

Sorbonne Université  
Ecole doctorale n°127 : Astronomie et Astrophysique d'Ile-de-France  
*Laboratoire de Physique des Plasmas*  
*Équipe Plasmas Spatiaux*

---

**D'une pression isotrope à l'anisotropie de  
pression dans les plasmas spatiaux turbulents**  
*Investigation analytique, numérique et observationnelle.*

---

Par **Pauline SIMON**

Thèse de doctorat d'Astronomie et Astrophysique

Dirigée par **Dr. Fouad SAHRAOUI** et **Prof. Sébastien GALTIER**

Présentée et soutenue publiquement le 22 Septembre 2023

Devant un jury composé de :

**Président :**

**Prof. Frédéric DAIGNE,** Professeur des universités, SU/IAP

**Rapporteur :**

**Dr. Alain NOULLEZ,** Directeur de recherche, CNRS/LAGRANGE

**Rapporteur :**

**Dr. Luca SORRISO-VALVO,** Chercheur, CNR/ISTP

**Examinateuse :**

**Dr. Katia FERRIÈRE,** Directrice de recherche, CNRS/IRAP

**Examinateur :**

**Dr. Lorenzo MATTEINI,** Chercheur, Imperial/SPAT

**Directeur :**

**Dr. Fouad SAHRAOUI,** Directeur de recherche, CNRS/LPP

**Co-Directeur :**

**Prof. Sébastien GALTIER,** Professeur des universités, UPSy/LPP



---

**D'une pression isotrope à l'anisotropie de  
pression dans les plasmas spatiaux turbulents**

*Investigation analytique, numérique et observationnelle.*

---

Version : 11 juillet 2023

Laboratoire de Physique des Plasmas  
CNRS, Observatoire de Paris-Meudon , Sorbonne Université , Université Paris-Saclay,  
École Polytechnique, Institut Polytechnique de Paris  
Route de Saclay, 91120 Palaiseau, France



*«La physique, c'est beau. Quand c'est moche, ce n'est pas physique.»*

*Dr. Fouad SAHRAOUI, pendant une réunion à propos des résultats de simulations. Je tiens particulièrement à le remercier car sans lui, cette thèse n'aurait pas eu lieu.*



## NOTE D'INFORMATION

Cette thèse est formée de 6 parties : la première est introductory, les deux suivantes résument le travail analytique effectué avec une pointe observationnelle, la quatrième, le travail numérique qui est encore à l'état préliminaire en termes d'interprétation, la cinquième conclue cette thèse et la dernière contient annexes, tables et bibliographie.

Chaque chapitre sera achevé par une synthèse des méthodes et résultats. L'apport du travail présenté ici y sera encadré en rouge et les éléments provenant de l'état de l'art, utiles à des fins méthodologiques ou comparatives, y seront encadrés en bleu.

Acronymes, symboles, tableaux et figures sont référencés et listés à la fin de la thèse.





## REMERCIEMENTS



## RÉSUMÉ DÉTAILLÉ

Le vent solaire est un plasma hautement turbulent où les quantités fluides (vitesse, densité et pression) ainsi que les champs électrique et magnétique varient beaucoup. Ces fluctuations se traduisent entre autres par des spectres turbulents couvrant plusieurs décades en fréquences. Les spectres des fluctuations de vitesse et de champ magnétique suivent des lois de puissances dont les exposants dépendent de l'échelle considérée. Aux basses fréquences, des exposants proches de  $-5/3$  sont observés. Ils sont interprétés comme une signature de la dynamique turbulente magnétohydrodynamique (MHD) du plasma. Cette dynamique prendrait la forme d'une cascade transférant non-linéairement l'énergie présente à grande échelle, vers les petites échelles où sa dissipation est possible.

Cette cascade turbulente peut être étudiée au moyen de lois exactes dérivées à partir des équations des différentes quantités fluides. Ces lois lient le taux de cascade aux fluctuations turbulentes. Le taux de cascade est associé au taux de dissipation d'après la théorie de Kolmogorov et correspondrait donc à l'estimation d'un taux de chauffage du plasma. Ce taux est une clef de compréhension du problème du chauffage du vent solaire, la température de ce dernier décroissant plus lentement avec la distance héliocentrique que ne le prédit la théorie de l'expansion radiale adiabatique.

Ces dernières années, la théorie des lois exactes a été étendue avec succès aux modèles MHD et MHD-Hall, l'effet Hall étendant le domaine de validité de la MHD à des échelles comparables ou plus petites que l'échelle caractéristique des ions. Ces lois ont été dérivées dans le cadre d'approximations (fermetures) de type incompressible (densité constante) ou isotherme (pression proportionnelle à la densité). Ces fermetures permettent de simplifier les équations décrivant le plasma. Cependant, leur validité est sujette à caution dans le cadre des plasmas spatiaux tels que le vent solaire. Une hypothèse un peu plus réaliste consisterait à prendre en compte une fermeture du type polytrope (pression proportionnelle à une puissance de la densité). En étendant la théorie des loi exactes dans cette direction, une loi plus versatile a été obtenue : elle dépend d'une pression isotrope (scalaire) quelconque. L'apport de cette loi a ensuite été analysé à travers une application à des données relevées dans le vent solaire par la sonde Parker Solar Probe lancée par la NASA en 2018 en direction du Soleil.

Dans les plasmas spatiaux, il s'avère que le champ magnétique et le manque de collisions induisent une anisotropie de pression. La pression est alors tensorielle et prend en compte, à minima, une différence de pression parallèlement et perpendiculairement au champ magnétique ambiant (hypothèse gyrotrope). Une nouvelle étape d'extension de la théorie des lois exactes a donc été entreprise en relaxant l'isotropie de la pression. La loi obtenue est applicable à des écoulements régis par une pression tensorielle décrits par exemple par une fermeture CGL (Chew, Goldberger, Low), dite aussi bi-adiabatique car dépendant de la gyrotropie de pression. Cette loi apporte un cadre d'étude rigoureux de l'impact de l'anisotropie sur la cascade turbulente et le taux de chauffage. Afin de valider son apport et d'affiner son interprétation, la loi CGL est enfin appliquée dans des simulations tridimensionnelles turbulentes du modèle MHD-Hall-CGL.



## DETAILED ABSTRACT

The solar wind is a highly turbulent plasma in which the fluid quantities (fluid velocity, density and pressure) and the electron and magnetic field vary greatly. These fluctuations are reflected in turbulent spectra covering several frequency decades. The spectra of velocity and magnetic field fluctuations follow power-laws whose exponents depend on the scale considered. At low frequencies, exponents close to  $-5/3$  are observed. They are interpreted as a signature of magnetohydrodynamic (MHD) turbulence that transfers energy non-linearly from large scales to small scales where dissipation is possible.

This turbulent cascade can be studied using exact laws derived from the equations of the fluid quantities and the magnetic field. These laws link the cascade rate to turbulent fluctuations. The cascade rate is associated with the dissipation rate according to Kolmogorov's theory and would therefore provide an estimation of the plasma heating. This dissipation rate is a key to understanding the problem of solar wind heating. Indeed, the temperature of the solar wind decreases slower (with heliocentric distance) than predicted by the theory of adiabatic radial expansion.

In recent years, the theory of exact laws has been successfully extended to MHD and Hall-MHD models, with the Hall effect extending the range of validity of MHD to scales comparable to or smaller than the characteristic ion scale. These laws have been derived within the framework of the incompressible (constant density) and isothermal (pressure proportional to density) approximations. These closures simplify the equations describing the plasma. However, their validity as a description of space plasmas such as the solar wind is open to question. A bit more realistic hypothesis would be to take into account a polytropic closure (pressure proportional to a power of the density). By extending the theory of exact laws in this direction, a more versatile law was obtained : it depends on any isotropic (scalar) pressure. The contribution of this law is then analyzed through an application to data collected in the solar wind by the Parker Solar Probe launched by NASA in 2018 to explore the Sun.

In space plasmas, the magnetic field and the lack of collisions induce pressure anisotropy. Such pressure takes the form of a full tensor and can be reduced to the gyrotropic one that considers at least the difference between the components parallel and perpendicular to the ambient magnetic field. A new extension of the theory of exact laws is then derived relaxing the pressure isotropy assumption. The law obtained is applicable to flows governed by a tensorial pressure and described, at least, by a CGL (Chew, Goldberger, Low) closure, also known as bi-adiabatic because it depends on pressure gyrotropy. This law provides a rigorous framework for studying the impact of pressure anisotropy on the turbulent cascade and the heating rate. In order to validate its contribution and refine its interpretation, the CGL version of the law was finally applied to three-dimensional turbulent simulations of the MHD-Hall-CGL model.



# SOMMAIRE

Note d'information	i
Remerciements	iii
Résumé détaillé	v
Detailed abstract	vii
Sommaire	x
<b>INTRODUCTION : Le vent solaire, un plasma turbulent non-collisionnel</b>	
1 Qu'est-ce que la turbulence ? La description hydrodynamique de Kolmogorov	3
2 Qu'est-ce qu'un plasma ? De l'exemple du vent solaire à la problématique d'étude	13
3 Etude de la cascade turbulente dans un plasma incompressible	23
<b>PARTIE I : Le chauffage turbulent dans un plasma compressible avec pression isotrope</b>	
Introduction	33
4 Que sait-on sur le modèle compressible ?	35
5 Décrire la cascade compressible	43
6 Etudes de cas dans les données in-situ	55
Conclusion	67
<b>PARTIE II : Etude analytique de l'effet de l'anisotropie de pression</b>	
Introduction	71
7 Loi exacte pour le modèle [CHEW <i>et al.</i> 1956] (CGL)	73
8 Et dans le cas incompressible ?	85

<b>9 Relaxer l'approximation magnétohydrodynamique (MHD) et aller vers le bi-fluide</b>	<b>97</b>
<b>Conclusion</b>	<b>113</b>
<b>PARTIE III : Etude numérique d'un plasma turbulent quasi-compressible présentant des gyrotropie de pression</b>	
<b>Introduction</b>	<b>117</b>
<b>10 Simulation turbulente et calcul de lois exactes</b>	<b>119</b>
<b>11 Des lois incompressibles aux lois compressibles : tests et validations</b>	<b>129</b>
<b>Conclusion</b>	<b>141</b>
<b>ANNEXES</b>	
<b>A Explication mathématique et interprétation des termes des lois KHM</b>	<b>145</b>
<b>Table des matières</b>	<b>151</b>
<b>Table des figures</b>	<b>156</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>157</b>
<b>Listes des acronymes</b>	<b>161</b>
<b>Liste des symboles</b>	<b>167</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>174</b>

---

# INTRODUCTION : La turbulence dans les plasmas astrophysiques

---

*I have never thought that you could obtain the extremely clumpy, heterogeneous universe we have today, strongly affected by plasma processes, from the smooth, homogeneous one of the Big Bang, dominated by gravitation.<sup>1</sup>*

**Hannes ALFVÈN**, un des pères de la physique des plasmas magnétisés.

---

1. Traduction : Je n'ai jamais pensé que l'on pouvait obtenir l'univers hétérogène et très agité que nous connaissons aujourd'hui, fortement influencé par des processus plasmas, à partir de l'univers lisse et homogène du Big Bang, dominé par la gravitation. Citation extraite de PERATT 1988.



# INTRODUCTION : CHAPITRE 1

## L QU'EST-CE QUE LA TURBULENCE ? LA DESCRIPTION HYDRODYNAMIQUE DE KOLMOGOROV

### Sommaire

---

1.1	Définition et propriétés d'un écoulement turbulent . . . . .	3
1.2	Description statistique et notations pour l'étude d'un système turbulent . . . . .	6
1.3	Théorie de Kolmogorov et lois d'échelle . . . . .	8
1.4	Synthèse des hypothèses de Kolmogorov et de la description de la cascade turbulente via des lois exactes . . . . .	12

---

Quand on parle de turbulence, la première image qui résonne dans notre esprit est un écoulement semblant chaotique, des secousses dans un avion ou un enfant qui n'en fait qu'à sa tête. Les propriétés partagées par ces trois exemples sont l'agitation, l'apparent désordre, l'imprévisibilité. Mais, ce n'est qu'apparence, contrairement au pur chaos, ce comportement est statistiquement prévisible et peut montrer un semblant d'ordre. Dans ce chapitre, sont résumés des notions, notations et outils permettant de caractériser et prédire le comportement d'un écoulement turbulent dans un cadre hydrodynamique (HD).

### 1.1 Définition et propriétés d'un écoulement turbulent

Supposons l'écoulement incompressible, c'est-à-dire un fluide de densité constante  $\rho_0$ . L'hypothèse incompressible impose aussi une contrainte sur la vitesse de l'écoulement, le champ vectoriel  $\mathbf{v}(t, \mathbf{x})$  dépendant du temps  $t$  et de la position  $\mathbf{x}$ , : l'annulation de la divergence de la vitesse, c'est-à-dire, mathématiquement, en notant  $\nabla = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}$ , l'opérateur de dérivation spatiale,  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ .

Un écoulement hydrodynamique incompressible est un système modélisé par les équations de Navier-Stokes incompressibles :

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (1.1)$$

$$\partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v}. \quad (1.2)$$

Le premier terme de l'équation (1.2),  $\partial_t \mathbf{v}$ , indique que cette équation est celle de l'évolution temporelle,  $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$  étant la dérivée partielle temporelle, de la vitesse de l'écoulement  $\mathbf{v}$ . Le deuxième terme,  $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$ , implique un déplacement convectif du champ de vitesse à la vitesse de l'écoulement. Ce terme cristallise les non-linéarités du système. Dimensionnellement, on peut le schématiser par  $C_{NL} = \frac{V^2}{L}$  avec  $V$  la vitesse caractéristique de l'écoulement et  $L$  sa largeur caractéristique. Le terme  $-\frac{1}{\rho_0} \nabla p$  avec  $p$  la pression du fluide

dénote les forces de pressions impliquées dans l'écoulement. Le dernier terme,  $\nu\Delta\mathbf{v}$ , est un terme dissipatif, d'effort visqueux. Il dépend de  $\nu$ , la viscosité du fluide, et de  $\Delta = \nabla^2$ , l'opérateur Laplacien. Ce terme vient contrebalancer le terme convectif et, s'il domine, rend l'écoulement laminaire. On peut le schématiser tel que  $C_D = \nu \frac{V}{L^2}$ .

Le rapport entre  $C_{NL}$  et  $C_D$  est le nombre de Reynolds  $R_e = \frac{C_{NL}}{C_D} = \frac{VL}{\nu}$ , un nombre sans dimension caractérisant le régime de l'écoulement, laminaire ( $R_e$  faible) ou turbulent ( $R_e \gg 1$ ). Ces régimes sont illustrés sur la FIGURE 1.1. Dans cette expérience, un jet d'eau (blanc) est injecté dans de l'eau stagnante (espace noir). A gauche, sa largeur caractéristique est imposée par le diamètre du tuyau d'injection, l'écoulement est alors dans un régime laminaire. Ensuite la turbulence se développe (régime transitoire), il y a apparition de tourbillons (vortex) dans l'écoulement. Enfin, tout à droite, la turbulence est pleinement développée, les non-linéarités dominent et s'entretiennent.

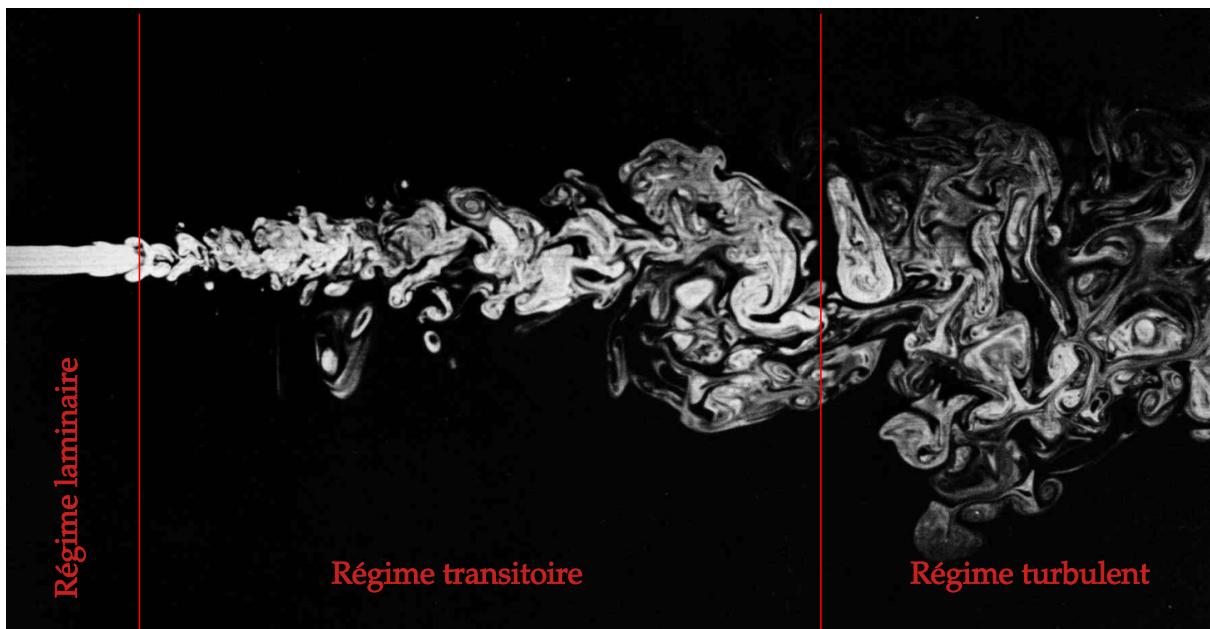


FIGURE 1.1 – Injection d'un jet d'eau dans de l'eau observée par fluorescence laser et illustrant les différents régimes d'un écoulement : laminaire, transitoire et turbulent. Crédits de l'image initiale : [VAN DYKE 1982].

Dans le cadre hydrodynamique incompressible, l'écoulement n'est décrit que par les champs de vitesse et de pression mais pour d'autres fluides, la description peut impliquer d'autres champs tel que le champ magnétique  $\mathbf{B}$ , le champ scalaire massique  $\rho$ . On peut définir un nombre sans dimension similaire au nombre de Reynolds, rapport entre le terme non-linéaire convectif et le terme diffusif ou dissipatif impliqués dans l'évolution temporelle de ce champ. Dans le cas d'un champ magnétique, ce sera le nombre de Reynolds magnétique  $R_m = \frac{VL}{\eta}$  avec  $\eta$  la résistivité ou diffusivité magnétique. Pour des quantités thermodynamiques telles que la densité de masse, la pression, etc., on parlera plutôt de nombres de Péclet.

FIGURE 1.2, sont présentés des résultats d'une simulation turbulente tridimensionnelle qui sera introduite et utilisée dans la partie III. L'image (a) correspond à une coupe du cube de densité  $\rho$  telle que  $n_z = 323$  obtenue au temps  $t = 410$ . Si on la compare à l'image (c) (autre coupe du même cube telle que  $n_z = 638$ ), on remarque une certaine invariance spatiale statistique qui illustre la propriété d'homogénéité dite statistique d'un

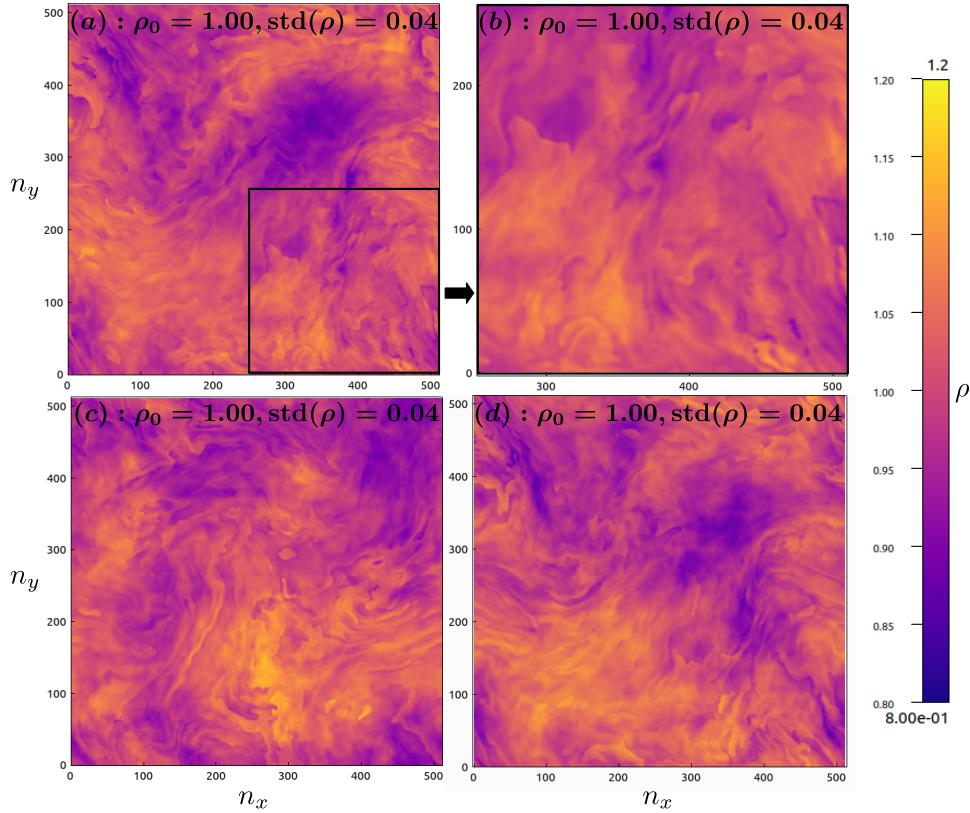


FIGURE 1.2 – Résultats de simulations 3D d'un plasma turbulent décrit par le modèle Hall-CGL. Le code de simulation sera introduit dans la partie III). La quantité représentée est la densité  $\rho$ . Chaque image correspond à une coupe  $x - y$  du cube obtenu au temps  $t$  (en unité de temps de la simulation). Les axes sont en position numérique (nombre de points dans chaque direction, comptés à partir d'une position  $(0, 0, 0)$ ). (a) :  $n_z = 323$ ,  $t = 410$ . (b) : zoom de (a). (c) :  $n_z = 638$ ,  $t = 410$ . (d) :  $n_z = 323$ ,  $t = 408$ . Pour chaque image, la moyenne spatiale,  $\rho_0$ , est de 1.00 et l'écart-type,  $\text{std}(\rho)$ , de 0.04.

fluide turbulent. Si par contre, on la compare à l'image (d) (coupe  $n_z = 323$  obtenue à la date  $t = 408$ ), on retrouve similairement une certaine invariance temporelle qui vient illustrer la propriété de stationnarité statistique du fluide. Et, en comparant avec l'image (b) (un zoom de l'image (a)), on observe ce qui semble être une loi d'échelle.

Un écoulement ou un fluide turbulent serait donc caractérisé par

- une dominance des non-linéarités sur les contributions diffusives (grands nombres de Reynolds et de Péclet),
- des propriétés d'invariance (homogénéité, stationnarité) au sens statistique,
- une loi d'échelle.

Dans la section 1.2, on va définir les notations et appellations liées aux notions mathématiques statistiques et dans la section 1.3, on abordera un peu plus en détail la description de la turbulence à travers les échelles.

## 1.2 Description statistique et notations pour l'étude d'un système turbulent

Afin de garder la description du travail présenté dans ce mémoire accessible à tous, nous ne nous perdrons pas dans des définitions mathématiques complexes et exhaustives des notions, mais resterons sur des définitions exemplifiées et plus appliquées.

Dans l'ensemble de ce mémoire, on se placera dans le cadre tridimensionnel (3D). Sauf quantités indéfinies, les grandeurs vectorielles seront notées en gras. Le système de représentation spatial sera génériquement cartésien  $\mathbf{x} = (x, y, z)$ , sauf mention contraire.

Soit une quantité indéfinie  $X$  (densité, vitesse, pression, champ magnétique, etc.) caractérisant un fluide. La distribution de valeurs possibles pour  $X$ , ou distribution de probabilité de  $X$  notée  $\mathcal{P}_X$ , peut être obtenue en considérant différents points de vue :

- PV1 : Décrire le fluide comme un ensemble souvent discret, par exemple de  $N$  particules (atomes, molécules, etc.) associées individuellement à une valeur de la quantité  $X$ , notée  $X_n$  avec  $n \in [1; N]$ .
- PV2 : Regarder l'espace occupé par le fluide : un volume continu  $V$  ou un nombre de points d'emplacement  $\mathbf{x}$ . La quantité  $X$  sera alors évaluée en chacun d'eux et notée  $X(\mathbf{x})$ .
- PV3 : Ne considérer qu'une particule ou qu'un point, regarder les valeurs de  $X$  au fil du temps, sur une période  $T$  et les noter  $X(t)$ .

Ces différents points de vue ne sont pas forcément équivalents. Par exemple, si l'on regarde plusieurs types de particules et que les valeurs de  $X$  dépendent de leur nature, ne regarder qu'une particule au fil du temps ne sera pas représentatif du système. Par la suite, on utilisera les représentations PV2 et PV3.

Pour caractériser la distribution de probabilité de  $X$ , on peut utiliser divers outils statistiques. L'un d'eux est la moyenne (moment d'ordre 0), une opération linéaire que l'on va noter  $\langle X \rangle$  et définie en fonction des points de vue :

- PV1 :  $\langle X \rangle_N = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N X_n$ , c'est la moyenne d'ensemble définie de manière discrète.
- PV2 :  $\langle X \rangle_V = \frac{1}{V} \int_V X(\mathbf{x}) \mathcal{P}_X d\mathbf{x}$ , c'est la définition continue de la moyenne spatiale.  $\langle X \rangle_{PV2}$  est indépendant de la position locale  $\mathbf{x}$ . Dans le cas discret, en considérant un échantillonnage spatial, c'est-à-dire  $N_V$  points dans le volume  $V$ , et en notant  $X_p$  la valeur de  $X$  au point  $p$ ,  $\langle X \rangle_V = \frac{1}{N_V} \sum_{p=1}^{N_V} X_p$ .
- PV3 :  $\langle X \rangle_T = \frac{1}{T} \int_0^T X(t) \mathcal{P}_X dt$ , c'est la définition continue de la moyenne temporelle.  $\langle X \rangle_{PV3}$  est indépendant de l'instant  $t$ . Une moyenne discrète peut aussi être définie en considérant un échantillonnage temporel.

Si  $\langle X \rangle_N = \langle X \rangle_V = \langle X \rangle_T$ , on peut supposer une équivalence statistique des différents points de vue. Le système sera alors ergodique.

On peut définir plus rigoureusement les propriétés d'homogénéité et de stationnarité statistiques à l'aide de  $\mathcal{P}_X$  :

- **homogénéité statistique** : soit deux échantillons représentatifs du système et définis relativement à deux positions indépendantes l'une de l'autre  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{x}'$  alors  $\mathcal{P}_X(\mathbf{x}) = \mathcal{P}_X(\mathbf{x}') = \mathcal{P}_X$  ce qui implique pour la moyenne  $\langle X \rangle(\mathbf{x}) = \langle X \rangle(\mathbf{x}') = \langle X \rangle$ ,
- **stationnarité statistique** : soit deux échantillons représentatifs du système et définis relativement à deux instants indépendants l'un de l'autre  $t$  et  $t'$  alors  $\mathcal{P}_X(t) = \mathcal{P}_X(t') = \mathcal{P}_X$  ce qui implique pour la moyenne  $\langle X \rangle(t) = \langle X \rangle(t') = \langle X \rangle$ .

Attention, cela ne signifie pas que localement, entre deux instants  $t$  ou deux positions  $\mathbf{x}$ ,  $X$  sera constant. En pratique, dans des données d'observations ou de simulations, des échantillons dans lesquels ces hypothèses seraient parfaitement valides sont difficiles à

obtenir. Des compromis devront donc être établis.

Similairement aux définitions des propriétés d'homogénéité et de stationnarité statistiques, pour étudier un fluide turbulent, on doit relier le comportement statistique de deux échantillons ou plus, c'est-à-dire que l'on doit s'intéresser aux fluctuations, incrément de quantités et corrélations entre au moins deux échantillons. Ce lien peut s'exprimer en fonction de la distance temporelle ou spatiale entre ces échantillons, généralement appelée «échelle». En 1941, Kolmogorov pose les bases d'une théorie permettant d'obtenir une telle relation : la théorie des lois exactes [FRISCH 1995]. Cette théorie repose sur les hypothèses que nous avons illustrées dans la section 1.1 (dominance des effets non-linéaires, homogénéité et stationnarité statistiques) ainsi que sur une hypothèse plus spécifique de séparation d'échelle qui sera expliquée dans la section 1.3.

Le travail décrit dans ce mémoire est basé sur cette théorie et implique les notations suivantes. On considérera deux échantillons définis relativement à deux positions<sup>1 2</sup> indépendantes l'une de l'autre,  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{x}'$ . La quantité indéfinie  $X$  évaluée en  $\mathbf{x}'$  sera notée  $X'$  et celle évaluée en  $\mathbf{x}$ ,  $X$ . L'échelle, notée  $\ell$ , sera définie comme l'incrément de position :

$$\ell = \delta\mathbf{x} = \mathbf{x}' - \mathbf{x}, \quad (1.3)$$

avec  $\delta$  dénotant le caractère incrémental de la quantité (ici la position). L'incrément de la quantité indéfinie  $X$  s'écrirait :

$$\delta X = X' - X = X(\mathbf{x}') - X(\mathbf{x}). \quad (1.4)$$

Le lien étudié entre les deux échantillons sera une fonction de corrélation spatiale entre deux quantités  $X$  et  $Y$  (ici indéfinies) qui s'obtient en considérant une quantité au point  $\mathbf{x}$  et l'autre au point  $\mathbf{x}'$ , en les multipliant puis en moyennant. Afin de conserver une symétrie du rôle de  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{x}'$ , on définira la fonction de corrélation telle que

$$\mathcal{R}_{XY} = \frac{1}{2} \langle X \cdot Y' + X' \cdot Y \rangle, \quad (1.5)$$

en notant  $\cdot$  l'opération générique multiplicative. Entre deux vecteurs, cette opération pourrait être considérée comme un produit scalaire ou remplacée par un produit vectoriel noté  $\times$ . La fonction d'auto-corrélation est obtenue en considérant  $X = Y$ , c.-à-d.  $\mathcal{R}_{XX} = \langle X \cdot X' \rangle$ . La moyenne  $\langle \cdot \rangle$  impliquée dans ces fonctions est la moyenne spatiale.  $\mathcal{R}_{XY}$  sera donc indépendant de  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{x}'$  et ne dépendra que de  $\ell$  et a priori de  $t$  si les quantités dépendent du temps.

Par indépendance entre le temps et la position, la moyenne spatiale commute avec la dérivée temporelle :

$$\partial_t \langle X \rangle = \langle \partial_t X \rangle. \quad (1.6)$$

On note  $\nabla_\ell = \frac{\partial}{\partial \ell}$  l'opérateur de dérivation spatiale dans l'espace global des échelles,  $\nabla$  et  $\nabla'$  les opérateurs de dérivation locaux respectivement en  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{x}'$ . L'indépendance entre  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{x}'$ , implique que :

$$\nabla X' = 0, \quad \nabla' X = 0. \quad (1.7)$$

---

1. Il est possible de corrélérer plus de deux points, mais ce ne sera pas un sujet de ce mémoire. Tout lecteur intéressé pourra se référer à [CHO et LAZARIAN 2009].

2. Historiquement, les calculs sont effectués dans le cadre PV2. Il serait a priori possible de les transposer dans les cadres PV1 ou PV3, mais ce n'est pas l'objet de cette thèse.

Grâce à l'hypothèse d'homogénéité statistique, ces opérateurs dérivatifs vérifient<sup>3</sup>

$$\nabla_{\boldsymbol{\ell}} \langle \cdot \rangle = \langle \nabla' \cdot \rangle = - \langle \nabla \cdot \rangle. \quad (1.8)$$

En turbulence, on utilise aussi communément la transformée de Fourier. Cette méthode permet de travailler dans un espace inverse où la position est repérée par  $\mathbf{k} \propto 1/\mathbf{x}$  et où toute quantité se retrouve décomposée en une série de «modes», un spectre. Dans le cas continu 3D, on définit la transformée de Fourier de la quantité  $X$  par

$$\tilde{X}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint X(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{x} \quad (1.9)$$

et la transformée inverse par

$$X(\mathbf{x}) = \iiint \tilde{X}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{k}. \quad (1.10)$$

On remarque qu'en termes de dimensions, si l'on note  $[X]$ , l'unité de  $X$  et  $L$ , l'unité de longueur,  $\tilde{X} \sim [X]L^3$ .

Dans le cas continu 1D, on aura similairement :

$$\tilde{X}(k) = \frac{1}{2\pi} \int X(x) e^{-ikx} dx \quad X(x) = \int \tilde{X}(k) e^{ikx} dk \quad (1.11)$$

et en termes de dimensions,  $\tilde{X} \sim [X]L$ .

Ces notations et hypothèses seront utilisées tout au long de ce mémoire. Pour se familiariser avec leur utilisation, une application de la théorie de Kolmogorov avec ces notations, à un écoulement hydrodynamique incompressible décrit par l'équation de Navier-Stockes (??) est donnée dans la section 1.3. Cette application va nous servir à introduire la notion de loi d'échelle et l'hypothèse de séparation d'échelle.

### 1.3 Théorie de Kolmogorov et lois d'échelle

La démonstration de Kolmogorov de 1941 [version traduite KOLMOGOROV 1991a ; KOLMOGOROV 1991b] a été réécrite à de multiples reprises sous différentes formes. Des versions sont données par [MONIN et JAGLOM 1975 ; FRISCH 1995 ; ANTONIA *et al.* 1997 ; GALTIER 2021].

Pour faciliter les étapes de calcul, on va réécrire l'équation de Navier-Stockes (1.2) grâce à l'hypothèse incompressible  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$  et y ajouter un terme de forçage  $\mathbf{f}_c$  :

$$\partial_t \mathbf{v} = -\nabla \cdot (\mathbf{v} \mathbf{v}) - \frac{1}{\rho_0} \nabla P + \nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{f}_c. \quad (1.12)$$

La démonstration se base sur la recherche d'une équation d'évolution temporelle pour la fonction d'auto-corrélation  $\mathcal{R}_{vv} = \langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}' \rangle$ . Pour l'obtenir, on dérive temporellement  $\mathcal{R}_{vv}$  grâce à la propriété (1.6) (étape (1.13)), on injecte l'équation de Navier-Stockes (??)

3. Soit  $A$ ,  $B$  et  $C$  des quantités indéfinies telles que  $A(\boldsymbol{\ell}) = \langle B \cdot C' \rangle = \langle B(\mathbf{x}) \cdot C(\mathbf{x}') \rangle$  avec  $\cdot$  une opération multiplicative quelconque et  $\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \boldsymbol{\ell}$ . Alors, l'élément différentiel  $d\boldsymbol{\ell}$  est égal à  $d\mathbf{x}' - d\mathbf{x}$ .

A  $\mathbf{x}$  fixé,  $d\boldsymbol{\ell} = d\mathbf{x}'$ , alors  $\nabla_{\boldsymbol{\ell}} A(\boldsymbol{\ell}) = \langle \partial_{\boldsymbol{\ell}}(B \cdot C') \rangle = \langle \partial_{\mathbf{x}'}(B \cdot C') \rangle = \langle \nabla'(B \cdot C') \rangle$ . D'où la relation entre les opérateurs :  $\nabla_{\boldsymbol{\ell}} \langle \cdot \rangle = \langle \nabla' \cdot \rangle$ . Similairement, à  $\mathbf{x}'$  fixé,  $d\boldsymbol{\ell} = -d\mathbf{x}$ , d'où  $\nabla_{\boldsymbol{\ell}} \langle \cdot \rangle = -\langle \nabla \cdot \rangle$ .

(étape (1.14)) puis on applique les propriétés (1.7) et (1.8) pour extraire les opérateurs dérivatifs spatiaux de la moyenne spatiale (étape (1.15)) :

$$\partial_t \mathcal{R}_{vv} = \langle \mathbf{v} \cdot \partial_t \mathbf{v}' + \mathbf{v}' \cdot \partial_t \mathbf{v} \rangle \quad (1.13)$$

$$\begin{aligned} &= -\langle \nabla' \cdot (\mathbf{v}' \mathbf{v}') \cdot \mathbf{v} + \nabla \cdot (\mathbf{v} \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}' \rangle - \frac{1}{\rho_0} \langle \mathbf{v} \cdot \nabla' P' + \mathbf{v}' \cdot \nabla P \rangle \\ &\quad + \nu \langle \mathbf{v} \cdot \Delta' \mathbf{v}' + \mathbf{v}' \cdot \Delta \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}'_c + \mathbf{v}' \cdot \mathbf{f}_c \rangle \end{aligned} \quad (1.14)$$

$$\begin{aligned} &= \nabla_\ell \cdot \langle -\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}' \mathbf{v}' + \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v} \mathbf{v} \rangle + \frac{1}{\rho_0} \nabla_\ell \cdot \langle -P' \mathbf{v} + P \mathbf{v}' \rangle \\ &\quad + 2\nu \Delta_\ell \langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}' \rangle + \langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}'_c + \mathbf{v}' \cdot \mathbf{f}_c \rangle. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Avec l'hypothèse incompressible et celle d'homogénéité statistique (propriétés (1.7) et (1.8)),  $\nabla_\ell \cdot \langle -P' \mathbf{v} + P \mathbf{v}' \rangle = 0$ ,  $\nabla_\ell \cdot \langle -\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}' \mathbf{v}' + \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v} \mathbf{v} \rangle = \frac{1}{2} \nabla_\ell \cdot \langle \delta \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v} \delta \mathbf{v} \rangle$  et  $\langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}'_c + \mathbf{v}' \cdot \mathbf{f}_c \rangle = \langle \mathbf{v} \cdot (\mathbf{f}_c(\mathbf{x} + \ell) + \mathbf{f}_c(\mathbf{x} - \ell)) \rangle$ . D'où l'équation dite de Kármán-Howarth-Monin (KHM) :

$$-\frac{1}{2} \partial_t \mathcal{R}_{vv} + \nu \Delta_\ell \mathcal{R}_{vv} + \frac{1}{2} \langle \mathbf{v} \cdot (\mathbf{f}_c(\mathbf{x} + \ell) + \mathbf{f}_c(\mathbf{x} - \ell)) \rangle = -\frac{1}{4} \nabla_\ell \cdot \langle \delta \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v} \delta \mathbf{v} \rangle. \quad (1.16)$$

Schématiquement, on va la noter :

$$-\partial_t \mathcal{R} + \varepsilon_{NL} + \varepsilon_F + \varepsilon_D = 0. \quad (1.17)$$

- $\mathcal{R} = \frac{1}{2} \mathcal{R}_{vv}$ , la fonction de corrélation d'énergie totale (ici cinétique). En  $\ell = 0$ , elle est égale à l'énergie totale moyenne  $\left\langle \frac{\mathbf{v}^2}{2} \right\rangle$  du système.
- $\varepsilon_{NL} = \frac{1}{4} \rho_0 \nabla_\ell \cdot \langle \delta \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v} \delta \mathbf{v} \rangle$ , le taux de cascade ou de transfert non-linéaire de l'énergie incrémentale  $\frac{1}{4} \langle \delta \mathbf{v}^2 \rangle$  à travers les échelles, il s'annule en  $\ell = 0$ .
- $\varepsilon_F = \frac{1}{2} \rho_0 \langle \mathbf{v} \cdot (\mathbf{f}_c(\mathbf{x} + \ell) + \mathbf{f}_c(\mathbf{x} - \ell)) \rangle$ , le taux de forçage dépendant des échelles. En  $\ell = 0$ , il est égal à l'énergie moyenne injectée  $\langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}_c \rangle$  dans le système par le forçage.
- $\varepsilon_D = \nu \rho_0 \Delta_\ell \mathcal{R}_{vv}$ , le taux de dissipation dépendant des échelles. En  $\ell = 0$ , il est égal à l'énergie moyenne dissipée par viscosité  $\nu \langle \Delta \mathbf{v}^2 \rangle$ .

On remarque qu'en  $\ell = 0$ , (1.16) devient l'équation d'énergie totale moyenne que l'on peut noter :

$$-\partial_t \mathcal{R}(\ell = 0) + \varepsilon_D(\ell = 0) + \varepsilon_F(\ell = 0) = 0. \quad (1.18)$$

L'hypothèse de stationnarité statistique vient annuler toute dérivée temporelle de quantités moyennées. Par conséquent, les équations (1.17) et (1.18) deviennent :

$$\varepsilon_{NL} + \varepsilon_F + \varepsilon_D = 0, \quad (1.19)$$

$$\varepsilon_D(\ell = 0) + \varepsilon_F(\ell = 0) = 0. \quad (1.20)$$

Les démonstrations existantes divergent dans le traitement des taux  $\varepsilon_F$  et  $\varepsilon_D$  de l'équation (1.19) car elles ne prennent pas forcément en compte  $\varepsilon_F$ . Mais, toutes utilisent une propriété fondamentale de la turbulence, la loi «zéroième». Cette loi indique que, pour un nombre de Reynolds grands, lorsque  $\nu$  tend vers 0, l'énergie dissipée moyenne  $\nu \langle \Delta \mathbf{v}^2 \rangle$ , qui correspond à  $\varepsilon_D$  évalué en  $\ell = 0$ , devient indépendante de  $\nu$  et ne s'annule pas. Cette singularité est aussi appelée anomalie dissipative. Elle indique la présence d'une dissipation dans la limite  $R_e \gg 1$ . On va noter  $-\varepsilon$ , cette valeur particulière de  $\varepsilon_D$ . On peut

résumer la loi tel que :

$$\varepsilon_D \xrightarrow[\nu \rightarrow 0]{} \begin{cases} 0 & \text{si } \ell \neq 0 \\ -\varepsilon & \text{si } \ell = 0 \end{cases} \quad (1.21)$$

Si l'on prend en compte le terme de forçage, il sera supposé actif aux grandes échelles, notées  $\ell_F$ . Aux échelles  $\ell \ll \ell_F$ , on obtient<sup>4</sup>  $\varepsilon_F = \varepsilon_F(\ell = 0)$ . Avec la relation (1.20) et la loi zéroième (1.21), on obtient alors  $\varepsilon_F(\ell \ll \ell_F) = \varepsilon$ . Enfin, en se plaçant à des échelles différentes de  $\ell = 0$ , telles que  $\varepsilon_D = 0$ , on obtient de (1.19), la loi exacte de Kolmogorov (version dérivée, notée K41) :

$$\frac{\varepsilon}{\rho_0} = -\frac{1}{4} \nabla_\ell \cdot \langle \delta \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v} \delta \mathbf{v} \rangle \quad (1.22)$$

qui s'écrit schématiquement  $\varepsilon = -\varepsilon_{NL}$ . Dans ce mémoire, nous déterminerons et analyserons  $\varepsilon_{NL}$  pour différents modèles. Si l'on ne prend pas en compte le terme de forçage, on peut construire la différence entre (1.19) et (1.19) évaluée en  $\ell = 0$  et, dans la limite des grands nombres de Reynolds, retrouver (1.22) [ANTONIA *et al.* 1997].

Cette loi est valable dans une gamme d'échelle dite inertie où le comportement du fluide est supposé complètement non-linéaire ( $R_e \gg 1$  et  $\nu \rightarrow 0$ ) et peu impacté par tout phénomène d'injection d'énergie. La cascade d'énergie s'y effectue donc à un taux  $\varepsilon$  constant. L'ensemble des dernières hypothèses est résumé sous le nom «*hypothèse de séparation d'échelle*» : *il existe une gamme d'échelle dite inertie où l'énergie cascade conservativement (pas de dissipation,  $\nu \rightarrow 0$  et  $\ell \neq 0$ , ni de forçage,  $\ell \ll \ell_F$ ) à un taux  $\varepsilon$  constant.*

Une autre hypothèse, communément appliquée en hydrodynamique, a été prise en compte par Kolmogorov, celle d'isotropie statistique. Elle permet d'obtenir une forme intégrée de la loi exacte. L'isotropie statistique implique une invariance angulaire sphérique.  $\varepsilon(\ell)$  ne dépendra alors que de  $\ell = |\ell|$ . On peut alors intégrer sur une boule de rayon  $\ell$  la loi (1.22) sachant que, dans la zone inertie,  $\varepsilon$  est constant. Ainsi, en notant  $v_\ell = \mathbf{v} \cdot \ell$ , on a :

$$-\frac{4}{3} \frac{\varepsilon}{\rho_0} \ell = \langle |\delta \mathbf{v}|^2 \delta v_\ell \rangle. \quad (1.23)$$

Phénoménologiquement, par analyse dimensionnelle, la loi exacte (1.23) s'écrit  $(\delta v)^3 \sim \ell$  d'où  $E(\ell) \sim (\delta v)^2 \sim \ell^{2/3}$ . En passant dans l'espace de Fourier, sachant que l'on se place dans un cas 1D, on peut remplacer  $\ell \rightarrow 1/k$  et  $E(\ell) \rightarrow kE(k)$ . On obtient alors le spectre énergétique :

$$E(k) \sim k^{-5/3}. \quad (1.24)$$

En représentation logarithmique :  $\log E(k) = -5/3 \log k + C$  avec  $C$  une constante. Ainsi, la théorie de Kolmogorov nous permet de prédire, dans le cas isotrope, un spectre d'énergie cinétique,  $E(k)$  de pente  $-5/3$  en représentation logarithmique. Malgré son caractère phénoménologique, cette prédition est très bien retrouvée sur plusieurs ordres de grandeurs, par exemple dans le cadre expérimental (voir FIGURE 1.3) et peut être démontrée rigoureusement [FRISCH 1995]. La forme  $E(k) = Ck^\gamma$  avec  $C$  et  $\gamma$  constants, qui en représentation logarithmique s'écrit  $\log E(k) = \gamma \log k + C$  est une loi d'échelle. Dans un système physique, une loi d'échelle ne va apparaître que sur une gamme d'échelle dédiée, limitée par la taille du système et l'émergence de phénomènes diffusifs à petites échelles,

---

4. Une démonstration de cette approximation est donnée dans l'Annexe A.1 pour un forçage de type distribution de Dirac dans l'espace de Fourier.

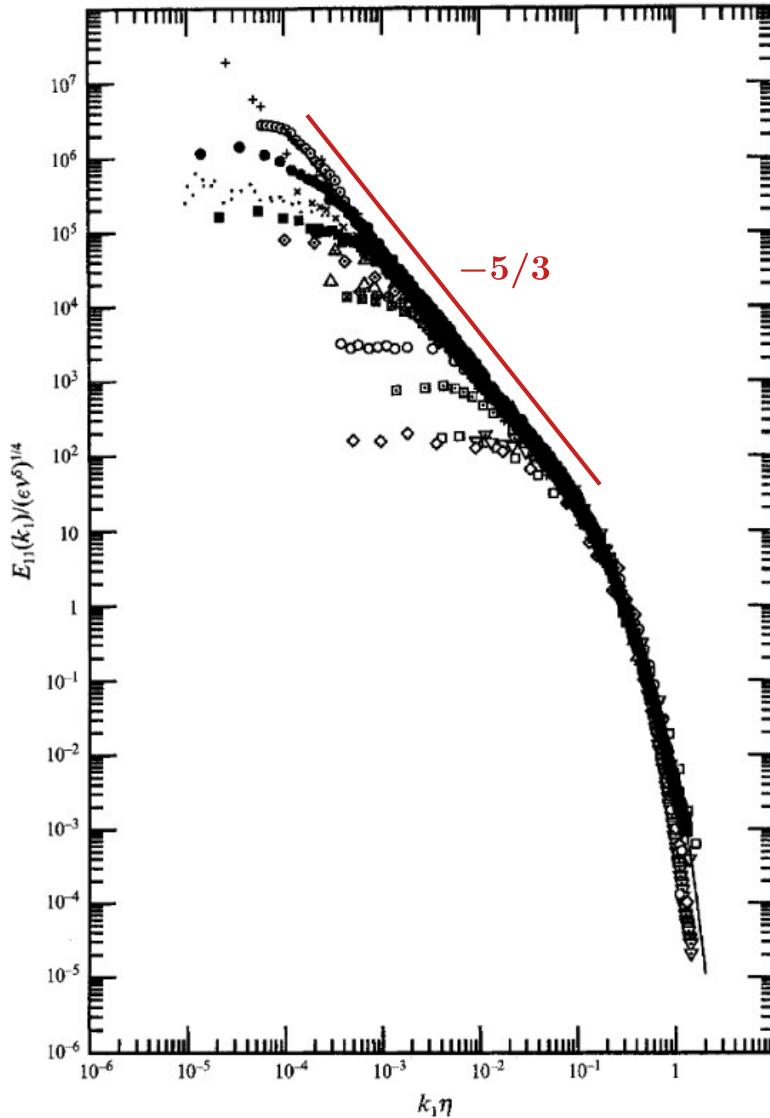


FIGURE 1.3 – Compilations de spectres obtenus dans diverses expériences de laboratoire. Tous ces spectres en accord avec la pente en  $-5/3$  prédicta grâce à la théorie de Kolmogorov. Crédits : [SADDOUGHI et VEERAVALLI 1994].

càd. petits  $\ell$  ou grand  $k$ . Ici, cette gamme est la zone de validité de la loi de Kolmogorov : la zone inertie.

Cette définition spectrale de la zone inertie turbulente, telle que le spectre affiche une loi d'échelle en  $-5/3$ , n'est pas aussi contraignante que la définition statistique via un taux  $\varepsilon$  constant. En effet, le système vérifiera plus facilement la définition spectrale que la définition statistique car  $E(k)$  est d'ordre 2 ( $\propto (\delta v)^2$ ) alors que  $\varepsilon$  est d'ordre 3 ( $\propto (\delta v)^3$ ). Autrement dit, observer une pente  $-5/3$  de type Kolmogorov ne sera pas forcément synonyme d'un régime de turbulence complètement développée définie par l'existence d'une zone inertie telle que  $\varepsilon$  constant.

## 1.4 Synthèse des hypothèses de Kolmogorov et de la description de la cascade turbulente via des lois exactes

**Taux énergétiques échelles-dépendants :**

- Taux de cascade (transfert non linéaire entre les échelles) :  $\varepsilon_{NL}(\ell)$
- Taux d'injection (forçage) :  $\varepsilon_F(\ell)$
- Taux de dissipation :  $\varepsilon_D(\ell)$

**Loi zéroième ou anomalie dissipative :**  $\varepsilon_D(\ell = 0) \xrightarrow[\nu \rightarrow 0]{} -\varepsilon \neq 0$ .  $\varepsilon$  correspond au taux de dissipation turbulent.

**Méthode d'obtention d'une loi exacte :**

- Dériver l'évolution temporelle d'une fonction de corrélation  $\mathcal{R}$  entre deux points indépendants  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{x}'$  séparés de l'échelle  $\ell$ ,
- Prendre en compte l'hypothèse d'homogénéité statistique  $\Rightarrow$  Loi exacte de type KHM
- Appliquer les hypothèses de Kolmogorov de stationnarité statistique et séparation d'échelle  $\Rightarrow$  Loi exacte de type K41

**Propriété liées à l'hypothèse d'homogénéité statistique :**

$$\Rightarrow \nabla_\ell \langle \cdot \rangle = \langle \nabla' \cdot \rangle = -\langle \nabla \cdot \rangle$$

**Propriété liées à l'hypothèse de stationnarité statistique :**  $\Rightarrow \partial_t \langle \cdot \rangle = 0$ .

**Hypothèse de séparation d'échelle :** Séparation des gammes d'échelles d'injection/forçage, de cascade/inertielles, et de dissipation/chauffage permise par la loi zéroième.  $\Rightarrow \varepsilon_{NL}(0 \ll \ell \ll \ell_F) = -\varepsilon_F(\ell \ll \ell_F) = \varepsilon_D(\ell = 0) = -\varepsilon$ .

**Loi exacte de type KHM :**  $\partial_t \mathcal{R} = \varepsilon_{NL} + \varepsilon_F + \varepsilon_D$

**Loi exacte de type K41 :**  $\varepsilon = -\varepsilon_{NL}$

# INTRODUCTION : CHAPITRE 2

## **L** QU'EST-CE QU'UN PLASMA ? DE L'EXEMPLE DU VENT SOLAIRE À LA PROBLÉMATIQUE D'ÉTUDE

### Sommaire

---

2.1	Les plasmas, état de la matière . . . . .	13
2.2	Le vent solaire, source de questions ouvertes et problématique d'étude . . . . .	15
2.3	Décrire un plasma à l'aide d'un modèle fluide . . . . .	17
2.4	Synthèse : problématique et modèles utilisés . . . . .	21

---

Dans le Chapitre 1, nous avons défini de manière hydrodynamique (HD) ce qu'est la turbulence grâce à la théorie des lois exactes de Kolmogorov. Ce sera le seul chapitre placé dans le domaine hydrodynamique. Dans l'univers, la matière est majoritairement sous forme de plasma que l'on ne peut décrire par les équations de Navier-Stokes incompressibles seules. On s'intéressera donc à la turbulence dans un plasma.

Ici, nous allons définir ce qu'est un plasma et comment le décrire, puis nous aborderons les questions ouvertes, motivations des travaux décrits dans ce mémoire.

### 2.1 Les plasmas, état de la matière

La matière peut être décrite comme des poupées russes constituées de particules de tailles diverses, allant des atomes et molécules aux quarks en passant par les protons et les électrons qui sont des particules chargées positivement et négativement. Elle peut aussi être décrite en fonction de son état : solide, liquide, gaz et plasma.

Les états solide, liquide et gaz sont les états les plus reconnus dans notre quotidien. Ils sont généralement constitués de molécules ou d'atomes neutres ne portant pas de charge électrique. Pourtant, ces états sont des exceptions dans l'univers, où la matière est majoritairement à l'état de plasma : les atomes y sont dissociés en particules chargées, ions, protons et électrons. Ces particules induisent un champ électromagnétique s'il n'y en a pas originellement. Le plasma sera entretenu par les interactions entre champ électromagnétique et particules. *Un plasma est donc un milieu constitué de particules chargées et d'un champ électromagnétique en étroite interaction.*

On peut aussi en reconnaître dans notre quotidien, le plus souvent ils brillent ! Par exemple, les éclairs, les aurores, les flammes, les néons, les étoiles et les nébuleuses. Ils forment finalement la grande majorité de la matière présente dans l'univers, du centre des planètes au milieu intergalactique. Pour les étudier, on a deux possibilités : les créer en laboratoire ou s'immerger dedans. Dans le deuxième cas, peu sont réellement accessibles, beaucoup étant trop furtif (les éclairs), trop lointains (les nébuleuses) ou trop extrêmes (le soleil) pour y envoyer des appareils de mesure. Parmi les plasmas naturels accessibles,

l'espace interplanétaire est roi. Véritable laboratoire [BRUNO et CARBONE 2005], on y envoie régulièrement des sondes et satellites. La dernière sonde en date est JUICE (Jupiter Icy Moons Explorer) lancée le 14 avril 2023 en direction du système lunaire de Jupiter.

Dans l'espace interplanétaire, on trouve différents types de plasmas. Si l'on décolle de la surface d'une planète telle que la Terre, on commencera par traverser l'atmosphère constituée de gaz neutre. Puis, on atteindra l'ionosphère, un plasma d'ions lourds et impactés par le champ magnétique planétaire. En s'écartant un peu plus, on s'immergera dans la magnétosphère constituée d'ions légers (principalement des protons) et d'électrons, toujours sous l'influence du champ planétaire. En partant du Soleil, on peut aussi définir différentes couches, la chromosphère, une couche fine gazeuse, puis la couronne solaire, un plasma s'étendant sur une quinzaine de rayons solaires et enfin l'héliosphère dans lequel baignent les planètes. Le Soleil y éjecte continuellement un plasma : le vent solaire. Le mouvement des planètes dans le vent solaire vient former un arc de choc les précédent. Entre cet arc et la magnétosphère, le vent solaire est choqué. Cette région, dominée par le champ magnétique interplanétaire, est la magnétogaine. La FIGURE 2.1 illustre quelques-unes de ces différentes régions. D'autres régions plus spécifiques existent, mais on se contentera de ce niveau de description, le vent solaire étant notre principal objet d'étude. Le vent solaire est par exemple traversé par Parker Solar Probe (PSP) en orbite

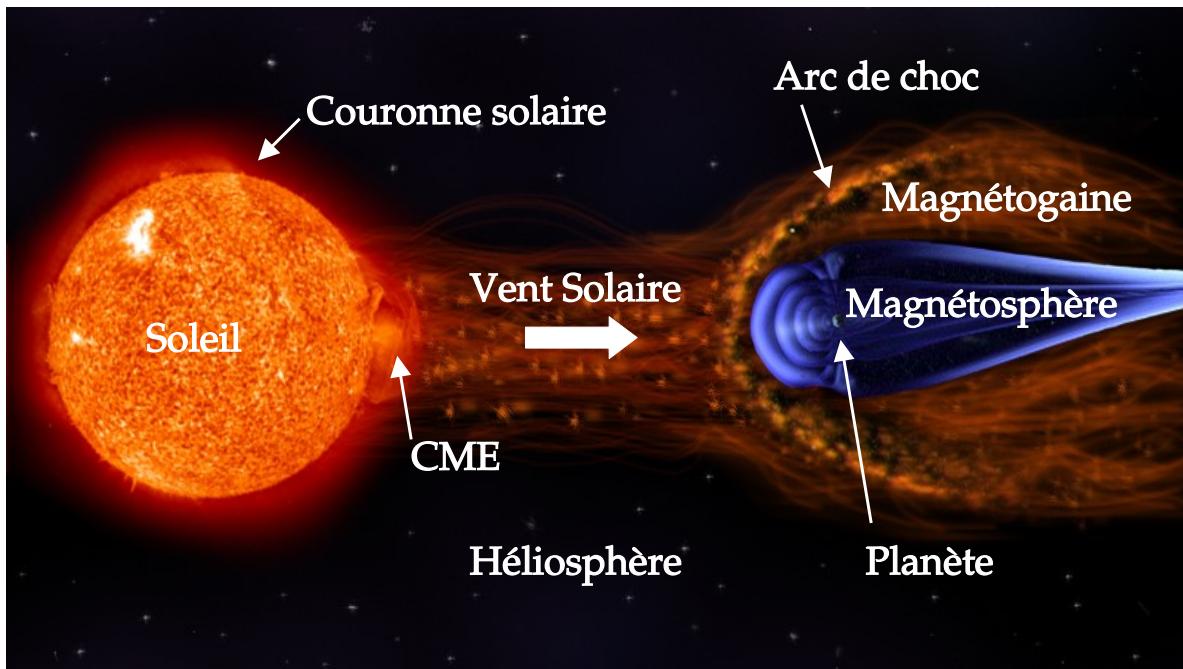


FIGURE 2.1 – Exemples de plasmas spatiaux. CME signifie éjections de masse coronale. Crédits de l'image initiale : Institut royal d'Aéronomie Spatiale de Belgique (page web [www.aeronomie.be](http://www.aeronomie.be)).

autour du Soleil, cette mission lancée par l'agence spatiale américaine (NASA) en 2018 s'approche petit à petit du Soleil afin de traverser la couronne. La mission Magnetospheric Multiscale (MMS) en orbite autour de la Terre traverse le vent solaire, la magnétogaine et la magnétosphère. Nous reparlerons plus en détail de ces missions dans le Chapitre 6.

## 2.2 Le vent solaire, source de questions ouvertes et problématique d'étude

Le vent solaire est un plasma extrêmement dilué, peu collisionnel et turbulent, constitué essentiellement d'ions légers ou protons (hydrogène, hélium chargés) et d'électrons interagissant avec le champ magnétique du Soleil. En fonction de l'activité cyclique et des latitudes du Soleil, il peut être rapide ( $v_{SW} \sim 800$  km/s) ou lent ( $v_{SW} \sim 400$  km/s) et parcouru par des structures à grandes échelles telles que les éjections de masse coronale (CME). Les missions Voyager 1 et 2 lancées en 1977 vers les confins de l'héliosphère par la NASA, ont permis de tracer les profils de température, champ magnétique, vitesse etc. en fonction de la distance au Soleil [RICHARDSON, PAULARENA *et al.* 1995]. Ces profils ont donné lieu à diverses modélisations et à des problèmes ouverts encore aujourd'hui.

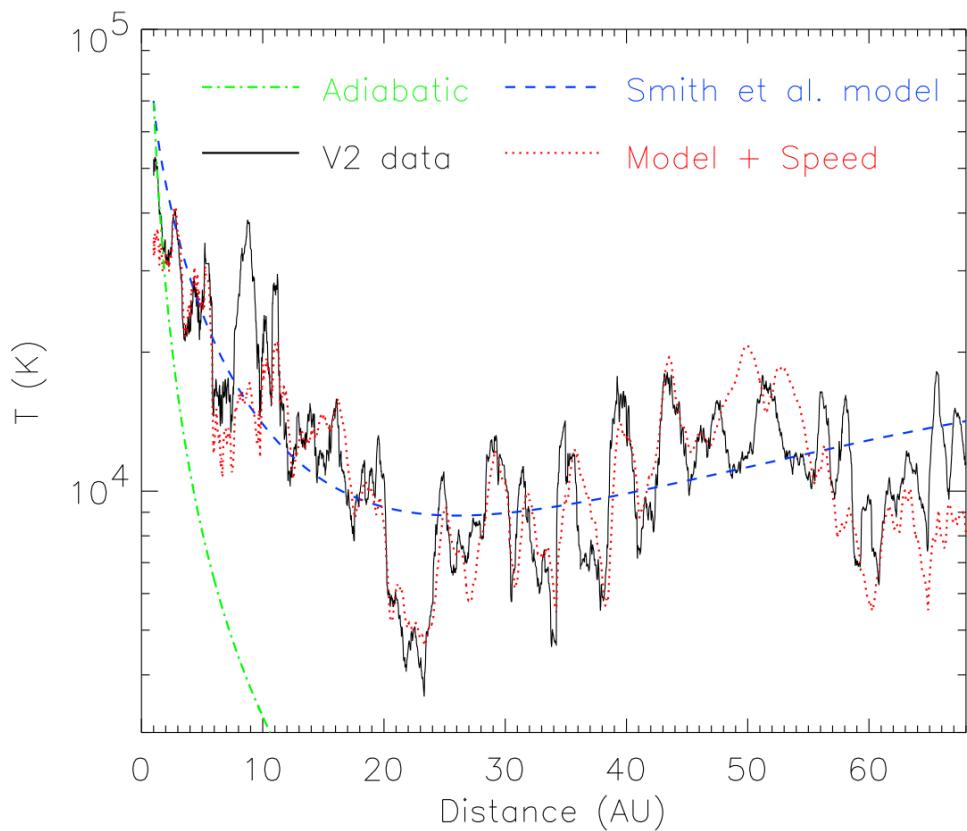


FIGURE 2.2 – Profil de température en fonction de la distance au Soleil, observé avec les données de Voyager 2 (noir). Profil adiabatique (vert). Crédits : [RICHARDSON et SMITH 2003].

Sur la FIGURE 2.2, est donné l'exemple du profil de température. Du caractère peu collisionnel du vent solaire a, dans un premier temps, émergé des prédictions d'une décroissance adiabatique du profil de température (courbe verte) [TU et MARSCH 1995]. Comme on peut l'observer, la décroissance n'est pas si rapide. Des exemples de modélisations pour retrouver ce profil sont référencés par [RICHARDSON et SMITH 2003]. Sur la FIGURE 2.2, des résultats d'un modèle prenant en compte des ions dits «pickups» sont présentés en bleu et en rouge. Dans le cas rouge, est ajouté au modèle une dépendance linéaire entre la vitesse du vent solaire et la température. Le profil in-situ est ainsi plutôt bien retrouvé mais initialisé à partir de relevés de vitesse et température effectués autour

de 1 au (unité astronomique dont l'étalon est la distance Soleil-Terre). Les ions pickups font en effet partie des sources du chauffage localisé du vent solaire mais ce chauffage aurait d'autres sources, comme l'explique [DAVID *et al.* 2022]. Avant 1 au, il serait principalement dû aux fluctuations turbulentes, puis aux chocs interplanétaires venant accélérer ou ralentir le plasma, et enfin, après 20 au, aux ions pickups provenant du milieu interstellaire. Le chauffage dû aux fluctuations turbulentes est souvent mis en compétition avec un chauffage induit par les processus de reconnexion des lignes de champ magnétique [MATTHAEUS et VELLI 2011 ; CRANMER *et al.* 2015]. Ces deux phénomènes sont souvent liés [**manzini\_sub-ion\_2022** ; SUNDKVIST *et al.* 2007 ; RETINÒ *et al.* 2007 ; SERVIDIO *et al.* 2011 ; CHASAPIS *et al.* 2015].

Dans ces travaux, on s'intéresse au chauffage turbulent [TU et MARSCH 1995 ; KIYANI *et al.* 2015] prédominant à partir de quelques rayons solaires jusqu'à 2 au. Une définition thermodynamique de ce chauffage sera donnée dans le Chapitre 4. Ce problème sera abordé à travers la cascade turbulente définie dans le Chapitre 1 et décrite avec une théorie des lois exactes, héritage de la théorie de Kolmogorov. Elle permet un transfert d'énergie des grandes échelles d'injection, à travers les échelles dites fluides et vers les petites échelles (échelles dites cinétiques) où les processus cinétiques dispersifs et dissipatifs peuvent intervenir afin de chauffer les ions et les électrons.

Ce transfert peut être illustré à partir des spectres d'énergie magnétique comme celui de la FIGURE 2.3 compilé grâce aux relevés de champ magnétique effectués in-situ par les missions ACE et Cluster en orbite autour de la Terre. Sur cette figure, on retrouve en fonction de la fréquence temporelle  $f$  une pente de type Kolmogorov en  $-5/3 \simeq -1.7$ . L'hypothèse de Taylor permet de relier le vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  introduit dans le Chapitre 1, à la fréquence temporelle  $f$  accessible dans les relevés in-situ, grâce à la vitesse du vent ( $\mathbf{v}_{SW}$ ) :  $f \sim \mathbf{v}_{SW} \cdot \mathbf{k}$ . Cette pente indique donc les échelles inertielles et la présence de turbulence dans le plasma d'après la définition spectrale de la zone inertuelle donnée dans le Chapitre 1 et transposée à l'énergie magnétique. À plus hautes fréquences, cette zone inertuelle s'achève par une rupture de pente autour de la fréquence associée à une longueur caractéristique ionique (la longueur d'inertie ( $d_i$ ) ou le rayon de Larmor ( $\rho_{Li}$ ) noté sur la figure  $\rho_i$ ). À partir de cette échelle, des effets cinétiques ioniques commencent donc à être visible. Ensuite, le spectre semble se stabiliser autour d'un nouveau régime a priori dispersif, avec une pente en  $-2.6$ , avant d'atteindre la zone d'influence des électrons autour de la fréquence associée à une longueur caractéristique électronique ( $d_e$  ou ( $\rho_{Le}$ ) noté sur la figure  $\rho_e$ ). Les phénomènes d'origine cinétique impliqués dans la zone de transition et les zones qui s'ensuivent ne sont pas encore complètement compris, tout comme leurs impacts sur les régimes turbulents (voir par exemple [ALEXANDROVA *et al.* 2013 ; SAHRAOUI *et al.* 2020]). Parmi ces questions ouvertes dans l'étude de la turbulence compressible pour le chauffage du vent solaire, on s'attaquera aux effets conjoints du manque de collision et du champ magnétique sur la cascade. Ces deux propriétés induisent une anisotropie de la fonction de distribution de vitesse des particules, décrite par un tenseur de pression anisotrope. Cette anisotropie de pression peut induire le développement d'instabilités dans le système [PARKER 1958 ; BEREZIN et VSHIVKOV 1976 ; HALL 1981 ; SOUTHWOOD et KIVELSON 1993 ; GARY *et al.* 1976 ; HUNANA *et al.* 2019].

La cascade turbulente d'énergie a été largement étudiée dans le cas incompressible depuis le début du siècle et l'extension de la théorie des lois exactes de Kolmogorov au modèle magnétohydrodynamique incompressible par [POLITANO et POUQUET 1998a ; POLITANO et POUQUET 1998b]. Les études sur l'effet de la compression sur la cascade sont quant à elles plus récentes et leur cadre souvent limité par l'hypothèse thermodynamique

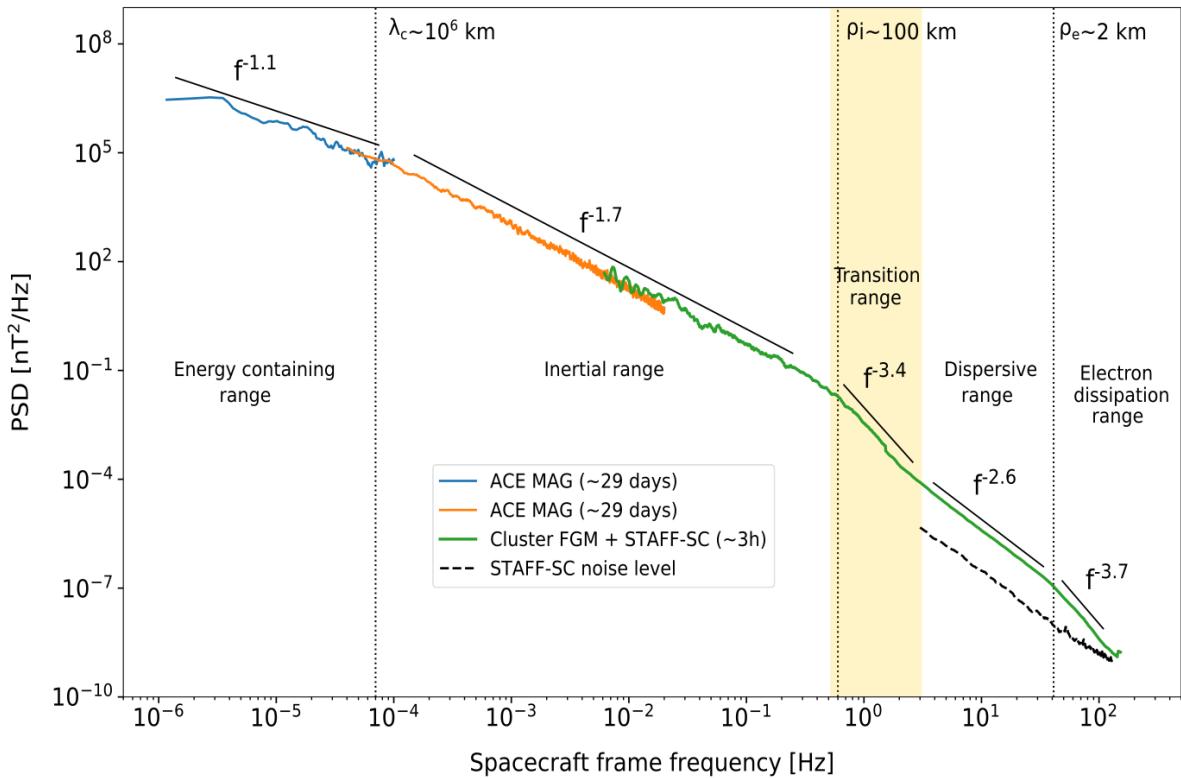


FIGURE 2.3 – Spectre d'énergie magnétique du vent solaire obtenu à partir des missions ACE et Cluster. Ce spectre peut être découpé en cinq régions grâce aux ruptures de pentes. Pente en  $-1.1$  : Réervoir d'énergie.  $\lambda_c$  : longueur de corrélation. Pente en  $-1.7$  : Zone inertielle.  $\rho_i$  : rayon de Larmor ionique. Pente en  $-3.4$  : Zone de transition. Pente en  $-2.6$  : Échelles dispersives.  $\rho_e$  : rayon de Larmor électronique. Pente en  $-3.7$  : Échelles de dissipation électronique. Crédits : [SAHRAOUI *et al.* 2020].

isotherme [MARINO et SORRISO-VALVO 2023]. Dans le Chapitre 3, nous reprendrons quelques résultats incompressibles avant d'apporter dans la Partie I une première extension du cadre d'étude de la cascade turbulente à des plasmas compressibles, en centrant la problématique sur l'effet de différentes descriptions thermodynamiques utilisées pour définir la pression. Dans la Partie II, nous élargirons le cadre de la théorie des lois exactes en prenant en compte l'anisotropie de pression. Dans la Partie III, nous appliquerons la théorie analytique ainsi élargie à des simulations tridimensionnelles turbulentes.

Mais avant cela, dans la section 2.3, sera rappelée la description fluide d'un plasma qui sert de base à l'ensemble des modèles utilisés dans ces travaux, et, dans le Chapitre 3, nous allons introduire la première extension de la théorie de Kolmogorov à un plasma et quelques résultats fondamentaux associés aux plasmas incompressibles.

## 2.3 Décrire un plasma à l'aide d'un modèle fluide

Soit un plasma, dans lequel chaque particule est caractérisée par le ratio charge/masse,  $q_\alpha/m_\alpha$ , associée à son espèce notée  $\alpha$ , sa position dans l'espace des phases  $\{\mathbf{x}, \mathbf{v}\}$  et une fonction de distribution  $\mathcal{P}_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ . Dans les cas étudiés ici, les espèces sont les protons ( $\alpha = i$ ) et les électrons ( $\alpha = e$ ). En négligeant les collisions entre les particules, l'équation cinétique, nommée alors équation de Vlasov, décrivant l'évolution de la fonction

de distribution des particules est :

$$\partial_t \mathcal{P}_\alpha + \mathbf{v} \cdot \nabla \cdot \mathcal{P}_\alpha + \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \cdot \mathcal{P}_\alpha = 0. \quad (2.1)$$

Le système est alors décrit par sept variables, une temporelle  $t$ , les trois composantes de la position  $\mathbf{x} = [x, y, z]$  associée à l'opérateur dérivatif  $\nabla$  et les trois composantes de la vitesse  $\mathbf{v}$  associée à l'opérateur dérivatif  $\nabla_{\mathbf{v}}$  et dépendante du temps. Si l'on considère que les particules baignent dans un champ électromagnétique  $\{\mathbf{E}(\mathbf{x}, t), \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)\}$ , on peut remplacer  $\frac{d\mathbf{v}}{dt}$  par la force électromagnétique de Lorentz  $q_\alpha/m_\alpha (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$  et compléter le système avec les équations de Maxwell :

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = Q/\epsilon_0 \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B} \quad (2.4)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \epsilon_0 \mu_0 \partial_t \mathbf{E} \quad (2.5)$$

avec  $Q(\mathbf{x}, t)$  et  $\mathbf{j}(\mathbf{x}, t)$  les densités totales de charges et de courant du plasma.

On peut définir des quantités macroscopiques, des «moments» de la fonction de distributions, en moyennant une fonction  $g(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$  dans l'espace des vitesses ( $d^3v = dv_x dv_y dv_z$ ) :

$$\langle G(\mathbf{x}, t) \rangle_\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{P}_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) g(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d^3v. \quad (2.6)$$

Afin d'appliquer cette moyenne, on supposera la convergence des intégrales. Les étapes de calculs ne seront pas détaillées. Pour plus d'informations, se référer à, par exemple, [KRALL et TRIVELPIECE 1973 ; RAX 2005 ; GALTIER 2016 ; BELMONT *et al.* 2018]. Visuellement, les moments d'ordre 0, sont reliés à l'aire sous la fonction de distribution, ceux d'ordre 1 sont reliés à sa valeur moyenne et ceux d'ordre 2 à sa largeur à mi-hauteur comme représenté sur la FIGURE 2.4.

Suivant la fonction  $g$ , on peut obtenir pour chaque espèce, les quantités macroscopiques suivantes, aussi appelées «moments», :

Quantité	$\langle G(\mathbf{x}, t) \rangle_\alpha$	$g(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$	ordre
Densité de particules	$n_\alpha(\mathbf{x}, t)$	1	0
Densité de masse	$\rho_\alpha(\mathbf{x}, t)$	$m_\alpha(\mathbf{x}, t)$	0
Densité de charge	$Q_\alpha(\mathbf{x}, t)$	$q_\alpha(\mathbf{x}, t)$	0
Densité de Vitesse du fluide	$n_\alpha \mathbf{v}_\alpha(\mathbf{x}, t)$	$\mathbf{v}$	1
Densité de courant	$\mathbf{j}_\alpha(\mathbf{x}, t)$	$q_\alpha \mathbf{v}_\alpha$	1
Pression	$\overline{\mathbf{P}_\alpha}(\mathbf{x}, t)$	$m_\alpha(\mathbf{v} - \mathbf{v}_\alpha)(\mathbf{v} - \mathbf{v}_\alpha)$	2
Flux de chaleur	$\overline{\mathbf{q}_\alpha}(\mathbf{x}, t)$	$m_\alpha(\mathbf{v} - \mathbf{v}_\alpha)(\mathbf{v} - \mathbf{v}_\alpha)(\mathbf{v} - \mathbf{v}_\alpha)$	3

En appliquant ces transformations à l'équation de Vlasov, on obtient des équations dites «multi-fluides» (dépendant de  $\alpha$ ) :

— L'équation de continuité pour la densité massique :

$$\partial_t \rho_\alpha + \nabla \cdot (\rho_\alpha \mathbf{v}_\alpha) = 0. \quad (2.7)$$

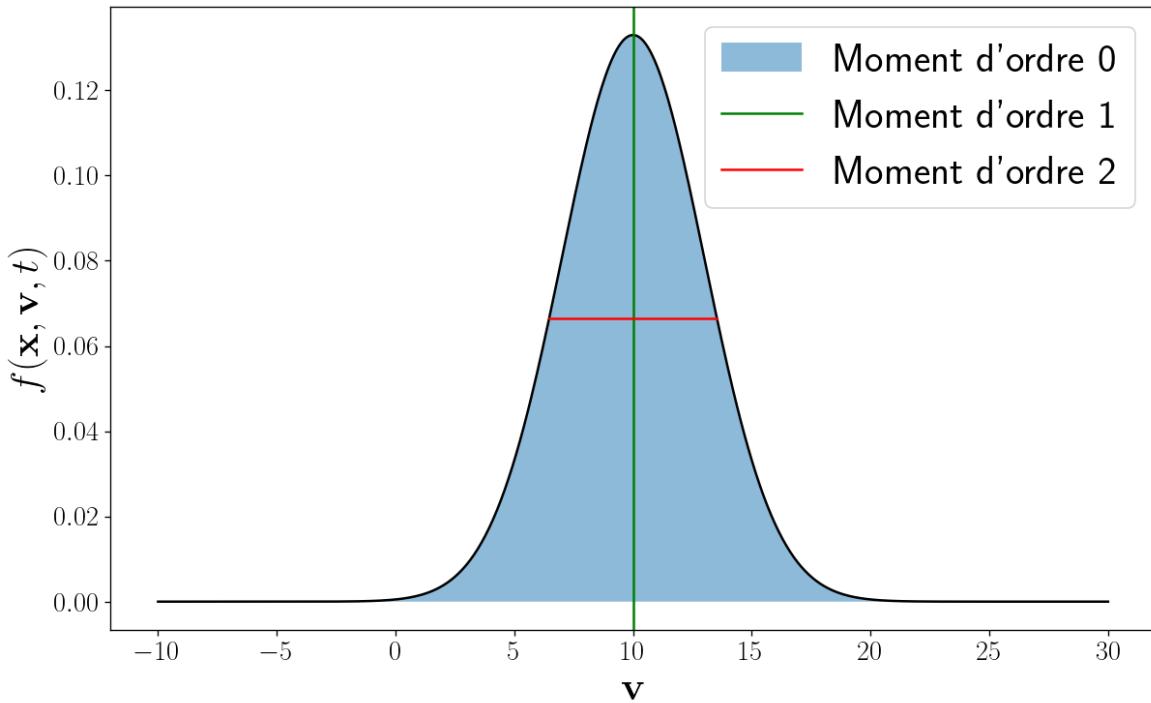


FIGURE 2.4 – Représentation graphique des moments d’ordre 0 (aire sous la courbe colorée en bleu), 1 (valeur moyenne de  $\mathbf{v}$  indiquée par la verticale verte) et 2 (largeur indiquée par l’horizontale rouge) de la fonction de distribution en vitesse  $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$  ici gaussienne.

— L’équation sur la quantité de mouvement :

$$\partial_t (\rho_\alpha \mathbf{v}_\alpha) + \nabla \cdot (\rho_\alpha \mathbf{v}_\alpha \mathbf{v}_\alpha + \overline{\mathbf{P}_\alpha}) - Q_\alpha \mathbf{E} - \mathbf{j}_\alpha \times \mathbf{B} = 0. \quad (2.8)$$

— L’équation d’évolution du tenseur de pression :

$$\partial_t \overline{\mathbf{P}_\alpha} + \nabla \cdot (\mathbf{v}_\alpha \overline{\mathbf{P}_\alpha} + \overline{\mathbf{q}_\alpha}) + (\overline{\mathbf{P}_\alpha} \cdot \nabla \mathbf{v}_\alpha)^S + \frac{Q_\alpha}{\rho_\alpha} (\mathbf{B} \times \overline{\mathbf{P}_\alpha})^S = 0, \quad (2.9)$$

avec  $(\cdot)^S = (\cdot) + (\cdot)^T$  avec  $(\cdot)^T$  la transposée de  $(\cdot)$ . Ces équations sont associées respectivement aux moments d’ordre 0, 1 et 2. On remarque que l’équation du moment d’ordre  $n$  dépend d’un moment d’ordre  $n+1$ . Afin de fermer le système d’équations, des équations dite «de fermeture», devront être prises en compte.

Dans les plasmas que l’on considère, on a deux populations ( $\alpha = i, e$ ) : les ions/protons ( $m_i, e$ ) et les électrons ( $m_e, -e$ ) avec les masses  $m_i \gg m_e$  et  $e$  la charge élémentaire. Le système d’équation multi-fluide sera donc appelé «bi-fluide». On l’abordera dans le Chapitre 9.

Les quantités totales (notées sans indices :  $n, \rho, \mathbf{v}, \mathbf{j}$ , etc.) sont ensuite obtenues en sommant sur toutes les espèces,  $n_\alpha, \rho_\alpha, Q_\alpha, \rho_\alpha \mathbf{v}_\alpha, \mathbf{j}_\alpha, \overline{\mathbf{P}_\alpha} + \rho_\alpha \mathbf{v}_\alpha \mathbf{v}_\alpha$  et  $\rho_\alpha u_\alpha + \frac{1}{2} \rho_\alpha |\mathbf{v}_\alpha|^2$ . En appliquant ces sommes aux équations (2.7), (2.8) et (2.9) et en considérant l’hypothèse de quasi-neutralité ( $Q \simeq 0$ ), on obtient les équations mono-fluides quasi-neutres suivantes :

— L’équation de continuité pour la densité massique :

$$\Rightarrow \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (2.10)$$

— L'équation sur la quantité de mouvement :

$$\Rightarrow \partial_t(\rho\mathbf{v}) + \nabla \cdot (\rho\mathbf{v}\mathbf{v} + \overline{\mathbf{P}}) - \mathbf{j} \times \mathbf{B} = 0. \quad (2.11)$$

— L'équation d'évolution du tenseur de pression, avec  $\overline{\mathbf{P}_E} = \sum_{\alpha} \frac{Q_{\alpha}}{\rho_{\alpha}} \overline{\mathbf{P}_{\alpha}}$  :

$$\Rightarrow \partial_t \overline{\mathbf{P}} + \nabla \cdot (\mathbf{v} \overline{\mathbf{P}} + \overline{\mathbf{q}}) + (\overline{\mathbf{P}} \cdot \nabla \mathbf{v})^S + \frac{Q}{\rho} (\mathbf{B} \times \overline{\mathbf{P}_E})^S = 0. \quad (2.12)$$

L'hypothèse non-relativiste permet d'y remplacer  $\mathbf{j}$  par  $\nabla \times \mathbf{B}$  (Equation de Maxwell (2.5)).

On peut construire, à partir de l'équation (2.8), l'équation d'évolution de la densité de courant totale  $\mathbf{j} = en_i \mathbf{v}_i - en_e \mathbf{v}_e$ , sachant que  $m_i \gg m_e$ , et l'écrire sous la forme de la loi d'Ohm généralisée :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{ind} + \mathbf{E}_{hall} + \mathbf{E}_{therm} + \mathbf{E}_{iner} \quad (2.13)$$

avec :

- $\mathbf{E}_{MHD} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ , le terme d'induction,
- $\mathbf{E}_{hall} = \lambda_i \frac{\mathbf{j}}{\rho} \times \mathbf{B}$ , le terme Hall,
- $\mathbf{E}_{\nabla P_e} = -\frac{\lambda_i}{\rho} \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}_e}$ , le terme dit  $\nabla P_e$ ,
- $\mathbf{E}_{iner} = \frac{\lambda_i \lambda_e}{\rho} \left( \partial_t \mathbf{j} + \nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{j} \mathbf{j}}{n_e e} - \mathbf{v} \mathbf{j} - \mathbf{j} \mathbf{v} \right) \right)$ , et le terme inertiel électronique,

avec  $\lambda_i = \frac{m_i}{e}$  et  $\lambda_e = \frac{m_e}{e}$ . La loi d'Ohm permet d'expliciter  $\mathbf{E}$  dans l'équation (2.4). En ne prenant en compte que le terme d'induction dans la loi d'Ohm, on obtient l'équation :

$$\partial_t \mathbf{B} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (2.14)$$

qui s'écrit en fonction de la vitesse d'Alfvén  $\mathbf{v}_A = \frac{\mathbf{B}}{\sqrt{\mu_0 \rho}}$  avec  $\mu_0$ , la perméabilité du vide, :

$$\partial_t \mathbf{v}_A = \nabla \cdot (\mathbf{v}_A \mathbf{v} - \mathbf{v} \mathbf{v}_A) - \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{v}_A + \frac{\mathbf{v}_A}{2} \nabla \cdot \mathbf{v}. \quad (2.15)$$

Les équations (2.10), (2.11) avec l'hypothèse non-relativiste, (2.12) et (2.14) forment le modèle MHD non fermé, valable pour des échelles temporelles associées à des fréquences plus petites que la fréquence cyclotron ionique  $\omega_{ci} = B_0/\lambda_i$  avec  $B_0 = \langle |\mathbf{B}| \rangle$  et des échelles spatiales, dites MHD, plus grandes que  $d_i$  et  $\rho_{Li}$ . En fonction de l'équation de fermeture choisie, l'équation (2.12) peut être omise. Par exemple dans le cas d'une fermeture isotherme où  $\overline{\mathbf{P}} \propto \rho$ . Usuellement, la pression est supposée isotrope dans le modèle MHD mais dans ce mémoire, on ne fera cette hypothèse que dans la Partie I. Dans la Partie II, on abordera l'extension de la théorie des lois exactes au modèle MHD-Hall pour laquelle l'équation d'induction peut s'écrire :

$$\partial_t \mathbf{v}_A = \nabla \cdot (\mathbf{v}_A \mathbf{v} - \mathbf{v} \mathbf{v}_A) - \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{v}_A + \frac{\mathbf{v}_A}{2} \nabla \cdot \mathbf{v} - \frac{\lambda}{\sqrt{\rho}} \nabla \times \left( \frac{1}{\sqrt{\rho}} \mathbf{j} \times \mathbf{v}_A \right). \quad (2.16)$$

Ce modèle est souvent normalisé par la vitesse d'Alfvén moyenne  $v_{A0}$ . Dans l'équation (2.16),  $\lambda_i$  est alors remplacée par la longueur inertuelle des ions  $d_i = v_{A0} \omega_{ci}$ . Ce modèle sera donc valable aux échelles MHD et aux échelles dites Hall, proches de  $d_i$ . Certaines simulations que l'on analysera dans la Partie III, prennent aussi en compte le terme  $\nabla P_e$ , nous proposerons donc une extension au modèle MHD-Hall- $\nabla P_e$ . Ce terme permet de prendre

en compte la contribution thermique au champ électromagnétique. Le terme inertiel électronique, dépendant de  $\lambda_e$ , permet quant à lui d'accéder aux échelles électroniques proches de  $d_e$  ou  $\rho_{Le}$ .

## 2.4 Synthèse : problématique et modèles utilisés

**Problématique générale :** Quel est l'impact des fermetures dépendant de la pression sur la cascade turbulente ?

**Plan :**

- Partie I : Impact d'une pression isotrope sur la cascade turbulente compressible
- Partie II : Description d'un écoulement turbulent dépendant d'une pression anisotrope
- Partie III : Effet de l'anisotropie de pression sur la cascade turbulente

**Modèles utilisés**

$$\Rightarrow \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (2.17)$$

$$\Rightarrow \partial_t (\rho \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v} + \bar{\mathbf{P}}) - \mathbf{j} \times \mathbf{B} = 0 \quad (2.18)$$

$$\Rightarrow \partial_t \bar{\mathbf{P}} + \nabla \cdot (\mathbf{v} \bar{\mathbf{P}} + \bar{\mathbf{q}}) + (\bar{\mathbf{P}} \cdot \nabla \mathbf{v})^S + (\mathbf{B} \times \bar{\mathbf{P}}_E)^S = 0 \quad (2.19)$$

- MHD (Parties I et II) :

$$\partial_t \mathbf{B} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (2.20)$$

- MHD-Hall (Parties II et III) :

$$\partial_t \mathbf{B} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \lambda \nabla \times \left( \frac{\mathbf{j}}{\rho} \times \mathbf{B} \right) \quad (2.21)$$

- MHD-Hall- $\nabla P_e$  (Parties II et III) :

$$\partial_t \mathbf{B} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \lambda \nabla \times \left( \frac{\mathbf{j}}{\rho} \times \mathbf{B} \right) + \lambda \nabla \times \left( \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \bar{\mathbf{P}}_e \right) \quad (2.22)$$

- Autre : Bi-fluide (Parties II)



# INTRODUCTION : CHAPITRE 3

## L ETUDE DE LA CASCADE TURBULENTE DANS UN PLASMA INCOMPRESSIBLE

### Sommaire

---

3.1	Le modèle et l'énergie totale . . . . .	23
3.2	Le cas linéaire et les ondes d'Alfvén . . . . .	24
3.3	Décrire la cascade turbulente incompressible avec une loi exacte . . . . .	26
3.4	Synthèse sur l'étude de la cascade dans le cadre IMHD . . . . .	29

---

Ce n'est que 57 ans après l'apport de Kolmogorov à la compréhension de la turbulence que l'idée de chercher des lois exactes dans un fluide magnétisé, ou plasma, a émergé. Ainsi, [POLITANO et POUQUET 1998a ; POLITANO et POUQUET 1998b] a étendu la théorie hydrodynamique à la MHD en restant dans le cadre incompressible. Cette avancée historique a apporté un cadre à l'étude de la turbulence dans les plasmas spatiaux. Dans le laboratoire qu'est le vent solaire, elle a permis de trouver des éléments de réponse à des problèmes tels que ceux du chauffage ou de l'accélération du vent par exemple [SMITH *et al.* 2006 ; SORRISO-VALVO *et al.* 2007 ; STAWARZ *et al.* 2009 ; OSMAN *et al.* 2013 ; BRUNO et CARBONE 2013 ; ALEXANDROVA *et al.* 2013 ; SAHRAOUI *et al.* 2020 ; MARINO et SORRISO-VALVO 2023].

Le modèle incompressible magnétohydrodynamique idéal avec pression isotrope (IMHD) est la description fluide d'un plasma la plus simple abordée dans ce mémoire. Dans ce chapitre, nous reprendrons les résultats analytiques incompressibles principaux afin d'introduire les outils fondamentaux de l'étude de la turbulence dans un plasma.

### 3.1 Le modèle et l'énergie totale

Contrairement au modèle hydrodynamique incompressible abordé dans le chapitre 1, dans le cas d'un plasma, il est nécessaire de prendre en compte le couplage entre le fluide et le champ magnétique et d'ajouter l'équation d'induction (2.20) comme on a pu le mettre en pratique dans le chapitre 2. L'incompressibilité s'exprime, quant à elle, à travers une densité de masse constante,  $\rho_0$  qui se traduit via l'équation de continuité (2.17), par la contrainte  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ . Le modèle magnétohydrodynamique incompressible (IMHD) est alors :

$$\partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} - \mathbf{v}_A \cdot \nabla \mathbf{v}_A + \frac{1}{\rho_0} \nabla p_* = 0, \quad (3.1)$$

$$\partial_t \mathbf{v}_A + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}_A - \mathbf{v}_A \cdot \nabla \mathbf{v} = 0, \quad (3.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (3.3)$$

Le champ magnétique apparaît dans ces équations à travers la vitesse d'Alfvén  $\mathbf{v}_A = \mathbf{B}/\sqrt{\mu_0\rho_0}$  et la pression magnétique  $p_m = \rho_0\mathbf{v}_A^2/2$  contenue dans la pression totale  $p_* = p + p_m$ . On remarque qu'il y a 3 équations (7 en termes de composantes) et 3 inconnues (2 vectorielles,  $\mathbf{v}$  et  $\mathbf{v}_A$  et une scalaire,  $p$ ). Le système se retrouve donc fermé grâce à la contrainte incompressible. On peut rappeler aussi que le champ magnétique est aussi contraint tel que  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ , ce qui implique dans le cas incompressible :  $\nabla \cdot \mathbf{v}_A = 0$  (contrainte implicitement prise en compte dans l'équation d'induction (3.2)). En appliquant la divergence sur l'équation (3.1), on obtient l'équilibre de pression,  $-\frac{1}{\rho_0}\nabla^2 p_* = \nabla \mathbf{v} : \nabla \mathbf{v}_A - \nabla \mathbf{v}_A : \nabla \mathbf{v}_A$ , qui indique que la pression totale est directement reliée aux non-linéarités du système.<sup>1</sup>

Dans ce système apparaissent deux canaux énergétiques, cinétique de densité  $E_c = \frac{1}{2}\rho_0\mathbf{v}^2$  et magnétique,  $E_m = \frac{1}{2}\rho_0\mathbf{v}_A^2$ . On définit aussi la densité d'hélicité croisée couplant les deux champs :  $H_c = \rho_0\mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}$ . Les équations de densité d'énergie cinétique et magnétique, obtenue respectivement à partir de (3.1) et (3.2), et celle de densité d'énergie totale  $E_{tot} = E_c + E_m$  sont alors :

$$\partial_t E_c + \nabla \cdot (E_c \mathbf{v} + H_c \mathbf{v}_A + p_* \mathbf{v}) = -\rho_0 \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A : \nabla \mathbf{v}, \quad (3.5)$$

$$\partial_t E_m + \nabla \cdot (E_m \mathbf{v}) = \rho_0 \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A : \nabla \mathbf{v}, \quad (3.6)$$

$$\partial_t E_{tot} + \nabla \cdot (E_{tot} \mathbf{v} + H_c \mathbf{v}_A + p_* \mathbf{v}) = 0. \quad (3.7)$$

L'équation (3.7) indique que l'énergie totale moyenne  $\langle E_{tot} \rangle$  est conservée puisque pour toute quantité  $\mathbf{X}$ , la moyenne, ici spatiale,  $\langle \rangle$ , implique<sup>2</sup>  $\langle \nabla \cdot \mathbf{X} \rangle = 0$ . Les équations (3.5) et (3.6) nous indiquent un échange entre les canaux énergétiques se faisant à travers le terme de droite.

## 3.2 Le cas linéaire et les ondes d'Alfvén

La théorie linéaire est la principale voie nous donnant des informations ondulatoires sur un modèle. Ainsi, dans le modèle IMHD, elle vient révéler l'existence des ondes dites d'Alfvén.

Pour cela, on doit linéariser le système, c'est-à-dire négliger tout terme non-linéaire (d'ordre supérieur à 1). Les moyennes des quantités impliquées seront indiquées par un 0 (ordre 0) et les fluctuations d'ordre 1 seront indiquées par un 1. Ainsi, par exemple,  $\mathbf{v} \simeq \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1$ . On considérera aussi que  $\mathbf{v}_0 = 0$  et on notera la direction du champ magnétique moyen  $\mathbf{b}_0$ .

---

1. Ce système peut aussi être symétrisé grâce aux variables d'Elsässer,  $\mathbf{z}^\pm = \mathbf{v} \pm \mathbf{v}_A$  :

$$\partial_t \mathbf{z}^\pm + \mathbf{z}^\mp \cdot \nabla \mathbf{z}^\pm = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p_*, \quad \nabla \cdot \mathbf{z}^\pm = 0. \quad (3.4)$$

Leur somme  $\frac{1}{4}\rho_0(\mathbf{z}^{+2} + \mathbf{z}^{-2})$  donne l'énergie totale  $E_{tot}$  et leur différence, l'hélicité croisée  $H_c$ . La dynamique non-linéaire est alors contenue dans le terme  $\mathbf{z}^\mp \cdot \nabla \mathbf{z}^\pm$ . De telles variables sont adaptées à l'étude de ce système incompressible et sont largement utilisées pour simplifier les calculs. Il est nécessaire de garder en tête qu'en termes de mathématique fondamentale, elles ne peuvent exister, car elles sont la somme d'un champ vectoriel (vitesse) et d'un champ pseudo-vectoriel (champ magnétique). Dans un effort de cohérence avec le cadre compressible dans lequel elles sont mal définies [MAGYAR 2019], elles ne seront pas utilisées ici.

2. En supposant la périodicité de  $\mathbf{X}$ , son annulation à l'infinie ou l'homogénéité statistique du système.

La deuxième étape consiste à passer dans l'espace de Fourier, c'est-à-dire remplacer  $\partial_t$  par la pulsation  $-i\omega$  et  $\nabla$  par le vecteur d'onde  $i\mathbf{k}$ . On supposera sans perte de généralité, le système de coordonnées cartésiennes orienté tel que  $\mathbf{e}_z = \mathbf{b}_0$  et la composante suivant  $\mathbf{e}_y$  du vecteur d'onde,  $k_y = 0$ . On notera  $k$  la norme du vecteur d'onde,  $k_{\parallel}$  sa composante le long de  $\mathbf{e}_z$ , parallèle au champ magnétique moyen,  $k_{\perp}$  sa composante le long de  $\mathbf{e}_x$  et  $\theta$  l'angle formé avec  $\mathbf{e}_z$  (voir FIGURE 3.1). Le système IMHD devient alors :

$$\omega \mathbf{v}_1 + v_{A0} k_{\parallel} \mathbf{v}_{A1} - \frac{1}{\rho_0} p_{*1} \mathbf{k} = 0, \quad (3.8)$$

$$\omega \mathbf{v}_{A1} + v_{A0} k_{\parallel} \mathbf{v}_1 = 0, \quad (3.9)$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_1 = 0 \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_{A1} = 0. \quad (3.10)$$

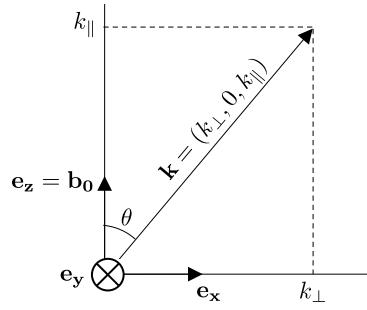


FIGURE 3.1 – Système de coordonnées et vecteur d'onde dans le cadre linéaire.

Ensuite, on injecte les équations (3.9) et (3.10) dans l'équation (3.8) :

- $\mathbf{k} \cdot (3.8) \Rightarrow p_{*1} = 0$ , en excluant le cas trivial où  $\mathbf{k} = 0$ . La pression totale n'est donc bien reliée qu'aux non-linéarités du système.
- $\omega \cdot (3.8) \Rightarrow (\omega^2 - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_{A0})^2) \mathbf{v}_1 = 0$  (dite équation de dispersion), d'où la relation de dispersion :

$$\omega = \pm \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_{A0} = \pm v_{A0} k_{\parallel} = \pm v_{A0} k \cos \theta. \quad (3.11)$$

— (3.9) et (3.11)  $\Rightarrow \mathbf{v}_1 = \pm \mathbf{v}_{A1}$ .

—  $p_{*1} = 0 \Rightarrow p_1 = -v_{A0} v_{A1z}$ .

La relation de dispersion (3.11) nous indique qu'il peut y avoir dans le système IMHD, des ondes dites d'Alfvén, couplant champ magnétique et champ de vitesse. Généralement, pour obtenir la polarisation d'une onde, on injecte sa relation de dispersion dans le système. Dans le cas du système IMHD, le système s'annule alors complètement. La polarisation de l'onde d'Alfvén dans le cas IMHD, est définie par  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_{A1} = 0$  qui indique que  $\mathbf{v}_{A1}$  doit être perpendiculaire à  $\mathbf{k}$ . Or  $\mathbf{k}$  est dans le plan  $\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_z$ . Donc  $\mathbf{v}_{A1}$  est polarisé suivant une combinaison linéaire des vecteurs  $\mathbf{e}_y$  et  $(-\cos \theta, 0, \sin \theta)$ . Le mode d'Alfvén est donc dégénéré, il est formé d'un mode qui sera par la suite, nommé incompressible polarisé suivant  $\mathbf{e}_y$  et d'un mode dit pseudo-alfvénique polarisé suivant  $(-\cos \theta, 0, \sin \theta)$ .

L'onde d'Alfvén est très importante en physique des plasmas, elle est en effet, solution exacte du système IMHD linéaire et non linéaire. En turbulence, elle peut donc alimenter la cascade. Lorsque la cascade est développée par des ondes, on parlera de turbulence d'onde. De plus, deux régimes existent : la turbulence faible où la cascade d'énergie est supposément développée par des interactions faiblement non-linéaires entre paquets d'ondes et, la turbulence forte où ondes et structures cohérentes (de type vortex par exemple) coexistent et entretiennent la cascade.

### 3.3 Décrire la cascade turbulente incompressible avec une loi exacte

La théorie des lois exactes, nommée ainsi car aucune approximation de type linéaire ou perturbative n'est supposée pour les obtenir, s'appuie sur les hypothèses de Kolmogorov exposées et illustrées dans le chapitre 1 (voir synthèse 1.4) et rappelées ci-après. On se référera au chapitre 1 à propos des notations. Historiquement, de multiples versions de la loi exacte décrivant la cascade IMHD et de la méthode pour l'obtenir existent [POLITANO et POUQUET 1998a ; GALTIER 2018 ; MACBRIDE *et al.* 2008]. On la nommera dans la suite PP98 du nom des deux chercheuses ayant dérivé la première version en 1998.

D'après les hypothèses de Kolmogorov, la zone inertie est définie comme l'ensemble des échelles où le transfert s'effectue conservativement. L'énergie totale (cinétique + magnétique) étant un invariant du système IMHD, il peut a priori cascader de manière conservative. Une cascade d'énergie implique une source d'injection et un canal de dissipation, respectivement à grandes et petites échelles. Le canal de dissipation transfert l'énergie des champs électromagnétiques vers les particules du plasma. Cette énergie sera visible dans la fonction de distribution des particules à travers une augmentation de sa largeur (chauffage) ou un décalage de la moyenne (accélération). Dans le cadre IMHD, les dissipations généralement admises sont des dissipations visqueuses ou résistives qui s'accompagnent d'une variation d'entropie. Le canal d'injection est nécessaire pour entretenir la cascade et compenser la dissipation dans le bilan énergétique (dans le cas incompressible) [GALTIER 2021]. Pour refléter cela dans les équations, on va ajouter une force  $\mathbf{f}_c$  d'injection agissant à grande échelle et un terme dissipatif (visqueux),  $\mathbf{d}_c$ , agissant à petite échelle, dans l'équation (3.1) et, pour permettre la visualisation de ce que deviennent ces sources si elles sont définies magnétiquement, on va ajouter  $\mathbf{f}_m$  et  $\mathbf{d}_m$  (résistif) dans l'équation d'induction (3.2). On restera dans un cadre général en ne détaillant pas leur contenu. Ainsi :

$$\partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} - \mathbf{v}_A \cdot \nabla \mathbf{v}_A + \frac{1}{\rho_0} \nabla p_* = \mathbf{f}_c + \mathbf{d}_c, \quad (3.12)$$

$$\partial_t \mathbf{v}_A + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}_A - \mathbf{v}_A \cdot \nabla \mathbf{v} = \mathbf{f}_m + \mathbf{d}_m, \quad (3.13)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \nabla \cdot \mathbf{v}_A = 0. \quad (3.14)$$

Maintenant, si l'on veut une loi exacte sur l'énergie totale, on doit choisir une fonction de corrélation qui, lorsque  $\mathbf{x}' = \mathbf{x}$ , est égale à l'énergie totale moyenne, ici  $\langle E_{tot} \rangle = \langle E_c + E_m \rangle = \langle \frac{1}{2} \rho_0 \mathbf{v}^2 + \frac{1}{2} \rho_0 \mathbf{v}_A^2 \rangle$ . Cela nous donne bien des choix de formulation :

$$\left\langle \sqrt{E_{tot}} \cdot \sqrt{E'_{tot}} \right\rangle, \quad \left\langle \sqrt{E_c} \cdot \sqrt{E'_c} + \sqrt{E_m} \cdot \sqrt{E'_m} \right\rangle,$$

et pourquoi pas d'autres puissances ? Ici, c'est la même quantité à une constante près, mais on pourrait avoir à choisir en  $\mathbf{B}$  ou  $\mathbf{v}_A$ , ou encore utiliser les variables d'Elsässer. Une autre possibilité est de définir cette fonction à l'aide des incrément de quantités (voir par exemple [ANTONIA *et al.* 1997]). Avec une telle fonction, on obtient naturellement son annulation lorsque  $\mathbf{x}' = \mathbf{x}$ . Du choix de la fonction de corrélation va dépendre la difficulté du calcul, la sauvegarde du sens physique (que voudrait dire  $\mathbf{v}^{1/5}$  ?) et potentiellement l'élégance et la compacité du résultat. Une question fondamentale subsiste et ne sera qu'en partie traitée dans cette thèse : regarde-t-on la même chose quel que soit le choix

de fonction de corrélation ?<sup>3</sup> On prendra comme exemple la fonction d'auto-corrélation pour chaque canal d'énergie :  $\mathcal{R} = \frac{1}{2}\rho_0 \langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}' + \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}'_A \rangle$ ,  $\rho_0/2$  étant une constante dans ce cadre incompressible.

Ensuite, on doit dériver une équation pour cette fonction de corrélation, elle s'obtient en notant que  $\partial_t \mathcal{R} = \frac{1}{2}\rho_0(\langle \partial_t(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}' + \mathbf{v} \cdot \partial_t(\mathbf{v}') \rangle + \langle \partial_t(\mathbf{v}_A) \cdot \mathbf{v}'_A + \mathbf{v}_A \cdot \partial_t(\mathbf{v}'_A) \rangle)$  et en remplaçant les dérivées temporelles grâce aux équations (3.12) et (3.13). Pour alléger la démonstration, on peut noter que  $\langle \partial_t(\mathbf{v}') \cdot \mathbf{v} \rangle$  est le conjugué de  $\langle \partial_t(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}' \rangle$ , c'est-à-dire en échangeant les rôles (prime ou pas) de chacun des points. Ainsi, on obtient en jouant un peu avec l'hypothèse d'homogénéité statistique et les contraintes (3.14) :

$$\langle \mathbf{v}' \cdot \partial_t \mathbf{v} \rangle = \nabla_\ell \cdot \langle \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v} \mathbf{v} - \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A \rangle + \langle \mathbf{v}' \cdot \mathbf{f}_c + \mathbf{v}' \cdot \mathbf{d}_c \rangle, \quad (3.15)$$

$$\langle \mathbf{v}'_A \cdot \partial_t \mathbf{v}_A \rangle = \nabla_\ell \cdot \langle \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A \mathbf{v} - \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v} \mathbf{v}_A \rangle + \langle \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{f}_m + \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{d}_m \rangle, \quad (3.16)$$

puisque  $-\langle \mathbf{v}' \cdot \nabla p_* \rangle = \nabla_\ell \cdot \langle p_* \mathbf{v}' \rangle = \langle p_* \nabla' \cdot \mathbf{v}' \rangle = 0$ .

On peut chercher à faire apparaître par factorisation dans les termes dit «de flux» (sous l'opérateur  $\nabla_\ell$ ) des équations (3.15) et (3.16), des fonctions de structure, c'est-à-dire des multiplications d'incrément tel que  $\langle \delta \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v} \delta \mathbf{v} \rangle$ . Via les hypothèses d'homogénéité et les contraintes (3.14), on peut faire ainsi ressortir :

$$\begin{aligned} \nabla_\ell \cdot & \langle \delta \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v} \delta \mathbf{v} \rangle \\ &= \nabla_\ell \cdot \langle \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}' \mathbf{v}' - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \mathbf{v} - \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}' \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \mathbf{v}' + 2\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}' \mathbf{v} - 2\mathbf{v}' \cdot \mathbf{v} \mathbf{v}' \rangle \\ &= 2\nabla_\ell \cdot \langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}' \mathbf{v} - \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v} \mathbf{v}' \rangle. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Et de même :

$$\nabla_\ell \cdot \langle \delta \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{v}_A \delta \mathbf{v} \rangle = 2\nabla_\ell \cdot \langle \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}'_A \mathbf{v} - \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A \mathbf{v}' \rangle, \quad (3.18)$$

$$\nabla_\ell \cdot \langle \delta \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v}_A \delta \mathbf{v}_A \rangle = \nabla_\ell \cdot \langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'_A \mathbf{v}_A - \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}_A \mathbf{v}'_A + \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'_A \mathbf{v}'_A \rangle. \quad (3.19)$$

Les fonctions de structure d'ordre 3,  $\langle \delta \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v} \delta \mathbf{v} \rangle$  et  $\langle \delta \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{v}_A \delta \mathbf{v} \rangle$ , rappellent la convection de l'énergie, respectivement cinétique et magnétique, par le champ de vitesse présente dans l'équation d'énergie totale (3.7), et  $\langle \delta \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v}_A \delta \mathbf{v}_A \rangle$  rappelle la convection de l'hélicité croisée par le champ magnétique.

Ainsi, l'équation de la fonction de corrélation de l'énergie totale obtenue avec  $\mathcal{R} = \langle \frac{1}{2}\rho_0 \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}' + \frac{1}{2}\rho_0 \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}'_A \rangle$  peut s'écrire :

$$\partial_t \mathcal{R} = \frac{1}{4}\rho_0 \nabla_\ell \cdot \langle \delta \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v} \delta \mathbf{v} + \delta \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{v}_A \delta \mathbf{v} + 2\delta \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v}_A \delta \mathbf{v}_A \rangle \quad (3.20)$$

$$+ \frac{1}{2}\rho_0 \langle \mathbf{v}' \cdot \mathbf{f}_c + \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}'_c + \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{f}_m + \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{f}'_m \rangle \quad (3.21)$$

$$+ \frac{1}{2}\rho_0 \langle \mathbf{v}' \cdot \mathbf{d}_c + \mathbf{v} \cdot \mathbf{d}'_c + \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{d}_m + \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{d}'_m \rangle. \quad (3.22)$$

Dans le terme de droite, la première ligne décrit la cascade non-linéaire ( $\varepsilon_{NL} = (3.20)$ ), la deuxième, l'injection au taux  $\varepsilon_F (= (3.21))$ , et la troisième, la dissipation ( $\varepsilon_D = (3.22)$ ).

3. On regardera la différence analytique entre les fonctions de type incrémentale ou non (traitée numériquement dans les cadres MHD-Hall incompressible et compressible par [FERRAND, GALTIER, SAHRAOUI, MEYRAND *et al.* 2019 ; FERRAND, SAHRAOUI, GALTIER *et al.* 2022]). La question de la convergence des taux de cascade obtenus avec des lois du même type (incrémental ou non) mais différentes formulations (exemple des différentes puissances) reste un problème ouvert qui n'a, à notre connaissance, pas été traité rigoureusement.

Les contributions magnétiques viennent se mêler aux contributions cinétiques présentes dans chaque taux et vues dans le cadre HD (voir chapitre 1). Cette équation du type KHM est valable dans et en dehors de la zone inertielle.

En  $\ell = 0$ , on retrouve l'équation de densité d'énergie totale moyenne du système :  $\partial_t \langle E_{tot} \rangle = \langle E_F \rangle + \langle E_D \rangle$  avec  $\langle E_F \rangle = \rho_0 \langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}_c + \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{f}_m \rangle$ , la densité d'énergie moyenne injectée et  $\langle E_D \rangle = \rho_0 \langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{d}_c + \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{d}_m \rangle$ , la densité d'énergie moyenne dissipée. Si le système est conservatif,  $\langle E_F \rangle = -\langle E_D \rangle$ . Afin que  $\langle E_F \rangle = -\langle E_D \rangle$  soit respecté  $\varepsilon_F$  ne doit pas s'annuler aux échelles où le forçage n'a pas d'influence mais plutôt être égal à  $\langle E_F \rangle$ .  $\varepsilon_F(\ell)$  ne représente donc pas l'énergie qui est injectée à l'échelle  $\ell$  mais plutôt l'énergie qui a été injecté dans la cascade aux échelles  $> \ell$ , où le forçage est actif.

En appliquant l'hypothèse de séparation d'échelle, on obtient la loi de type K41 donnée par  $\varepsilon = -\varepsilon_{NL}$  :

$$\varepsilon = -\frac{1}{4} \rho_0 \nabla_\ell \cdot \langle \delta \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v} \delta \mathbf{v} + \delta \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{v}_A \delta \mathbf{v} + 2 \delta \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v}_A \delta \mathbf{v}_A \rangle. \quad (3.23)$$

Cette équation est la loi exacte PP98 pour l'énergie totale du modèle IMHD, obtenue à partir de la théorie de Kolmogorov. Ce lien entre le taux de cascade et l'anomalie dissipative  $\varepsilon$  (voir synthèse 1.4) nous permet, dans le vent solaire par exemple, d'estimer le taux de dissipation permise par la turbulence pour répondre par exemple au problème du chauffage (décrit dans le chapitre 2, voir aussi [SMITH *et al.* 2006 ; SORRISO-VALVO *et al.* 2007 ; STAWARZ *et al.* 2009 ; OSMAN *et al.* 2013]).

Phénoménologiquement,  $\varepsilon$  étant supposé constant et avec l'hypothèse d'isotropie, on remarque que :  $(\delta \mathbf{v})^3 \sim (\delta \mathbf{v}_A)^3 \sim \varepsilon \ell \Rightarrow (\delta \mathbf{v})^2 \sim (\delta \mathbf{v}_A)^2 \sim \ell^{2/3}$ , ce qui donne les spectres 1D d'énergie cinétique et magnétique en  $E(k) \sim k(\delta \mathbf{v}(k))^2 \sim k(\delta \mathbf{v}_A(k))^2 \sim k^{-5/3}$ . On retrouve ainsi la loi phénoménologique des spectres en  $-5/3$  de Kolmogorov étendue aux fluides magnétisés.<sup>4</sup>

Pour en revenir à la différence entre les fonctions de corrélation, regardons ce qu'il se passe si l'on considère une fonction incrémentale, par exemple  $\mathcal{S} = \langle \frac{1}{2} \rho_0 \delta \mathbf{v}^2 + \frac{1}{2} \rho_0 \delta \mathbf{v}_A^2 \rangle$  formée de fonctions de structure d'ordre 2 qui rappelle celles d'ordre 3 impliquées dans le taux de cascade. On remarque que  $\mathcal{S} = 2 \langle E_{tot} \rangle - 2\mathcal{R}$ . Ainsi la loi exacte KHM (3.20) devient :

$$\partial_t \mathcal{S} = -\frac{1}{2} \rho_0 \nabla_\ell \cdot \langle \delta \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v} \delta \mathbf{v} + \delta \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{v}_A \delta \mathbf{v} + 2 \delta \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v}_A \delta \mathbf{v}_A \rangle \quad (3.24)$$

$$+ \rho_0 \langle \delta \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{f}_c + \delta \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{f}_m \rangle \quad (3.25)$$

$$+ \rho_0 \langle \delta \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{d}_c + \delta \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{d}_m \rangle. \quad (3.26)$$

La partie non-linéaire, le taux de cascade, n'est pas impactée. Mais une question émerge : les définitions des taux de forçage et de dissipations dépendants de  $\mathbf{f}_c$ ,  $\mathbf{f}_m$  et  $\mathbf{d}_c$ ,  $\mathbf{d}_m$  extraites de (3.20) et celles extraites de (3.24) sont-elles équivalentes ? Regarder  $\mathcal{S}$  ou  $\mathcal{R}$  revient à regarder ou une quantité énergétique incrémentale ou celle restant dans le bilan énergétique total moyen  $\langle E_{tot} \rangle = \mathcal{S}/2 + \mathcal{R}$ . C'est la même chose pour les définitions des taux d'injection et de dissipation. Le choix de la définition, incrémentale ou non, des taux, dépend donc du problème que l'on veut étudier et comme on vient de le voir, il est très facile de passer, analytiquement, d'une définition à une autre.

4. Lorsque le champ magnétique est important, de l'anisotropie apparaît dans l'espace de Fourier entre la direction parallèle au champ magnétique et le plan perpendiculaire. La description phénoménologique doit donc être complétée par exemple par la condition dite de "critical balance" [GOLDREICH et SRIDHAR 1995 ; HORBURY *et al.* 2008].

### 3.4 Synthèse sur l'étude de la cascade dans le cadre IMHD

Modèle constraint tel que  $\rho = \rho_0 \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$  :

$$\partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} - \mathbf{v}_A \cdot \nabla \mathbf{v}_A + \frac{1}{\rho_0} \nabla p_* = \mathbf{f}_c + \mathbf{d}_c \quad (3.27)$$

$$\partial_t \mathbf{v}_A + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}_A - \mathbf{v}_A \cdot \nabla \mathbf{v} = \mathbf{f}_m + \mathbf{d}_m \quad (3.28)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \nabla \cdot \mathbf{v}_A = 0 \quad (3.29)$$

Points méthodologiques de linéarisation (voir FIGURE 3.1) :

- Négliger toutes quantités ou termes n'étant pas d'ordre 0 ou 1
- $\mathbf{v} \simeq \mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{v}_A \simeq \mathbf{v}_{A0} + \mathbf{v}_{A1}$  avec  $\mathbf{v}_{A0} = v_{A0} \mathbf{e}_z$
- Passage dans l'espace de Fourier :  $\partial_t \rightarrow -i\omega$  et  $\nabla \rightarrow i\mathbf{k}$  avec

$$\mathbf{k} = k_\perp \mathbf{e}_x + k_\parallel \mathbf{e}_z = k(\sin \theta \mathbf{e}_x + \cos \theta \mathbf{e}_z)$$

**Relation de dispersion linéaire :** Existence de modes d'Alfvén pouvant participer à la cascade turbulente

$$\omega = \pm k_\parallel v_{A0} = \pm v_{A0} k \cos \theta \quad (3.30)$$

**Fonctions de corrélation d'énergie totale et moyennes statistiques :**

- $\mathcal{R} = \frac{1}{2} \rho_0 \langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}' + \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}'_A \rangle$
- $\mathcal{S} = \frac{1}{2} \rho_0 \langle (\delta \mathbf{v})^2 + (\delta \mathbf{v}_A)^2 \rangle = 2 \langle E_{tot} \rangle - 2\mathcal{R}$
- $\langle E_{tot} \rangle = \mathcal{R}(\ell = 0)$ ,  $\langle E_F \rangle = \varepsilon_F(\ell = 0)$ ,  $\langle E_D \rangle = \varepsilon_D(\ell = 0)$

**Équations statistiques (énergie totale moyenne, lois exactes KHM avec  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{S}$ ) :**

$$\partial_t \langle E_{tot} \rangle = \langle E_F \rangle + \langle E_D \rangle \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned} \partial_t \mathcal{R} = -\varepsilon_{NL} + \varepsilon_F + \varepsilon_D &= \frac{1}{4} \rho_0 \nabla_\ell \cdot \langle \delta \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v} \delta \mathbf{v} + \delta \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{v}_A \delta \mathbf{v} + 2\delta \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v}_A \delta \mathbf{v}_A \rangle \\ &\quad + \frac{1}{2} \rho_0 \langle \mathbf{v}' \cdot \mathbf{f}_c + \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}'_c + \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{f}_m + \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{f}'_m \rangle \\ &\quad + \frac{1}{2} \rho_0 \langle \mathbf{v}' \cdot \mathbf{d}_c + \mathbf{v} \cdot \mathbf{d}'_c + \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{d}_m + \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{d}'_m \rangle \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} \partial_t \mathcal{S} = -\mathcal{E}_{NL} + \mathcal{E}_F + \mathcal{E}_D &= -\frac{1}{2} \rho_0 \nabla_\ell \cdot \langle \delta \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v} \delta \mathbf{v} + \delta \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{v}_A \delta \mathbf{v} + 2\delta \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v}_A \delta \mathbf{v}_A \rangle \\ &\quad + \rho_0 \langle \delta \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{f}_c + \delta \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{f}_m \rangle \\ &\quad + \rho_0 \langle \delta \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{d}_c + \delta \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{d}_m \rangle \end{aligned} \quad (3.33)$$

**Loi exacte PP98 sur les taux d'énergie (type K41) :**

$$\varepsilon = -\frac{1}{4} \rho_0 \nabla_\ell \cdot \langle \delta \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v} \delta \mathbf{v} + \delta \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{v}_A \delta \mathbf{v} + 2\delta \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v}_A \delta \mathbf{v}_A \rangle \quad (3.34)$$



---

# PARTIE I : Le chauffage turbulent dans un plasma compressible avec pression isotrope

---

*There is even a humorous statement about this by a well-known theoretical physicist who compared the theory of turbulence without pressure with a someone who has lost his manhood.<sup>5</sup>*

*Sergey G. CHEFRANOV et Artem S. CHEFRANOV*

---

5. Traduction : Un célèbre physicien théoricien a même fait une déclaration humoristique à ce sujet en comparant la théorie de la turbulence sans pression à un homme qui a perdu sa virilité. Citation extraite de CHEFRANOV et CHEFRANOV 2021.



## INTRODUCTION

Le modèle incompressible est encore très utilisé (MARINO et SORRISO-VALVO 2023) pourtant le caractère compressible des fluctuations et des structures présentes dans le vent solaire est observé et identifié depuis les premières missions spatiales (TU et MARSCH 1995). Les travaux présentés dans cette partie se placent dans la continuité d'un effort d'extension de la théorie de Kolmogorov aux plasmas compressible entrepris depuis GALTIER et BANERJEE 2011.

Dans le chapitre 4, sera présenté le modèle compressible sur lequel seules deux contraintes seront imposées dans cette partie I : une pression de type isotrope et une équation d'induction MHD. Diverses relations thermodynamiques y seront analysées pour fermer ce modèle fluide.

Dans le chapitre 5, sera résumé l'extension analytique compressible avec pression isotrope de la théorie de Kolmogorov à travers les premiers résultats que j'ai obtenus.

Dans le chapitre 6, nous parlerons observation et données in-situ à travers une application de nos premiers résultats analytiques dans les premières données obtenues près du Soleil par Parker Solar Probe (PSP). Cette étude de cas effectuée, j'ai ensuite amorcé une étude statistique dans des données relevées dans la magnétogaine par MMS.



# PARTIE I : CHAPITRE 4

## L QUE SAIT-ON SUR LE MODÈLE COMPRESSIBLE ?

### Sommaire

<b>4.1 Energétique du modèle non fermé . . . . .</b>	<b>35</b>
<b>4.2 Fermetures thermodynamiques . . . . .</b>	<b>36</b>
<b>4.3 Thermodynamique et turbulence . . . . .</b>	<b>39</b>
<b>4.4 Propriétés linéaires . . . . .</b>	<b>41</b>
<b>4.5 Synthèse sur le modèle compressible avec pression isotrope .</b>	<b>42</b>

Lorsque la contrainte d'incompressibilité qui servait de fermeture au système d'équation est relaxée, le modèle n'est plus fermé. Dans ce chapitre, seront définis différents types de fermeture en considérant toujours une pression isotrope. On regardera ce qu'il advient du taux de cascade dans le chapitre suivant.

### 4.1 Energétique du modèle non fermé

Si l'on reprend les équations du modèle MHD dérivées du modèle cinétique (voir synthèse 2.4) et que l'on suppose une pression isotrope, on obtient le système écrit avec la vitesse d'Alfvén,  $\mathbf{v}_A = \frac{\mathbf{B}}{\sqrt{\mu_0 \rho}}$ , :

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (4.1)$$

$$\partial_t (\rho \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v} - \rho \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A) + \nabla p_* = 0, \quad (4.2)$$

$$3\partial_t p + \nabla \cdot (3\rho \mathbf{v} + 2\mathbf{q}) + 2p \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (4.3)$$

$$\partial_t \mathbf{v}_A - \nabla \cdot (\mathbf{v}_A \mathbf{v} - \mathbf{v} \mathbf{v}_A) + \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{v}_A - \frac{\mathbf{v}_A}{2} \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (4.4)$$

La contrainte sur le champ magnétique,  $\nabla \cdot \mathbf{B}$  peut s'écrire :  $\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}_A) = -\rho \nabla \cdot \mathbf{v}_A$ . Ce système n'est pas fermé, mais avant de le fermer, regardons ce qu'il nous indique en termes d'énergétique. L'équation de densité d'énergie cinétique  $E_c = \frac{1}{2}\rho \mathbf{v}^2$  obtenue via (4.1) et (4.2) est :

$$\partial_t E_c + \nabla \cdot (E_c \mathbf{v} + p_* \mathbf{v} - \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A) = -\rho \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A : \nabla \mathbf{v} + p_* \nabla \cdot \mathbf{v}. \quad (4.5)$$

L'équation de densité d'énergie magnétique  $E_m = \frac{1}{2}\rho \mathbf{v}_A^2$  obtenue via (4.1) et (4.4) est :

$$\partial_t E_m + \nabla \cdot (E_m \mathbf{v}) = \rho \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A : \nabla \mathbf{v} - p_m \nabla \cdot \mathbf{v}. \quad (4.6)$$

On remarque que l'échange entre ces deux canaux énergétiques se fait à travers la pression magnétique et un terme croisé (termes de droite de (4.6)) similaire au cas incompressible. La densité d'énergie totale moyenne  $\langle E_{tot} = E_c + E_m + E_u \rangle$  est un invariant de système,

ce qui nous autorise, a priori, à appliquer la méthode résumée dans la section 3.4 de la partie Introduction pour en étudier la cascade. Afin que cette énergie soit conservée, il faut ajouter une équation annulant le terme source dépendant de  $p$  dans l'équation d'énergie cinétique (4.5). Cette équation est l'équation de densité d'énergie interne,  $E_u = \rho u$  avec  $u$  l'énergie interne spécifique, dans laquelle on doit aussi faire figurer un terme de flux de chaleur,  $\nabla \cdot \mathbf{q}$  :

$$\partial_t E_u + \nabla \cdot (E_u \mathbf{v} + \mathbf{q}) = -p \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (4.7)$$

L'équation de densité d'énergie totale,  $E_{tot} = E_c + E_m + E_u$ , est alors :

$$\partial_t E_{tot} + \nabla \cdot (E_{tot} \mathbf{v} + p_* \mathbf{v} - \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A + \mathbf{q}) = 0 \quad (4.8)$$

On peut remarquer que dans le cas incompressible, l'énergie interne (4.7) est découpée de l'énergie cinétique (4.5) et par ce biais de l'énergie magnétique (4.6) puisque  $p \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ . Via cette méthode basée sur un bilan, nous obtenons, indépendamment de la fermeture, une équation d'évolution pour l'énergie interne [ECKART 1940]. L'obtention d'une équation de densité d'énergie totale est donc possible sans expliciter de fermeture qui pourra donc être injectée par la suite. Ces équations ((4.7) et (4.8)) sont générales car elles sont applicables à toutes données, tous modèles respectant le comportement des premiers moments fluides obtenus via l'équation de Vlasov ( $\rho$  (4.1) et  $\mathbf{v}$  (4.2)) et l'équation d'induction (4.4), mais elle n'est pas complète, pas fermée, rien n'y impose le respect de l'équation (4.3) concernant  $p$  qui pourrait être défini autrement et  $\mathbf{q}$  reste indéfini. Cette observation présage la possibilité d'obtenir une loi exacte tout aussi générale sur la cascade de densité d'énergie totale comme on le verra dans le chapitre 5.

## 4.2 Fermetures thermodynamiques

En MHD compressible avec pression isotrope, l'équation de fermeture est souvent une relation entre la pression,  $p$ , et la densité,  $\rho$ , issue de la thermodynamique et venant se substituer à l'équation sur la pression (4.3)<sup>1</sup>. Par la suite, on appellera thermodynamique tout ce qui est relatif à la densité, la pression, l'énergie interne, etc. (grandeur supposément définies et convergentes dans le cadre fluide) et pouvant relever du champ de discipline empirique de la thermodynamique à l'équilibre [BOREL et FAVRAT 2005] possiblement étendu au cadre hors équilibre [LIVADIOTIS et MCCOMAS 2012].

Le premier principe de la thermodynamique peut s'écrire

$$du = \mathring{d}q + \mathring{d}w = Tds + \frac{p}{\rho^2} d\rho, \quad (4.9)$$

avec  $q$  la chaleur et  $w$  le travail de pression,  $\mathring{d}$  correspond à l'élément de calcul différentiel inexact et  $d$  à l'élément exact. L'élément inexact signifie que le résultat d'une intégration sera chemin-dépendant (voir [BOREL et FAVRAT 2005] pour plus d'information). L'élément différentiel exact peut servir à créer une dérivée totale ou partielle. En construisant la dérivée temporelle totale, qui s'écrit en fonction des dérivées partielles  $d_t = \partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla$ , et en injectant l'équation de densité de masse (4.1), on trouve, à partir de (4.9), une équation

1. On pourrait aussi fermer au niveau des moments suivant via une loi de Fourier sur le flux de chaleur,  $\mathbf{q} = -\kappa \nabla T$ , [BELMONT *et al.* 2018] ou la fermeture à l'ordre 4 proposé par CHUST et BELMONT 2006 par exemple. On ne détaillera pas ces possibilités ici mais on notera que le flux de chaleur peut, via  $\kappa$ , la viscosité thermique, n'avoir un impact qu'aux petites échelles, tel que les dissipations visqueuse et résistive [EYINK et DRIVAS 2018].

sur la densité d'énergie interne :

$$d_t(\rho u) = \rho T d_t s - (p + \rho u) \nabla \cdot \mathbf{v}. \quad (4.10)$$

Cette équation est compatible avec l'équation (4.7) si  $\nabla \cdot \mathbf{q} = -\rho T d_t s$ ,  $s$  étant l'entropie spécifique et  $T$  la température. Ces équations sont compatibles avec l'équation de pression (4.3) si l'on impose  $\rho u = \frac{3}{2}p$ . On verra que ce n'est pas forcément le cas avec les fermetures de type thermodynamique.

La définition originale, thermodynamique [BOREL et FAVRAT 2005], des dénominations «polytrope», «isochore», «isobare», «isotherme» ou «isentrope» ne s'applique qu'à des transformations :

- isochore (ou incompressible puisque  $\rho = m/V$ ) signifie à volume  $V$  constant
- isobare signifie à pression  $p$  constante,
- isotherme signifie à température  $T$  constante,
- isentrope signifie à entropie  $s$  constante, elle ne peut être ni créée ni échangée par transfert thermique,
- adiabatique signifie sans transfert thermique  $dq = 0$ , c'est-à-dire sans échange d'entropie,
- polytrope signifie à  $\sigma = \frac{Tds}{Vdp}$ , le facteur polytrope, constant.

La transformation adiabatique est synonyme de l'isentrope si aucune entropie n'est créée (cas réversible). En astrophysique et physique des plasmas, on entend ces termes en tant que caractéristique du système et ils sont utilisés pour qualifier une fermeture. Ici, dans une volonté de clarifier cet usage, on considérera qu'un système décrit idéalement avec l'une de ces caractéristiques est un système dans lequel la quantité caractérisée ne pourra évoluer qu'en suivant le type de transformation associée. En réalité, ces caractéristiques coexistent souvent, l'une pouvant dominer les autres, par exemple dans les plasmas spatiaux [LIVADIOTIS et MCCOMAS 2012]. L'hypothèse polytrope apparaît plus générale dans le sens où, suivant la valeur de  $\sigma$ , on peut se retrouver dans le cadre des hypothèses isochore, isobare, isotherme, adiabatique ou isentrope [BOREL et FAVRAT 2005].

D'après [HOREDT 2004], l'hypothèse polytrope, introduite par [CHANDRASEKHAR 1939] en astrophysique est définie telle que  $pV^\gamma$  constant avec  $\gamma = \frac{c_p - c}{c_v - c}$ , nommé indice spectral ou indice polytropique, avec ici  $c = \frac{dq}{dT}$  la chaleur spécifique,  $c_p$  la chaleur spécifique à pression constante et  $c_v$  celle à volume constant. Cette définition rappelle celle de l'indice adiabatique  $\gamma_a = c_p/c_v$ . On peut d'ailleurs réécrire  $\gamma$  en fonction de  $\gamma_a$  en se plaçant dans le cadre d'un gaz parfait ( $pV \propto T$ ) et en utilisant les relations (1.2.19) à (1.2.24) de [HOREDT 2004]. Ainsi  $\gamma = (\gamma_a - 1)K + \gamma_a$  avec  $K = \frac{dq}{dw} = \frac{Tds}{-pdV}$ . Sachant que  $d(pV^\gamma) = 0$ , le lien entre  $pV^\gamma$  et  $\sigma = \frac{Tds}{Vdp}$  est  $\sigma = K/\gamma = \frac{1-\gamma_a/\gamma}{\gamma_a-1}$ . D'où l'équivalence des définitions<sup>2</sup> via  $\sigma$  et  $\gamma$ .

La FIGURE 4.1 inspirée de [LIVADIOTIS et MCCOMAS 2012], complétée avec les valeurs de  $\sigma$  et quelques exemples de plasmas spatiaux données par [LIVADIOTIS 2018a] résume le lien entre les différentes fermetures et l'hypothèse polytrope. Les plasmas spatiaux pouvant être modélisés comme des gaz parfaits monoatomiques,  $\gamma_a = 5/3$  et dans le cas isochore,  $\sigma = \frac{1}{\gamma_a-1} = 3/2$ .

Dans le premier principe (4.9) et l'équation d'énergie interne (4.10), l'utilisation de  $\sigma$

2. L'intérêt de la définition via  $\sigma$  met en lumière la différence entre les transformations polytropes et adiabatique/isentrope ( $\sigma = 0$  et  $\gamma = \gamma_a$ ) qui semblent souvent confondues en astrophysique [EYINK et DRIVAS 2018], peut-être car le flux de chaleur semble "disparaître" dans l'obtention de la forme explicite de l'énergie interne.

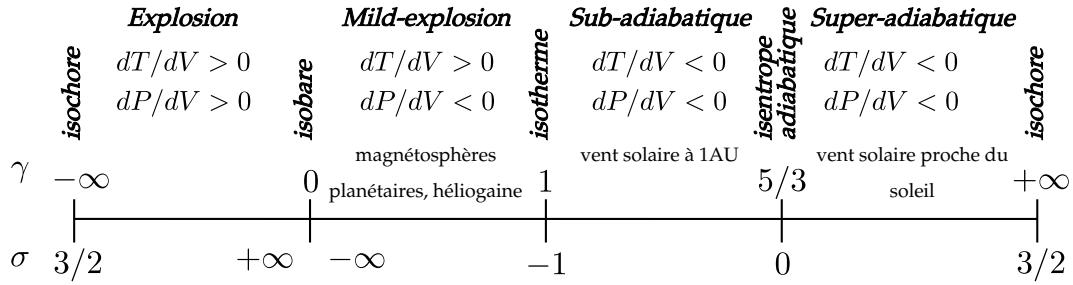


FIGURE 4.1 – Transformations thermodynamiques et intervalles en fonction du  $\gamma$  du milieu [LIVADIOTIS et MCCOMAS 2012] et du  $\sigma$  [BOREL et FAVRAT 2005], exemple de plasmas spatiaux [LIVADIOTIS 2018a]. Adiabatique et isentrope y sont confondus dans le cas réversible.

permet d'écrire :

$$du = \mathrm{d}q + \mathrm{d}w = (K + 1) \mathrm{d}w = (\sigma\gamma + 1) \mathrm{d}w, \quad (4.11)$$

$$d_t(\rho u) = -[(\sigma\gamma + 1)p + \rho u] \nabla \cdot \mathbf{v}, \quad (4.12)$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{q} = -\rho T d_t s = \sigma\gamma p \nabla \cdot \mathbf{v}. \quad (4.13)$$

D'un autre côté, la relation entre  $p$  et  $V$  peut s'écrire  $p \propto \rho^\gamma$ . Cela donne l'équation :

$$d_t p = -\gamma p \nabla \cdot \mathbf{v}. \quad (4.14)$$

Cette équation est compatible avec l'équation de pression du modèle fluide (4.3) si :

$$\left(\frac{5}{3} - \gamma\right) p \nabla \cdot \mathbf{v} = -\frac{2}{3} \nabla \cdot \mathbf{q} \Rightarrow \left(\frac{5}{3} + \left(\frac{2}{3}\sigma - 1\right)\gamma\right) p \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (4.15)$$

Par ces relations, on remarque que l'hypothèse polytrope peut nous permettre de fermer le modèle fluide au niveau du troisième moment  $\mathbf{q}$  en injectant (4.13) dans l'équation de  $p$  (4.3), ou au niveau du deuxième,  $p$ , en utilisant  $\gamma$  et en injectant  $p \propto \rho^\gamma$  dans (4.2)<sup>3</sup>. L'hypothèse adiabatique, isentrope si réversible,  $\gamma = \gamma_a$  et  $\nabla \cdot \mathbf{q} = 0$ , est retrouvée dans l'évolution fluide de  $p$  si l'on se place dans le cadre d'un gaz parfait monoatomique  $\gamma_a = 5/3$  d'après (4.15). Dans le cas isotherme, on retrouve dans (4.15) ou (4.11),  $\mathrm{d}w = -\mathrm{d}q$ , c'est-à-dire  $du = 0$ . En effet, la variation d'énergie interne d'un gaz parfait ne dépendant que de la température, elle ne peut qu'être nulle sous l'hypothèse d'isothermie. Les cas isochore (ou incompressible) et isobare sont plus délicats. Dans le cas isochore, le produit  $\gamma \nabla \cdot \mathbf{v}$  qui apparaît dans toutes les expressions de (4.11) à (4.15), tend vers  $\infty \times 0$ . Dans le cas isobare,  $\infty \times 0$  apparaît dès que  $\sigma\gamma$  est présent dans l'équation. Ces limites du cas polytrope sont donc problématiques dans la définition de  $u$ . Elles doivent être traitées indépendamment. Dans le cas isochore,  $\mathrm{d}w = 0$  et l'énergie interne ( $d_t u + \nabla \cdot \mathbf{q} = 0$ ) n'échange plus avec les énergies cinétique et magnétique. L'hypothèse isobare, quant à elle, ferme le système fluide au niveau de l'équation (4.2). L'équation d'énergie interne est alors  $\partial_t u + \nabla \cdot (u\mathbf{v} + \mathbf{q} + p_0\mathbf{v}) = 0$ . Pour ces deux fermetures, l'énergie interne est

3. Usuellement, comme on cherche à fermer le modèle aussi tôt que possible, on ferme au niveau du deuxième moment. L'information sur le flux de chaleur est alors perdue d'où la confusion entre isentrope et polytrope.

conservée<sup>4</sup>.

Dans le cadre de la fermeture polytrope :  $p = \frac{c_s^2}{\gamma} \rho$ , avec  $c_s^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho} \propto \rho^{\gamma-1}$  le carré de la vitesse thermique. Pour ce qui est de la variation d'énergie interne spécifique, elle devient :

$$du = (\sigma\gamma + 1) \frac{p}{\rho^2} d\rho = (\sigma\gamma + 1) \frac{p}{\rho^\gamma} \rho^{\gamma-2} d\rho \quad (4.16)$$

$$= \begin{cases} \frac{\sigma\gamma+1}{\gamma-1} \frac{p}{\rho^\gamma} d(\rho^{\gamma-1}) & \text{si } \gamma \neq 1 \\ (\sigma + 1) \frac{p}{\rho} d(\ln \rho) & \text{si } \gamma = 1 \end{cases}. \quad (4.17)$$

Et par intégration :

$$u - u_I = \begin{cases} \frac{\sigma\gamma+1}{\gamma-1} \frac{p}{\rho^\gamma} (\rho^{\gamma-1} - \rho_I^{\gamma-1}) & = \frac{\sigma\gamma+1}{\gamma-1} \frac{c_s^2}{\gamma} \left(1 - \left(\frac{\rho_I}{\rho}\right)^{\gamma-1}\right) & \text{si } \gamma \neq 1 \\ (\sigma + 1) \frac{p}{\rho} \ln \frac{\rho}{\rho_I} & = (\sigma + 1) c_s^2 \ln \frac{\rho}{\rho_I} & \text{si } \gamma = 1 \end{cases} \quad (4.18)$$

en notant  $u_I$  et  $\rho_I$  les constantes d'intégrations. Dans le cas particulier de la fermeture isotherme :  $\gamma = 1$ ,  $\sigma = -1$ ,  $p = c_s^2 \rho$  avec  $c_s$  constante et  $du = 0$ .

## 4.3 Thermodynamique et turbulence

La cascade turbulente pourrait être, dans les plasmas spatiaux peu collisionnels, une réponse au problème du chauffage. En définissant le chauffage comme la variation de température et sachant que pour un gaz parfait, l'énergie interne ne dépend que de la température<sup>5</sup>. Il est facile de définir le chauffage comme tout transfert d'énergie vers l'énergie interne, appelée aussi énergie thermique [CASSAK et BARBUIYA 2022]. Le terme de pression dans l'équation (4.2) s'interprète alors comme les termes visqueux et résistifs abordés dans le chapitre 3, c'est-à-dire comme un terme "dissipatif". Mais, ce serait oublier que la cascade turbulente permet de faire le lien entre les grandes échelles, MHD où la validité de l'hypothèse de gaz parfait est cohérente puisque l'on néglige les interactions entre ions et électrons, et les petites échelles, cinétiques, où les interactions commencent à apparaître à travers le champ électromagnétique. Il manque donc un ingrédient à la définition du chauffage comme un transfert d'énergie vers l'énergie interne. Si l'on regarde la dissipation visqueuse ou résistive, elle vient réduire l'énergie du système, mais elle apparaît aussi dans l'équation d'entropie [EYINK et DRIVAS 2018]. Chauffer ainsi va donc venir augmenter l'entropie du plasma. **La définition du chauffage adaptée à l'étude de la turbulence est donc celle d'un transfert énergétique avec l'énergie interne impactant l'entropie. Le taux de cascade doit donc prendre en compte l'énergie étant transférée isentropiquement à l'énergie interne..**

Cette définition du chauffage justifie l'hypothèse proposée par [GALTIER et BANERJEE 2011] que seul le terme de travail  $d w$  de l'énergie interne affecte la cascade dans la zone inertielle. Cette hypothèse revient à supposer une zone inertielle isentrope telle que  $\sigma = 0$ . Si le système global est fermé tel que  $\gamma \neq \gamma_a$ , le terme de chaleur  $d q$  jouera un rôle aux autres échelles afin que les relations thermodynamiques soient respectées dans le

4. La cascade d'énergie cinétique et magnétique peut alors être traitée indépendamment de celle d'énergie interne. Cela a été fait dans le chapitre 3 dans le cadre incompressible.

5. Dans un gaz parfait, on suppose que les particules n'interagissent pas entre elles, donc qu'elles soient éloignées ou proches n'influera pas sur leur énergie individuelle. Par conséquent, l'énergie interne est indépendante de la densité. Cependant, la densité d'énergie interne dépendra de  $\rho$  et  $T$ .

système global. La fermeture considérée par [GALTIER et BANERJEE 2011] est la fermeture isotherme qui dans l'hypothèse d'une zone inertielle isentrope implique :  $\gamma = 1$ ,  $\sigma = 0$ ,  $p = c_s^2 \rho$  avec  $c_s$  constante et  $du = dw \Rightarrow u - u_I = \frac{p}{\rho} \ln \frac{\rho}{\rho_I}$ . On appellera cette fermeture, qui n'est valable que dans la zone inertielle, «isentrope-isotherme» afin d'expliciter la nuance existant entre l'isotherme basique tel que  $du = 0$  et l'isotherme étudiée dans le cadre d'une cascade isentrope. En suivant cette logique, je me suis intéressée dans [SIMON et SAHRAOUI 2021] à la fermeture «isentrope-polytrope» telle que  $\sigma = 0$ ,  $p = \frac{c_s^2}{\gamma} \rho^\gamma$  et

$$u - u_I = \begin{cases} \frac{1}{\gamma-1} \frac{p}{\rho^\gamma} (\rho^{\gamma-1} - \rho_I^{\gamma-1}) & = \frac{+1}{\gamma-1} \frac{c_s^2}{\gamma} \left( 1 - \left( \frac{\rho_I}{\rho} \right)^{\gamma-1} \right) \quad \text{si } \gamma \neq 1 \\ \frac{p}{\rho} \ln \frac{\rho}{\rho_I} & = c_s^2 \ln \frac{\rho}{\rho_I} \quad \text{si } \gamma = 1 \end{cases}. \quad (4.19)$$

Dans l'usage des formes explicite de l'énergie interne dans les calculs de lois exactes avec l'hypothèse polytrope, les constantes sont souvent annulées entre elles. Par exemple, dans le cas «isentrope-polytrope», [BANERJEE et GALTIER 2014] considère comme forme explicite de l'énergie interne  $\rho u = \frac{1}{(\gamma-1)} p$ . Contrairement à ce travail, nous avons choisi de maintenir une forme de compatibilité avec la fermeture «isentrope-isotherme» de [GALTIER et BANERJEE 2011] (si  $u = u_I$  alors  $u = 0$ ) dans nos choix de constantes.

Sont résumés dans TABLE 4.1, les caractéristiques, dénominations et choix de constante des fermetures définies polytropiquement via  $\sigma$  et  $\gamma$  qui serviront par la suite.

Nom	Paramètres	Energie interne explicite
Polytrope (hors isotherme)	$\{\sigma, \gamma \neq 1\}$	$\frac{\sigma\gamma+1}{\gamma-1} \frac{p}{\rho^\gamma} (\rho^{\gamma-1} - \rho_I^{\gamma-1})$
Isotherme	$\{-1, 1\}$	$u = 0$
Isentrope-polytrope (hors isotherme)	$\{0, \gamma \neq 1\}$	$\frac{1}{\gamma-1} \frac{p}{\rho^\gamma} (\rho^{\gamma-1} - \rho_I^{\gamma-1})$
Isentrope-isotherme	$\{0, 1\}$	$u = \frac{p}{\rho} \ln \frac{\rho}{\rho_I}$

TABLE 4.1 – Fermetures et relations associées. La forme de l'énergie interne de l'isentrope-isotherme est calquée sur celle utilisée dans le papier [GALTIER et BANERJEE 2011]. Les autres sont définies de telle sorte à maintenir une forme de compatibilité : si  $u = u_I$  alors  $u = 0$ . Celle de l'isentrope-polytrope est donc légèrement différente de celle utilisée par [BANERJEE et GALTIER 2014].  $\frac{p}{\rho}$  peut aussi s'écrire  $\frac{c_s^2}{\gamma}$  et  $p \propto \rho^\gamma$ .

[ALUIE *et al.* 2012] observent en détail la cascade d'énergie cinétique et magnétique dans différentes simulations subsoniques à transoniques. Le transfert cinétique-interne via la pression semble n'avoir lieu qu'à grande échelle dans une zone qu'ils appellent «zone de conversion», à plus petites échelles cette contribution reste constante. Ils en déduisent un découplage des cascades d'énergie cinétique et d'énergie interne et l'existence d'une zone inertielle cinétique. [EYINK et DRIVAS 2018] déduisent aussi, analytiquement, un effet à grande échelle de la pression qui permettrait d'alimenter des structures cohérentes et de réduire l'entropie à grande échelle. Cela induirait une cascade inverse d'entropie vers les grandes échelles et un équilibre s'établirait entre les cascades énergétique totale et d'entropie. Aucun de ces résultats ne prouve que l'énergie interne ne cascade pas. Ne pas la prendre en compte dans l'estimation du taux de chauffage comme le propose [HELLINGER, VERDINI *et al.* 2018] est donc hasardeux et n'est justifiable que dans le cas subsonique où sa contribution semble mineure [ANDRÉS, SAHRAOUI, GALTIER, HADID, DMITRUK *et al.* 2018 ; FERRAND, GALTIER, SAHRAOUI et FEDERRATH 2020] ou à des échelles plus faibles

que celle où l'impact de la pression semble majeur [ALUIE *et al.* 2012]. Etudier la cascade compressible dans une zone inertielle où la pression ne transférerait pas d'énergie vers l'énergie interne, c'est à dire  $\nabla p = 0$  dans l'équation (4.21), correspondrait à regarder une zone inertielle isobare. Au vu des observations, cela ne semble pas physiquement absurde, mais étant intéressés par l'impact de la pression sur la cascade turbulente totale, cette hypothèse réductrice n'a pas retenu notre intérêt.

## 4.4 Propriétés linéaires

Dans le cadre de l'obtention d'une relation de dispersion compressible, on fermera le système avec la fermeture polytrope pour rester dans le cas le plus général possible. Ainsi, on utilise le système d'équations :

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (4.20)$$

$$\partial_t (\rho \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v} - \rho \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A) + \nabla p_* = 0, \quad (4.21)$$

$$\partial_t \mathbf{v}_A - \nabla \cdot (\mathbf{v}_A \mathbf{v} - \mathbf{v} \mathbf{v}_A) + \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{v}_A - \frac{\mathbf{v}_A}{2} \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (4.22)$$

fermé par  $p \propto \rho^\gamma$ .

L'application de la méthode de linéarisation présentée dans le chapitre I.3 nous donne l'équation de dispersion suivante :

$$\begin{pmatrix} \frac{\omega^2}{k_{\parallel}^2 v_{A0}^2} - \left(1 + \frac{\gamma}{2} \beta_0\right) \frac{k_{\perp}^2}{k_{\parallel}^2} - 1 & 0 & -\frac{\gamma}{2} \beta_0 \frac{k_{\perp}}{k_{\parallel}} \\ 0 & \frac{\omega^2}{k_{\parallel}^2 v_{A0}^2} - 1 & 0 \\ -\frac{\gamma}{2} \beta_0 \frac{k_{\perp}}{k_{\parallel}} & 0 & \frac{\omega^2}{k_{\parallel}^2 v_{A0}^2} - \frac{\gamma}{2} \beta_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_x^1 \\ v_y^1 \\ v_z^1 \end{pmatrix} = 0 \quad (4.23)$$

avec  $\beta_0 = \frac{2p_0}{\rho_0 v_{A0}^2}$  le paramètre  $\beta$  linéarisé du plasma. La relation de dispersion est donnée par l'annulation du déterminant de la matrice, c'est-à-dire, :

$$0 = \left( \frac{\omega^2}{k_{\parallel}^2 v_{A0}^2} - 1 \right) \left( \frac{\omega^2}{k_{\parallel}^2 v_{A0}^2} - \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\gamma}{2} \beta_0 \pm \sqrt{\Delta} \right) \right) \quad (4.24)$$

avec  $\Delta = \left(1 + \frac{\gamma}{2} \beta_0\right)^2 + 2\gamma\beta_0 \sin^2 \theta = \left(1 + \frac{\gamma}{2} \beta_0\right)^2 - 2\gamma\beta_0 \cos^2 \theta$  en notant  $\theta$  l'angle entre  $\mathbf{k}$  et  $\mathbf{e}_z$ . La première racine correspond au mode d'Alfvén incompressible et les deux autres aux modes magnétosonores rapide (+) et lent (-). Ces modes sont stables ( $\omega$  est réel), puisque  $\Delta > 0$  et  $\frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\gamma}{2} \beta_0 \pm \sqrt{\Delta} \right) > 0$ .

Ces modes et leur version cinétique influencent le développement de la cascade turbulente en interagissant les uns avec les autres [CHO et LAZARIAN 2003 ; SHARMA et KUMAR 2011 ; ANDRÉS, CLARK DI LEONI *et al.* 2017 ; BRODIANO *et al.* 2021 ; GALTIER 2023]. Dans le vent solaire, quasi-incompressible, le mode d'Alfvén et la cascade associée sont dominants. Cependant, les simulations et des filtrages de spectres relevés dans la magnétogaine ou la couronne solaire montrent des spectres de types turbulents pour les ondes magnétosoniques. Les simulations sont des outils très utilisés pour essayer de comprendre la répartition des rôles des différents modes [BRODIANO *et al.* 2021] mais l'universalité des résultats est questionnable, les résultats étant dépendants du forçage (Alfvénique ou non) initiant la cascade.

## 4.5 Synthèse sur le modèle compressible avec pression isotrope

Modèle :

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (4.25)$$

$$\partial_t (\rho \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v} - \rho \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A) + \nabla p_* = 0, \quad (4.26)$$

$$\partial_t \mathbf{v}_A - \nabla \cdot (\mathbf{v}_A \mathbf{v} - \mathbf{v} \mathbf{v}_A) + \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{v}_A - \frac{\mathbf{v}_A}{2} \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (4.27)$$

$$\mathbf{v}_A \cdot \nabla \rho + 2\rho \nabla \cdot \mathbf{v}_A = 0. \quad (4.28)$$

Fermetures écrites dans le cadre général polytrope et formes explicites de l'énergie interne spécifique considérées (telles que  $u_I = u(\rho = \rho_I) = 0$ ) :

$$\frac{p}{\rho} = \frac{c_s^2}{\gamma}, \quad c_s^2 \propto \rho^{\gamma-1}, \quad \sigma = \frac{\nabla \cdot \mathbf{q}}{\gamma p \nabla \cdot \mathbf{v}},$$

- cas polytrope hors isotherme :  $u = \frac{\sigma\gamma+1}{\gamma-1} \frac{p}{\rho^\gamma} (\rho^{\gamma-1} - \rho_I^{\gamma-1})$ ,
- cas isotherme :  $\sigma = -1$ ,  $\gamma = 1$ ,  $u = 0$  et  $c_s$  constants,
- cas isentrope-polytrope hors isotherme :  $\sigma = 0$  et  $u = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \frac{p}{\rho^\gamma} (\rho^{\gamma-1} - \rho_I^{\gamma-1})$ ,
- cas isentrope-isotherme :  $\sigma = 0$ ,  $\gamma = 1$ ,  $c_s$  constant et  $u = c_s^2 \ln \frac{\rho}{\rho_I}$ .

Equation d'énergie interne :

$$\text{Formulation générale : } \partial_t (\rho u) + \nabla \cdot (\rho u \mathbf{v} + \mathbf{q}) = -p \nabla \cdot \mathbf{v}, \quad (4.29)$$

$$\text{Premier principe thermo : } du = d\mathbf{q} + d\mathbf{w} = T ds + \frac{p}{\rho^2} d\rho, \quad (4.30)$$

$$\text{Formulation thermo : } \partial_t (\rho u) + \nabla \cdot (\rho u \mathbf{v}) - \rho T ds = -p \nabla \cdot \mathbf{v}, \quad (4.31)$$

$$\Rightarrow \text{Compatibilité : } \nabla \cdot \mathbf{q} = -\rho T ds, \quad (4.32)$$

$$\text{Formulation polytrope : } \partial_t (\rho u) + \nabla \cdot (\rho u \mathbf{v}) = -(\sigma\gamma + 1) p \nabla \cdot \mathbf{v}. \quad (4.33)$$

Equation de pression :

$$\text{Modèle fluide non fermé : } \partial_t p + \nabla \cdot \left( p \mathbf{v} + \frac{2}{3} \mathbf{q} \right) + \frac{2}{3} p \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (4.34)$$

$$\text{Fermeture polytrope } (p \propto \rho^\gamma) : \quad \partial_t p + \mathbf{v} \cdot \nabla p - \gamma p \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (4.35)$$

$$\Rightarrow \text{Compatibilité : } \left( \frac{5}{3} + \left( \frac{2}{3} \sigma - 1 \right) \gamma \right) \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (4.36)$$

Relation de dispersion linéaire :

$$0 = \left( \frac{\omega^2}{k_{\parallel}^2 v_{A0}^2} - 1 \right) \left( \frac{\omega^2}{k^2 v_{A0}^2} - \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\gamma}{2} \beta_0 \pm \sqrt{\left( 1 - \frac{\gamma}{2} \beta_0 \right)^2 + 2\gamma\beta_0 \sin^2 \theta} \right) \right). \quad (4.37)$$

La première racine correspond au mode d'Alfvén similaire à celui obtenu en incompressible et les deux autres aux modes magnétonores rapides (+) et lents (-).

# PARTIE I : CHAPITRE 5

## DÉcrire la cascade compressible

### Sommaire

---

5.1	Dérivation d'une loi exacte compressible générale pour décrire un écoulement turbulent polytrope . . . . .	44
5.2	Reformulation de la loi K41 générale dépendant d'une pression isotrope . . . . .	48
5.3	Application à d'autres fermetures et deuxième reformulation	50
5.4	Synthèse de l'étude analytique de turbulence compressible avec pression isotrope . . . . .	54

---

La variation du résultat de l'estimation d'un indice polytropique dans différents types de plasmas spatiaux (voir FIGURE 4.1, LIVADIOTIS 2018b) vient motiver la dérivation d'une loi exacte polytrope pour étudier la cascade d'énergie totale dans ces milieux. L'objectif initial du travail présenté dans cette partie et dont la contribution originale analytique est introduite dans ce chapitre, était de dériver une loi exacte MHD polytrope, une extension des modèles MHD isothermes (BANERJEE et GALTIER 2013; ANDRÉS et SAHRAOUI 2017; ANDRÉS, GALTIER *et al.* 2018; FERRAND, GALTIER et SAHRAOUI 2021) et HD polytrope (BANERJEE et GALTIER 2014) existants. La cascade y est décrite similairement à celle décrite par GALTIER et BANERJEE 2011 (cas HD isotherme). Suite à la discussion sur les fermetures thermodynamiques résumée dans le Chapitre 4, on peut dire que, dans ces articles, elle est supposée isentrope dans la zone inertielle. L'hypothèse d'une fermeture polytrope (resp. isotherme) avec une zone inertielle isentrope revient à la fermeture "isentrope-polytrope" (resp. isentrope-isotherme) discutée au Chapitre 4.

La méthode de calcul envisagée pour atteindre l'objectif initial a en réalité permis d'obtenir une loi exacte générale valable pour toutes les fermetures du système tant que l'isentropie est imposée dans la zone inertielle. Ce travail dont l'application à la fermeture "isentrope-polytrope" répond à l'objectif initial est présenté dans la section 5.1. Dans la section 5.2, on détaillera l'impact des fermetures sur une autre formulation de la loi qui a émergée du travail de relaxation de l'hypothèse d'isotropie de pression qui sera présenté dans le Chapitre 7. Bien après avoir atteint l'objectif initial, on s'est posé la question de l'impact du flux de chaleur (a priori attendu en dehors de la zone inertielle) et on l'a pris en compte dans la loi KHM qui, ainsi, a réellement pris une dimension générale. Notre loi a alors adopté une troisième formulation qui sera présentée dans la section 5.3. Des applications isobare, isotherme et polytrope y seront abordées en tant qu'exemples d'application clôturant ce travail de généralisation.

## 5.1 Dérivation d'une loi exacte compressible générale pour décrire un écoulement turbulent polytrope

La méthode utilisée ici pour dériver une loi exacte compressible correspond à celle détaillée dans le cas incompressible et résumée dans la section 3.4 de l'Introduction. La première étape est de définir une fonction de corrélation. La pluralité de possibilités est plus importante que dans le cas incompressible puisque cette fois la compression ( $\rho \neq 0$ ) impacte les densités d'énergie :  $E_{tot} = \frac{1}{2}\rho\mathbf{v}^2 + \frac{1}{2}\rho\mathbf{v}_A^2 + \rho u$ . Pour l'énergie cinétique, la volonté de considérer une forme de type auto-corrélation, a inspiré des études HD et MHD considérant sa racine-carré en  $\sqrt{\rho}\mathbf{v}$  (ex : HELLINGER, PAPINI *et al.* 2021) tandis que d'autres ont privilégié le sens physique de la quantité de mouvement  $\rho\mathbf{v}$  (ex : GALTIER et BANERJEE 2011). Pour l'énergie magnétique, la question est la même :  $\mathbf{B}$  (ex : FERRAND, GALTIER et SAHRAOUI 2021) ou  $\rho\mathbf{v}_A$  (ex : ANDRÉS et SAHRAOUI 2017) ? Et pour l'énergie interne, les choix présents dans la littérature ont été en partie orientés suivant le type de fermeture : dans le cas polytrope par exemple, la forme explicite de l'énergie interne spécifique peut s'écrire tel que le carré de la vitesse thermique, d'où  $\rho\sqrt{u}$  (BANERJEE et GALTIER 2014) ou  $\sqrt{\rho u}$  alors que, dans le cas isotherme (ex : GALTIER et BANERJEE 2011), le choix était plutôt orienté vers la conservation de son intégrité et de prendre  $\rho$  en un point et  $u$  en un autre. Trois possibilités ont été envisagées pour chaque type d'énergie (dont la forme est ici généralisée en  $E_X = \rho X^2$ ) :

- l'auto-corrélation :  $\mathcal{R}_{X1} = \langle \sqrt{\rho'} X' \cdot \sqrt{\rho} X \rangle$  de fonction incrémentale associée :  $\mathcal{S}_{X1} = \langle (\delta(\sqrt{\rho} X))^2 \rangle$  puisque  $\mathcal{S}_{X1} = 2\langle E_X \rangle - 2\mathcal{R}_{X1}$
- la moyenne de densité :  $\mathcal{R}_{X2} = \frac{1}{2} \langle (\rho' + \rho) X' \cdot X \rangle$  de fonction incrémentale associée :  $\mathcal{S}_{X2} = \langle \delta(\rho X) \cdot \delta X \rangle$
- la corrélation avec la densité :  $\mathcal{R}_{X3} = \frac{1}{2} \langle \rho' X^2 + \rho X'^2 \rangle$  de fonction incrémentale associée :  $\mathcal{S}_{X3} = \langle \delta\rho \delta X^2 \rangle$

Il s'avère qu'utiliser des formes prenant en compte des racines carrées a tendance à compliquer le calcul et le résultat. Les formes finalement choisies sont donc :  $\mathcal{R}_c = \mathcal{R}_{c2} = \langle \frac{1}{4}(\rho' + \rho) \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v} \rangle$ ,  $\mathcal{R}_m = \mathcal{R}_{m2} = \langle \frac{1}{4}(\rho' + \rho) \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A \rangle$  et  $\mathcal{R}_u = \mathcal{R}_{u3} = \frac{1}{2} \langle \rho' u + \rho u' \rangle$ . Ce choix concorde avec celui de ANDRÉS, SAHRAOUI, GALTIER, HADID, DMITRUJK *et al.* 2018 dont les résultats de simulation permettront l'étude dans les données in-situ du Chapitre 6 et serviront de base de comparaison afin de valider les résultats de simulations présentés dans la Partie III.

Pour ce qui est du modèle considéré, la première idée était d'appliquer la méthode de calcul des lois exactes sur le modèle fermé par l'hypothèse  $p \propto \rho^\gamma$ , dans la lignée des dérivations compressibles effectuées par exemple par GALTIER et BANERJEE 2011 ; ANDRÉS et SAHRAOUI 2017. Mais il s'est avéré qu'un autre choix plus judicieux existait. En effet, comme pour obtenir l'équation d'énergie totale (4.8), nous pouvons obtenir une loi exacte "générale" en utilisant l'équation de densité d'énergie interne (4.29) et sans expliciter la forme de  $p$  ni celle de  $u$ . En première approximation, l'hypothèse isentrope qui implique  $\nabla \cdot \mathbf{q} = 0$  via l'équation de compatibilité (4.32), a d'abord été posée. Ce travail fait partie des résultats publiés dans SIMON et SAHRAOUI 2021. La loi KHM générale qui y est obtenue n'est alors valable que dans la zone inertielle où l'hypothèse isentrope est supposée effective et ne sert que d'étape de calcul vers une loi K41. Dans une volonté de donner un résultat pour la loi KHM générale valable pour toutes les échelles, nous prendrons en compte  $\nabla \cdot \mathbf{q}$  dans cette section, mais nous garderons sa contribution brute, sans travail analytique en accord avec le cheminement chronologique voulu pour ce

chapitre.

Les équations considérées sont celles de densité de masse (4.25), vitesse (4.26), induction (4.27) et énergie interne (4.29) avec des termes de forçage et de dissipation définis comme dans le cas incompressible (voir (3.27) et (3.28)). Ainsi :

$$\partial_t \rho = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \quad (5.1)$$

$$\partial_t \mathbf{v} = -\nabla \cdot (\mathbf{v} \mathbf{v}) + \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A) - \frac{1}{\rho} \nabla p_* + \mathbf{f}_c + \mathbf{d}_c \quad (5.2)$$

$$\partial_t \mathbf{v}_A = \nabla \cdot (\mathbf{v}_A \mathbf{v} - \mathbf{v} \mathbf{v}_A) - \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{v}_A + \frac{\mathbf{v}_A}{2} \nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{f}_m + \mathbf{d}_m \quad (5.3)$$

$$\partial_t u = -\nabla \cdot (u \mathbf{v}) + u \nabla \cdot \mathbf{v} - \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{q} - \frac{p}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (5.4)$$

(5.2) et (5.3) peuvent aussi s'écrire en prenant en compte (5.1) :

$$\partial_t (\rho \mathbf{v}) = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A) - \nabla p_* + \rho \mathbf{f}_c + \rho \mathbf{d}_c \quad (5.5)$$

$$\partial_t (\rho \mathbf{v}_A) = \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}_A \mathbf{v} - \rho \mathbf{v} \mathbf{v}_A) + \rho \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{v}_A - \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}_A \nabla \cdot \mathbf{v} + \rho \mathbf{f}_m + \rho \mathbf{d}_m \quad (5.6)$$

Si l'on regarde la forme des fonctions de corrélation incrémentales associées aux formes des fonctions choisies, on peut s'attendre à pouvoir identifier les fonctions de structure  $\langle \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{v} \delta \mathbf{v} \rangle$ ,  $\langle \delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \delta \mathbf{v}_A \delta \mathbf{v} \rangle$  et  $\langle \delta \rho \delta u \delta \mathbf{v} \rangle$  et, similairement au cas incompressible,  $\langle \delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \delta \mathbf{v} \delta \mathbf{v}_A \rangle$  ou  $\langle \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{v}_A \delta \mathbf{v}_A \rangle$ . Le calcul de l'évolution temporelle des fonctions de corrélation pour chaque canal énergétique nous donne en effet :

— Canal d'énergie cinétique :  $\mathcal{R}_c = \frac{1}{4} \langle (\rho' + \rho) \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v} \rangle$

$$\begin{aligned} 4\partial_t \mathcal{R}_c &= \langle \partial_t (\rho' \mathbf{v}') \cdot \mathbf{v} + \rho' \mathbf{v}' \cdot \partial_t \mathbf{v} + \partial_t (\rho \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}' + \rho \mathbf{v} \cdot \partial_t \mathbf{v}' \rangle \\ &= \nabla_\ell \cdot \langle \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{v} \delta \mathbf{v} - (\delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \delta \mathbf{v} \delta \mathbf{v}_A + \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{v}_A \delta \mathbf{v}_A) \rangle \\ &\quad + \nabla_\ell \cdot \langle \rho' \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v} \mathbf{v}_A - \rho \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}' \mathbf{v}'_A - \rho' \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}_A \mathbf{v}'_A + \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'_A \mathbf{v}_A \rangle \\ &\quad + \langle \rho \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v} \nabla' \cdot \mathbf{v}' - \rho' \mathbf{v}' \cdot \delta \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{v} + 2\rho' \mathbf{v}' \cdot \delta \mathbf{v}_A \nabla \cdot \mathbf{v}_A - 2\rho \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v}_A \nabla' \cdot \mathbf{v}'_A \rangle \\ &\quad + \nabla_\ell \cdot \left\langle \left(1 + \frac{\rho'}{\rho}\right) p_* \mathbf{v}' - \left(1 + \frac{\rho}{\rho'}\right) p'_* \mathbf{v} \right\rangle - \left\langle \frac{\rho'}{\rho} p_* \mathbf{v}' \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} + \frac{\rho}{\rho'} p'_* \mathbf{v} \cdot \frac{\nabla' \rho'}{\rho'} \right\rangle \\ &\quad + \langle (\rho' + \rho) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{f}'_c + \mathbf{v}' \cdot \mathbf{f}_c) \rangle + \langle (\rho' + \rho) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{d}'_c + \mathbf{v}' \cdot \mathbf{d}_c) \rangle \end{aligned} \quad (5.7)$$

— Canal d'énergie magnétique :  $\mathcal{R}_m = \frac{1}{4} \langle (\rho' + \rho) \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A \rangle$

$$\begin{aligned} 4\partial_t \mathcal{R}_m &= \langle \partial_t (\rho' \mathbf{v}'_A) \cdot \mathbf{v}_A + \rho' \mathbf{v}'_A \cdot \partial_t \mathbf{v}_A + \partial_t (\rho \mathbf{v}_A) \cdot \mathbf{v}'_A + \rho \mathbf{v}_A \cdot \partial_t \mathbf{v}'_A \rangle \\ &= \nabla_\ell \cdot \langle \delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \delta \mathbf{v}_A \delta \mathbf{v} \rangle + \left\langle \left( \rho \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{v}_A - \frac{1}{2} (\rho' + \rho) \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A \right) \nabla' \cdot \mathbf{v}' \right\rangle \\ &\quad - \left\langle \left( \rho' \mathbf{v}'_A \cdot \delta \mathbf{v}_A + \frac{1}{2} (\rho' + \rho) \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A \right) \nabla \cdot \mathbf{v} \right\rangle \\ &\quad + \langle (\rho' \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v} - \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'_A) \nabla \cdot \mathbf{v}_A \rangle + \langle (\rho' \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}_A - \rho \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}') \nabla' \cdot \mathbf{v}'_A \rangle \\ &\quad - \nabla_\ell \cdot \langle \rho' \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v} \mathbf{v}_A - \rho \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}' \mathbf{v}'_A - \rho' \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}_A \mathbf{v}'_A + \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'_A \mathbf{v}_A \rangle \\ &\quad + \langle (\rho' + \rho) (\mathbf{v}_A \cdot \mathbf{f}'_m + \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{f}_m) \rangle + \langle (\rho' + \rho) (\mathbf{v}_A \cdot \mathbf{d}'_m + \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{d}_m) \rangle \end{aligned} \quad (5.8)$$

— Canal d'énergie interne :  $\mathcal{R}_u = \frac{1}{2} \langle \rho' u + \rho u' \rangle$

$$\begin{aligned} 2\partial_t \mathcal{R}_u &= \langle \partial_t(\rho') u + \rho' \partial_t u + \partial_t(\rho) u' + \rho \partial_t u' \rangle \\ &= \nabla_{\boldsymbol{\ell}} \cdot \langle \delta \rho \delta u \boldsymbol{\delta v} \rangle + \langle \rho \delta u \nabla \cdot \boldsymbol{v}' - \rho' \delta u \nabla \cdot \boldsymbol{v} \rangle \\ &\quad - \left\langle \rho' \frac{p}{\rho} \nabla \cdot \boldsymbol{v} + \rho \frac{p'}{\rho'} \nabla' \cdot \boldsymbol{v}' \right\rangle - \left\langle \frac{\rho}{\rho'} \nabla' \cdot \boldsymbol{q}' + \frac{\rho'}{\rho} \nabla \cdot \boldsymbol{q} \right\rangle \end{aligned} \quad (5.9)$$

D'où pour l'énergie totale avec  $\mathcal{R} = \mathcal{R}_c + \mathcal{R}_m + \mathcal{R}_u$  :

[1]	$4\partial_t \mathcal{R} = \nabla_{\boldsymbol{\ell}} \cdot \langle (\delta(\rho \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{\delta v} + \delta(\rho \boldsymbol{v}_A) \cdot \boldsymbol{\delta v}_A) \boldsymbol{\delta v} - (\delta(\rho \boldsymbol{v}_A) \cdot \boldsymbol{\delta v} + \delta(\rho \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{\delta v}_A) \boldsymbol{\delta v}_A \rangle$
[2]	$+ \left\langle (\rho \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\delta v} + \rho \boldsymbol{v}_A \cdot \boldsymbol{\delta v}_A - \frac{1}{2}(\rho' + \rho) \boldsymbol{v}'_A \cdot \boldsymbol{v}_A) \nabla' \cdot \boldsymbol{v}' \right\rangle$
[3]	$- \left\langle (\rho' \boldsymbol{v}' \cdot \boldsymbol{\delta v} + \rho' \boldsymbol{v}'_A \cdot \boldsymbol{\delta v}_A + \frac{1}{2}(\rho' + \rho) \boldsymbol{v}'_A \cdot \boldsymbol{v}_A) \nabla \cdot \boldsymbol{v} \right\rangle$
[4]	$+ \left\langle (2\rho' \boldsymbol{v}' \cdot \boldsymbol{\delta v}_A + \rho \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}'_A - \rho' \boldsymbol{v}'_A \cdot \boldsymbol{v}) \nabla \cdot \boldsymbol{v}_A \right\rangle$
[5]	$- \left\langle (2\rho \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\delta v}_A - \rho' \boldsymbol{v}' \cdot \boldsymbol{v}_A + \rho \boldsymbol{v}_A \cdot \boldsymbol{v}') \nabla' \cdot \boldsymbol{v}'_A \right\rangle$
[6]	$+ 2\nabla_{\boldsymbol{\ell}} \cdot \langle \delta \rho \delta u \boldsymbol{\delta v} \rangle + 2 \left\langle \left( \rho \delta u - \rho \frac{p'}{\rho'} \right) \nabla' \cdot \boldsymbol{v}' - \left( \rho' \delta u + \rho' \frac{p}{\rho} \right) \nabla \cdot \boldsymbol{v} \right\rangle$
[7]	$+ \nabla_{\boldsymbol{\ell}} \cdot \left\langle \left( 1 + \frac{\rho'}{\rho} \right) p_* \boldsymbol{v}' - \left( 1 + \frac{\rho}{\rho'} \right) p'_* \boldsymbol{v} \right\rangle - \left\langle \frac{\rho'}{\rho} p_* \boldsymbol{v}' \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} + \frac{\rho}{\rho'} p'_* \boldsymbol{v} \cdot \frac{\nabla' \rho'}{\rho'} \right\rangle$
[8]	$- 2 \left\langle \frac{\rho}{\rho'} \nabla' \cdot \boldsymbol{q}' + \frac{\rho'}{\rho} \nabla \cdot \boldsymbol{q} \right\rangle$
[9]	$+ \left\langle (\rho' + \rho) \left( \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{f}'_c + \boldsymbol{v}' \cdot \boldsymbol{f}_c + \boldsymbol{v}_A \cdot \boldsymbol{f}'_m + \boldsymbol{v}'_A \cdot \boldsymbol{f}_m \right) \right\rangle$
[10]	$+ \left\langle (\rho' + \rho) \left( \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{d}'_c + \boldsymbol{v}' \cdot \boldsymbol{d}_c + \boldsymbol{v}_A \cdot \boldsymbol{d}'_m + \boldsymbol{v}'_A \cdot \boldsymbol{d}_m \right) \right\rangle$

(5.10)

Cette loi KHM est valable à toutes les échelles où est valable le modèle MHD. Comme elle est obtenue à partir du modèle MHD non fermé, elle est donc adaptable à toute fermeture et hypothèse thermodynamique considérées dans la zone inertie. C'est le premier résultat majeur obtenu, il a été par la suite reformulé comme on le verra dans les sections suivantes. La ligne [1] contient la contribution à la cascade qui survit dans la limite incompressible, ces termes flux sont souvent nommés «Yaglom compressible». Cette contribution est de type flux. Les lignes [2] à [8] contiennent les termes purement compressibles car ils s'annulent dans la limite incompressible. Les lignes [2] à [5] contiennent des termes dits «sources», liés à l'effet de la dilation/compression du plasma sur les champs cinétiques et magnétiques (resp.  $\nabla \cdot \boldsymbol{v}$  et  $\nabla \cdot \boldsymbol{v}_A$ ). La ligne [6] contient des contributions d'énergie interne et de pression convectées par le champ de vitesse sous la forme d'un terme flux, qui semble indiquer l'existence d'une cascade d'énergie interne à travers les échelles, et de termes sources. La ligne [7] contient la contribution de pression totale qui peut être écrite en factorisant la pression magnétique en fonction du paramètre  $\beta = p/p_m$  du plasma et qui contient la majorité des termes nommés «hybrides» par ANDRÉS et SAHRAOUI 2017 car il est possible de les écrire sous le format flux ou source. Cette ligne sera principalement affectée par les reformulations présentées dans les sections 5.2 et 5.3. La ligne [8] contient la contribution du flux de chaleur qui sera abordée et reformulée dans la section 5.3. Et pour finir, les lignes [9] et [10] correspondent aux taux d'injection et de dissipation de l'énergie totale compressible.

Dans le cadre d'une zone inertie isentrope, il faut prendre en compte les lignes [1] à

[7] dans le taux de cascade :

$$\begin{aligned}
 -4\varepsilon = & \nabla_\ell \cdot \langle (\delta(\rho\mathbf{v}) \cdot \delta\mathbf{v} + \delta(\rho\mathbf{v}_A) \cdot \delta\mathbf{v}_A) \delta\mathbf{v} - (\delta(\rho\mathbf{v}_A) \cdot \delta\mathbf{v} + \delta(\rho\mathbf{v}) \cdot \delta\mathbf{v}_A) \delta\mathbf{v}_A \rangle \\
 & + \langle (\rho\mathbf{v} \cdot \delta\mathbf{v} + \rho\mathbf{v}_A \cdot \delta\mathbf{v}_A - \frac{1}{2}(\rho' + \rho)\mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A) \nabla' \cdot \mathbf{v}' \rangle \\
 & - \langle (\rho'\mathbf{v}' \cdot \delta\mathbf{v} + \rho'\mathbf{v}'_A \cdot \delta\mathbf{v}_A + \frac{1}{2}(\rho' + \rho)\mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A) \nabla \cdot \mathbf{v} \rangle \\
 & + \langle (2\rho'\mathbf{v}' \cdot \delta\mathbf{v}_A + \rho\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'_A - \rho'\mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}) \nabla \cdot \mathbf{v}_A \rangle \\
 & - \langle (2\rho\mathbf{v} \cdot \delta\mathbf{v}_A - \rho'\mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}_A + \rho\mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}') \nabla' \cdot \mathbf{v}'_A \rangle \\
 & + 2\nabla_\ell \cdot \langle \delta\rho\delta u \delta\mathbf{v} \rangle + 2 \left\langle \left( \rho\delta u - \rho \frac{p'}{\rho'} \right) \nabla' \cdot \mathbf{v}' - \left( \rho'\delta u + \rho' \frac{p}{\rho} \right) \nabla \cdot \mathbf{v} \right\rangle \\
 & + \nabla_\ell \cdot \left\langle \left( 1 + \frac{\rho'}{\rho} \right) p_* \mathbf{v}' - \left( 1 + \frac{\rho}{\rho'} \right) p'_* \mathbf{v} \right\rangle - \left\langle \frac{\rho'}{\rho} p_* \mathbf{v}' \cdot \frac{\nabla\rho}{\rho} + \frac{\rho}{\rho'} p'_* \mathbf{v} \cdot \frac{\nabla'\rho'}{\rho'} \right\rangle
 \end{aligned} \tag{5.11}$$

On obtient ainsi la «loi exacte générale de type Kolmogorov dans le cadre d'une zone inertielle supposée isentrope». Grâce au premier principe de thermodynamique (4.30) qui peut alors s'écrire  $\rho^2\partial u = p\partial\rho$ , on peut reformuler le dernier terme en fonction de l'énergie interne et du paramètre caractéristique en physique des plasmas  $\beta = p/p_m$  local :

$$\begin{aligned}
 \left\langle \frac{\rho'}{\rho} p_* \mathbf{v}' \cdot \frac{\nabla\rho}{\rho} + \frac{\rho}{\rho'} p'_* \mathbf{v} \cdot \frac{\nabla'\rho'}{\rho'} \right\rangle &= \left\langle \left( 1 + \frac{p_m}{p} \right) \rho' \mathbf{v}' \cdot \nabla u + \left( 1 + \frac{p'_m}{p'} \right) \rho \mathbf{v} \cdot \nabla' u' \right\rangle \\
 &= \nabla_\ell \cdot \langle \rho u' \mathbf{v} - \rho' u \mathbf{v}' \rangle + \left\langle \frac{1}{\beta} \nabla \cdot (\rho' u \mathbf{v}') + \frac{1}{\beta'} \nabla' \cdot (\rho u' \mathbf{v}) \right\rangle
 \end{aligned} \tag{5.12}$$

On retrouve ainsi le résultat général publié et analysé dans SIMON et SAHRAOUI 2021 (équation 18).

L'injection de la fermeture isentrope-polytrope dans la loi (5.11) permet de répondre à l'objectif initial : trouver une loi exacte MHD polytrope. Le résultat s'obtient directement et s'écrit, dans le cas  $\gamma \neq 1$  (car on y injecte l'expression explicite de l'énergie interne) est alors en fonction de  $\gamma$  et  $c_s^2$  :

$$\begin{aligned}
 -4\varepsilon = & \nabla_\ell \cdot \langle (\delta(\rho\mathbf{v}) \cdot \delta\mathbf{v} + \delta(\rho\mathbf{v}_A) \cdot \delta\mathbf{v}_A) \delta\mathbf{v} - (\delta(\rho\mathbf{v}_A) \cdot \delta\mathbf{v} + \delta(\rho\mathbf{v}) \cdot \delta\mathbf{v}_A) \delta\mathbf{v}_A \rangle \\
 & + \langle (\rho\mathbf{v} \cdot \delta\mathbf{v} + \rho\mathbf{v}_A \cdot \delta\mathbf{v}_A - \frac{1}{2}(\rho' + \rho)\mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A) \nabla' \cdot \mathbf{v}' \rangle \\
 & - \langle (\rho'\mathbf{v}' \cdot \delta\mathbf{v} + \rho'\mathbf{v}'_A \cdot \delta\mathbf{v}_A + \frac{1}{2}(\rho' + \rho)\mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A) \nabla \cdot \mathbf{v} \rangle \\
 & + \langle (2\rho'\mathbf{v}' \cdot \delta\mathbf{v}_A + \rho\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'_A - \rho'\mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}) \nabla \cdot \mathbf{v}_A \rangle \\
 & - \langle (2\rho\mathbf{v} \cdot \delta\mathbf{v}_A - \rho'\mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}_A + \rho\mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}') \nabla' \cdot \mathbf{v}'_A \rangle \\
 & + \frac{2}{\gamma(\gamma-1)} \nabla_\ell \cdot \langle \delta\rho\delta c_s^2 \delta\mathbf{v} \rangle + \frac{2}{\gamma} \left\langle \rho \left( \frac{1}{\gamma-1} \delta c_s^2 - c_s'^2 \right) \nabla' \cdot \mathbf{v}' - \rho' \left( \frac{1}{\gamma-1} \delta c_s^2 + c_s^2 \right) \nabla \cdot \mathbf{v} \right\rangle \\
 & + \nabla_\ell \cdot \left\langle (\rho + \rho') \left( \frac{c_s^2}{\gamma} + \frac{\mathbf{v}_A'^2}{2} \right) \mathbf{v}' - (\rho + \rho') \left( \frac{c_s'^2}{\gamma} + \frac{\mathbf{v}_A^2}{2} \right) \mathbf{v} \right\rangle \\
 & - \left\langle \rho' \left( \frac{c_s^2}{\gamma} + \frac{\mathbf{v}_A'^2}{2} \right) \mathbf{v}' \cdot \frac{\nabla\rho}{\rho} + \rho \left( \frac{c_s'^2}{\gamma} + \frac{\mathbf{v}_A^2}{2} \right) \mathbf{v} \cdot \frac{\nabla'\rho'}{\rho'} \right\rangle
 \end{aligned} \tag{5.13}$$

On remarque que la partie constante de l'énergie interne dépendant de  $c_{s0}^2$  ne survit pas étant donné que cette énergie n'apparaît que sous forme incrémentale. C'est aussi le cas avec la reformulation (5.12) où l'énergie interne apparaît dérivée. En considérant  $\mathbf{v}_A = 0$ ,

on peut trouver une loi exacte pour le modèle HD compressible polytrope :

$$\begin{aligned} -4\varepsilon &= \nabla_\ell \cdot \left\langle (\delta\rho\mathbf{v}) \cdot \delta\mathbf{v} \delta\mathbf{v} + \frac{2}{\gamma(\gamma-1)} \delta\rho \delta c_s^2 \delta\mathbf{v} \right\rangle + \langle \rho\mathbf{v} \cdot \delta\mathbf{v} \nabla' \cdot \mathbf{v}' - \rho' \mathbf{v}' \cdot \delta\mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{v} \rangle \\ &\quad + \frac{2}{\gamma} \left\langle \rho \left( \frac{1}{\gamma-1} \delta c_s^2 - c_s'^2 \right) \nabla' \cdot \mathbf{v}' - \rho' \left( \frac{1}{\gamma-1} \delta c_s^2 + c_s^2 \right) \nabla \cdot \mathbf{v} \right\rangle \\ &\quad + \nabla_\ell \cdot \left\langle (\rho + \rho') \frac{c_s^2}{\gamma} \mathbf{v}' - (\rho + \rho') \frac{c_s'^2}{\gamma} \mathbf{v} \right\rangle - \left\langle \rho' \frac{c_s^2}{\gamma} \mathbf{v}' \cdot \frac{\nabla\rho}{\rho} + \rho \frac{c_s'^2}{\gamma} \mathbf{v} \cdot \frac{\nabla'\rho'}{\rho'} \right\rangle \end{aligned} \quad (5.14)$$

On n'y reconnaît pas la loi proposée par BANERJEE et GALTIER 2014 car ces derniers considèrent comme fonction de corrélation pour l'énergie interne :  $\left\langle \frac{\rho c_s c_s'}{\gamma(\gamma-1)} \right\rangle$ . Passer de  $\left\langle \frac{\rho c_s'^2}{\gamma(\gamma-1)} \right\rangle$  à  $\left\langle \frac{\rho c_s c_s'}{\gamma(\gamma-1)} \right\rangle$  n'a pas été obtenu, dans les essais effectués, on finissait toujours par supprimer la contribution de l'une et la remplacer par celle de l'autre. L'étude de la convergence de ces différentes formes de fonction de corrélation dans des simulations n'a pas été traitée dans ce travail.

Dans le cas de la fermeture isentrope-isotherme, on peut aussi obtenir un résultat rapidement à partir de (5.11) et après quelques manipulations et introduction d'autres notations, il est possible de retrouver la loi proposée par ANDRÉS et SAHRAOUI 2017 comme le montre SIMON et SAHRAOUI 2021.

## 5.2 Reformulation de la loi K41 générale dépendant d'une pression isotrope

Dans le Chapitre 7, nous dériverons une loi exacte de type K41 pour un modèle où l'isotropie de pression sera relaxée. Y imposer, après obtention, l'isotropie de pression, nous apporte la formulation suivante pour la loi générale (5.11) :

$$\begin{aligned} -4\varepsilon &= \nabla_\ell \cdot \langle (\delta(\rho\mathbf{v}) \cdot \delta\mathbf{v} + \delta(\rho\mathbf{v}_A) \cdot \delta\mathbf{v}_A) \delta\mathbf{v} - (\delta(\rho\mathbf{v}_A) \cdot \delta\mathbf{v} + \delta(\rho\mathbf{v}) \cdot \delta\mathbf{v}_A) \delta\mathbf{v}_A \rangle \\ &\quad + \nabla_\ell \cdot \left\langle \delta\rho \left( 2\delta u - \delta \left( \frac{p_*}{\rho} \right) \right) \delta\mathbf{v} \right\rangle \\ &\quad + \left\langle \left( \rho\mathbf{v} \cdot \delta\mathbf{v} + \frac{1}{2} \rho\mathbf{v}_A \cdot \delta\mathbf{v}_A - \frac{1}{2} \mathbf{v}_A \cdot \delta(\rho\mathbf{v}_A) + 2\rho \left( \delta u - \delta \left( \frac{p}{\rho} \right) \right) \right) \nabla' \cdot \mathbf{v}' \right\rangle \\ &\quad - \left\langle \left( \rho' \mathbf{v}' \cdot \delta\mathbf{v} + \frac{1}{2} \rho' \mathbf{v}'_A \cdot \delta\mathbf{v}_A - \frac{1}{2} \mathbf{v}'_A \cdot \delta(\rho\mathbf{v}_A) + 2\rho' \left( \delta u - \delta \left( \frac{p}{\rho} \right) \right) \right) \nabla \cdot \mathbf{v} \right\rangle \\ &\quad + \left\langle (2\rho' \mathbf{v}' \cdot \delta\mathbf{v}_A + \delta(\rho\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}'_A - \rho' \mathbf{v}'_A \cdot \delta\mathbf{v}) \nabla \cdot \mathbf{v}_A \right\rangle \\ &\quad - \left\langle (2\rho \mathbf{v} \cdot \delta\mathbf{v}_A + \delta(\rho\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}_A - \rho \mathbf{v}_A \cdot \delta\mathbf{v}) \nabla' \cdot \mathbf{v}'_A \right\rangle \\ &\quad + \left\langle \left( \frac{p_*}{\rho} \delta\rho - \rho \delta \left( \frac{p_*}{\rho} \right) \right) \mathbf{v} \cdot \frac{\nabla'\rho'}{\rho'} - \left( \frac{p'_*}{\rho'} \delta\rho - \rho' \delta \left( \frac{p_*}{\rho} \right) \right) \mathbf{v}' \cdot \frac{\nabla\rho}{\rho} \right\rangle \end{aligned} \quad (5.15)$$

Cette formulation est plus élégante que la précédente, car les termes flux apparaissent tous sous la forme de fonctions de structure grâce à l'introduction de  $\left\langle \delta\rho \delta \left( \frac{p_*}{\rho} \right) \delta\mathbf{v} \right\rangle$  et les termes sources s'écrivent tous sous une forme généralisée du type  $\langle X \delta Y \nabla' Z \rangle$  ou  $\langle X' \delta Y \nabla Z \rangle$  avec l'opération entre  $\nabla$  et  $Z$  pouvant être une divergence si  $Z$  est une quantité vectorielle (ex :  $\mathbf{v}$ ) ou un gradient ( $\frac{\nabla\rho}{\rho} = \nabla(\ln \rho)$ ). Cette forme rend évident qu'en  $\ell = 0$ ,  $\varepsilon = 0$ . Le passage d'une forme à l'autre s'effectue en remarquant que les contributions de

pression (notée  $\varepsilon_p$ ) et de pression magnétique (notée  $\varepsilon_{pm}$ ) peuvent s'écrire :

$$\begin{aligned} -4\varepsilon_p &= \nabla_\ell \cdot \left\langle \left(1 + \frac{\rho'}{\rho}\right) p \mathbf{v}' - \left(1 + \frac{\rho}{\rho'}\right) p' \mathbf{v} \right\rangle - 2 \left\langle \rho \frac{p'}{\rho'} \nabla \cdot \mathbf{v}' + \rho' \frac{p}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{v} \right\rangle \\ &= -\nabla_\ell \cdot \left\langle \delta \rho \delta \frac{p}{\rho} \delta \mathbf{v} \right\rangle + \left\langle 2 \rho' \delta \left(\frac{p}{\rho}\right) \nabla \cdot \mathbf{v} - 2 \rho \delta \left(\frac{p}{\rho}\right) \nabla' \cdot \mathbf{v}' - \rho \frac{p'}{\rho'} \mathbf{v} \cdot \frac{\nabla' \rho'}{\rho'} - \rho' \frac{p}{\rho} \mathbf{v}' \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} \right\rangle \\ &\quad + \left\langle \left(\delta \rho \frac{p_*}{\rho} - \rho \delta \left(\frac{p}{\rho}\right)\right) \mathbf{v} \cdot \frac{\nabla' \rho'}{\rho'} - \left(\delta \rho \frac{p'}{\rho'} - \rho' \delta \left(\frac{p_*}{\rho}\right)\right) \mathbf{v}' \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} \right\rangle \end{aligned} \quad (5.16)$$

$$\begin{aligned} -4\varepsilon_{pm} &= \nabla_\ell \cdot \left\langle \left(1 + \frac{\rho'}{\rho}\right) p_m \mathbf{v}' - \left(1 + \frac{\rho}{\rho'}\right) p'_m \mathbf{v} \right\rangle - \left\langle \rho \frac{p'_m}{\rho'} \mathbf{v} \cdot \frac{\nabla' \rho'}{\rho'} + \rho' \frac{p_m}{\rho} \mathbf{v}' \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} \right\rangle \\ &\quad + \left\langle \left(\rho \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{v}_A - \frac{1}{2} (\rho' + \rho) \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A\right) \nabla' \cdot \mathbf{v}' - \left(\rho' \mathbf{v}'_A \cdot \delta \mathbf{v}_A + \frac{1}{2} (\rho' + \rho) \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A\right) \nabla \cdot \mathbf{v} \right\rangle \\ &= -\nabla_\ell \cdot \left\langle \delta \rho \delta \frac{p_m}{\rho} \delta \mathbf{v} \right\rangle + \left\langle \left(\delta \rho \frac{p_m}{\rho} - \rho \delta \left(\frac{p_m}{\rho}\right)\right) \mathbf{v} \cdot \frac{\nabla' \rho'}{\rho'} - \left(\delta \rho \frac{p'_m}{\rho'} - \rho' \delta \left(\frac{p_m}{\rho}\right)\right) \mathbf{v}' \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} \right\rangle \\ &\quad + \frac{1}{2} \left\langle (\rho \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{v}_A - \mathbf{v}_A \cdot \delta (\rho \mathbf{v}_A)) \nabla' \cdot \mathbf{v}' - (\rho' \mathbf{v}'_A \cdot \delta \mathbf{v}_A - \mathbf{v}'_A \cdot \delta (\rho \mathbf{v}_A)) \nabla \cdot \mathbf{v} \right\rangle \end{aligned} \quad (5.17)$$

Dans le cas isentrope-polytrope avec  $\gamma \neq 1$ ,  $\delta(u - p/\rho) = \delta[(2 - \gamma) \frac{c_s^2}{\gamma(\gamma-1)}] = (2 - \gamma) \delta u$  et de même,  $\delta(2u - p/\rho) = (3 - \gamma) \delta u$ . Dans le cas isentrope-isotherme, c'est-à-dire avec  $\gamma = 1$  et  $c_s$  constant,  $\delta(u - p/\rho) = \delta u = (2 - \gamma) \delta u$  et  $\delta(2u - p/\rho) = (3 - \gamma) \delta u$ . De plus,  $p_*/\rho = (1 + \beta) \mathbf{v}_A^2 / 2$ . Ainsi, on peut déduire de (5.15), une formulation de la loi exacte isentrope-polytrope valable pour tout  $\gamma$ , incluant donc la fermeture isentrope-isotherme, et dépendant de  $u$ ,  $\gamma$  et  $\beta$  :

$$\begin{aligned} -4\varepsilon &= \nabla_\ell \cdot \left\langle (\delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{v} + \delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \delta \mathbf{v}_A) \delta \mathbf{v} - (\delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \delta \mathbf{v} + \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{v}_A) \delta \mathbf{v}_A \right\rangle \\ &\quad + \nabla_\ell \cdot \left\langle \delta \rho \delta \left( (3 - \gamma) u - \frac{\mathbf{v}_A^2}{2} \right) \delta \mathbf{v} \right\rangle \\ &\quad + \left\langle (\rho \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v} + \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{v}_A - \frac{1}{2} \mathbf{v}_A \cdot \delta(\rho \mathbf{v}_A) + 2(2 - \gamma) \rho \delta u) \nabla' \cdot \mathbf{v}' \right\rangle \\ &\quad - \left\langle (\rho' \mathbf{v}' \cdot \delta \mathbf{v} + \frac{1}{2} \rho' \mathbf{v}'_A \cdot \delta \mathbf{v}_A - \frac{1}{2} \mathbf{v}'_A \cdot \delta(\rho \mathbf{v}_A) + 2(2 - \gamma) \rho' \delta u) \nabla \cdot \mathbf{v} \right\rangle \\ &\quad + \left\langle (2 \rho' \mathbf{v}' \cdot \delta \mathbf{v}_A + \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}'_A - \rho' \mathbf{v}'_A \cdot \delta \mathbf{v}) \nabla \cdot \mathbf{v}_A \right\rangle \\ &\quad - \left\langle (2 \rho \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v}_A + \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}_A - \rho \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{v}) \nabla' \cdot \mathbf{v}'_A \right\rangle \\ &\quad + \left\langle \left( \frac{\mathbf{v}_A^2}{2} (1 + \beta) \delta \rho - \rho \delta \left( \frac{\mathbf{v}_A^2}{2} (1 + \beta) \right) \right) \mathbf{v} \cdot \frac{\nabla' \rho'}{\rho'} \right\rangle \\ &\quad - \left\langle \left( \frac{\mathbf{v}'_A^2}{2} (1 + \beta') \delta \rho - \rho' \delta \left( \frac{\mathbf{v}'_A^2}{2} (1 + \beta) \right) \right) \mathbf{v}' \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} \right\rangle \end{aligned} \quad (5.18)$$

La réécriture des termes de pression via les formules (5.16) et (5.17) ne dépend pas de l'hypothèse d'isentropie de la zone inertielle et sont applicables dans la loi KHM générale

(5.10) qui devient :

$$\begin{aligned}
 4\partial_t \mathcal{R} = & \nabla_{\boldsymbol{\ell}} \cdot \langle (\delta(\rho \boldsymbol{v}) \cdot \delta \boldsymbol{v} + \delta(\rho \boldsymbol{v}_A) \cdot \delta \boldsymbol{v}_A) \delta \boldsymbol{v} - (\delta(\rho \boldsymbol{v}_A) \cdot \delta \boldsymbol{v} + \delta(\rho \boldsymbol{v}) \cdot \delta \boldsymbol{v}_A) \delta \boldsymbol{v}_A \rangle \\
 & + \nabla_{\boldsymbol{\ell}} \cdot \left\langle \delta \rho \left( 2\delta u - \delta \left( \frac{p_*}{\rho} \right) \right) \delta \boldsymbol{v} \right\rangle \\
 & + \left\langle \left( \rho \boldsymbol{v} \cdot \delta \boldsymbol{v} + \frac{1}{2} \rho \boldsymbol{v}_A \cdot \delta \boldsymbol{v}_A - \frac{1}{2} \boldsymbol{v}_A \cdot \delta(\rho \boldsymbol{v}_A) + 2\rho \left( \delta u - \delta \left( \frac{p}{\rho} \right) \right) \right) \nabla' \cdot \boldsymbol{v}' \right\rangle \\
 & - \left\langle \left( \rho' \boldsymbol{v}' \cdot \delta \boldsymbol{v} + \frac{1}{2} \rho' \boldsymbol{v}'_A \cdot \delta \boldsymbol{v}_A - \frac{1}{2} \boldsymbol{v}'_A \cdot \delta(\rho \boldsymbol{v}_A) + 2\rho' \left( \delta u - \delta \left( \frac{p}{\rho} \right) \right) \right) \nabla \cdot \boldsymbol{v} \right\rangle \\
 & + \left\langle (2\rho' \boldsymbol{v}' \cdot \delta \boldsymbol{v}_A + \delta(\rho \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{v}'_A - \rho' \boldsymbol{v}'_A \cdot \delta \boldsymbol{v}) \nabla \cdot \boldsymbol{v}_A \right\rangle \\
 & - \left\langle (2\rho \boldsymbol{v} \cdot \delta \boldsymbol{v}_A + \delta(\rho \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{v}_A - \rho \boldsymbol{v}_A \cdot \delta \boldsymbol{v}) \nabla' \cdot \boldsymbol{v}'_A \right\rangle \\
 & + \left\langle \left( \frac{p_*}{\rho} \delta \rho - \rho \delta \left( \frac{p_*}{\rho} \right) \right) \boldsymbol{v} \cdot \frac{\nabla' \rho'}{\rho'} - \left( \frac{p'_*}{\rho'} \delta \rho - \rho' \delta \left( \frac{p_*}{\rho} \right) \right) \boldsymbol{v}' \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} \right\rangle \\
 & - 2 \left\langle \frac{\rho}{\rho'} \nabla' \cdot \boldsymbol{q}' + \frac{\rho'}{\rho} \nabla \cdot \boldsymbol{q} \right\rangle \\
 & + \left\langle (\rho' + \rho) (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{f}'_c + \boldsymbol{v}' \cdot \boldsymbol{f}_c + \boldsymbol{v}_A \cdot \boldsymbol{f}'_m + \boldsymbol{v}'_A \cdot \boldsymbol{f}_m) \right\rangle \\
 & + \left\langle (\rho' + \rho) (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{d}'_c + \boldsymbol{v}' \cdot \boldsymbol{d}_c + \boldsymbol{v}_A \cdot \boldsymbol{d}'_m + \boldsymbol{v}'_A \cdot \boldsymbol{d}_m) \right\rangle
 \end{aligned} \tag{5.19}$$

### 5.3 Application à d'autres fermetures et deuxième reformulation

L'approche présentée dans la section 5.1 pour répondre à l'objectif initial est empreinte d'une volonté de généralisation des résultats dans le but de permettre à de futures études de ne pas avoir à redémontrer de A à Z une loi exacte pour une nouvelle fermeture. Le résultat obtenu peut même être utilisé pour étudier d'autres situations comme celle proposée par ALUIE *et al.* 2012 et HELLINGER, PAPINI *et al.* 2021, où l'énergie cinétique/magnétique pourrait cascader indépendamment de l'énergie interne, sans transfert de pression. Comme discuté dans la section I.4.2, cela revient à supposer une zone inertielle isobare dans laquelle la description de cette cascade d'énergie via une loi exacte ne dépendrait d'aucune grandeur thermodynamique autre que la densité. Elle peut s'obtenir à partir de notre loi exacte générale (5.19) en supposant  $\delta u \rightarrow 0$  pour supprimer la contribution d'énergie interne et  $p \rightarrow 0$  pour supprimer celle de  $p$ . Ainsi :

$$\begin{aligned}
 -4\varepsilon = & \nabla_{\boldsymbol{\ell}} \cdot \left\langle \left( \delta(\rho \boldsymbol{v}) \cdot \delta \boldsymbol{v} + \delta(\rho \boldsymbol{v}_A) \cdot \delta \boldsymbol{v}_A - \delta \rho \delta \left( \frac{\boldsymbol{v}_A^2}{2} \right) \right) \delta \boldsymbol{v} - (\delta(\rho \boldsymbol{v}_A) \cdot \delta \boldsymbol{v} + \delta(\rho \boldsymbol{v}) \cdot \delta \boldsymbol{v}_A) \delta \boldsymbol{v}_A \right\rangle \\
 & + \left\langle \left( \rho \boldsymbol{v} \cdot \delta \boldsymbol{v} + \frac{1}{2} \rho \boldsymbol{v}_A \cdot \delta \boldsymbol{v}_A - \frac{1}{2} \boldsymbol{v}_A \cdot \delta(\rho \boldsymbol{v}_A) \right) \nabla' \cdot \boldsymbol{v}' \right\rangle \\
 & - \left\langle \left( \rho' \boldsymbol{v}' \cdot \delta \boldsymbol{v} + \frac{1}{2} \rho' \boldsymbol{v}'_A \cdot \delta \boldsymbol{v}_A - \frac{1}{2} \boldsymbol{v}'_A \cdot \delta(\rho \boldsymbol{v}_A) \right) \nabla \cdot \boldsymbol{v} \right\rangle \\
 & + \left\langle (2\rho' \boldsymbol{v}' \cdot \delta \boldsymbol{v}_A + \delta(\rho \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{v}'_A - \rho' \boldsymbol{v}'_A \cdot \delta \boldsymbol{v}) \nabla \cdot \boldsymbol{v}_A \right\rangle \\
 & - \left\langle (2\rho \boldsymbol{v} \cdot \delta \boldsymbol{v}_A + \delta(\rho \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{v}_A - \rho \boldsymbol{v}_A \cdot \delta \boldsymbol{v}) \nabla' \cdot \boldsymbol{v}'_A \right\rangle \\
 & + \left\langle \left( \frac{\boldsymbol{v}_A^2}{2} \delta \rho - \rho \delta \left( \frac{\boldsymbol{v}_A^2}{2} \right) \right) \boldsymbol{v} \cdot \frac{\nabla' \rho'}{\rho'} - \left( \frac{\boldsymbol{v}'_A^2}{2} \delta \rho - \rho' \delta \left( \frac{\boldsymbol{v}_A^2}{2} \right) \right) \boldsymbol{v}' \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} \right\rangle
 \end{aligned} \tag{5.20}$$

On rappelle que l'utilisation de ce résultat dans le but d'estimer le taux de chauffage turbulent doit à priori être complété par une estimation du taux de cascade d'énergie interne.

L'hypothèse principale de notre approche étant une zone inertielle isentrope, une contribution y a été omise : la contribution du flux de chaleur. Cette contribution est une fenêtre s'ouvrant sur l'entropie à travers le terme de flux de chaleur présent dans l'équation d'énergie interne, comme on l'a vu dans la section I.4.2. De plus, EYINK et DRIVAS 2018 a démontré via la théorie du «coarse-graining»<sup>1</sup> l'existence d'une cascade d'entropie. Est-ce que cette cascade d'entropie aurait un impact sur la cascade d'énergie ? Est-ce que le flux de chaleur n'agit bien qu'à petite échelle ? Ces questions seront posées dans la Partie III mais, ici, on peut déjà répondre à la question : est-il possible d'obtenir analytiquement un terme de type flux dépendant du flux de chaleur dans la description générale (KHM) de la cascade turbulente ? La réponse est oui, et elle va même nous permettre de retravailler les termes de pression.

La contribution du flux de chaleur, gardée brute dans la relation KHM générale (5.10) et que l'on va noter  $\varepsilon_q$ , peut s'écrire :

$$\begin{aligned} -4\varepsilon_q &= -2 \left\langle \frac{\rho'}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{q} + \frac{\rho}{\rho'} \nabla' \cdot \mathbf{q}' \right\rangle \\ &= \nabla_\ell \cdot \langle 2\delta\rho\delta\mathbf{q}\delta(1/\rho) \rangle + \left\langle 2\rho\delta\mathbf{q} \cdot \nabla' \left( \frac{1}{\rho'} \right) - 2\rho'\delta\mathbf{q} \cdot \nabla \left( \frac{1}{\rho} \right) \right\rangle \end{aligned}$$

De plus, si l'on compare les termes flux écrits avec la formulation précédente ((5.15)) et auxquels on ajoute celui de flux de chaleur (à gauche) avec les termes flux de l'équation de densité d'énergie totale (4.8) (à droite) :

$$\begin{array}{lcl} \nabla_\ell \cdot \langle (\delta(\rho\mathbf{v}) \cdot \delta\mathbf{v} + \delta(\rho\mathbf{v}_A) \cdot \delta\mathbf{v}_A + 2\delta u) \delta\mathbf{v} \rangle & \Big| & \frac{1}{2} \nabla \cdot ((\rho\mathbf{v}^2 + \rho\mathbf{v}_A^2 + 2\rho u) \mathbf{v}) \\ -\nabla_\ell \cdot \langle (\delta(\rho\mathbf{v}_A) \cdot \delta\mathbf{v} + \delta(\rho\mathbf{v}) \cdot \delta\mathbf{v}_A) \delta\mathbf{v}_A \rangle & \Big| & -\nabla \cdot (\rho\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A) \\ -\nabla_\ell \cdot \langle \delta\rho\delta(p_*/\rho) \delta\mathbf{v} \rangle & \Big| & \nabla \cdot (p_*\mathbf{v}) \\ \nabla_\ell \cdot \langle 2\delta\rho\delta\mathbf{q}\delta(1/\rho) \rangle & \Big| & \nabla \cdot (\mathbf{q}) \end{array}$$

on peut se demander s'il n'existerait pas une formulation de la contribution de pression totale dans la loi exacte qui aurait un signe correspondant à celui présent dans l'équation de densité d'énergie totale. En effet, en s'inspirant de la forme de la fonction de structure dépendant du flux de chaleur, on remarque que la contribution de la pression totale peut s'écrire :

$$\begin{aligned} -4\varepsilon_{p*} &= -\nabla_\ell \cdot \left\langle \delta\rho\delta\left(\frac{p_*}{\rho}\right) \delta\mathbf{v} \right\rangle + \left\langle \left( \delta\rho\frac{p_*}{\rho} - \rho\delta\left(\frac{p_*}{\rho}\right) \right) \mathbf{v} \cdot \frac{\nabla'\rho'}{\rho'} - \left( \delta\rho\frac{p'_*}{\rho'} - \rho'\delta\left(\frac{p_*}{\rho}\right) \right) \mathbf{v}' \cdot \frac{\nabla\rho}{\rho} \right\rangle \\ &= \nabla_\ell \cdot \left\langle \delta p_* \delta\left(\frac{1}{\rho}\right) \delta(\rho\mathbf{v}) \right\rangle + \left\langle \delta(p_*) \rho\mathbf{v} \cdot \nabla' \left( \frac{1}{\rho'} \right) - \delta(p_*) \rho' \mathbf{v}' \cdot \nabla \left( \frac{1}{\rho} \right) \right\rangle \end{aligned}$$

---

1. Cette autre approche de l'étude de la cascade turbulente implique schématiquement un filtrage de type passe-bas des échelles et permet une représentation locale dans l'espace et en échelle.

Le nombre de termes est ainsi réduit de 5 à 3 et la loi KHM générale s'écrit :

$$\begin{aligned}
 4\partial_t \mathcal{R} = & \nabla_\ell \cdot \langle (\delta(\rho\mathbf{v}) \cdot \delta\mathbf{v} + \delta(\rho\mathbf{v}_A) \cdot \delta\mathbf{v}_A) \delta\mathbf{v} - (\delta(\rho\mathbf{v}_A) \cdot \delta\mathbf{v} + \delta(\rho\mathbf{v}) \cdot \delta\mathbf{v}_A) \delta\mathbf{v}_A \rangle \\
 & + \nabla_\ell \cdot \langle 2\delta\rho\delta u\delta\mathbf{v} + \delta p_*\delta(1/\rho)\delta(\rho\mathbf{v}) + 2\delta\rho\delta\mathbf{q}\delta(1/\rho) \rangle \\
 & + \left\langle \rho\mathbf{v} \cdot \delta\mathbf{v} + \frac{1}{2}\rho\mathbf{v}_A \cdot \delta\mathbf{v}_A - \frac{1}{2}\mathbf{v}_A \cdot \delta(\rho\mathbf{v}_A) + 2\rho \left( \delta u - \delta \left( \frac{p}{\rho} \right) \right) \right\rangle \nabla' \cdot \mathbf{v}' \\
 & - \left\langle \rho'\mathbf{v}' \cdot \delta\mathbf{v} + \frac{1}{2}\rho'\mathbf{v}'_A \cdot \delta\mathbf{v}_A - \frac{1}{2}\mathbf{v}'_A \cdot \delta(\rho\mathbf{v}_A) + 2\rho' \left( \delta u - \delta \left( \frac{p}{\rho} \right) \right) \right\rangle \nabla \cdot \mathbf{v} \\
 & + \left\langle (2\rho'\mathbf{v}' \cdot \delta\mathbf{v}_A + \delta(\rho\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}'_A - \rho'\mathbf{v}'_A \cdot \delta\mathbf{v}) \nabla \cdot \mathbf{v}_A \right\rangle \\
 & - \left\langle (2\rho\mathbf{v} \cdot \delta\mathbf{v}_A + \delta(\rho\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}_A - \rho\mathbf{v}_A \cdot \delta\mathbf{v}) \nabla' \cdot \mathbf{v}'_A \right\rangle \\
 & + \left\langle (\rho\mathbf{v}\delta(p_*) + 2\rho\delta\mathbf{q}) \cdot \nabla' \left( \frac{1}{\rho'} \right) - (\rho'\mathbf{v}'\delta(p_*) + 2\rho'\delta\mathbf{q}) \cdot \nabla \left( \frac{1}{\rho} \right) \right\rangle \\
 & + \left\langle (\rho' + \rho) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{f}'_c + \mathbf{v}' \cdot \mathbf{f}_c + \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{f}'_m + \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{f}_m) \right\rangle \\
 & + \left\langle (\rho' + \rho) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{d}'_c + \mathbf{v}' \cdot \mathbf{d}_c + \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{d}'_m + \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{d}_m) \right\rangle
 \end{aligned} \tag{5.21}$$

L'équation (5.21) est la formulation finale de la loi KHM compressible générale décrivant la cascade d'énergie totale à l'aide de la fonction de corrélation :

$$\mathcal{R} = \left\langle \frac{1}{4}(\rho' + \rho) \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{4}(\rho' + \rho) \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A + \frac{1}{2}(\rho'u + \rho u') \right\rangle.$$

Cette formulation rappelle l'équation d'énergie totale générale (4.8) et, tout comme elle, dépend de  $p$ ,  $u$  et  $\mathbf{q}$  restant à définir à l'aide d'une équation de fermeture et/ou à annuler en fonction du type de zone inertielle que l'on veut considérer. Son application dans des données ou des simulations n'impose qu'un postulat : que les équations de continuité (5.1), vitesse (5.2), induction (5.3) et énergie interne générale (5.4)<sup>2</sup> soient valides. En fonction du cas d'application, les autres formulations des contributions de pression  $\varepsilon_p$  (5.16), pression magnétique  $\varepsilon_{pm}$  (5.17), pression totale  $\varepsilon_{p*}$  (5.21) et flux de chaleur  $\varepsilon_q$  (5.21) ou celle en appliquant le premier principe thermodynamique avec l'hypothèse d'isentropie (5.12) pourront tout à fait être préférées.

Par exemple, si l'on veut utiliser l'expression du flux de chaleur en fonction de  $\sigma$  pour obtenir une loi exacte de type K41 dans le cadre d'une zone inertielle de type encore indéfinie (isobare, isentrope ou autre) mais pour un modèle fermé avec la fermeture polytrope, il semble plus à propos d'utiliser la formulation de  $\varepsilon_q$  dépendant de  $\nabla \cdot \mathbf{q}$  qui devient, puisque  $\nabla \cdot \mathbf{q} = \sigma\gamma p\nabla \cdot \mathbf{v}$ , :  $-4\varepsilon_q = -2\sigma\gamma \left\langle \rho' \frac{p}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{v} + \rho \frac{p'}{\rho'} \nabla' \cdot \mathbf{v}' \right\rangle$ . Ainsi en posant

---

2. Hors cas isobare.

$p_* = \rho \mathbf{v}'_A^2 (\beta + 1) / 2$ ,  $c_s^2 / \gamma = \mathbf{v}'_A^2 \beta / 2$  et  $\tilde{u} = \frac{1}{\gamma - 1}$  si  $\gamma \neq 1$  ou  $\ln(\rho/\rho_0)$  si  $\gamma = 1$ , on obtient :

$$\begin{aligned}
 4\partial_t \mathcal{R} = & \nabla_{\boldsymbol{\ell}} \cdot \langle (\delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{v} + \delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \delta \mathbf{v}_A) \delta \mathbf{v} - (\delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \delta \mathbf{v} + \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{v}_A) \delta \mathbf{v}_A \rangle \\
 & + \nabla_{\boldsymbol{\ell}} \cdot \langle \delta \rho \delta(\mathbf{v}'_A^2 \beta (\sigma + 1) \tilde{u}) \delta \mathbf{v} + \delta(\rho \mathbf{v}'_A^2 (\beta + 1) / 2) \delta(1/\rho) \delta(\rho \mathbf{v}) \rangle \\
 & + \langle (\rho \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v} + \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{v}_A - \frac{1}{2} \mathbf{v}_A \cdot \delta(\rho \mathbf{v}_A)) \nabla' \cdot \mathbf{v}' \rangle \\
 & + \langle (\rho \delta(\mathbf{v}'_A^2 \beta ((\sigma \gamma + 1) \tilde{u} - 1)) - \sigma \gamma \rho \mathbf{v}'_A^2 \beta') \nabla' \cdot \mathbf{v}' \rangle \\
 & - \langle (\rho' \mathbf{v}' \cdot \delta \mathbf{v} + \frac{1}{2} \rho' \mathbf{v}'_A \cdot \delta \mathbf{v}_A - \frac{1}{2} \mathbf{v}'_A \cdot \delta(\rho \mathbf{v}_A)) \nabla \cdot \mathbf{v} \rangle \\
 & - \langle (\rho' \delta(\mathbf{v}'_A^2 \beta ((\sigma \gamma + 1) \tilde{u} - 1)) + \sigma \gamma \rho' \mathbf{v}_A^2 \beta) \nabla \cdot \mathbf{v} \rangle \\
 & + \langle (2 \rho' \mathbf{v}' \cdot \delta \mathbf{v}_A + \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}'_A - \rho' \mathbf{v}'_A \cdot \delta \mathbf{v}) \nabla \cdot \mathbf{v}_A \rangle \\
 & - \langle (2 \rho \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v}_A + \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}_A - \rho \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{v}) \nabla' \cdot \mathbf{v}'_A \rangle \\
 & + \langle (\rho \mathbf{v} \delta(\rho \mathbf{v}'_A^2 (\beta + 1) / 2)) \cdot \nabla' \left( \frac{1}{\rho'} \right) - (\rho' \mathbf{v}' \delta(\rho \mathbf{v}'_A^2 (\beta + 1) / 2)) \cdot \nabla \left( \frac{1}{\rho} \right) \rangle \\
 & + \langle (\rho' + \rho) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{f}'_c + \mathbf{v}' \cdot \mathbf{f}_c + \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{f}'_m + \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{f}_m) \rangle \\
 & + \langle (\rho' + \rho) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{d}'_c + \mathbf{v}' \cdot \mathbf{d}_c + \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{d}'_m + \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{d}_m) \rangle
 \end{aligned} \tag{5.22}$$

Dans le cadre d'une zone inertielle isentrope,  $\sigma = 0$ , et on y retrouve la loi exacte (5.18) écrite avec la dernière formulation des termes de pression totale. Si le système est fermé de manière isotherme et qu'aucune hypothèse thermodynamique ne contraint la zone inertielle, alors  $\gamma = 1$ ,  $\sigma = -1$ ,  $c_s^2$  constant et :

$$\begin{aligned}
 4\partial_t \mathcal{R} = & \nabla_{\boldsymbol{\ell}} \cdot \langle (\delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{v} + \delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \delta \mathbf{v}_A) \delta \mathbf{v} - (\delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \delta \mathbf{v} + \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{v}_A) \delta \mathbf{v}_A \rangle \\
 & + \nabla_{\boldsymbol{\ell}} \cdot \langle \delta(\rho \mathbf{v}'_A^2 / 2) \delta(1/\rho) \delta(\rho \mathbf{v}) \rangle + c_s^2 \langle \rho \nabla' \cdot \mathbf{v}' + \rho' \nabla \cdot \mathbf{v} \rangle \\
 & + \langle \left( \rho \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v} + \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{v}_A - \frac{1}{2} \mathbf{v}_A \cdot \delta(\rho \mathbf{v}_A) \right) \nabla' \cdot \mathbf{v}' \rangle \\
 & - \langle \left( \rho' \mathbf{v}' \cdot \delta \mathbf{v} + \frac{1}{2} \rho' \mathbf{v}'_A \cdot \delta \mathbf{v}_A - \frac{1}{2} \mathbf{v}'_A \cdot \delta(\rho \mathbf{v}_A) \right) \nabla \cdot \mathbf{v} \rangle \\
 & + \langle (2 \rho' \mathbf{v}' \cdot \delta \mathbf{v}_A + \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}'_A - \rho' \mathbf{v}'_A \cdot \delta \mathbf{v}) \nabla \cdot \mathbf{v}_A \rangle \\
 & - \langle (2 \rho \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v}_A + \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}_A - \rho \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{v}) \nabla' \cdot \mathbf{v}'_A \rangle \\
 & + \langle (\rho \mathbf{v} \delta(\rho \mathbf{v}'_A^2 / 2)) \cdot \nabla' \left( \frac{1}{\rho'} \right) - (\rho' \mathbf{v}' \delta(\rho \mathbf{v}'_A^2 / 2)) \cdot \nabla \left( \frac{1}{\rho} \right) \rangle \\
 & + \langle (\rho' + \rho) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{f}'_c + \mathbf{v}' \cdot \mathbf{f}_c + \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{f}'_m + \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{f}_m) \rangle \\
 & + \langle (\rho' + \rho) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{d}'_c + \mathbf{v}' \cdot \mathbf{d}_c + \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{d}'_m + \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{d}_m) \rangle
 \end{aligned} \tag{5.23}$$

La contribution thermodynamique est alors très simple :  $c_s^2 \langle \rho \nabla' \cdot \mathbf{v}' + \rho' \nabla \cdot \mathbf{v} \rangle$ . Sans elle, on obtiendrait la loi KHM décrivant la cascade isobare d'énergie cinétique-magnétique.

La loi exacte KHM (5.22) décrit donc le transfert énergétique à travers les échelles MHD, qu'il existe ou non une zone inertielle, et cela dans tout modèle fermé avec une fermeture thermodynamique polytropique. Elle prend en compte les canaux de dissipation et injection d'énergie ainsi que la contribution du flux de chaleur.

Cette étude analytique analysant la prise en compte des fermetures thermodynamiques dans l'extension compressible de la théorie des lois exactes nous apporte donc un cadre général applicable à toute étude de cascade turbulente dans des modèles MHD avec pression isotrope. On verra dans le Chapitre 9 qu'en ajoutant quelques termes indépendants de la pression, ces résultats seront étendus simplement à la MHD-Hall.

## 5.4 Synthèse de l'étude analytique de turbulence compressible avec pression isotrope

**Equations utilisées pour calculer la loi générale (modèle MHD idéal) :**

$$\partial_t \rho = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \quad (5.24)$$

$$\partial_t \mathbf{v} = -\nabla \cdot (\mathbf{v} \mathbf{v}) + \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A) - \frac{1}{\rho} \nabla p_* + \mathbf{f}_c + \mathbf{d}_c \quad (5.25)$$

$$\partial_t \mathbf{v}_A = \nabla \cdot (\mathbf{v}_A \mathbf{v} - \mathbf{v} \mathbf{v}_A) - \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{v}_A + \frac{\mathbf{v}_A}{2} \nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{f}_m + \mathbf{d}_m \quad (5.26)$$

$$\partial_t u = -\nabla \cdot (u \mathbf{v}) + u \nabla \cdot \mathbf{v} - \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{q} - \frac{p}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (5.27)$$

**Fonctions de corrélation d'énergie totale considérées (autres possibilités évoquées section 5.1) :**  $\mathcal{R} = \frac{1}{2} \left\langle \frac{1}{2} (\rho' + \rho) \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{2} (\rho' + \rho) \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A + \rho' u + \rho u' \right\rangle$  de fonction incrémentale associée  $\mathcal{S} = \frac{1}{2} \langle \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{v} + \delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \delta \mathbf{v}_A + 2\delta \rho \delta u \rangle$

**Formulations (f1, f2 et f3) des lois exactes générales KHM et K41 et applications aux fermetures isentrope-polytrope et polytrope :**

- KHM f1 : (5.10)
- K41 f1 : (5.11)
- K41 isentrope-polytrope f1 : (5.13) [Résultat répondant à l'objectif initial]
- KHM f2 : (5.19)
- K41 f2 : (5.15)
- K41 isentrope-polytrope f2 : (5.18)
- KHM f3 : (5.21)
- KHM polytrope F3 : (5.22)

**Réécriture des contributions de pression et flux de chaleur :**

- Prise en compte le premier principe de la thermodynamique et de l'hypothèse d'isentropie dans f1 : (5.12)
- Contributions de pression  $\varepsilon_p$  (f1 vers f2) : (5.16)
- Contributions de pression magnétique  $\varepsilon_{pm}$  (f1 vers f2) : (5.17)
- Contributions de pression totale  $\varepsilon_{p*}$  (f2 vers f3) : (5.21)
- Contributions du flux de chaleur  $\varepsilon_q$  (f1 et f2 vers f3) : (5.21)

Des applications aux autres fermetures définies dans le Chapitre 4 sont données au fil des sections 5.1, 5.2 et 5.3. Les résultats écrits avec la F1 (section 5.1) sont publiés dans SIMON et SAHRAOUI 2021.

# PARTIE I : CHAPITRE 6

## L ETUDES DE CAS DANS LES DONNÉES IN-SITU

### Sommaire

---

6.1	Données et conditions d'application d'une loi exacte dans des observations issues d'une seule sonde . . . . .	55
6.2	Comparaison des lois incompressible et compressible-isentrope-polytrope avec $\gamma = 1$ (isotherme) et $\gamma = 5/3$ (adiabatique) . . . . .	59
6.3	Application statistique préliminaire dans des données localisées dans la magnétogaine terrestre . . . . .	62
6.4	Synthèse de l'étude de cas observationnels issus des données de PSP . . . . .	65

---

Ce chapitre résume le travail de comparaison de la loi incompressible PP98, et de deux cas de la loi compressible isentrope-polytrope dans deux jeux de données issus de PSP. Dans le premier cas, elle est fermée tel que  $\gamma = 1$  (isotherme) et dans le second, tel que  $\gamma = 5/3$  (adiabatique). Ce travail, effectué pour comprendre l'apport de la loi polytrope dans l'estimation du taux de chauffage dans le vent solaire, a été publié dans [SIMON et SAHRAOUI 2021] puis étendue statistiquement dans le cadre d'une étude préliminaire dans des données relevées dans la magnétogaine terrestre par la mission MMS. La formulation des lois compressibles utilisée est la formulation f1 donnée par la loi exacte générale (5.11).

### 6.1 Données et conditions d'application d'une loi exacte dans des observations issues d'une seule sonde

Le 12 août 2018, PSP commence son voyage à bord d'une fusée Delta IV-Heavy. Cette mission lancée par la National Aeronautics and Space Administration (NASA) devra s'approcher au maximum du Soleil afin de permettre la compréhension de la dynamique énergétique insufflée par le Soleil dans son environnement, du chauffage et accélération de la couronne solaire et du vent solaire à ceux des particules énergétiques [FOX *et al.* 2016]. Un tel objectif résonne avec l'application des lois exactes dans les données afin d'estimer le taux de chauffage turbulent [PARASHAR et MATTHAEUS 2022]. De plus, comme indiqué sur la FIGURE 4.1, le  $\gamma$  estimé près du Soleil est plus proche, voire supérieur, de 5/3 que de 1. Relaxer l'isothermie dans la loi exacte et y regarder une loi polytrope y semble donc plus réaliste.

Pour estimer le taux de chauffage avec une loi exacte MHD, nous avons besoin du champ magnétique et des moments mono-fluides de la fonction de distribution. Ces données sont relevées par deux expériences de PSP (voir la FIGURE 6.1) : Fields Experiments (FIELDS) et Solar Wind Electrons Alpha and Protons Investigation (SWEAP).

FIELDS [BALE, GOETZ *et al.* 2016] mesure le champ magnétique grâce à deux magnétomètres à saturation («fluxgate» en anglais), MAGs, mesurant la composante continue

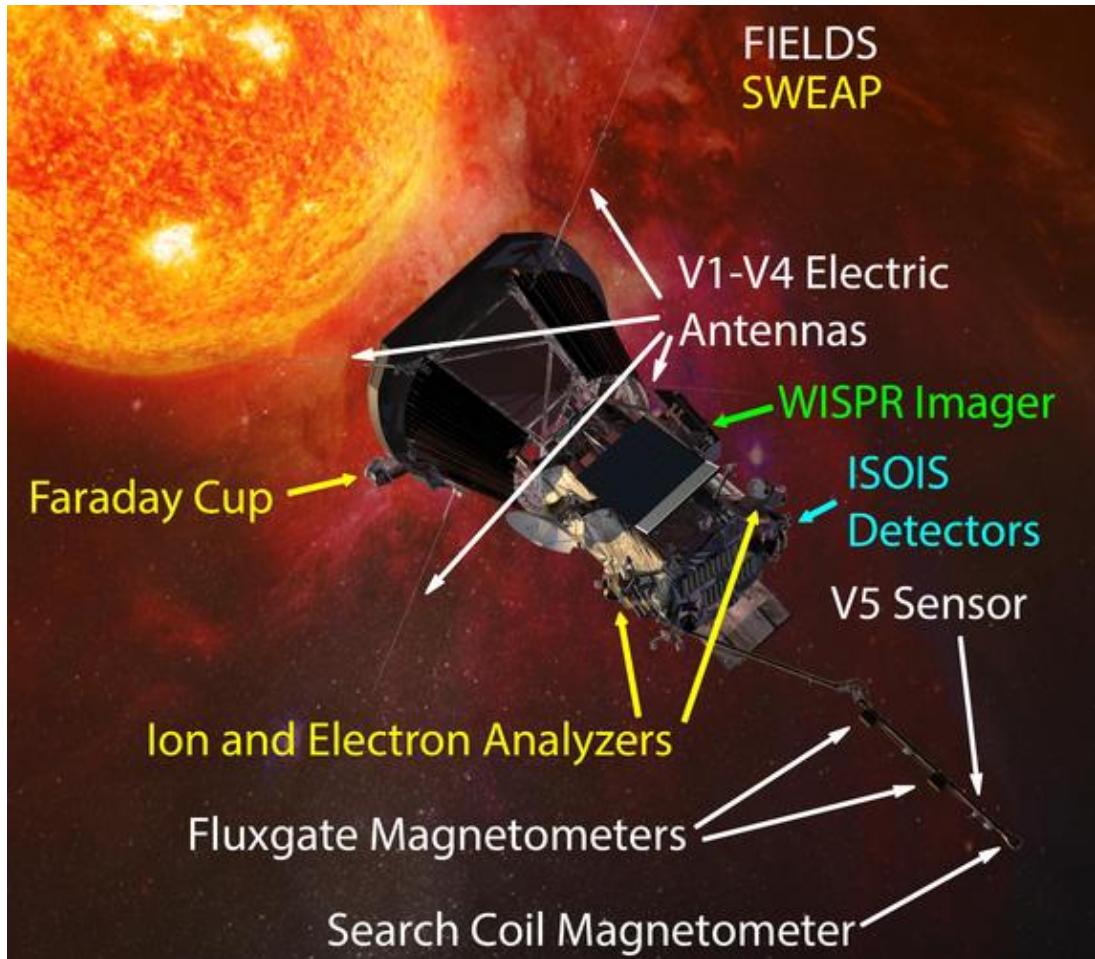


FIGURE 6.1 – Localisation des instruments de mesure sur PSP. Les instruments de l’expérience FIELDS sont notés en blanc, et ceux de SWEAP en jaune. Les données utilisées ici proviennent des Fluxgate Magnetometers (MAGs) situés sur le bras et de la Faraday Cup (SPC) située juste à côté du bouclier et orientée vers le Soleil. Crédits : la page web de FIELDS ([fields.ssl.berkeley.edu](http://fields.ssl.berkeley.edu)) et Johns Hopkins University Applied Physics Laboratory.

(DC) et les fluctuations à basse fréquence du champ (MHD-ionique) et un de type fluxmètre («search-coil»), SCM, donnant accès aux hautes fréquences (ionique-électronique). SWEAP [KASPER *et al.* 2016] est quant à elle composée d’une coupe de Faraday («Faraday Cup»), SPC, mesurant les flux globaux ionique et électronique, et d’analyseurs électrostatiques d’ions et d’électrons, SPAN, permettant de séparer leur état de charge. Notre étude concernant plutôt les échelles MHD, les données utilisées proviennent des instruments MAGs et SPC.

Les données publiquement disponibles au moment où cette étude a été menée (fin 2020) provenaient des trois-quatre premières orbites (FIGURE 6.2). Nous avons choisi d’analyser les données relevées lorsque PSP était proche de son premier périhélie atteint le 6 novembre 2018 à 03h27 UTC vers 35.7 Rs. Autour de cette position, les données sont relevées dans le vent solaire près du Soleil. Peu de lots de données comprenaient les relevés provenant de SPC et ceux provenant de MAGs avec assez peu de trous pour pouvoir les traiter conjointement dans cette étude. Finalement, le jeu choisi a été relevé le 4 novembre entre 00h00 et 02h30. Les données provenant de MAGs y sont résolues à

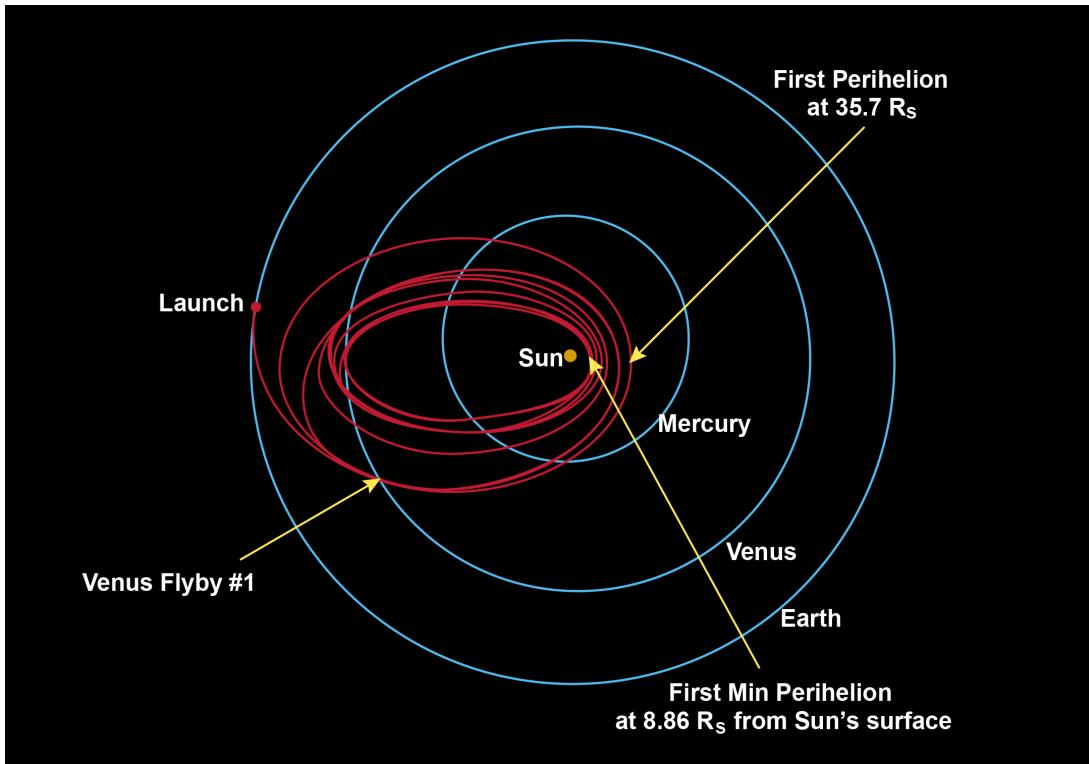


FIGURE 6.2 – Orbites de PSP depuis la date de lancement, le 12 août 2018 à 7h31 UTC. Le premier périhélie à  $35.7 R_s$  a été atteint le 6 novembre 2018 à 03h27 UTC. Crédits : la page web de PSP (<http://parkersolarprobe.jhuapl.edu>) et Johns Hopkins University Applied Physics Laboratory.

une cadence d'environ 7 ms sans trous tandis que celles provenant de SPC sont résolues à 0.873 s et montrent 0.15% de trous situés entre 01h08 et 01h13. Ces trous seront comblés par interpolation linéaire et afin d'avoir la même cadence de données, les données MAGs sont rééchantillonnées sur la cadence de SPC. Les données analysées sont montrées sur la FIGURE 6.3.

Les sous-intervalles choisis pour le calcul des taux de cascade sont marqués en rouge et sont associés à deux niveaux de compressibilité différents. Le compressibilité noté  $c$  est calculé en prenant la déviation standard std des fluctuations de densité, c'est-à-dire  $c = \text{std}(\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}) = \text{std}(\frac{\delta\rho}{\rho_0})$ . Le premier sous-intervalle, de 00h35 à 01h05 a une compressibilité très faible,  $c \sim 8\%$ , tandis que le second, de 01h45 à 02h15, est plus compressible,  $c \sim 20\%$ . Grâce à ces deux intervalles, nous pouvons étudier l'impact des différents niveaux de fluctuation de densité sur le taux de cascade calculé avec la loi isentrope-polytrope et la loi incompressible.

Ces choix de sous-intervalles ont été effectués en considérant un certain nombre d'hypothèses permettant de calculer un taux de cascade tout en réduisant l'incertitude du résultat. Les séries étant temporelles, on utilise l'hypothèse de Taylor<sup>1</sup> [TAYLOR 1937] qui presuppose que les variations temporelles relevées par la sonde peuvent être interprétées comme des variations spatiales convectées par le flux de plasma à la vitesse moyenne

1. La validité de l'hypothèse de Taylor dans le vent solaire et en particulier le long de la trajectoire de PSP peut être remise en question [TREUMANN *et al.* 2019; CHHIBER *et al.* 2019] mais l'obtention d'une hypothèse de remplacement est encore une question ouverte [PARASHAR et MATTHAEUS 2022] que l'on n'a pas traitée au cours de ce travail.

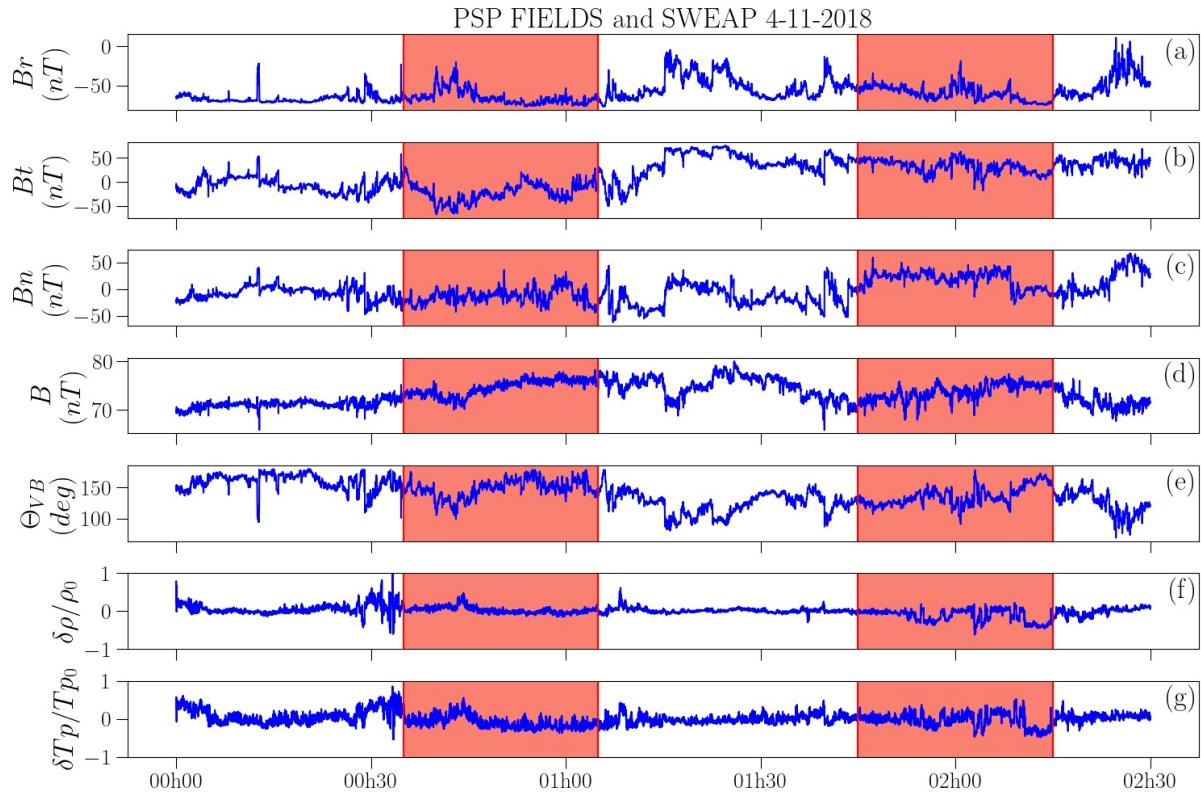


FIGURE 6.3 – Données PSP mesurées dans l'héliosphère interne le 4 novembre 2018. (a) à (c) : les trois composantes du champ magnétique dans le système de représentation RTN. (d) : Norme du champs magnétique. (e) : angle entre le champ de vitesse du fluide et le champ magnétique. (f) et (g) : fluctuations de densité et température relative des protons. Les zones rouges représentent les sous-intervalles utilisés pour le calcul des taux de cascade.

$\mathbf{v}_0$ . Ainsi, on peut estimer l'incrément spatial  $\ell$  à partir de l'incrément temporel  $\tau$  via  $\ell \sim \mathbf{v}_0 \tau$ . Estimer l'échelle spatiale à l'aide de l'hypothèse de Taylor suppose que les incréments longitudinaux sont orientés suivant la direction moyenne du flot. Or le couplage entre le champ magnétique et le fluide implique une forte anisotropie entre les directions parallèles et perpendiculaires au champ magnétique. Par conséquent, si l'angle entre la vitesse et le champ magnétique,  $\theta_{VB}$ , varie trop fortement, d'importantes variations pourront apparaître dans les résultats du taux de cascade, comme l'ont observé [HADID, SAHRAOUI et GALTIER 2017]. Les intervalles ont donc été choisis tel que  $\theta_{VB}$  soit relativement stationnaire (ligne (e) de la FIGURE 6.3). On a aussi considéré des séries temporelles relativement stationnaires pour les autres quantités afin d'assurer une certaine stationnarité/homogénéité statistique.

L'estimation des moyennes dans le calcul du taux de cascade demande une statistique suffisante, c'est-à-dire des intervalles de durée supérieure à plusieurs fois le temps de corrélation des fluctuations turbulentes [COBURN *et al.* 2015]. [PARASHAR, GOLDSTEIN *et al.* 2020] ont estimé le temps de corrélation des données relevées par PSP entre le 3 et le 10 novembre avec des intervalles glissants de 4h, 8h et 24h. En se fiant à cette estimation, le temps de corrélation pour les données utilisées ici (le 4 novembre entre 00h00 et 02h30) est autour de 500 s, c'est-à-dire un peu moins du tiers de la longueur de nos sous-intervalles (30 min). On supposera donc que leur durée convient au calcul d'un taux de cascade.

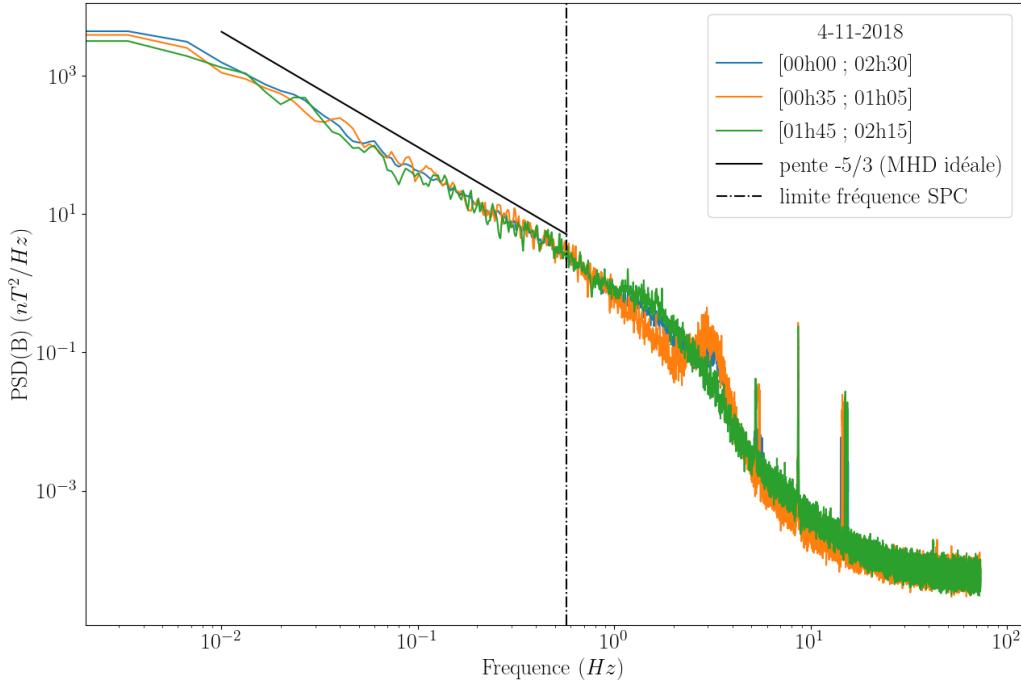


FIGURE 6.4 – Spectre des fluctuations magnétiques pour l’intervalle complet de données (bleu), et les sous-intervalles (orange et vert) obtenue avec les données MAGs non rééchantillonnées à la cadence de SPC. La ligne noire continue indique la pente attendue dans la zone MHD (spectre de type Kolmogorov en  $-5/3$ ) et l’axe vertical la fréquence maximale accessible avec la cadence de SPC.

FIGURE 6.4 montre les spectres des fluctuations magnétiques obtenus avec les données MAGs non rééchantillonnées de l’intervalle complet et des deux sous-intervalles. Les fréquences qui nous intéressent sont les fréquences inférieures à la cadence de SPC. Pour ces fréquences, la pente des spectres est proche de  $-5/3$  (attendue dans la zone MHD). La loi exacte du modèle MHD dérivée dans le Chapitre 5 y semble donc applicable.

## 6.2 Comparaison des lois incompressible et compressible-isentrope-polytrope avec $\gamma = 1$ (isotherme) et $\gamma = 5/3$ (adiabatique)

Pour ce qui est de la forme de la loi exacte, l’utilisation d’une seule sonde impose deux autres hypothèses. La première correspond à la négligence des termes sources. Ces derniers ne peuvent pas être calculés à cause de leur dépendance en des dérivées locales ( $\nabla$  et  $\nabla'$ ) qui ne sont accessibles qu’avec des missions multi-sondes telles que MMS ou CLUSTER envoyées autour de la Terre [ANDRÉS, SAHRAOUI, GALTIER, HADID, FERRAND *et al.* 2019]. Physiquement, une telle hypothèse pourrait avoir un impact significatif, mais d’après l’étude numérique de [ANDRÉS, SAHRAOUI, GALTIER, HADID, FERRAND *et al.* 2019] en turbulence MHD subsonique sur une loi exacte isentrope-isotherme formulée telle que (5.11) (formulation qui sera considérée ici), les termes flux donnés ci-dessous

(6.2) sont dominants, les autres termes sont négligeables ou se compensent. La deuxième hypothèse est celle d'isotropie des fluctuations qui permet d'intégrer tridimensionnellement la loi exacte dans une boule de rayon  $\ell = |\boldsymbol{\ell}|$ . Cette hypothèse simplificatrice est largement utilisée [PARASHAR et MATTHAEUS 2022] mais sa validité peut être remise en cause par l'anisotropie du plasma due au champ magnétique.<sup>2</sup> L'expression du taux de cascade calculée ici est alors :

$$\varepsilon = F_1 + F_2, \quad (6.1)$$

avec

$$F_1 = -\frac{3}{4|\boldsymbol{v}_0|\tau} \langle (\delta(\rho\boldsymbol{v}) \cdot \delta\boldsymbol{v} + \delta(\rho\boldsymbol{v}_A) \cdot \delta\boldsymbol{v}_A) \delta\boldsymbol{v} - (\delta(\rho\boldsymbol{v}_A) \cdot \delta\boldsymbol{v} + \delta(\rho\boldsymbol{v}) \cdot \delta\boldsymbol{v}_A) \delta\boldsymbol{v}_A \rangle, \quad (6.2)$$

$$F_2 = -\frac{3}{4|\boldsymbol{v}_0|\tau} \langle 2\delta\rho\delta u\delta\boldsymbol{v} \rangle. \quad (6.3)$$

$F_1$  est la contribution dite Yaglom compressible, ne s'annulant pas dans la limite incompressible.  $F_2$  est la contribution d'énergie interne, dépendant des fermetures compressibles.  $\rho$  et  $u$  y sont calculés pour des cas particuliers de la fermeture isentrope-polytrope définies dans TABLE 4.1 :

- incompressible (IMHD) :  $\rho = \rho_0$ , pas de  $u$  nécessaire (cette fermeture permet de retrouver la loi PP98)
- isentrope-isotherme (CMHDI) :  $u = c_s^2 \ln(\frac{\rho}{\rho_0})$  obtenu avec la fermeture isentrope-polytrope et  $\gamma = 1$
- isentrope-adiabatique (CMHDp) :  $u = \frac{c_s^2 - c_{s0}^2}{\gamma(\gamma-1)}$  obtenu avec la fermeture isentrope-polytrope et  $\gamma = 5/3$

La vitesse du son est obtenue grâce à la relation des gaz parfaits :  $c_s^2 = \gamma k_B T_p / m_p$  avec  $k_B$ , la constante de Boltzmann et  $T_p$  et  $m_p$ , la température et la masse des protons.

Sur FIGURE 6.5 apparaissent les résultats pour les deux sous-intervalles, le quasi-incompressible à gauche (1) et le plus compressible à droite (2). La première ligne ((a1) et (a2)) montre l'estimation du taux de cascade avec la fermeture IMHD en bleu, la loi CMHDI en vert et CMHDp en rouge. Sur la deuxième ligne ((b1) et (b2)), la contribution d'énergie interne  $F_2$  est comparée à la contribution  $F_1$  dans les cas isotherme (vert) et adiabatique (rouge). L'impact de la fermeture thermodynamique n'étant portée que par  $F_2$ , le ratio entre les  $F_2$  adiabatique ( $F_{2p}$ ) et isotherme ( $F_{2i}$ ) est donné sur la troisième ligne ((c1) et (c2)).

N'est représenté que la valeur absolue des différentes quantités. Leur signe nécessite des intervalles plus longs pour statistiquement converger [COBURN *et al.* 2015 ; HADID, SAHRAOUI et GALTIER 2017]. La question de l'inversion de la cascade potentiellement visualisée à travers le signe du taux ne peut donc pas être étudiée ici. Un taux  $\varepsilon$  en valeur absolue quasi-constant peut par contre témoigner d'une convergence. On va donc utiliser la quasi-constance de  $\varepsilon$  pour définir une zone inertielle. Pour le premier intervalle, sur le graphique (a1) de la FIGURE 6.5, les  $\varepsilon$  montrent des variations avant  $\tau \sim 10$  s et après  $\tau \sim 400$  s et restent quasiment constant au centre. On supposera donc que cette zone centrale correspond à une zone inertielle. À grande échelle, ces variations proviennent de  $F_1$  et se reflètent dans la brusque augmentation apparaissant sur le graphique (b1) de la FIGURE 6.5. Ils s'avère que ces variations sont accompagnées de changements de signe.

2. Un taux de cascade incompressible intégré axisymétriquement a été investigué par [ANDRÉS, SAHRAOUI, HUANG *et al.* 2022] mais une extension compressible reste à faire.

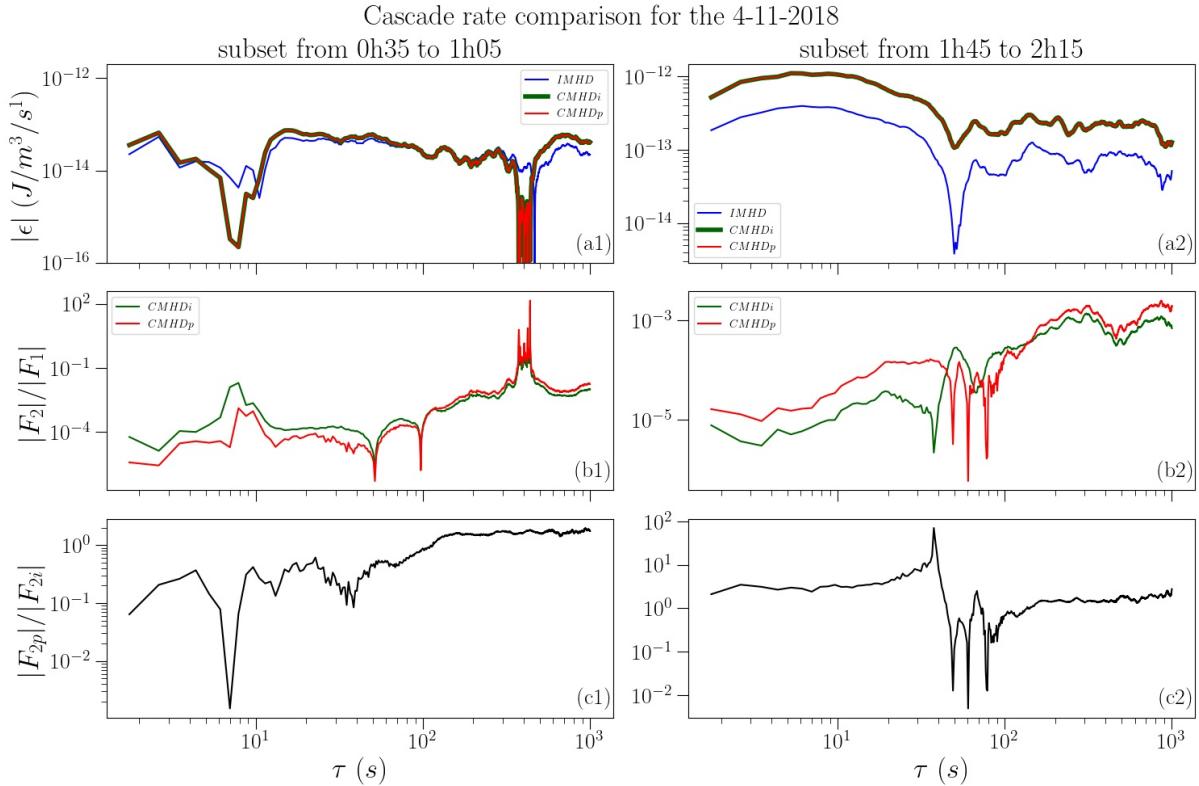


FIGURE 6.5 – Comparaison des taux de cascade obtenus avec l’expression de la loi exacte (6.1) et différentes fermetures pour le sous-intervalle  $\{00h35-01h05\}$  à gauche et  $\{01h45-02h15\}$  à droite. (a1)–(a2) : valeur absolue des taux de cascade obtenus avec les fermetures incompressible (IMHD) en bleu, compressible isentrope-isotherme (CMHD<sub>i</sub>) en vert et adiabatique (CMHD<sub>p</sub>) en rouge. (b1)–(b2) : ratio entre la contribution d’énergie interne  $F_2$  (6.3) et celle Yaglom compressible  $F_1$  (6.2) dans le cas isotherme (vert) et le cas adiabatique (rouge). (c1)–(c2) : ratio entre les contributions de l’énergie interne adiabatique  $F_{2p}$  et isotherme  $F_{2i}$ .

Pour le second intervalle, sur le graphique (a2) de la FIGURE 6.5, le signe ne varie pas, il reste positif contrairement à ce que pourrait laisser présager le creux apparaissant en  $\tau \sim 50$  s. En se fiant à la quasi-constance du niveau de  $\varepsilon$ , nous limitons l’interprétation d’une zone inertielle à l’intervalle  $\tau \in [50; 800]$  s.

Le graphique (a2) de la FIGURE 6.5 met en avant le rôle de la prise en compte de la compression dans le taux de cascade : les taux de cascade compressible sont plus élevés d’un facteur 2 à 3 par rapport au taux incompressible alors que le graphique (a1) de la FIGURE 6.5 provenant de données bien moins compressible montre des niveaux similaires. Cette observation coïncide avec de précédentes issues de données du vent solaire [BANERJEE, HADID *et al.* 2016; HADID, SAHRAOUI et GALTIER 2017; ANDRÉS, SAHRAOUI, HADID *et al.* 2021]. Par contre, les deux modèles compressibles montrent les mêmes résultats. La raison de cette convergence est révélée par les graphiques (b1) et (b2) de la FIGURE 6.5 : la contribution de  $F_2$  est bien négligeable devant celle de  $F_1$ . Le facteur 3 observé précédemment provient donc de la prise en compte de la densité dans  $F_1$ . Même si l’impact du terme dépendant de la fermeture à une importance moindre dans le taux total, nous pouvons en examiner l’effet dans les graphiques (c1) et (c2) de la FIGURE 6.5. À grandes échelles ( $\tau > 100$  s), les deux fermetures apportent une contribu-

tion similaire tandis qu'à plus faible échelle (hors de la suspectée zone inertielle pour le deuxième intervalle), un ordre de grandeur de différence apparaît. Dans le cas du premier intervalle, la fermeture isotherme contribue plus que l'adiabatique tandis que dans le cas du deuxième intervalle, c'est le contraire. Une interprétation complète de cette différence de comportement ne peut être apportée avec cette étude de cas et nécessite une analyse statistique. Cette analyse, effectuée ultérieurement par [BRODIANO *et al.* 2022] dans les données PSP montre que  $\langle F_2 \rangle$  (en notant  $\langle \cdot \rangle$  la moyenne sur les échelles et en adoptant nos notations des contributions aux taux de cascade) apparaît statistiquement un à deux ordres de grandeur en dessous de  $\langle F_1 \rangle$  et que le facteur 3 entre les taux compressibles et le taux incompressible n'est pas retrouvé sauf pour des cas particuliers. Les cas que nous avons étudiés semblent donc dans la norme pour le premier point vérifié, mais, pour le dernier point, notre deuxième sous-intervalle entre dans la classe des cas particuliers. Ils montrent aussi que plus la compressibilité est forte, plus  $\langle F_2 \rangle$  peut venir concurrencer  $\langle F_1 \rangle$  voire, pour certains cas, le surpasser. Près de Soleil, ils notent aussi que  $\langle F_{2p} \rangle$  est supérieur à  $\langle F_{2i} \rangle$  en moyenne.

Cette étude de cas préliminaire publiée dans [SIMON et SAHRAOUI 2021] et validée statistiquement par [BRODIANO *et al.* 2022] a donc permis de visualiser l'impact de la compression sur l'estimation du taux de cascade et l'apport potentiel d'une fermeture par rapport à une autre dans des données réelles du vent solaire.

### 6.3 Application statistique préliminaire dans des données localisées dans la magnétogaine terrestre

Le plasma dans la magnétogaine est plus compressible que dans le vent solaire [HADID, SAHRAOUI, GALTIER et HUANG 2018] et d'après [LIVADIOTIS 2018a],  $1 < \gamma < 5/3$ . Il est aussi parcouru par de multiples missions, en particulier des missions multi-sondes comme la mission MMS qui comprend quatre satellites en orbite autour de la Terre depuis 2015 (FIGURE 6.6).

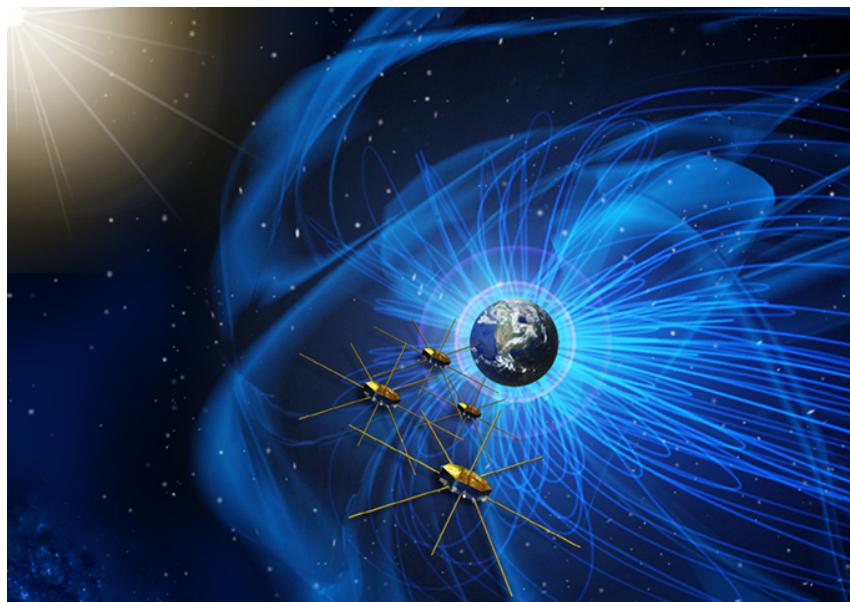


FIGURE 6.6 – Vue d'artiste de la mission MMS. Crédits : la page web de MMS/NASA ([https://www.nasa.gov/mission\\_pages/mms/](https://www.nasa.gov/mission_pages/mms/)).

Par curiosité, on a choisi une douzaine de cas parmi ceux utilisés par [ANDRÉS, SAHRAOUI, GALTIER, HADID, FERRAND *et al.* 2019] pour vérifier si l'on retrouve les résultats de notre étude de cas effectuée avec les données de PSP. Les données utilisées ont été relevées par les instruments Fast Plasma Investigation (FPI) pour ce qui est des moments de la fonction de distribution des particules et Fluxgate Magnetometer (FGM) pour le champ magnétique pendant 12 intervalles de temps entre 2015 et 2017. L'étude, similaire à celle effectuée dans les données PSP, est menée séparément sur les quatre satellites de la constellation (48 résultats).

Pour ce qui est des quantités estimées, les notations sont les mêmes que celles utilisées dans la section 5.3. La FIGURE 6.7 montre l'emplacement des 48 résultats pour lesquels les fluctuations de densité (compressibilité,  $c$ ) varie de 20% à 60% (visualisé via l'échelle de couleur) dans deux diagrammes ayant pour abscisse le rapport entre les taux moyen compressible  $\langle \epsilon_{CMHDp} \rangle$  obtenu avec  $\gamma = 5/3$  (loi adiabatique, CMHDp) et incompressible  $\langle \epsilon_{IMHD} \rangle$ . et  $\langle \epsilon_i \rangle$  obtenu avec  $\gamma = 1$  (loi isentrope-isotherme, CMHDI). Le diagramme de gauche a pour ordonnée le rapport entre les contributions d'énergie interne  $\langle F_{2p} \rangle$  et Yaglom compressible  $\langle F_1 \rangle$  de la loi adiabatique et celui de droite le rapport entre les contributions d'énergie interne adiabatique et isentrope-isotherme,  $\langle F_{2p} \rangle$  et  $\langle F_{2i} \rangle$ . Cette

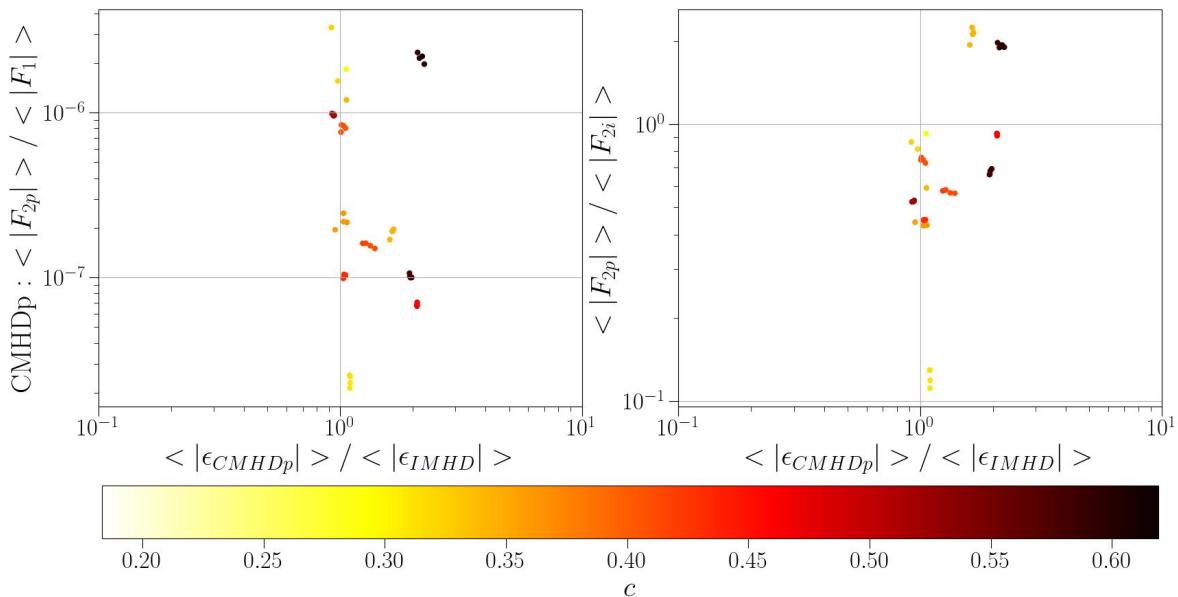


FIGURE 6.7 – Résumé de l'étude statistique préliminaire menée sur 12 intervalles des quatre satellites de MMS. Couleurs : compressibilité  $c$  de l'intervalle. Abscisses : rapport entre le taux de cascade compressible adiabatique (CMHDp,  $\gamma = 5/3$ ) et incompressible (IMHD). À gauche : pour CMHDp, rapport entre les contributions d'énergie interne  $F_2$  et Yaglom compressible  $F_1$ . À droite : rapport entre les contributions d'énergie interne adiabatique,  $F_{2p}$ , et isotherme,  $F_{2i}$  ( $\gamma = 1$ ).

étude révèle de plus importantes fluctuations de densité dans la magnétogaine que celles relevées pour les données PSP. Dans les cas les plus compressibles, le taux de cascade compressible semble pouvoir doubler par rapport au taux incompressible (points rouges éloignés de la verticale centrale). Cependant, la contribution d'énergie interne moyenne y est encore plus négligeable que dans les données PSP, 5 à 8 ordres de grandeurs plus faibles que la contribution Yaglom compressible moyenne comme le montre le diagramme de gauche. Sur le diagramme de droite, on voit que  $\langle F_{2p} \rangle$  à tendance à être un peu plus

faible que  $\langle F_{2i} \rangle$  mais qu'il peut aussi être environ deux fois plus important. Cette dernière observation montre un comportement inverse du comportement moyen observé à tout rayon solaire dans le vent solaire par [BRODIANO *et al.* 2022], mais demanderait plus de statistique pour être confirmée.

Cette étude dans les données MMS est restée préliminaire, l'intérêt du travail ayant dévié vers l'effet de l'anisotropie de pression (voir Partie II). Par la suite, une autre contribution pourrait être étudiée grâce à la constellation de satellites de MMS : celles des termes sources, impossible à analyser avec PSP. La caractéristique multi-sondes de cette mission peut, en effet, permettre le calcul complet des lois exactes compressibles. Cela a, par exemple, été effectué dans le cadre isotherme par [ANDRÉS, SAHRAOUI, GALTIER, HADID, FERRAND *et al.* 2019]. Il serait aussi intéressant d'étudier dans les données les contributions au taux de cascade apportées par les différentes formulations ayant été analytiquement dérivées dans le chapitre précédent, en particulier les contributions des termes flux dépendant des pressions magnétique et thermodynamique, ou du flux de chaleur.

## 6.4 Synthèse de l'étude de cas observationnels issus des données de PSP

**Données choisies :** instrument SPC/SWEAP et MAGs/FIELDS présents sur la sonde PSP, mesures relevées le 4 Novembre 2018, comparaison d'un intervalle Yaglom compressible et d'un plus compressible.

**Hypothèses nécessaires à l'utilisation de données in-situ issues d'une mission composée d'une seule sonde pour l'estimation de taux de cascade :**

- taille d'intervalle supérieur à plusieurs fois le temps de corrélation des fluctuations turbulentes,
- hypothèse de Taylor,  $\ell \sim \mathbf{v}_0\tau$ ,
- angle  $\theta_{VB}$  quasi-stationnaire,
- négligeance des termes sources dans la loi exacte, valide si vent subsonique et avec la formulation f1 de la loi exacte MHD,
- intégration isotrope de la loi exacte, validité à nuancer tant que l'angle  $\theta_{VB}$  reste quasi-stationnaire.

**Loi exacte analysée :**  $\varepsilon = F_1 + F_2$  avec

$$\begin{aligned} F_1 &= -\frac{3}{4|\mathbf{v}_0|\tau} \langle (\delta(\rho\mathbf{v}) \cdot \delta\mathbf{v} + \delta(\rho\mathbf{v}_A) \cdot \delta\mathbf{v}_A) \delta\mathbf{v} - (\delta(\rho\mathbf{v}_A) \cdot \delta\mathbf{v} + \delta(\rho\mathbf{v}) \cdot \delta\mathbf{v}_A) \delta\mathbf{v}_A \rangle \\ F_2 &= -\frac{3}{4|\mathbf{v}_0|\tau} \langle 2\delta\rho\delta u\delta\mathbf{v} \rangle \end{aligned}$$

**Fermetures :**

- incompressible :  $\rho = \rho_0$ , pas de  $u$  nécessaire
- isentrope-isotherme :  $u = c_s^2 \ln(\frac{\rho}{\rho_0})$  et  $\gamma = 1$
- isentrope-adiabatique :  $u = \frac{c_s^2 - c_{s0}^2}{\gamma(\gamma-1)}$  et  $\gamma = 5/3$

**Conclusion :**

- apport potentiellement substantiel de la compression via la densité dans les termes de type  $F_1$  indépendant de la fermeture
  - apport de la fermeture important dans  $F_2$  à petite échelle
  - $F_2$  négligeable devant  $F_1$  pour les fermetures compressibles et dans les cas analysés
- Ces résultats sont publiés dans [SIMON et SAHRAOUI 2021], statistiquement validés par [BRODIANO *et al.* 2022] et étendus dans la magnétogaine à travers une étude statistique préliminaire effectué dans les données MMS (section 5.3).



## CONCLUSION

Depuis 1998 et la loi exacte de [POLITANO et POUQUET 1998b ; POLITANO et POUQUET 1998a] (PP98) étendant aux plasmas incompressibles, la théorie de Kolmogorov décrivant la cascade turbulente à travers des lois exactes, de multiples extensions ont été proposées prenant en compte la compressibilité.

Dans cette partie I, nous nous sommes concentrés sur l'effet de fermetures thermodynamiques dépendant d'une pression isotrope. Un premier chapitre (synthèse section 4.5) pose le problème de la compressibilité dans les modèles fluides et analyse différentes possibilités de fermeture basée sur la théorie thermodynamique. La question qui se pose alors est celle de l'impact de la compressibilité sur la turbulence. Ma contribution pour y répondre est développée à travers les chapitres 5 et 6.

Dans le chapitre 5 (synthèse section 5.4), un cadre analytique est démontré à travers l'extension de la théorie des lois exactes. La stratégie mise en œuvre ne repose pas sur une fermeture thermodynamique, a contrario de celles entreprises dans la littérature [GALTIER et BANERJEE 2011 ; BANERJEE et GALTIER 2013 ; BANERJEE et GALTIER 2014 ; ANDRÉS et SAHRAOUI 2017], mais plutôt, sur l'équation de densité d'énergie interne. La loi exacte résultante obtient ainsi un caractère général et la fermeture ne devient qu'un «détail», une hypothèse, à ne considérer qu'à la fin du calcul en fonction du besoin. Par ce biais, est abordée l'objectif initial de cette partie du travail : obtenir une loi valable dans la zone inertielle isentrope pour une fermeture polytrope décrivant ainsi la cascade turbulente dans différents plasmas présents dans l'univers de manière plus réaliste et versatile que la fermeture isotherme utilisée jusqu'à présent. La première formulation (f1) proposée pour répondre à cet objectif est inspirée du travail dans le cadre isentrope-isotherme de [ANDRÉS, SAHRAOUI, GALTIER, HADID, DMITruk *et al.* 2018]. Elle a permis l'étude comparative, dans deux jeux de données issus de la mission PSP, de l'impact de la compression et des fermetures isentropes-isotherme ( $\gamma = 1$ ) et isentrope-adiabatique ( $\gamma = 5/3$ ) sur la cascade turbulente. Cette étude fait l'objet du chapitre 6 (synthèse section 6.4) où elle est étendue dans la magnétogaine à travers l'amorçage d'une étude statistique dans les données de MMS. L'intérêt de la formulation f1 est que les termes sources impossibles à calculer à cause des caractéristiques de la mission PSP (une seule sonde) ont préalablement été numériquement démontrés comme négligeables dans le taux de cascade total par [ANDRÉS, SAHRAOUI, GALTIER, HADID, DMITruk *et al.* 2018]. La deuxième formulation (f2) de la loi exacte a initialement vu le jour comme une conséquence du travail analytique qui sera présenté dans la partie II, relaxant l'isotropie de pression, mais le résultat, dépendant de  $p/\rho$ , peut s'avérer plus adapté à l'application d'une fermeture thermodynamique. La troisième et dernière formulation (f3) est la plus récente et s'inspire du travail sur le flux de chaleur dans l'équation d'énergie interne qui s'est révélée nécessaire lors de l'étude numérique qui sera présentée dans la partie III. Ce résumé des résultats obtenus avec pression isotrope reflète la structure chronologique de l'ensemble du travail effectué

et présenté dans ces trois parties, la méthode scientifique mise en œuvre et les points méthodologiques utilisés.

En termes de physique, cette partie propose un cadre d'étude de l'impact de la compression dans sa forme la plus "simple" : une densité variable, une pression isotrope, une énergie interne et un flux de chaleur souvent négligé. Ces grandeurs nous permettent de fermer le modèle fluide par des relations basées sur des hypothèses thermodynamiques telles que l'isentropie, l'isothermie ou la polytropie. À travers l'analyse de ces hypothèses et leur application dans les anciennes descriptions de la cascade turbulente, quatre possibilités majeures de fermeture ont émergées. La première, isentrope-isotherme est la première à avoir été utilisée dans l'extension des lois exactes [GALTIER et BANERJEE 2011 ; BANERJEE et GALTIER 2013 ; ANDRÉS et SAHRAOUI 2017]. La deuxième, isentrope-polytrope, introduite en HD [BANERJEE et GALTIER 2014], est celle qui nous a permis de généraliser la méthode d'obtention des lois exactes à toutes fermetures en utilisant l'équation d'énergie interne, elle prend en compte l'existence d'un  $\gamma$  et reflète un peu mieux la pluralité de transformations thermodynamiques observée dans les plasmas spatiaux et astrophysiques. La troisième, polytropique, basée sur un  $\gamma$  et un  $\sigma$ , lie le flux de chaleur au travail de pression et étend un peu plus loin les possibilités d'application des lois exactes. De la dernière, isotherme, émerge la loi exacte compressible qui semble la plus simple malgré la prise en compte des flux de chaleur.

Pour ce qui est de l'impact de la compression et des fermetures observé dans l'étude du taux de cascade dans le vent solaire, l'étude de cas comparative montre que la compression peut jouer un rôle important dans la cascade, mais, dans les cas étudiés, la fermeture isentrope-adiabatique ou isentrope-isotherme a peu d'impact malgré le rôle qu'elle joue à travers l'énergie interne. Les termes dominants s'avèrent en effet être ceux n'en dépendant pas. On peut aussi les interpréter comme ceux subsistant dans le cas d'une fermeture isobare. Ce travail pose ainsi les bases d'une étude observationnelle, plus générale, complète et systématique, de l'impact de compression et des fermetures sur la turbulence dans les plasmas spatiaux. Cette étude est laissée au futur car le vent solaire ayant la particularité d'être peu collisionnel et magnétisé, nous nous sommes intéressés à un autre type de fermeture qui a orienté le travail dans une autre direction : celle de l'effet de l'anisotropie de pression.

---

## PARTIE II : Etude analytique de l'effet de l'anisotropie de pression

---

*La collision de tous les sentiments contradictoires qui l'agitaient avait produit la neutralité, et aucun d'eux n'était capable de lui communiquer le mouvement. Citation extraite de la traduction française de HARDY 1874*

**Thomas HARDY<sup>3</sup>** (1849-1927), artiste, écrivain, poète, romancier

---

3. LOIN DE LA FOULE DÉCHAINÉE, publiée en version originale anglaise en 1874



## INTRODUCTION

Les fonctions de distribution en vitesse des ions observées dans le vent solaire sont généralement anisotrope le long des directions parallèle et perpendiculaires au champ magnétique [MARSCH *et al.* 1981 ; MATTEINI *et al.* 2007 ; BALE, KASPER *et al.* 2009]. Le champ magnétique, interagissant avec les ions, rend le milieu anisotrope et les collisions, trop peu nombreuses, échouent à l’isotropiser. Ce type d’anisotropie a tout d’abord été modélisé par [CHEW *et al.* 1956] à travers une pression de forme tensorielle et diagonale (gyrotrope) et supposant l’isentropie du modèle. Ce modèle, nommé CGL en hommage aux auteurs, sera présenté plus en détail dans le chapitre 7 de cette deuxième partie. Il y sera accompagné de l’extension de la théorie de Kolmogorov proposée, prenant en compte un tenseur de pression. Dans le chapitre 8, nous nous poserons la question suivante : l’incompressibilité est-elle compatible avec la gyrotropie de pression ? Et dans le 9, nous généraliserons la loi pour la MHD au modèle bi-fluide dépendant des ions et des électrons.

Dans cette partie qui concentre le cœur analytique du travail effectué, nous conserverons l’hypothèse d’une zone inertielle isentrope et nous ne regarderons pas en détail l’impact sur la cascade des composantes non gyrotrope du tenseur de pression.



## LOI EXACTE POUR LE MODÈLE CGL

### Sommaire

7.1	D'un tenseur de pression dans le modèle fluide au modèle CGL . . . . .	73
7.2	Instabilités linéaires et potentiel impact sur la turbulence du vent solaire . . . . .	75
7.3	Loi exacte générale pour pression tensorielle et réduction au modèle CGL . . . . .	78
7.4	Synthèse de l'étude analytique de turbulence compressible avec pression tensorielle et modèle CGL . . . . .	83

Dans le vent solaire, utiliser un modèle MHD compressible avec pression isotrope peut s'avérer ardu à justifier en présence d'un champ magnétique et d'un faible nombre de collisions. Il faut prendre en compte, a minima, une pression gyrotrope par exemple en utilisant le modèle dit CGL. C'est le but de ce chapitre : décrire la cascade turbulente d'énergie totale à travers une loi exacte associée au modèle CGL. Encore une fois, on ne réduira le champ d'application qu'après avoir obtenu une loi plus générale, valable pour tout tenseur de pression. Les nouveaux résultats exposés ici ont fait l'objet principal de l'article [SIMON et SAHRAOUI 2022].

### 7.1 D'un tenseur de pression dans le modèle fluide au modèle CGL

Dans le cadre général défini à partir de l'équation de Vlasov et menant au modèle MHD, la pression et le flux de chaleur sont définis comme des tenseurs d'ordre 2 et 3 respectivement. La pression,  $\bar{\mathbf{P}}$ , est un tenseur symétrique obtenu en effectuant le produit de deux vecteurs vitesse tandis que le flux de chaleur s'obtient à partir du produit de trois vecteurs vitesses.

Dans la Partie I, la pression était supposée isotrope, c'est à dire  $\bar{\mathbf{P}} = p\bar{\mathbf{I}}$  avec  $\bar{\mathbf{I}}$  le tenseur identité. Dans le modèle CGL, elle est définie comme gyrotrope dans la direction favorisée par le champ magnétique, notée  $\mathbf{b}$ . On considère donc deux pressions, une dite parallèle  $p_{\parallel}$  et une perpendiculaire  $p_{\perp}$  et dans un repère cartésien orienté tel que  $\mathbf{b}$  coïncide avec la direction  $\mathbf{e}_z$ , le tenseur s'écrit :

$$\bar{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} p_{\perp} & 0 & 0 \\ 0 & p_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & p_{\parallel} \end{pmatrix}.$$

Plus généralement, on peut l'écrire :  $\bar{\mathbf{P}} = p_{\perp}\bar{\mathbf{I}} + (p_{\parallel} - p_{\perp})\mathbf{b}\mathbf{b}$ . La partie isotrope de

la pression est obtenue en faisant le produit dual ":" entre  $\bar{\mathbf{P}}$  et  $\bar{\mathbf{I}}$ , ce qui revient à considérer la trace de  $\bar{\mathbf{P}}$ . Ainsi :  $p = \frac{1}{3}\bar{\mathbf{P}} : \bar{\mathbf{I}} = \frac{1}{3}(2p_{\perp} + p_{\parallel})$ . Cela permet de réécrire le tenseur de pression en séparant la partie isotrope de la composante dite anisotrope :  $\bar{\mathbf{P}} = p\bar{\mathbf{I}} + (p_{\parallel} - p_{\perp})(\mathbf{b}\mathbf{b} - \frac{1}{3}\bar{\mathbf{I}})$ , on notera la composante anisotrope  $\bar{\boldsymbol{\Pi}}$ . Dans le cas général non-gyrotrope, d'autres composantes apparaissent. On n'abordera pas leur détail et on les résumera simplement par la notation  $\bar{\boldsymbol{\Pi}}_{ng}$ . D'après [CASSAK et BARBHUIYA 2022],  $\bar{\boldsymbol{\Pi}} = (p_{\parallel} - p_{\perp})(\mathbf{b}\mathbf{b} - \frac{1}{3}\bar{\mathbf{I}}) + \bar{\boldsymbol{\Pi}}_{ng}$  contribue à la déformation incompressible du fluide par compression/expansion et cisaillement à travers le terme  $\bar{\mathbf{P}} : \nabla \mathbf{v}$  tandis que  $p$  résulte en sa dilatation, compressible. En mécanique des fluides, ces termes de pression anisotrope sont souvent une réécriture des termes de dissipation visqueuse d'où leur interprétation dissipative.

On rappelle le modèle non fermé dépendant des moments  $\rho, \mathbf{v}, \bar{\mathbf{P}}$  et  $\bar{\mathbf{q}}$  et de la loi d'Ohm idéale exprimée à travers l'équation d'induction (7.4) :

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (7.1)$$

$$\partial_t(\rho \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v} - \rho \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A) + \nabla \cdot \bar{\mathbf{P}}_* = 0, \quad (7.2)$$

$$\partial_t \bar{\mathbf{P}} + \nabla \cdot (\mathbf{v} \bar{\mathbf{P}}) + (\bar{\mathbf{P}} \cdot \nabla \mathbf{v})^S + \omega_{ce} \frac{|\mathbf{v}_A|}{v_{A0}} (\mathbf{b} \times \bar{\boldsymbol{\Pi}}_{ng})^S = -\nabla \cdot \bar{\mathbf{q}}, \quad (7.3)$$

$$\partial_t \mathbf{v}_A - \nabla \cdot (\mathbf{v}_A \mathbf{v} - \mathbf{v} \mathbf{v}_A) + \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{v}_A - \frac{\mathbf{v}_A}{2} \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (7.4)$$

sachant que  $\mathbf{b} \times \bar{\mathbf{I}} = 0$  et  $\mathbf{b} \times \mathbf{b}\mathbf{b} = 0$ , et en notant  $\bar{\mathbf{P}}_* = \bar{\mathbf{P}} + p_m \bar{\mathbf{I}}$ , le tenseur de pression totale. Aucune hypothèse sur la forme des tenseurs de pression et flux de chaleur n'est faite dans ce modèle.

Ce modèle peut nous servir à obtenir une loi exacte générale sur l'énergie totale applicable sous l'hypothèse d'une cascade isentrope, quelles que soient les formes de la pression et du flux de chaleur. En effet, comme dans le cas avec pression isotrope, l'équation (7.3) ne servira pas dans la dérivation de la loi exacte. On utilisera seulement l'équation d'énergie interne que l'on peut obtenir à partir de l'équation sur la composante isotrope du tenseur de pression :

$$\partial_t p + \nabla \cdot (p \mathbf{v}) + \frac{2}{3} \bar{\mathbf{P}} : \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{3} \nabla \cdot (\bar{\mathbf{q}} : \bar{\mathbf{I}}) \quad (7.5)$$

puisque  $\bar{\boldsymbol{\Pi}}_{ng}$  étant symétrique  $(\mathbf{b} \times \bar{\boldsymbol{\Pi}}_{ng}) : \bar{\mathbf{I}} = 0$ . L'énergie interne sera définie par  $\rho u = \frac{1}{2}\bar{\mathbf{P}} : \bar{\mathbf{I}} = \frac{3}{2}p = \frac{1}{2}(2p_{\perp} + p_{\parallel})$ , la dernière formulation étant associé au cas particulier gyrotrope [HAZELTINE *et al.* 2013]. On retrouve donc l'équation (4.29) écrite pour un tenseur de pression quelconque :

$$\partial_t(\rho u) + \nabla \cdot (\rho u \mathbf{v}) + \bar{\mathbf{P}} : \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{2} \nabla \cdot (\bar{\mathbf{q}} : \bar{\mathbf{I}}) \quad (7.6)$$

Cette équation est assez générale et peut-être obtenue indépendamment de l'expression de  $u$  en fonction de  $p$  et de l'équation (7.3), avec un bilan énergétique, comme celui que l'on a effectué dans le Chapitre 4 [ECKART 1940 ; HAZELTINE *et al.* 2013]. On peut y faire apparaître l'isentropie à travers l'hypothèse :  $\nabla \cdot (\bar{\mathbf{q}} : \bar{\mathbf{I}}) = 0$ .

La fermeture CGL consiste à annuler la divergence du flux de chaleur  $\nabla \cdot \bar{\mathbf{q}}$  dans l'équation (7.3) et à considérer un tenseur de pression de forme gyrotrope. L'équation tensorielle de pression prend alors la forme de deux équations (voir [HUNANA *et al.* 2019]

pour les détails de dérivations) :

$$\partial_t p_{\parallel} + \nabla \cdot (p_{\parallel} \mathbf{v}) + 2p_{\parallel} \mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{v} = 0 \quad (7.7)$$

$$\partial_t p_{\perp} + \nabla \cdot (p_{\perp} \mathbf{v}) + p_{\perp} \nabla \cdot \mathbf{v} - p_{\perp} \mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{v} = 0 \quad (7.8)$$

En les sommant, on retrouve l'équation d'énergie interne (7.6) avec l'hypothèse d'isentropie. Pour simplifier les calculs dans cette partie II, nous supposerons, dans le cas général,  $\nabla \cdot \bar{\mathbf{q}} = 0$  (équation (7.3)). Cette hypothèse est, comme on vient de le voir, cohérente avec l'hypothèse d'isentropie de la cascade turbulente et avec le modèle CGL qui nous intéresse. Elle pourra être facilement relaxée, si besoin est, en prenant en compte, dans la loi exacte, la correction (5.21) qui a été dérivée dans la section 5.3.

En manipulant les équations de pression du modèle CGL, (7.7) et (7.8), avec l'équation d'induction (7.4), on obtient les formes conservatives :

$$d_t \left( \frac{p_{\parallel} \mathbf{v}_A^2}{\rho^2} \right) = 0 \quad d_t \left( \frac{p_{\perp}}{\rho^{3/2} |\mathbf{v}_A|} \right) = 0 \quad (7.9)$$

De ce lien, entre  $p_{\parallel, \perp}$  et des puissances de  $\rho$ , provient la deuxième appellation du modèle, «bi-adiabatique», et les formes explicites des pressions :  $p_{\parallel} \propto \frac{\rho^2}{\mathbf{v}_A^2}$  et  $p_{\perp} \propto \rho^{3/2} |\mathbf{v}_A|$ .

## 7.2 Instabilités linéaires et potentiel impact sur la turbulence du vent solaire

Les anisotropies de pression peuvent rendre le plasma instable. On utilise la théorie linéaire pour approcher ce problème comme on a approché celui des ondes d'Alfvén et magnétonique dans les modèles MHD (voir Chapitres 3 et 4). Le pendant non linéaire de ces instabilités est en effet difficile à établir.

La linéarisation du modèle CGL (voir méthode dans la section-synthèse du Chapitre 3 de l'introduction et pour plus de détails, le chapitre 3 de [HUNANA *et al.* 2019]) nous donne l'équation de dispersion suivante :

$$\begin{pmatrix} \frac{\omega^2}{v_{A0}^2 k_{\parallel}^2} - (\beta_{\parallel 0} a_{p0} + 1) \frac{k_{\perp}^2}{k_{\parallel}^2} + \left(\frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0}) - 1\right) & 0 & -\frac{\beta_{\parallel 0}}{2} a_{p0} \frac{k_{\perp}}{k_{\parallel}} \\ 0 & \frac{\omega^2}{v_{A0}^2 k_{\parallel}^2} + \left(\frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0}) - 1\right) & 0 \\ -\frac{\beta_{\parallel 0}}{2} a_{p0} \frac{k_{\perp}}{k_{\parallel}} & 0 & \frac{\omega^2}{v_{A0}^2 k_{\parallel}^2} - \frac{3}{2} \beta_{\parallel 0} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_{x1} \\ v_{y1} \\ v_{z1} \end{pmatrix} = 0 \quad (7.10)$$

où  $a_{p0} = \frac{p_{\perp 0}}{p_{\parallel 0}}$  est appelé taux d'anisotropie et  $\beta_{\parallel 0} = \frac{2p_{\parallel 0}}{\rho_0 v_{A0}^2}$  est le paramètre  $\beta$  linéaire du plasma calculé avec la pression parallèle. La relation de dispersion s'écrit alors :

$$0 = \left( \frac{\omega^2}{k_{\parallel}^2 v_{A0}^2} - 1 + \frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0}) \right) \left( \frac{\omega^2}{k_{\parallel}^2 v_{A0}^2} - \frac{1}{2}(A \pm \sqrt{A^2 - 4B}) \right) \quad (7.11)$$

avec

$$\begin{aligned}
 A &= 1 + \beta_{\parallel 0} a_{p0} \left(1 - \frac{1}{2} \cos^2 \theta\right) + \beta_{\parallel 0} \cos^2 \theta \\
 B &= \frac{3}{2} \beta_{\parallel 0} \cos^2 \theta \left(\left(1 - \frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0})\right) \cos^2 \theta + \left(1 + \beta_{\parallel 0} a_{p0} \left(1 - \frac{1}{6} a_{p0}\right)\right) \sin^2 \theta\right) \\
 &= \frac{3}{2} \beta_{\parallel 0} \cos^2 \theta \left(1 + \beta_{\parallel 0} a_{p0} \left(1 - \frac{1}{2} \cos^2 \theta\right) - \frac{\beta_{\parallel 0}}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{6} \beta_{\parallel 0} a_{p0}^2 \sin^2 \theta\right) \\
 A^2 - 4B &= \left(1 + \beta_{\parallel 0} a_{p0} \left(1 - \frac{1}{2} \cos^2 \theta\right) - \beta_{\parallel 0} \cos^2 \theta\right)^2 + 3\beta_{\parallel 0}^2 \cos^4 \theta + \beta_{\parallel 0} a_{p0}^2 \sin^2 \theta
 \end{aligned}$$

Dans le premier mode  $\frac{\omega^2}{k_{\parallel}^2 v_{A0}^2} + (\frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0}) - 1) = 0$ , on retrouve le mode d'Alfvén incompressible si  $a_{p0} = 1$ . Il est polarisé tel que  $\mathbf{v}_1 \propto (0, 1, 0)$ . Ce mode est instable si  $1 - \frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0}) < 0$ . Cette instabilité est l'instabilité firehose («lance d'incendie» ou «tuyau d'arrosage»). Son nom provient du comportement des tubes de flux magnétique qui ressemble à celui d'un tuyau d'arrosage devenu fou après avoir été lâché par son utilisateur<sup>1</sup>.

Les deux autres modes visibles dans la relation (9.49) sont les modes magnétosoniques rapide (+) et lent (-) du modèle CGL. Même en y considérant  $a_{p0} = 1$ , il est impossible de retrouver les modes magnétosonores MHD dans les expressions des modes CGL. Cela est dû à l'utilisation des équations de pression dans le calcul pour obtenir les relations de dispersion. D'après l'expression de  $A^2 - 4B$ , le mode rapide va rester stable. Le mode lent peut quant à lui devenir instable si  $B < 0$ . Cela peut arriver dans deux cas de figure :

- $1 - \frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0}) < 0$  correspondant à l'instabilité firehose, qui est dans ce cas nommée firehose parallèle puisqu'elle apparaît principalement si  $k_{\parallel} \gg k_{\perp}$ ,
- $1 + \beta_{\parallel 0} a_{p0} \left(1 - \frac{1}{6} a_{p0}\right) < 0$  correspondant à l'instabilité miroir.

L'expression du critère d'instabilité miroir est légèrement différente de celle provenant de la théorie linéaire cinétique à cause du facteur 1/6 [KULSRUD \_ mhd \_ 1983 ; FERRIÈRE et ANDRÉ 2002]. Ce facteur d'erreur translate la condition nécessaire pour qu'il y ait des instabilités miroir à  $a_{p0} > 6$  au lieu de  $a_{p0} > 1$  comme on peut le voir sur la FIGURE 7.1. La condition nécessaire pour qu'il y ait apparition d'instabilité firehose est, quant à elle,  $a_{p0} < 1$  et en accord avec la théorie cinétique. Dans le vent solaire, ces critères d'instabilité semblent avoir un impact majeur puisque l'état du plasma semble maintenu, sur les diagrammes  $a_p - \beta_{\parallel}$ , dans une zone qu'ils semblent délimiter, comme l'a observé [HELLINGER, TRÁVNÍČEK *et al.* 2006] dans les données relevées par la sonde WIND.

Dans le Chapitre 3 de l'introduction, nous avons rappelé l'importance des ondes d'Alfvén dans les théories de turbulence et, dans le Chapitre 4 de la Partie I, que le sujet de l'impact des ondes compressibles MHD sur la cascade turbulente est toujours ouvert [BRODIANO *et al.* 2021]. Similairement, on peut se demander quel impact ont les instabilités sur la turbulence ? Et en particulier, quelle influence ont les instabilités des ondes d'Alfvén sur la turbulence Alfvénique ? Si l'on regarde les résultats de l'étude de la température isotrope [LIU *et al.* 2006], des fluctuations magnétiques [BALE, KASPER

1. Soit un tube de flux magnétique que l'on perturbe légèrement en le courbant avec rayon R. Sa tension correspond à la force de pression magnétique qui s'écrit  $\rho_0 v_{A0}^2 / R$ . La pression parallèle (liée à  $v_{\parallel}^2$ ) va induire une force centrifuge en  $\rho_0 v_{\parallel}^2 / R$  poussant le plasma dans le tube vers l'extérieur de la courbe. La pression perpendiculaire correspondant à la pression thermique du plasma à l'extérieur du tube, induit une force de pression en  $p_{\perp 0} / R$ . Si  $p_{\parallel 0} > p_{\perp 0} + 2p_{m0}$  (critère d'instabilité firehose), la force centrifuge ne sera pas compensée par la force externe et la tension du tube. La courbe va se resserrer, le rayon diminué et la perturbation s'amplifier.

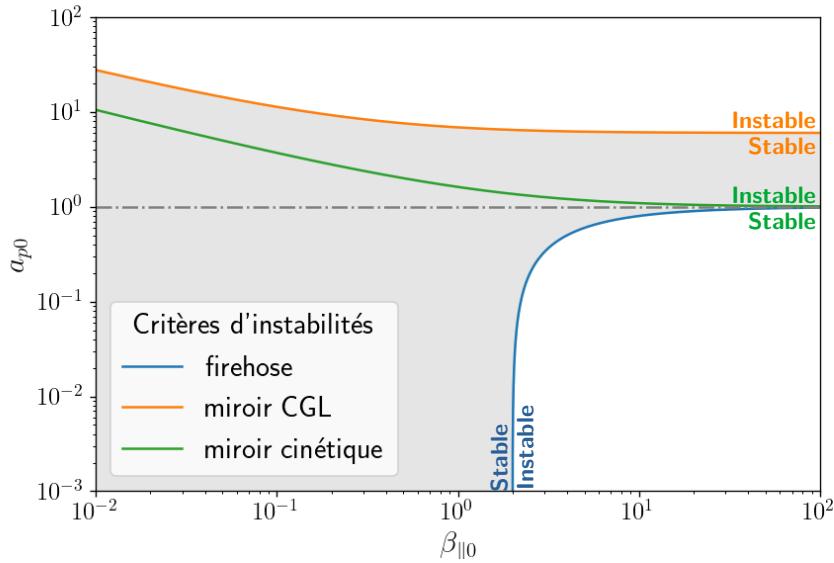


FIGURE 7.1 – Zones de stabilité du modèle CGL (zone grisée). Critères d'instabilité firehose (bleu), miroir (orange) et miroir cinétique (vert). Horizontale  $a_p = 1$  en gris.

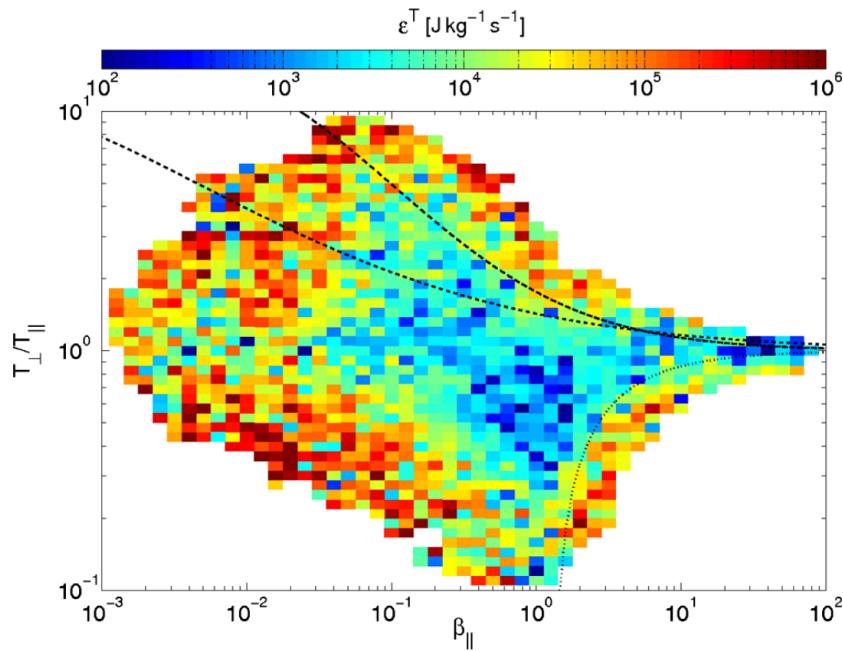


FIGURE 7.2 – Distribution statistique en fonction de  $a_p = \frac{p_\perp}{p_{\parallel 0}} = \frac{T_\perp}{T_{\parallel 0}}$  et  $\beta_{\parallel}$  d'échantillons relevés entre 1995 et 2011 dans le vent solaire par la sonde WIND en orbite autour de la Terre. Pour chacun d'eux, le taux de cascade est calculé avec la loi exacte PP98 et indiqué par l'échelle chromatique. Les lignes indiquent les frontières associées aux instabilités cinétiques miroir (décroissante supérieure), cyclotron (décroissante inférieure) et firehose (croissante). Crédits : [OSMAN *et al.* 2013].

*et al.* 2009] et du taux de cascade incompressible [OSMAN *et al.* 2013] (voir FIGURE 7.2) dans les données relevées par WIND et ceux du taux compressible isotherme observés par [HADID, SAHRAOUI, GALTIER et HUANG 2018] dans les données des missions THEMIS et CLUSTER : sur les diagrammes  $a_p - \beta_{\parallel}$ , près des frontières des zones instables, la

température des protons semble plus élevée, les fluctuations du champ magnétique et les taux de cascade plus importants. Mais la relation entre instabilités et turbulence reste à clarifier : est-ce que le plasma est plus chaud et turbulent parce que les instabilités jouent un rôle dans son chauffage ? Et est-ce que ce chauffage s'effectue via la cascade turbulente ? Est-ce lié à l'âge collisionnel du plasma comme le propose [BALE, KASPER *et al.* 2009] ?

De multiples études se sont attaquées à ces questions à travers des études comparatives de spectres, du taux d'anisotropie de pression et des taux de croissance des instabilités cinétiques linéaires et quasi-linéaires (parmi les plus récentes il y a [QUDSI *et al.* 2020 ; MARKOVSKII et VASQUEZ 2022 ; OPIE *et al.* 2022 ; BANDYOPADHYAY *et al.* 2022 ; NAVARRO et MOYA 2023]). De notre côté, nous l'attaquons analytiquement, à partir des échelles fluides et de la théorie des lois exactes, dans le but d'offrir un cadre permettant d'étudier plus rigoureusement l'impact des anisotropies et instabilités de pression sur la cascade turbulente.

### 7.3 Loi exacte générale pour pression tensorielle et réduction au modèle CGL

Pour obtenir une loi exacte pour le modèle CGL, nous avons utilisé la méthode mise en place dans le Chapitre 5 : prendre en compte l'équation d'énergie interne (7.6) et non la forme explicite des pressions parallèle et perpendiculaire (7.9). Le modèle utilisé est donc :

$$\partial_t \rho = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \quad (7.12)$$

$$\partial_t \mathbf{v} = -\nabla \cdot (\mathbf{v} \mathbf{v}) + \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A) - \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}_*} + \mathbf{f}_c + \mathbf{d}_c \quad (7.13)$$

$$\partial_t \mathbf{v}_A = \nabla \cdot (\mathbf{v}_A \mathbf{v} - \mathbf{v} \mathbf{v}_A) - \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{v}_A + \frac{\mathbf{v}_A}{2} \nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{f}_m + \mathbf{d}_m \quad (7.14)$$

$$\partial_t u = -\nabla \cdot (u \mathbf{v}) + u \nabla \cdot \mathbf{v} - \frac{\overline{\mathbf{P}}}{\rho} : \nabla \mathbf{v} \quad (7.15)$$

De manière cohérente avec les choix effectués dans le Chapitre 5, la fonction de corrélation d'énergie totale choisie est :  $\mathcal{R} = \mathcal{R}_c + \mathcal{R}_m + \mathcal{R}_u$  avec  $\mathcal{R}_c = \langle \frac{1}{4}(\rho' + \rho) \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v} \rangle$ ,  $\mathcal{R}_m = \langle \frac{1}{4}(\rho' + \rho) \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A \rangle$  et  $\mathcal{R}_u = \frac{1}{2} \langle \rho' u + \rho u' \rangle$ .

Et en appliquant la même méthode que celle utilisée pour obtenir (5.7), (5.8) et (5.9), on obtient l'évolution temporelle des fonctions de corrélation associées à chaque énergie :

— Energie cinétique :  $\mathcal{R}_c = \langle (\rho' + \rho) \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v} \rangle / 4$

$$\begin{aligned} 4\partial_t \mathcal{R}_c &= \nabla_\ell \cdot \langle \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{v} \delta \mathbf{v} - (\delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \delta \mathbf{v} \delta \mathbf{v}_A + \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{v}_A \delta \mathbf{v}_A) \rangle \\ &\quad + \nabla_\ell \cdot \langle \rho' \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v} \mathbf{v}_A - \rho \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}' \mathbf{v}'_A - \rho' \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}_A \mathbf{v}'_A + \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'_A \mathbf{v}_A \rangle \\ &\quad + \langle \rho \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v} \nabla' \cdot \mathbf{v}' - \rho' \mathbf{v}' \cdot \delta \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{v} + 2\rho' \mathbf{v}' \cdot \delta \mathbf{v}_A \nabla \cdot \mathbf{v}_A - 2\rho \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v}_A \nabla' \cdot \mathbf{v}'_A \rangle \\ &\quad + \nabla_\ell \cdot \left\langle \rho' \frac{\overline{\mathbf{P}_*}}{\rho} \cdot \mathbf{v}' - \rho \frac{\overline{\mathbf{P}'_*}}{\rho'} \cdot \mathbf{v} + \overline{\mathbf{P}_*} \cdot \mathbf{v}' - \overline{\mathbf{P}'_*} \cdot \mathbf{v} \right\rangle \\ &\quad - \left\langle \frac{\rho'}{\rho} \mathbf{v}' \cdot \overline{\mathbf{P}_*} \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} + \frac{\rho}{\rho'} \mathbf{v} \cdot \overline{\mathbf{P}'_*} \cdot \frac{\nabla' \rho'}{\rho'} \right\rangle \\ &\quad + \langle (\rho' + \rho) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{f}'_c + \mathbf{v}' \cdot \mathbf{f}_c) \rangle + \langle (\rho' + \rho) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{d}'_c + \mathbf{v}' \cdot \mathbf{d}_c) \rangle \end{aligned} \quad (7.16)$$

— Energie magnétique :  $\mathcal{R}_m = \langle (\rho' + \rho) \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A \rangle / 4$

$$\begin{aligned}
4\partial_t \mathcal{R}_m &= \nabla_\ell \cdot \langle \delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \delta \mathbf{v}_A \delta \mathbf{v} \rangle \\
&\quad - \nabla_\ell \cdot \langle \rho' \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v} \mathbf{v}_A - \rho \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}' \mathbf{v}'_A - \rho' \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}_A \mathbf{v}'_A + \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'_A \mathbf{v}_A \rangle \\
&\quad + \left\langle (\rho \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{v}_A - \frac{1}{2}(\rho' + \rho) \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A) \nabla' \cdot \mathbf{v}' \right\rangle \\
&\quad - \left\langle (\rho' \mathbf{v}'_A \cdot \delta \mathbf{v}_A + \frac{1}{2}(\rho' + \rho) \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A) \nabla \cdot \mathbf{v} \right\rangle \\
&\quad + \langle (\rho' \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v} - \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'_A) \nabla \cdot \mathbf{v}_A \rangle + \langle (\rho' \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}_A - \rho \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}') \nabla' \cdot \mathbf{v}'_A \rangle \\
&\quad + \langle (\rho' + \rho) (\mathbf{v}_A \cdot \mathbf{f}'_m + \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{f}_m) \rangle + \langle (\rho' + \rho) (\mathbf{v}_A \cdot \mathbf{d}'_m + \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{d}_m) \rangle
\end{aligned} \tag{7.17}$$

— Energie interne :  $\mathcal{R}_u = \langle \rho' u + \rho u' \rangle / 2$

$$\begin{aligned}
2\partial_t \mathcal{R}_u &= \nabla_\ell \cdot \langle \delta \rho \delta u \delta \mathbf{v} \rangle + \langle \rho \delta u \nabla' \cdot \mathbf{v}' - \rho' \delta u \nabla \cdot \mathbf{v} \rangle \\
&\quad - \left\langle \rho' \frac{\bar{\mathbf{P}}}{\rho} : \nabla \mathbf{v} + \rho \frac{\bar{\mathbf{P}}'}{\rho'} : \nabla' \mathbf{v}' \right\rangle
\end{aligned} \tag{7.18}$$

Le résultat pour l'énergie magnétique n'est pas influencé par le type de pression (tensoriel ou isotrope) contrairement à ceux des énergies cinétique et interne. La question qui s'est posée alors était : est-il possible d'améliorer la formulation des termes dépendants de la pression ? de faire apparaître l'influence de la pression dans les termes de type flux sous la forme d'une fonction de structure ? En remarquant que  $\bar{\mathbf{P}}$  ou  $\bar{\mathbf{P}}_*$  est, dans tous les termes, accompagné de  $\frac{1}{\rho}$  pris au même point, l'idée de travailler sur la fonction de structure  $\langle \delta \rho \delta \frac{\bar{\mathbf{P}}}{\rho} \cdot \delta \mathbf{v} \rangle$  puis sur la fonction  $\langle \delta \rho \delta \frac{\bar{\mathbf{P}}_*}{\rho} \cdot \delta \mathbf{v} \rangle$  a émergé. Développer cette dernière sous la divergence locale en utilisant l'hypothèse d'homogénéité statistique et l'indépendance des positions  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{x}'$  donne :

$$\begin{aligned}
\nabla_\ell \cdot \left\langle \delta \rho \delta \frac{\bar{\mathbf{P}}_*}{\rho} \cdot \delta \mathbf{v} \right\rangle &= \nabla_\ell \cdot \left\langle \left[ \rho \frac{\bar{\mathbf{P}}'_*}{\rho'} \cdot \mathbf{v} - \rho' \frac{\bar{\mathbf{P}}_*}{\rho} \cdot \mathbf{v}' \right] + [\bar{\mathbf{P}}_* \cdot \mathbf{v}' - \bar{\mathbf{P}}'_* \cdot \mathbf{v}] \right\rangle \\
&\quad + \nabla_\ell \cdot \left\langle \rho' \frac{\bar{\mathbf{P}}_*}{\rho} \cdot \mathbf{v} - \rho \frac{\bar{\mathbf{P}}'_*}{\rho'} \cdot \mathbf{v}' \right\rangle
\end{aligned}$$

On va donc pouvoir remplacer dans (7.16)  $\nabla_\ell \cdot \left\langle \rho' \frac{\bar{\mathbf{P}}_*}{\rho} \cdot \mathbf{v}' - \rho \frac{\bar{\mathbf{P}}'_*}{\rho'} \cdot \mathbf{v} \right\rangle$  ou  $\nabla_\ell \cdot \left\langle \bar{\mathbf{P}}_* \cdot \mathbf{v}' - \bar{\mathbf{P}}'_* \cdot \mathbf{v} \right\rangle$ .

En voyant que ce dernier s'écrit aussi  $\left\langle \rho \frac{\bar{\mathbf{P}}_*}{\rho} : \nabla' \mathbf{v}' + \rho' \frac{\bar{\mathbf{P}}'_*}{\rho'} : \nabla \mathbf{v} \right\rangle$  qui rappelle les termes dépendant de la pression de l'équation (7.18), nous avons choisi la première possibilité.

Ainsi :

$$\begin{aligned}
 \nabla_{\boldsymbol{\ell}} & \cdot \left\langle \rho' \frac{\bar{\mathbf{P}}_*}{\rho} \cdot \mathbf{v}' - \rho \frac{\bar{\mathbf{P}}'_*}{\rho'} \cdot \mathbf{v} + \bar{\mathbf{P}}_* \cdot \mathbf{v}' - \bar{\mathbf{P}}'_* \cdot \mathbf{v} \right\rangle \\
 & = -\nabla_{\boldsymbol{\ell}} \cdot \left\langle \delta \rho \delta \frac{\bar{\mathbf{P}}_*}{\rho} \cdot \delta \mathbf{v} \right\rangle + \left\langle \mathbf{v} \cdot \frac{\bar{\mathbf{P}}_*}{\rho} \cdot \nabla' \rho' + \mathbf{v}' \cdot \frac{\bar{\mathbf{P}}'_*}{\rho'} \cdot \nabla \rho \right\rangle \\
 & \quad + \left\langle 2\rho \frac{\bar{\mathbf{P}}}{\rho} : \nabla' \mathbf{v}' + 2\rho' \frac{\bar{\mathbf{P}}'}{\rho'} : \nabla \mathbf{v} + \rho \mathbf{v}_A^2 \nabla' \cdot \mathbf{v}' + \rho' \mathbf{v}'_A^2 \nabla \cdot \mathbf{v} \right\rangle
 \end{aligned}$$

La loi KHM générale pour l'énergie totale avec  $\mathcal{R} = \mathcal{R}_c + \mathcal{R}_m + \mathcal{R}_u$  devient alors :

$$\begin{aligned}
 [1] \quad 4\partial_t \mathcal{R} & = \nabla_{\boldsymbol{\ell}} \cdot \langle (\delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{v} + \delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \delta \mathbf{v}_A \delta \mathbf{v} - (\delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \delta \mathbf{v} + \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{v}_A) \delta \mathbf{v}_A) \\
 [2] & \quad + \langle (\rho \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v} + \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{v}_A - \frac{1}{2} \delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \mathbf{v}_A) \nabla' \cdot \mathbf{v}' \rangle \\
 [3] & \quad - \langle (\rho' \mathbf{v}' \cdot \delta \mathbf{v} + \frac{1}{2} \rho' \mathbf{v}'_A \cdot \delta \mathbf{v}_A - \frac{1}{2} \delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \mathbf{v}'_A) \nabla \cdot \mathbf{v} \rangle \\
 [4] & \quad + \langle (2\rho' \mathbf{v}' \cdot \delta \mathbf{v}_A - \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}'_A + \rho' \mathbf{v}'_A \cdot \delta \mathbf{v}) \nabla \cdot \mathbf{v}_A \rangle \\
 [5] & \quad - \langle (2\rho \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v}_A - \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}_A + \rho \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{v}) \nabla' \cdot \mathbf{v}'_A \rangle \\
 [6] & \quad + \nabla_{\boldsymbol{\ell}} \cdot \langle 2\delta \rho \delta u \delta \mathbf{v} \rangle + 2 \langle \rho \delta u \nabla' \cdot \mathbf{v}' - \rho' \delta u \nabla \cdot \mathbf{v} \rangle \\
 [7] & \quad - \nabla_{\boldsymbol{\ell}} \cdot \left\langle \delta \rho \delta \frac{\bar{\mathbf{P}}_*}{\rho} \cdot \delta \mathbf{v} \right\rangle - 2 \left\langle \rho \delta \frac{\bar{\mathbf{P}}}{\rho} : \nabla' \mathbf{v}' - \rho' \delta \frac{\bar{\mathbf{P}}}{\rho} : \nabla \mathbf{v} \right\rangle \\
 [8] & \quad + \left\langle \mathbf{v} \cdot \left( \frac{\bar{\mathbf{P}}_*}{\rho} \delta \rho - \rho \delta \frac{\bar{\mathbf{P}}_*}{\rho} \right) \cdot \frac{\nabla' \rho'}{\rho'} - \mathbf{v}' \cdot \left( \frac{\bar{\mathbf{P}}'_*}{\rho'} \delta \rho - \rho' \delta \frac{\bar{\mathbf{P}}_*}{\rho} \right) \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} \right\rangle \\
 [9] & \quad + \left\langle (\rho' + \rho)(\mathbf{v} \cdot \mathbf{f}'_c + \mathbf{v}' \cdot \mathbf{f}_c + \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{f}'_m + \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{f}_m) \right\rangle \\
 [10] & \quad + \left\langle (\rho' + \rho)(\mathbf{v} \cdot \mathbf{d}'_c + \mathbf{v}' \cdot \mathbf{d}_c + \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{d}'_m + \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{d}_m) \right\rangle
 \end{aligned} \tag{7.19}$$

Les lignes [7] et [8] contiennent les contributions des tenseurs de pression et de pression totale. La loi exacte générale de type K41 est alors :

$$\begin{aligned}
 -4\varepsilon & = \nabla_{\boldsymbol{\ell}} \cdot \langle (\delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{v} + \delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \delta \mathbf{v}_A \delta \mathbf{v} - (\delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \delta \mathbf{v} + \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{v}_A) \delta \mathbf{v}_A) \\
 & \quad + \nabla_{\boldsymbol{\ell}} \cdot \left\langle 2\delta \rho \delta u \delta \mathbf{v} - \delta \rho \delta \frac{\bar{\mathbf{P}}_*}{\rho} \cdot \delta \mathbf{v} \right\rangle \\
 & \quad + \left\langle (\rho \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v} + \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{v}_A - \frac{1}{2} \delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \mathbf{v}_A + 2\rho \delta u) \nabla' \cdot \mathbf{v}' - 2\rho \delta \frac{\bar{\mathbf{P}}}{\rho} : \nabla' \mathbf{v}' \right\rangle \\
 & \quad - \left\langle (\rho' \mathbf{v}' \cdot \delta \mathbf{v} + \frac{1}{2} \rho' \mathbf{v}'_A \cdot \delta \mathbf{v}_A - \frac{1}{2} \delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \mathbf{v}'_A + 2\rho' \delta u) \nabla \cdot \mathbf{v} - 2\rho' \delta \frac{\bar{\mathbf{P}}}{\rho} : \nabla \mathbf{v} \right\rangle \\
 & \quad + \langle (2\rho' \mathbf{v}' \cdot \delta \mathbf{v}_A - \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}'_A + \rho' \mathbf{v}'_A \cdot \delta \mathbf{v}) \nabla \cdot \mathbf{v}_A \rangle \\
 & \quad - \langle (2\rho \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v}_A - \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}_A + \rho \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{v}) \nabla' \cdot \mathbf{v}'_A \rangle \\
 & \quad + \left\langle \mathbf{v} \cdot \left( \frac{\bar{\mathbf{P}}_*}{\rho} \delta \rho - \rho \delta \frac{\bar{\mathbf{P}}_*}{\rho} \right) \cdot \frac{\nabla' \rho'}{\rho'} - \mathbf{v}' \cdot \left( \frac{\bar{\mathbf{P}}'_*}{\rho'} \delta \rho - \rho' \delta \frac{\bar{\mathbf{P}}_*}{\rho} \right) \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} \right\rangle
 \end{aligned} \tag{7.20}$$

Cette loi est valable quelle que soit la forme du tenseur de pression ou de l'énergie interne tant que la zone inertielle est supposée isentrope. Si l'on considère la pression sous forme isotrope  $\bar{\mathbf{P}} = p \bar{\mathbf{I}}$ , on trouve la loi (5.15) analysée dans la section 5.2. On va noter ce résultat  $\varepsilon_{iso}$ . On peut alors isoler, dans le taux de cascade, la contribution de la composante anisotrope du tenseur de pression  $\bar{\mathbf{\Pi}}$  :

$$\begin{aligned}
 -4(\varepsilon - \varepsilon_{iso}) & = -\nabla_{\boldsymbol{\ell}} \cdot \left\langle \delta \rho \delta \left( \frac{\bar{\mathbf{\Pi}}}{\rho} \right) \cdot \delta \mathbf{v} \right\rangle - \left\langle 2\rho \delta \left( \frac{\bar{\mathbf{\Pi}}}{\rho} \right) : \nabla' \mathbf{v}' - 2\rho' \delta \left( \frac{\bar{\mathbf{\Pi}}}{\rho} \right) : \nabla \mathbf{v} \right\rangle \\
 & \quad + \left\langle \mathbf{v} \cdot \left( \left( \frac{\bar{\mathbf{\Pi}}}{\rho} \right) \delta \rho - \rho \delta \left( \frac{\bar{\mathbf{\Pi}}}{\rho} \right) \right) \cdot \frac{\nabla' \rho'}{\rho'} - \mathbf{v}' \cdot \left( \left( \frac{\bar{\mathbf{\Pi}}'}{\rho'} \right) \delta \rho - \rho' \delta \left( \frac{\bar{\mathbf{\Pi}}}{\rho} \right) \right) \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} \right\rangle
 \end{aligned} \tag{7.21}$$

Nous quantifierons et analyserons cette contribution grâce à des simulations dans la partie III.

Dans le cas d'un tenseur de pression gyrotrope, on peut faire apparaître  $p_{\parallel}$  et  $p_{\perp}$  :

$$\begin{aligned}
 -4\varepsilon &= \nabla_{\boldsymbol{\ell}} \cdot \langle (\delta(\rho\boldsymbol{v}) \cdot \delta\boldsymbol{v} + \delta(\rho\boldsymbol{v}_A) \cdot \delta\boldsymbol{v}_A \delta\boldsymbol{v} - (\delta(\rho\boldsymbol{v}_A) \cdot \delta\boldsymbol{v} + \delta(\rho\boldsymbol{v}) \cdot \delta\boldsymbol{v}_A) \delta\boldsymbol{v}_A) \\
 &+ \nabla_{\boldsymbol{\ell}} \cdot \left\langle \delta\rho\delta\left(\frac{p_{\perp} + p_{\parallel} + p_m}{\rho}\right)\delta\boldsymbol{v} + \delta\rho\delta\left(\frac{p_{\perp} - p_{\parallel}}{\rho}\right)\boldsymbol{b}\boldsymbol{b} \cdot \delta\boldsymbol{v} \right\rangle \\
 &+ \left\langle \left(\rho\boldsymbol{v} \cdot \delta\boldsymbol{v} + \frac{1}{2}\rho\boldsymbol{v}_A \cdot \delta\boldsymbol{v}_A - \frac{1}{2}\delta(\rho\boldsymbol{v}_A) \cdot \boldsymbol{v}_A + \rho\delta\left(\frac{p_{\parallel}}{\rho}\right)\right)\nabla' \cdot \boldsymbol{v}' \right\rangle \\
 &- \left\langle \left(\rho'\boldsymbol{v}' \cdot \delta\boldsymbol{v} + \frac{1}{2}\rho'\boldsymbol{v}'_A \cdot \delta\boldsymbol{v}_A - \frac{1}{2}\delta(\rho\boldsymbol{v}_A) \cdot \boldsymbol{v}'_A + \rho'\delta\left(\frac{p_{\parallel}}{\rho}\right)\right)\nabla \cdot \boldsymbol{v} \right\rangle \\
 &+ 2 \left\langle \rho\delta\left(\frac{p_{\perp} - p_{\parallel}}{\rho}\right)\boldsymbol{b}\boldsymbol{b} : \nabla'\boldsymbol{v}' - \rho'\delta\left(\frac{p_{\perp} - p_{\parallel}}{\rho}\right)\boldsymbol{b}\boldsymbol{b} : \nabla\boldsymbol{v} \right\rangle \\
 &+ \langle (2\rho'\boldsymbol{v}' \cdot \delta\boldsymbol{v}_A - \delta(\rho\boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{v}'_A + \rho'\boldsymbol{v}'_A \cdot \delta\boldsymbol{v})\nabla \cdot \boldsymbol{v}_A \rangle \\
 &- \langle (2\rho\boldsymbol{v} \cdot \delta\boldsymbol{v}_A - \delta(\rho\boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{v}_A + \rho\boldsymbol{v}_A \cdot \delta\boldsymbol{v})\nabla' \cdot \boldsymbol{v}'_A \rangle \\
 &+ \left\langle \left(\frac{p_{\perp} + p_m}{\rho}\boldsymbol{v}\delta\rho - \rho\boldsymbol{v}\delta\left(\frac{p_{\perp} + p_m}{\rho}\right) + \frac{p_{\parallel} - p_{\perp}}{\rho}\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{b}\boldsymbol{b}\delta\rho - \rho\boldsymbol{v} \cdot \delta\left(\frac{p_{\parallel} - p_{\perp}}{\rho}\right)\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}\right) \cdot \frac{\nabla'\rho'}{\rho'} \right\rangle \\
 &- \left\langle \left(\frac{p'_{\perp} + p'_m}{\rho'}\boldsymbol{v}'\delta\rho - \rho'\boldsymbol{v}'\delta\left(\frac{p_{\perp} + p_m}{\rho}\right) + \frac{p'_{\parallel} - p'_{\perp}}{\rho'}\boldsymbol{v}' \cdot \boldsymbol{b}'\boldsymbol{b}'\delta\rho - \rho'\boldsymbol{v}' \cdot \delta\left(\frac{p_{\parallel} - p_{\perp}}{\rho}\right)\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}\right) \cdot \frac{\nabla\rho}{\rho} \right\rangle
 \end{aligned} \tag{7.22}$$

Cette loi est valable pour le modèle CGL. Si besoin est, on peut y expliciter  $p_{\parallel}$  et  $p_{\perp}$  en fonction de  $\rho$ ,  $\boldsymbol{v}_A$  grâce à (7.9).

On peut aussi faire apparaître  $a_p$  et  $\beta_{\parallel}$  dans (7.22) pour identifier les termes potentiellement impactés par les instabilités. Ainsi, on obtient :

$$\boxed{
 \begin{aligned}
 -4\varepsilon &= \nabla_{\boldsymbol{\ell}} \cdot \langle (\delta(\rho\boldsymbol{v}) \cdot \delta\boldsymbol{v} + \delta(\rho\boldsymbol{v}_A) \cdot \delta\boldsymbol{v}_A \delta\boldsymbol{v} - (\delta(\rho\boldsymbol{v}_A) \cdot \delta\boldsymbol{v} + \delta(\rho\boldsymbol{v}) \cdot \delta\boldsymbol{v}_A) \delta\boldsymbol{v}_A) \\
 &+ \frac{1}{2}\nabla_{\boldsymbol{\ell}} \cdot \left\langle \delta\rho\delta(\boldsymbol{v}_A^2(\beta_{\parallel}(a_p + 1) + 1))\delta\boldsymbol{v} + \delta\rho\delta(\beta_{\parallel}(a_p - 1)\boldsymbol{v}_A \boldsymbol{v}_A) \cdot \delta\boldsymbol{v} \right\rangle \\
 &+ \left\langle \left(\rho\boldsymbol{v} \cdot \delta\boldsymbol{v} + \frac{1}{2}\rho\boldsymbol{v}_A \cdot \delta\boldsymbol{v}_A - \frac{1}{2}\delta(\rho\boldsymbol{v}_A) \cdot \boldsymbol{v}_A + \frac{1}{2}\rho\delta(\boldsymbol{v}_A^2\beta_{\parallel})\right)\nabla' \cdot \boldsymbol{v}' \right\rangle \\
 &- \left\langle \left(\rho'\boldsymbol{v}' \cdot \delta\boldsymbol{v} + \frac{1}{2}\rho'\boldsymbol{v}'_A \cdot \delta\boldsymbol{v}_A - \frac{1}{2}\delta(\rho\boldsymbol{v}_A) \cdot \boldsymbol{v}'_A + \frac{1}{2}\rho'\delta(\boldsymbol{v}_A^2\beta_{\parallel})\right)\nabla \cdot \boldsymbol{v} \right\rangle \\
 &+ \left\langle \rho\delta(\beta_{\parallel}(a_p - 1)\boldsymbol{v}_A \boldsymbol{v}_A) : \nabla'\boldsymbol{v}' - \rho'\delta(\beta_{\parallel}(a_p - 1)\boldsymbol{v}_A \boldsymbol{v}_A) : \nabla\boldsymbol{v} \right\rangle \\
 &+ \langle (2\rho'\boldsymbol{v}' \cdot \delta\boldsymbol{v}_A - \delta(\rho\boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{v}'_A + \rho'\boldsymbol{v}'_A \cdot \delta\boldsymbol{v})\nabla \cdot \boldsymbol{v}_A \rangle \\
 &- \langle (2\rho\boldsymbol{v} \cdot \delta\boldsymbol{v}_A - \delta(\rho\boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{v}_A + \rho\boldsymbol{v}_A \cdot \delta\boldsymbol{v})\nabla' \cdot \boldsymbol{v}'_A \rangle \\
 &+ \frac{1}{2} \left\langle (\boldsymbol{v}_A^2(\beta_{\parallel}a_p + 1)\delta\rho - \rho\delta(\boldsymbol{v}_A^2(\beta_{\parallel}a_p + 1)))\boldsymbol{v} \cdot \frac{\nabla'\rho'}{\rho'} \right\rangle \\
 &- \frac{1}{2} \left\langle (\boldsymbol{v}'_A^2(\beta_{\parallel}a'_p + 1)\delta\rho - \rho'\delta(\boldsymbol{v}_A^2(\beta_{\parallel}a_p + 1)))\boldsymbol{v}' \cdot \frac{\nabla\rho}{\rho} \right\rangle \\
 &+ \frac{1}{2} \left\langle \boldsymbol{v} \cdot (\beta_{\parallel}(a_p - 1)\boldsymbol{v}_A \boldsymbol{v}_A)\delta\rho - \rho\delta(\beta_{\parallel}(a_p - 1)\boldsymbol{v}_A \boldsymbol{v}_A) \cdot \frac{\nabla'\rho'}{\rho'} \right\rangle \\
 &- \frac{1}{2} \left\langle \boldsymbol{v}' \cdot (\beta_{\parallel}(a'_p - 1)\boldsymbol{v}'_A \boldsymbol{v}'_A)\delta\rho - \rho'\delta(\beta_{\parallel}(a_p - 1)\boldsymbol{v}_A \boldsymbol{v}_A) \cdot \frac{\nabla\rho}{\rho} \right\rangle
 \end{aligned} \tag{7.23}
 }$$

Les critères d'instabilité linéaires n'y sont pas explicites mais on voit que certains termes dépendent de  $a_p - 1$ , en particulier un terme de type flux. Par conséquent, le signe de ces termes va dépendre du régime de pression dans le système, si  $p_{\parallel}$  ou  $p_{\perp}$  domine, et est ainsi lié au type d'instabilité pouvant s'y développer. Comme ces termes dépendent de quantités incrémentales, il est néanmoins difficile de conclure sur leur apport au taux de cascade total sans regarder dans des simulations. Ce sera l'un des objectifs de la Partie

III. On remarque que ces termes sont présents dans la contribution anisotrope (7.21) au taux de cascade.

## 7.4 Synthèse de l'étude analytique de turbulence compressible avec pression tensorielle et modèle CGL

**Fermeture CGL :**  $\nabla \cdot \bar{\mathbf{q}} = 0$  et  $\bar{\mathbf{P}} = p\bar{\mathbf{I}} + \bar{\mathbf{\Pi}} = \frac{2p_{\perp}+p_{\parallel}}{3}\bar{\mathbf{I}} + (p_{\parallel} - p_{\perp})(\mathbf{b}\mathbf{b} - \frac{1}{3}\bar{\mathbf{I}})$  avec  $\mathbf{b} = \frac{\mathbf{v}_A}{|\mathbf{v}_A|}$ . Energie interne définie telle que  $\rho u = \frac{3}{2}p$ .

$$\partial_t p_{\parallel} + \nabla \cdot (p_{\parallel} \mathbf{v}) + 2p_{\parallel} \mathbf{b} \mathbf{b} : \nabla \mathbf{v} = 0 \quad (7.24)$$

$$\partial_t p_{\perp} + \nabla \cdot (p_{\perp} \mathbf{v}) + p_{\perp} \nabla \cdot \mathbf{v} - p_{\perp} \mathbf{b} \mathbf{b} : \nabla \mathbf{v} = 0 \quad (7.25)$$

### Linéarisation du modèle CGL :

- Relation de dispersion : (9.49)
- Mode d'Alfvén incompressible  $\Rightarrow$  instabilité firehose,
- Mode magnétosonique rapide : stable,
- Mode magnétosonique lent  $\Rightarrow$  instabilité firehose parallèle et miroir
- instabilité firehose si  $1 - \frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0}) < 0$
- instabilité miroir si  $1 + \beta_{\parallel 0}a_{p0}(1 - \frac{1}{6}a_{p0}) < 0$

### Équations utilisées pour calculer la loi exacte générale avec tenseur de pression (zone inertielle isentrope) :

$$\partial_t \rho = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \quad (7.26)$$

$$\partial_t \mathbf{v} = -\nabla \cdot (\mathbf{v} \mathbf{v}) + \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A) - \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \bar{\mathbf{P}}_* + (\mathbf{f}_c + \mathbf{d}_c) \quad (7.27)$$

$$\partial_t \mathbf{v}_A = \nabla \cdot (\mathbf{v}_A \mathbf{v} - \mathbf{v} \mathbf{v}_A) - \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{v}_A + \frac{\mathbf{v}_A}{2} \nabla \cdot \mathbf{v} + (\mathbf{f}_m + \mathbf{d}_m) \quad (7.28)$$

$$\partial_t u = -\nabla \cdot (u \mathbf{v}) + u \nabla \cdot \mathbf{v} - \frac{\bar{\mathbf{P}}}{\rho} : \nabla \mathbf{v} \quad (7.29)$$

### Fonctions de corrélation d'énergie totale considérée :

$$\mathcal{R} = \frac{1}{2} \langle \frac{1}{2}(\rho' + \rho) \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{2}(\rho' + \rho) \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A + \rho' u + \rho u' \rangle$$

### Lois exactes générales dérivées dans ce chapitre (formulation f2) :

- KHM générale  $\forall \bar{\mathbf{P}}$  : (7.19)
- K41 générale  $\forall \bar{\mathbf{P}}$  : (7.20)
- contribution de l'anisotropie de pression : (7.21)

### Lois exactes K41 gyrotrope/CGL répondant à l'objectif initial (formulation f2) :

- fonction de  $p_{\parallel}$  et  $p_{\perp}$  : (7.22)
- fonction de  $a_p = \frac{p_{\perp}}{p_{\parallel}}$  et  $\beta_{\parallel} = \frac{p_{\parallel}}{p_m}$  : (7.23)

Les résultats dérivés ici sont publiés dans [SIMON et SAHRAOUI 2022].



## PARTIE II : CHAPITRE 8

# L ET DANS LE CAS INCOMPRESSIBLE ?

### Sommaire

<b>8.1</b>	<b>De la limite incompressible dans la loi exacte générale vers un nouveau modèle . . . . .</b>	<b>85</b>
<b>8.2</b>	<b>Proposition d'un modèle incompressible gyrotrope . . . . .</b>	<b>87</b>
<b>8.3</b>	<b>Etude paramétrique des modes linéaires du modèle incompressible gyrotrope . . . . .</b>	<b>89</b>
<b>8.4</b>	<b>Limite incompressible du modèle CGL . . . . .</b>	<b>94</b>
<b>8.5</b>	<b>Synthèse : Limite incompressible et pistes d'étude . . . . .</b>	<b>96</b>

Si l'on prend la limite incompressible de la loi exacte dépendant d'une pression isotrope (5.15), on retrouve la loi PP98 donnant le taux de cascade  $\varepsilon_{PP98}$  (3.34). Mais est-ce aussi le cas si la pression est tensorielle ? De cette question émerge une autre question : qu'est-ce qu'un système incompressible avec pression tensorielle ? Dans ce chapitre, sera présenté le travail effectué pour tenter de répondre à ces questions. Ce travail n'a pas encore été publié.

### 8.1 De la limite incompressible dans la loi exacte générale vers un nouveau modèle

Si l'on considère la limite incompressible ( $\rho = \rho_0$ ,  $\delta\rho = 0$ ,  $\nabla\rho = 0$ ,  $\nabla\cdot\mathbf{v} = 0$ ,  $\nabla\cdot\mathbf{v}_A = 0$ ) dans l'équation (7.21),  $\varepsilon_{iso} \rightarrow \varepsilon_{PP98}$  et tous les termes s'annulent sauf :

$$-4(\varepsilon - \varepsilon_{PP98}) = -2 \langle \delta(\bar{\Pi}) : \nabla' \mathbf{v}' - \delta(\bar{\Pi}) : \nabla \mathbf{v} \rangle \quad (8.1)$$

car la contribution de la trace de  $\nabla \mathbf{v}$  s'annule par incompressibilité :  $\bar{\mathbf{I}} : \nabla \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ . On obtient ainsi une correction à la théorie PP98 dépendant de la composante anisotrope de la pression (participant à la déformation incompressible du plasma, pour plus d'information voir [CASSAK et BARBHUIYA 2022]) :

$$-4(\varepsilon - \varepsilon_{PP98}) = -2 \langle \delta(\bar{\mathbf{P}} - p\bar{\mathbf{I}}) : \delta(\nabla \mathbf{v}) \rangle = -2 \langle \delta\bar{\Pi} : \delta(\nabla \mathbf{v}) \rangle \quad (8.2)$$

Une question émerge de ce résultat : dans des plasmas faiblement compressibles dépendant d'une pression tensorielle tels que le vent solaire, la correction anisotrope aurait-elle plus de poids que la prise en compte de la compression via les fluctuations de densité ?

Dans le cas particulier gyrotope, on obtient :

$$-4(\varepsilon - \varepsilon_{PP98}) = -2 \left\langle \delta((p_{\parallel} - p_{\perp})(\mathbf{b}\mathbf{b} - \frac{1}{3}\bar{\mathbf{I}})) : \delta(\nabla \mathbf{v}) \right\rangle \quad (8.3)$$

$$= -2 \left\langle \delta((p_{\parallel} - p_{\perp})\mathbf{b}\mathbf{b}) : \delta(\nabla \mathbf{v}) \right\rangle \quad (8.4)$$

On observe que la ligne (8.3) dépend de  $\bar{\mathbf{I}} : \nabla \mathbf{v}$ , on annule donc ce terme dans la ligne suivante (8.4). Dans le cas incompressible, ces deux expressions sont donc équivalentes. Dans des plasmas quasi-incompressibles par contre, si l'on veut estimer le taux de cascade à l'aide de la loi exacte incompressible corrigée, les deux expressions ne seront plus équivalentes. Dans la première, on s'assure de n'utiliser que la part incompressible de la pression (la contribution de la trace de  $\mathbf{b}\mathbf{b}$  étant annulée par  $-\frac{1}{3}\bar{\mathbf{I}}$ ). Dans la seconde, ce n'est pas le cas, le résultat pourra alors être impacté.

On remarque que cette correction dépend de  $p_{\parallel} - p_{\perp}$ , c'est à dire de  $\beta_{\parallel}(1 - a_p)$  qui rappelle les critères d'instabilités. Dans le cas CGL, on a vu que ces critères dépendent fortement de  $\beta_{\parallel 0}(1 - a_{p0})$ . Si l'on se place dans une situation dans laquelle  $\frac{\beta_{\parallel}}{2}(1 - a_p)$  serait quasiment constant, alors le terme correctif de la loi exacte à l'ordre 0 pourra s'écrire :

$$-4(\varepsilon - \varepsilon_{PP98}) = -2 \left\langle \delta\left(\frac{\beta_{\parallel}}{2}(1 - a_p)\mathbf{v}_A\mathbf{v}_A\right) : \delta(\nabla \mathbf{v}) \right\rangle \quad (8.5)$$

$$\simeq -2 \frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0}) \langle \delta(\mathbf{v}_A\mathbf{v}_A) : \delta(\nabla \mathbf{v}) \rangle \quad (8.6)$$

En prenant des valeurs réalistes dans le vent solaire telles que  $\beta_{\parallel} \sim 1$  et  $|1 - a_{p0}| \sim 0.5$ , on obtient  $\varepsilon - \varepsilon_{PP98} \sim \frac{1}{8} \langle \delta(\mathbf{v}_A\mathbf{v}_A) : \delta(\nabla \mathbf{v}) \rangle$ . Si  $\langle \delta(\mathbf{v}_A\mathbf{v}_A) : \delta(\nabla \mathbf{v}) \rangle \sim \varepsilon$  alors la correction de l'anisotropie de pression sera de l'ordre de 12 % du taux de cascade PP98. Près du critère firehose ( $\frac{\beta_{\parallel}}{2}(1 - a_p) \sim 1$ ), le niveau de cette contribution sera autour de 50 %. Dans le vent solaire, [HADID, SAHRAOUI et GALTIER 2017], la contribution de la compression est de l'ordre de 10 % du taux PP98, c'est-à-dire plus faible que nos estimations. Le résultat très approximatif obtenu ici va dans le sens d'une correction anisotrope plus significative qu'une correction compressible en particulier près du critère d'instabilité firehose. Si l'on regarde le diagramme publié par [OSMAN *et al.* 2013] (voir la FIGURE 7.2), suivant son signe que l'on ne peut pas estimer ici, cette contribution pourrait venir accroître ou réduire la dispersion des valeurs du taux de cascade. Bien évidemment, cette petite estimation est loin d'être suffisante pour conclure sur l'impact des anisotropies de pression sur le taux de cascade. Simulation et étude comparative dans le vent solaire sont nécessaires.

Par curiosité, on s'est demandé quelle était la physique derrière notre terme correctif. Dans le cadre des modèles incompressibles avec pression isotrope, le seul mode existant est le mode d'Alfvén qui constitue la brique fondamentale de la turbulence MHD décrite par PP98. Notre terme correctif serait-il une trace de la correction du mode d'Alfvén pouvant induire l'instabilité firehose dans la cascade non-linéaire incompressible ?

Afin de répondre à cette question, nous avons voulu vérifier dans un modèle incompressible dépendant d'une pression gyrotope si le mode d'Alfvén-firehose existait. Mais aucune trace d'un modèle incompressible avec pression tensorielle n'a été trouvée dans la littérature. En fait, si l'on approche le problème sous un autre angle, celui des fermetures, on se rend compte que le cadre gyrotope est habituellement abordé à travers la fermeture CGL. Ajouter une fermeture incompressible signifierait alors, surcontraindre le système : une équation de trop par rapport au nombre de variables. La viabilité du système résult-

tant en tant que modèle réaliste serait remise en cause. Par contre, on peut y appliquer l'incompressibilité telle une limite comme on le discutera dans la section ??.

## 8.2 Proposition d'un modèle incompressible gyrotrope

Nous avons construit un nouveau modèle en partant de la question : comment décrire un écoulement magnétisé et incompressible dépendant d'une pression gyrotrope ?

Dans un tel écoulement, la contrainte  $\rho = \rho_0$  et donc  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$  s'impose. Elle induit pour le champ magnétique  $\nabla \cdot \mathbf{v}_A = 0$ . On a aussi besoin d'une équation sur la vitesse (premier moment) et d'une équation sur le champ magnétique (équation d'induction). L'hypothèse d'une pression gyrotrope va s'exprimer dans l'équation sur la vitesse à travers  $\nabla \cdot \bar{\mathbf{P}}$ . On a alors 7 équations (la contrainte incompressible, les trois composantes de la vitesse et les trois composantes du champ magnétique) pour 8 variables scalaires (les composantes de la vitesse et du champ magnétique, et les pressions parallèles et perpendiculaires). Il manque donc une équation pour fermer le système. Afin de maintenir la cohérence avec la définition de l'énergie interne telle que  $u = \frac{1}{2\rho_0}(2p_\perp + p_\parallel)$ , nous avons décidé de fermer le système avec l'équation sur la trace du tenseur de pression avec  $\nabla \cdot \mathbf{q} = 0$ . Ce système est donc compatible avec la loi exacte (8.3).

Par conséquent, le modèle incompressible gyrotrope envisagé est :

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \nabla \cdot \mathbf{v}_A = 0 \quad (8.7)$$

$$\partial_t \mathbf{v} + \nabla \cdot (\mathbf{v} \mathbf{v} - \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A + \frac{1}{\rho_0} \bar{\mathbf{P}}_*) = 0 \quad (8.8)$$

$$\partial_t p + \nabla \cdot (p \mathbf{v}) + \frac{2}{3} \bar{\mathbf{\Pi}} : \nabla \mathbf{v} = 0 \quad (8.9)$$

$$\partial_t \mathbf{v}_A - \nabla \cdot (\mathbf{v}_A \mathbf{v} - \mathbf{v} \mathbf{v}_A) = 0 \quad (8.10)$$

avec :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{P}} &= p \bar{\mathbf{I}} + \bar{\mathbf{\Pi}} = \frac{1}{3}(2p_\perp + p_\parallel) \bar{\mathbf{I}} + (p_\parallel - p_\perp)(\mathbf{b} \mathbf{b} - \frac{1}{3} \bar{\mathbf{I}}) \\ \nabla \cdot \bar{\mathbf{P}}_* &= \nabla(p_\perp + \frac{1}{2}\rho_0 \mathbf{v}_A^2) + \mathbf{b} \mathbf{b} \cdot \nabla(p_\parallel - p_\perp) + (p_\parallel - p_\perp) \frac{1}{\mathbf{v}_A^2} (\mathbf{v}_A \cdot \nabla \mathbf{v}_A - 2 \mathbf{v}_A \mathbf{b} \mathbf{b} : \nabla \mathbf{v}_A) \\ \bar{\mathbf{\Pi}} : \nabla \mathbf{v} &= (p_\parallel - p_\perp) \mathbf{b} \mathbf{b} : \nabla \mathbf{v} \end{aligned}$$

Nous proposons de linéariser ce nouveau modèle afin d'en identifier les modes propres, et à minima vérifier que le mode d'Alfvén-firehose en est une solution. Sa forme linéaire, obtenue en suivant la méthode résumée section 3.4, est :

$$0 = k_\perp v_{1x} + k_\parallel v_{1z} \quad (8.11)$$

$$0 = -\omega v_{1x} + \frac{p_{\perp 1}}{\rho_0} k_\perp + \left( \frac{p_{\parallel 0} - p_{\perp 0}}{\rho_0 v_{A0}^2} - 1 \right) v_{A0} k_\parallel v_{A1x} + v_{A0} k_\perp v_{A1z} \quad (8.12)$$

$$0 = -\omega v_{1y} + \left( \frac{p_{\parallel 0} - p_{\perp 0}}{\rho_0 v_{A0}^2} - 1 \right) v_{A0} k_\parallel v_{A1y} \quad (8.13)$$

$$0 = -\omega v_{1z} + \frac{p_{\parallel 1}}{\rho_0} k_\parallel - \frac{p_{\parallel 0} - p_{\perp 0}}{\rho_0 v_{A0}^2} v_{A0} k_\parallel v_{A1z} \quad (8.14)$$

$$0 = -\omega(2p_{\perp 1} + p_{\parallel 1}) + 2(p_{\parallel 0} - p_{\perp 0}) k_\parallel v_{1z} \quad (8.15)$$

$$0 = -\omega \mathbf{v}_{A1} - k_\parallel v_{A0} \mathbf{v}_1 \quad (8.16)$$

Après quelques manipulations, ce système peut s'écrire sous l'équation de dispersion  $\overline{\mathbf{M}} \cdot \mathbf{v}_1 = 0$  avec la matrice

$$\overline{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} k_\perp & 0 & k_\parallel \\ 0 & \omega^2 - F v_{A0}^2 k_\parallel^2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2(k_\perp^2 - 2k_\parallel^2) - (Gk_\perp^2 + 2Fk_\parallel^2)v_{A0}^2 k_\parallel^2 \end{pmatrix} \quad (8.17)$$

En notant  $F = 1 - \frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0})$  et  $G = 3\frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0}) - 2$ .

La relation de dispersion est donc :

$$(\omega^2 - F v_{A0}^2 k_\parallel^2)(\omega^2(k_\perp^2 - 2k_\parallel^2) - (Gk_\perp^2 + 2Fk_\parallel^2)v_{A0}^2 k_\parallel^2) = 0 \quad (8.18)$$

On retrouve le mode d'Alfvén incompressible firehose  $\omega_A = \pm k_\parallel v_{A0} \sqrt{F}$  polarisé suivant  $(0, 1, 0)$ . Cette solution s'exprime à travers les différentes quantités :

$$\mathbf{v}_1 = (0, 1, 0) \quad (8.19)$$

$$\mathbf{v}_{A1} = \pm \frac{1}{\sqrt{F}} \mathbf{v}_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0})}} \mathbf{v}_1 \quad (8.20)$$

$$p_{\parallel 1} = (2F - 1)\rho_0 v_{A0} v_{A1z} = 0 \quad (8.21)$$

$$p_{\perp 1} = \rho_0 v_{A0} v_{A1z} = 0 \quad (8.22)$$

On retrouve bien le comportement du mode d'Alfvén incompressible au niveau des pressions et la relation linéaire entre la vitesse et le champ magnétique. On note que cette relation est altérée par le critère firehose. On remarque que les fluctuations de pressions sont nulles (c'est aussi le cas dans le cadre CGL [HUNANA *et al.* 2019]). Les seules fluctuations accompagnant ce mode sont celles de  $v_{1y}$  et  $v_{A1y}$ . Sa contribution à travers le terme correctif du taux de cascade sera donc gouvernée par les fluctuations de la direction du champ magnétique. Cela nous donne l'approximation :

$$-4(\varepsilon - \varepsilon_{PP98}) \simeq \langle \delta(b_y b_y) : \delta(\partial_y v_y) \rangle. \quad (8.23)$$

De plus, si ce mode est seul, il n'engendrera pas l'apparition d'anisotropie de pression autre que celle existant initialement dans le système. Ce résultat tend donc en faveur d'un effet de l'anisotropie de pression sur la cascade turbulence à travers l'altération firehose du mode d'Alfvén si une anisotropie de pression existe dans le système (par exemple, induite grâce à des paramètres initiaux dans une simulation). Une surprise nous attend : un nouveau mode émerge de la relation de dispersion (8.18).

Ce nouveau mode, polarisé suivant  $(1, 0, -\tan \theta)$ , est :

$$\omega_N = \pm \sqrt{\frac{Gk_\perp^2 + 2Fk_\parallel^2}{k_\perp^2 - 2k_\parallel^2}} v_{A0} k_\parallel = \pm \sqrt{\frac{(3\frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0}) - 2)k_\perp^2 + 2(1 - \frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0}))k_\parallel^2}{k_\perp^2 - 2k_\parallel^2}} v_{A0} k_\parallel \quad (8.24)$$

Les différentes quantités sont alors :

$$\mathbf{v}_1 = (1, 0, -\tan \theta) \quad (8.25)$$

$$\mathbf{v}_{A1} = \pm \sqrt{\frac{k_\perp^2 - 2k_\parallel^2}{Gk_\perp^2 + 2Fk_\parallel^2}} \mathbf{v}_1 \quad (8.26)$$

$$p_{\parallel 1} = \frac{(G+F-1)k_\perp^2 + 2k_\parallel^2}{k_\perp^2 - 2k_\parallel^2} \rho_0 v_{A0} v_{A1z} = \frac{(\beta_{\parallel 0}(1-a_{p0})-2)k_\perp^2 + 2k_\parallel^2}{k_\perp^2 - 2k_\parallel^2} \rho_0 v_{A0} v_{A1z} \quad (8.27)$$

$$\begin{aligned} p_{\perp 1} &= \frac{\rho_0}{k_\perp^2} \frac{4Fk_\parallel^2 k_\parallel^2 + (G-F+2)k_\perp^2 k_\parallel^2 - k_\perp^2 k_\parallel^2}{k_\perp^2 - 2k_\parallel^2} v_{A0} v_{A1z} \\ &= \frac{(2\beta_{\parallel 0}(1-a_{p0})-1)(k_\perp^2 - k_\parallel^2)k_\parallel^2 + 3k_\parallel^2 k_\perp^2 - k_\perp^2 k_\parallel^2}{k_\perp^2(k_\perp^2 - 2k_\parallel^2)} \rho_0 v_{A0} v_{A1z} \end{aligned} \quad (8.28)$$

On retrouve des résultats similaires au mode pseudo-alfvénique donnant une pression non nulle proportionnelle à  $v_{A1z}$  mais avec des facteurs portant une dépendance angulaire complexes mêlées à l'anisotropie de pression moyenne. Considérer une gyrotropie de pression lève donc la dégénérescence observée dans le cas incompressible avec pression isotrope (voir Chapitre 3) similairement à la levée de dégénérescence menant aux modes magnétosonores dans le compressible. Ce nouveau mode s'accompagnant de fluctuation des pressions, qui ne sont pas identiques, il pourra engendrer des fluctuations du taux d'anisotropie de pression. Son apport au taux de cascade turbulent pourrait alors s'exprimer à travers notre terme correctif qui dépendrait des fluctuations de pression. Il pourrait aussi interagir non linéairement avec le mode d'Alfvén-firehose<sup>1</sup>.

Ce modèle proposé admet donc deux modes linéaires. Ils forment donc deux canaux potentiels de développement de la cascade turbulente à l'image des modes d'Alfvén et pseudo-alfvénique dans la turbulence MHD incompressible. Par curiosité, une étude comparative et paramétrique des modes d'Alfvén-firehose et du nouveau mode a été menée. Elle est résumée dans la section 8.3.

### 8.3 Etude paramétrique des modes linéaires du modèle incompressible gyrotrope

La linéarisation du système d'équation incompressible gyrotrope proposé a abouti sur deux modes que l'on peut exprimer en fonction de  $\theta$  :

- le mode d'Alfvén-firehose :  $\omega = \omega_A$  avec  $\frac{\omega_A^2}{v_{A0}^2 k_\parallel^2} = F$  et  $F = 1 - \frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0})$ ,
- un nouveau mode :  $\omega = \omega_N$  avec  $\frac{\omega_N^2}{v_{A0}^2 k_\parallel^2} = \frac{G \sin^2 \theta - 2F \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta - 2\cos^2 \theta}$  et  $G = 3\frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0}) - 2$

Le mode d'Alfvén-firehose qui s'écrit  $\omega_A = \pm \sqrt{F} v_{A0} k_\parallel$  est linéaire en  $v_{A0} k_\parallel$  avec une pente dépendant de  $a_{p0}$  et  $\beta_{\parallel 0}$ . Le nouveau mode est aussi linéaire en  $v_{A0} k_\parallel$  mais sa pente va aussi dépendre de  $\theta$ . Ils sont représentés sur la FIGURE 8.1 normalisé par  $\omega_{ci}$  la pulsation cyclotron des ions, et en fonction de  $k_\parallel d_i = k_\parallel v_{A0} / \omega_{ci}$  avec  $d_i$  la longueur inertielle ionique. Le mode d'Alfvén-firehose est représenté en bleu et le nouveau mode

---

1. Il serait intéressant de les étudier avec des méthodes de turbulences d'ondes par exemple. Une telle étude n'a pas été entamée.

dans des couleurs chaudes (orange pour  $\theta = 25^\circ$  et rouge pour  $\theta = 70^\circ$ ). On remarque

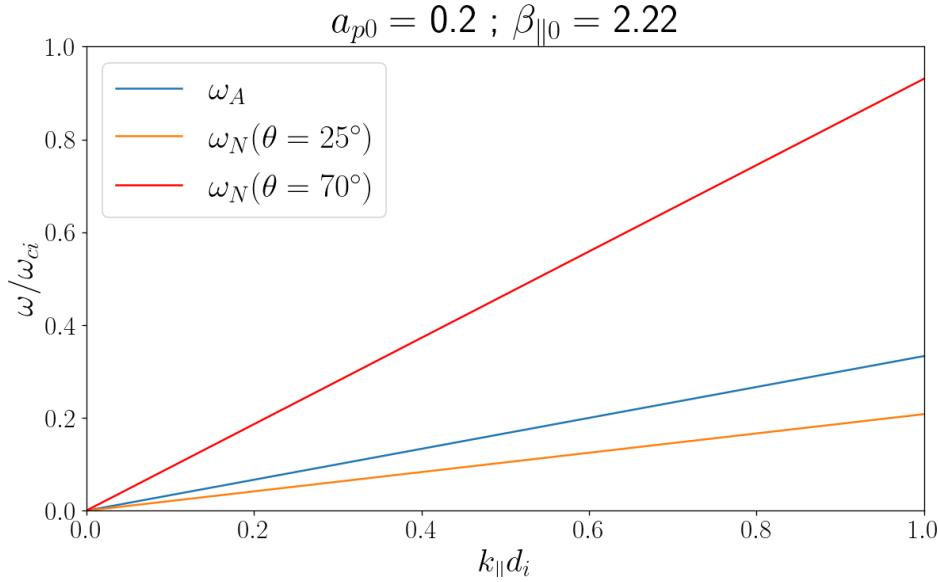


FIGURE 8.1 – Mode d’Alfvén-firehose ( $\omega_A$ , bleu) et nouveau mode ( $\omega_N$ , orange pour  $\theta = 25^\circ$  et rouge pour  $\theta = 70^\circ$ ) normalisés par  $\omega_{ci}$  la pulsation cyclotron des ions et représentés en fonction de  $k_{\parallel}d_i$ , avec  $d_i = v_{A0}/\omega_{ci}$ , la longueur inertuelle ionique.

que le nouveau mode peut être plus lent ou plus rapide que le mode d’Alfvén-firehose en fonction de  $\theta$ . Ce n’est pas montrer ici mais il peut aussi devenir instable quand le mode d’Alfvén-firehose est stable. Ils sont donc très différents. Ces observations, nous ont amené à faire une étude paramétrique en fonction de  $\theta$  de la vitesse de phase et du taux d’accroissement/ammortissement des instabilités.

Au cours de cette étude, on a observé cinq comportements différents pour le nouveau mode suivant la valeur du couple  $\{\beta_{\parallel 0}; a_{p0}\}$ . Ces comportements sont résumés sur la figure 8.2 à travers cinq couples représentatifs. Sur l’ensemble de graphiques de la FIGURE 8.2 sont tracés en fonction de  $\theta$ , pour cinq couples représentatifs et chaque mode, la partie réelle de  $\omega$  normalisé par le mode d’Alfvén,  $\Re[\omega/(k_{\parallel}v_{A0})]$  (colonne a) correspondant à sa vitesse de phase, ainsi que sa partie imaginaire ( $\Im[\omega/(k_{\parallel}v_{A0})]$ , colonne b), qui correspond au taux d’accroissement.  $\omega$  étant ou réel ou purement imaginaire, ces graphiques sont complémentaires : si le mode est instable, il apparaîtra sur la colonne b, et s’il est stable sur la colonne a (à l’exception du graphique (3a) où les modes coïncident). Le caractère instable firehose du mode d’Alfvén (bleu) est ainsi retrouvé lorsque  $F < 0$  sur le graphique (1b).

Le nouveau mode semble tendre asymptotiquement vers le mode d’Alfvén pour  $\theta \sim 0^\circ$  et vers l’asymptote  $\omega_P = \pm k_{\parallel}v_{A0}\sqrt{G}$  représentée par une ligne discontinue verte, pour  $\theta \sim 90^\circ$ . Une asymptote angulaire est aussi visible en un angle que l’on note  $\theta_2$ , on verra par la suite que cet angle est solution de  $\tan^2 \theta = 2$ . La stabilité du nouveau mode à une dépendance forte en  $\theta$  : pour tout couple, il existe une gamme angulaire telle que le mode soit stable et, à l’exception du couple (3), une gamme telle que le mode est instable.

On propose maintenant de démontrer les comportements identifiés pour le nouveau mode en fonction de  $a_{p0}$  et  $\beta_{\parallel 0}$ . Au fil de cette analyse, on va construire le diagramme de la FIGURE 8.3. Les emplacements des différents couples présentés sur la FIGURE 8.2 sont indiqués par des croix rouges.

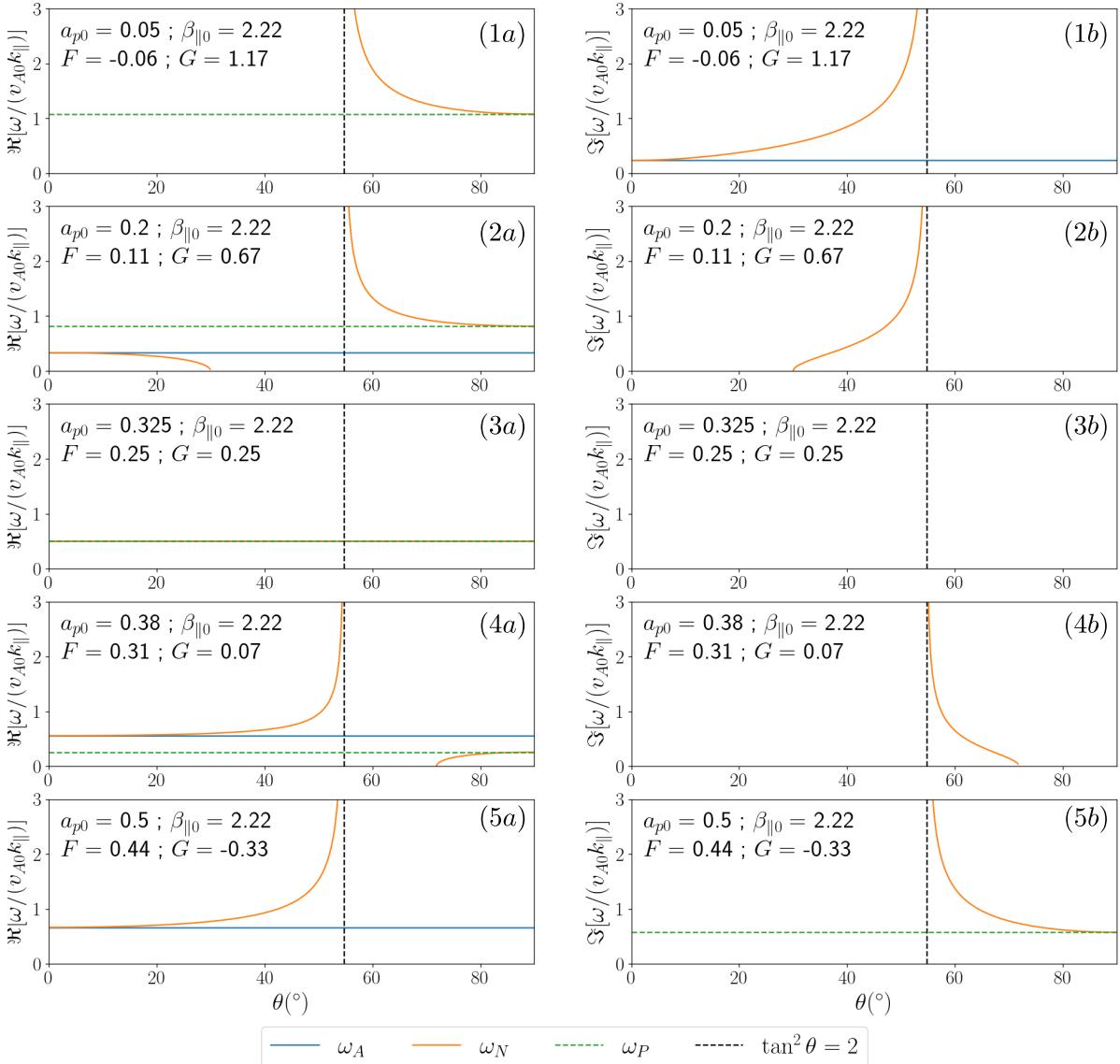


FIGURE 8.2 – Vitesse de phase  $\Re[\omega/(kv_{A0})]$  (colonne a) et taux de croissance des instabilités  $\Im[\omega/(kv_{A0})]$  (colonne b) normalisées par  $v_{A0}$  en fonction de l’angle  $\theta$  pour le nouveau mode incompressible ( $\omega_N$ , orange) et pour le mode d’Alfvén ( $\omega_A$ , bleu). Des asymptotes sont tracées en lignes discontinues. En vert : mode asymptotique  $\omega_P$ . En noir : angle asymptotique  $\theta_2$ . Première ligne : couple (1) tel que  $a_{p0} = 0.05$ ,  $\beta_{\parallel 0} = 20/9 \Rightarrow$  instabilité firehose ( $F < 0$ ). Deuxième ligne : couple (2) tel que  $a_{p0} = 0.2$ ,  $\beta_{\parallel 0} = 20/9$ . Troisième ligne : couple (3) tel que  $a_{p0} = 0.325$ ,  $\beta_{\parallel 0} = 20/9 \Rightarrow$  seul cas stable pour tout  $\theta$  ( $F = G$ ). Quatrième ligne : couple (4) tel que  $a_{p0} = 0.38$ ,  $\beta_{\parallel 0} = 20/9$ . Cinquième ligne : couple (5) tel que  $a_{p0} = 0.5$ ,  $\beta_{\parallel 0} = 20/9 \Rightarrow$  instabilité pseudo-firehose perpendiculaire ( $G < 0$ ). Sauf graphique (3a) où tous les modes coïncident, lorsque qu’un mode disparaît d’un graphique de la colonne a, il apparaît sur le graphique de la colonne b.

**Etude asymptotique angulaire :** Si  $\theta \rightarrow 0^\circ$  ( $k_\parallel \gg k_\perp$ ), alors  $\frac{\omega_N^2}{v_{A0}^2 k^2} \rightarrow F \cos^2 \theta$ . La convergence vers le mode d’Alfvén-firehose du nouveau mode observée en  $\theta \rightarrow 0^\circ$  sur la FIGURE 8.2 est ainsi vérifiée. Comme cette limite peut être stable ou instable en fonction

du signe de  $F$ , on a représenté sur la FIGURE 8.3, la frontière  $F = 0$  en bleue et bleutée la zone où  $F < 0$ . On retrouve dans ce comportement stable/instable l'instabilité firehose «parallèle» qui est présente par exemple pour le mode lent dans le cadre compressible. Le couple (1), tel que  $F < 0$ , est un exemple instable : le nouveau mode et le mode d'Alfvén apparaissent dans la colonne du taux de croissance (graphique (1b)).

Si  $\theta \rightarrow 90^\circ$  ( $k_\perp \ll k_\parallel$ ), alors  $\frac{\omega_N^2}{v_{A0}^2 k^2} \rightarrow G \cos^2 \theta$ . On retrouve l'asymptote  $\omega_P$  et tracé en vert sur la FIGURE 8.2. Il est instable si  $G < 0$ . La comparaison de  $G$  et  $F$ , qui ont la même structure à un facteur 3/2 et un signe près, nous inspirant, on appellera cette instabilité «instabilité pseudo-firehose perpendiculaire»<sup>2</sup>. Elle apparaît pour le couple (5) (graphique (5b)). Sur la FIGURE 8.3, on indique la frontière  $G = 0$  en vert et la zone où  $G < 0$  par une aire verte.

**Ainsi grâce à  $F$  et  $G$ , on peut déduire qu'une instabilité pourra se développer dans le système pour tout couple  $\{\beta_{\parallel 0}; a_{p0}\}$  tel que  $\frac{2}{3} > \frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0})$  (instabilité pseudo-firehose perpendiculaire, couple (5) et aire verte sur FIGURE 8.3) ou  $\frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0}) > 1$  (instabilité firehose parallèle, couple (1) et aire bleue sur FIGURE 8.3).** Dans la zone intermédiaire (blanche sur la FIGURE 8.3),  $G > 0$  et  $F > 0$ .

**Etude angulaire complète du nouveau mode :** Pour les angles  $\theta$  plus obliques, le comportement de  $\omega_N$  est plus difficile à établir, le signe de  $\sin^2 \theta - 2 \cos^2 \theta$  venant compenser le signe de  $G \sin^2 \theta - 2F \cos^2 \theta$ . Une instabilité, entre l'instabilité firehose parallèle et l'instabilité pseudo-firehose perpendiculaire, pourra émerger. On la nommera «instabilité pseudo-firehose oblique». Elle apparaît pour les couples (2) (graphique (2b)) et (4) (graphique (4b)). La condition d'instabilité est obtenue pour  $F$  et  $G$  tels que :

$$(\tan^2 \theta - 2)(G \tan^2 \theta - 2F) < 0 \quad (8.29)$$

$g(\theta) = (\tan^2 \theta - 2)(G \tan^2 \theta - 2F)$  est une parabole présentant deux racines :

- $\tan^2 \theta = 2$  en laquelle  $\omega_N^2 \rightarrow \infty$  (asymptote verticale indiquée en pointillés sur FIGURE 8.2), on la note  $\theta_2$ ,
- $\tan^2 \theta = 2\frac{F}{G}$  en laquelle  $\omega_N^2 \rightarrow 0$ , on la note  $\theta_{F/G}$ .

La stabilité du nouveau mode dépendra donc de la position de  $\theta$  par rapport à  $\theta_2$  et  $\theta_{F/G}$ .

Pour que le nouveau mode soit stable pour tout  $\theta$ , il faut  $g(\theta) > 0$  pour tout  $\theta$ . Cela n'est possible que si  $F = G$ , alors  $g(\theta) = (\tan^2 \theta - 2)^2 > 0$ . Dans ce cas,  $\omega_N = \omega_A = \omega_P$ . Sur la FIGURE 8.3, le critère  $F = G$  est indiqué par la courbe noire et il est illustré par le couple (3) (graphiques (3a) et (3b)). **Par conséquent, en fonction de  $a_{p0}$  et  $\beta_{\parallel 0}$ , le nouveau mode sera stable pour tout  $\theta$  si et seulement si  $\frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0}) = \frac{3}{4}$ .**

$F = G$ ,  $G = 0$  et  $F = 0$  découpent le diagramme de la FIGURE 8.3 en quatre zones que l'on va étudier séparément.

Si  $G < 0$  (zone verte), alors  $F > 0$ . Dans ce cas,  $g(\theta) < 0$  si  $\theta > \theta_2$ . Cette situation est illustrée par le couple (5) (graphiques (5a) et (5b)), instable pour tout angle supérieur à  $\theta_2$ . On peut raccrocher à cette condition le cas  $G = 0$  puisque alors  $F = 1/3$ , et la parabole sera négative si  $\tan^2 \theta > 2$ . Dans ces cas, on retrouve l'instabilité pseudo-firehose perpendiculaire découverte asymptotiquement si  $\theta \rightarrow 90^\circ$ . On peut maintenant compléter ses conditions d'existence qui deviennent : **l'instabilité pseudo-firehose perpendiculaire peut se développer si  $G < 0$  pour tout angle  $\theta > \theta_2$ .**

---

2. Cette dénomination n'est proposée qu'à cause de la similarité des critères d'instabilités. Le comportement des quantités n'a pas été vérifié.

Si  $G > 0$  et  $F/G > 1$  (zone blanche délimitée par les courbes verte et noire),  $g(\theta) < 0$  si  $2\frac{F}{G} > \tan^2 \theta > 2$ . Cette situation est illustrée par le couple (4) (graphiques (4a) et (4b)). L'instabilité s'y développant est l'instabilité pseudo-firehose oblique.

Si  $G > 0$  et  $F/G < 1$  (zone blanche délimitée par les courbes bleue et noire et zone bleue),  $g(\theta) < 0$  si  $2 > \tan^2 \theta > 2\frac{F}{G}$ . Si  $F < 0$ , l'instabilité firehose parallèle se développe pour tout angle  $\theta < \theta_2$ . Ce cas est illustré par le couple (1) (graphiques (1a) et (1b)). Si  $F > 0$ , la situation est illustrée par le couple (2) (graphiques (2a) et (2b)). L'instabilité visible est encore une fois l'instabilité pseudo-firehose oblique. Sa condition d'apparition est donc : l'instabilité pseudo-firehose oblique peut se développer si  $G > 0$  et  $F > 0$  mais  $G \neq F$ , pour tout angle  $\theta$  entre  $\theta_2$  et  $\theta_{F/G}$ .

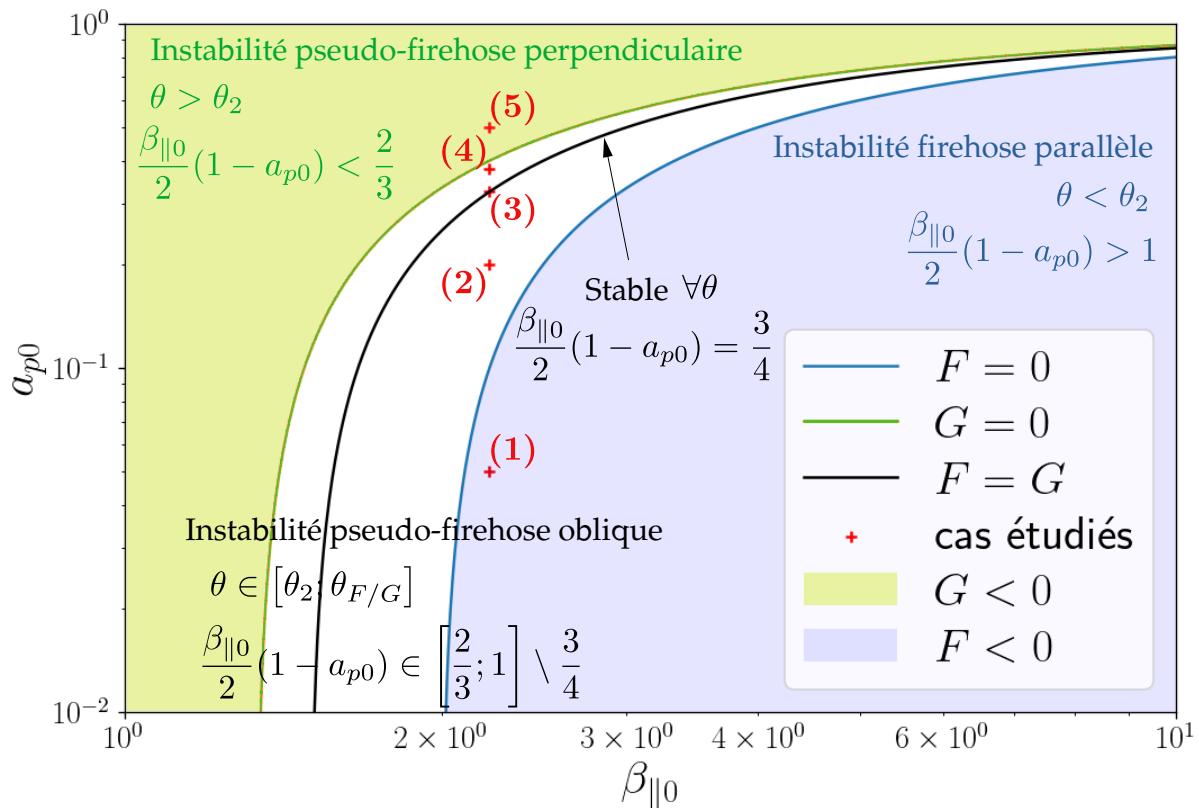


FIGURE 8.3 – Diagramme  $a_{p0} - \beta_{\parallel 0}$  résumant l'étude du nouveau mode. Croix rouges : couples  $\{\beta_{\parallel 0}; a_{p0}\}$  sélectionnés pour l'étude paramétrique de la FIGURE 8.2. Frontière d'instabilités firehose  $F = 0$  (bleu) et zone instable ( $F < 0$ , bleue) associée. Frontière d'instabilités pseudo-firehose perpendiculaire  $G = 0$  (verte) et zone instable ( $G < 0$ , verte) associée. Ligne noire : ensemble des couples  $\{\beta_{\parallel 0}; a_{p0}\}$  stables pour tout angle  $\theta$  paramétrisé par  $F = G$ . Zone blanche : instabilité pseudo-firehose oblique.

La zone de stabilité de ce nouveau mode en fonction des paramètres  $\beta_{\parallel 0}$  et  $a_{p0}$  est donc quasi-inexistante. Un résumé de l'ensemble des éléments de cette analyse est donnée sur la FIGURE 8.3 Sachant que la problématique principale de ce travail se place dans le cadre compressible, l'exploitation de ce modèle incompressible n'a pas été engagé.

## 8.4 Limite incompressible du modèle CGL

Dans le cas MHD compressible avec pression isotrope, le mode pseudo-alfvénique apparaît comme une limite incompressible des modes compressibles magnétosoniques. Similairement, on s'est demandé si l'on pouvait retrouver une trace du nouveau mode dans la limite incompressible du modèle CGL linéaire.

Dans le cas linéaire, le modèle CGL donne l'équation de dispersion (9.48) que l'on va simplement noter  $\bar{\mathbf{M}}\mathbf{v}_1 = 0$ . Avec la contrainte incompressible  $\nabla \cdot \mathbf{v}_1 = 0$ , on peut écrire  $\mathbf{v}_1$  sous la forme d'un potentiel vecteur  $\Omega : \mathbf{v}_1 = \nabla \times \Omega = \bar{\mathbf{N}}\Omega$  avec  $\bar{\mathbf{N}} = i\mathbf{k} \times \bar{\mathbf{I}}$  alors à travers l'équation de dispersion :  $\bar{\mathbf{M}}\bar{\mathbf{N}}\Omega = 0$  avec

$$\bar{\mathbf{M}}\bar{\mathbf{N}} = \begin{pmatrix} 0 & -k_{\parallel} \left( \frac{\omega^2 - \omega_A^2}{v_{A0}^2 k_{\parallel}^2} - \left( \frac{\beta_{\parallel 0}}{2} a_{p0} + 1 \right) \frac{k_{\perp}^2}{k_{\parallel}^2} \right) & 0 \\ k_{\parallel} \frac{\omega^2 - \omega_A^2}{v_{A0}^2 k_{\parallel}^2} & 0 & -k_{\perp} \frac{\omega^2 - \omega_A^2}{v_{A0}^2 k_{\parallel}^2} \\ 0 & k_{\perp} \left( \frac{\omega^2}{v_{A0}^2 k_{\parallel}^2} - \frac{\beta_{\parallel 0}}{2} (3 - a_{p0}) \right) & 0 \end{pmatrix} \quad (8.30)$$

où  $\omega_A^2 = -v_{A0}^2 k_{\parallel}^2 \left( \frac{\beta_{\parallel 0}}{2} (1 - a_{p0}) - 1 \right)$  correspond au mode d'Alfvén-firehose incompressible. On remarque que ce mode est solution si  $\Omega_y = 0$ , c'est-à-dire pour une polarisation de la vitesse orientée suivant  $(0, 1, 0)$ .

On a vu dans la section 8.4 que le nouveau mode est polarisé suivant  $(\cos \theta, 0, -\sin \theta)$ . Si l'on impose cette polarisation dans  $\Omega$  on obtient  $\Omega_y \neq 0$ . Dans ce cas l'équation de dispersion peut alors s'écrire sous la forme du système :

$$k_{\parallel} (\omega^2 - \omega_A^2 - v_{A0}^2 \left( \frac{\beta_{\parallel 0}}{2} a_{p0} + 1 \right) k_{\perp}^2) = 0 \quad (8.31)$$

$$k_{\perp} (\omega^2 - v_{A0}^2 \frac{\beta_{\parallel 0}}{2} (3 - a_{p0}) k_{\parallel}^2) = 0 \quad (8.32)$$

$$k_{\parallel} \Omega_x - k_{\perp} \Omega_z = 0 \quad (8.33)$$

On va étudier ce système en fonction de l'angle  $\theta$  de propagation :

- $\theta = 0^\circ \Rightarrow k_{\perp} = 0$  et on suppose  $k_{\parallel} \neq 0$ , alors  $\omega^2 = \omega_A^2$  et  $\Omega_x = 0$ . On retrouve le mode firehose parallèle associé à un champ de vitesse sera polarisé suivant  $(1, 0, 0)$ .
- $\theta = 90^\circ \Rightarrow k_{\parallel} = 0$  et on suppose  $k_{\perp} \neq 0$ , alors  $\omega^2 = 0$  et  $\Omega_z = 0$ . On obtient un mode qui ne se propage pas et un champ de vitesse polarisé suivant  $(0, 0, 1)$ .
- Si  $k_{\parallel} \neq 0$  et  $k_{\perp} \neq 0$ , alors  $\omega^2 = v_{A0}^2 \frac{\beta_{\parallel 0}}{2} (3 - a_{p0}) k_{\parallel}^2$  et  $\theta$  doit vérifier  $\tan^2 \theta = \frac{2(\beta_{\parallel 0}(2-a_{p0})-1)}{\beta_{\parallel 0}a_{p0}+2}$ .

Après quelques manipulations de  $\omega^2 = v_{A0}^2 \frac{\beta_{\parallel 0}}{2} (3 - a_{p0}) k_{\parallel}^2$  et de la condition  $\tan^2 \theta = \frac{2(\beta_{\parallel 0}(2-a_{p0})-1)}{\beta_{\parallel 0}a_{p0}+2}$ , il est possible de faire ressortir la relation de dispersion du nouveau mode.

On remarque qu'appliquer la contrainte incompressible sur le modèle CGL revient à chercher la limite telle que  $p_{\parallel}$  ou  $p_{\perp}$  respecte leur équation individuelle dans le modèle incompressible gyrotron. En fait, la limite incompressible du modèle CGL correspond à l'intersection des solutions des modèles incompressible gyrotron défini avec la trace de la pression, incompressible gyrotron défini avec l'équation sur  $p_{\parallel}$  et incompressible gyrotron défini avec l'équation sur  $p_{\perp}$ . Dans chacun de ces modèles, le mode d'Alfvén-

firehose sera accompagné d'un nouveau mode dont l'expression dépend du choix de la fermeture sur la pression. Mais tous seront polarisé tel que  $(\cos \theta, 0, -\sin \theta)$  et peuvent être retrouvés dans le mode surconstraint du modèle CGL.

## 8.5 Synthèse : Limite incompressible et pistes d'étude

**Limite incompressible de la loi exacte avec pression tensorielle et cas gyrotronique :**

$$-4(\varepsilon - \varepsilon_{PP98}) = -2 \langle \delta(\bar{\mathbf{P}} - p\bar{\mathbf{I}}) : \delta(\nabla \mathbf{v}) \rangle = -2 \langle \delta\bar{\Pi} : \delta(\nabla \mathbf{v}) \rangle \quad (8.34)$$

$$-4(\varepsilon - \varepsilon_{PP98}) = -2 \left\langle \delta((p_{\parallel} - p_{\perp})(\mathbf{b}\mathbf{b} - \frac{1}{3}\bar{\mathbf{I}})) : \delta(\nabla \mathbf{v}) \right\rangle \quad (8.35)$$

⇒ Questionne l'existence d'un modèle incompressible gyrotronique.

**Modèle incompressible avec pression gyrotronique proposé compatible avec la loi exacte :**

$$\partial_t \mathbf{v} + \nabla \cdot (\mathbf{v}\mathbf{v} - \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A + \frac{1}{\rho_0} \bar{\mathbf{P}}_*) = 0 \quad (8.36)$$

$$\partial_t p + \nabla \cdot (p\mathbf{v}) + \frac{2}{3} \bar{\Pi} : \nabla \mathbf{v} = 0 \quad (8.37)$$

$$\partial_t \mathbf{v}_A - \nabla \cdot (\mathbf{v}_A \mathbf{v} - \mathbf{v} \mathbf{v}_A) = 0 \quad (8.38)$$

avec  $\bar{\mathbf{P}}_* = (p + p_m)\bar{\mathbf{I}} + \bar{\Pi}$ ,  $p_m = \frac{\rho_0 |\mathbf{v}_A|^2}{2}$ ,  $p = \frac{1}{3}(2p_{\perp} + p_{\parallel})$ ,

$$\bar{\Pi} = (p_{\parallel} - p_{\perp})(\mathbf{b}\mathbf{b} - \frac{1}{3}\bar{\mathbf{I}}), \quad \mathbf{b} = \frac{\mathbf{v}_A}{|\mathbf{v}_A|}, \quad \text{et} \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0.$$

**Etude linéaire du modèle proposé :**

- Mode d'Alfvén incompressible polarisé suivant  $(0, 1, 0)$  :

$$\frac{\omega^2}{v_{A0}^2 k_{\parallel}^2} + \frac{\beta_{\parallel 0}}{2} (1 - a_{p0}) - 1 = 0 \quad (8.39)$$

$$\text{Instabilité firehose : } \frac{\beta_{\parallel 0}}{2} (1 - a_{p0}) - 1 > 0 \quad (8.40)$$

- Nouveau mode polarisé suivant  $(1, 0, -\tan \theta)$  : (voir la FIGURE 8.3)

$$\frac{\omega^2}{v_{A0}^2 k_{\parallel}^2} - \frac{2(\frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0}) - 1) \cos^2 \theta + (3\frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0}) - 2) \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta - 2 \cos^2 \theta} = 0 \quad (8.41)$$

$$\text{Critère d'instabilité pseudo-firehose : } \frac{\beta_{\parallel 0}}{2} (1 - a_{p0}) \neq \frac{3}{4} \quad (8.42)$$

**Limite incompressible du modèle CGL :**

- Survie du mode d'Alfvén-firehose ⇒ Solution non-linéaire, pendant gyrotronique du mode d'Alfvén non linéaire ?
- Apparition d'un mode surcontraint correspondant au nouveau mode incompressible.

Les résultats obtenus ici à propos du nouveau modèle semble prometteur et feront l'objet d'une publication future.

## PARTIE II : CHAPITRE 9

# L RELAXER L'APPROXIMATION MHD ET ALLER VERS LE BI-FLUIDE

### Sommaire

---

9.1	La MHD-Hall . . . . .	97
9.2	Le modèle bi-fluide . . . . .	99
9.3	Le modèle analysé numériquement dans la partie III . . . . .	107
9.4	Synthèse de l'extension de la théorie des lois exactes à d'autres régimes . . . . .	112

---

Dans les chapitres précédents, l'équation d'induction (??) était celle de l'approximation MHD. Dans ce chapitre, nous allons relaxer les hypothèses sur l'équation d'induction en prenant d'abord en compte le terme Hall (section 9.1). Dans la section 9.2, nous dériverons une correction à la loi exacte associée à chaque niveau d'approximation de la loi d'Ohm en partant du modèle bi-fluide. Enfin dans la section 9.3, nous nous intéresserons au modèle gyrotope utilisé dans les simulations étudiées dans la partie III : un modèle LF/CGL-Hall- $\nabla P_e$  (avec la fermeture Landau-fluide (LF) gyrotope telle que  $\bar{\mathbf{q}} \neq 0$ ) prenant en compte la pression électronique dans la loi d'Ohm avec différentes fermetures (isotherme et gyrotope).

### 9.1 La MHD-Hall

Comme on l'a vue dans le chapitre 2 de l'Introduction, le terme Hall doit être pris en compte dans l'équation d'induction si l'on regarde des échelles proches de la longueur inertielle des ions, ou des fréquences proches de la fréquence cyclotron des ions. Par conséquent, la loi exacte obtenue avec une loi d'Ohm MHD perdra en validité près de ces échelles. Afin de tirer la description de la cascade dans ce domaine ionique, on doit donc calculer une correction à partir du terme Hall. Diverses formulations existent pour cette contribution dans le cas des modèles dépendant d'une pression isotrope mais qui devient-elle dans le cadre d'une fermeture avec pression tensorielle ?

En prenant en compte le terme Hall, l'équation d'induction devient :

$$\partial_t \mathbf{v}_A = \nabla \cdot (\mathbf{v}_A \mathbf{u} - \mathbf{u} \mathbf{v}_A) - \mathbf{u} \nabla \cdot \mathbf{v}_A + \frac{\mathbf{v}_A}{2} \nabla \cdot \mathbf{u} - \frac{\lambda_i}{\sqrt{\rho}} \nabla \times \left( \frac{\mathbf{j}}{\sqrt{\rho}} \times \mathbf{v}_A \right) \quad (9.1)$$

avec  $\lambda_i = m_i/|q_e|$ , constante analysée dans le chapitre 2 de l'Introduction,  $\mathbf{j} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0}} \nabla \times (\sqrt{\rho} \mathbf{v}_A)$ , la densité de courant et  $\mu_0$  la perméabilité du vide.

Puisque  $\sqrt{\rho} \mathbf{v}_A \cdot \nabla \times \left( \frac{\mathbf{j}}{\sqrt{\rho}} \times \mathbf{v}_A \right) = \nabla \cdot ((\mathbf{j} \times \mathbf{v}_A) \times \mathbf{v}_A)$ , l'équation d'énergie magnétique

(4.6) devient :

$$\partial_t E_m + \nabla \cdot (E_m \mathbf{v} + \lambda_i (\mathbf{j} \times \mathbf{v}_A) \times \mathbf{v}_A) = \rho \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A : \nabla \mathbf{v} - p_m \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (9.2)$$

Cette correction n'ajoute qu'un terme de type flux au bilan énergétique et n'impactera pas l'équation d'énergie interne. De plus, le terme Hall ne dépend pas du tenseur de pression. Par conséquent, elle n'influera pas littéralement sur les contributions du tenseur de pression et de l'énergie interne dans la loi exacte. Il faudra tout de même faire attention à ne pas utiliser les formes conservatives des pressions parallèle et perpendiculaire CGL (7.9) qui ne sont valables que dans le cas MHD, l'équation d'induction MHD étant utilisée pour les obtenir.

En notant génériquement  $\varepsilon_{mhd}$  le taux de cascade compressible obtenu avec un modèle dans lequel le terme Hall est négligé et  $\varepsilon_{hall}$  la correction Hall, le nouveau taux de cascade sera  $\varepsilon = \varepsilon_{mhd} + \varepsilon_{hall}$  avec :

$$\begin{aligned} -4\varepsilon_{hall} &= \lambda_i \nabla_\ell \cdot \left\langle (\mathbf{j} \times \mathbf{v}_A + \mathbf{j}' \times \mathbf{v}'_A) \times \delta \mathbf{v}_A - \delta \left( \frac{\mathbf{j}}{\rho} \times \mathbf{v}_A \right) \times (\rho \mathbf{v}_A + \rho' \mathbf{v}'_A) \right\rangle \\ &+ \frac{\lambda_i}{2} \left\langle (\rho' \mathbf{v}'_A \cdot \delta \mathbf{v}_A - \delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \mathbf{v}'_A) \nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{j}}{\rho} \right) - (\rho \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{v}_A - \delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \mathbf{v}_A) \nabla' \cdot \left( \frac{\mathbf{j}'}{\rho'} \right) \right\rangle \\ &- \lambda_i \left\langle \left( \rho' \mathbf{v}'_A \cdot \delta \left( \frac{\mathbf{j}}{\rho} \right) - \mathbf{v}'_A \cdot \delta \mathbf{j} \right) \nabla \cdot \mathbf{v}_A - \left( \rho \mathbf{v}_A \cdot \delta \left( \frac{\mathbf{j}}{\rho} \right) - \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{j} \right) \nabla' \cdot \mathbf{v}'_A \right\rangle \end{aligned} \quad (9.3)$$

Ce résultat est une adaptation à nos notations du résultat obtenu par [ANDRÉS, GALTIER *et al.* 2018] qui utilise la même fonction de corrélations de l'énergie magnétique,  $\mathcal{R}_m = \frac{1}{4} \langle (\rho' + \rho) \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A \rangle$ , que nous.

Dans le cas incompressible avec pression isotrope, diverses formes de  $\varepsilon_{hall}$  existent et ont été comparées par [FERRAND, GALTIER, SAHRAOUI, MEYRAND *et al.* 2019]. On retiendra la forme qu'ils ont dérivée et qui peut être retrouvée en prenant la limite incompressible de la correction (9.3) :

$$-4\varepsilon_{hall} \underset{\rho=\rho_0}{=} -\frac{\lambda_i}{2} \nabla_\ell \cdot \langle \delta \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{v}_A \delta \mathbf{j} - 2\delta \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{j} \delta \mathbf{v}_A \rangle \quad (9.4)$$

Similairement à la correction compressible, cette correction est applicable à notre loi incompressible avec pression gyrotrope.

Linéairement, le terme Hall va adapter les modes MHD et CGL afin d'y faire apparaître le mouvement gyrotropique des ions lorsqu'on s'approche de la fréquence cyclotron ionique  $\omega_{ci} = \frac{B_0}{\lambda_i}$ . Des modes whistlers (sifflants) et cyclotron ionique vont émerger. Pour plus de détails, se référer à la dérivation effectuée par [HUNANA *et al.* 2019]. On notera que plus l'angle de propagation sera oblique par rapport à  $\mathbf{b}_0$  et plus la correction Hall à la relation de dispersion sera affaiblie. En terme d'instabilité, l'instabilité firehose sera quelque peu stabilisée. En effet, le critère d'instabilité devient  $\frac{\beta_{||0}}{2}(1 - a_{p0}) > 1 + \frac{k_{||}^2 v_{A0}^2}{4\omega_{ci}^2}$ . Par conséquent, la zone de stabilité du cadran  $a_{p0} < 1$  dans le diagramme  $a_{p0} - \beta_{||0}$  (FIGURE 7.1) sera élargie : en  $a_{p0} = 0$ , le critère rejoindra  $\beta_{||0} = 2 + \frac{k_{||}^2 v_{A0}^2}{2\omega_{ci}^2}$  qui est supérieur au  $\beta_{||0} = 2$  obtenu dans le cas CGL. Le critère miroir ne sera quant à lui pas modifié.

## 9.2 Le modèle bi-fluide

Par curiosité, je me suis demandé à quoi ressemblerait la loi exacte si l'on prenait en compte l'ensemble de la loi d'Ohm généralisée (2.13) dans l'équation d'induction. Au lieu d'attaquer ce problème en relaxant petit à petit les approximations appliquées sur la loi d'Ohm, j'ai choisi de partir du modèle bi-fluide puis d'y prendre en compte la quasi-neutralité et de l'exprimer en fonction des grandeurs mono-fluide et enfin d'y injecter la loi d'Ohm généralisée. Il est ensuite possible de faire tendre la loi exacte obtenue vers différents régimes similairement au travail effectué par [BANERJEE et ANDRÉS 2020]. Contrairement à [BANERJEE et ANDRÉS 2020] proposant une loi dérivée avec un modèle bi-fluide fermé polytropiquement et similairement à la dérivation effectuée dans le chapitre 7, on considérera des pressions tensorielles et les équations d'énergie interne associée à chaque espèce en négligeant les flux de chaleur. Pour alléger un peu le calcul, on ne fait pas apparaître non plus les termes de forçage et dissipation.

La fonction de corrélation pour l'énergie électromagnétique sera choisie au plus près de celle utilisée jusqu'à présent c'est-à-dire  $\langle \rho \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}'_A \rangle$ .

Les équations bi-fluides utilisées sont :

$$\partial_t \rho_\alpha + \nabla \cdot (\rho_\alpha \mathbf{v}_\alpha) = 0 \quad (9.5)$$

$$\partial_t (\rho_\alpha \mathbf{v}_\alpha) + \nabla \cdot (\rho_\alpha \mathbf{v}_\alpha \mathbf{v}_\alpha + \overline{\mathbf{P}_\alpha}) - Q_\alpha \mathbf{E} - \mathbf{j}_\alpha \times \mathbf{B} = 0 \quad (9.6)$$

$$\partial_t u_\alpha + \mathbf{v}_\alpha \cdot \nabla u_\alpha + \frac{1}{\rho_\alpha} \overline{\mathbf{P}_\alpha} : \nabla \mathbf{v}_\alpha = 0 \quad (9.7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \epsilon_0 \partial_t \mathbf{E} \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (9.8)$$

$$\partial_t \mathbf{B} + \nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (9.9)$$

avec  $Q = \sum_\alpha Q_\alpha = \sum_\alpha q_\alpha n_\alpha$ ,  $\mathbf{j} = \sum_\alpha \mathbf{j}_\alpha = \sum_\alpha q_\alpha n_\alpha \mathbf{v}_\alpha$ .

Ces équations contiennent beaucoup de quantités constantes :  $m_\alpha$  dans  $\rho_\alpha$ ,  $q_\alpha$  pour chaque espèce,  $\mu_0$ ,  $\epsilon_0$ . Afin de réduire ce nombre de constantes qui viendront alourdir les calculs et de faire ressortir des constantes caractéristiques du plasma, nous allons normaliser les équations<sup>1</sup>. Ces constantes caractéristiques sont le rapport de masse  $\mu = \frac{m_e}{m_i + m_e} \simeq \frac{m_e}{m_i}$  puisque  $m_e \ll m_i$ , qui permet d'accéder facilement aux régimes MHD ( $\mu \rightarrow 0$ ) ou MHD électronique (EMHD,  $\mu \rightarrow 1$ ) et une longueur inertuelle sans dimension  $\lambda_i = \frac{\sqrt{m_i + m_e}}{L_0 \sqrt{\mu_0 n_0 e^2}} \simeq \frac{\sqrt{m_i}}{L_0 \sqrt{\mu_0 n_0 e^2}}$  que l'on note  $\lambda_i$  pour faciliter les comparaisons avec les résultats dimensionnés. Les vitesses seront normalisées par la vitesse de la lumière dans le vide  $c$ , et l'on note les quantités de références :

- Longueur :  $L_0$
- Temps :  $t_0 = \frac{L_0}{c}$
- Vitesse :  $V_0 = c$
- Densité de particule :  $n_0$
- Champ magnétique :  $B_0 = c \sqrt{\mu_0 n_0 (m_i + m_e)}$
- Champ électrique :  $E_0 = c B_0$
- Pression :  $P_0 = (m_i + m_e) n_0 c^2$

On pourrait noter les quantités sans dimension avec un « ~ », par exemple  $\tilde{\mathbf{v}}_i = \mathbf{v}_i / V_0$ , etc. Cependant, dans la suite de cette section, on ne fera pas apparaître les « ~ » afin d'alléger

1. Cela n'a pas été entrepris dans les modèles mono-fluides utilisés précédemment, car cela n'apportait aucune simplification ou information dans ces modèles.

les notations.

Le système sans dimension s'écrit donc :

$$\partial_t n_i + \nabla \cdot (n_i \mathbf{v}_i) = 0 \quad (9.10)$$

$$\partial_t n_e + \nabla \cdot (n_e \mathbf{v}_e) = 0 \quad (9.11)$$

$$\partial_t \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_i \cdot \nabla \mathbf{v}_i + \frac{1}{(1-\mu)n_i} \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}_i} - \frac{1}{(1-\mu)\lambda_i} \mathbf{E} - \frac{1}{(1-\mu)\lambda_i} \mathbf{v}_i \times \mathbf{B} = 0 \quad (9.12)$$

$$\partial_t \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_e \cdot \nabla \mathbf{v}_e + \frac{1}{\mu n_e} \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}_e} + \frac{1}{\mu \lambda_i} \mathbf{E} + \frac{1}{\mu \lambda_i} \mathbf{v}_e \times \mathbf{B} = 0 \quad (9.13)$$

$$\partial_t u_i + \mathbf{v}_i \cdot \nabla u_i + \frac{1}{(1-\mu)n_i} \overline{\mathbf{P}_i} : \nabla \mathbf{v}_i = 0 \quad (9.14)$$

$$\partial_t u_e + \mathbf{v}_e \cdot \nabla u_e + \frac{1}{\mu n_e} \overline{\mathbf{P}_e} : \nabla \mathbf{v}_e = 0 \quad (9.15)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\lambda_i} (n_i - n_e) \quad \nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{\lambda_i} (n_i \mathbf{v}_i - n_e \mathbf{v}_e) + \partial_t \mathbf{E} \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (9.16)$$

$$\partial_t \mathbf{B} + \nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (9.17)$$

Les grandeurs mono-fluides seront alors définies telles que  $\rho = (1-\mu)n_i + \mu n_e$  pour la densité,  $\mathbf{v} = \frac{(1-\mu)n_i \mathbf{v}_i + \mu n_e \mathbf{v}_e}{(1-\mu)n_i + \mu n_e}$  pour la vitesse,  $\mathbf{j} = \frac{1}{\lambda_i} (n_i \mathbf{v}_i - n_e \mathbf{v}_e)$  pour la densité de courant. Elles permettront de compacter un peu les équations. En combinant les équations (??), (9.12) et (9.13), on obtient l'évolution de  $\mathbf{j}$  qui sera nécessaire pour remplacer  $\mathbf{E}$  dans (9.17) :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} = & -\frac{\rho}{\mu n_i + (1-\mu)n_e} \mathbf{v} \times \mathbf{B} - \frac{\lambda_i(2\mu-1)}{\mu n_i + (1-\mu)n_e} \mathbf{j} \times \mathbf{B} + \lambda_i \frac{\mu \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}_i} - (1-\mu) \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}_e}}{\mu n_i + (1-\mu)n_e} \\ & + \frac{\lambda_i^2 \mu (1-\mu)}{\mu n_i + (1-\mu)n_e} \left[ \partial_t \mathbf{j} + \nabla \cdot \left( \frac{\rho \rho}{n_i n_e} \mathbf{v} \mathbf{j} + \frac{\rho \rho}{n_i n_e} \mathbf{j} \mathbf{v} + \frac{\lambda_i(2\mu-1)n_i}{n_i n_e} \mathbf{j} \mathbf{j} \right) \right] \\ & + \frac{\lambda_i \mu (1-\mu)}{\mu n_i + (1-\mu)n_e} \nabla \cdot \left( \frac{n_e - n_i}{n_i n_e} (\rho^2 \mathbf{v} \mathbf{v} + \mu^2 \lambda_i^2 \mathbf{j} \mathbf{j}) \right) \end{aligned} \quad (9.18)$$

Contrairement à la loi d'Ohm détaillée dans le chapitre 2, on n'y suppose ni la quasi-neutralité ( $n_i = n_e = \rho$ ) qui vient annuler la dernière ligne, ni  $\mu \rightarrow 0$ . A partir d'ici, on supposera l'hypothèse non-relativiste, qui permet de négliger les termes dépendant de  $\mathbf{E}$  devant ceux dépendant de  $\mathbf{B}$  dans (9.12) et (9.13) et (9.16). Comme on a besoin de l'équation d'induction, on doit garder le champ électrique dans l'équation (9.18) et (9.17). L'hypothèse non relativiste sera donc appliquée sur (9.18) en fonction de l'usage.

On définit aussi la vitesse d'Alfvén telle que  $\mathbf{v}_A = \frac{\mathbf{B}}{\sqrt{(1-\mu)n_i + \mu n_e}}$ . L'énergie totale non relativiste de ce système peut ainsi être séparée entre une énergie totale ionique et une électronique :

$$E_{tot} = E_{toti} + E_{tote} = \frac{1}{2} (1-\mu)n_i(|\mathbf{v}_i|^2 + |\mathbf{v}_A|^2 + 2u_i) + \frac{1}{2}\mu n_e(|\mathbf{v}_e|^2 + |\mathbf{v}_A|^2 + 2u_e)$$

L'équation d'induction (9.17) s'écrit en fonction de la vitesse d'Alfvén :

$$\partial_t \mathbf{v}_A = -\frac{\nabla \times \mathbf{E}}{\sqrt{(1-\mu)n_i + \mu n_e}} + \frac{\mathbf{v}_A}{2} \frac{\nabla \cdot ((1-\mu)n_i \mathbf{v}_i + \mu n_e \mathbf{v}_e)}{(1-\mu)n_i + \mu n_e} \quad (9.19)$$

$$(9.20)$$

En appliquant la méthode résumée dans la section I.3 sur les fonctions de corrélations d'énergie totale ionique,  $\mathcal{R}_{toti} = \frac{1-\mu}{4} \langle (n'_i + n_i)(\mathbf{v}'_i \cdot \mathbf{v}_i + \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A) + 2n'_i u_i + 2n_i u'_i \rangle$ , et électronique,  $\mathcal{R}_{tote} = \frac{\mu}{4} \langle (n'_e + n_e)(\mathbf{v}'_e \cdot \mathbf{v}_e + \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A) + 2n'_e u_e + 2n_e u'_e \rangle$  puis en supposant les hypothèses de stationnarité statistique et de séparation d'échelles de Kolmogorov, on obtient les lois exactes pour les taux de cascade,  $\varepsilon_i$  et  $\varepsilon_e$ , associés à chaque fluide et exprimés dans la zone inertielle :

$$\begin{aligned}
-4\varepsilon_i &= (1-\mu) (\nabla_\ell \cdot \langle \delta(n_i \mathbf{v}_i) \cdot \delta \mathbf{v}_i \delta \mathbf{v}_i \rangle + \langle \delta \mathbf{v}_i \cdot (n_i \mathbf{v}_i \nabla' \cdot \mathbf{v}'_i - n'_i \mathbf{v}'_i \nabla \cdot \mathbf{v}_i) \rangle) \\
&\quad + 2(1-\mu) (\nabla_\ell \cdot \langle \delta n_i \delta u_i \delta \mathbf{v}_i \rangle + \langle \delta u_i (n_i \nabla' \cdot \mathbf{v}'_i - n'_i \nabla \cdot \mathbf{v}_i) \rangle) \\
&\quad + \nabla_\ell \cdot \left\langle \delta(n_i \mathbf{v}_i) \cdot \delta \overline{\mathbf{P}}_i \delta \left( \frac{1}{n_i} \right) \right\rangle + \left\langle \delta \overline{\mathbf{P}}_i : \left( n_i \mathbf{v}_i \nabla' \left( \frac{1}{n'_i} \right) - n'_i \mathbf{v}'_i \nabla \left( \frac{1}{n_i} \right) \right) \right\rangle \\
&\quad + 2 \left\langle \delta \left( \frac{\overline{\mathbf{P}}_i}{n_i} \right) : (n'_i \nabla \mathbf{v}_i - n_i \nabla' \mathbf{v}'_i) \right\rangle \\
&\quad + \frac{1-\mu}{2} \left\langle \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A \left[ \frac{(1-\mu)(n'_i - n_i) - 2\mu n_e}{\rho} \nabla \cdot (n_i \mathbf{v}_i) + \frac{\mu(n'_i + n_i)}{\rho} \nabla \cdot (n_e \mathbf{v}_e) \right] \right\rangle \\
&\quad + \frac{1-\mu}{2} \left\langle \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}'_A \left[ \frac{(1-\mu)(n_i - n'_i) - 2\mu n'_e}{\rho'} \nabla' \cdot (n'_i \mathbf{v}'_i) + \frac{\mu(n'_i + n_i)}{\rho'} \nabla' \cdot (n'_e \mathbf{v}'_e) \right] \right\rangle \\
&\quad + \frac{1}{\lambda_i} \left\langle (n'_i + n_i) \left( \mathbf{v}'_i \cdot \mathbf{v}_i \times (\sqrt{\rho} \mathbf{v}_A) + \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}'_i \times (\sqrt{\rho'} \mathbf{v}'_A) \right) \right\rangle \\
&\quad - (1-\mu) \left\langle (n'_i + n_i) \left( \frac{\nabla' \cdot (\mathbf{E}' \times \mathbf{v}_A)}{\sqrt{\rho'}} + \frac{\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{v}'_A)}{\sqrt{\rho}} \right) \right\rangle \tag{9.21}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-4\varepsilon_e &= \mu (\nabla_\ell \cdot \langle \delta(n_e \mathbf{v}_e) \cdot \delta \mathbf{v}_e \delta \mathbf{v}_e \rangle + \langle \delta \mathbf{v}_e \cdot (n_e \mathbf{v}_e \nabla' \cdot \mathbf{v}'_e - n'_e \mathbf{v}'_e \nabla \cdot \mathbf{v}_e) \rangle) \\
&\quad + 2\mu (\nabla_\ell \cdot \langle \delta n_e \delta u_e \delta \mathbf{v}_e \rangle + \langle \delta u_e (n_e \nabla' \cdot \mathbf{v}'_e - n'_e \nabla \cdot \mathbf{v}_e) \rangle) \\
&\quad + \nabla_\ell \cdot \left\langle \delta(n_e \mathbf{v}_e) \cdot \delta \overline{\mathbf{P}}_e \delta \left( \frac{1}{n_e} \right) \right\rangle + \left\langle \delta \overline{\mathbf{P}}_e : \left( n_e \mathbf{v}_e \nabla' \left( \frac{1}{n'_e} \right) - n'_e \mathbf{v}'_e \nabla \left( \frac{1}{n_e} \right) \right) \right\rangle \\
&\quad + 2 \left\langle \delta \left( \frac{\overline{\mathbf{P}}_e}{n_e} \right) : (n'_e \nabla \mathbf{v}_e - n_e \nabla' \mathbf{v}'_e) \right\rangle \\
&\quad + \frac{\mu}{2} \left\langle \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A \left[ \frac{\mu(n'_e - n_e) - 2(1-\mu)n_i}{\rho} \nabla \cdot (n_e \mathbf{v}_e) + \frac{(1-\mu)(n'_e + n_e)}{\rho} \nabla \cdot (n_i \mathbf{v}_i) \right] \right\rangle \\
&\quad + \frac{\mu}{2} \left\langle \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}'_A \left[ \frac{\mu(n_e - n'_e) - 2(1-\mu)n'_i}{\rho'} \nabla' \cdot (n'_e \mathbf{v}'_e) + \frac{(1-\mu)(n'_e + n_e)}{\rho'} \nabla' \cdot (n'_i \mathbf{v}'_i) \right] \right\rangle \\
&\quad + \frac{1}{\lambda_i} \left\langle (n'_e + n_e) \left( \mathbf{v}'_e \cdot \mathbf{v}_e \times (\sqrt{\rho} \mathbf{v}_A) + \mathbf{v}_e \cdot \mathbf{v}'_e \times (\sqrt{\rho'} \mathbf{v}'_A) \right) \right\rangle \\
&\quad - \mu \left\langle (n'_e + n_e) \left( \frac{\nabla' \cdot (\mathbf{E}' \times \mathbf{v}_A)}{\sqrt{\rho'}} + \frac{\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{v}'_A)}{\sqrt{\rho}} \right) \right\rangle \tag{9.22}
\end{aligned}$$

On y retrouve des fonctions de structures et des termes sources similaires à ceux dérivés dans les cas MHD et CGL (voir équations (7.16), (7.18) et (5.21)) pour les contributions cinétique et thermodynamique ( $\mathbf{v}_i$ ,  $\mathbf{v}_e$ ,  $u_i$ ,  $u_e$ ,  $\overline{\mathbf{P}}_i$  et  $\overline{\mathbf{P}}_e$ ). Par contre, la contribution électromagnétique diffère (quatre dernières lignes de (9.21) et (9.22)). On remarque d'ailleurs qu'elle reflète le couplage des deux fluides par le champ électromagnétique étant donné que dans (9.21) comme dans (9.22) elle dépend de  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{v}_A$ ,  $\mathbf{v}_i$ ,  $\mathbf{v}_e$ ,  $n_i$  et  $n_e$ . Pour réduire

cette contribution, on doit sommer (9.21) et (9.22). On obtient ainsi après quelques manipulations, la loi exacte pour l'énergie totale bi-fluide :

$$\begin{aligned}
-4\varepsilon &= (1-\mu) (\nabla_\ell \cdot \langle \delta(n_i \mathbf{v}_i) \cdot \delta \mathbf{v}_i \delta \mathbf{v}_i \rangle + \langle \delta \mathbf{v}_i \cdot (n_i \mathbf{v}_i \nabla' \cdot \mathbf{v}'_i - n'_i \mathbf{v}'_i \nabla \cdot \mathbf{v}_i) \rangle) \\
&\quad + \mu (\nabla_\ell \cdot \langle \delta(n_e \mathbf{v}_e) \cdot \delta \mathbf{v}_e \delta \mathbf{v}_e \rangle + \langle \delta \mathbf{v}_e \cdot (n_e \mathbf{v}_e \nabla' \cdot \mathbf{v}'_e - n'_e \mathbf{v}'_e \nabla \cdot \mathbf{v}_e) \rangle) \\
&\quad + 2(1-\mu) (\nabla_\ell \cdot \langle \delta n_i \delta u_i \delta \mathbf{v}_i \rangle + \langle \delta u_i (n_i \nabla' \cdot \mathbf{v}'_i - n'_i \nabla \cdot \mathbf{v}_i) \rangle) \\
&\quad + 2\mu (\nabla_\ell \cdot \langle \delta n_e \delta u_e \delta \mathbf{v}_e \rangle + \langle \delta u_e (n_e \nabla' \cdot \mathbf{v}'_e - n'_e \nabla \cdot \mathbf{v}_e) \rangle) \\
&\quad + \nabla_\ell \cdot \left\langle \delta(n_i \mathbf{v}_i) \cdot \delta \overline{\mathbf{P}}_i \delta \left(\frac{1}{n_i}\right) \right\rangle + \left\langle \delta \overline{\mathbf{P}}_i : \left(n_i \mathbf{v}_i \nabla' \left(\frac{1}{n'_i}\right) - n'_i \mathbf{v}'_i \nabla \left(\frac{1}{n_i}\right)\right) \right\rangle \\
&\quad + \nabla_\ell \cdot \left\langle \delta(n_e \mathbf{v}_e) \cdot \delta \overline{\mathbf{P}}_e \delta \left(\frac{1}{n_e}\right) \right\rangle + \left\langle \delta \overline{\mathbf{P}}_e : \left(n_e \mathbf{v}_e \nabla' \left(\frac{1}{n'_e}\right) - n'_e \mathbf{v}'_e \nabla \left(\frac{1}{n_e}\right)\right) \right\rangle \\
&\quad + 2 \left\langle \delta \left(\frac{\overline{\mathbf{P}}_i}{n_i}\right) : (n'_i \nabla \mathbf{v}_i - n_i \nabla' \mathbf{v}'_i) + \delta \left(\frac{\overline{\mathbf{P}}_e}{n_e}\right) : (n'_e \nabla \mathbf{v}_e - n_e \nabla' \mathbf{v}'_e) \right\rangle \\
&\quad - \nabla_\ell \cdot \left\langle (\rho' + \rho) \left(\frac{\mathbf{E}' \times \mathbf{v}_A}{\sqrt{\rho'}} - \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{v}'_A}{\sqrt{\rho}}\right) \right\rangle + \frac{1}{2} \left\langle (\rho' - \rho) \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}'_A (\nabla \cdot \mathbf{v} - \nabla' \cdot \mathbf{v}') \right\rangle \\
&\quad + \left\langle (\rho' - \rho) \left(\left(-\frac{\mathbf{E} \times \mathbf{v}'_A}{\sqrt{\rho}} + \frac{1}{2} \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}'_A \mathbf{v}\right) \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} + \left(\frac{\mathbf{E}' \times \mathbf{v}_A}{\sqrt{\rho'}} - \frac{1}{2} \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A \mathbf{v}'\right) \cdot \frac{\nabla' \rho'}{\rho'}\right) \right\rangle \\
&\quad + \frac{1}{\lambda_i} \left\langle (n'_i + n_i) (\mathbf{v}'_i \cdot \mathbf{v}_i \times (\sqrt{\rho} \mathbf{v}_A) + \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}'_i \times (\sqrt{\rho'} \mathbf{v}'_A)) \right\rangle \\
&\quad - \frac{1}{\lambda_i} \left\langle (n'_e + n_e) (\mathbf{v}'_e \cdot \mathbf{v}_e \times (\sqrt{\rho} \mathbf{v}_A) + \mathbf{v}_e \cdot \mathbf{v}'_e \times (\sqrt{\rho'} \mathbf{v}'_A)) \right\rangle
\end{aligned} \tag{9.23}$$

Cette loi dépend de  $\mu$ ,  $n_i$ ,  $n_e$ ,  $\mathbf{v}_i$  et  $\mathbf{v}_e$  explicitement et à travers  $\rho$  et  $\mathbf{v}$ . Elle dépend aussi de  $u_i$ ,  $u_e$ ,  $\overline{\mathbf{P}}_i$  et  $\overline{\mathbf{P}}_e$  et de  $\lambda_i$ ,  $\mathbf{v}_A$  et  $\mathbf{E}$ .  $\mathbf{E}$  peut y être remplacé par la loi d'Ohm (9.18) si besoin.

On peut aussi exprimer la loi (9.23) en fonction des quantités mono-fluides en remplaçant  $\mathbf{v}_i$  et  $\mathbf{v}_e$  avec  $\mathbf{v}_i = \frac{\rho}{n_i} \mathbf{v} + \frac{\lambda_i \mu}{n_i} \mathbf{j}$  et  $\mathbf{v}_e = \frac{\rho}{n_e} \mathbf{v} - \frac{\lambda_i (1-\mu)}{n_e} \mathbf{j}$ . On supposera aussi le fluide quasi-neutre, c'est-à-dire  $n_i = n_e = \rho$  et on va travailler les termes séparément en fonction de leur dépendance.

Tout d'abord les deux premières lignes, purement cinétiques :

$$\begin{aligned}
-4\varepsilon_{[1-2]} &= (1-\mu) (\nabla_\ell \cdot \langle \delta(n_i \mathbf{v}_i) \cdot \delta \mathbf{v}_i \delta \mathbf{v}_i \rangle + \langle \delta \mathbf{v}_i \cdot (n_i \mathbf{v}_i \nabla' \cdot \mathbf{v}'_i - n'_i \mathbf{v}'_i \nabla \cdot \mathbf{v}_i) \rangle) \\
&\quad + \mu (\nabla_\ell \cdot \langle \delta(n_e \mathbf{v}_e) \cdot \delta \mathbf{v}_e \delta \mathbf{v}_e \rangle + \langle \delta \mathbf{v}_e \cdot (n_e \mathbf{v}_e \nabla' \cdot \mathbf{v}'_e - n'_e \mathbf{v}'_e \nabla \cdot \mathbf{v}_e) \rangle)
\end{aligned} \tag{9.24}$$

$$\begin{aligned}
&= \nabla_\ell \cdot \langle \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{v} \delta \mathbf{v} \rangle + \langle \delta \mathbf{v} \cdot (\rho \mathbf{v} \nabla' \cdot \mathbf{v}' - \rho' \mathbf{v}' \nabla \cdot \mathbf{v}) \rangle \\
&\quad + \lambda_i^2 \mu (1-\mu) \nabla_\ell \cdot \left\langle \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \delta \left(\frac{\mathbf{j}}{\rho}\right) \delta \left(\frac{\mathbf{j}}{\rho}\right) + \delta \mathbf{j} \cdot \delta \mathbf{v} \delta \left(\frac{\mathbf{j}}{\rho}\right) + \delta \mathbf{j} \cdot \delta \left(\frac{\mathbf{j}}{\rho}\right) \delta \mathbf{v} \right\rangle \\
&\quad + \lambda_i^2 \mu (1-\mu) \left\langle \delta \frac{\mathbf{j}}{\rho} \cdot (\mathbf{j} \nabla' \cdot \mathbf{v}' - \mathbf{j} \nabla \cdot \mathbf{v}) \right\rangle \\
&\quad + \lambda_i^2 \mu (1-\mu) \left\langle \left(\mathbf{j} \cdot \delta \mathbf{v} + \rho \mathbf{v} \cdot \delta \frac{\mathbf{j}}{\rho}\right) \nabla' \cdot \frac{\mathbf{j}'}{\rho'} - \left(\mathbf{j}' \cdot \delta \mathbf{v} + \rho \mathbf{v} \cdot \delta \frac{\mathbf{j}}{\rho}\right) \nabla \cdot \frac{\mathbf{j}}{\rho} \right\rangle \\
&\quad + \lambda_i^3 \mu (1-\mu) (2\mu - 1) \left( \nabla_\ell \cdot \left\langle \delta \mathbf{j} \cdot \delta \left(\frac{\mathbf{j}}{\rho}\right) \delta \left(\frac{\mathbf{j}}{\rho}\right) \right\rangle + \left\langle \delta \left(\frac{\mathbf{j}}{\rho}\right) \cdot \left(\mathbf{j} \nabla' \cdot \frac{\mathbf{j}'}{\rho'} - \mathbf{j}' \nabla \cdot \frac{\mathbf{j}}{\rho}\right) \right\rangle \right)
\end{aligned} \tag{9.25}$$

Lorsque  $\mu \rightarrow 0$  (MHD) ou  $\mu \rightarrow 1$  (EMHD), seule la première ligne de (9.25) subsiste. On remarque aussi que les lignes suivantes sont en  $\lambda_i^2$  et  $\lambda_i^3$ , par conséquent ils tendront rapidement vers 0 pour des échelles  $L_0$  grandes devant la longueur d'inertie du plasma.

Ensuite les deux lignes dépendant de l'énergie interne nous donne, en notant  $u =$

$(1 - \mu) u_i + \mu u_e :$

$$\begin{aligned} -4\varepsilon_{[3-4]} &= 2(1 - \mu) (\nabla_\ell \cdot \langle \delta n_i \delta u_i \delta \mathbf{v}_i \rangle + \langle \delta u_i (n_i \nabla' \cdot \mathbf{v}'_i - n'_i \nabla \cdot \mathbf{v}_i) \rangle) \\ &\quad + 2\mu (\nabla_\ell \cdot \langle \delta n_e \delta u_e \delta \mathbf{v}_e \rangle + \langle \delta u_e (n_e \nabla' \cdot \mathbf{v}'_e - n'_e \nabla \cdot \mathbf{v}_e) \rangle) \quad (9.26) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 2(\nabla_\ell \cdot \langle \delta \rho \delta u \delta \mathbf{v} \rangle + \langle \delta u (\rho \nabla' \cdot (\mathbf{v}') - \rho' \nabla \cdot (\mathbf{v})) \rangle) \\ &\quad + 2\lambda_i \mu (1 - \mu) \nabla_\ell \cdot \left\langle \delta \rho \delta (u_i - u_e) \delta \left( \frac{\mathbf{j}}{\rho} \right) \right\rangle \\ &\quad + 2\lambda_i \mu (1 - \mu) \left\langle \delta (u_i - u_e) \left( \rho \nabla' \cdot \left( \frac{\mathbf{j}'}{\rho'} \right) - \rho' \nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{j}}{\rho} \right) \right) \right\rangle \quad (9.27) \end{aligned}$$

Ici aussi, lorsque  $\mu \rightarrow 0$  (MHD) ou  $\mu \rightarrow 1$  (EMHD), seule la première ligne de (9.27) subsiste.

Les trois lignes de (9.23) dépendant des tenseurs de pressions s'écrivent en notant  $\overline{\mathbf{P}_i} = \overline{\mathbf{P}_i} + \overline{\mathbf{P}_e}$  :

$$\begin{aligned} -4\varepsilon_{[5-7]} &= \nabla_\ell \cdot \left\langle \delta (n_i \mathbf{v}_i) \cdot \delta \overline{\mathbf{P}_i} \delta \left( \frac{1}{n_i} \right) \right\rangle + \left\langle \delta \overline{\mathbf{P}_i} : \left( n_i \mathbf{v}_i \nabla' \left( \frac{1}{n'_i} \right) - n'_i \mathbf{v}'_i \nabla \left( \frac{1}{n_i} \right) \right) \right\rangle \\ &\quad + \nabla_\ell \cdot \left\langle \delta (n_e \mathbf{v}_e) \cdot \delta \overline{\mathbf{P}_e} \delta \left( \frac{1}{n_e} \right) \right\rangle + \left\langle \delta \overline{\mathbf{P}_e} : \left( n_e \mathbf{v}_e \nabla' \left( \frac{1}{n'_e} \right) - n'_e \mathbf{v}'_e \nabla \left( \frac{1}{n_e} \right) \right) \right\rangle \\ &\quad + 2 \left\langle \delta \left( \frac{\overline{\mathbf{P}_i}}{n_i} \right) : (n'_i \nabla \mathbf{v}_i - n_i \nabla' \mathbf{v}'_i) + \delta \left( \frac{\overline{\mathbf{P}_e}}{n_e} \right) : (n'_e \nabla \mathbf{v}_e - n_e \nabla' \mathbf{v}'_e) \right\rangle \quad (9.28) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \nabla_\ell \cdot \left\langle \delta (\rho \mathbf{v}) \cdot \delta \overline{\mathbf{P}} \delta \left( \frac{1}{\rho} \right) \right\rangle + \left\langle \delta \overline{\mathbf{P}} : \left( \rho \mathbf{v} \nabla' \left( \frac{1}{\rho'} \right) - \rho' \mathbf{v}' \nabla \left( \frac{1}{\rho} \right) \right) \right\rangle \\ &\quad + 2 \left\langle \delta \left( \frac{\overline{\mathbf{P}}}{\rho} \right) : (\rho' \nabla \mathbf{v} - \rho \nabla' \mathbf{v}') \right\rangle \\ &\quad + \lambda_i \nabla_\ell \cdot \left\langle \delta \mathbf{j} \cdot \delta (\mu \overline{\mathbf{P}_i} - (1 - \mu) \overline{\mathbf{P}_e}) \delta \left( \frac{1}{\rho} \right) \right\rangle \\ &\quad + \lambda_i \left\langle \delta (\mu \overline{\mathbf{P}_i} - (1 - \mu) \overline{\mathbf{P}_e}) : \left( \mathbf{j} \nabla' \left( \frac{1}{\rho'} \right) - \mathbf{j}' \nabla \left( \frac{1}{\rho} \right) \right) \right\rangle \\ &\quad + 2\lambda_i \left\langle \delta \left( \mu \frac{\overline{\mathbf{P}_i}}{\rho} - (1 - \mu) \frac{\overline{\mathbf{P}_e}}{\rho} \right) : \left( \rho' \nabla \left( \frac{\mathbf{j}}{\rho} \right) - \rho \nabla' \left( \frac{\mathbf{j}'}{\rho'} \right) \right) \right\rangle \quad (9.29) \end{aligned}$$

Dans les deux premières lignes de (9.29), on retrouve la formulation f3 (5.21) de la contribution du tenseur de pression de la loi générale MHD gyrotrope (7.20). Elles s'écrivent de la même manière, que les quantités soient sans dimension ou pas. Les lignes suivantes dépendent de la densité de courant  $\mathbf{j}$  et des tenseurs de pressions. Elles rappellent la contribution thermique de la loi d'Ohm (9.18) et ne s'annulent pas complètement si  $\mu \rightarrow 0$  ou  $\mu \rightarrow 1$ .

Les quatre dernières lignes de (9.23) dépendant de la vitesse d'Alfvén et du champ

électrique. En y appliquant la même transformation qu'aux autres lignes, elles deviennent :

$$\begin{aligned}
 & -4 \varepsilon_{[8-11]} \\
 &= -\nabla_{\boldsymbol{\ell}} \cdot \left\langle (\rho' + \rho) \left( \frac{\mathbf{E}' \times \mathbf{v}_A}{\sqrt{\rho'}} - \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{v}'_A}{\sqrt{\rho}} \right) \right\rangle + \frac{1}{2} \langle (\rho' - \rho) \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}'_A (\nabla \cdot \mathbf{v} - \nabla' \cdot \mathbf{v}') \rangle \\
 &+ \left\langle (\rho' - \rho) \left( \left( -\frac{\mathbf{E} \times \mathbf{v}'_A}{\sqrt{\rho}} + \frac{1}{2} \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}'_A \mathbf{v} \right) \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} + \left( \frac{\mathbf{E}' \times \mathbf{v}_A}{\sqrt{\rho'}} - \frac{1}{2} \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A \mathbf{v}' \right) \cdot \frac{\nabla' \rho'}{\rho'} \right) \right\rangle \\
 &+ \frac{1}{\lambda_i} \left\langle (n'_i + n_i) \left( \mathbf{v}'_i \cdot \mathbf{v}_i \times (\sqrt{\rho} \mathbf{v}_A) + \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}'_i \times (\sqrt{\rho'} \mathbf{v}'_A) \right) \right\rangle \\
 &- \frac{1}{\lambda_i} \left\langle (n'_e + n_e) \left( \mathbf{v}'_e \cdot \mathbf{v}_e \times (\sqrt{\rho} \mathbf{v}_A) + \mathbf{v}_e \cdot \mathbf{v}'_e \times (\sqrt{\rho'} \mathbf{v}'_A) \right) \right\rangle \quad (9.30)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\nabla_{\boldsymbol{\ell}} \cdot \left\langle (\rho' + \rho) \left( \frac{\mathbf{E}' \times \mathbf{v}_A}{\sqrt{\rho'}} - \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{v}'_A}{\sqrt{\rho}} \right) \right\rangle + \frac{1}{2} \langle (\rho' - \rho) \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}'_A (\nabla \cdot \mathbf{v} - \nabla' \cdot \mathbf{v}') \rangle \\
 &+ \frac{1}{2} \left\langle (\rho' - \rho) \left( \left( -\frac{\mathbf{E} \times \mathbf{v}'_A}{\sqrt{\rho}} + \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}'_A \mathbf{v} \right) \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} + \left( \frac{\mathbf{E}' \times \mathbf{v}_A}{\sqrt{\rho'}} - \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A \mathbf{v}' \right) \cdot \frac{\nabla' \rho'}{\rho'} \right) \right\rangle \\
 &+ \left\langle \left( \frac{1}{\rho'} + \frac{1}{\rho} \right) \left( \mathbf{j}' \cdot \rho \mathbf{v} \times (\sqrt{\rho} \mathbf{v}_A) + \mathbf{j} \cdot \rho' \mathbf{v}' \times (\sqrt{\rho'} \mathbf{v}'_A) \right) \right\rangle \\
 &+ \lambda_i (2\mu - 1) \left\langle \left( \frac{1}{\rho'} + \frac{1}{\rho} \right) \left( \mathbf{j}' \cdot \mathbf{j} \times (\sqrt{\rho} \mathbf{v}_A) + \mathbf{j} \cdot \mathbf{j}' \times (\sqrt{\rho'} \mathbf{v}'_A) \right) \right\rangle \\
 &+ \left\langle \left( \frac{1}{\rho'} + \frac{1}{\rho} \right) \left( \rho \mathbf{v}' \cdot \mathbf{j} \times (\sqrt{\rho} \mathbf{v}_A) + \rho' \mathbf{v} \cdot \mathbf{j}' \times (\sqrt{\rho'} \mathbf{v}'_A) \right) \right\rangle \quad (9.31)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\nabla_{\boldsymbol{\ell}} \cdot \left\langle (\rho' + \rho) \left( \frac{\mathbf{E}' \times \mathbf{v}_A}{\sqrt{\rho'}} - \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{v}'_A}{\sqrt{\rho}} \right) \right\rangle + \frac{1}{2} \langle (\rho' - \rho) \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}'_A (\nabla \cdot \mathbf{v} - \nabla' \cdot \mathbf{v}') \rangle \\
 &+ \frac{1}{2} \left\langle (\rho' - \rho) \left( \left( -\frac{\mathbf{E} \times \mathbf{v}'_A}{\sqrt{\rho}} + \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}'_A \mathbf{v} \right) \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} + \left( \frac{\mathbf{E}' \times \mathbf{v}_A}{\sqrt{\rho'}} - \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A \mathbf{v}' \right) \cdot \frac{\nabla' \rho'}{\rho'} \right) \right\rangle \\
 &+ \left\langle \left( \frac{1}{\rho'} + \frac{1}{\rho} \right) \left( \mathbf{j}' \cdot \rho \mathbf{v} \times (\sqrt{\rho} \mathbf{v}_A) + \mathbf{j} \cdot \rho' \mathbf{v}' \times (\sqrt{\rho'} \mathbf{v}'_A) \right) \right\rangle \\
 &+ \lambda_i (2\mu - 1) \left\langle \left( \frac{1}{\rho'} + \frac{1}{\rho} \right) \left( \mathbf{j}' \cdot \mathbf{j} \times (\sqrt{\rho} \mathbf{v}_A) + \mathbf{j} \cdot \mathbf{j}' \times (\sqrt{\rho'} \mathbf{v}'_A) \right) \right\rangle \\
 &+ \nabla_{\boldsymbol{\ell}} \cdot \left\langle (\rho + \rho') (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'_A \mathbf{v}'_A - \frac{1}{2} \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}'_A \mathbf{v} - \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A + \frac{1}{2} \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}_A \mathbf{v}') \right\rangle \\
 &+ \left\langle (\rho' \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A - \frac{1}{2} \rho' \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}_A \mathbf{v}') \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} + (\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'_A \mathbf{v}'_A - \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}'_A \mathbf{v}) \cdot \frac{\nabla' \rho'}{\rho'} \right\rangle \quad (9.32)
 \end{aligned}$$

La dernière égalité est obtenue en remplaçant  $\mathbf{j}$  par  $\nabla \times (\sqrt{\rho} \mathbf{v}_A)$  dans la dernière ligne de (9.32). Les termes résultants rappellent les fonctions de structure  $\langle \delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \delta \mathbf{v}_A \delta \mathbf{v} \rangle$ ,  $\langle \delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \delta \mathbf{v} \delta \mathbf{v}_A \rangle$ ,  $\langle \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{v}_A \delta \mathbf{v}_A \rangle$  et  $\langle \delta(\rho \mathbf{v}) \delta(\frac{\rho \mathbf{v}_A^2}{2}) \delta(1/\rho) \rangle$  présentes dans les lois MHD. Pour les faire apparaître, il nous manque des termes qui sont cachés dans la première ligne. On doit y remplacer  $\mathbf{E}$  qui provient de l'équation d'induction grâce à la loi d'Ohm (9.18). On peut aussi l'utiliser pour remplacer  $\mathbf{E}$  dans la deuxième ligne. Et sa version non relativiste permettra de remplacer  $\lambda_i(2\mu - 1) \mathbf{j} \times \sqrt{\rho} \mathbf{v}_A + \rho \mathbf{v} \times \sqrt{\rho} \mathbf{v}_A$  dans les troisième et quatrième lignes.

La loi d'Ohm (9.18) devient avec l'hypothèse quasi-neutre et en fonction de la vitesse

d'Alfvén :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} = & -\mathbf{v} \times \sqrt{\rho} \mathbf{v}_A - \frac{\lambda_i(2\mu-1)}{\rho} \mathbf{j} \times \sqrt{\rho} \mathbf{v}_A + \lambda_i \frac{\mu \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}_i} - (1-\mu) \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}_e}}{\rho} \\ & + \frac{\lambda_i^2 \mu(1-\mu)}{\rho} \left[ \partial_t \mathbf{j} + \nabla \cdot (\mathbf{v} \mathbf{j} + \mathbf{j} \mathbf{v} + \frac{\lambda_i(2\mu-1)}{\rho} \mathbf{j} \mathbf{j}) \right] \end{aligned} \quad (9.33)$$

Sa version non relativiste est :

$$\begin{aligned} \rho \mathbf{v} \times \sqrt{\rho} \mathbf{v}_A + \lambda_i(2\mu-1) \mathbf{j} \times \sqrt{\rho} \mathbf{v}_A = & \frac{\lambda_i^2 \mu(1-\mu)}{\rho} [\partial_t \mathbf{j} + \nabla \cdot (\mathbf{v} \mathbf{j} + \mathbf{j} \mathbf{v} + \lambda_i(2\mu-1) \mathbf{j} \mathbf{j})] \\ & + \lambda_i(\mu \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}_i} - (1-\mu) \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}_e}) \end{aligned} \quad (9.34)$$

On va maintenant appliquer (9.33) et (9.34) dans (9.32) contribution par contribution :

— Pour la contribution MHD :

$$\begin{aligned} -4 \varepsilon_{[8-11]}^{MHD} = & \nabla_\ell \cdot \left\langle (\rho + \rho') (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'_A \mathbf{v}'_A - \frac{1}{2} \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}'_A \mathbf{v} - \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A + \frac{1}{2} \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}_A \mathbf{v}') \right\rangle \\ & + \nabla_\ell \cdot \left\langle (\rho' + \rho) ((\mathbf{v}' \times \mathbf{v}'_A) \times \mathbf{v}_A - (\mathbf{v} \times \mathbf{v}_A) \times \mathbf{v}'_A) \right\rangle \\ & + \frac{1}{2} \left\langle (\rho' - \rho) \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}'_A (\nabla \cdot \mathbf{v} - \nabla' \cdot \mathbf{v}') \right\rangle \\ & + \frac{1}{2} \left\langle (\rho' - \rho) ((\mathbf{v} \times \mathbf{v}_A) \times \mathbf{v}'_A + \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}'_A \mathbf{v}) \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} \right\rangle \\ & - \frac{1}{2} \left\langle (\rho' - \rho) ((\mathbf{v}' \times \mathbf{v}'_A) \times \mathbf{v}_A + \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A \mathbf{v}') \cdot \frac{\nabla' \rho'}{\rho'} \right\rangle \\ & + \left\langle (\rho' \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A - \frac{1}{2} \rho' \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}_A \mathbf{v}') \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} + (\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'_A \mathbf{v}'_A - \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}'_A \mathbf{v}) \cdot \frac{\nabla' \rho'}{\rho'} \right\rangle \\ = & \nabla_\ell \cdot \left\langle \delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \delta \mathbf{v}'_A \delta \mathbf{v} + \delta(\frac{\rho' \mathbf{v}'_A}{2}) \delta(\rho \mathbf{v}) \delta(\frac{1}{\rho}) - \delta \mathbf{v}_A \cdot \delta(\rho \mathbf{v}) \delta \mathbf{v}_A - \delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \delta \mathbf{v} \delta \mathbf{v}_A \right\rangle \\ & + \frac{1}{2} \left\langle (\delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \mathbf{v}'_A - \delta \mathbf{v}_A \cdot \rho' \mathbf{v}'_A) \nabla \cdot \mathbf{v} - (\delta(\rho' \mathbf{v}'_A) \cdot \mathbf{v}_A - \rho \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{v}_A) \nabla' \cdot \mathbf{v}' \right\rangle \\ & + \left\langle \delta(\frac{\rho \mathbf{v}_A}{2}) (\rho \mathbf{v} \cdot \nabla' \frac{1}{\rho'} - \rho' \mathbf{v}' \cdot \nabla \frac{1}{\rho}) \right\rangle \\ & - \left\langle (2\rho \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v}_A + \rho \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{v}) - \mathbf{v}_A \cdot \delta(\rho \mathbf{v}) \right\rangle \nabla' \cdot \mathbf{v}'_A \\ & + \left\langle (2\rho' \mathbf{v}' \cdot \delta \mathbf{v}_A + \rho' \mathbf{v}'_A \cdot \delta \mathbf{v} - \mathbf{v}'_A \cdot \delta(\rho \mathbf{v})) \nabla \cdot \mathbf{v}_A \right\rangle \end{aligned} \quad (9.35)$$

On retrouve bien la contribution électromagnétique dérivée dans le cas MHD (voir équations (5.10) et (5.21) pour les termes de pression magnétique)<sup>2</sup>. Elle ne dépend ni de  $\mu$  ni de  $\lambda_i$  donc elle ne différera pas que l'on soit dans le régime MHD ou EMHD.

---

2. On a fait en sorte de choisir les quantités servant à normaliser le système d'équation telles que les résultats présentés dans ce mémoire se recoupent.

— Pour la contribution Hall :

$$\begin{aligned}
-4\varepsilon_{[8-11]}^{Hall} &= \lambda_i (2\mu - 1) \nabla_\ell \cdot \left\langle (\rho' + \rho) \left( \left( \frac{1}{\rho'} \mathbf{j}' \times \mathbf{v}'_A \right) \times \mathbf{v}_A - \left( \frac{1}{\rho} \mathbf{j} \times \mathbf{v}_A \right) \times \mathbf{v}'_A \right) \right\rangle \\
&\quad - \frac{\lambda_i (2\mu - 1)}{2} \left\langle (\rho' - \rho) \left( \left( \frac{1}{\rho} \mathbf{j} \times \mathbf{v}_A \right) \times \mathbf{v}'_A \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} - \left( \frac{1}{\rho'} \mathbf{j}' \times \mathbf{v}'_A \right) \times \mathbf{v}_A \cdot \frac{\nabla' \rho'}{\rho'} \right) \right\rangle \\
&= -\lambda_i (2\mu - 1) \nabla_\ell \cdot \left\langle (\mathbf{j}' \times \mathbf{v}'_A + \mathbf{j} \times \mathbf{v}_A) \times \delta \mathbf{v}_A - \delta \left( \frac{1}{\rho} \mathbf{j} \times \mathbf{v}_A \right) \times (\rho' \mathbf{v}'_A + \rho \mathbf{v}_A) \right\rangle \\
&\quad + \lambda_i (2\mu - 1) \left\langle \left( \frac{\rho'}{\rho} - 1 \right) \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{j} \nabla \cdot \mathbf{v}_A + \left( \frac{\rho}{\rho'} - 1 \right) \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{j}' \nabla' \cdot \mathbf{v}'_A \right\rangle \\
&\quad - \frac{\lambda_i (2\mu - 1)}{2} \left\langle (\rho' - \rho) \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A \nabla \cdot \frac{\mathbf{j}}{\rho} - (\rho' - \rho) \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}'_A \nabla' \cdot \frac{\mathbf{j}'}{\rho'} \right\rangle
\end{aligned} \tag{9.36}$$

Dans le cas  $\mu \rightarrow 0$ , on retrouve le résultat de la section 9.1 (9.3).

— Pour la contribution des pressions :

$$\begin{aligned}
-4\varepsilon_{[8-11]}^{\nabla P} &= -\lambda_i \mu \nabla_\ell \cdot \left\langle (\rho' + \rho) \left( \frac{1}{\sqrt{\rho'}} \left( \frac{1}{\rho'} \nabla' \cdot \overline{\mathbf{P}}'_i \right) \times \mathbf{v}_A - \frac{1}{\sqrt{\rho}} \left( \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}}_i \right) \times \mathbf{v}'_A \right) \right\rangle \\
&\quad + \lambda_i \mu \left\langle (\rho' - \rho) \left( \frac{1}{\sqrt{\rho}} \left( \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}}_i \right) \times \mathbf{v}'_A \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} - \frac{1}{\sqrt{\rho'}} \left( \frac{1}{\rho'} \nabla' \cdot \overline{\mathbf{P}}'_i \right) \times \mathbf{v}_A \cdot \frac{\nabla' \rho'}{\rho'} \right) \right\rangle \\
&\quad + \lambda_i \mu \left\langle \left( \frac{1}{\rho'} + \frac{1}{\rho} \right) (\mathbf{j} \cdot \nabla' \cdot \overline{\mathbf{P}}'_i + \mathbf{j}' \cdot \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}}_i) \right\rangle \\
&\quad + \lambda_i (1 - \mu) \nabla_\ell \cdot \left\langle (\rho' + \rho) \left( \frac{1}{\sqrt{\rho'}} \left( \frac{1}{\rho'} \nabla' \cdot \overline{\mathbf{P}}'_e \right) \times \mathbf{v}_A - \frac{1}{\sqrt{\rho}} \left( \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}}_e \right) \times \mathbf{v}'_A \right) \right\rangle \\
&\quad - \lambda_i (1 - \mu) \left\langle (\rho' - \rho) \left( \frac{1}{\sqrt{\rho}} \left( \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}}_e \right) \times \mathbf{v}'_A \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} - \frac{1}{\sqrt{\rho'}} \left( \frac{1}{\rho'} \nabla' \cdot \overline{\mathbf{P}}'_e \right) \times \mathbf{v}_A \cdot \frac{\nabla' \rho'}{\rho'} \right) \right\rangle \\
&\quad - \lambda_i (1 - \mu) \left\langle \left( \frac{1}{\rho'} + \frac{1}{\rho} \right) (\mathbf{j} \cdot \nabla' \cdot \overline{\mathbf{P}}'_e + \mathbf{j}' \cdot \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}}_e) \right\rangle
\end{aligned} \tag{9.37}$$

Dans la section 9.3, nous verrons (dans le cadre  $\mu \rightarrow 0$ ) une autre formulation de cette contribution prenant en compte les termes présents dans (9.29).

— Pour la contribution inertielle :

$$\begin{aligned}
 & - 4 \varepsilon_{[8-11]}^{inert} \\
 &= -\lambda_i^2 \mu (1-\mu) \nabla_\ell \cdot \left\langle \frac{\rho' + \rho}{\rho' \sqrt{\rho'}} \left[ \partial_t \mathbf{j}' + \nabla' \cdot \left( \mathbf{v}' \mathbf{j}' + \mathbf{j}' \mathbf{v}' + \frac{(2\mu-1)}{\rho'} \lambda_i \mathbf{j}' \mathbf{j}' \right) \right] \times \mathbf{v}_A \right\rangle \\
 &+ \lambda_i^2 \mu (1-\mu) \nabla_\ell \cdot \left\langle \frac{\rho' + \rho}{\rho \sqrt{\rho}} \left[ \partial_t \mathbf{j} + \nabla \cdot \left( \mathbf{v} \mathbf{j} + \mathbf{j} \mathbf{v} + \frac{(2\mu-1)}{\rho} \lambda_i \mathbf{j} \mathbf{j} \right) \right] \times \mathbf{v}'_A \right\rangle \\
 &+ \lambda_i^2 \mu (1-\mu) \left\langle \frac{\rho' + \rho}{\rho \sqrt{\rho}} \left[ \partial_t \mathbf{j} + \nabla \cdot \left( \mathbf{v} \mathbf{j} + \mathbf{j} \mathbf{v} + \frac{(2\mu-1)}{\rho} \lambda_i \mathbf{j} \mathbf{j} \right) \right] \times \mathbf{v}'_A \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} \right\rangle \\
 &- \lambda_i^2 \mu (1-\mu) \left\langle \frac{\rho' + \rho}{\rho' \sqrt{\rho'}} \left[ \partial_t \mathbf{j}' + \nabla' \cdot \left( \mathbf{v}' \mathbf{j}' + \mathbf{j}' \mathbf{v}' + \frac{(2\mu-1)}{\rho'} \lambda_i \mathbf{j}' \mathbf{j}' \right) \right] \times \mathbf{v}_A \cdot \frac{\nabla' \rho'}{\rho'} \right\rangle \\
 &+ \lambda_i^2 \mu (1-\mu) \left\langle \left( \frac{1}{\rho'} + \frac{1}{\rho} \right) \mathbf{j}' \cdot \left[ \partial_t \mathbf{j} + \nabla \cdot \left( \mathbf{v} \mathbf{j} + \mathbf{j} \mathbf{v} + \frac{(2\mu-1)}{\rho} \lambda_i \mathbf{j} \mathbf{j} \right) \right] \right\rangle \\
 &+ \lambda_i^2 \mu (1-\mu) \left\langle \left( \frac{1}{\rho'} + \frac{1}{\rho} \right) \mathbf{j} \cdot \left[ \partial_t \mathbf{j}' + \nabla' \cdot \left( \mathbf{v}' \mathbf{j}' + \mathbf{j}' \mathbf{v}' + \frac{(2\mu-1)}{\rho'} \lambda_i \mathbf{j}' \mathbf{j}' \right) \right] \right\rangle
 \end{aligned} \tag{9.38}$$

Cette contribution est nulle si  $\mu \rightarrow 0$  (cas MHD) mais aussi si  $\mu \rightarrow 1$  (cas EMHD). Ces termes, en  $\lambda_i^2$  sont aussi nuls aux grandes échelles. Cette expression est gardée brute car on ne l'utilisera pas par la suite, mais, si besoin est, on pourrait y appliquer la stationnarité statistique et l'équation de continuité pour supprimer la dépendance en  $\partial_t \mathbf{j}$ .

En dérivant une loi exacte pour un modèle bi-fluide, puis en travaillant sur les différentes contributions avec la loi d'Ohm généralisée et l'hypothèse de quasi-neutralité, on vient d'obtenir différents niveaux de correction qui viennent étendre la description de la cascade turbulente d'énergie totale à de multiples systèmes par exemple les deux régimes asymptotiques (MHD et EMHD). **A noter que la loi exacte obtenue est valable pour des fermetures quelconques appliquées aux ions et aux électrons tant qu'elles sont en accord avec les équations d'énergie interne (9.14) et (9.15).** En fonction de l'usage, il sera toujours possible de retravailler les termes pour obtenir des formulations potentiellement plus pratiques à analyser. Les termes dépendant de la pression électroniques présents dans (9.29) et (9.37) seront par exemple reformulés dans le cadre  $\mu \rightarrow 0$ , dans la section 9.3.

### 9.3 Le modèle analysé numériquement dans la partie III

Originellement, le modèle CGL est pensé en supposant des électrons dit «froids» ( $\beta_e \gg 1$  avec  $\beta_e = \frac{p_e}{p_m}$ ) c'est-à-dire en considérant un mono-fluide d'ions [HUNANA *et al.* 2019]. Les quantités électroniques n'interviennent donc pas. Dans la Partie III, nous allons analyser des résultats de simulations LF/CGL-Hall- $\nabla P_e$  prenant en compte l'anisotropie de pression des ions et potentiellement des électrons. Le modèle simulé suppose  $\mu \ll 1$ , prend en compte la correction Hall donnée dans la section 9.1 et retrouvée dans la section 9.2 ainsi que la correction  $\nabla P_e$ . Il faudra donc prendre en compte les termes dépendant de la pression électroniques présents dans (9.29) et (9.37). Nous allons ici les analyser plus en détail.

Le modèle simulé est constitué des équations suivantes :

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (9.39)$$

$$\partial_t (\rho \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v} - \rho \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A) + \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}_*} = 0 \quad (9.40)$$

$$\partial_t \overline{\mathbf{P}_i} + \nabla \cdot (\mathbf{v} \overline{\mathbf{P}_i}) + (\overline{\mathbf{P}_i} \cdot \nabla \mathbf{v})^S = 0 \quad (9.41)$$

$$\partial_t \overline{\mathbf{P}_e} + \nabla \cdot (\mathbf{v} \overline{\mathbf{P}_e}) + (\overline{\mathbf{P}_e} \cdot \nabla \mathbf{v})^S = \lambda_i \nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{j}}{\rho} \overline{\mathbf{P}_e} \right) + \lambda_i \left( \overline{\mathbf{P}_e} \cdot \nabla \left( \frac{\mathbf{j}}{\rho} \right) \right)^S \quad (9.42)$$

$$\partial_t \mathbf{v}_A - \nabla \cdot (\mathbf{v}_A \mathbf{v} - \mathbf{v} \mathbf{v}_A) + \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{v}_A - \frac{\mathbf{v}_A}{2} \nabla \cdot \mathbf{v} = -\frac{\lambda_i}{\sqrt{\rho}} \nabla \times \left( \frac{\mathbf{j}}{\sqrt{\rho}} \times \mathbf{v}_A \right) + \frac{\lambda_i}{\sqrt{\mu_0 \rho}} \nabla \times \left( \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}_e} \right) \quad (9.42)$$

avec  $\overline{\mathbf{P}_*} = \overline{\mathbf{P}_i} + \overline{\mathbf{P}_e} + p_m \mathbf{I}$  et  $p_m = \frac{1}{2} \rho |\mathbf{v}_A|^2$ . Dans un premier lot de simulation, la pression électronique sera considérée comme isotrope isotherme et dans le deuxième comme gyrotope. A noter que dans le cas où la pression électronique est isotrope et que le premier principe thermodynamique (4.30) est valable, on peut définir une enthalpie électronique telle que  $h = u_e + \frac{m_i p_e}{m_e \rho}$ . Si l'hypothèse adiabatique/isentrope s'applique dans le système, alors le terme thermique de l'équation d'induction (9.42) s'annule puisque  $\nabla \times \left( \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}_e} \right) = \nabla \times \left( \frac{1}{\rho} \nabla p_e \right) = \frac{m_i}{m_e} \nabla \times \nabla h = 0$ . Par principe de précaution, nous le prendrons tout de même en compte dans notre analyse.

En terme d'énergétique, l'équation de densité d'énergie cinétique (4.5) n'est modifiée que par la prise en compte de la pression électronique dans la pression totale (sa forme ne changera pas). Celle de densité d'énergie magnétique devient :

$$\begin{aligned} \partial_t E_m &+ \nabla \cdot \left( E_m \mathbf{v} + \lambda_i \left( (\mathbf{j} \times \mathbf{v}_A) \times \mathbf{v}_A + \frac{\mathbf{v}_A}{\sqrt{\mu_0 \rho}} \times \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}_e} - \frac{\mathbf{j}}{\rho} \cdot \overline{\mathbf{P}_e} \right) \right) \\ &= \rho \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A : \nabla \mathbf{v} - p_m \nabla \cdot \mathbf{v} - \lambda_i \overline{\mathbf{P}_e} : \nabla \left( \frac{\mathbf{j}}{\rho} \right) \end{aligned} \quad (9.43)$$

sachant que :

$$\sqrt{\frac{\rho}{\mu_0}} \mathbf{v}_A \cdot \nabla \times \left( \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}_e} \right) = -\nabla \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \rho}} \mathbf{v}_A \times \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}_e} \right) + \nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{j}}{\rho} \cdot \overline{\mathbf{P}_e} \right) - \overline{\mathbf{P}_e} : \nabla \left( \frac{\mathbf{j}}{\rho} \right) \quad (9.44)$$

Et celle d'énergie interne, définie telle que  $\rho u = \rho_i u_i + \rho_e u_e = \frac{1}{2} \overline{\mathbf{P}_i} : \mathbf{I} + \frac{1}{2} \overline{\mathbf{P}_e} : \mathbf{I}$ , :

$$\partial_t (\rho u) + \nabla \cdot (\rho u \mathbf{v}) + (\overline{\mathbf{P}_i} + \overline{\mathbf{P}_e}) : \nabla \mathbf{v} = \lambda_i \nabla \cdot \left( \frac{m_e}{m_i} u_e \mathbf{j} \right) + \lambda_i \overline{\mathbf{P}_e} : \nabla \left( \frac{\mathbf{j}}{\rho} \right) \quad (9.45)$$

Puisque  $\mu \ll 1$ , a priori le terme  $\lambda_i \nabla \cdot \left( \frac{m_e}{m_i} u_e \mathbf{j} \right)$  pourra être négligé. Similairement,  $\rho \simeq \rho_i$  donc on pourrait négliger  $u_e$  dans  $u = u_i + \frac{m_e}{m_i} u_e$ . Mais en pratique, il s'avèrera que ce ne sera pas tout à fait le cas. On va donc les prendre en compte. Le dernier terme de (9.45) étant relié à  $\sqrt{\rho} \mathbf{v}_A \cdot \nabla \times \left( \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}_e} \right)$  et à des termes flux via (9.44), sa contribution en tant que source dans le bilan énergétique s'annulera dans le cas particulier où l'on peut faire apparaître l'enthalpie  $h$ . Dans le bilan énergétique total, ce dernier terme vient compenser le terme  $-\lambda_i \overline{\mathbf{P}_e} : \nabla \left( \frac{\mathbf{j}}{\rho} \right)$  émergeant dans (9.43) à cause de la prise en compte de la pression électronique dans l'équation d'induction (9.42).

Les termes contribuant au taux de cascade qui n'ont pas été pris en compte dans (7.20) ni (9.3) seront donc  $\frac{\lambda_i}{\sqrt{\mu_0 \rho}} \nabla \times \left( \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}_e} \right)$  dans (9.42) et  $\lambda_i \nabla \cdot \left( \frac{m_e}{m_i} u_e \mathbf{j} \right) + \lambda_i \overline{\mathbf{P}_e} : \nabla \left( \frac{\mathbf{j}}{\rho} \right)$  dans (9.45). La correction résultante à la loi exacte s'écrit après quelques manipulations :

$$\begin{aligned}
 & - 4 \varepsilon_{\nabla pe} \\
 &= \frac{\lambda_i}{\sqrt{\mu_0}} \left\langle (\rho' + \rho) (\mathbf{v}_A \cdot (\frac{1}{\sqrt{\rho'}} \nabla' \times (\frac{1}{\rho'} \nabla' \cdot \overline{\mathbf{P}'_e})) + \mathbf{v}'_A \cdot (\frac{1}{\sqrt{\rho}} \nabla \times (\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}_e}))) \right\rangle \\
 &\quad + 2\lambda_i \left\langle \frac{\rho'}{\rho} (\nabla \cdot (\mu u_e \mathbf{j}) + \overline{\mathbf{P}_e} : \nabla(\frac{\mathbf{j}}{\rho})) + \frac{\rho}{\rho'} (\nabla' \cdot (\mu u'_e \mathbf{j}') + \overline{\mathbf{P}'_e} : \nabla'(\frac{\mathbf{j}'}{\rho'})) \right\rangle \\
 &= -2\lambda_i (\nabla_\ell \cdot \left\langle \delta \rho \delta(\frac{\mathbf{j}}{\rho} \cdot \overline{\mathbf{P}_e}) \delta(\frac{1}{\rho}) \right\rangle - \left\langle (\rho' \nabla(\frac{1}{\rho}) - \rho \nabla'(\frac{1}{\rho'})) \cdot \delta(\frac{\mathbf{j}}{\rho} \cdot \overline{\mathbf{P}_e}) \right\rangle) \\
 &\quad + 2\frac{\lambda_i}{\sqrt{\mu_0}} (\nabla_\ell \cdot \left\langle \delta \rho \delta(\frac{\mathbf{v}_A}{\sqrt{\rho}} \times \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}_e}) \delta(\frac{1}{\rho}) \right\rangle - \left\langle (\rho' \nabla(\frac{1}{\rho}) - \rho \nabla'(\frac{1}{\rho'})) \cdot \delta(\frac{\mathbf{v}_A}{\sqrt{\rho}} \times \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}_e}) \right\rangle) \\
 &\quad + \frac{\lambda_i}{\sqrt{\mu_0}} \left\langle (\mathbf{v}_A \delta \rho - 2\rho \delta \mathbf{v}_A) \cdot (\frac{1}{\sqrt{\rho'}} \nabla' \times (\frac{1}{\rho'} \nabla' \cdot \overline{\mathbf{P}'_e})) - (\mathbf{v}'_A \delta \rho - 2\rho' \delta \mathbf{v}_A) \cdot (\frac{1}{\sqrt{\rho}} \nabla \times (\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}_e})) \right\rangle \\
 &\quad - 2\lambda_i \mu (\nabla_\ell \cdot \left\langle \delta \rho \delta u_e \delta(\frac{\mathbf{j}}{\rho}) \right\rangle - \left\langle (\rho' \nabla \cdot (\frac{\mathbf{j}}{\rho}) - \rho \nabla' \cdot (\frac{\mathbf{j}'}{\rho'})) \delta u_e \right\rangle)
 \end{aligned} \tag{9.46}$$

Les deux premières lignes de l'équation (9.46) correspondent aux formes brutes de la correction. L'égalité suivante, dépendant de termes flux et sources, est obtenue en injectant (9.44) et en identifiant les fonctions de structures  $\left\langle \delta \rho \delta(\frac{\mathbf{v}_A}{\sqrt{\rho}} \times \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}_e}) \delta(\frac{1}{\rho}) \right\rangle$ ,  $\left\langle \delta \rho \delta(\frac{\mathbf{j}}{\rho} \cdot \overline{\mathbf{P}_e}) \delta(\frac{1}{\rho}) \right\rangle$  et  $\left\langle \delta \rho \delta u_e \delta(\frac{\mathbf{j}}{\rho}) \right\rangle$ . Dans le cas où l'on peut faire apparaître l'enthalpie  $h$ , l'avant-dernière ligne de (???) sera nulle. La contribution du terme  $\lambda_i \nabla \cdot \left( \frac{m_e}{m_i} u_e \mathbf{j} \right)$  correspond à la dernière ligne. On s'attend à ce que cette correction, dépendant de  $\lambda_i$ , prenne de l'importance près des échelles ioniques similairement à la correction Hall.

Si l'on compare avec les résultats de la section 9.2, on retrouve partiellement

$$\begin{aligned}
 & 2\lambda_i \mu (1 - \mu) \nabla_\ell \cdot \left\langle \delta \rho \delta (u_i - u_e) \delta \left( \frac{\mathbf{j}}{\rho} \right) \right\rangle \\
 &+ 2\lambda_i \mu (1 - \mu) \left\langle \delta (u_i - u_e) \left( \rho \nabla' \cdot \left( \frac{\mathbf{j}'}{\rho'} \right) - \rho' \nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{j}}{\rho} \right) \right) \right\rangle
 \end{aligned}$$

présent dans la contribution d'énergie interne (9.27). Seuls les termes en  $\mu$  et dépendant de  $u_e$  sont conservés, ceux dépendant de  $\mu^2$  ou de  $u_i$  sont négligés. Pour  $u_i$ , c'est une conséquence de la négligence de la vitesse électronique dans la vitesse fluide  $\mathbf{v}$ . Pour  $\mu^2$ , cela provient de  $m_e \ll m_i$ ,  $\mu^2$  est alors négligeable devant  $\mu$ . Les termes dépendants de  $\overline{\mathbf{P}_e}$  proviennent quant à eux d'un mélange de (9.37) et des trois dernières lignes de (9.29). L'équivalence ne sera pas présentée ici. On notera tout de même la présence de la constante  $\mu_0$  qui provient du caractère dimensionné des équations utilisées dans cette section.

Dans la limite incompressible, la majorité des termes de (9.46) s'annulent et il ne reste que la dernière ligne qui s'écrit :

$$-4\varepsilon_{\nabla pe} \underset{\rho = \rho_0}{=} -2 \frac{\lambda_i}{\sqrt{\rho_0}} \left\langle \delta \mathbf{v}_A \cdot \delta (\nabla \times \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}_e}) \right\rangle \tag{9.47}$$

Elle s'annule si  $\overline{\mathbf{P}_e}$  est isotrope.

Linéairement, la pression électronique peut influer sur les critères d'instabilités. Si la fermeture sur les ions et celle sur les électrons sont CGL et l'équation d'induction MHD ou MHD-Hall (MHDH), il suffira juste de prendre en compte des pressions parallèles et per-

pendiculaire totale (ionique + électronique) dans le taux d'anisotropie  $a_p$  et le paramètre  $\beta$  présents dans les critères firehose et miroir (voir synthèse 7.4). Lorsque l'équation d'induction prend en compte le terme en  $\nabla P_e$ , la relation de dispersion est d'ordre 6 et aucun mode ne ressort. Son étude, complexe, n'a pas été entreprise. Dans les simulations dans lesquelles les électrons seront gyrotropes, le modèle sera complété d'une fermeture dite Landau-fluide choisie telle que les critères cinétiques sont retrouvés, par conséquent, on considérera le critère dérivé par [PANTELLINI et SCHWARTZ 1995]. Dans d'autres simulations, la pression électronique est isotrope et définie avec une fermeture thermodynamique isotherme telle que  $p_e \propto \rho$  et les ions sont CGL. Dans le cas de l'approximation MHD, l'équation de dispersion est :

$$\begin{pmatrix} M_{xx} & 0 & M_{xz} \\ 0 & M_{yy} & 0 \\ M_{zx} & 0 & M_{zz} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_{x1} \\ v_{y1} \\ v_{z1} \end{pmatrix} = 0 \quad (9.48)$$

avec :

$$\begin{aligned} M_{xx} &= \frac{\omega^2}{v_{A0}^2 k_\parallel^2} - \left( \beta_{\parallel 0} a_{p0} + 1 + \frac{\beta_{e0}}{2} \right) \frac{k_\perp^2}{k_\parallel^2} + \left( \frac{\beta_{\parallel 0}}{2} (1 - a_{p0}) - 1 \right) \\ M_{xz} &= M_{zx} = - \left( \frac{\beta_{\parallel 0}}{2} a_{p0} + \frac{\beta_{e0}}{2} \right) \frac{k_\perp}{k_\parallel} \\ M_{yy} &= \frac{\omega^2}{v_{A0}^2 k_\parallel^2} + \left( \frac{\beta_{\parallel 0}}{2} (1 - a_{p0}) - 1 \right) \\ M_{zz} &= \frac{\omega^2}{v_{A0}^2 k_\parallel^2} - \left( \frac{3}{2} \beta_{\parallel 0} + \frac{\beta_{e0}}{2} \right) \end{aligned}$$

La relation de dispersion s'écrit alors :

$$0 = \left( \frac{\omega^2}{k_\parallel^2 v_{A0}^2} - 1 + \frac{\beta_{\parallel 0}}{2} (1 - a_{p0}) \right) \left( \frac{\omega^2}{k^2 v_{A0}^2} - \frac{1}{2} (A \pm \sqrt{A^2 - 4B}) \right) \quad (9.49)$$

avec

$$\begin{aligned} A &= 1 + \beta_{\parallel 0} a_{p0} \left( 1 - \frac{1}{2} \cos^2 \theta \right) + \beta_{\parallel 0} \cos^2 \theta + \frac{\beta_{e0}}{2} \\ B &= \cos^2 \theta \left( \left( \frac{3}{2} \beta_{\parallel 0} + \frac{\beta_{e0}}{2} \right) \left( 1 - \frac{\beta_{\parallel 0}}{2} (1 - a_{p0}) \right) \cos^2 \theta \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{3}{2} \beta_{\parallel 0} \left( 1 + \beta_{\parallel 0} a_{p0} \left( 1 - \frac{1}{6} a_{p0} \right) \right) + \frac{\beta_{e0}}{2} \left( \frac{3}{2} \beta_{\parallel 0} + 1 \right) \right) \sin^2 \theta \right) \end{aligned}$$

Le mode d'Alfvén-firehose incompressible n'est pas affecté par la pression électronique contrairement aux modes magnétosonores. Le critère firehose oblique n'est donc pas impacté. Le mode rapide reste stable et le mode lent contient toujours les critères firehose parallèle et miroir. Ces critères sont visibles dans  $B$ . Le critère firehose parallèle ( $\theta \sim 0^\circ$ ) est multiplié par un facteur positif dépendant de  $\beta_e$ , il ne sera donc pas impacté. Le critère miroir est par contre influencé par  $\beta_{e0}$ , il s'écrit :

$$\frac{3}{2} \beta_{\parallel 0} (1 + \beta_{\parallel 0} a_{p0} (1 - \frac{1}{6} a_{p0})) + \frac{\beta_{e0}}{2} (\frac{3}{2} \beta_{\parallel 0} + 1) < 0 \quad (9.50)$$

Ces résultats sont valables aux échelles MHD. On a vu dans la section 9.1 que la correction Hall est indépendante des pressions et n'influe que sur le critère firehose, elle ne sera donc pas affectée par la pression électronique isotrope. De plus, si la pression électronique est définie par une fermeture thermodynamique, la correction  $\nabla P_e$  (Pe) sera nulle. Par conséquent, le critère miroir modifié que l'on vient de dériver est valable pour les modèles MHD, MHD-Hall et MHD-Hall- $\nabla P_e$ .

## 9.4 Synthèse de l'extension de la théorie des lois exactes à d'autres régimes

### Correction Hall

- Théorie linéaire : apparitions des modes whistlers et cyclotron ionique, critère miroir inchangé mais décallage du critère firehose suivant le vecteur d'onde.
  - Correction turbulente compressible : (9.3)
  - Correction incompressible à la loi exacte PP98 : (9.4)
- ⇒ Contribution turbulente indépendante des tenseurs de pressions

### Dérivations des contributions provenant de la loi d'Ohm généralisée à partir du modèle bi-fluide

- Modèle bi-fluide **sans dimension** et ouvert utilisé pour obtenir la loi exacte généralisée : équations (9.10), (9.11), (9.12), (9.13), (9.14), (9.15), (9.16), (9.17)
- Loi exacte K41 généralisée écrite avec les quantités bi-fluide : (9.23)
- Ecriture de la loi exacte K41 bi-fluide avec les quantités mono-fluide et l'hypothèse quasi-neutre :
  - Contribution cinétique : (9.25)
  - Contribution d'énergie interne : (9.27)
  - Contribution des tenseur de pression : (9.29)
  - Contribution électromagnétique : (9.32)
- Décomposition de (9.32) suivant les différentes contributions présentes dans la loi d'Ohm généralisée quasi-neutre (9.33) :
  - Contribution MHD : (9.35)
  - Contribution Hall : (9.36) équivalente à (9.3)
  - Contribution  $\nabla P_e$  et  $\nabla P_i$  : (9.37)
  - Contribution inertielle : (9.38)

⇒ Ouvre le champ d'études potentielles au régime EMHD par exemple et à l'étude plus rigoureuse de l'impact sur la cascade turbulente des différentes approximations appliquées à la loi d'Ohm.

### Modèle utilisé dans la partie III

- Modèle ouvert utilisé pour obtenir la correction turbulente : équations (9.39), (9.40), (9.42), (9.45).
- Théorie linéaire : la pression électronique va venir impacter le critère d'instabilité miroir.
- Correction turbulente compressible : (???)
- Correction incompressible à la loi exacte PP98 : (9.47)

Ces résultats n'ont pas encore été publiés.

## CONCLUSION

Dans cette partie, nous avons dérivé un cadre d'étude complet et rigoureux des écoulements turbulents (zone inertielle supposée isentrope) allant du régime mono-fluide au régime bi-fluide, et dépendant de pressions tensorielles.

Dans le Chapitre 7 (synthèse 7.4), a été présenté une extension de la théorie de Kolmogorov à un écoulement magnétisé idéal dépendant d'une pression tensorielle. Un tenseur de pression gyrotrope a ensuite été appliqué dans cette extension afin de répondre analytiquement à la question de l'impact des anisotropies de pression décrites par le modèle CGL sur la cascade turbulente. De nouveaux termes pouvant nourrir ou réduire la cascade et dépendant de  $1 - a_p$  avec  $a_p$  le taux d'anisotropie  $p_\perp/p_\parallel$  ont été découverts. Linéairement, le signe de  $1 - a_p$  impacte l'apparition d'instabilité firehose ou miroir dans l'écoulement, comme cela a été rappelé dans la section 7.2. On a donc apporté un modèle théorique non linéaire permettant d'étudier le lien entre anisotropies, et potentiellement instabilités, et régimes turbulents, et qui pourrait venir expliquer les observations de [OSMAN *et al.* 2013 ; HADID, SAHRAOUI, GALTIER et HUANG 2018] dans le vent solaire. Cependant, une étude numérique est nécessaire afin d'affiner l'interprétation de la loi exacte.

Parmi les nouveaux termes dépendant de l'anisotropie de pression émergeant dans la loi exacte, un terme source survit dans la limite incompressible. La question de sa signification s'est donc posée. Nous nous sommes alors demandés à quoi pourrait ressembler un modèle incompressible gyrotrope dans le Chapitre 8 (synthèse 8.5). Un tel modèle incompressible, fermé par l'équation sur la trace du tenseur de pression, a alors été proposé et linéarisé. En plus de l'onde d'Alfvén-firehose, un nouveau mode y apparaît. On y retrouve le critère d'instabilité firehose parallèle mais aussi un critère d'instabilité que l'on a nommé pseudo-firehose apparaissant dans le cas quasi-perpendiculaire et venant réduire la zone de stabilité du modèle en fonction du taux d'instabilité moyen  $a_{p0}$  et du paramètre  $\beta_{\parallel 0}$ . Après une étude plus fine en fonction de l'angle de propagation, ce mode s'est révélé instable pour certains angles de propagation et tout couple de paramètres  $\beta_{\parallel 0}$  et  $a_{p0}$  tels que  $\frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0}) \neq \frac{3}{4}$ . Dans la limite incompressible du modèle CGL, ce mode apparaît sous un format surcontraint. La correction anisotrope de la loi PP98 refléterait donc l'impact non linéaire de la correction firehose au mode d'Alfvén non linéaire. Cette étude, encore sous un format préliminaire, pourra faire l'objet d'un futur article.

Enfin, dans le chapitre 9 (synthèse 9.4), les corrections provenant de la relaxation des approximations appliquées sur l'équation d'induction, ont été dérivées à partir d'un modèle bi-fluide afin d'étendre la loi exacte à d'autres gammes d'échelles et régimes. Les résultats obtenus ainsi ont servi de base afin d'adapter la loi exacte CGL aux modèles qui seront étudiés numériquement dans la partie III. Ces corrections serviront à refléter au mieux la cascade turbulente simulée.



---

## PARTIE III : Etude numérique d'un plasma turbulent quasi-compressible avec anisotropie de pressions

---

«*Simulations are to plasma turbulence physics what telescopes are to astronomy. They allow us to see beyond the limitations of our physical experiments and explore the vast and complex landscape of plasma behavior.*»<sup>3</sup>

**Paul W. TERRY**, "The role of numerical simulations in plasma turbulence research", 2010... d'après ChatGPT<sup>4</sup>

---

3. Traduction : Les simulations sont à la physique de la turbulence des plasmas ce que les télescopes sont à l'astronomie. Elles nous permettent de voir au-delà des limites de nos expériences physiques et d'explorer le paysage vaste et complexe du comportement des plasmas.

4. Cette intelligence artificielle invente des citations et les attribue à des articles introuvables écrits par des personnes existantes.



## INTRODUCTION

L'outil numérique pour la turbulence permet d'étudier divers modèles, d'isoler les effets des différents processus présents dans un plasma turbulent ou de simuler des régimes présents dans des plasmas inaccessibles aux mesures/diagnostics. Par exemple, les effets de la compression et les régimes sonique ou supersonique ont été étudiés par [ANDRÉS, SAHRAOUI, GALTIER, HADID, DMITruk *et al.* 2018], des régimes proche du régime supposé dans le milieu interstellaire ont été explorés par [FEDERRATH *et al.* 2010 ; FERRAND, GALTIER, SAHRAOUI et FEDERRATH 2020]. L'impact de l'approximation Hall sur la cascade incompressible d'énergie totale est le sujet de [FERRAND, GALTIER, SAHRAOUI, MEYRAND *et al.* 2019] et celui de la fermeture LF a fait l'objet de [FERRAND, SAHRAOUI, LAVEDER *et al.* 2021]. Comme on le verra par la suite, le modèle LF est un modèle gyrotope fermé au niveau du flux de chaleur de telle sorte que le modèle fluide capte le processus cinétique de l'effet Landau décrit par la théorie linéaire. Dans ces simulations, on a alors  $\nabla \cdot \bar{\mathbf{q}} \neq 0$ .

Dans les études présentées ici, nous allons utiliser des simulations qui ont, pour certaines, fait l'objet du papier [FERRAND, SAHRAOUI, LAVEDER *et al.* 2021]. Le code de simulation et notre méthode de post-traitement permettant d'obtenir les différents termes des lois exactes, seront présentés dans le chapitre 10. Différentes méthodes de validation feront l'objet du chapitre 11. Puis, nous présenterons et analyserons, plus en détail, la cascade turbulente présente dans divers jeux de données. Ceux issus de simulations du modèle CGL-Hall- $\nabla P_e$  feront l'objet du chapitre ?? et ceux associés au modèle LF-Hall- $\nabla P_e$  du chapitre ??.

L'objectif de ces études est d'affiner notre compréhension de l'impact de l'anisotropie de pression sur la cascade turbulente à travers une validation des lois dépendant d'une pression gyrotope (voir chapitre 7) par rapport à la loi compressible avec pression isotrope dérivée dans le chapitre 5.

Les résultats de ces études n'ont pas encore été publiés et leur interprétation est encore en cours de discussion<sup>5</sup>.

5. Le chemin engagé pour obtenir les résultats montré ici, s'est révélé tortueux entre la réflexion sur les méthodes à utiliser dans le code de post-traitement, l'implémentation de ces méthodes, la nécessité de lancer de nouvelles simulations, etc.

## Paramètres et dénominations des simulations utilisées

Les paramètres et dénominations des simulations utilisées sont résumés dans la TABLE 9.1 et la TABLE 9.2. Nous nous y réfèrerons au fil des chapitres de cette partie. Le champ magnétique est initialisé suivant  $\mathbf{e}_z$ . CGL1, CGL2, CGL3, LF2 et LF3 ont initialement fait l'objet de l'article FERRAND, SAHRAOUI, LAVEDER *et al.* 2021 mais les échantillons de temps consécutifs ont été extraits pour nos études. Les simulations CGL5 et CGL6 ont été spécialement lancées pour nos études.

Name	Résolution	$k_{0\perp} d_i$	$\theta_i$	$E_{sup}$	$A_f$	$t$	$N_t$	$\delta t$
CGL1	$512^3$	0.045	$7^\circ$	$1.6 \times 10^{-2}$	$1.0 \times 10^{-3}$	6700	4	$6.25 \times 10^{-2}$
CGL2	$512^3$	0.045	$15^\circ$	$1.6 \times 10^{-2}$	$1.0 \times 10^{-3}$	12 900	4	$5 \times 10^{-2}$
CGL3	$512^2 \times 1024$	0.5	$15^\circ$	$4.5 \times 10^{-2}$	$8.0 \times 10^{-3}$	361	6	$2 \times 10^{-4}$
CGL3B	$512^2 \times 1024$	0.5	$15^\circ$	$1.125 \times 10^{-2}$	$4.0 \times 10^{-3}$	410	4	$3 \times 10^{-4}$
CGL5	$512^2 \times 1024$	0.147	$15^\circ$	$1.6 \times 10^{-2}$	$3.0 \times 10^{-3}$	12 905	6	$5 \times 10^{-3}$
CGL6	$512^2 \times 1024$	0.147	$15^\circ$	$1.6 \times 10^{-2}$	$3.0 \times 10^{-3}$	2730	4	$5 \times 10^{-3}$
LF2	$512^3$	0.045	$15^\circ$	$1.6 \times 10^{-2}$	$1 \times 10^{-3}$	6580	1	$6.25 \times 10^{-2}$
LF3	$432^3$	0.5	$15^\circ$	$4.5 \times 10^{-2}$	$8 \times 10^{-3}$	180.2	1	$4 \times 10^{-4}$

TABLE 9.1 – Extraits des paramètres des simulations taitées. Résolution : Nombre de points grille numérique du code initial.  $k_{0\perp} d_i$  : vecteur d'onde d'injection perpendiculaire à  $\mathbf{e}_z$  normalisé par la longueur inertielle  $d_i$ ,  $L_\perp = \frac{2\pi}{k_{0\perp} d_i}$  est la taille physique perpendiculaire de la grille simulée.  $\theta_i$  : angle d'injection par rapport  $\mathbf{e}_z$ ,  $L_z = \frac{L_\perp}{\tan \theta_i}$ .  $E_{sup}$  : énergie perpendiculaire cinétique + magnétique, critère d'extinction du forçage.  $t$  : date initiale (en unité de temps ionique) de prélèvement de l'échantillon temporel utilisé pour l'étude le loi exacte.  $N_t$  : nombre de temps consécutifs utilisés.  $\delta t$  : pas temporel, unité de temps ionique.

Name	$\nu = \eta$	$\nu_\rho$	$\nu_p$	$\nu_q$	$\alpha$	$a_{pi0}$	$a_{pe0}$
CGL1	$7.35 \times 10^{-8}$	0	$7.35 \times 10^{-9}$	0	80	1	1
CGL2	$7.35 \times 10^{-8}$	0	$7.35 \times 10^{-9}$	0	10	1	1
CGL3	$4 \times 10^{-14}$	$1.6 \times 10^{-14}$	$1.6 \times 10^{-14}$	0	2.5	1	1
CGL3B	$1.0 \times 10^{-14}$	$1.0 \times 10^{-14}$	$1.0 \times 10^{-14}$	0	2.5	1	1
CGL5	$3 \times 10^{-11}$	0	$3 \times 10^{-12}$	0	6	1	1
CGL6	$3 \times 10^{-11}$	0	$3 \times 10^{-12}$	0	5	4	1
LF2	$7.35 \times 10^{-8}$	0	$7.35 \times 10^{-9}$	$7.35 \times 10^{-9}$	1	1	1
LF3	$7 \times 10^{-14}$	$7 \times 10^{-14}$	$7 \times 10^{-14}$	$7 \times 10^{-14}$	1.5	1	1

TABLE 9.2 – Extraits des paramètres des simulations taitées, choisis empiriquement pour l'hyperdissipation.  $\nu$ ,  $\eta$ ,  $\nu_\rho$ ,  $\nu_p$  : constantes caractéristiques de l'hyperdissipation respectivement de la vitesse, du champ magnétique, de la densité, des pressions.  $\alpha$  : facteur d'anisotropie.  $a_{pi0}$  : taux d'anisotropie de pression ionique initiale.  $a_{pe0}$  : taux d'anisotropie de pression électronique initiale.

## PARTIE III : CHAPITRE 10

# L SIMULATION TURBULENTE ET CALCUL DE LOIS EXACTES

### Sommaire

---

10.1 Simuler un plasma turbulent . . . . .	119
10.2 Code de post-traitement pour le calcul numérique de lois exactes . . . . .	121
10.3 Mode de représentation du résultat . . . . .	124
10.4 Synthèse des méthodes et choix numériques . . . . .	127

---

Dans cette partie, nous utiliserons des simulations turbulentes issues de deux modèles décrivant des anisotropies de pression, le premier dépend d'une fermeture CGL tandis que le second dépend d'une fermeture de type LF. Ces modèles sont simulés avec un seul et unique code que l'on va présenter dans ce chapitre. Les spécificités des modèles seront détaillées dans les chapitres ?? et ??. Dans ce premier chapitre, seront abordées les méthodes numériques utilisées dans l'implémentation de ces modèles (section 10.1) ainsi que la description des méthodes de post-traitement associées au calcul des lois exactes (section 10.2) et à leur visualisation (section 10.3). Les valeurs associées à chaque simulation, des paramètres décrits dans la section 10.1 sont résumés dans la TABLE 9.1 et la TABLE 9.2.

### 10.1 Simuler un plasma turbulent

Le code de simulation utilisé, codé en **Fortran**, est un code tridimensionnel pseudo-spectral et versatile développé en interne à l'Observatoire de la Côte d'Azur pour l'implémentation du modèle fluide proposé par [SNYDER *et al.* 1997] et étendu par [GOSWAMI *et al.* 2005 ; PASSOT et SULEM 2007 ; PASSOT, SULEM et HUNANA 2012 ; SULEM et PASSOT 2015]. Ce modèle prend en compte les termes gyrotope et non-gyrotope des tenseurs de pression des ions et des électrons et capte l'effet Landau ionique et électronique à travers les flux de chaleur des électrons et des ions. Le code permet à l'utilisateur de choisir quelles contributions garder.

Les quantités sont sans dimension, les longueurs sont normalisées par  $d_i$  la longueur inertie des ions et les vitesses par la vitesse d'Alfvén. Cela induit une constante  $\beta/2$ , avec  $\beta = 1$ , présente dans tous les termes dépendant des pressions. Il faudra prendre en compte cette constante par la suite.

On va supposer une équation générique  $\partial_t X = \mathbf{v} \cdot \nabla X$ . La simuler via un code pseudo-spectral (algorithme schématisé sur la FIGURE 10.1) signifie que les dérivées spatiales telles que  $\nabla X$  sont effectuées dans l'espace de Fourier, tandis que les produits tels que  $\mathbf{v} \cdot \nabla X$  et l'intégration temporelle de l'équation pour obtenir les quantités au pas de

temps suivant, sont effectués dans l'espace réel. Ainsi, à chaque pas de temps, un aller-retour est effectué entre les espaces réel et de Fourier. Leur discrétisation en un nombre de points finis (la grille numérique), induit un repliement du spectre («aliasing») des termes non-linéaires. Cet effet est limité par une troncation, à chaque pas de temps, du spectre de chaque quantité. L'intégration temporelle est obtenue via un schéma de Runge-Kutta d'ordre 3 (RK3), choisi pour sa stabilité devant des termes dispersifs tels que le terme de Hall [WILLIAMSON 1980]. Les conditions de bords de la grille numérique sont choisies comme périodiques afin de pouvoir utiliser la transformation de Fourier et l'algorithme de transformée de Fourier rapide (FFT).

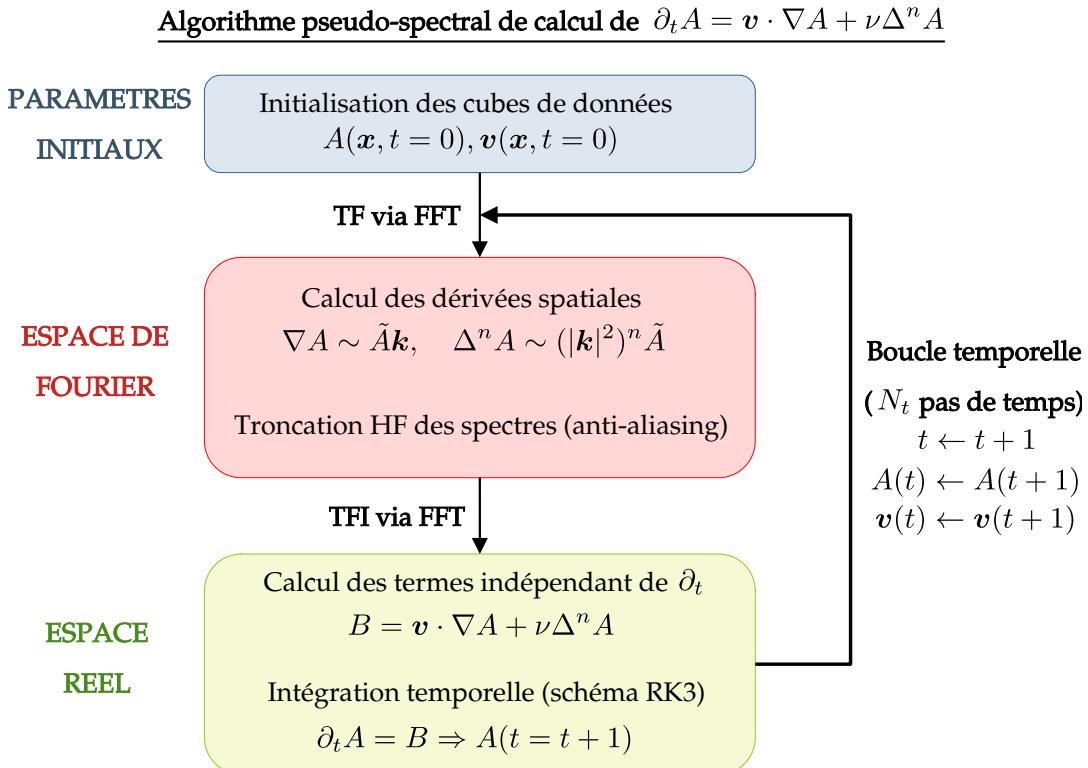


FIGURE 10.1 – Algorithme d'intégration d'une équation d'évolution générique via une méthode pseudo-spectrale. Prise en compte des corrections anti-aliasing et hyperdissipation  $\nu \Delta^n A$ . TF(I) correspond à Transformée de Fourier (Inverse).

Afin de limiter l'apparition de fort gradients, ces discontinuités faisant planter la simulation, deux possibilités existent : appliquer un filtre passe-bas sur le spectre de la quantité impliquée ou un terme d'hyperviscosité dans son équation. Le choix effectué est celui de l'hyperviscosité, c'est-à-dire imposer une décroissance graduelle et de plus en plus intense du spectre de la quantité (pour plus d'information se référer à [BORUE et ORSZAG 1995 ; FRISCH *et al.* 2008]). Ce terme de dissipation numérique s'écrit pour un champ  $X$ ,  $\nu \Delta^n X$  avec  $\nu$ , une constante choisie initialement et  $n$  un entier fixé à 4.  $\Delta^n$  est effectué dans l'espace de Fourier où une décroissance du spectre en  $\mathbf{k}^{-8}$  est donc obtenue. L'existence d'un champ magnétique moyen dans les simulations, induit une anisotropie spatiale de la turbulence. Sa direction est imposée suivant  $\mathbf{e}_z$ . Afin de refléter cette anisotropie, l'hyperviscosité est adaptée avec un paramètre  $\alpha$  :  $\Delta^n$  et calculée dans l'espace de Fourier tel que  $(k_x^2 + k_y^2 + \alpha k_z^2)^n$ . Les paramètres  $\nu$  et  $\alpha$  sont résumés dans la TABLE 9.2. Avec l'incrément temporel  $\delta t$ , ils sont accordés empiriquement afin de réduire un peu le temps

de calcul, de maintenir la dissipation aux vecteurs d'onde les plus grands et d'éviter tout emballlement de la simulation et l'apparition d'instabilités numériques induisant une interruption accidentelle de la simulation. En termes de turbulence, l'hyperviscosité sera considérée comme le terme de dissipation évacuant l'énergie aux petites échelles.

La cascade d'énergie est entretenue par un forçage permanent<sup>1</sup>. Ce forçage de type antenne de Langevin (oscillateur harmonique forcé aléatoirement [TENBARGE *et al.* 2014]) injecte la somme de deux ondes de vecteurs d'ondes opposées et de fréquences aléatoire mais proches de celle de l'onde d'Alfvén cinétique. Leur amplitude correspond au paramètre  $A_f$  multiplié par un facteur aléatoire. Il est appliqué sur le champ de vitesse de telle sorte à maintenir la somme des énergies cinétique et magnétique perpendiculaires moyennes sous un niveau  $E_{sup}$  et au-dessus d'un niveau  $E_{inf}$  proche de  $E_{sup}$ . L'énergie moyenne totale est donc quasi-constante. Il apparaît dans l'espace de Fourier tel un peigne de distribution de Dirac non nulles aux vecteurs d'ondes les plus petits, tels que  $\mathbf{k} = \{(0, \pm 1, \pm 1); (\pm 1, \pm 1, \pm 1)\}$  dans la grille numérique associée à l'espace de Fourier. L'angle d'injection de l'énergie,  $\theta_i$ , sert à définir la forme de la grille spatiale, un parallélépipède allongé dans la direction  $\mathbf{e}_z$ , la taille physique de cette grille est fixée telle que  $L_\perp/L_z = \tan \theta_i$  avec  $L_\perp = \frac{2\pi}{k_{0\perp} d_i}$ .

La taille de l'espace des échelles accessibles via ces simulations dépend de la taille de la grille spatiale. L'échelle la plus petite dans une direction est la distance minimale entre deux points de la grille dans cette direction et l'échelle la plus grande la moitié de la taille de la grille. Pour une étude de turbulence, on a besoin de plusieurs ordres de grandeurs entre les échelles minimales et maximales. Afin d'obtenir un nombre de points suffisant, on part d'une grille de taille réelle fixée, mais contenant peu de points, par exemple  $128^3$ , puis, après avoir atteint un régime turbulent satisfaisant tel que les spectres se soient stabilisés, on augmente le nombre de points, et ainsi de suite jusqu'à avoir la taille voulue pour l'espace des échelles et un spectre stabilisé. Le nombre de points idéal serait de  $1024^3$  ou plus, mais plus il y a de points, plus le temps de calcul augmente (typiquement, il faut environ un mois de calcul avec 64 processeurs pour obtenir une simulation de taille  $512^2 \times 1024$  dans laquelle la turbulence se serait a priori entièrement développée) et plus, le calcul monopolisera de la mémoire. Similairement, le calcul du taux de cascade sera aussi plus contraignant. Un compromis doit donc être trouvé. La taille de cube minimale considérée dans le cadre des études de turbulence sera  $512^3$  et une partie des simulations auront une taille de  $512^2$  dans le plan  $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y\}$  et 1024 dans la direction  $\mathbf{e}_z$ .

Les simulations utilisées et détaillées la TABLE 9.1 et la TABLE ?? ont, pour la plupart, fait l'objet de l'article FERRAND, SAHRAOUI, LAVEDER *et al.* 2021. Parmi, elles, une est de taille  $1024^3$ . Elle ne sera pas traitée ici, car sa taille est trop importante pour le code de post-traitement implémenté et les moyens de calcul (mésocentres) à disposition.

## 10.2 Code de post-traitement pour le calcul numérique de lois exactes

On a vu qu'une loi exacte est une formule statistique donnant un résultat en fonction de l'échelle  $\ell$ . Elle dépend de quantités évaluées localement en deux points puis combinées en

1. [HELLINGER, VERDINI *et al.* 2018; GÓMEZ *et al.* 2005; MININNI *et al.* 2011] utilisent une autre méthode pour obtenir le développement d'une cascade turbulente : leur champ de vitesse et champ magnétique sont initialisés par une superposition de modes de phases aléatoires, puis leurs simulations évoluent librement.

une expression qui est ensuite moyennée. Une partie des termes doivent ensuite être dérivés dans l'espace des échelles si aucune hypothèse d'intégration n'est effectuée. Cette méthode pourrait être implémentée directement. On considérerait les quantités à disposition, a priori des cubes évalués en  $\mathbf{x}$ ), on les translaterait de telle sorte à obtenir des cubes évalués en  $\mathbf{x} - \boldsymbol{\ell}$  puis on les combinerait suivant l'expression voulue avant de les moyenner. On obtiendrait ainsi notre résultat évalué en un point de l'espace des échelles et il faudrait recommencer encore et encore afin d'obtenir l'ensemble de l'espace des échelles. Enfin, on dériverait ou intégrerait le résultat. Cet algorithme est schématisé sur la FIGURE 10.2.

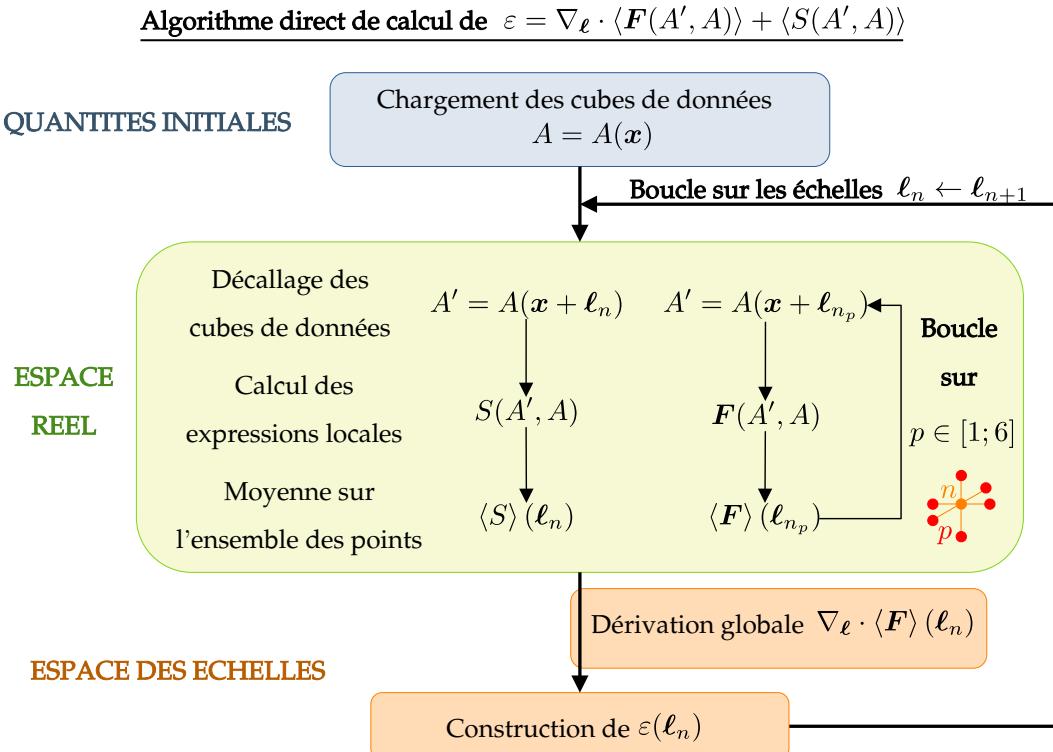


FIGURE 10.2 – Algorithme de calcul du taux de cascade  $\varepsilon$  via la méthode directe. Les quantités impliquées sont des quantités génériques.

Cette méthode est coûteuse en temps de calcul et demande des compromis. Pour réduire le temps de calcul, on peut choisir intelligemment un certain nombre de vecteurs d'échelle. Tout d'abord, on peut jouer sur la parité de la loi exacte et ne calculer que les vecteurs tels que  $\ell_z \leq 0$ . [FERRAND, SAHRAOUI, LAVEDER *et al.* 2021; FERRAND, SAHRAOUI, GALTIER *et al.* 2022], par exemple, utilise les hypothèses d'isotropie ou d'axisymétrie de l'espace d'échelles. Dans le cas isotrope, l'espace des échelles est alors vu comme une sphère et 73 vecteurs directeurs partant du centre de cette sphère. Dans le cas axisymétrique, le découpage est similaire, mais effectué dans des disques pour chaque  $\ell_z$ . La divergence dans l'espace des échelles est ensuite effectuée sphériquement (resp. cylindriquement) le long de  $\ell = |\boldsymbol{\ell}|$  (resp.  $\ell_{\perp} = \sqrt{\ell_x^2 + \ell_y^2}$ ) en supposant les dérivées angulaires nulles. Je n'ai pas voulu faire de même, n'étant pas convaincu de l'indépendance angulaire de la dérivée et trouvant la statistique finale faible. Une autre possibilité est de choisir les vecteurs en fonction du mode de représentation final. Si, au final, le mode de représentation est logarithmique, on peut ne choisir qu'un nombre limité de vecteurs à grande échelle tels qu'ils soient régulièrement espacés en représentation logarithmique [MANZINI *et al.* 2022]. Un problème de cette méthode est l'irrégularité de la grille résul-

tante. La divergence dans l'espace des échelles doit se faire vecteur par vecteur à partir des six échelles les plus proches (au minimum). Ce choix-là ne semblait toujours pas satisfaisant, car il implique de devoir potentiellement refaire le calcul en fonction du mode de représentation final et un biais en cas de moyenne dans l'espace des échelles. Ces compromis doivent en plus être accompagnés d'une optimisation, voire d'une parallélisation du calcul numérique.

Après maintes versions et tentatives d'optimisation de mon code de post-traitement, codé en Python, tel qu'essayant de respecter explicitement la forme de la loi exacte, j'ai décidé de changer radicalement de point de vue. Mathématiquement, les opérations de corrélation,  $\otimes$ , et de convolution,  $*$ , sont liés. En effet, si l'on considère deux quantités  $s$  et  $r$ , et qu'on les corrèle :

$$\begin{aligned} C_{sr}(\boldsymbol{\ell}) = s(\mathbf{x}) \otimes r(\mathbf{x}) &= \frac{1}{V} \iiint_V s(\mathbf{x} + \boldsymbol{\ell}) r^*(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \frac{1}{V} \iiint_V s(\mathbf{x}) r^*(\mathbf{x} - \boldsymbol{\ell}) d\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{V} \iiint_V s(\mathbf{x}) r^*(-(\boldsymbol{\ell} - \mathbf{x})) d\mathbf{x} = \frac{1}{V} s(\boldsymbol{\ell}) * r^*(-\boldsymbol{\ell}), \end{aligned} \quad (10.1)$$

avec  $V$  le volume d'intégration. Ainsi appliquer l'opération de corrélation entre  $s$  et  $r$  revient à convoluer  $s$  évaluée en  $\boldsymbol{\ell}$  avec le conjugué de  $r$  évaluée en  $-\boldsymbol{\ell}$ . Dans notre situation,  $r^* = r$  puisque  $r$  n'est pas un complexe. Une autre propriété mathématique intéressante est que l'opération de convolution correspond à effectuer un simple produit dans l'espace de Fourier. Ainsi en notant  $\text{TF}[\cdot]$  la transformée de Fourier et  $\text{TFI}[\cdot]$  la transformée inverse, :

$$C_{sr}(\boldsymbol{\ell}) = \text{TFI}[\text{TF}[C_{sr}(\boldsymbol{\ell})]] = \frac{1}{V} \text{TFI}[\text{TF}[s(\boldsymbol{\ell})] \cdot \text{TF}[r(-\boldsymbol{\ell})]] = \frac{1}{V} \text{TFI}[\text{TF}[s](\mathbf{k}) \cdot \text{TF}[r]^*(\mathbf{k})]. \quad (10.2)$$

L'obtention de l'ensemble de l'espace des échelles est donc possible mais demande de développer tous les termes factorisés de la loi exacte. Par exemple, pour la fonction de structure  $\langle \delta\mathbf{v} \cdot \delta\mathbf{v} \delta\mathbf{v} \rangle$  :

$$\langle \delta\mathbf{v} \cdot \delta\mathbf{v} \delta\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}' \mathbf{v}' - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \mathbf{v}' + 2\mathbf{v}' \cdot \mathbf{v} \mathbf{v} - \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}' \mathbf{v} - 2\mathbf{v}' \cdot \mathbf{v} \mathbf{v}' \rangle \quad (10.3)$$

$$= \frac{1}{N} \text{TFI}[\text{TF}[C_{\mathbf{v}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}] - \text{TF}[C_{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}, \mathbf{v}}] + 2\text{TF}[C_{\mathbf{v}, \mathbf{v} \mathbf{v}}] - 2\text{TF}[C_{\mathbf{v} \mathbf{v}, \mathbf{v}}]] \quad (10.4)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{N} \text{TFI}[\text{TF}[\mathbf{v}]^* \cdot \text{TF}[\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}] - \text{TF}[\mathbf{v}] \cdot \text{TF}[\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}]^*] \\ &\quad + \frac{2}{N} \text{TFI}[\text{TF}[\mathbf{v}]^* \cdot \text{TF}[\mathbf{v} \mathbf{v}] - \text{TF}[\mathbf{v}] \cdot \text{TF}[\mathbf{v} \mathbf{v}]^*], \end{aligned} \quad (10.5)$$

avec  $C_{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}, \mathbf{v}} = \langle \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}' \mathbf{v} \rangle$ ,  $C_{\mathbf{v} \mathbf{v}, \mathbf{v}} = \langle \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v} \mathbf{v}' \rangle$ ,  $\text{TFI}[\cdot]$  la transformée de Fourier inverse et  $N$  le nombre de points moyennés et sachant que par homogénéité statistique, on a  $\langle \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}' \mathbf{v}' \rangle = \langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \mathbf{v}' \rangle$ . Cette méthode est utilisable, car il est possible de développer les expressions en des produits de deux quantités générales, une évaluée au point  $\mathbf{x}$  et l'autre en  $\mathbf{x}'$ , et parce que la simulation est périodique. L'algorithme associé à cette méthode est schématisé sur la FIGURE 10.3. Cette méthode demande quelques précautions lors de l'implémentation, car elle peut vite devenir coûteuse en mémoire ainsi que de développer l'ensemble des termes présents dans une loi exacte. Cependant, elle permet d'obtenir un résultat complet, indépendant du mode de représentation final des résultats. C'est donc la méthode qui a été choisie. En usant de l'algorithme de FFT, elle s'avère, de plus, particulièrement rapide (moins de dix minutes pour calculer séparément les trois termes de PP98 pour CGL2 par exemple).

**Algorithme spectral de calcul de**  $\varepsilon = \nabla_\ell \cdot \langle F(A', A) \rangle + \langle S(A', A) \rangle$   
**avec**  $F(A', A)$  **et**  $S(A', A)$  **développés en termes de type**  $s(A') \cdot r(A)$

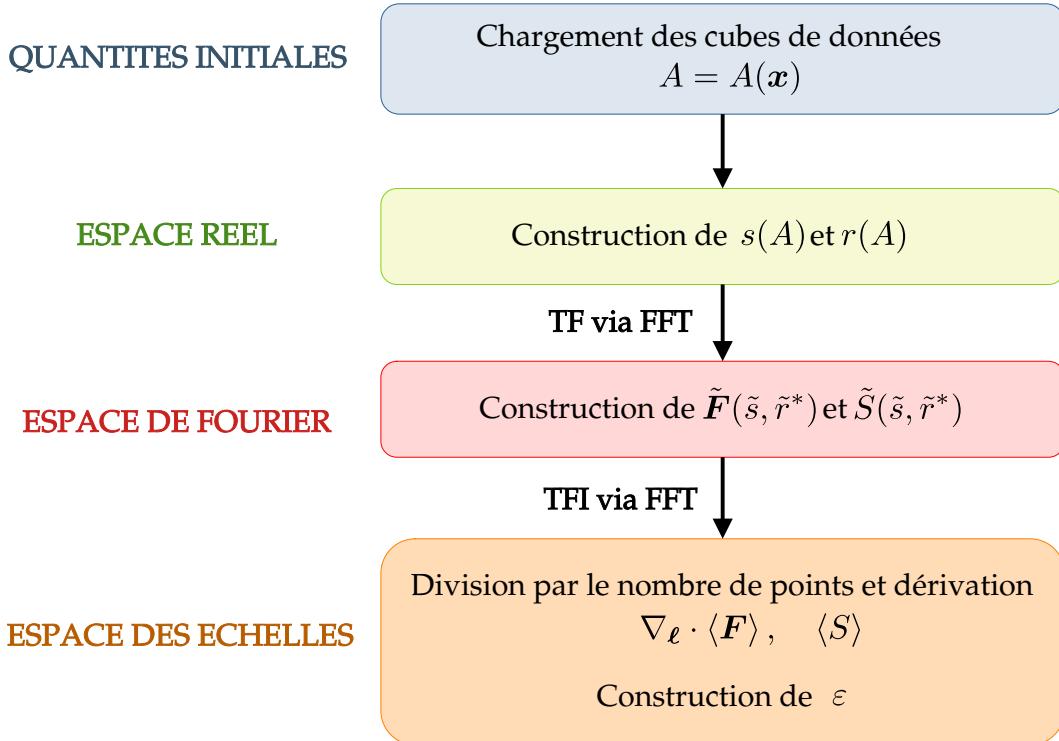


FIGURE 10.3 – Algorithme de calcul du taux de cascade  $\varepsilon$  via la convolution. Les quantités impliquées sont des quantités génériques et par exemple pour  $S$ ,  $\text{TF}[S] = \tilde{S}$ .

### 10.3 Mode de représentation du résultat

Le résultat de l'algorithme de calcul par convolution est, pour chaque quantité, un parallélépipède couvrant une gamme d'échelles physiques dans la direction  $e_z$  différente de la gamme d'échelles couverte dans les directions perpendiculaires,  $e_x$  ou  $e_y$ . Ces gammes d'échelles couvrant différents ordres de grandeurs, une représentation logarithmique est usuellement adoptée. Le caractère tridimensionnel de la grille parallélépipédique, impose de choisir une méthode de réduction (3 dimensions (3D) vers 2D ou 1D) afin de pouvoir visualiser facilement les quantités. Différents types de réductions sont possibles et illustrées sur la FIGURE 10.4 :

- R1 : 1D en fonction de  $\ell = |\ell|$  en moyennant la quantité sur des coquilles de rayon moyen  $\ell$ ,
- R2 : 2D en fonction de  $\ell_\perp = \sqrt{\ell_x^2 + \ell_y^2}$  et  $\ell_\parallel = \ell_z$  en moyennant la quantité sur des couronnes de rayon moyen  $\ell_\perp$  dans chaque plan perpendiculaire à  $e_z$ ,
- R3 : 1D en fonction de  $\ell_\perp$  en moyennant la quantité sur des coquilles cylindriques de rayon moyen  $\ell_\perp$ , la moyenne suivant  $\ell_\parallel$  peut s'effectuer de diverses manières qui seront détaillées par la suite,
- R4 : 1D en fonction de  $\ell_\parallel$  en moyennant chaque plan perpendiculaire à  $e_z$ , la moyenne suivant  $\ell_\perp$  peut s'effectuer de diverses manières qui seront détaillées par la suite.

Sachant que la grille parallélépipédique couvre des gammes d'échelles différentes dans

la direction  $\mathbf{e}_z$  et les directions perpendiculaires (voir la carte R2 sur la FIGURE 10.4), notre géométrie est fondamentalement axisymétrique. La représentation de type R2 est donc la plus adaptée. L'échelle «symlog»<sup>2</sup> permet de repérer les changements de signe et les ordres de grandeurs couverts par  $\varepsilon_{PP98}$  tandis que les courbes de niveau linéaires révèlent les variations plus spécifiques tel qu'un affaiblissement aux petites échelles ou des bosses (courbes de niveau bleues) aux échelles parallèles et perpendiculaires intermédiaires. On pourrait définir une zone inertielle entre les courbes de niveaux associées à la valeur 0.4. On remarque que cette zone semble carrée, cela est dû aux axes logarithmiques. Avec des axes linéaires, on observerait un quart d'ellipse liant  $\ell_{\parallel}/d_i = 1 \times 10^2$  à  $\ell_{\perp}/d_i \simeq 30$ . Le problème des cartes est la difficulté de comparer de multiples quantités. Nous aurons donc besoin d'une représentation 1D.

R1 peut donner un résultat biaisé : sur le graphique R1 de la FIGURE 10.4, le résultat correspond quasiment entièrement (sauf aux très grandes échelles communes aux directions parallèle et perpendiculaire) à  $\varepsilon_{PP98}(\ell_{\parallel} = 0)$  en rouge sur le graphique R3 de la FIGURE 10.4. Le manque de points, pour effectuer la moyenne en chaque  $\ell$ , induit des variations non-physiques du résultat (sursauts à intervalles réguliers sur le graphique R1 de la FIGURE 10.4). R3 ou R4 serait peut-être plus adapté même si originellement, le caractère petit ou grand des échelles est défini à partir de  $\ell = |\ell|$  (resp. petit ou grand).

Cependant, visualiser la cascade via R3 en moyennant l'ensemble des  $\ell_{\parallel}$  à  $\ell_{\perp}$  fixé (courbe bleue), vient mixer les petits et grands  $\ell$ . La zone négative à grand  $\ell_{\parallel}$  vient alors écraser la zone inertielle présumée et plus encore la variation des petites échelles. Le même phénomène apparaît pour R4 (courbes bleues sur les graphiques R3 et R4 de la FIGURE 10.4). Une autre possibilité de réduction serait de ne regarder qu'une direction  $\ell_{\parallel} = 0$  pour R3 ou  $\ell_{\perp} = 0$  pour R4 (courbes rouges sur les graphiques R3 et R4 de la FIGURE 10.4). Le résultat n'est alors pas très lisse et peu représentatif de la variation d'ensemble.

La troisième possibilité correspond à appliquer un filtre angulaire. En définissant  $\theta$ , l'angle entre  $\ell$  et  $\mathbf{e}_z$ , on pourrait considérer que les  $\ell$  contribuant à la dynamique parallèle sont les  $\ell$  quasi-parallèles tels que  $\theta < 45^\circ$  et ceux contribuant à la dynamique perpendiculaire, les  $\ell$  quasi-perpendiculaires tels que  $\theta > 45^\circ$ . La frontière  $\theta = 45^\circ$  est représentée par une ligne noire continue sur la carte R2 de la FIGURE 10.4, et les résultats apparaissent en orange sur les graphiques R3 et R4. Pour R3, le résultat coïncide avec  $\varepsilon_{PP98}(\ell_{\parallel} = 0)$ . En effet, aux petites échelles, le plan tel que  $\ell_{\parallel} = 0$  est la seule contribution à la moyenne. Similairement, pour R4, on assiste à un écroulement de la courbe qui rejoint  $\langle \varepsilon_{PP98} \rangle_{\ell_{\perp}}$  en  $\ell_{\parallel} = 7 \times 10^1$ . Cet écroulement est dû à la prise en compte de la région bleue à droite de la carte R2 pour les échelles supérieures à  $7 \times 10^1$ . Ce filtre angulaire n'est donc pas adapté.

La réduction 1D qui sera adoptée par la suite correspond à un filtrage angulaire basé sur l'angle d'injection de l'énergie,  $\theta_i$ . Ce dernier impose la géométrie de la grille et les gammes d'échelles accessibles. Dans l'espace d'échelle, l'injection a lieu aux échelles telles que  $\ell$  est maximal, c'est-à-dire dans l'angle supérieur droit de la carte R2 FIGURE 10.4.  $\theta = \theta_i$  correspond à la diagonale représentée par une ligne noire discontinue. Appliquer cette réduction nous donne les courbes vertes des graphiques R3 et R4 de la FIGURE 10.4. N'y apparaissent, ni les artefacts visibles avec R1, ni les saturations visibles sur les courbes bleues ou orange et elles sont plus représentatives du comportement de  $\varepsilon_{PP98}$  dans l'ensemble de l'espace des échelles que les courbes rouges. On remarquera tout de

2. Cette échelle décrit l'ensemble des nombres réels via trois représentations :  $[x_0; +\infty[$  en représentation logarithmique,  $]x_0; -x_0[$  en représentation linéaire (afin d'éviter la singularité du point 0), puis  $] -\infty; -x_0]$  en représentation logarithmique (en prenant l'opposé du logarithme de la valeur absolue).  $x_0$  est choisi le plus petit possible.

même que la décroissance en allant vers les petites échelles est moins accentuée que pour les courbes rouges : les premières échelles de  $\ell_{parallel}$  (resp.  $\ell_{\perp}$ ) différentes de 0 sont prises en compte dans la moyenne des premiers points de  $\varepsilon_{PP98}$  en fonction de  $\ell_{\perp}$  (resp.  $\ell_{parallel}$ ).

## 10.4 Synthèse des méthodes et choix numériques

### Code de simulation d'un plasma turbulent (Fortran) :

- Méthode d'intégration pseudo-spectrale (voir FIGURE 10.1) des équations fluides.
- Des termes d'hyperdissipation qui joueront le rôle de la dissipation aux petites échelles.
- Un forçage permanent, localisé dans l'espace de Fourier, de fréquences aléatoires proche de la pulsation Alfvénique, et maintenant l'énergie perpendiculaire (cinétique + magnétique) du système quasiment constante.
- Une géométrie périodique dépendant de l'angle d'injection de l'énergie,  $\theta_i$  et de la résolution de la grille numérique.

Je n'ai pas participé dans l'écriture de ce code mais je l'ai utilisé pour compléter le lot de simulations analysées par FERRAND, SAHRAOUI, LAVEDER *et al.* 2021.

**Calcul des termes des lois exactes (Python/Numpy/Scipy) :** Obtention rapide de l'ensemble de l'espace d'échelles accessible grâce à une méthode de calcul basée sur le lien entre corrélation et convolution, et sur la périodicité des simulations. L'algorithme est schématisé sur la FIGURE 10.3.

### Visualisation des résultats (Python/Matplotlib) : représentation cylindrique

- Représentation 2D en fonction de  $\ell_{\parallel}$  et  $\ell_{\perp}$  avec des échelles de couleurs de type chaud/froid (indiquant facilement le signe du résultat) associées aux variations logarithmique (fond) et linéaire (courbes de niveaux) du résultat.
- Représentation 1D en fonction de  $\ell_{\perp}$ . Réduction du résultat 2D en moyennant sur  $\ell_{\parallel}$  pour  $\theta > \theta_i$ .
- Représentation 1D en fonction de  $\ell_{\parallel}$ . Réduction du résultat 2D en moyennant sur  $\ell_{\perp}$  pour  $\theta < \theta_i$ .

Avec  $\theta$  l'angle entre  $\ell$  et la direction moyenne du champ magnétique  $e_z$ .

J'ai implémenté les codes de post-traitement et de visualisation des termes des lois exactes. Le code de post-traitement est disponible sur GitHub : [paulinesimon97/2022-07\\_Simu\\_Exact\\_laws](https://github.com/paulinesimon97/2022-07_Simu_Exact_laws) : Package usefull to compute exact laws 2023.

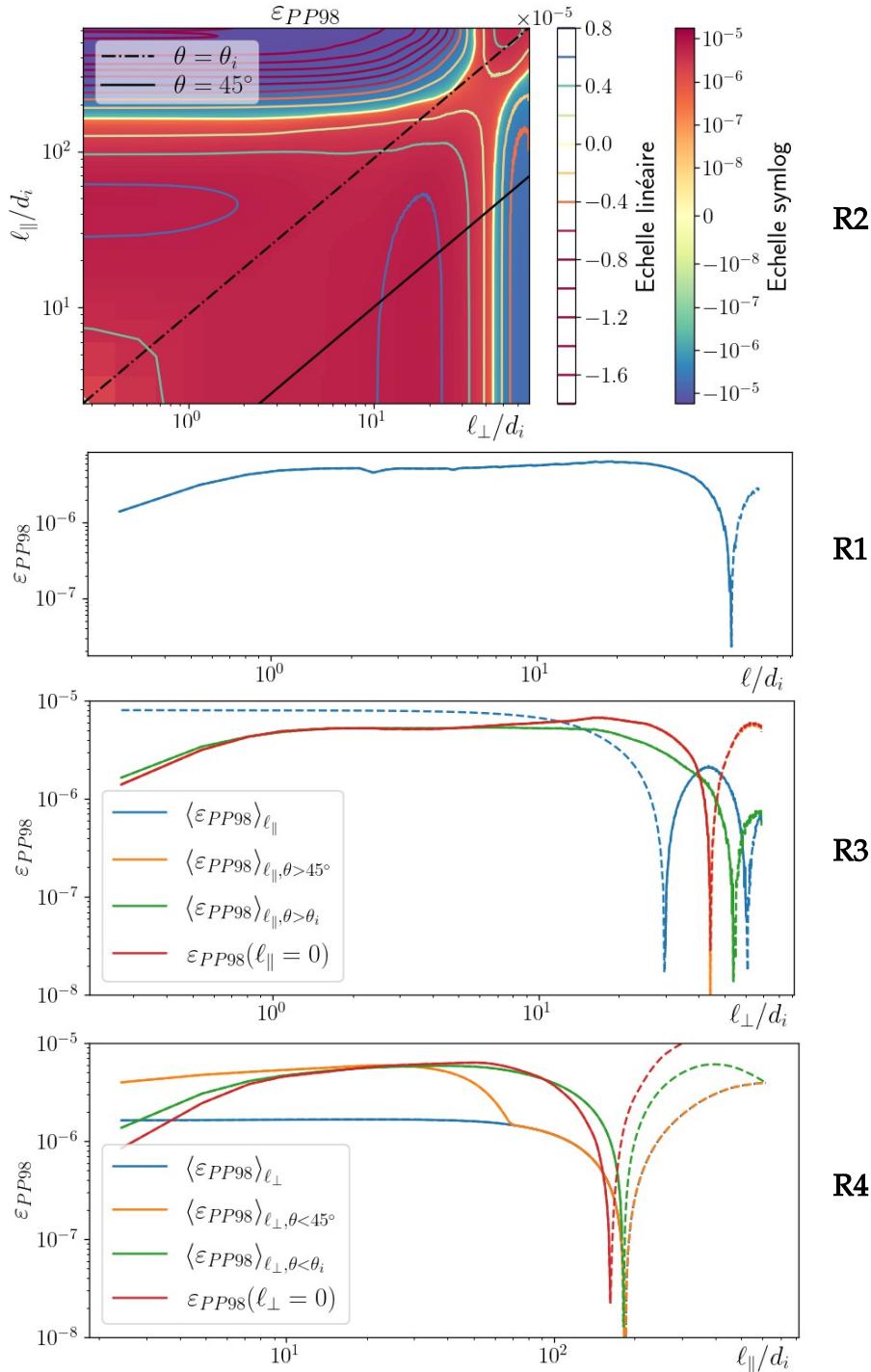


FIGURE 10.4 – Différents modes de représentations du taux de cascade  $\varepsilon_{PP98}$  calculé avec PP98 dans les données de la simulation CGL1. R2 : 2D en fonction de  $\ell_\perp$  et  $\ell_\parallel$ , avec deux échelles de couleurs, une échelle symlog, linéaire entre  $-10^8$  et  $10^8$  (échelle colorée continue), une échelle linéaire (échelle colorée discontinue). Frontières  $\theta = \theta_i$  (noire discontinue) et  $\theta = 45^\circ$  (noire continue). R1 : 1D en fonction de  $\ell$ . R3 : 1D en fonction de  $\ell_\perp$ , pour  $\ell_\parallel = 0$  (rouge), moyenne sur l'ensemble des  $\ell_\parallel$  (bleue), moyennes sur les  $\ell_\parallel$  tels que  $\theta > 45^\circ$  (orange), et tels que  $\theta > \theta_i$  (vert). R4 : 1D en fonction de  $\ell_\parallel$ , pour  $\ell_\perp = 0$  (rouge), moyenne sur l'ensemble des  $\ell_\perp$  (bleue), moyenne sur les  $\ell_\perp$  tels que  $\theta < 45^\circ$  (orange) et tels que  $\theta < \theta_i$  (vert). Le caractère continu ou discontinue des courbes 1D reflète le signe de  $\varepsilon_{PP98}$ .

## PARTIE III : CHAPITRE 11

# DES LOIS INCOMPRESSIBLES AUX LOIS COMPRESSIBLES : TESTS ET VALIDATIONS

### Sommaire

---

<b>11.1 Comparaison de résultats IMHD-Hall avec pression isotrope et schémas numériques . . . . .</b>	<b>129</b>
11.1.1 Comparaison avec des résultats IMHD-Hall . . . . .	129
11.1.2 Comparaison avec des schémas numériques à travers les résultats IMHD-Hall incompressible . . . . .	131
11.1.3 Effet du forçage sur la zone inertie . . . . .	132
<b>11.2 Erreur numérique et différences entre fonctions de corrélations</b>	<b>133</b>
11.2.1 Calcul de la loi KHM . . . . .	133
11.2.2 Analyse des contributions à la loi KHM . . . . .	134
11.2.3 Estimation de l'erreur sur le taux de cascade : . . . . .	137
<b>11.3 Synthèse des tests de validation et sources d'erreurs . . . . .</b>	<b>139</b>

---

Avant d'attaquer les spécificités des modèles simulés et les lois exactes associées, il est nécessaire de valider les méthodes numériques exposées dans le Chapitre 10 et d'en déterminer les biais. Dans la section 11.1, les résultats de lois exactes IMHD-Hall seront comparés aux résultats de [FERRAND, SAHRAOUI, LAVEDER *et al.* 2021] (F21)). Enfin, dans la section ??, une méthode d'estimation de l'incertitude sur nos résultats sera proposée.

Les simulations utilisées dans ces études comparatives sont CGL1 et CGL3 (voir détail TABLE 9.1 et TABLE 9.2). Elles font partie des simulations du modèle CGL-Hall- $\nabla P_e$  analysées par F21 et elles feront l'objet du Chapitre ??.

Pour chaque simulation, une date a été sélectionnée. À partir de cette date, la simulation a été relancée sur quelques pas de temps rapprochés avec extraction des quantités pour chacun d'eux. Sauf exception de la FIGURE 11.3, tous les résultats montrés dans ce chapitre correspondent à une moyenne de ces échantillons. Pour CGL1, la date correspond au temps utilisé par F21, pour CGL3, c'est la date précédente, F21 analysant le temps  $t = 362$  mais les lois exactes étant statistiquement stationnaire, on s'attend à retrouver des résultats similaires.

### 11.1 Comparaison de résultats IMHD-Hall avec pression isotrope et schémas numériques

#### 11.1.1 Comparaison avec des résultats IMHD-Hall

Afin de valider les méthodes et choix décrits dans le Chapitre 10, nous avons calculé avec les données de CGL1 et CGL3, les quantités comparées par F21 :

- $\varepsilon_{MHD}$ , provenant de la loi PP98 (équation (3.34)),
- $\varepsilon_{Hall}$ , la correction Hall incompressible (équation (9.4)),
- $\varepsilon_{MHD-Hall} = \varepsilon_{MHD} + \varepsilon_{Hall}$ , qui correspond au résultat de la loi **IMHMH!** dérivée par [FERRAND, GALTIER, SAHRAOUI, MEYRAND *et al.* 2019].

Par conséquent, aucune différence que l'on pourra noter ne proviendra des expressions des quantités ou de leur domaine de validité. Les différences entre les résultats résideront dans les schémas numériques utilisés. On a indiqué le nôtre par la mention «Fourier for Exact Law» (FEL) et celui de F21 par «F21». Nos résultats sont présentés sur la FIGURE 11.1 par des lignes pleines et sont accompagnés de ceux des figures 3 et 5 de F21 en pointillés.

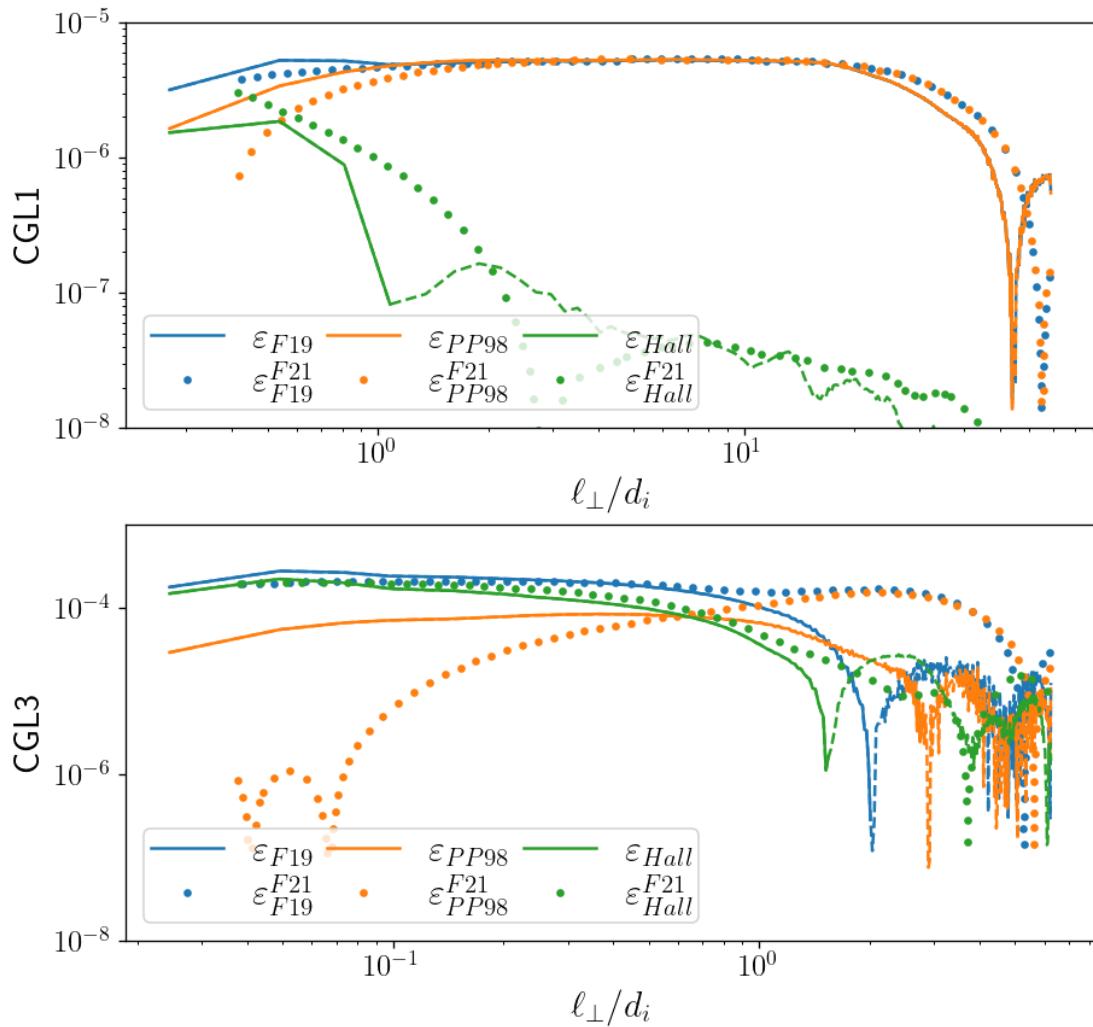


FIGURE 11.1 – Mode de représentation : 1D en fonction de  $\ell_\perp$  normalisé par  $d_i$ . Lignes pleines : nos résultats (avec en lignes discontinues les valeurs négatives). Pointillés : résultats extraits des figures 3 et 5 de F21. Bleu :  $\varepsilon_{MHD-Hall}$ . Orange :  $\varepsilon_{MHD}$ . Vert :  $\varepsilon_{Hall}$ . Haut : CGL1. Bas : CGL3.

Tout d'abord, pour chaque simulation, on retrouve les points physiques attendus :

- Pour CGL1 : une zone inertielle MHD telle que  $\varepsilon_{MHD-Hall} = \varepsilon_{MHD}$  (resp. courbe bleue et orange) et une augmentation de  $\varepsilon_{Hall}$  (courbe verte) en allant vers les petites échelles.
- Pour CGL3 : une croissance de  $\varepsilon_{Hall}$ , en allant vers les petites échelles, venant dominer  $\varepsilon_{MHD}$  et rejoignant  $\varepsilon_{MHD-Hall}$  pour former un plateau (la zone inertielle

Hall (Hall)). Le croisement entre  $\varepsilon_{MHD}$  et  $\varepsilon_{Hall}$  a lieu près de  $\ell_\perp = d_i$  donc à la frontière entre les zones MHD et Hall.

Ces résultats tendent à valider notre implémentation. D'autres tests tels qu'une comparaison des formulations de la loi  $\varepsilon_{MHD}$  (PP98 et celle proposée par [BANERJEE et KRITSUK 2017] ) ou la vérification des prédictions de [ANDRÉS, SAHRAOUI, GALTIER, HADID, DMITruk *et al.* 2018], ont été entrepris afin de vérifier la cohérence et le respect de la physique des lois obtenues dans la littérature. Ces résultats sont présentés dans l'Annexe ??.

### 11.1.2 Comparaison avec des schémas numériques à travers les résultats IMHD-Hall incompressible

Les différences entre les résultats de FEL et F21, visibles sur la FIGURE 11.1, sont :

- une bosse aux petites échelles pour  $\varepsilon_{MHD-Hall}$  calculé avec FEL,
- en allant vers les petites échelles, une décroissance moindre de  $\varepsilon_{MHD}$  calculé avec FEL aux échelles  $\ell < d_i$ ,
- en allant vers les grandes échelles, une décroissance de  $\varepsilon_{MHD-Hall}$  et  $\varepsilon_{MHD}$  calculés avec FEL arrivant avant celle des quantités calculées avec F21.

Usuellement, ce qui se passe au niveau des petites échelles est attribué à un impact de la dissipation et ce qui se passe au niveau des plus grandes échelles est impacté par le forçage. Similairement,  $\varepsilon_{MHD}$  étant calculé avec la loi PP98, la décroissance apparaît en dehors de son domaine de validité : la zone MHD telle que  $\ell \gg d_i$ . Par conséquent, les différences vu n'ont pas d'interprétation physique : elles sont dues soit à une erreur de code soit elles prennent sources dans les schémas numériques utilisées.

Les différences entre les schémas numériques pouvant impacter l'estimation de nos quantités qui sont de la forme  $\nabla_\ell \cdot \mathcal{F}$  sont résumées dans la TABLE 11.1. Les notations associées au schéma numérique de F21 et détaillées dans [FERRAND 2021] sont adaptées à nos notations.

	F21 (inspirée de [TAYLOR <i>et al.</i> 2003])	FEL (voir le Chapitre 10)
maillage	set réduit de directions vectorielles	tous les vecteurs accessibles
$\nabla_\ell$	$\frac{1}{\ell_\perp} \partial_{\ell_\perp} \left[ \ell_\perp \langle \mathcal{F}_{\ell_\perp} \rangle_{\phi, \ell_\parallel} \right]$	$\nabla_\ell \cdot \mathcal{F}$ cartésienne
filtrage des $\ell_\parallel$	pour $\theta > 45^\circ$ de la grille numérique	pour $\theta > \theta_i$
$\langle \rangle_{\phi, \ell_\parallel}$	pondérée, avant la dérivation	après la dérivation

TABLE 11.1 – Différences majeures entre les schémas numériques F21 et FEL.  $\phi$  correspond à l'angle présent dans la plan perpendiculaire dans un système de coordonnées cylindrique.

Tout d'abord, à propos du maillage de l'espace des échelles, l'utilisation d'un set réduit de directions vectorielles implique l'impossibilité de calculer une divergence complète : ou il faut interpoler, ou approximer l'opérateur, ou pour chaque point, calculer les quelques points adjacents. La première solution a tendance à apporter des erreurs numériques non négligeable si le maillage interpolé n'est pas régulier, ce qui est le cas pour F21. La troisième solution demande du temps de calcul supplémentaire. Finalement, la deuxième solution a été adoptée pour F21. N'est alors calculée que la composante transverse du flux dans chaque plan perpendiculaire au champ magnétique moyen. Ce calcul se base

donc sur la symétrie des simulations, provenant du champ magnétique moyen suivant  $e_z$  et néglige les variations de la composante parallèle du flux le long de  $\ell_{\parallel}$ . La FIGURE 11.2

FIGURE 11.2 – Mode de représentation : 1D en fonction de  $\ell_{\perp}$  normalisé par  $d_i$ . divergence transverse avec FEL.

illustre les effets de la variation parallèle de la composante parallèle du flux ainsi que ceux du filtrage. Le résultat F21 (en pointillé) y est comparé à deux estimations de la divergence transverse effectuée dans nos résultats après avoir moyenné le flux dans le plan perpendiculaire et suivant les  $\ell_{\parallel}$ . On ne s'attend pas à retrouver exactement le résultats de F21 mais à s'en rapprocher et c'est le cas. La différence entre les deux estimations correspond au filtrage utilisé dans la moyenne de  $\ell_{\parallel}$ . L'impact de l'angle de filtrage avait déjà été remarqué dans l'analyse de la FIGURE 10.4. On voit ici qu'il a pu influer sur le résultat de F21 tout comme il peut influer sur le nôtre. La décroissance de nos estimations en allant vers les petites échelles est plus intense que celle de F21. On retrouve donc bien la tendance décroissante. On peut en déduire que le poids des variations parallèles, omis par F21, semble avoir un impact sur nos résultats.

La différence entre nos estimations transverses et F21 est située dans le nombre de points du maillage utilisé. Comme FEL prend en compte l'ensemble de l'espace des échelles, il donnera pour  $\varepsilon_{MHD}$  par exemple, un résultat impacté par toutes ses variations spatiales omises par une moyenne sur un nombre réduit de vecteurs, malgré la compensation apportée par la pondération. Cet ensemble réduit d'échelles étant choisi tel des multiples de quelques vecteurs directionnels, il représentera d'autant moins les variations en s'approchant des grandes échelles.

Il semble donc cohérent d'attribuer notre différence de comportement de  $\varepsilon_{MHD}$  aux choix numériques façonnant le code de post-traitement. On peut aussi en déduire que FEL donne un résultat associé à la position dans l'espace 2 dimensions (2D) plus réaliste que F21.

### 11.1.3 Effet du forçage sur la zone inertie

La proximité du forçage induit en effet de fortes variations dans le résultat à grande échelle. De plus, ici, cette injection est loin d'être stationnaire : parfois le forçage est allumé, d'autres fois, il est éteint. Sur la FIGURE 11.3, est affiché le résultat IMHD-Hall pour différentes dates de CGL3. On voit qu'en fonction de la date, l'échelle limite de la zone inertie (telle que  $\varepsilon_{F19}$  soit constant) fluctue grandement. Et, à  $t = 362$  (date utilisée par F21), notre résultat (courbe violette) est un peu plus proche de  $\varepsilon_{F19}^{F21}$  que ne l'est le résultat à la date  $t = 361$  (courbe rouge), qui a fait l'objet de la FIGURE 11.1. Aux échelles  $\ell_{\perp}/d_i < 1$ , le niveau de  $\varepsilon_{F19}$  varie peu quelle que soit la date considérée. Cette observation concorde avec l'hypothèse de stationnarité statistique du taux de cascade dans la zone inertie (ici MHD-Hall). Cette hypothèse est considérée analytiquement pour obtenir des lois du type K41 (voir synthèse 1.4).

Les différences entre nos résultats et ceux de F21 semble donc due aux méthodes de calcul et de visualisation, mais aussi au temps de simulation sélectionné (qui impacte les grandes échelles). Une dernière différence, minime, n'a pas été abordé ici : celle de la variation aux petites échelles de  $\varepsilon_{MHD-Hall}$ . Sa signification associée à l'hyperdissipation sera abordée dans la section 11.2

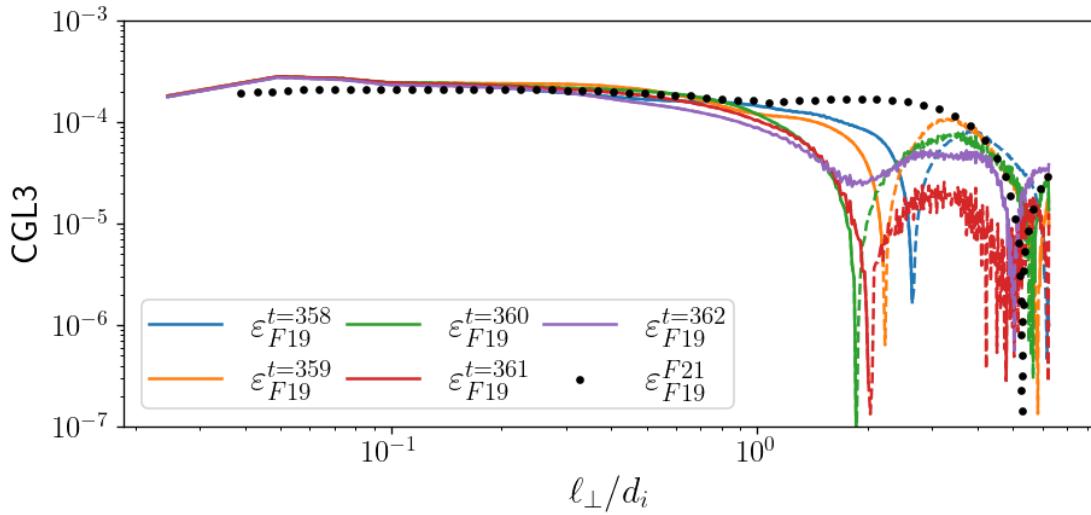


FIGURE 11.3 – Mode de représentation : 1D en fonction de  $\ell_{\perp}$  normalisé par  $d_i$ .  $\varepsilon_{F19}$  est obtenue pour diverses dates,  $t$ , de CGL3, chaque date correspond à une couleur. Le résultat extrait de la figure 5 de F21 est donné en pointillés noirs.

## 11.2 Erreur numérique et différences entre fonctions de corrélations

Afin d'estimer l'incertitude sur nos résultats, nous nous sommes lancés dans la vérification de l'équation KHM du modèle simulé sous sa forme complète et pas seulement la loi K41 dont la validité est réduite à la zone inertielle. Cette estimation est permise par le travail analytique effectué en amont et décrit dans la partie II

### 11.2.1 Calcul de la loi KHM

Une loi de type KHM peut s'écrire schématiquement (voir Chapitre 1) :

$$\partial_t \mathcal{R} = -\varepsilon_{NL} + \varepsilon_D + \varepsilon_F \quad (11.1)$$

Nous avons vu que l'application des hypothèses de Kolmogorov donne la loi réduite de type K41 telle que  $\varepsilon = -\varepsilon_{NL}$  (voir synthèse 1.4). Son contenu, spécifique au modèle implémenté, sera détaillé dans les Chapitres ?? (CGL-Hall- $\nabla P_e$ ) et ?? (LF-Hall- $\nabla P_e$ ).

$\partial_t \mathcal{R}$  est la dérivée temporelle de la fonction de corrélation utilisée pour obtenir la loi exacte. Dans nos études, cette fonction est  $\mathcal{R} = \frac{1}{4} \langle (\rho' + \rho)(\mathbf{v}' \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A) + 2\rho'u + 2\rho u' \rangle$ . Pour estimer ce terme, on va utiliser les temps consécutifs relevés dans la simulation. La dérivée temporelle sera estimée grâce à des schémas de discrétisation de type «différences finies» d'ordre 2 :

- décentrée vers la droite pour le premier temps  $t_0$  :  $(\partial_t \mathcal{R})(t_0) = \frac{\mathcal{R}(t_0 + \delta t) - \mathcal{R}(t_0)}{\delta t}$ ,
- décentrée vers la gauche pour le dernier temps  $t_{N_t}$  :  $(\partial_t \mathcal{R})(t_{N_t}) = \frac{\mathcal{R}(t_{N_t}) - \mathcal{R}(t_{N_t} - \delta t)}{\delta t}$ ,
- centrée pour les autres temps :  $(\partial_t \mathcal{R})(t_n) = \frac{\mathcal{R}(t_{n+1}) - \mathcal{R}(t_{n-1})}{2\delta t}$  avec  $n \in ]0, N_t[$ .

Le forçage présent dans nos simulations est un forçage de type antenne de Langevin appliqué sur le champ de vitesse. Par conséquent, le taux de forçage  $\varepsilon_F$  s'écrira  $\varepsilon_F = \frac{1}{4} < (\rho' + \rho)(\mathbf{v}' \cdot \mathbf{f} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}') >$ . Ce forçage dépend de deux composantes aléatoires qui font partie des quantités extraites de la simulation, elles seront notées  $f_{sup}$  et  $f_{inf}$ . Elles permettent

de construire une quantité intermédiaire  $F = a_1 f_{sup} + (1 - a_1) * f_{inf}$ . Les composantes de  $\mathbf{f}$  sont alors :  $f_x = \partial_y F$ ,  $f_y = -\partial_x F$  et  $f_z = 0$ .

Le taux de dissipation  $\varepsilon_D$  couvre l'ensemble des hyperdissipations présentes dans le système. Chaque quantité est associée à une hyperdissipation du type  $\nu_X \Delta^4 X$  avec  $X$  quantité générique et  $\Delta^4 = (\partial_x^2 + \partial_y^2 + \alpha \partial_z^2)^4$ . On va décomposer  $\varepsilon_D$  tel que :

$$\varepsilon_D = \varepsilon_D^c + \varepsilon_D^m + \varepsilon_D^{ui} + \varepsilon_D^{ue} \quad (11.2)$$

avec :

- la contribution cinétique avec  $\mathbf{D}_v = \nu \Delta^4 \mathbf{v}$  et  $D_\rho = \nu_\rho \Delta^4 \rho$  :

$$\varepsilon_D^c = \varepsilon_D^c(\mathbf{D}_v) + \varepsilon_D^c(D_\rho) = -\frac{1}{4} \langle (\rho' + \rho) (\mathbf{v}' \cdot \mathbf{D}_v + \mathbf{v} \cdot \mathbf{D}'_v) \rangle - \frac{1}{4} \langle (D'_\rho + D_\rho) \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v} \rangle \quad (11.3)$$

- la contribution magnétique avec  $\mathbf{D}_{v_A} = \frac{\eta}{\sqrt{\rho}} \Delta^4 (\sqrt{\rho} \mathbf{v}_A)$  :

$$\begin{aligned} \varepsilon_D^m = \varepsilon_D^m(\mathbf{D}_{v_A}) + \varepsilon_D^m(D_\rho) &= -\frac{1}{4} \langle (\rho' + \rho) (\mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{D}_{v_A} + \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{D}'_{v_A}) \rangle \\ &\quad - \frac{1}{8} \left\langle (\rho' - \rho) \left( \frac{D'_\rho}{\rho'} - \frac{D_\rho}{\rho} \right) \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A \right\rangle \end{aligned} \quad (11.4)$$

- la contribution d'énergie interne ionique (gyrotope) avec  $D_u = \frac{\nu_p}{2} \Delta^4 (2p_{\perp i} + p_{\parallel i})$  et sachant que  $\rho_i u_i = \frac{1}{2} (2p_{\perp i} + p_{\parallel i})$  :

$$\varepsilon_D^{ui} = \varepsilon_D^{ui}(D_u) + \varepsilon_D^{ui}(D_\rho) = -\frac{1}{2} \left\langle \frac{\rho}{\rho'} D'_u + \frac{\rho'}{\rho} D_u \right\rangle - \frac{1}{2} \left\langle \left( \frac{D'_\rho}{\rho'} - \frac{D_\rho}{\rho} \right) (\rho' u_i - \rho u'_i) \right\rangle \quad (11.5)$$

- la contribution d'énergie interne électronique (isotherme) sachant que  $\rho_e u_e = \rho \ln \rho$  :

$$\varepsilon_D^{ue} = -\frac{1}{2} \left\langle D'_\rho \ln \rho + D_\rho \ln \rho' + \frac{\rho'}{\rho} D_\rho + \frac{\rho}{\rho'} D'_\rho \right\rangle \quad (11.6)$$

et  $\nu$ ,  $\eta$ ,  $\nu_\rho$  et  $\nu_p$  des constantes choisies empiriquement pour chaque simulation. Elles sont résumées dans la TABLE 9.2.

### 11.2.2 Analyse des contributions à la loi KHM

Sur FIGURE 11.4,  $\varepsilon_{NL}$  (bleu) est comparé à un niveau de référence  $\varepsilon_{ref} = -\partial_t \mathcal{R} + \varepsilon_D + \varepsilon_F$  (violet), construit à partir de  $\partial_t \mathcal{R}$  (rouge),  $\varepsilon_D$  (vert) et  $\varepsilon_F$  (orange). La différence  $\zeta = \varepsilon_{ref} - \varepsilon_{NL}$  est donnée en marron. On remarque qu'elle n'est pas de l'ordre du zéro numérique ( $\sim 10^{-20}$ ) mais de l'ordre de deux ordres de grandeurs en dessous du niveau de  $\varepsilon_{NL}$ . La forme des termes  $\partial_t \mathcal{R}$ ,  $\varepsilon_D$  et  $\varepsilon_F$  est particulière.

**Balance des termes et forçage :** Tout d'abord, analysons la situation pour CGL1. Dans le Chapitre 1, on a vu que :

$$\varepsilon_{NL}(\ell) = \varepsilon_F(\ell) = \varepsilon_D(\ell = 0) = -\varepsilon \quad (11.7)$$

dans une zone inertielle où l'hypothèse de stationnarité statistique s'appliquerait.

On peut en effet identifier une gamme d'échelles  $\ell_\perp/d_i \in [1; 20]$  telle que  $\varepsilon_{NL}$  soit

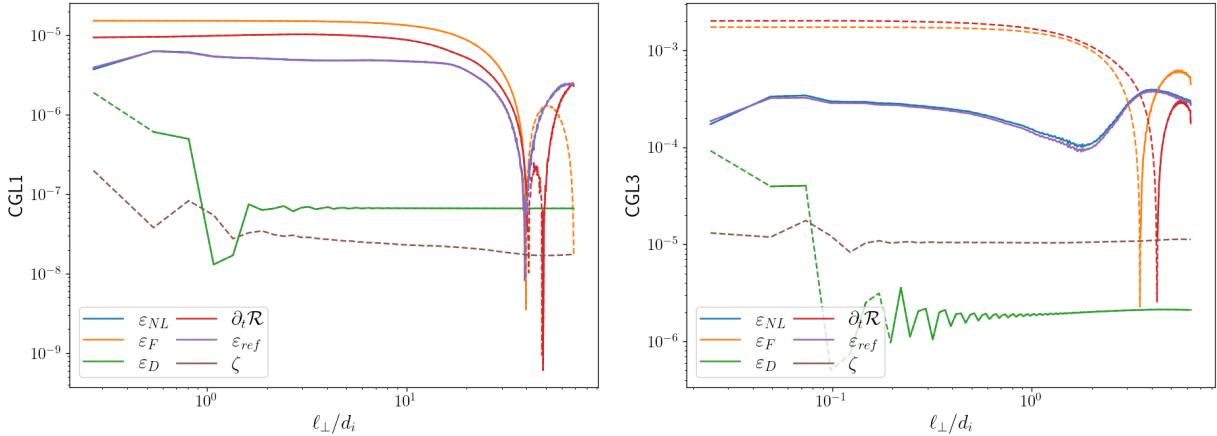


FIGURE 11.4 – Détail de la loi KHM pour CGL1 (gauche) et CGL3 (droite). Bleu :  $\varepsilon_{NL}$ . Orange :  $\varepsilon_F$ . Vert :  $\varepsilon_D$ . Rouge :  $\partial_t \mathcal{R}$ . Violet :  $\varepsilon_{ref} = -\partial_t \mathcal{R} + \varepsilon_D + \varepsilon_F$ . Marron :  $\zeta = \varepsilon_{ref} - \varepsilon_{NL}$ . Représentation : 1D en fonction de  $\ell_\perp$  avec les valeurs positives en trait plein et négative en trait discontinu.

constant. Son niveau est alors d'environ  $5 \times 10^{-6}$ . La valeur n'est pas visible ici à cause de l'échelle logarithmique mais  $\varepsilon_D(\ell = 0) \simeq 5 \times 10^{-6}$ . Donc  $\varepsilon_{NL}(\ell) = \varepsilon_D(\ell = 0)$  semble retrouvé. Par contre, même si la constance<sup>1</sup> de  $\varepsilon_F$  est vérifiée à ces échelles, son niveau est beaucoup trop important, de l'ordre de  $1.5 \times 10^{-5}$ . Pour retrouver le niveau  $5 \times 10^{-6}$ , on doit lui soustraire  $\partial_t \mathcal{R}$  qui est d'environ  $1 \times 10^{-5}$ . La relation (11.8) s'écrit alors dans nos simulations :

$$\varepsilon_{NL}(\ell) = \varepsilon_F(\ell) - \partial_t \mathcal{R} = \varepsilon_D(\ell = 0) = -\varepsilon \quad (11.8)$$

**Analyse du terme  $\partial_t \mathcal{R}$  :** Analytiquement, on se servait de l'hypothèse de stationnarité statistique pour annuler  $\partial_t \mathcal{R}$ , c'est-à-dire pour supposer qu'entre deux temps  $\mathcal{R}$  ne varie pas. Si  $\partial_t \mathcal{R} = 0$  alors  $\langle E_{tot} \rangle = \partial_t \mathcal{R}(\ell = 0) = 0$ . Sauf que dans nos simulations  $\langle E_{tot} \rangle$  fluctue légèrement : pour les quatre temps consécutifs utilisés pour CGL1,  $\langle E_{tot} \rangle$  de l'ordre de 1.3 augmente d'environ  $6 \times 10^{-7}$  par pas de temps. Par conséquent,  $\partial_t \mathcal{R} = 0$  est impossible à obtenir. C'est ce que l'on observe sur la FIGURE 11.4 pour CGL1 comme pour CGL3. Pourtant, la convergence temporelle des résultats du calcul de loi exacte K41 dans une certaine zone d'échelles a bel et bien été observée sur la FIGURE 11.3, et cela nous semblait une belle preuve de la stationnarité statistique de nos simulations. A première vue, ces résultats ne semblent pas compatibles. L'interprétation de ce paradoxe reste à affiner mais le comportement du  $\partial_t \mathcal{R}$  instantané tel un forçage ne semble pas être une spécificité de nos simulations. En effet, [FERRAND, SAHRAOUI, GALTIER *et al.* 2022] trouve un comportement similaire dans des simulations de turbulence non forcée. Dans notre cas, on pourrait peut-être interpréter le comportement du terme  $\partial_t \mathcal{R}$  comme un réservoir d'énergie régulant temporellement l'injection de l'énergie dans la cascade afin que cette dernière puisse s'effectuer au taux imposé par les processus de dissipation.

**Analyse des contributions d'hyperdissipation :** Un autre comportement pathologique est celui de  $\varepsilon_D$  en fonction de  $\ell$ . Dans la théorie analytique, ce terme est supposé nul à toutes les échelles sauf en  $\ell = 0$  à cause de l'anomalie dissipative. Dans nos simulations, son rôle est joué par les termes d'hyperdissipation, mais on s'attendrait à ce

1. Le comportement constant du terme de forçage est démontré rigoureusement dans l'annexe A.1.

qu'ils décroissent rapidement en allant vers les grandes échelles puisque la dérivation par  $\Delta^4$  impose un comportement en  $k^8$  dans l'espace de Fourier. Regardons ce qu'il en est en le décomposant sur ses diverses contributions. La décomposition est présentée sur FIGURE 11.5. On y voit que chacune des contributions semble ou décroître en allant vers

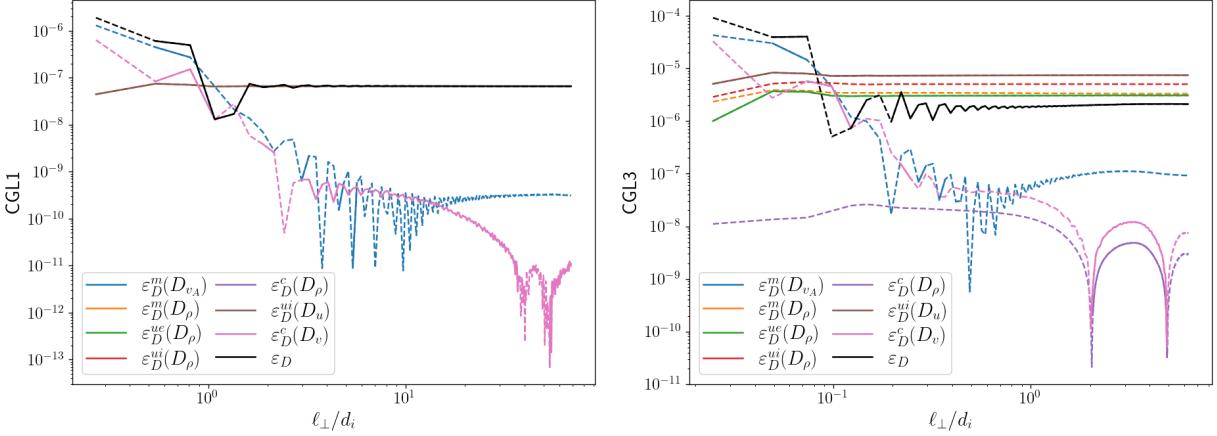


FIGURE 11.5 – Détail du terme d'hyperdissipation,  $\varepsilon_D$  (noir), pour CGL1 (gauche) et CGL3 (droite). Bleu :  $\varepsilon_D^m(D_{v_A})$ . Orange :  $\varepsilon_D^m(D_\rho)$ . Vert :  $\varepsilon_D^{ue}(D_\rho)$ . Rouge :  $\varepsilon_D^{ui}(D_\rho)$ . Violet :  $\varepsilon_D^c(D_\rho)$  Marron :  $\varepsilon_D^{ui}(D_u)$ . Rose :  $\varepsilon_D^c(D_v)$ . Représentation : 1D en fonction de  $\ell_\perp$  avec les valeurs positives en trait plein et négative en trait discontinu.

les grandes échelles ou rester constante. Les termes en  $D_\rho$  (visible seulement pour CGL3 puisque  $\nu_\rho = 0$  pour CGL1) et  $D_u$  ne montre pas de décroissance et la tendance en  $\ell^{-2}$  environ de la décroissance de  $\varepsilon_D^c(\mathbf{D}_v)$  et  $\varepsilon_D^m(\mathbf{D}_{v_A})$  avait été remarquée par [FERRAND 2021] dans le cas incompressible. La pathologie de cette pente en  $-2$  y avait été identifiée, et associée à une saturation mathématique de la fonction de corrélation calculée entre deux points et due à une puissance de  $k$  trop importante dans l'espace de Fourier et similaire à celle relevée par [CHO et LAZARIAN 2009].

Dans l'Annexe A.2, nous proposons une démonstration mathématique de ce phénomène en fonction du type de la fonction de corrélation, incrémentale ou non, et de la tendance du spectre dans l'espace de Fourier. On y obtient dans le cas non incrémental, pour la corrélation de deux quantités indéfinies  $A$  et  $B$ , :

$$\langle A(\mathbf{x} + \boldsymbol{\ell}) \cdot B(\mathbf{x}) + A(\mathbf{x}) \cdot B(\mathbf{x} + \boldsymbol{\ell}) \rangle \propto \begin{cases} \ell^{-2} & \text{si } m \in ]-\infty, -1[ \\ \ell^{m-1} & \text{si } m \in ]-1, 1[ \\ 1 & \text{si } m \in ]1, +\infty[ \end{cases} \quad (11.9)$$

avec  $m$ , la pente du spectre unidimensionnel en représentation logarithmique telle que  $k^{-m}$ . Pour une fonction de corrélation incrémentale on obtient :

$$\langle (A(\mathbf{x} + \boldsymbol{\ell}) - A(\mathbf{x})) \cdot (B(\mathbf{x} + \boldsymbol{\ell}) - B(\mathbf{x})) \rangle \propto \begin{cases} 1 & \text{si } m \in ]-\infty, 1[ \\ \ell^{m-1} & \text{si } m \in ]1, 3[ \\ \ell^2 & \text{si } m \in ]3, +\infty[ \end{cases} . \quad (11.10)$$

Si l'on analyse les différentes contributions du terme de dissipation, on se rend compte

que  $\varepsilon_D^c(\mathbf{D}_v)$ ,  $\varepsilon_D^c(D_\rho)$ ,  $\varepsilon_D^m(\mathbf{D}_{v_A})$ ,  $\varepsilon_D^{ui}(D_u)$  et  $\varepsilon_D^{ue}$  ont une forme assez proche d'une fonction de corrélation non incrémentale et  $\varepsilon_D^m(D_\rho)$  et  $\varepsilon_D^{ui}(D_\rho)$  sont plus proches d'une fonction incrémentale.

Pour une pente de spectre autour de  $k^8$  ( $m = -8$ ), une fonction de corrélation non incrémentale, va saturer en  $\ell^{-2}$ , on retrouve ce comportement pour  $\varepsilon_D^c(\mathbf{D}_v)$  et  $\varepsilon_D^m(\mathbf{D}_{v_A})$  tandis qu'une fonction de corrélation incrémentale va saturer en  $\ell^0$ , comportement retrouvé pour  $\varepsilon_D^m(D_\rho)$  et  $\varepsilon_D^{ui}(D_\rho)$ . On retrouve aussi le comportement du terme de forçage (fonction de corrélation non incrémentale), constant loin des échelles de forçage, puisqu'un Dirac à petit  $\ell$  peut-être vu comme une pente en  $m = +\infty$ . Ces comportements plus mathématiques que physiques sont retrouvés pour toutes les simulations. Une étude plus poussée n'a pas été engagée.

On remarque tout de même les fortes variations des termes décroissant en  $\ell^{-2}$ . Ces variations sont la cause de la bosse visible aux plus petites échelles, pour tous les taux  $\varepsilon_{NL}$  et  $\varepsilon$  calculer dans les simulations et que l'on avait remarqué dans la section 11.1. En effet,  $\varepsilon_F - \partial_t \mathcal{R}$  reste constant dans cette zone alors que la bosse apparaît dans  $\varepsilon_F - \partial_t \mathcal{R} + \varepsilon_D$ . Cette bosse nous indique donc les échelles auxquelles l'erreur mathématique de l'hyperdissipation impacte systématiquement  $\varepsilon_{NL}$  et ses contributions.

Ce type d'erreur mathématique pourrait aussi impacter  $\partial_t \mathcal{R}$ ,  $\mathcal{R}$  étant une fonction de corrélation en deux points.

### 11.2.3 Estimation de l'erreur sur le taux de cascade :

Les fonctions de corrélations en deux points ne sont donc pas adaptées à l'étude de la physique des termes d'hyperdissipation et de ceux inclus dans  $\partial_t \mathcal{R}$  comme a pu le faire remarquer [CHO et LAZARIAN 2009]. La solution proposée alors serait d'augmenter le nombre de points servant au calcul de la fonction de corrélation. Une telle tâche s'annonce mathématiquement complexe et lourde dans le cadre de la théorie des lois exactes. Une autre possibilité serait d'estimer précisément pour chaque contribution la puissance  $m$  du spectre influant sur le résultat de chaque contribution au taux de dissipation, puis de calculer la tendance attendue, en  $\ell^{m-1}$ . [FERRAND 2021] a comparé dans le cas incompressible quelques approches pour effectuer une estimation de ce type, mais ces approches reposent fortement sur la contrainte incompressible... Par la suite, nous nous concentrerons seulement sur  $\varepsilon_{NL}$  et ses contributions, mais nous garderons en mémoire les influences potentielles de ces termes.

L'analyse des différentes contributions à la loi [von KARMAN et HOWARTH 1938 ; MONIN et JAGLOM 1971] (KHM) permet ainsi d'identifier les sources d'erreur numérique et mathématique menant au niveau de  $\zeta$ . Ce dernier, de l'ordre des fluctuations de  $\langle E_{tot} \rangle$ , reflèterait la signature de la quasi-stationnarité statistique des simulations. Aux échelles plus faibles, la pathologie mathématique du calcul de fonction de corrélation dépendant de l'hyperdissipation ainsi que sa signature<sup>2</sup> dans  $\varepsilon_{NL}$  semblent impacter  $\zeta$ . Ce dernier correspond donc à l'incertitude systématique de notre estimation du taux de cascade, incertitude provenant des données initiales, de leur adéquation avec les hypothèses de Kolmogorov et du schéma numérique utilisé pour le calcul des termes des lois exactes. Les contributions qui apparaîtront inférieures à  $\zeta$  par la suite, seront dans la zone d'incertitude du taux de cascade total, leur analyse devra donc être effectuée avec précautions.

2. Les corrélations impliquées dans  $\varepsilon_D$  étant d'ordre 2 et celles présentes dans les termes dominant de  $\varepsilon_{NL}$  étant d'ordre 3, le reflet dans  $\varepsilon_{NL}$  de l'erreur mathématique pourrait, à priori, ne pas compenser exactement l'erreur sur  $\varepsilon_D$ .

Un autre point reste à éclaircir dans cette étude sur les lois du type KHM : la différence entre la loi obtenue en utilisant  $\mathcal{R}$  et celle en utilisant une fonction incrémentale  $\mathcal{S}$ . Celle associée à  $\mathcal{R}$  est :

$$\mathcal{S} = \frac{1}{4} \langle \delta(\rho\mathbf{v}) \cdot \delta\mathbf{v} + \delta(\rho\mathbf{v}_A) \cdot \delta\mathbf{v}_A + 2\delta\rho\delta u \rangle \quad (11.11)$$

On a alors la relation  $\mathcal{S} = \langle E_{tot} \rangle - \mathcal{R}$  et sachant que  $\mathcal{R}(\ell = 0) = \langle E_{tot} \rangle$ , il est facile de passer de l'expression (11.1) à la loi :

$$\partial_t \mathcal{S} = -\mathcal{E}_{NL} + \mathcal{E}_D + \mathcal{E}_F \quad (11.12)$$

avec :  $\mathcal{E}_{NL} = \varepsilon_{NL}(\ell = 0) - \varepsilon_{NL}$ ,  $\mathcal{E}_D = \varepsilon_D(\ell = 0) - \varepsilon_D$  et  $\mathcal{E}_F = \varepsilon_F(\ell = 0) - \varepsilon_F$ . On notera que l'équation d'énergie totale s'écrit sous la forme  $\partial_t E_{tot} + \nabla \cdot \mathbf{F}_{tot} = S$  avec  $S$  les termes sources (dissipation et forçage) et  $\mathbf{F}_{tot}$ , le total de flux. Puisque  $\langle \nabla \cdot \mathbf{F}_{tot} \rangle = \nabla_\ell \cdot \langle \mathbf{F}_{tot} \rangle = -\langle \nabla' \cdot \mathbf{F}_{tot} \rangle = 0$ , alors  $\mathcal{E}_{NL} = -\varepsilon_{NL}$ .

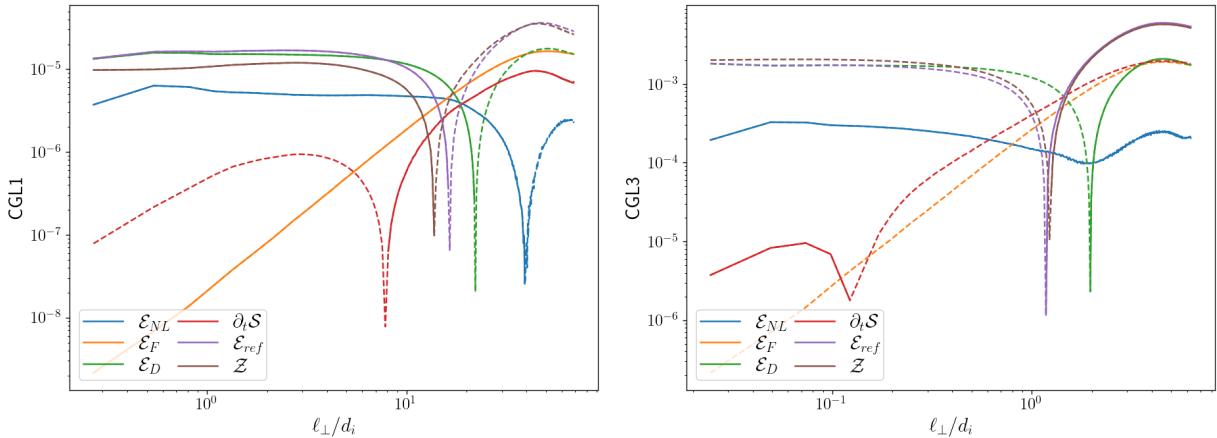


FIGURE 11.6 – Détail de la loi (11.11) pour CGL1 (gauche) et CGL3 (droite). Bleu :  $\mathcal{E}_{NL}$ . Orange :  $\mathcal{E}_F$ . Vert :  $\mathcal{E}_D$ . Rouge :  $\partial_t \mathcal{S}$ . Violet :  $\mathcal{E}_{ref} = -\partial_t \mathcal{S} + \mathcal{E}_D + \mathcal{E}_F$ . Marron :  $\mathcal{Z} = \mathcal{E}_{ref} - \mathcal{E}_{NL}$ . Représentation : 1D en fonction de  $\ell_\perp$  avec les valeurs positives en trait plein et négative en trait discontinu.

En appliquant cette transformation sur le détail de la loi KHM (fig. FIGURE ??), on obtient les résultats de la FIGURE ???. On y remarque que le comportement des termes de forçage et dissipations se sont inversés :  $\mathcal{E}_F$  augmente avec une pente de facteur 2 et  $\mathcal{E}_D$  reste constant avant de changer de signe vers les grandes échelles. Ces comportements sont cohérents avec ceux démontrés dans les Annexes A.1 et A.2 (voir équations (11.9) et (11.10)). La différence  $\mathcal{Z} = \mathcal{E}_{ref} - \mathcal{E}_{NL} = (-\partial_t \mathcal{S} + \mathcal{E}_D + \mathcal{E}_F) - \mathcal{E}_{NL}$  est supérieure à  $\zeta$ . L'utilisation d'une fonction de corrélation incrémentale dans une étude de données de simulations amplifie l'erreur numérique et mathématique associée aux termes temporels, de dissipation et de forçage en y ajoutant l'erreur sur l'équation de  $\langle E_{tot} \rangle$ .

### 11.3 Synthèse des tests de validation et sources d'erreurs

Ces études sont illustrées par les résultats obtenus pour les simulations CGL1 et CGL3.

**Comparaison IMHD-Hall avec les résultats de [FERRAND 2021] :**

- le comportement des lois IMHD-Hall est retrouvé
- effets de nos choix de schéma numérique
- visualisation de l'impact de la stationnarité statistique et du forçage sur la zone inertielle

**Analyse de la loi KHM :**

- paradoxe sur l'hypothèse de stationnarité statistique dans les simulations
- pathologie mathématique apportée par l'hyperdissipation
- incertitude provenant de l'utilisation de fonctions incrémentales
- estimation de l'erreur numérique et mathématique sur la loi exacte totale associé au modèle simulé, noté  $\zeta$

**Ces résultats valident le schéma numérique, son implémentation, et questionnent les comportements non-physiques pouvant impacter les résultats.**

Annexes utilisées : A.1 et A.2



## **CONCLUSION**

Résumé des résultats et de ce qui a été fait



---

## **ANNEXES**

---



## ANNEXE A

### EXPLICATION MATHÉMATIQUE ET INTERPRÉTATION DES TERMES DES LOIS KHM

En s'inspirant de la démonstration mathématique de la convergence des fonctions de structures d'ordres 2 proposée par [CHO et LAZARIAN 2009], j'ai démontré le comportement des termes du type fonction de corrélation en fonction des tendances des spectres des quantités impliquées. La démonstration proposée ici est un résumé.

Soit  $A$  et  $B$  deux quantités quelconques dépendant de  $\mathbf{x}$ . Soit  $a_{\mathbf{k}}$  (resp.  $b_{\mathbf{k}}$ ) la transformée de Fourier de  $A$  (resp.  $B$ ) évaluée en  $\mathbf{k}$ . Pour faciliter la lecture, on supposera les moyennes effectuées sur un volume  $V = 1$  et les intégrales triples ne seront notées qu'avec un seul  $\int$ . Dans cette Annexe,  $\delta$  est la distribution de Dirac.

La fonction de corrélation  $\langle A(\mathbf{x} + \boldsymbol{\ell}) \cdot B(\mathbf{x}) \rangle$  est d'abord explicitée sous forme d'intégrale. Puis, les transformées de Fourier de  $A$  et  $B$  sont injectées. Quelques manipulations des différentes intégrales sont nécessaires pour faire apparaître  $\delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}')$  qui nous permet de remplacer  $\mathbf{k}'$  par  $-\mathbf{k}$  :

$$\langle A(\mathbf{x} + \boldsymbol{\ell}) \cdot B(\mathbf{x}) \rangle = \int A(\mathbf{x} + \boldsymbol{\ell}) \cdot B(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (1.1)$$

$$= \int \left( \int a_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} e^{i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\ell}} d\mathbf{k} \right) \left( \int b_{\mathbf{k}'} e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{k}' \right) d\mathbf{x} \quad (1.2)$$

$$= \int \int a_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\ell}} b_{\mathbf{k}'} \left( \int e^{i(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x} \right) d\mathbf{k} d\mathbf{k}' \quad (1.3)$$

$$\propto \int \int a_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}'} e^{i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\ell}} \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') d\mathbf{k} d\mathbf{k}' \propto \int a_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^* e^{i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\ell}} d\mathbf{k}. \quad (1.4)$$

Ensuite, la fonction de corrélation symétrique,  $\mathcal{R}$ , est construite en notant  $\Re[Z]$  la partie réelle de  $Z$  :

$$\mathcal{R} = \langle A(\mathbf{x} + \boldsymbol{\ell}) \cdot B(\mathbf{x}) + A(\mathbf{x}) \cdot B(\mathbf{x} + \boldsymbol{\ell}) \rangle \quad (1.5)$$

$$\propto \int (a_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^* + a_{\mathbf{k}}^* b_{\mathbf{k}}) (e^{i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\ell}} + e^{-i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\ell}}) d\mathbf{k} \propto \int \Re[a_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^*] \cos(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\ell}) d\mathbf{k}. \quad (1.6)$$

Pour une fonction de corrélation incrémentale, notée  $\mathcal{S}$ , l'expression finale sera un petit peu différente :

$$\mathcal{S} = \langle (A(\mathbf{x} + \boldsymbol{\ell}) - A(\mathbf{x})) \cdot (B(\mathbf{x} + \boldsymbol{\ell}) - B(\mathbf{x})) \rangle \quad (1.7)$$

$$= \langle 2A(\mathbf{x}) \cdot B(\mathbf{x}) - (A(\mathbf{x} + \boldsymbol{\ell}) \cdot B(\mathbf{x}) + A(\mathbf{x}) \cdot B(\mathbf{x} + \boldsymbol{\ell})) \rangle \quad (1.8)$$

$$\propto \int (a_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^* + a_{\mathbf{k}}^* b_{\mathbf{k}}) (1 - e^{i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\ell}} + e^{-i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\ell}}) d\mathbf{k} \propto \int \Re[a_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^*] (1 - \cos(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\ell})) d\mathbf{k}. \quad (1.9)$$

Maintenant, nous allons explorer la convergence de ces intégrales pour quelques formes

de spectres de  $A$  et  $B$  rappelant les comportements fréquentiels des termes de forçage et de dissipation.

## A.1 Si $A$ correspond à une distribution de Dirac dans l'espace de Fourier

On suppose  $a \propto \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_n)$ . Ce cas correspond au comportement du forçage utilisé dans la Partie III. Dans ce cas :

$$\mathcal{R} = \langle A(\mathbf{x} + \boldsymbol{\ell}) \cdot B(\mathbf{x}) + A(\mathbf{x}) \cdot B(\mathbf{x} + \boldsymbol{\ell}) \rangle \propto \Re[b_{\mathbf{k}_n}] \cos(\mathbf{k}_n \cdot \boldsymbol{\ell}), \quad (1.10)$$

$$\mathcal{S} = \langle (A(\mathbf{x} + \boldsymbol{\ell}) - A(\mathbf{x})) \cdot (B(\mathbf{x} + \boldsymbol{\ell}) - B(\mathbf{x})) \rangle \propto \Re[b_{\mathbf{k}_n}] (1 - \cos(\mathbf{k}_n \cdot \boldsymbol{\ell})). \quad (1.11)$$

Aux petites échelles telles que  $\boldsymbol{\ell} \ll 1/\mathbf{k}_n$  et en représentation logarithmique,  $\mathcal{R}$  sera donc constant puisque  $\cos(\mathbf{k}_n \cdot \boldsymbol{\ell}) \sim 1$  et que  $\Re[b_{\mathbf{k}_n}]$  est indépendant de  $\boldsymbol{\ell}$ . On retrouve le comportement de  $\varepsilon_F$  (voir 11). Pour ce qui est de  $\mathcal{S}$ ,  $(1 - \cos(\mathbf{k}_n \cdot \boldsymbol{\ell})) \sim (\mathbf{k}_n \cdot \boldsymbol{\ell})^2$  et on retrouve la pente de facteur 2 observée pour  $\mathcal{E}_F$  en représentation logarithmique.

## A.2 Si $\Re[a_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^*]$ est proportionnelle à une puissance de l'amplitude de $\mathbf{k}$

On suppose l'hypothèse d'isotropie pour simplifier le calcul<sup>1</sup> et on explicite les quantités vectorielles dans un système de coordonnées sphérique,  $\{k, \phi, \theta\}$ , orienté tel que  $\theta$  soit l'angle entre  $\mathbf{k}$  et  $\boldsymbol{\ell}$ . Alors  $d\mathbf{k} = k^2 \sin \theta dk d\theta d\phi$  avec  $\theta \in [0, \pi]$  et  $\phi \in [0, 2\pi]$ , et  $\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\ell} = k\ell \cos \theta$ .

On note aussi  $k^2 \Re[a_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^*] \propto k^{-m}$ . Ce cas est le plus commun dans les études de turbulence. En effet, par exemple, la phénoménologie de Kolmogorov indique un spectre d'énergie cinétique,  $k^2 \mathbf{v}_k^2$ , proportionnel à  $k^{-5/3}$ . Pour ce qui est de l'hyperdissipation  $\Delta^4 \sim k^8$ . Dans [FERRAND 2021], est indiqué pour l'hyperdissipation cinétique incompressible, un spectre en  $k^8 \mathbf{v}_k^2 \sim k^6$ . Dans le cas compressible, on supposera que les spectres liés à l'hyperdissipation ont une pente telle que  $m \ll -1$ .

Avec ces hypothèses, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &\propto \int_k \int_0^\pi k^{-m} \cos(k\ell \cos \theta) \sin(\theta) dk d\theta \propto \int_k \int_0^\pi k^{-m} \frac{\sin(k\ell)}{k\ell} dk \\ &\text{(par substitution } u = k\ell\text{)} \propto \ell^{m-1} \int_0^{+\infty} u^{-m-1} \sin(u) du, \end{aligned} \quad (1.12)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &\propto \int_k \int_0^\pi k^{-m} (1 - \cos(k\ell \cos \theta)) \sin(\theta) dk d\theta \propto \ell^{m-1} \int_0^{+\infty} u^{-m} \left(1 - \frac{\sin(u)}{u}\right) du. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Ensuite, il est nécessaire de regarder la convergence de  $K = \int_0^{+\infty} u^{-m-1} \sin(u) du$  afin d'estimer une tendance en  $\ell$ . Si  $m \in ]-1, 1[$ , cette intégrale peut s'écrire comme

---

1. Dans le cas axisymétrique, il faut gérer les directions parallèle et perpendiculaire. Le calcul se complique, mais les tendances resteront similaires.

une intégrale généralisée de Fresnel convergente et constante in  $\ell$ . Pour les deux autres ( $] -\infty, -1[$  and  $] 1, +\infty[$ ), on peut obtenir une expression de récurrence en intégrant par partie  $K$  puis estimer la convergence des différents termes. Alors, si  $m \in ] -\infty, -1[$ ,  $K \propto \ell^{-m-1}$  et si  $m \in ] 1, +\infty[$ ,  $K \propto \ell^{-m+1}$ . Par ces techniques, on obtient :

$$\mathcal{R} = \langle A(\mathbf{x} + \boldsymbol{\ell}) \cdot B(\mathbf{x}) + A(\mathbf{x}) \cdot B(\mathbf{x} + \boldsymbol{\ell}) \rangle \propto \begin{cases} \ell^{-2} & \text{if } m \in ] -\infty, -1[ \\ \ell^{m-1} & \text{if } m \in ] -1, 1[ \\ 1 & \text{if } m \in ] 1, +\infty[ \end{cases} \quad (1.14)$$

$$\mathcal{S} = \langle (A(\mathbf{x} + \boldsymbol{\ell}) - A(\mathbf{x})) \cdot (B(\mathbf{x} + \boldsymbol{\ell}) - B(\mathbf{x})) \rangle \propto \begin{cases} 1 & \text{if } m \in ] -\infty, 1[ \\ \ell^{m-1} & \text{if } m \in ] 1, 3[ \\ \ell^2 & \text{if } m \in ] 3, +\infty[ \end{cases} \quad (1.15)$$

Ces tendances sont représentées sur la figure FIGURE 1.1a pour  $\mathcal{R}$  et FIGURE 1.1b. On retrouve aussi la prédiction de [CHO et LAZARIAN 2009] pour les fonctions de corrélation de type  $\mathcal{S}$  avec  $A = B$ . Cette prédiction est étendue, ici, à  $A \neq B$  et  $m < 0$ . Passer de  $\mathcal{R}$  à  $\mathcal{S}$  est très simple : il suffit de soustraire à  $\mathcal{R}$ , sa valeur en  $\ell = 0$  pour obtenir  $\mathcal{S}$ . L'équivalence est montrée sur la figure FIGURE 1.2.

On s'attend donc à retrouver ce genre de saturations mathématiques dans nos simulations pour l'hyperdissipation qui se comporte tel que  $m \ll -1$ .

Cette démonstration montre que le lien entre tendance spectrale et fonction de corrélation n'est pas évident. Quelques pincettes sont donc à prendre lorsque l'on veut interpréter les résultats des lois KHM en particulier à travers l'hypothèse de séparation d'échelle. Ce n'est pas parce que le forçage n'est supposé agir qu'à grande échelle que sa contribution,  $\varepsilon_F$ , à la loi KHM tendra vers 0 aux autres échelles, elle va en effet rester constante. En fonction de sa forme, incrémentale ou non, la contribution dissipative sera ou constante ou de pente 2 ou  $-2$ . FERRAND 2021 a proposé quelques méthodes afin de contourner ce problème dans le cas incompressible mais leur validité est questionnable dans le cas compressible. Comme on a pu le remarquer, une méthode simple peut aider à l'interprétation de ces contributions : regarder conjointement les lois KHM incrémentale ou non. Si les fonctions de corrélations permettant de les obtenir sont bien choisies, il est très facile de passer de l'une à l'autre en soustrayant les valeurs obtenues en  $\ell = 0$ .

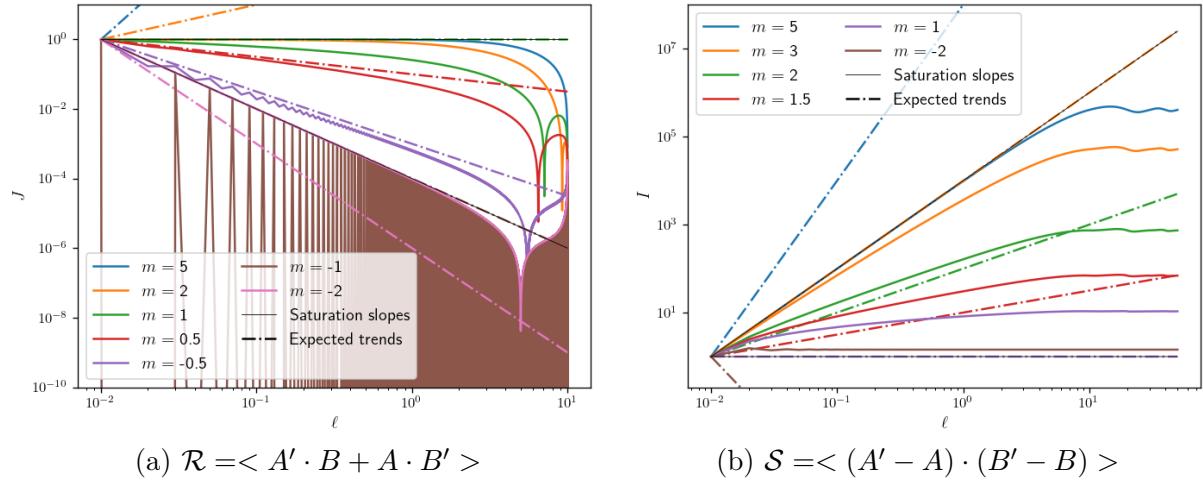


FIGURE 1.1 – Plain coloured lines : correlation function according to the spectral power  $m$ . Dash-dotted coloured lines : expected tendencies if no saturation for each  $m$ . Thin black lines : saturation limits.

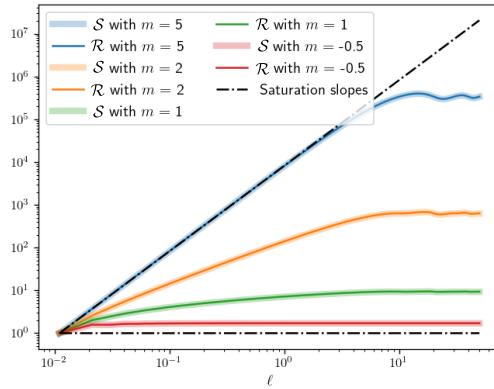


FIGURE 1.2 – Equivalence between  $\mathcal{S}$  and  $2 \langle A \cdot B \rangle - \mathcal{R}$ . Colours :  $m$ . Thin line :  $2 \langle A \cdot B \rangle - \mathcal{R}$ . Thick line :  $\mathcal{S}$ . Dash-dotted black lines :  $\mathcal{S}$  saturation limits.

## TABLE DES MATIÈRES

Note d'information	i
Remerciements	iii
Résumé détaillé	v
Detailed abstract	vii
Sommaire	x
INTRODUCTION : Le vent solaire, un plasma turbulent non-collisionnel	
<b>1 Qu'est-ce que la turbulence ? La description hydrodynamique de Kolmogorov</b>	<b>3</b>
1.1 Définition et propriétés d'un écoulement turbulent . . . . .	3
1.2 Description statistique et notations pour l'étude d'un système turbulent . .	6
1.3 Théorie de Kolmogorov et lois d'échelle . . . . .	8
1.4 Synthèse des hypothèses de Kolmogorov et de la description de la cascade turbulente via des lois exactes . . . . .	12
<b>2 Qu'est-ce qu'un plasma ? De l'exemple du vent solaire à la problématique d'étude</b>	<b>13</b>
2.1 Les plasmas, état de la matière . . . . .	13
2.2 Le vent solaire, source de questions ouvertes et problématique d'étude . .	15
2.3 Décrire un plasma à l'aide d'un modèle fluide . . . . .	17
2.4 Synthèse : problématique et modèles utilisés . . . . .	21
<b>3 Etude de la cascade turbulente dans un plasma incompressible</b>	<b>23</b>
3.1 Le modèle et l'énergie totale . . . . .	23
3.2 Le cas linéaire et les ondes d'Alfvén . . . . .	24
3.3 Décrire la cascade turbulente incompressible avec une loi exacte . . . .	26
3.4 Synthèse sur l'étude de la cascade dans le cadre IMHD . . . . .	29
PARTIE I : Le chauffage turbulent dans un plasma compressible avec pression isotrope	
Introduction	33

<b>4 Que sait-on sur le modèle compressible ?</b>	<b>35</b>
4.1 Energétique du modèle non fermé . . . . .	35
4.2 Fermetures thermodynamiques . . . . .	36
4.3 Thermodynamique et turbulence . . . . .	39
4.4 Propriétés linéaires . . . . .	41
4.5 Synthèse sur le modèle compressible avec pression isotrope . . . . .	42
<b>5 Décrire la cascade compressible</b>	<b>43</b>
5.1 Dérivation d'une loi exacte compressible générale pour décrire un écoulement turbulent polytrope . . . . .	44
5.2 Reformulation de la loi K41 générale dépendant d'une pression isotrope . . . . .	48
5.3 Application à d'autres fermetures et deuxième reformulation . . . . .	50
5.4 Synthèse de l'étude analytique de turbulence compressible avec pression isotrope . . . . .	54
<b>6 Etudes de cas dans les données in-situ</b>	<b>55</b>
6.1 Données et conditions d'application d'une loi exacte dans des observations issues d'une seule sonde . . . . .	55
6.2 Comparaison des lois incompressible et compressible-isentrope-polytrope avec $\gamma = 1$ (isotherme) et $\gamma = 5/3$ (adiabatique) . . . . .	59
6.3 Application statistique préliminaire dans des données localisées dans la magnétogaine terrestre . . . . .	62
6.4 Synthèse de l'étude de cas observationnels issus des données de PSP . . . . .	65
<b>Conclusion</b>	<b>67</b>
<b>PARTIE II : Etude analytique de l'effet de l'anisotropie de pression</b>	
<b>Introduction</b>	<b>71</b>
<b>7 Loi exacte pour le modèle CGL</b>	<b>73</b>
7.1 D'un tenseur de pression dans le modèle fluide au modèle CGL . . . . .	73
7.2 Instabilités linéaires et potentiel impact sur la turbulence du vent solaire . . . . .	75
7.3 Loi exacte générale pour pression tensorielle et réduction au modèle CGL . . . . .	78
7.4 Synthèse de l'étude analytique de turbulence compressible avec pression tensorielle et modèle CGL . . . . .	83
<b>8 Et dans le cas incompressible ?</b>	<b>85</b>
8.1 De la limite incompressible dans la loi exacte générale vers un nouveau modèle . . . . .	85
8.2 Proposition d'un modèle incompressible gyrotope . . . . .	87
8.3 Etude paramétrique des modes linéaires du modèle incompressible gyrotope . . . . .	89
8.4 Limite incompressible du modèle CGL . . . . .	94
8.5 Synthèse : Limite incompressible et pistes d'étude . . . . .	96
<b>9 Relaxer l'approximation MHD et aller vers le bi-fluide</b>	<b>97</b>
9.1 La MHD-Hall . . . . .	97
9.2 Le modèle bi-fluide . . . . .	99
9.3 Le modèle analysé numériquement dans la partie III . . . . .	107

9.4 Synthèse de l'extension de la théorie des lois exactes à d'autres régimes . . . . .	112
<b>Conclusion</b>	<b>113</b>
<b>PARTIE III : Etude numérique d'un plasma turbulent quasi-compressible présentant des gyrotropie de pression</b>	
<b>Introduction</b>	<b>117</b>
<b>10 Simulation turbulente et calcul de lois exactes</b>	<b>119</b>
10.1 Simuler un plasma turbulent . . . . .	119
10.2 Code de post-traitement pour le calcul numérique de lois exactes . . . . .	121
10.3 Mode de représentation du résultat . . . . .	124
10.4 Synthèse des méthodes et choix numériques . . . . .	127
<b>11 Des lois incompressibles aux lois compressibles : tests et validations</b>	<b>129</b>
11.1 Comparaison de résultats IMHD-Hall avec pression isotrope et schémas numériques . . . . .	129
11.1.1 Comparaison avec des résultats IMHD-Hall . . . . .	129
11.1.2 Comparaison avec des schémas numériques à travers les résultats IMHD-Hall incompressible . . . . .	131
11.1.3 Effet du forçage sur la zone inertuelle . . . . .	132
11.2 Erreur numérique et différences entre fonctions de corrélations . . . . .	133
11.2.1 Calcul de la loi KHM . . . . .	133
11.2.2 Analyse des contributions à la loi KHM . . . . .	134
11.2.3 Estimation de l'erreur sur le taux de cascade : . . . . .	137
11.3 Synthèse des tests de validation et sources d'erreurs . . . . .	139
<b>Conclusion</b>	<b>141</b>
<b>ANNEXES</b>	
<b>A Explication mathématique et interprétation des termes des lois KHM</b>	<b>145</b>
A.1 Si $A$ correspond à une distribution de Dirac dans l'espace de Fourier . . . . .	146
A.2 Si $\Re[a_k b_k^*]$ est proportionnelle à une puissance de l'amplitude de $\mathbf{k}$ . . . . .	146
<b>Table des matières</b>	<b>151</b>
<b>Table des figures</b>	<b>156</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>157</b>
<b>Listes des acronymes</b>	<b>161</b>
<b>Liste des symboles</b>	<b>167</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>174</b>



## TABLE DES FIGURES

1.1 Injection d'un jet d'eau dans de l'eau observée par fluorescence laser et illustrant les différents régimes d'un écoulement : laminaire, transitoire et turbulent. Crédits de l'image initiale : [VAN DYKE 1982]. . . . .	4
1.2 Résultats de simulations 3D d'un plasma turbulent décrit par le modèle Hall-CGL. Le code de simulation sera introduit dans la partie III). La quantité représentée est la densité $\rho$ . Chaque image correspond à une coupe $x - y$ du cube obtenu au temps $t$ (en unité de temps de la simulation). Les axes sont en position numérique (nombre de points dans chaque direction, comptés à partir d'une position $(0, 0, 0)$ ). (a) : $n_z = 323$ , $t = 410$ . (b) : zoom de (a). (c) : $n_z = 638$ , $t = 410$ . (d) : $n_z = 323$ , $t = 408$ . Pour chaque image, la moyenne spatiale, $\rho_0$ , est de 1.00 et l'écart-type, $\text{std}(\rho)$ , de 0.04. . . . .	5
1.3 Compilations de spectres obtenus dans diverses expériences de laboratoire. Tous ces spectres en accord avec la pente en $-5/3$ prédicta grâce à la théorie de Kolmogorov. Crédits : [SADDOUGHI et VEERAVALLI 1994]. . . . .	11
2.1 Exemples de plasmas spatiaux. CME signifie éjections de masse coronale. Crédits de l'image initiale : Institut royal d'Aéronomie Spatiale de Belgique (page web <a href="http://www.aeronomie.be">www.aeronomie.be</a> ). . . . .	14
2.2 Profil de température en fonction de la distance au Soleil, observé avec les données de Voyager 2 (noir). Profil adiabatique (vert). Crédits : [RICHARDSON et SMITH 2003]. . . . .	15
2.3 Spectre d'énergie magnétique du vent solaire obtenu à partir des missions ACE et Cluster. Ce spectre peut être découpé en cinq régions grâce aux ruptures de pentes. Pente en $-1.1$ : Réservoir d'énergie. $\lambda_c$ : longueur de corrélation. Pente en $-1.7$ : Zone inertielle. $\rho_i$ : rayon de Larmor ionique. Pente en $-3.4$ : Zone de transition. Pente en $-2.6$ : Échelles dispersives. $\rho_e$ : rayon de Larmor électronique. Pente en $-3.7$ : Échelles de dissipation électronique. Crédits : [SAHRAOUI <i>et al.</i> 2020]. . . . .	17
2.4 Représentation graphique des moments d'ordre 0 (aire sous la courbe colorée en bleu), 1 (valeur moyenne de $\mathbf{v}$ indiquée par la verticale verte) et 2 (largeur indiquée par l'horizontale rouge) de la fonction de distribution en vitesse $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ ici gaussienne. . . . .	19
3.1 Système de coordonnées et vecteur d'onde dans le cadre linéaire. . . . .	25

4.1	Transformations thermodynamiques et intervalles en fonction du $\gamma$ du milieu [LIVADIOTIS et MCCOMAS 2012] et du $\sigma$ [BOREL et FAVRAT 2005], exemple de plasmas spatiaux [LIVADIOTIS 2018a]. Adiabatique et isentrope y sont confondus dans le cas réversible. . . . .	38
6.1	Localisation des instruments de mesure sur PSP. Les instruments de l'expérience FIELDS sont notés en blanc, et ceux de SWEAP en jaune. Les données utilisées ici proviennent des Fluxgate Magnetometers (MAGs) situés sur le bras et de la Faraday Cup (SPC) située juste à côté du bouclier et orientée vers le Soleil. Crédits : la page web de FIELDS ( <a href="http://fields.ssl.berkeley.edu">fields.ssl.berkeley.edu</a> ) et Johns Hopkins University Applied Physics Laboratory. . . . .	56
6.2	Orbites de PSP depuis la date de lancement, le 12 août 2018 à 7h31 UTC. Le premier périhélie à 35.7 Rs a été atteint le 6 novembre 2018 à 03h27 UTC. Crédits : la page web de PSP ( <a href="http://parkersolarprobe.jhuapl.edu">http://parkersolarprobe.jhuapl.edu</a> ) et Johns Hopkins University Applied Physics Laboratory. . . . .	57
6.3	Données PSP mesurées dans l'héliosphère interne le 4 novembre 2018. (a) à (c) : les trois composantes du champ magnétique dans le système de représentation RTN. (d) : Norme du champs magnétique. (e) : angle entre le champ de vitesse du fluide et le champ magnétique. (f) et (g) : fluctuations de densité et température relative des protons. Les zones rouges représentent les sous-intervalles utilisés pour le calcul des taux de cascade. . . . .	58
6.4	Spectre des fluctuations magnétiques pour l'intervalle complet de données (bleu), et les sous-intervalles (orange et vert) obtenue avec les données MAGs non rééchantillonnées à la cadence de SPC. La ligne noire continue indique la pente attendue dans la zone MHD (spectre de type Kolmogorov en $-5/3$ ) et l'axe vertical la fréquence maximale accessible avec la cadence de SPC. . . . .	59
6.5	Comparaison des taux de cascade obtenus avec l'expression de la loi exacte (6.1) et différentes fermetures pour le sous-intervalle {00h35–01h05} à gauche et {01h45–02h15} à droite. (a1)–(a2) : valeur absolue des taux de cascade obtenus avec les fermetures incompressible (IMHD) en bleu, compressible isentrope-isotherme (CMHD <sub>i</sub> ) en vert et adiabatique (CMHD <sub>p</sub> ) en rouge. (b1)–(b2) : ratio entre la contribution d'énergie interne $F_2$ (6.3) et celle Yaglom compressible $F_1$ (6.2) dans le cas isotherme (vert) et le cas adiabatique (rouge). (c1)–(c2) : ratio entre les contributions de l'énergie interne adiabatique $F_{2p}$ et isotherme $F_{2i}$ . . . . .	61
6.6	Vue d'artiste de la mission MMS. Crédits : la page web de MMS/NASA ( <a href="https://www.nasa.gov/mission_pages/mms">https://www.nasa.gov/mission_pages/mms</a> ). . . . .	62
6.7	Résumé de l'étude statistique préliminaire menée sur 12 intervalles des quatre satellites de MMS. Couleurs : compressibilité $c$ de l'intervalle. Abscisses : rapport entre le taux de cascade compressible adiabatique (CMHD <sub>p</sub> , $\gamma = 5/3$ ) et incompressible (IMHD). À gauche : pour CMHD <sub>p</sub> , rapport entre les contributions d'énergie interne $F_2$ et Yaglom compressible $F_1$ . À droite : rapport entre les contributions d'énergie interne adiabatique, $F_{2p}$ , et isotherme, $F_{2i}$ ( $\gamma = 1$ ). . . . .	63
7.1	Zones de stabilité du modèle CGL (zone grisée). Critères d'instabilité fire-hose (bleu), miroir (orange) et miroir cinétique (vert). Horizontale $a_p = 1$ en gris. . . . .	77

7.2 Distribution statistique en fonction de $a_p = \frac{p_\perp}{p_\parallel} = \frac{T_\perp}{T_\parallel}$ et $\beta_\parallel$ d'échantillons relevés entre 1995 et 2011 dans le vent solaire par la sonde WIND en orbite autour de la Terre. Pour chacun d'eux, le taux de cascade est calculé avec la loi exacte PP98 et indiqué par l'échelle chromatique. Les lignes indiquent les frontières associées aux instabilités cinétiques miroir (décroissante supérieure), cyclotron (décroissante inférieure) et firehose (croissante). Crédits : [OSMAN <i>et al.</i> 2013]. . . . .	77
8.1 Mode d'Alfvén-firehose ( $\omega_A$ , bleu) et nouveau mode ( $\omega_N$ , orange pour $\theta = 25^\circ$ et rouge pour $\theta = 70^\circ$ ) normalisés par $\omega_{ci}$ la pulsation cyclotron des ions et représentés en fonction de $k_\parallel d_i$ , avec $d_i = v_{A0}/\omega_{ci}$ , la longueur inertielle ionique. . . . .	90
8.2 Vitesse de phase $\Re[\omega/(kv_{A0})]$ (colonne a) et taux de croissance des instabilités $\Im[\omega/(kv_{A0})]$ (colonne b) normalisées par $v_{A0}$ en fonction de l'angle $\theta$ pour le nouveau mode incompressible ( $\omega_N$ , orange) et pour le mode d'Alfvén ( $\omega_A$ , bleu). Des asymptotes sont tracées en lignes discontinues. En vert : mode asymptotique $\omega_P$ . En noir : angle asymptotique $\theta_2$ . Première ligne : couple (1) tel que $a_{p0} = 0.05$ , $\beta_{\parallel 0} = 20/9 \Rightarrow$ instabilité firehose ( $F < 0$ ). Deuxième ligne : couple (2) tel que $a_{p0} = 0.2$ , $\beta_{\parallel 0} = 20/9$ . Troisième ligne : couple (3) tel que $a_{p0} = 0.325$ , $\beta_{\parallel 0} = 20/9 \Rightarrow$ seul cas stable pour tout $\theta$ ( $F = G$ ). Quatrième ligne : couple (4) tel que $a_{p0} = 0.38$ , $\beta_{\parallel 0} = 20/9$ . Cinquième ligne : couple (5) tel que $a_{p0} = 0.5$ , $\beta_{\parallel 0} = 20/9 \Rightarrow$ instabilité pseudo-firehose perpendiculaire ( $G < 0$ ). Sauf graphique (3a) où tous les modes coïncident, lorsque qu'un mode disparaît d'un graphique de la colonne a, il apparaît sur le graphique de la colonne b. . . . .	91
8.3 Diagramme $a_{p0} - \beta_{\parallel 0}$ résumant l'étude du nouveau mode. Croix rouges : couples $\{\beta_{\parallel 0}; a_{p0}\}$ sélectionnés pour l'étude paramétrique de la FIGURE 8.2. Frontière d'instabilités firehose $F = 0$ (bleu) et zone instable ( $F < 0$ , bleue) associée. Frontière d'instabilités pseudo-firehose perpendiculaire $G = 0$ (verte) et zone instable ( $G < 0$ , verte) associée. Ligne noire : ensemble des couples $\{\beta_{\parallel 0}; a_{p0}\}$ stables pour tout angle $\theta$ paramétrisé par $F = G$ . Zone blanche : instabilité pseudo-firehose oblique. . . . .	93
10.1 Algorithme d'intégration d'une équation d'évolution générique via une méthode pseudo-spectrale. Prise en compte des corrections anti-aliasing et hyperdissipation $\nu \Delta^n A$ . TF(I) correspond à Transformée de Fourier (Inverse). . . . .	120
10.2 Algorithme de calcul du taux de cascade $\varepsilon$ via la méthode directe. Les quantités impliquées sont des quantités génériques. . . . .	122
10.3 Algorithme de calcul du taux de cascade $\varepsilon$ via la convolution. Les quantités impliquées sont des quantités génériques et par exemple pour $S$ , $\text{TF}[S] = \tilde{S}$ . . . . .	124

10.4 Différents modes de représentations du taux de cascade $\varepsilon_{PP98}$ calculé avec PP98 dans les données de la simulation CGL1. R2 : 2D en fonction de $\ell_\perp$ et $\ell_\parallel$ ), avec deux échelles de couleurs, une échelle symlog, linéaire entre $-10^8$ et $10^8$ (échelle colorée continue), une échelle linéaire (échelle colorée discontinue). Frontières $\theta = \theta_i$ (noire discontinue) et $\theta = 45^\circ$ (noire continue). R1 : 1D en fonction de $\ell$ . R3 : 1D en fonction de $\ell_\perp$ , pour $\ell_\parallel = 0$ (rouge), moyenne sur l'ensemble des $\ell_\parallel$ (bleue), moyennes sur les $\ell_\parallel$ tels que $\theta > 45^\circ$ (orange), et tels que $\theta > \theta_i$ (vert). R4 : 1D en fonction de $\ell_\parallel$ , pour $\ell_\perp = 0$ (rouge), moyenne sur l'ensemble des $\ell_\perp$ (bleue), moyenne sur les $\ell_\perp$ tels que $\theta < 45^\circ$ (orange) et tels que $\theta < \theta_i$ (vert). Le caractère continu ou discontinue des courbes 1D reflète le signe de $\varepsilon_{PP98}$ .	128
11.1 Mode de représentation : 1D en fonction de $\ell_\perp$ normalisé par $d_i$ . Lignes pleines : nos résultats (avec en lignes discontinues les valeurs négatives). Pointillés : résultats extraits des figures 3 et 5 de F21. Bleu : $\varepsilon_{MHD-Hall}$ . Orange : $\varepsilon_{MHD}$ . Vert : $\varepsilon_{Hall}$ . Haut : CGL1. Bas : CGL3.	130
11.2 Mode de représentation : 1D en fonction de $\ell_\perp$ normalisé par $d_i$ . divergence transverse avec FEL.	132
11.3 Mode de représentation : 1D en fonction de $\ell_\perp$ normalisé par $d_i$ . $\varepsilon_{F19}$ est obtenue pour diverses dates, $t$ , de CGL3, chaque date correspond à une couleur. Le résultat extrait de la figure 5 de F21 est donné en pointillés noirs.	133
11.4 Détail de la loi KHM pour CGL1 (gauche) et CGL3 (droite). Bleu : $\varepsilon_{NL}$ . Orange : $\varepsilon_F$ . Vert : $\varepsilon_D$ . Rouge : $\partial_t \mathcal{R}$ . Violet : $\varepsilon_{ref} = -\partial_t \mathcal{R} + \varepsilon_D + \varepsilon_F$ . Marron : $\zeta = \varepsilon_{ref} - \varepsilon_{NL}$ . Représentation : 1D en fonction de $\ell_\perp$ avec les valeurs positives en trait plein et négative en trait discontinu.	135
11.5 Détail du terme d'hyperdissipation, $\varepsilon_D$ (noir), pour CGL1 (gauche) et CGL3 (droite). Bleu : $\varepsilon_D^m(D_{v_A})$ . Orange : $\varepsilon_D^m(D_\rho)$ . Vert : $\varepsilon_D^{ue}(D_\rho)$ . Rouge : $\varepsilon_D^{ui}(D_\rho)$ . Violet : $\varepsilon_D^c(D_\rho)$ Marron : $\varepsilon_D^{ui}(D_u)$ . Rose : $\varepsilon_D^c(D_v)$ . Représentation : 1D en fonction de $\ell_\perp$ avec les valeurs positives en trait plein et négative en trait discontinu.	136
11.6 Détail de la loi (11.11) pour CGL1 (gauche) et CGL3 (droite). Bleu : $\mathcal{E}_{NL}$ . Orange : $\mathcal{E}_F$ . Vert : $\mathcal{E}_D$ . Rouge : $\partial_t \mathcal{S}$ . Violet : $\mathcal{E}_{ref} = -\partial_t \mathcal{S} + \mathcal{E}_D + \mathcal{E}_F$ . Marron : $\mathcal{Z} = \mathcal{E}_{ref} - \mathcal{E}_{NL}$ . Représentation : 1D en fonction de $\ell_\perp$ avec les valeurs positives en trait plein et négative en trait discontinu.	138
1.1 Plain coloured lines : correlation function according to the spectral power $m$ . Dash-dotted coloured lines : expected tendencies if no saturation for each $m$ . Thin black lines : saturation limits.	148
1.2 Equivalence between $\mathcal{S}$ and $2 < A \cdot B > -\mathcal{R}$ . Colours : $m$ . Thin line : $2 < A \cdot B > -\mathcal{R}$ . Thick line : $\mathcal{S}$ . Dash-dotted black lines : $\mathcal{S}$ saturation limits.	148

## LISTE DES TABLEAUX

4.1	Fermetures et relations associées. La forme de l'énergie interne de l'isentrope-isotherme est calquée sur celle utilisée dans le papier [GALTIER et BANERJEE 2011]. Les autres sont définies de telle sorte à maintenir une forme de compatibilité : si $u = u_I$ alors $u = 0$ . Celle de l'isentrope-polytrope est donc légèrement différente de celle utilisée par [BANERJEE et GALTIER 2014]. $\frac{p}{\rho}$ peut aussi s'écrire $\frac{c^2}{\gamma}$ et $p \propto \rho^\gamma$ .	40
9.1	Extraits des paramètres des simulations taitées. Résolution : Nombre de points grille numérique du code initial. $k_{0\perp}d_i$ : vecteur d'onde d'injection perpendiculaire à $e_z$ normalisé par la longueur inertie $d_i$ , $L_\perp = \frac{2\pi}{k_{0\perp}d_i}$ est la taille physique perpendiculaire de la grille simulée. $\theta_i$ : angle d'injection par rapport $e_z$ , $L_z = \frac{L_\perp}{\tan \theta_i}$ . $E_{sup}$ : énergie perpendiculaire cinétique + magnétique, critère d'extinction du forçage. $t$ : date initiale (en unité de temps ionique) de prélèvement de l'échantillon temporel utilisé pour l'étude le loi exacte. $N_t$ : nombre de temps consécutifs utilisés. $\delta t$ : pas temporel, unité de temps ionique.	118
9.2	Extraits des paramètres des simulations taitées, choisis empiriquement pour l'hyperdissipation. $\nu$ , $\eta$ , $\nu_\rho$ , $\nu_p$ : constantes caractéristiques de l'hyperdissipation respectivement de la vitesse, du champ magnétique, de la densité, des pressions. $\alpha$ : facteur d'anisotropie. $a_{pi0}$ : taux d'anisotropie de pression ionique initiale. $a_{pe0}$ : taux d'anisotropie de pression électronique initiale.	118
11.1	Différences majeures entre les schémas numériques F21 et FEL. $\phi$ correspond à l'angle présent dans la plan perpendiculaire dans un système de coordonnées cylindrique.	131



## LISTES DES ACRONYMES

**1D** 1 dimension.

**2D** 2 dimensions.

**3D** 3 dimensions.

**FFT** algorithme de transformée de Fourier rapide

**KHM** [von KARMAN et HOWARTH 1938 ; MONIN et JAGLOM 1971]. Type de loi exacte obtenue avant applications des hypothèses de stationnarité statistique et séparation d'échelle.

**K41** [KOLMOGOROV 1991a ; KOLMOGOROV 1991b]. Type de loi exacte obtenue après applications des hypothèses de stationnarité statistique et séparation d'échelle.

**PP98** [POLITANO et POUQUET 1998b ; POLITANO et POUQUET 1998a]. Loi exacte MHD incompressible.

**F21** [FERRAND, SAHRAOUI, LAVEDER *et al.* 2021]

**A18** [ANDRÉS, SAHRAOUI, GALTIER, HADID, DMITruk *et al.* 2018]

**BG17** [BANERJEE et KRITSUK 2017]

**FEL** «Fourier for Exact Law»

**MHDHPe** MHD-Hall- $\nabla P_e$ . Modèle.

**MHDH** MHD-Hall. Modèle.

**IMHD** MHD incompressible. Modèle.

**IMHDH** IMHD-Hall. Modèle.

**HD** hydrodynamique. Modèle.

**MHD** magnétohydrodynamique. Modèle et zone d'échelle.

**Hall** Hall. Gamme d'échelle subionique et terme de la loi d'Ohm.

**Pe**  $\nabla P_e$ . Terme dépendant de la pression électronique présent dans la loi d'Ohm généralisée.

**Pi**  $\nabla P_i$ . Terme dépendant de la pression ionique présent dans la loi d'Ohm généralisée valable en régime EMHD.

**CGL** [CHEW *et al.* 1956]. Modèle gyrotrope et fermeture.

**CGLH** CGL-Hall

**LFCGLHPe** LF/CGL-Hall- $\nabla P_e$

**CGLHPe** CGL-Hall- $\nabla P_e$

**LFHPe** LF-Hall- $\nabla P_e$

- LF** Landau-fluide. Modèle gyrotope et fermeture.
- EMHD** magnétohydrodynamique électronique. Modèle et zone d'échelle couvrant les échelles sub-ioniques et électroniques.
- NASA** National Aeronautics and Space Administration. Agence spatiale américaine.
- ESA** European Space Agency . Agence spatiale européenne.
- PSP** Parker Solar Probe. Mission spatiale de la NASA constituée d'une sonde.
- MMS** Magnetospheric Multiscale. Mission spatiale de la NASA constituée de quatre sondes.
- SWEAP** Solar Wind Electrons Alpha and Protons Investigation
- FIELDS** Fields Experiments
- MAGs** magnétomètres à saturation présent sur PSP
- SCM** fluxmètre présent sur PSP
- SPC** coupe de Faraday présent du PSP
- SPAN** analyseur électrostatiques présent sur PSP
- UTC** Temps Universel Coordonné
- RTN** système de coordonnées local de la position du satellite tel que  $e_z$  est tourné vers le centre de l'objet autour duquel le satellite orbite.
- FPI** Fast Plasma Investigation
- FGM** Fluxgate Magnetometer
- WIND** satellite présent dans le vent solaire. Mission spatiale de la NASA constituée d'une sonde.
- CLUSTER** quatre satellites pour l'étude de la magnétosphère. Mission spatiale de l'European Space Agency (ESA) constituée de quatre sondes.
- THEMIS** Time History of Events and Macroscale Interactions during Substorms. Mission spatiale de la NASA constituée de cinq satellites.
- LPP** Laboratoire de Physique des Plasmas. Unité Mixte de Recherche (UMR) 7648. Situé à Paris et Palaiseau.
- SU** Sorbonne Université.
- IAP** Institut d'Astrophysique de Paris. Unité Mixte de Recherche (UMR) 7095. Situé à Paris.
- OBSPM** Observatoire de Paris-Meudon. Situé à Paris et Meudon.
- LAGRANGE** Laboratoire J.-L. LAGRANGE. Unité Mixte de Recherche (UMR) 7293. Situé à Nice.
- OCA** Observatoire de la Côte d'Azur. Situé à Nice.
- CNRS** Centre national de la recherche scientifique. Situé sur l'ensemble du territoire français.
- UMR** Unité Mixte de Recherche. Système français de classification des laboratoires.
- CNR** Consiglio Nazionale delle Ricerche. Centre national italien pour la recherche.
- ISTP** Istituto per la Scienza e la Tecnologia dei Plasmi. Situé à Milan, Bari et Padova.
- IRAP** Institut de recherche en astrophysique et planétologie. Situé à Toulouse.

**Imperial** Imperial College London. Situé à Londres.

**SPAT** Space and Atmospheric Physics group. Sous composante de Imperial College London (Imperial)

**Univ.** université

**AAIF** Ecole doctorale n°127 : Astronomie et Astrophysique d'Ile-de-France.

**UPSy** Université Paris-Saclay.

**X** École Polytechnique. Situé à Palaiseau.



## LISTE DES SYMBOLES

In this work we use the SI system of units, except for a few units specific to the plasma community that are described below. The notations in general follow common usage. The vectors are noted in bold, as  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{E}$ , etc. Complex quantities are not distinguished from real ones.

Les quantités liées à l'écoulement sont indiquées par  $\alpha$ ,  $e$ ,  $i$  si une distinction est faite sur le type de particules s'écoulant (resp. espèce quelconque mais distincte, électrons, ions). Les valeurs moyennes sont en général indiquées par un 0 et les fluctuations linéaires par un 1 si requis (exemple dans le cadre des linéarisations). Dans les études de turbulence, les quantités exprimées en  $\mathbf{x}'$  sont primées.

La liste suivante contient les notations utilisées récurrentement dans l'ensemble de cette thèse ainsi que quelques éléments de définition. L'usage courant des notations est généralement respecté.

symétrisation de  $A$  par somme avec la transposée.

### Paramètres numériques

$n_x, n_y, n_z$  position en nombre de points dans la grille numérique.

**Opérateurs et opérations** (exemples donnés entre quantités indéfinies  $A$ ,  $B$ ).

$\delta A$  incrément spatial de  $A$ ,  $A' - A$ .

$\Delta$  laplacien,  $\nabla \cdot \nabla$ .

$\mathrm{d} A$  différentielle inexacte (intégration dépendant du chemin) d'une quantité quelconque  $A$ ,  $\frac{\partial}{\partial A}$ .

$\langle A \rangle$  moyenne de  $A$ .

$\mathcal{R}_{AB}$  corrélation symétrique de  $A$  et  $B$ ,  $\frac{1}{2} \langle A' \cdot B + A \cdot B' \rangle$ .

$\mathcal{S}_{AB}$  corrélation incrémentale de  $A$  et  $B$ ,  $\langle \delta A \cdot \delta B \rangle$ .

$\nabla'$  opérateur de dérivation spatiale,  $\partial_{\mathbf{x}'}$ .

$\nabla_\ell$  opérateur de dérivation en échelle spatiale,  $\partial_\ell$ .

$\nabla$  opérateur de dérivation spatiale,  $\partial_{\mathbf{x}}$ .

$\partial_A$  dérivée partielle suivant une quantité quelconque  $A$ ,  $\frac{\partial}{\partial A}$ .

$A \times B$  produit vectoriel, entre quantités vectorielles, donne un vecteur.

$A'$   $A$  évalué en  $\mathbf{x}'$ .

$A : B$  produit dual, ou double produit scalaire (entre quantités tensorielles), on ne l'utilisera que si l'un des tenseurs est symétrique, il peut s'écrire comme deux produits scalaires si l'un des tenseur est construit par produit tensoriel (ex : pour  $A = \mathbf{v}\mathbf{v}$  et  $B = \mathbf{b}\mathbf{b}$ ,  $A : B = \mathbf{v}\mathbf{v} : \mathbf{b}\mathbf{b} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{b}\mathbf{b} \cdot \mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{v})$ ).

$A \cdot B$  produit scalaire, donne un scalaire si appliqué entre deux vecteurs, un vecteur si appliqué entre un vecteur et un tenseur d'ordre 2, etc., ne s'applique pas entre un scalaire et un vecteur, aussi utilisé pour noté un produit indéfini entre quantités indéfinies.

$AB$  produit tensoriel, donne un scalaire si utilisé avec des quantités scalaires, un vecteur si utilisé entre un vecteur et un scalaire, un tenseur d'ordre 2 si utilisé avec deux vecteurs, etc..

$dA$  élément différentiel de  $A$ .

$d_t$  dérivée temporelle totale suivant,  $\partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla$ .

### Constantes et paramètres physiques

$\beta$  paramètre du plasma, correspond à une pression sur la pression magnétique, indicé suivant le type de pression (ex. :  $\beta_{||} = p_{||}/p_m$ ).

$\epsilon_0$  permittivité du vide.  $8.854 \times 10^{-12} \text{ A}^2 \cdot \text{s}^4 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-3}$

$\eta$  résistivité du fluide, caractérise la diffusivité magnétique.

$\gamma_a$  indice adiabatique, 5/3 pour n gaz (semi-)parfait.

$\gamma$  indice polytropique.

$\lambda_c$  longueur de corrélation.

$\lambda_{i,e}$  rapport masse-charge élémentaire des ions et électrons

$\mu_0$  perméabilité (magnétique) du vide,  $1/(\epsilon_0 c^2)$ .

$\nu$  viscosité du fluide, caractérise la dissipation cinétique.

$\omega_{ci,ce}$  pulsation cyclotron ionique (resp. électronique).

$\rho_{Li,Le}$  rayon de Larmor ionique (resp. électronique).

$\sigma$  facteur polytrope.

$a_p$  taux d'anisotropie de pression, correspond à une pression perpendiculaire sur une pression parallèle.

$au$  unité astronomique, distance Soleil-Terre.  $1.495\,978\,707\,00 \times 10^{-11} \text{ m}$

$c$  vitesse de la lumière dans le vide.  $2.997\,924\,58 \times 10^8 \text{ ms}^{-1}$

$d_{i,e}$  longueur d'inertie ionique (resp. électronique).

$e$  charge élémentaire.  $1.602\,176\,634 \times 10^{-19} \text{ C}$

$m_e$  masse d'un électron.  $9.1094 \times 10^{-31} \text{ kg}$

$m_i$  masse ionique proportionnelle à  $m_p$ .

$m_p$  masse d'un proton.  $1.6726 \times 10^{-27} \text{ kg}$

---

$q_\alpha$	charge particulaire, à ne pas confondre avec les flux de chaleurs.
$R_e$	nombre de Reynolds, rapport entre convection et dissipation cinétique (voir section 1.1).
$R_m$	nombre de Reynolds magnétique, rapport entre convection et diffusivité magnétique (voir section 1.1).
$R_s$	rayon solaire. $6.958 \times 10^{-8}$ m
$T$	température.
$V$	volume.

### Quantités

$\ell_F$	échelle de forçage.
$\ell$	échelle, incrément spatial aussi noté $\delta x$ .
$\overline{P}_E$	$\frac{Q}{\rho} \overline{\mathbf{P}}$
$\mathbf{B}$	champ magnétique.
$\mathbf{b}$	direction du champ magnétique.
$\mathbf{d}_c$	dissipation cinétique, appliquée dans l'équation d'évolution de $\mathbf{v}$ .
$\mathbf{d}_m$	dissipation magnétique, appliquée sur l'équation d'évolution de $\mathbf{v}_A$ .
$\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$	
$\mathbf{E}$	champ électrique.
$\mathbf{f}_c$	forçage cinétique, appliquée dans l'équation d'évolution de $\mathbf{v}$ .
$\mathbf{f}_m$	forçage magnétique, appliquée sur l'équation d'évolution de $\mathbf{v}_A$ .
$j$	densité de courant, moment d'ordre 1 de la fonction de distribution des particules.
$\mathbf{k}$	vecteur d'onde (position dans l'espace de Fourier).
$\mathbf{q}$	flux de chaleur, forme réduite par produit dual avec $\overline{\mathbf{I}}$ de $\overline{\mathbf{q}}$ .
$\mathbf{v}_A$	vitesse d'Alfvén.
$v_{SW}$	vitesse d'écoulement du vent solaire de module $v_{SW}$ . $400 - 800 \text{ ms}^{-1}$
$\mathbf{v}$	vitesse d'écoulement d'un fluide, moment d'ordre 1 de la fonction de distribution des particules.
$\mathbf{v}$	vitesse d'une particule individuelle.
$\mathbf{x}'$	position $\mathbf{x}$ translatée de $\ell$ .
$\mathbf{x}$	position.
$\mathcal{E}_D$	
$\mathcal{E}_F$	
$\mathcal{E}_{NL}$	
$\mathcal{P}_\alpha$	fonction de distribution des particules d'espèce $\alpha$ .

$\mathcal{R}_\downarrow$	
$\mathcal{R}_\nparallel$	
$\mathcal{R}_\nperp$	
$\mathcal{R}$	
$\mathcal{S}$	
$\omega$	pulsation/fréquence temporelle (dans l'espace de Fourier).
$\overline{\Pi}$	composante anisotrope du tenseur de pression.
$\overline{I}$	tenseur identité.
$\overline{P}_*$	tenseur de pression totale, contient $\overline{P}$ et $p_m$ .
$\overline{P}$	tenseur de pression, moment d'ordre 2 de la fonction de distribution des particules.
$\overline{q}$	tenseur de flux de chaleur.
$\rho$	densité massique d'un fluide, moment d'ordre 0 de la fonction de distribution des particules.
$\theta$	angle entre $\mathbf{k}$ et $\mathbf{e}_z$
$\varepsilon_D$	
$\varepsilon_F$	
$\varepsilon_{hall}$	correction étendant le domaine de validité du taux $\varepsilon_{mhd}$ aux échelles Hall.
$\varepsilon_{mhd}$	tout taux de cascade calculé avec l'approximation MHD
$\varepsilon_{NL}$	
$\varepsilon$	
$B$	module du champ magnétique.
$E_c$	
$E_D$	
$E_F$	
$E_m$	
$E_{tot}$	
$f$	fréquence temporelle.
$k_\perp, k_\parallel$	composante perpendiculaire et parallèle au champ magnétique moyen du vecteur d'onde.
$n$	densité de particule.
$p_m$	pression magnétique.
$p_\parallel$	pression parallèle, composante gyrotrope de $\overline{P}$ dans la direction $\mathbf{b}$ .
$p_\perp$	pression perpendiculaire, composante gyrotrope de $\overline{P}$ perpendiculaire à la direction $\mathbf{b}$ .

- $p$  pression isotrope, tiers de la trace du tenseur de pression.
- $Q$  densité de charge.
- $q$  module ou composante du flux de chaleur sauf dans le chapitre 2 où c'est la charge associée à l'espèce des particules.
- $s$  entropie spécifique (divisée par la masse).
- $t$  instant, temps.
- $u$  énergie interne spécifique (divisée par la masse).
- $v_A$  module de la vitesse d'Alfvén.
- $x, y, z$  composantes cartésiennes de la position.



## BIBLIOGRAPHIE

1. O. ALEXANDROVA, C. H. K. CHEN, L. SORRISO-VALVO, T. S. HORBURY, S. D. BALE, en, *Space Sci Rev* **178**, 101-139 (2013).
2. H. ALUIE, S. LI, H. LI, *ApJL* **751**, Publisher : American Astronomical Society, L29 (2012).
3. N. ANDRÉS, F. SAHRAOUI, S. GALTIER, L. Z. HADID, P. DMITruk *et al.*, *J. Plasma Phys.* **84**, 21 (2018).
4. N. ANDRÉS, P. CLARK DI LEONI *et al.*, *Physics of Plasmas* **24**, 102314 (2017).
5. N. ANDRÉS, S. GALTIER, F. SAHRAOUI, *Phys. Rev. E* **97**, 013204 (2018).
6. N. ANDRÉS, F. SAHRAOUI, *Phys. Rev. E* **96**, 053205 (2017).
7. N. ANDRÉS, F. SAHRAOUI, L. Z. HADID *et al.*, *arXiv e-prints* **2102**, arXiv :2102.11781 (2021).
8. N. ANDRÉS, F. SAHRAOUI, S. HUANG, L. Z. HADID, S. GALTIER, en, *A&A* **661**, Publisher : EDP Sciences, A116 (2022).
9. N. ANDRÉS, F. SAHRAOUI, S. GALTIER, L. Z. HADID, R. FERRAND *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **123**, arXiv : 1911.09749, 245101 (2019).
10. R. A. ANTONIA, M. OULD-ROUIS, F. ANSELMET, Y. ZHU, *J. Fluid Mech.* **332**, Publisher : Cambridge University Press, 395-409 (1997).
11. S. D. BALE, K. GOETZ *et al.*, *Space Sci Rev* **204**, 49-82 (2016).
12. S. D. BALE, J. C. KASPER *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **103**, 211101 (2009).
13. R. BANDYOPADHYAY *et al.*, *Physics of Plasmas* **29**, \_eprint : [https://pubs.aip.org/aip/pop/article-pdf/doi/10.1063/5.0098625/16570234/102107\\_1\\_online.pdf](https://pubs.aip.org/aip/pop/article-pdf/doi/10.1063/5.0098625/16570234/102107_1_online.pdf), 102107 (2022).
14. S. BANERJEE, L. Z. HADID, F. SAHRAOUI, S. GALTIER, *ApJL* **829**, Publisher : American Astronomical Society, L27 (2016).
15. S. BANERJEE, N. ANDRÉS, *Phys. Rev. E* **101**, 043212 (2020).
16. S. BANERJEE, S. GALTIER, *J. Fluid Mech.* **742**, 230-242 (2014).
17. S. BANERJEE, S. GALTIER, *Phys. Rev. E* **87**, 013019 (2013).
18. S. BANERJEE, A. G. KRITSUK, *Phys. Rev. E* **96**, Publisher : American Physical Society, 053116 (2017).
19. G. BELMONT, L. REZEAU, C. RICONDA, A. ZASLAVSKY, *Introduction à la physique des plasmas*, fr (ISTE editions, 2018).
20. Y. BEREZIN, V. A. VSHIVKOV, *Journal of Computational Physics* **20**, 81-96 (1976).

21. L. BOREL, D. FAVRAT, *Thermodynamique et énergétique*, fr, Google-Books-ID : ApHgAgC8lG0C (PPUR presses polytechniques, 2005).
22. V. BORUE, S. A. ORSZAG, en, *EPL* **29**, 687 (1995).
23. M. BRODIANO, N. ANDRÉS, P. DMITruk, en, *ApJ* **922**, Publisher : American Astronomical Society, 240 (2021).
24. M. BRODIANO, N. ANDRÉS, P. DMITruk, en, arXiv :2207.06935 [astro-ph, physics :physics] type : article (2022).
25. R. BRUNO, V. CARBONE, *Living Rev. Solar Phys.* **2**, 4 (2005).
26. R. BRUNO, V. CARBONE, *Living Rev. Solar Phys.* **10** (2013).
27. P. A. CASSAK, M. H. BARBHUIYA, « Pressure-Strain Interaction : I. On Compression, Deformation, and Implications For Pi-D », en, rapp. tech. arXiv :2211.13160, arXiv :2211.13160 [physics] type : article (arXiv, 2022).
28. S. CHANDRASEKHAR, *An introduction to the study of stellar structure*, Publication Title : Chicago ADS Bibcode : 1939isss.book.....C.
29. A. CHASAPIS *et al.*, en, *ApJ* **804**, L1 (2015).
30. S. G. CHEFRANOV, A. S. CHEFRANOV, en, *Physics of Fluids* **33**, 076108 (2021).
31. G. F. CHEW, M. GOLDBERGER, F. E. LOW, *Proc. R. Soc. Lond. A* **236**, 112-118 (1956).
32. R. CHHIBER, A. V. USMANOV, W. H. MATTHAEUS, T. N. PARASHAR, M. L. GOLDSTEIN, en, *ApJS* **242**, Publisher : The American Astronomical Society, 12 (2019).
33. J. CHO, A. LAZARIAN, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **345**, 325-339 (2003).
34. J. CHO, A. LAZARIAN, *ApJ* **701**, Publisher : American Astronomical Society, 236-252 (2009).
35. T. CHUST, G. BELMONT, *Physics of Plasmas* **13**, Publisher : American Institute of Physics, 012506 (2006).
36. J. T. COBURN, M. A. FORMAN, C. W. SMITH, B. J. VASQUEZ, J. E. STAWARZ, *Phil. Trans. R. Soc. A.* **373**, 20140150 (2015).
37. S. R. CRANMER *et al.*, *Phil. Trans. R. Soc. A.* **373**, 20140148 (2015).
38. V. DAVID, S. GALTIER, F. SAHRAOUI, L. Z. HADID, en, *ApJ* **927**, Publisher : American Astronomical Society, 200 (2022).
39. C. ECKART, *Phys. Rev.* **58**, Publisher : American Physical Society, 267-269 (1940).
40. G. L. EYINK, T. D. DRIVAS, *Phys. Rev. X* **8**, 011022 (2018).
41. C. FEDERRATH, J. ROMAN-DUVAL, R. S. KLESSEN, W. SCHMIDT, M.-M. M. LOW, *A&A* **512**, Publisher : EDP Sciences, A81 (2010).
42. R. FERRAND, S. GALTIER, F. SAHRAOUI, C. FEDERRATH, *ApJ* **904**, 160 (2020).
43. R. FERRAND, S. GALTIER, F. SAHRAOUI, R. MEYRAND *et al.*, *ApJ* **881**, 50 (2019).
44. R. FERRAND, F. SAHRAOUI, S. GALTIER *et al.*, en, *ApJ* **927**, 205 (2022).
45. R. FERRAND, F. SAHRAOUI, D. LAVEDER *et al.*, en, *ApJ* **923**, Publisher : The American Astronomical Society, 122 (2021).

46. R. FERRAND, en, thèse de doct., Université Paris-Saclay, 2021.
47. R. FERRAND, S. GALTIER, F. SAHRAOUI, *Journal of Plasma Physics* **87**, Publisher : Cambridge University Press, 905870220 (2021).
48. K. M. FERRIÈRE, N. ANDRÉ, en, *Journal of Geophysical Research : Space Physics* **107**, \_eprint : <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1029/2002JA009273>, SMP 7–1–SMP 7–17 (2002).
49. N. J. FOX *et al.*, *Space Sci Rev* **204**, 7–48 (2016).
50. U. FRISCH, *Turbulence : The Legacy of A.N. Kolmogorov* (Cambridge University Press, 1995).
51. U. FRISCH *et al.*, en, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 144501 (2008).
52. S. GALTIER, *Physique de la Turbulence : des tourbillons aux ondes* (CNRS Editions / EDP Sciences (Savoirs Actuels), 2021).
53. S. GALTIER, en, *J. Phys. A : Math. Theor.* **51**, Publisher : IOP Publishing, 205501 (2018).
54. S. GALTIER, en, *Journal of Plasma Physics* **89**, Publisher : Cambridge University Press, 905890205 (2023).
55. S. GALTIER, *Introduction to Modern Magnetohydrodynamics* (Cambridge University Press, Cambridge, 2016).
56. S. GALTIER, S. BANERJEE, *Phys. Rev. Lett.* **107**, 134501 (2011).
57. S. P. GARY, M. D. MONTGOMERY, W. C. FELDMAN, D. W. FORSLUND, *Journal of Geophysical Research* **81**, 1241 (1976).
58. P. GOLDREICH, S. SRIDHAR, *ApJ* **438**, 763 (1995).
59. D. O. GÓMEZ, P. D. MININNI, P. DMITRU, *Phys. Scr.* **2005**, Publisher : IOP Publishing, 123 (2005).
60. P. GOSWAMI, T. PASSOT, P. L. SULEM, *Physics of Plasmas* **12**, 102109 (2005).
61. L. Z. HADID, F. SAHRAOUI, S. GALTIER, *ApJ* **838**, arXiv : 1612.02150, 9 (2017).
62. L. Z. HADID, F. SAHRAOUI, S. GALTIER, S. Y. HUANG, *Phys. Rev. Lett.* **120**, 055102 (2018).
63. A. N. HALL, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **195**, 685–696 (1981).
64. T. HARDY, *Far from the Madding Crowd* (Cornhill Magazine, 1874).
65. R. D. HAZELTINE, S. M. MAHAJAN, P. J. MORRISON, *Physics of Plasmas* **20**, 022506 (2013).
66. P. HELLINGER, E. PAPINI *et al.*, arXiv :2104.06851 [astro-ph, physics :physics], arXiv : 2104.06851 (2021).
67. P. HELLINGER, P. TRÁVNÍČEK, J. C. KASPER, A. J. LAZARUS, *Geophysical Research Letters* **33**, L09101 (2006).
68. P. HELLINGER, A. VERDINI, S. LANDI, L. FRANCI, L. MATTEINI, *The Astrophysical Journal* **857**, Publisher : American Astronomical Society, L19 (2018).
69. T. S. HORBURY, M. FORMAN, S. OUGHTON, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 175005 (2008).

70. G. P. HOREDT, *Polytropes - Applications in Astrophysics and Related Fields*, vol. 306.
71. P. HUNANA *et al.*, *J. Plasma Phys.* **85**, 205850602 (2019).
72. J. C. KASPER *et al.*, *Space Sci Rev* **204**, 131-186 (2016).
73. K. H. KIYANI, K. T. OSMAN, S. C. CHAPMAN, *Philosophical Transactions of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences* **373**, Publisher : Royal Society, 20140155 (2015).
74. KOLMOGOROV, *Proc. R. Soc. A : Math. Phys. Eng. Sci.* **434**, 9-13 (1991).
75. A. N. KOLMOGOROV, *Proc. R. Soc. A : Math. Phys. Eng. Sci.* **434**, 15-17 (1991).
76. N. A. KRALL, A. W. TRIVELPIECE, *Principles of Plasma Physics*, en, Google-Books-ID : b0BRAAAAMAAJ (McGraw-Hill, New York, 1973).
77. Y. LIU, J. D. RICHARDSON, J. W. BELCHER, J. C. KASPER, H. A. ELLIOTT, *J. Geophys. Res.* **111**, A01102 (2006).
78. G. LIVADIOTIS, D. J. MCCOMAS, en, *ApJ* **749**, Publisher : The American Astronomical Society, 11 (2012).
79. G. LIVADIOTIS, en, 12 (2018).
80. G. LIVADIOTIS, *EPL (Europhysics Letters)* **122**, ADS Bibcode : 2018EL....12250001L, 50001 (2018).
81. B. T. MACBRIDE, C. W. SMITH, M. A. FORMAN, *ApJ* **679**, Publisher : IOP Publishing, 1644 (2008).
82. N. MAGYAR, *Astrophys. J.*, 8 (2019).
83. D. MANZINI, F. SAHRAOUI, F. CALIFANO, R. FERRAND, *Phys. Rev. E* **106**, Publisher : American Physical Society, 035202 (2022).
84. R. MARINO, L. SORRISO-VALVO, en, *Physics Reports*, Scaling laws for the energy transfer in space plasma turbulence **1006**, 1-144 (2023).
85. S. A. MARKOVSKII, B. J. VASQUEZ, en, *ApJ* **924**, Publisher : The American Astronomical Society, 111 (2022).
86. E. MARSCH, K.-H. MÜHLHÄUSER, H. ROSENBAUER, R. SCHWENN, K. U. DENSKAT, en, *Journal of Geophysical Research : Space Physics* **86**, \_eprint : <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1029/JA086iA11p09199>, 9199-9203 (1981).
87. L. MATTEINI *et al.*, *Geophysical Research Letters* **34**, ADS Bibcode : 2007GeoRL..3420105M, L20105 (2007).
88. W. H. MATTHAEUS, M. VELLI, *Space Sci Rev* **160**, 145 (2011).
89. P. D. MININNI, D. ROSENBERG, R. REDDY, A. POUQUET, *Parallel Computing* **37**, 316-326 (2011).
90. A. S. MONIN, A. M. JAGLOM, *Statistical fluid mechanics : mechanics of turbulence* (MIT Press, Cambridge, Mass, English ed. updated, augmented and rev, 1971), vol. 1.
91. A. S. MONIN, A. M. JAGLOM, *Statistical fluid mechanics : mechanics of turbulence*, OCLC : 245996380 (MIT Press, Cambridge, 2. Aufl, 1975), vol. 2.

92. R. E. NAVARRO, P. S. MOYA, en, *Universe* **9**, Number : 1 Publisher : Multidisciplinary Digital Publishing Institute, 8 (2023).
93. S. OPIE, D. VERSCHAREN, C. H. K. CHEN, C. J. OWEN, P. A. ISENBERG, en, arXiv :2210.04875 [astro-ph, physics :physics] type : article (2022).
94. K. OSMAN, W. MATTHAEUS, K. KIYANI, B. HNAT, S. CHAPMAN, *Physical Review Letters* **111** (2013).
95. F. G. E. PANTELLINI, S. J. SCHWARTZ, en, *Journal of Geophysical Research : Space Physics* **100**, \_eprint : <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1029/94JA02572>, 3539-3549 (1995).
96. T. N. PARASHAR, M. L. GOLDSTEIN *et al.*, *The Astrophysical Journal Supplement Series* **246**, 58 (2020).
97. T. N. PARASHAR, W. H. MATTHAEUS, « Observations of Cross Scale Energy Transfer in the Inner Heliosphere by Parker Solar Probe », en, rapp. tech. arXiv :2205.00374, arXiv :2205.00374 [astro-ph, physics :physics] type : article (arXiv, 2022).
98. E. N. PARKER, *Phys. Rev.* **109**, 1874-1876 (1958).
99. T. PASSOT, P. L. SULEM, *Physics of Plasmas* **14**, Publisher : American Institute of Physics, 082502 (2007).
100. T. PASSOT, P. L. SULEM, P. HUNANA, *Physics of Plasmas* **19**, Publisher : American Institute of Physics, 082113 (2012).
101. *paulinesimon97/2022-07\_Simu\_Exact\_laws : Package usefull to compute exact laws*.
102. A. L. PERATT, *Washington Times, supplement : The World and I* (1988).
103. H. POLITANO, A. POUQUET, *Phys. Rev. E* **57**, R21-R24 (1998).
104. H. POLITANO, A. POUQUET, *Geophys. Res. Lett.* **25**, 273-276 (1998).
105. R. A. QUDSI *et al.*, *ApJ* **895**, Publisher : American Astronomical Society, 83 (2020).
106. J.-M. RAX, *Physique des plasmas : Cours et applications*, fr, Google-Books-ID : NIxAWzy4T9oC (Dunod, 2005).
107. A. RETINÒ *et al.*, en, *Nature Phys* **3**, Number : 4 Publisher : Nature Publishing Group, 235-238 (2007).
108. J. D. RICHARDSON, K. I. PAULARENA, A. J. LAZARUS, J. W. BELCHER, *Geophys. Res. Lett.* **22**, 325-328 (1995).
109. J. D. RICHARDSON, C. W. SMITH, *Geophys. Res. Lett.* **30**, \_eprint : <https://agu-pubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1029/2002GL016551> (2003).
110. S. G. SADDOUGHI, S. V. VEERAVALLI, en, *J. Fluid Mech.* **268**, 333-372 (1994).
111. F. SAHRAOUI, L. HADID, S. HUANG, *Rev. Mod. Plasma Phys.* **4**, 4 (2020).
112. S. SERVIDIO *et al.*, English, *Nonlinear Processes in Geophysics* **18**, Publisher : Copernicus GmbH, 675-695 (2011).
113. R. P. SHARMA, S. KUMAR, en, *Journal of Geophysical Research : Space Physics* **116**, \_eprint : <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1029/2010JA016218> (2011).
114. P. SIMON, F. SAHRAOUI, en, *ApJ* **916**, Publisher : The American Astronomical Society, 49 (2021).

115. P. SIMON, F. SAHRAOUI, *Phys. Rev. E* **105**, Publisher : American Physical Society, 055111 (2022).
116. C. W. SMITH, K. HAMILTON, B. J. VASQUEZ, R. J. LEAMON, *ApJ* **645**, Publisher : IOP Publishing, L85 (2006).
117. P. B. SNYDER, G. W. HAMMETT, W. DORLAND, *Physics of Plasmas* **4**, 3974-3985 (1997).
118. L. SORRISO-VALVO *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **99**, Publisher : American Physical Society, 115001 (2007).
119. D. J. SOUTHWOOD, M. G. KIVELSON, en, *J. Geophys. Res.* **98**, 9181 (1993).
120. J. E. STAWARZ, C. W. SMITH, B. J. VASQUEZ, M. A. FORMAN, B. T. MACBRIDE, *ApJ* **697**, Publisher : American Astronomical Society, 1119-1127 (2009).
121. P. L. SULEM, T. PASSOT, *Journal of Plasma Physics* **81**, Publisher : Cambridge University Press (2015).
122. D. SUNDKVIST, A. RETINÒ, A. VAIVADS, S. D. BALE, *Phys. Rev. Lett.* **99**, Publisher : American Physical Society, 025004 (2007).
123. G. I. TAYLOR, *Proceedings of the Royal Society of London. Series A - Mathematical and Physical Sciences* **164**, Publisher : Royal Society, 476-490 (1937).
124. M. A. TAYLOR, S. KURIEN, G. L. EYINK, *Phys. Rev. E* **68**, 026310 (2003).
125. J. M. TENBARGE, G. G. HOWES, W. DORLAND, G. W. HAMMETT, en, *Computer Physics Communications* **185**, 578-589 (2014).
126. R. A. TREUMANN, W. BAUMJOHANN, Y. NARITA, *Earth, Planets and Space* **71**, 41 (2019).
127. C.-Y. TU, E. MARSCH, *MHD Structures, Waves and Turbulence in the Solar Wind* (Springer Netherlands, Dordrecht, 1995).
128. M. VAN DYKE, *An Album of Fluid Motion*, en, Google-Books-ID : cWoeAQAAIAAJ (Parabolic Press, 1982).
129. T. von KARMAN, L. HOWARTH, *Proc. R. Soc. Lond. A* **164**, 192-215 (1938).
130. J. H. WILLIAMSON, en, *Journal of Computational Physics* **35**, 48-56 (1980).

# D'une pression isotrope à l'anisotropie de pression dans les plasmas spatiaux turbulents

---

## Résumé :

Le Vent Solaire (VS) est un plasma, un fluide magnétisé éjecté par le Soleil dans l'espace interplanétaire. La pression n'y est pas définie par une seule valeur, mais par au moins deux valeurs, suivant si l'on regarde le fluide dans la direction du champ magnétique moyen ou perpendiculairement à cette direction. Cette anisotropie de pression impacte le plasma et peut même le rendre instable. Le VS est aussi un milieu turbulent. La turbulence engendre une cascade d'énergie des grandes échelles vers les petites échelles où cette énergie pourra chauffer le plasma. Dans ce travail, nous posons la question de l'impact de l'anisotropie de pression sur la turbulence d'un plasma tel que le VS. La première étape est analytique et étend, à tout type de pression, la théorie des lois exactes de Kolmogorov, qui permet une estimation du taux de cascade. Puis une étude numérique est menée afin de comprendre l'apport de cette extension à notre interprétation de la dynamique turbulente.

## Mots clés :

Plasmas, Turbulence, Magnétohydrodynamique, Théorie, Simulation, Observations in situ

---

# From isotropic pressure to pressure anisotropy in turbulent space plasmas

---

## Abstract :

The Solar Wind (SW) is a plasma, a fluid that interacts with the magnetic and electric fields, ejected by the Sun in the interplanetary space. In this medium, the pressure is not defined as a single quantity, but rather by, at least, two quantities, parallel and perpendicular to the magnetic field. Such anisotropy impacts the plasma that can become unstable. The SW is also a turbulent fluid. The turbulence results in a cascade of energy from large scales to small ones, where the energy can heat the plasma. In this work, we investigate the impact of the pressure anisotropy on the turbulence of the SW. The first step is analytical and extends the theory of Kolmogorov that gives an estimation of the turbulent cascade rate, to all types of pressure. Then a numerical study is led to understand the impact of this extension in our interpretation of a turbulent behavior.

## Keywords :

Plasmas, Turbulence, Magnetohydrodynamics, Theory, Simulation, In-situ observations