

Sommaire

2.1	Comparaison de résultats IMHD-Hall avec pression isotrope et schémas numériques	15
2.1.1	Comparaison avec des résultats IMHD-Hall	15
2.1.2	Comparaison avec des schémas numériques à travers les résultats IMHD-Hall incompressible	17
2.2	Effet du forçage sur la zone inertielle	19
2.3	Equation KHM et incertitude numérique	19
2.3.1	Calcul de la loi KHM	20
2.3.2	Analyse des contributions de la loi KHM	21
2.3.3	Estimation de l'erreur sur le taux de cascade	23
2.4	Synthèse des tests de validation et sources d'erreurs	25

Avant d'attaquer les spécificités des modèles simulés et les lois exactes associées, il est nécessaire de valider les méthodes numériques exposées dans le Chapitre 1 et d'en déterminer les biais. Dans la section 2.1, les résultats de lois exactes IMHD-Hall seront comparés aux résultats de [FERRAND, SAHRAOUI, LAVEDER *et al.* 2021] (F21)). Enfin, dans la section 2.3, une méthode d'estimation de l'incertitude sur nos résultats sera proposée.

Les simulations utilisées dans ces études comparatives sont CGL1 et CGL3 (voir détail TABLE 0.1 et TABLE 0.2). Elles font partie des simulations du modèle CGL-Hall- ∇P_e analysées par F21 et elles feront l'objet du Chapitre 3.

2.1 Comparaison de résultats IMHD-Hall avec pression isotrope et schémas numériques

2.1.1 Comparaison avec des résultats IMHD-Hall

Afin de valider les méthodes et choix décrits dans le Chapitre 1, nous avons calculé avec les données de CGL1 et CGL3, les quantités comparées par F21 :

- ε_{MHD} , provenant de la loi PP98 (équation (??)),
- ε_{Hall} , la correction Hall incompressible (équation (??)),
- $\varepsilon_{MHD-Hall} = \varepsilon_{MHD} + \varepsilon_{Hall}$, qui correspond au résultat de la loi **IMHMH!** dérivée par [FERRAND, GALTIER, SAHRAOUI, MEYRAND *et al.* 2019].

Pour CGL1, la date sélectionnée indiquée dans la TABLE 0.1 est celle utilisée par F21. Ce n'est pas le cas pour CGL3, pour laquelle F21 utilise $t = 357$. Afin de ne pas apporter

d'incertitude à notre comparaison en changeant les données utilisées les résultats seront exceptionnellement donnés pour $t = 357$ dans cette section.

Par conséquent, aucune différence que l'on pourra noter ne proviendra des données, des expressions des quantités ou de leur domaine de validité. Les différences entre les résultats résideront dans les schémas numériques utilisés. On a indiqué le nôtre par la mention «Fourier for Exact Law» (FEL) et celui de F21 par «F21». Nos résultats sont présentés sur la FIGURE 2.1 par des lignes pleines et sont accompagnés de ceux des figures 3 et 5 de F21 en pointillés.

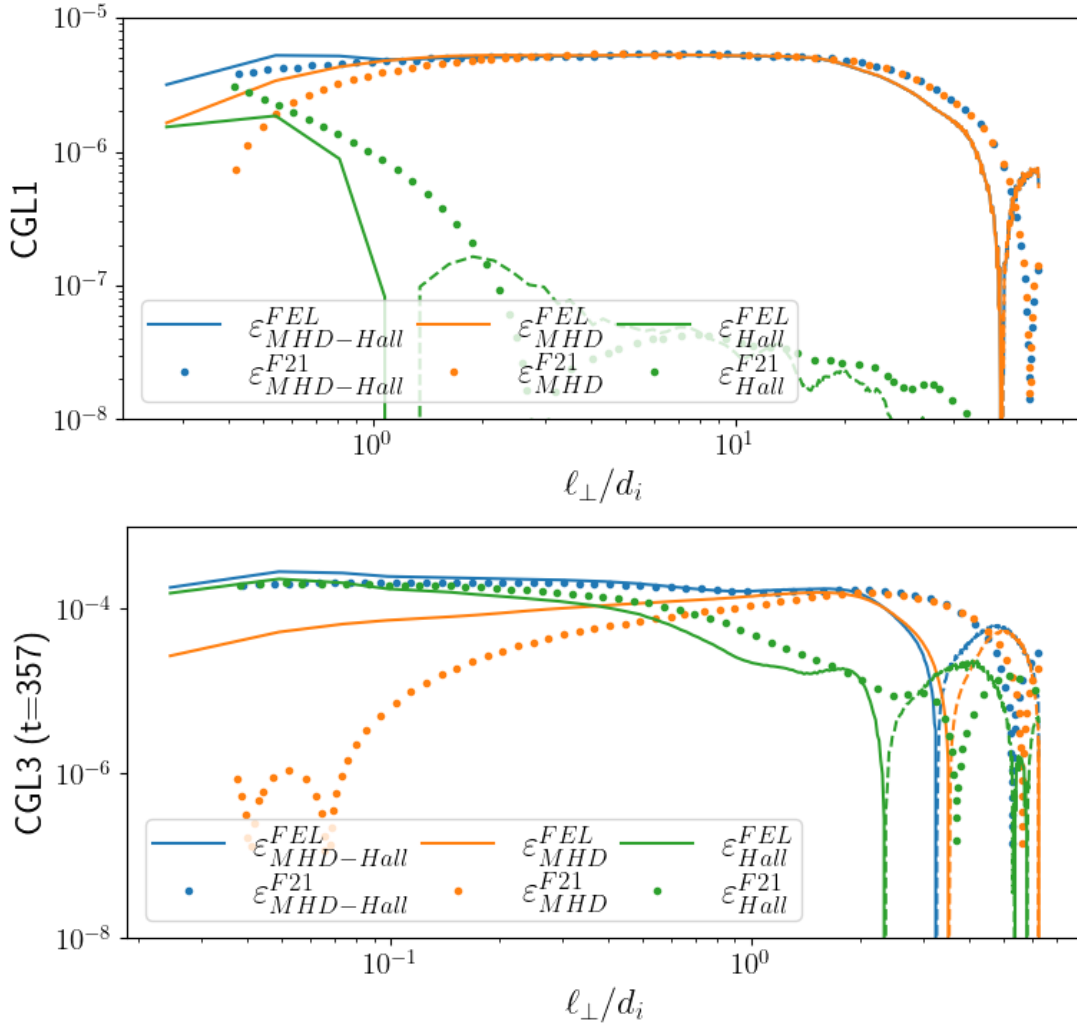


FIGURE 2.1 – Mode de représentation : 1D en fonction de ℓ_{\perp} normalisé par d_i . Lignes pleines : nos résultats (avec en lignes discontinues les valeurs négatives). Pointillés : résultats extraits des figures 3 et 5 de F21. Bleu : $\varepsilon_{MHD-Hall}$. Orange : ε_{MHD} . Vert : ε_{Hall} . Haut : CGL1. Bas : CGL3 ($t = 357$).

Tout d'abord, pour chaque simulation, on retrouve les points physiques attendus :

- Pour CGL1 : une zone inertielle magnétohydrodynamique (MHD) telle que $\varepsilon_{MHD-Hall} = \varepsilon_{MHD}$ (resp. courbe bleue et orange) et une augmentation de ε_{Hall} (courbe verte) en allant vers les petites échelles.
- Pour CGL3 : une croissance de ε_{Hall} , en allant vers les petites échelles, venant dominer ε_{MHD} et rejoignant $\varepsilon_{MHD-Hall}$ pour former un plateau (la zone inertielle Hall (Hall)). Le croisement entre ε_{MHD} et ε_{Hall} a lieu près de $\ell_{\perp} = d_i$ donc à la

frontière entre les zones MHD et Hall.

Ces résultats tendent à valider notre implémentation. D'autres tests tels qu'une comparaison des formulations de la loi ε_{MHD} ([POLITANO et POUQUET 1998b; POLITANO et POUQUET 1998a] (PP98) et celle proposée par [BANERJEE et KRITSUK 2017]) ou la vérification des prédictions de [ANDRÉS *et al.* 2018], ont été entrepris afin de vérifier la cohérence et le respect de la physique des lois obtenues dans la littérature. Ces résultats sont présentés dans l'Annexe ??.

2.1.2 Comparaison avec des schémas numériques à travers les résultats IMHD-Hall incompressible

Les différences entre les résultats de FEL et F21, visibles sur la FIGURE 2.1, sont :

- une bosse aux petites échelles pour $\varepsilon_{MHD-Hall}$ calculé avec FEL,
- en allant vers les petites échelles, une décroissance moindre de ε_{MHD} calculé avec FEL aux échelles $\ell < di$,
- en allant vers les grandes échelles, une décroissance de $\varepsilon_{MHD-Hall}$ et ε_{MHD} calculés avec FEL arrivant avant celle des quantités calculées avec F21.

Usuellement, ce qui se passe au niveau des petites échelles est attribué à un impact de la dissipation et ce qui se passe au niveau des plus grandes échelles est impacté par le forçage. Similairement, ε_{MHD} étant calculé avec la loi PP98, la décroissance apparaît en dehors de son domaine de validité : la zone MHD telle que $\ell \gg di$. Par conséquent, les différences vu n'influent pas sur l'interprétation physique. De plus, les données post-traitées et les expressions des quantités calculées étant identiques pour chaque simulation, les différences observées ne peuvent être dues qu'à une erreur de code ou aux différences présentes dans les schémas numériques utilisés.

Les différences entre les schémas numériques pouvant impacter l'estimation de nos quantités qui sont de la forme $\nabla_{\ell} \cdot \mathcal{F}$ sont résumées dans la TABLE 2.1. Les notations associées au schéma numérique de F21 et détaillées dans [FERRAND 2021] sont adaptées à nos notations.

	F21 (inspirée de [TAYLOR <i>et al.</i> 2003])	FEL (voir le Chapitre 1)
maillage	set réduit de directions vectorielles	tous les vecteurs accessibles
∇_{ℓ}	$\frac{1}{\ell_{\perp}} \partial_{\ell_{\perp}} \left[\ell_{\perp} \langle \mathcal{F}_{\ell_{\perp}} \rangle_{\phi, \ell_{\parallel}} \right]$	$\nabla_{\ell} \cdot \mathcal{F}$ cartésienne
filtrage des ℓ_{\parallel}	pour $\theta > 45^{\circ}$ de la grille numérique	pour $\theta > \theta_i$
$\langle \rangle_{\phi, \ell_{\parallel}}$	pondérée, avant la dérivation	après la dérivation

TABLE 2.1 – Différences majeures entre les schémas numériques F21 et FEL. ϕ correspond à l'angle présent dans la plan perpendiculaire dans un système de coordonnées cylindrique.

Tout d'abord, à propos du maillage de l'espace des échelles, l'utilisation d'un set réduit de directions vectorielles implique l'impossibilité de calculer une divergence complète : ou il faut interpoler, ou approximer l'opérateur, ou pour chaque point, calculer les quelques points adjacents. La première solution a tendance à apporter des erreurs numériques non négligeable si le maillage interpolé n'est pas régulier, ce qui est le cas pour F21. La troisième solution demande du temps de calcul supplémentaire. Finalement, la deuxième solution a été adoptée pour F21. N'est alors calculée que la composante transverse du

flux dans chaque plan perpendiculaire au champ magnétique moyen. Ce calcul se base donc sur la symétrie des simulations, provenant du champ magnétique moyen suivant \mathbf{e}_z et néglige les variations de la composante parallèle du flux le long de ℓ_{\parallel} . La FIGURE 2.2

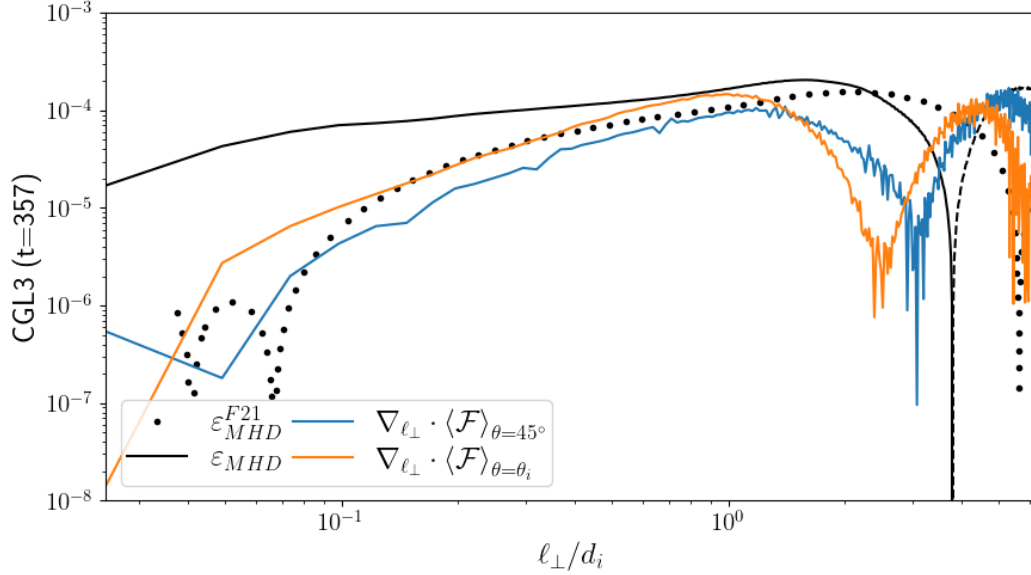


FIGURE 2.2 – Mode de représentation : 1D en fonction de ℓ_{\perp} normalisé par d_i . Simu : CGL3 ($t = 357$). Comparaison de ε_{MHD} obtenu par F21 (noir pointillé), FEL (noir pleine) et l'application d'une divergence transverse sur \mathcal{F} calculés avec FEL et moyenné suivant deux angles $\theta = 45^\circ$ de la boîte numérique et $\theta = \theta_i$.

illustre les effets de la variation parallèle de la composante parallèle du flux ainsi que ceux du filtrage. Le résultat F21 (en pointillé) y est comparé à deux estimations de la divergence transverse effectuée dans nos résultats après avoir moyenné le flux dans le plan perpendiculaire et suivant les ℓ_{\parallel} . On ne s'attend pas à retrouver exactement le résultat de F21 mais à s'en rapprocher et c'est le cas. La différence entre les deux estimations correspond au filtrage utilisé dans la moyenne de ℓ_{\parallel} : celui utilisé par F21, en bleu, et celui que l'on utilise, en orange. L'impact de l'angle de filtrage avait déjà été remarqué dans l'analyse de la FIGURE 1.4. On voit ici qu'il a pu influencer sur le résultat de F21 tout comme il peut influencer sur le nôtre. On peut en déduire de cette figure que le poids des variations parallèles, omis par F21, semble avoir un impact sur nos résultats.

La différence entre nos estimations transverses et F21 est située dans le nombre de points du maillage utilisé. Comme FEL prend en compte l'ensemble de l'espace des échelles, il donnera pour ε_{MHD} par exemple, un résultat impacté par toutes ses variations spatiales omises par une moyenne sur un nombre réduit de vecteurs, malgré la compensation apportée par la pondération. Cet ensemble réduit d'échelles étant choisi tel des multiples de quelques vecteurs directionnels, il représentera d'autant moins les variations en s'approchant des grandes échelles.

Il semble donc cohérent d'attribuer notre différence de comportement de ε_{MHD} aux choix numériques façonnant le code de post-traitement. On peut aussi en déduire que FEL donne un résultat associé à la position dans l'espace 2 dimensions (2D) plus réaliste que F21.

2.2 Effet du forçage sur la zone inertielle

La proximité du forçage induit de fortes variations dans le résultat à grande échelle. De plus, ici, cette injection est loin d'être stationnaire : parfois le forçage est allumé, d'autres fois, il est éteint. Sur la FIGURE 2.3, est affiché le résultat IMHD-Hall pour différentes dates de CGL3. On voit qu'en fonction de la date, l'échelle limite de la zone

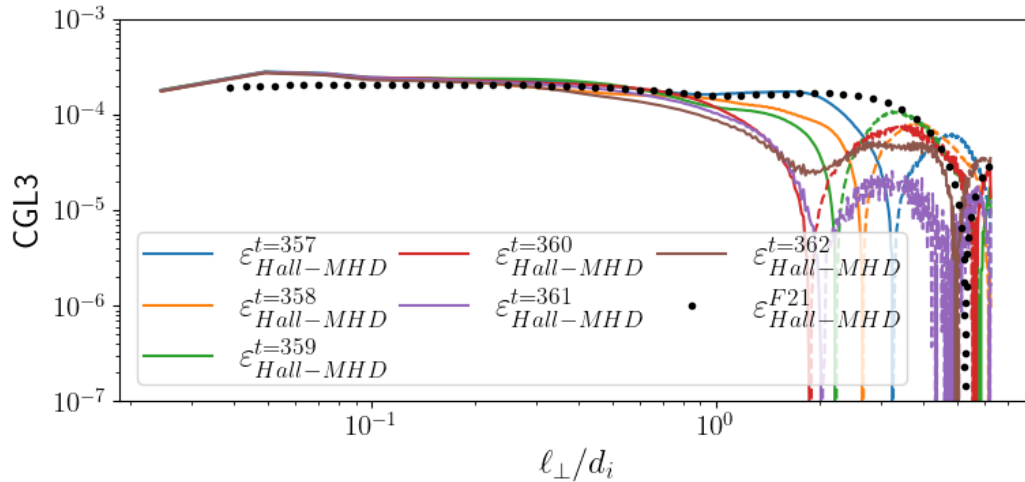


FIGURE 2.3 – Mode de représentation : 1D en fonction de ℓ_{\perp} normalisé par d_i . ε_{F19} est obtenue pour diverses dates, t , de CGL3, chaque date correspond à une couleur. Le résultat extrait de la figure 5 de F21 est donné en pointillés noirs.

inertielle (telle que ε_{F19} soit constant) fluctue grandement. Et, à $t = 357$ (date utilisée par F21), notre résultat (courbe bleue) montre la zone inertielle la plus large. Pour CGL3, de $t = 357$ à $t = 360$ le forçage est éteint, la zone inertielle décroît petit à petit et, pour les temps suivants, il est rallumé et le plateau semble alors se reformer. On observe donc, ici, l'oscillation de l'injection. Aux échelles $\ell_{\perp}/d_i < 1$, le niveau de ε_{F19} varie peu quelle que soit la date considérée. Cette observation concorde avec l'hypothèse de stationnarité statistique du taux de cascade dans la zone inertielle (ici MHD-Hall), Cette hypothèse est considérée analytiquement pour obtenir des lois du type K41 (voir synthèse ??).

Le temps de simulation sélectionné impactant l'extension dans la zone de forçage de la zone inertielle, les temps de simulations indiqués dans la TABLE 0.1 ont été sélectionnés en prenant garde à l'état allumé ou éteint du forçage, mais cela ne signifie pas que l'extension de la zone inertielle se sera reformée. Une dernière différence, minime, n'a pas encore été abordée : celle de la variation aux petites échelles de $\varepsilon_{MHD-Hall}$. Sa signification associée à l'hyperdissipation sera abordée dans la section 2.3

2.3 Equation KHM et incertitude numérique

Afin d'estimer l'incertitude sur nos résultats, nous nous sommes lancés dans la vérification de l'équation KHM du modèle simulé sous sa forme complète et pas seulement la loi K41 dont la validité est réduite à la zone inertielle. Cette estimation est permise par le travail analytique effectué en amont et décrit dans la partie ??

2.3.1 Calcul de la loi KHM

Une loi de type KHM peut s'écrire schématiquement (voir Chapitre ??) :

$$\partial_t \mathcal{R} = -\varepsilon_{NL} + \varepsilon_D + \varepsilon_F \quad (2.1)$$

Nous avons vu que l'application des hypothèses de Kolmogorov donne la loi réduite de type K41 telle que $\varepsilon = -\varepsilon_{NL}$ (voir synthèse ??). Son contenu, spécifique au modèle implémenté, sera détaillé dans les Chapitres 3 (CGL-Hall- ∇P_e) et 4 (LF-Hall- ∇P_e).

$\partial_t \mathcal{R}$ est la dérivée temporelle de la fonction de corrélation utilisée pour obtenir la loi exacte. Dans nos études, cette fonction est $\mathcal{R} = \frac{1}{4} \langle (\rho' + \rho)(\mathbf{v}' \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v}'_{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{A}}) + 2\rho'u + 2\rho u' \rangle$. Pour estimer ce terme, on va utiliser les temps consécutifs relevés dans la simulation. La dérivée temporelle sera estimée grâce à des schémas de discrétisation de type «différences finies» d'ordre 2 :

- décentrée vers la droite pour le premier temps t_0 : $(\partial_t \mathcal{R})(t_0) = \frac{\mathcal{R}(t_0 + \delta t) - \mathcal{R}(t_0)}{\delta t}$,
- décentrée vers la gauche pour le dernier temps t_{N_t} : $(\partial_t \mathcal{R})(t_{N_t}) = \frac{\mathcal{R}(t_{N_t}) - \mathcal{R}(t_{N_t} - \delta t)}{\delta t}$,
- centrée pour les autres temps : $(\partial_t \mathcal{R})(t_n) = \frac{\mathcal{R}(t_{n+1}) - \mathcal{R}(t_{n-1})}{2\delta t}$ avec $n \in]0, N_t[$.

Le forçage présent dans nos simulations est un forçage de type antenne de Langevin appliqué sur le champ de vitesse. Par conséquent, le taux de forçage ε_F s'écrira $\varepsilon_F = \frac{1}{4} \langle (\rho' + \rho)(\mathbf{v}' \cdot \mathbf{f} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}') \rangle$. Ce forçage dépend de deux composantes aléatoires qui font partie des quantités extraites de la simulation, elles seront notées f_{sup} et f_{inf} . Elles permettent de construire une quantité intermédiaire $F = a_1 f_{sup} + (1 - a_1) * f_{inf}$. Les composantes de \mathbf{f} sont alors : $f_x = \partial_y F$, $f_y = -\partial_x F$ et $f_z = 0$.

Le taux de dissipation ε_D couvre l'ensemble des hyperdissipations présentes dans le système. Chaque quantité est associée à une hyperdissipation du type $\nu_X \Delta^4 X$ avec X quantité générique et $\Delta^4 = (\partial_x^2 + \partial_y^2 + \alpha \partial_z^2)^4$. On va décomposer ε_D tel que :

$$\varepsilon_D = \varepsilon_D^c + \varepsilon_D^m + \varepsilon_D^{ui} + \varepsilon_D^{ue} \quad (2.2)$$

avec :

- la contribution cinétique avec $\mathbf{D}_{\mathbf{v}} = \nu \Delta^4 \mathbf{v}$ et $D_\rho = \nu_\rho \Delta^4 \rho$:

$$\varepsilon_D^c = \varepsilon_D^c(\mathbf{D}_{\mathbf{v}}) + \varepsilon_D^c(D_\rho) = -\frac{1}{4} \langle (\rho' + \rho) (\mathbf{v}' \cdot \mathbf{D}_{\mathbf{v}} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{D}'_{\mathbf{v}}) \rangle - \frac{1}{4} \langle (D'_\rho + D_\rho) \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v} \rangle \quad (2.3)$$

- la contribution magnétique avec $\mathbf{D}_{\mathbf{v}_{\mathbf{A}}} = \frac{\eta}{\sqrt{\rho}} \Delta^4 (\sqrt{\rho} \mathbf{v}_{\mathbf{A}})$:

$$\begin{aligned} \varepsilon_D^m = \varepsilon_D^m(\mathbf{D}_{\mathbf{v}_{\mathbf{A}}}) + \varepsilon_D^m(D_\rho) &= -\frac{1}{4} \langle (\rho' + \rho) (\mathbf{v}'_{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{D}_{\mathbf{v}_{\mathbf{A}}} + \mathbf{v}_{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{D}'_{\mathbf{v}_{\mathbf{A}}}) \rangle \\ &\quad - \frac{1}{8} \left\langle (\rho' - \rho) \left(\frac{D'_\rho}{\rho'} - \frac{D_\rho}{\rho} \right) \mathbf{v}'_{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{A}} \right\rangle \end{aligned} \quad (2.4)$$

- la contribution d'énergie interne ionique (gyrotrope) avec $D_u = \frac{\nu_p}{2} \Delta^4 (2p_{\perp i} + p_{\parallel i})$ et sachant que $\rho_i u_i = \frac{1}{2} (2p_{\perp i} + p_{\parallel i})$:

$$\varepsilon_D^{ui} = \varepsilon_D^{ui}(D_u) + \varepsilon_D^{ui}(D_\rho) = -\frac{1}{2} \left\langle \frac{\rho}{\rho'} D'_u + \frac{\rho'}{\rho} D_u \right\rangle - \frac{1}{2} \left\langle \left(\frac{D'_\rho}{\rho'} - \frac{D_\rho}{\rho} \right) (\rho' u_i - \rho u'_i) \right\rangle \quad (2.5)$$

— la contribution d'énergie interne électronique (isotherme) sachant que $\rho_e u_e = \rho \ln \rho$:

$$\varepsilon_D^{ue} = -\frac{1}{2} \left\langle D'_\rho \ln \rho + D_\rho \ln \rho' + \frac{\rho'}{\rho} D_\rho + \frac{\rho}{\rho'} D'_\rho \right\rangle \quad (2.6)$$

et ν , η , ν_ρ et ν_p des constantes choisies empiriquement pour chaque simulation. Elles sont résumées dans la TABLE 0.2.

2.3.2 Analyse des contributions de la loi KHM

Sur FIGURE 2.4, ε_{NL} (bleu) est comparé à un niveau de référence $\varepsilon_{ref} = -\partial_t \mathcal{R} + \varepsilon_D + \varepsilon_F$ (violet), construit à partir de $\partial_t \mathcal{R}$ (rouge), ε_D (vert) et ε_F (orange). La différence $\zeta = \varepsilon_{ref} - \varepsilon_{NL}$ est donnée en marron. On remarque qu'elle n'est pas de l'ordre du zéro numérique ($\sim 10^{-20}$) mais de l'ordre de deux ordres de grandeurs en dessous du niveau de ε_{NL} . La forme des termes $\partial_t \mathcal{R}$, ε_D et ε_F est particulière.

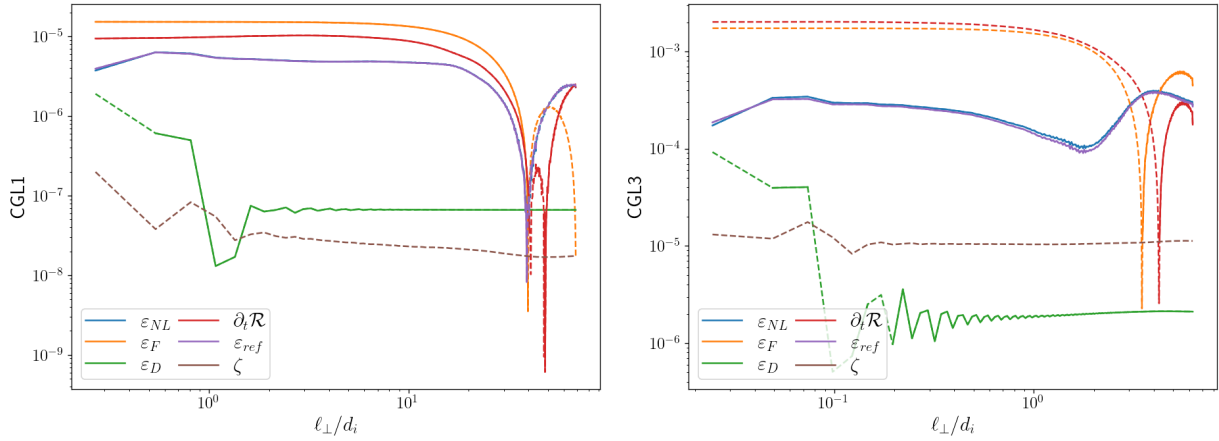


FIGURE 2.4 – Détail de la loi KHM pour CGL1 (gauche) et CGL3 (droite). Bleu : ε_{NL} . Orange : ε_F . Vert : ε_D . Rouge : $\partial_t \mathcal{R}$. Violet : $\varepsilon_{ref} = -\partial_t \mathcal{R} + \varepsilon_D + \varepsilon_F$. Marron : $\zeta = \varepsilon_{ref} - \varepsilon_{NL}$. Représentation : 1D en fonction de ℓ_\perp avec les valeurs positives en trait plein et négative en trait discontinu.

Balance des termes et forçage : Tout d'abord, analysons la situation pour CGL1. Dans le Chapitre ??, on a vu que :

$$\varepsilon_{NL}(\ell) = \varepsilon_F(\ell) = \varepsilon_D(\ell = 0) = -\varepsilon \quad (2.7)$$

dans une zone inertielle où l'hypothèse de stationnarité statistique s'appliquerait.

On peut en effet identifier une gamme d'échelles $\ell_\perp/d_i \in [1; 20]$ telle que ε_{NL} soit constant. Son niveau est alors d'environ 5×10^{-6} . La valeur n'est pas visible ici à cause de l'échelle logarithmique mais $\varepsilon_D(\ell = 0) \simeq 5 \times 10^{-6}$. Donc $\varepsilon_{NL}(\ell) = \varepsilon_D(\ell = 0)$ semble retrouvé. Par contre, même si la constance¹ de ε_F est vérifiée à ces échelles, son niveau est beaucoup trop important, de l'ordre de 1.5×10^{-5} . Pour retrouver le niveau 5×10^{-6} , on doit lui soustraire $\partial_t \mathcal{R}$ qui est d'environ 1×10^{-5} . La relation (2.8) s'écrit alors dans nos simulations :

$$\varepsilon_{NL}(\ell) = \varepsilon_F(\ell) - \partial_t \mathcal{R} = \varepsilon_D(\ell = 0) = -\varepsilon \quad (2.8)$$

1. Le comportement constant du terme de forçage est démontré rigoureusement dans l'annexe A.1.

Analyse du terme $\partial_t \mathcal{R}$: Analytiquement, on se servait de l'hypothèse de stationnarité statistique pour annuler $\partial_t \mathcal{R}$, c'est-à-dire pour supposer qu'entre deux temps \mathcal{R} ne varie pas. Si $\partial_t \mathcal{R} = 0$ alors $\langle E_{tot} \rangle = \partial_t \mathcal{R}(\ell = 0) = 0$. Sauf que dans nos simulations $\langle E_{tot} \rangle$ fluctue légèrement : pour les quatre temps consécutifs utilisés pour CGL1, $\langle E_{tot} \rangle$ de l'ordre de 1.3 augmente d'environ 6×10^{-7} par pas de temps. Par conséquent, $\partial_t \mathcal{R} = 0$ est impossible à obtenir. C'est ce que l'on observe sur la FIGURE 2.4 pour CGL1 comme pour CGL3. Pourtant, la convergence temporelle des résultats du calcul de loi exacte K41 dans une certaine zone d'échelles a bel et bien été observée sur la FIGURE 2.3, et cela nous semblait une belle preuve de la stationnarité statistique de nos simulations. A première vue, ces résultats ne semblent pas compatibles. L'interprétation de ce paradoxe reste à affiner mais le comportement du $\partial_t \mathcal{R}$ instantané tel un forçage ne semble pas être une spécificité de nos simulations. En effet, [FERRAND, SAHRAOUI, GALTIER *et al.* 2022] trouve un comportement similaire dans des simulations de turbulence non forcée. Dans notre cas, on pourrait peut-être interpréter le comportement du terme $\partial_t \mathcal{R}$ comme un réservoir d'énergie régulant temporellement l'injection de l'énergie dans la cascade afin que cette dernière puisse s'effectuer au taux imposé par les processus de dissipation.

Analyse des contributions d'hyperdissipation : Un autre comportement pathologique est celui de ε_D en fonction de ℓ . Dans la théorie analytique, ce terme est supposé nul à toutes les échelles sauf en $\ell = 0$ à cause de l'anomalie dissipative. Dans nos simulations, son rôle est joué par les termes d'hyperdissipation, mais on s'attendrait à ce qu'ils décroissent rapidement en allant vers les grandes échelles puisque la dérivation par Δ^4 impose un comportement en k^8 dans l'espace de Fourier. Regardons ce qu'il en est en le décomposant sur ses diverses contributions. La décomposition est présentée sur FIGURE 2.5. On y voit que chacune des contributions semble ou décroître en allant vers

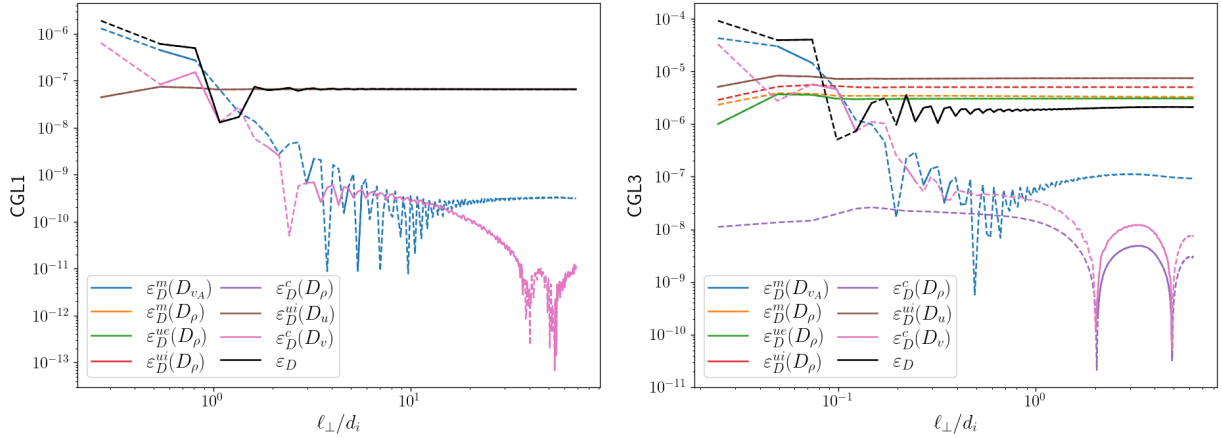


FIGURE 2.5 – Détail du terme d'hyperdissipation, ε_D (noir), pour CGL1 (gauche) et CGL3 (droite). Bleu : $\varepsilon_D^m(D_{v_A})$. Orange : $\varepsilon_D^m(D_\rho)$. Vert : $\varepsilon_D^{ue}(D_\rho)$. Rouge : $\varepsilon_D^{ui}(D_\rho)$. Violet : $\varepsilon_D^c(D_\rho)$. Marron : $\varepsilon_D^{ui}(D_u)$. Rose : $\varepsilon_D^c(D_v)$. Représentation : 1D en fonction de ℓ_\perp avec les valeurs positives en trait plein et négative en trait discontinu.

les grandes échelles ou rester constante. Les termes en D_ρ (visible seulement pour CGL3 puisque $\nu_\rho = 0$ pour CGL1) et D_u ne montre pas de décroissance et la tendance en ℓ^{-2} environ de la décroissance de $\varepsilon_D^c(D_v)$ et $\varepsilon_D^m(D_{v_A})$ avait été remarquée par [FERRAND 2021] dans le cas incompressible. La pathologie de cette pente en -2 y avait été identifiée, et associée à une saturation mathématique de la fonction de corrélation calculée entre deux

points et due à une puissance de k trop importante dans l'espace de Fourier et similaire à celle relevée par [CHO et LAZARIAN 2009].

Dans l'Annexe A.2, nous proposons une démonstration mathématique de ce phénomène en fonction du type de la fonction de corrélation, incrémentale ou non, et de la tendance du spectre dans l'espace de Fourier. On y obtient dans le cas non incrémental, pour la corrélation de deux quantités indéfinies A et B , :

$$\langle A(\mathbf{x} + \ell) \cdot B(\mathbf{x}) + A(\mathbf{x}) \cdot B(\mathbf{x} + \ell) \rangle \propto \begin{cases} \ell^{-2} & \text{si } m \in]-\infty, -1[\\ \ell^{m-1} & \text{si } m \in]-1, 1[\\ 1 & \text{si } m \in]1, +\infty[\end{cases} \quad (2.9)$$

avec m , la pente du spectre unidimensionnel en représentation logarithmique telle que k^{-m} . Pour une fonction de corrélation incrémentale on obtient :

$$\langle (A(\mathbf{x} + \ell) - A(\mathbf{x})) \cdot (B(\mathbf{x} + \ell) - B(\mathbf{x})) \rangle \propto \begin{cases} 1 & \text{si } m \in]-\infty, 1[\\ \ell^{m-1} & \text{si } m \in]1, 3[\\ \ell^2 & \text{si } m \in]3, +\infty[\end{cases} \quad (2.10)$$

Si l'on analyse les différentes contributions du terme de dissipation, on se rend compte que $\varepsilon_D^c(\mathbf{D}_v)$, $\varepsilon_D^c(D_\rho)$, $\varepsilon_D^m(\mathbf{D}_{v_A})$, $\varepsilon_D^{ui}(D_u)$ et ε_D^{ue} ont une forme assez proche d'une fonction de corrélation non incrémentale et $\varepsilon_D^m(D_\rho)$ et $\varepsilon_D^{ui}(D_\rho)$ sont plus proches d'une fonction incrémentale.

Pour une pente de spectre autour de k^8 ($m = -8$), une fonction de corrélation non incrémentale, va saturer en ℓ^{-2} , on retrouve ce comportement pour $\varepsilon_D^c(\mathbf{D}_v)$ et $\varepsilon_D^m(\mathbf{D}_{v_A})$ tandis qu'une fonction de corrélation incrémentale va saturer en ℓ^0 , comportement retrouvé pour $\varepsilon_D^m(D_\rho)$ et $\varepsilon_D^{ui}(D_\rho)$. On retrouve aussi le comportement du terme de forçage (fonction de corrélation non incrémentale), constant loin des échelles de forçage, puisqu'un Dirac à petit ℓ peut-être vu comme une pente en $m = +\infty$. Ces comportements plus mathématiques que physiques sont retrouvés pour toutes les simulations. Une étude plus poussée n'a pas été engagée.

On remarque tout de même les fortes variations des termes décroissant en ℓ^{-2} . Ces variations sont la cause de la bosse visible aux plus petites échelles, pour tous les taux ε_{NL} et ε calculer dans les simulations et que l'on avait remarqué dans la section 2.1. En effet, $\varepsilon_F - \partial_t \mathcal{R}$ reste constant dans cette zone alors que la bosse apparaît dans $\varepsilon_F - \partial_t \mathcal{R} + \varepsilon_D$. Cette bosse nous indique donc les échelles auxquelles l'erreur mathématique de l'hyperdissipation impacte systématiquement ε_{NL} et ses contributions.

Ce type d'erreur mathématique pourrait aussi impacter $\partial_t \mathcal{R}$, \mathcal{R} étant une fonction de corrélation en deux points.

2.3.3 Estimation de l'erreur sur le taux de cascade

Les fonctions de corrélations en deux points ne sont donc pas adaptées à l'étude de la physique des termes d'hyperdissipation et de ceux inclus dans $\partial_t \mathcal{R}$ comme a pu le faire remarquer [CHO et LAZARIAN 2009]². Par la suite, nous nous concentrerons seulement

2. La solution proposée par [CHO et LAZARIAN 2009] est d'augmenter le nombre de points servant au calcul de la fonction de corrélation. Une telle tâche s'annonce mathématiquement complexe et lourde dans

sur ε_{NL} et ses contributions, mais nous garderons en mémoire les influences potentielles de ces termes.

L'analyse des différentes contributions à la loi [von KARMAN et HOWARTH 1938 ; MONIN et JAGLOM 1971] (KHM) permet ainsi d'identifier les sources d'erreur numérique et mathématique menant au niveau de ζ . Ce dernier, de l'ordre des fluctuations de $\langle E_{tot} \rangle$, reflèterait la signature de la quasi-stationnarité statistique des simulations. Aux échelles plus faibles, la pathologie mathématique du calcul de fonction de corrélation dépendant de l'hyperdissipation ainsi que sa signature³ dans ε_{NL} semblent impacter ζ . Ce dernier correspond donc à l'incertitude systématique de notre estimation du taux de cascade, incertitude provenant des données initiales, de leur adéquation avec les hypothèses de Kolmogorov et du schéma numérique utilisé pour le calcul des termes des lois exactes. Les contributions qui apparaîtront inférieures à ζ par la suite, seront dans la zone d'incertitude du taux de cascade total, leur analyse devra donc être effectuée avec précautions.

Un autre point reste à éclaircir dans cette étude sur les lois du type KHM : la différence entre la loi obtenue en utilisant \mathcal{R} et celle en utilisant une fonction incrémentale \mathcal{S} . Celle associée à \mathcal{R} est :

$$\mathcal{S} = \frac{1}{4} \langle \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{v} + \delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \delta \mathbf{v}_A + 2\delta\rho\delta u \rangle \quad (2.11)$$

On a alors la relation $\mathcal{S} = \langle E_{tot} \rangle - \mathcal{R}$ et sachant que $\mathcal{R}(\ell = 0) = \langle E_{tot} \rangle$, il est facile de passer de l'expression (2.1) à la loi :

$$\partial_t \mathcal{S} = -\mathcal{E}_{NL} + \mathcal{E}_D + \mathcal{E}_F \quad (2.12)$$

avec : $\mathcal{E}_{NL} = \varepsilon_{NL}(\ell = 0) - \varepsilon_{NL}$, $\mathcal{E}_D = \varepsilon_D(\ell = 0) - \varepsilon_D$ et $\mathcal{E}_F = \varepsilon_F(\ell = 0) - \varepsilon_F$. On notera que l'équation d'énergie totale s'écrit sous la forme $\partial_t E_{tot} + \nabla \cdot \mathbf{F}_{tot} = S$ avec S les termes sources (dissipation et forçage) et \mathbf{F}_{tot} , le total de flux. Puisque $\langle \nabla \cdot \mathbf{F}_{tot} \rangle = \nabla_\ell \cdot \langle \mathbf{F}_{tot} \rangle = -\langle \nabla' \cdot \mathbf{F}_{tot} \rangle = 0$, alors $\mathcal{E}_{NL} = -\varepsilon_{NL}$.

En appliquant cette transformation sur le détail de la loi KHM (fig. FIGURE 2.4), on obtient les résultats de la FIGURE ???. On y remarque que le comportement des termes de forçage et dissipations se sont inversés : \mathcal{E}_F augmente avec une pente de facteur 2 et \mathcal{E}_D reste constant avant de changer de signe vers les grandes échelles. Ces comportements sont cohérents avec ceux démontrés dans les Annexes A.1 et A.2 (voir équations (2.9) et (2.10)). La différence $\mathcal{Z} = \mathcal{E}_{ref} - \mathcal{E}_{NL} = (-\partial_t \mathcal{S} + \mathcal{E}_D + \mathcal{E}_F) - \mathcal{E}_{NL}$ est supérieure à ζ . L'utilisation d'une fonction de corrélation incrémentale dans une étude de données de simulations amplifie l'erreur numérique et mathématique associée aux termes temporels, de dissipation et de forçage en y ajoutant l'erreur sur l'équation de $\langle E_{tot} \rangle$.

le cadre de la théorie des lois exactes. Une autre possibilité est d'estimer précisément pour chaque contribution la puissance m du spectre influant sur le résultat de chaque contribution au taux de dissipation, puis de calculer la tendance attendue, en ℓ^{m-1} . [FERRAND 2021] a comparé dans le cas incompressible quelques approches pour effectuer une estimation de ce type, mais ces approches reposent fortement sur la contrainte incompressible...

3. Les corrélations impliquées dans ε_D étant d'ordre 2 et celles présentes dans les termes dominant de ε_{NL} étant d'ordre 3, le reflet dans ε_{NL} de l'erreur mathématique pourrait, à priori, ne pas compenser exactement l'erreur sur ε_D .

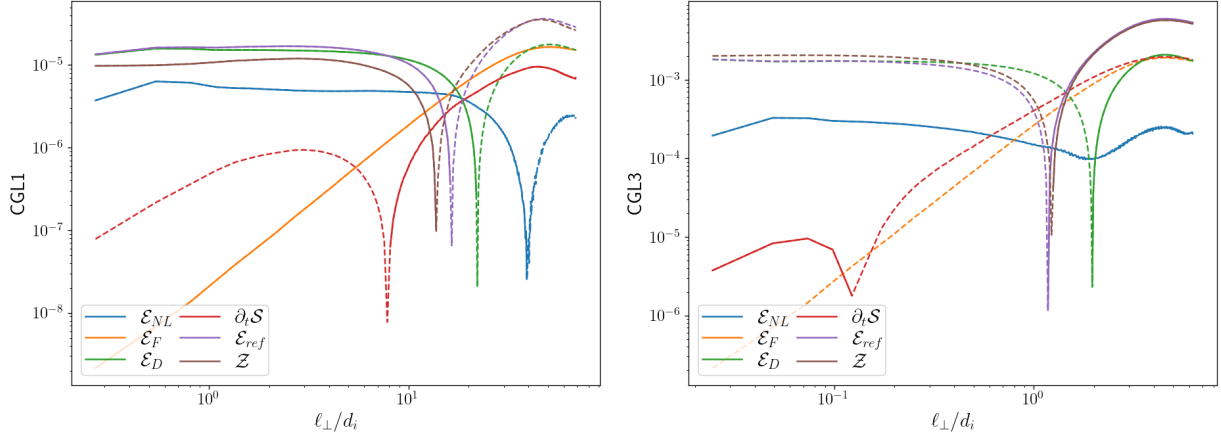


FIGURE 2.6 – Détail de la loi (2.11) pour CGL1 (gauche) et CGL3 (droite). Bleu : \mathcal{E}_{NL} . Orange : \mathcal{E}_F . Vert : \mathcal{E}_D . Rouge : $\partial_t \mathcal{S}$. Violet : $\mathcal{E}_{ref} = -\partial_t \mathcal{S} + \mathcal{E}_D + \mathcal{E}_F$. Marron : $\mathcal{Z} = \mathcal{E}_{ref} - \mathcal{E}_{NL}$. Représentation : 1D en fonction de ℓ_{\perp} avec les valeurs positives en trait plein et négative en trait discontinu.

2.4 Synthèse des tests de validation et sources d'erreurs

Ces études sont illustrées par les résultats obtenus pour les simulations CGL1 et CGL3.

Comparaison IMHD-Hall avec les résultats de [FERRAND 2021] :

- le comportement des lois IMHD-Hall est retrouvé,
- effets de nos choix de schéma numérique.

Effet du forçage sur la zone inertielle visualisée avec IMHD-Hall :

- visualisation des oscillations induites par l'injection d'énergie dans le taux de cascade : extension/réduction de la zone inertielle sur environ une demi décade,
- visualisation de l'impact de la stationnarité statistique : amortissement des oscillations et convergence de la zone inertielle.

Analyse de la loi KHM :

- paradoxe sur l'hypothèse de stationnarité statistique dans les simulations
- pathologie mathématique apportée par l'hyperdissipation
- incertitude provenant de l'utilisation de fonctions incrémentales
- estimation de l'erreur numérique et mathématique sur la loi exacte totale associée au modèle simulé, noté ζ

Ces résultats valident le schéma numérique, son implémentation, et questionnent les comportements non-physiques pouvant impacter les résultats.

Annexes utilisées : A.1 et A.2