left\langle (\rho'\nabla \cdot (\frac{\mathbf{j}}{\rho}) - \rho\nabla' \cdot (\frac{\mathbf{j}'}{\rho'}))\delta u_e \right\rangle)
 \end{aligned}
 \tag{II.6.46}$$

Les deux premières lignes de l'équation (II.6.46) correspondent aux formes brutes de la correction. L'égalité suivante, dépendant de termes flux et sources, est obtenue en injectant (II.6.44) et en identifiant les fonctions de structures $\left\langle \delta\rho\delta(\frac{\mathbf{v}_A}{\sqrt{\rho}} \times \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}_e})\delta(\frac{1}{\rho}) \right\rangle$, $\left\langle \delta\rho\delta(\frac{\mathbf{j}}{\rho} \cdot \overline{\mathbf{P}_e})\delta(\frac{1}{\rho}) \right\rangle$ et $\left\langle \delta\rho\delta u_e\delta(\frac{\mathbf{j}}{\rho}) \right\rangle$. Dans le cas où l'on peut faire apparaître l'enthalpie h , l'avant-dernière ligne de (??) sera nulle. La contribution du terme $\lambda\nabla \cdot \left(\frac{m_e}{m_i}u_e\mathbf{j}\right)$ correspond à la dernière ligne. On s'attend à ce que cette correction, dépendant de λ , prenne de l'importance près des échelles ioniques similairement à la correction Hall.

Si l'on compare avec les résultats de la section 6.2, on retrouve partiellement

$$\begin{aligned}
 &2\lambda\mu(1-\mu)\nabla_\ell \cdot \left\langle \delta\rho\delta(u_i - u_e)\delta\left(\frac{\mathbf{j}}{\rho}\right) \right\rangle \\
 &+ 2\lambda\mu(1-\mu)\left\langle \delta(u_i - u_e)\left(\rho\nabla' \cdot \left(\frac{\mathbf{j}'}{\rho'}\right) - \rho'\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{j}}{\rho}\right)\right) \right\rangle
 \end{aligned}$$

présent dans la contribution d'énergie interne (II.6.27). Seuls les termes en μ et dépendant de u_e sont conservés, ceux dépendant de μ^2 ou de u_i sont négligés. Pour u_i , c'est une conséquence de la négligence de la vitesse électronique dans la vitesse fluide \mathbf{v} . Pour μ^2 , cela provient de $m_e \ll m_i$, μ^2 est alors négligeable devant μ . Les termes dépendants de $\overline{\mathbf{P}_e}$ proviennent quant à eux d'un mélange de (II.6.37) et des trois dernières lignes de (II.6.29). L'équivalence ne sera pas présentée ici. On notera tout de même la présence de la constante μ_0 qui provient du caractère dimensionné des équations utilisées dans cette section.

Dans la limite incompressible, la majorité des termes de (II.6.46) s'annulent et il ne reste que la dernière ligne qui s'écrit :

$$\boxed{-4\varepsilon_{hallpe} \quad \overrightarrow{\rho=\rho_0} \quad -2\frac{\lambda}{\sqrt{\rho_0}} \left\langle \delta\mathbf{v}_A \cdot \delta(\nabla \times \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}_e}) \right\rangle} \tag{II.6.47}$$

Elle s'annule si $\overline{\mathbf{P}_e}$ est isotrope.

Linéairement, la pression électronique peut influencer sur les critères d'instabilités. Si la

fermeture sur les ions et les électrons est CGL et l'équation d'induction MHD ou MHD-Hall, il suffira juste de prendre en compte des pressions parallèles et perpendiculaire totale (ionique + électronique) dans le taux d'anisotropie a_p et le paramètre β présents dans les critères firehose et miroir (voir synthèse 4.4). Lorsque l'équation d'induction prend en compte le terme en ∇P_e , la relation de dispersion est d'ordre 6 et aucun mode ne ressort. Son étude, complexe, n'a pas été entreprise. Dans les simulations dans lesquelles les électrons seront gyrotropes, le modèle sera complété d'une fermeture dite Landau-fluide choisie telle que les critères cinétiques sont retrouvés, par conséquent, on considèrera le critère dérivé par PANTELLINI et SCHWARTZ 1995. Dans d'autres simulations, la pression électronique est isotrope et définie avec une fermeture thermodynamique isotherme telle que $p_e \propto \rho$ et les ions sont CGL. Dans le cas de l'approximation MHD, l'équation de dispersion est :

$$\begin{pmatrix} M_{xx} & 0 & M_{xz} \\ 0 & M_{yy} & 0 \\ M_{zx} & 0 & M_{zz} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_{x1} \\ v_{y1} \\ v_{z1} \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{II.6.48})$$

avec :

$$\begin{aligned} M_{xx} &= \frac{\omega^2}{v_{A0}^2 k_{\parallel}^2} - \left(\beta_{\parallel 0} a_{p0} + 1 + \frac{\beta_{e0}}{2} \right) \frac{k_{\perp}^2}{k_{\parallel}^2} + \left(\frac{\beta_{\parallel 0}}{2} (1 - a_{p0}) - 1 \right) \\ M_{xz} &= M_{zx} = - \left(\frac{\beta_{\parallel 0}}{2} a_{p0} + \frac{\beta_{e0}}{2} \right) \frac{k_{\perp}}{k_{\parallel}} \\ M_{yy} &= \frac{\omega^2}{v_{A0}^2 k_{\parallel}^2} + \left(\frac{\beta_{\parallel 0}}{2} (1 - a_{p0}) - 1 \right) \\ M_{zz} &= \frac{\omega^2}{v_{A0}^2 k_{\parallel}^2} - \left(\frac{3}{2} \beta_{\parallel 0} + \frac{\beta_{e0}}{2} \right) \end{aligned}$$

La relation de dispersion s'écrit alors :

$$0 = \left(\frac{\omega^2}{k_{\parallel}^2 v_{A0}^2} - 1 + \frac{\beta_{\parallel 0}}{2} (1 - a_{p0}) \right) \left(\frac{\omega^2}{k_{\perp}^2 v_{A0}^2} - \frac{1}{2} (A \pm \sqrt{A^2 - 4B}) \right) \quad (\text{II.6.49})$$

avec

$$\begin{aligned} A &= 1 + \beta_{\parallel 0} a_{p0} \left(1 - \frac{1}{2} \cos^2 \theta \right) + \beta_{\parallel 0} \cos^2 \theta + \frac{\beta_{e0}}{2} \\ B &= \cos^2 \theta \left(\left(\frac{3}{2} \beta_{\parallel 0} + \frac{\beta_{e0}}{2} \right) \left(1 - \frac{\beta_{\parallel 0}}{2} (1 - a_{p0}) \right) \cos^2 \theta \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{3}{2} \beta_{\parallel 0} \left(1 + \beta_{\parallel 0} a_{p0} \left(1 - \frac{1}{6} a_{p0} \right) \right) + \frac{\beta_{e0}}{2} \left(\frac{3}{2} \beta_{\parallel 0} + 1 \right) \right) \sin^2 \theta \right) \end{aligned}$$

Le mode d'Alfvén-firehose n'est pas affecté par la pression électronique contrairement aux modes magnéto-soniques. Le critère firehose oblique n'est donc pas impacté. Le mode rapide reste stable et le mode lent contient toujours les critères firehose parallèle et miroir. Ces critères sont visibles dans B . Le critère firehose parallèle ($\theta \sim 0^\circ$) est multiplié par un facteur positif dépendant de β_e , il ne sera donc pas impacté. Le critère miroir est par

contre influencé par β_{e0} , il s'écrit :

$$\frac{3}{2}\beta_{\parallel 0}(1 + \beta_{\parallel 0}a_{p0}(1 - \frac{1}{6}a_{p0})) + \frac{\beta_{e0}}{2}(\frac{3}{2}\beta_{\parallel 0} + 1) < 0 \quad (\text{II.6.50})$$

Ces résultats sont valables aux échelles MHD. On a vu dans la section 6.1 que la correction Hall est indépendante des pressions et n'influe que sur le critère firehose, elle ne sera donc pas affectée par la pression électronique isotrope. De plus, si la pression électronique est définie par une fermeture thermodynamique, la correction ∇P_e sera nulle. Par conséquent, le critère miroir modifié que l'on vient de dériver est valable pour les modèles MHD, MHD-Hall et MHD-Hall- ∇P_e .

6.4 Synthèse de l'extension de la théorie des lois exactes à d'autres régimes

Correction Hall

- Théorie linéaire : apparitions des modes whistlers et cyclotron ionique, critère miroir inchangé mais décalage du critère firehose suivant le vecteur d'onde.
 - Correction turbulente compressible : (II.6.3)
 - Correction incompressible à la loi exacte PP98 : (II.6.4)
- ⇒ Contribution turbulente indépendante des tenseurs de pressions

Dérivations des contributions provenant de la loi d'Ohm généralisée à partir du modèle bi-fluide

- Modèle bi-fluide **sans dimension** et ouvert utilisé pour obtenir la loi exacte généralisée : équations (II.6.10), (II.6.11), (II.6.12), (II.6.13), (II.6.14), (II.6.15), (II.6.16), (II.6.17)
 - Loi exacte K41 généralisée écrite avec les quantités bi-fluide : (II.6.23)
 - Ecriture de la loi exacte K41 bi-fluide avec les quantités mono-fluide et l'hypothèse quasi-neutre :
 - Contribution cinétique : (II.6.25)
 - Contribution d'énergie interne : (II.6.27)
 - Contribution des tenseur de pression : (II.6.29)
 - Contribution électromagnétique : (II.6.32)
 - Décomposition de (II.6.32) suivant les différentes contributions présentes dans la loi d'Ohm généralisée quasi-neutre (II.6.33) :
 - Contribution idéale : (II.6.35)
 - Contribution Hall : (II.6.36) équivalente à (II.6.3)
 - Contribution thermique : (II.6.37)
 - Contribution inertielle : (II.6.38)
- ⇒ Ouvre le champ d'études potentielles au régime EMHD par exemple et à l'étude plus rigoureuse de l'impact sur la cascade turbulente des différentes approximations appliquées à la loi d'Ohm.

Modèle utilisé dans la partie III

- Modèle ouvert utilisé pour obtenir la correction turbulente : équations (II.6.39), (II.6.40), (II.6.42), (II.6.45).
- Théorie linéaire : la pression électronique va venir impacter le critère d'instabilité miroir.
- Correction turbulente compressible : (??)
- Correction incompressible à la loi exacte PP98 : (II.6.47)

Ces résultats n'ont pas encore été publiés.

Dans cette partie, nous avons dérivé un cadre d'étude complet et rigoureux des écoulements turbulents (zone inertielle supposée isentrope) allant du régime mono-fluide au régime bi-fluide, et dépendant de pressions tensorielles.

Dans le chapitre 4 (synthèse 4.4), a été présenté une extension de la théorie de Kolmogorov à un écoulement magnétisé idéal dépendant d'une pression tensorielle. Un tenseur de pression gyrotrope a ensuite été appliqué dans cette extension afin de répondre analytiquement à la question de l'impact des anisotropies de pression décrites par le modèle CGL sur la cascade turbulente. De nouveaux termes pouvant nourrir ou réduire la cascade et dépendant de $1 - a_p$ avec a_p le taux d'anisotropie p_{\perp}/p_{\parallel} ont été découverts. Linéairement, le signe de $1 - a_p$ est impacté l'apparition d'instabilité firehose ou miroir dans l'écoulement, comme cela a été redémontré dans la section 4.2. On a donc apporté un modèle théorique non linéaire permettant d'étudier le lien entre instabilités et régimes turbulents qui pourrait venir expliquer les observations de OSMAN *et al.* 2013 ; HADID *et al.* 2018 dans le vent solaire. Cependant une étude numérique est nécessaire afin d'affiner l'interprétation de la loi exacte.

Parmi les nouveaux termes dépendant de l'anisotropie de pression émergeant dans la loi exacte, un terme source survit dans la limite incompressible. Par curiosité, nous nous sommes alors demandés à quoi pourrait ressembler un modèle incompressible gyrotrope dans le chapitre 5 (synthèse 5.5). Un tel modèle incompressible, fermé par l'équation sur la trace du tenseur de pression, a alors été proposé et linéarisé. En plus de l'onde d'Alfvén-firehose, un nouveau mode y apparaît. On y retrouve le critère d'instabilité firehose parallèle mais aussi un critère d'instabilité firehose inversé apparaissant dans le cas quasi-perpendiculaire et venant réduire la zone de stabilité du modèle en fonction du taux d'instabilité moyen a_{p0} et du paramètre $\beta_{\parallel 0}$. Après une étude plus fine en fonction de l'angle de propagation, ce mode s'est révélé instable pour tout couple de paramètres $\beta_{\parallel 0}$ et a_{p0} . Une étude numérique rigoureuse de la correction incompressible dans un modèle incompressible avec anisotropie de pression ne pourra donc se faire avec ce modèle compatible avec la loi exacte mais a priori instable.

Enfin, dans le chapitre 6 (synthèse 6.4), les corrections provenant de la relaxation des approximations appliquées sur l'équation d'induction, ont été dérivées à partir d'un modèle bi-fluide afin d'étendre la loi exacte à d'autres gammes d'échelles et régimes. Les résultats obtenus ainsi ont servi de base afin d'adapter la loi exacte MHD-CGL aux modèles qui seront étudiés numériquement dans la partie III. Ces corrections serviront à refléter au mieux la cascade turbulente simulée.