

---

# PARTIE I : De l'incompressibilité à la compressibilité dans cas d'une pression isotrope pour un plasma idéal

---

*There is even a humorous statement about this by a well-known theoretical physicist who compared the theory of turbulence without pressure with a someone who has lost his manhood.*

***Sergey G. CHEFRANOV et Artem S. CHEFRANOV***



Ce n'est que 57 ans après l'apport de Kolmogorov à la compréhension de la turbulence que l'idée de l'appliquer les lois exactes à un fluide magnétisé, ou plasma, a émergé. Ainsi, POLITANO et POUQUET 1998a ; POLITANO et POUQUET 1998b a étendu la théorie hydrodynamique à la MHD idéale en restant dans le cadre incompressible.

Dans le premier chapitre, nous reprendrons ces résultats afin d'introduire simplement les méthodes qui seront appliquées par la suite dans le cas compressible.

Dans le deuxième chapitre, sera présenté l'apport analytique effectué par l'auteur à l'extension compressible de la théorie de Kolmogorov. Les seules contraintes posées tout au long de cette partie sont celle d'une pression de type isotrope et celle d'une équation d'induction de type idéale. Diverses relations thermodynamiques seront abordées pour fermer le modèle fluide présenté dans l'introduction générale.

Le troisième chapitre résume l'application des résultats analytique dans les premières données obtenues près du Soleil par la sonde Parker Solar Probe lancée par la NASA en 2018.

Chaque chapitre sera achevé par une synthèse des méthodes et résultats. L'apport du travail présenté ici y sera encadré en rouge.



# PARTIE I : CHAPITRE 1

## RAPPEL DU CAS INCOMPRESSIBLE

Le modèle incompressible applicable en magnétohydrodynamique idéale avec pression isotrope (IMHD) est le modèle fluide le plus simple abordé dans ce mémoire. Très étudié, aucun nouveau résultat ne sera introduit dans ce chapitre qui va nous permettre d'introduire des méthodes et notions clefs utilisées, pour étudier la cascade turbulente d'énergie totale ou encore la méthode de linéarisation communément appliquée sur des modèles fluide en physique des plasmas.

### 1.1 Le modèle et l'énergie totale

Contrairement au modèle hydrodynamique incompressible qui ne contient qu'une équation principale – l'équation de Navier-Stokes –, dans le cas d'un plasma, il est nécessaire de prendre en compte le couplage entre le fluide et le champ magnétique et d'ajouter l'équation d'induction. L'incompressibilité s'exprime, quant à elle, à travers une densité de masse constante,  $\rho_0$  qui se traduit dans les équations sur les moments de la fonction de distribution du plasma (voir introduction), par la contrainte  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ , indiquant que le champ de vitesse est conservé, émerge de l'équation du moment d'ordre 0. Le modèle magnétohydrodynamique incompressible est alors :

$$\partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} - \mathbf{v}_A \cdot \nabla \mathbf{v}_A + \frac{1}{\rho_0} \nabla p_{tot} = 0 \quad (1.1)$$

$$\partial_t \mathbf{v}_A + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}_A - \mathbf{v}_A \cdot \nabla \mathbf{v} = 0 \quad (1.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (1.3)$$

Le champ magnétique apparait dans ces équations à travers la vitesse d'Alfvén  $\mathbf{v}_A = \mathbf{B} / \sqrt{\mu_0 \rho_0}$  et la pression magnétique  $p_m = \rho_0 \mathbf{v}_A^2$  contenue dans la pression totale  $p_{tot} = p + p_m$ . On remarque qu'il y a 3 équations (7 en termes de composantes) et 3 inconnues (2 vectorielles,  $\mathbf{v}$  et  $\mathbf{v}_A$  et une scalaire  $p$ ). Le système se retrouve donc fermé grâce à la contrainte incompressible. On peut rappeler aussi que le champ magnétique est conservé, ce qui implique dans le cas incompressible :  $\nabla \cdot \mathbf{v}_A = 0$ . En appliquant la contrainte sur la première équation, on obtient l'équilibre de pression,  $-\frac{1}{\rho_0} \nabla^2 p_{tot} = \nabla \mathbf{v} : \nabla \mathbf{v} - \nabla \mathbf{v}_A : \nabla \mathbf{v}_A$ ,

qui indique que la pression totale est directement reliée aux non-linéarités du système.<sup>1</sup>

Dans ce système apparaissent deux canaux énergétiques, cinétique de densité  $E_c = \frac{1}{2}\rho_0\mathbf{v}^2$  et magnétique,  $E_m = \frac{1}{2}\rho_0\mathbf{v}_A^2$ . On définit aussi la densité d'hélicité croisée couplant les deux champs :  $H_c = \rho_0\mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}$ . Les équations d'énergie et l'équation de densité d'énergie totale  $E_{tot} = E_c + E_m$  sont alors :

$$\partial_t E_c + \nabla \cdot (E_c \mathbf{v} + H_c \mathbf{v}_A + p_{tot} \mathbf{v}) = \rho_0 \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A : \nabla \mathbf{v} \quad (1.6)$$

$$\partial_t E_m + \nabla \cdot (E_m \mathbf{v}) = \rho_0 \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A : \nabla \mathbf{v} \quad (1.7)$$

$$\partial_t E_{tot} + \nabla \cdot (E_{tot} \mathbf{v} + H_c \mathbf{v}_A + p_{tot} \mathbf{v}) = 0 \quad (1.8)$$

L'équation d'énergie totale indique que l'énergie totale moyenne  $\langle E_{tot} \rangle$  est conservée puisque pour toute quantité  $\mathbf{X}$ , la moyenne d'ensemble  $\langle \cdot \rangle$ , définie ici et par la suite comme spatiale, implique  $\langle \nabla \cdot \mathbf{X} \rangle = 0$ . Les équations d'énergie magnétique et cinétique nous indique un échange entre les canaux se faisant à travers le terme de droite.

## 1.2 Le cas linéaire et les ondes d'Alfvén

La théorie linéaire est la principale voie nous donnant des informations ondulatoires sur un modèle. Ainsi dans le modèle IMHD, elle vient révéler l'existence des ondes dites d'Alfvén.

Pour cela, on doit considérer les grandeurs impliquées au maximum au premier ordre, cela revient à filtrer le système de tout terme non-linéaire, le produit de deux grandeurs au premier ordre par exemple (qui devient du second ordre). On notera les moyennes des quantités impliquées (ordre 0) accompagnée d'un (0) et les fluctuations d'ordre 1 accompagnée d'un (1), en indice ou en exposant suivant les quantités. Ainsi,  $\mathbf{v} \simeq \mathbf{v}_{(0)} + \mathbf{v}_{(1)}$ , etc. On considèrera aussi que  $\mathbf{v}_{(0)} = 0$  et  $\mathbf{v}_A^{(0)}$  est orienté suivant  $\mathbf{e}_z$  sans perte de généralité. La deuxième étape consiste à passer dans l'espace de Fourier, c'est-à-dire remplacer  $\partial_t$  par la pulsation  $-i\omega$  et  $\nabla$  par le vecteur d'onde  $i\mathbf{k}$ . On notera  $k_{\parallel}$  la composante le long de  $\mathbf{e}_z$  et  $k_{\perp}$  sa composante le long de  $\mathbf{e}_x$ , dans le plan perpendiculaire au champ magnétique moyen avec, sans perte de généralité,  $k_y = 0$ . Le système IMHD devient alors :

$$\omega \mathbf{v}_{(1)} + \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_A^{(0)} \mathbf{v}_A^{(1)} - \frac{1}{\rho_0} \mathbf{k} p_{tot}^{(1)} = 0 \quad (1.9)$$

$$\omega \mathbf{v}_A^{(1)} + \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_A^{(0)} \mathbf{v}_{(1)} = 0 \quad (1.10)$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_{(1)} = 0 \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_A^{(1)} = 0 \quad (1.11)$$

---

1. Ce système peut aussi être symétrisé grâce aux variables d'Elsasser,  $\mathbf{z}^{\pm} = \mathbf{v} \pm \mathbf{v}_A$  :

$$\partial_t \mathbf{z}^{\pm} + \mathbf{z}^{\mp} \cdot \nabla \mathbf{z}^{\pm} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p_{tot} \quad (1.4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{z}^{\pm} = 0 \quad (1.5)$$

Leur somme  $\frac{1}{4}\rho_0(\mathbf{z}^{+2} + \mathbf{z}^{-2})$  donne l'énergie totale  $E_{tot}$  et leur différence, l'hélicité croisée  $H_c$ . La dynamique non-linéaire est alors contenue dans le terme  $\mathbf{z}^{\mp} \cdot \nabla \mathbf{z}^{\pm}$ . De telles variables semblent parfaites dans l'étude de ce système incompressible et sont largement utilisées pour simplifier les calculs. Il est nécessaire de garder en tête qu'en termes de mathématique fondamentale, elles ne peuvent exister, car les champs de vitesse (vectoriel) et magnétique (pseudo-vectoriel) sont incompatibles. Dans un effort de cohérence avec le cadre compressible dans lequel elles sont mal définies (MAGYAR 2019), elles ne seront pas utilisées ici.

Ensuite, on travaille principalement la première équation dans laquelle, on injecte les autres :

- $\mathbf{k} \cdot (2.9) \Rightarrow p_{tot}^{(1)} = 0$ , en excluant le cas trivial où  $\mathbf{k} = 0$ , d'où  $p_{(1)} = -v_A^{(0)} v_{Az}^{(1)}$
- $\omega \cdot (2.9) \Rightarrow (\omega^2 - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_A^{(0)})^2) v_{(1)} = 0$  (dite équation de dispersion), d'où la relation de dispersion :  $\omega = \pm \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_A^{(0)} = \pm k_{\parallel} v_A^{(0)}$
- $(2.10) \Rightarrow \mathbf{v}_{(1)} = \pm \mathbf{v}_A^{(1)}$  ce qui en termes de variable d'Elsasser s'écrit :  $z_{(1)}^{\pm} = 0$

La relation de dispersion nous indique donc qu'il peut y avoir dans le système IMHD, des ondes dites d'Alfvén ayant pour vitesse de phase la vitesse d'Alfvén,  $(\omega/|\mathbf{k}| = \pm v_A^{(0)})$ , si  $\mathbf{k}$  est orienté le long du champ magnétique.

Les ondes sont très importantes dans l'étude de la turbulence en physique des plasmas où deux théories coexistent : la turbulence faible ou turbulence d'onde où  $\frac{k_{\perp} |\delta \mathbf{B}|}{k_{\parallel} B_{(0)}} \ll 1$  avec  $\delta \mathbf{B}$  représentant les fluctuations de  $\mathbf{B}$  et où la cascade d'énergie est supposément développée par des interactions faiblement non-linéaires entre paquets d'ondes et, la turbulence forte ( $\frac{k_{\perp} |\delta \mathbf{B}|}{k_{\parallel} B_{(0)}} \sim 1$ ) où l'interprétation oscille entre interactions d'ondes ou de structures cohérentes de type vortex (provenant de l'héritage hydrodynamique).

### 1.3 La loi exacte de Politano et Pouquet, le problème de la fonction de corrélation

Le calcul des lois exactes, nommée ainsi car aucune approximation de type linéaire, perturbative, etc. n'est supposé pour les obtenir, fait par définition partie intégrante de la théorie de la turbulence forte et, s'appuie sur les hypothèses de Kolmogorov exposées dans l'introduction et rappelées ci-après. Historiquement, de multiples méthodes ont été mises en application afin de dériver une loi pour la cascade d'énergie dans un modèle IMHD mais beaucoup arrivent au même résultat que l'on nommera dans la suite "PP98" du nom des deux chercheuses l'ayant pour la première fois dérivé en 1998.

Comme décrit précédemment, la cascade turbulente est un transfert entre échelles, ou incréments de position ou de temps (ici on s'intéresse à la position) : soit  $\mathbf{x}$  la position d'un premier point, et  $\mathbf{x}'$  celle d'un deuxième, indépendants l'un de l'autre, l'échelle sera notée  $\ell = \delta \mathbf{x} = \mathbf{x}' - \mathbf{x}$ . Ainsi sont corrélés deux points.<sup>2</sup> Les quantités évaluées en chacun des points seront respectivement notées, ou non, avec un prime comme l'est ici la position, et  $\delta$  dénotera les incréments. On rappelle aussi que la moyenne d'ensemble sera notée  $\langle \rangle$ , associée à la moyenne spatiale, et qu'elle est une opération linéaire, commutative avec la dérivation temporelle. La dérivation spatiale sera notée avec l'opérateur  $\nabla$ , on l'indiquera avec un  $\ell$  si elle s'effectue globalement, hors de la moyenne, et un prime si elle s'effectue au point primé. C'est trois opérateurs sont liés par  $\nabla_{\ell} \langle \cdot \rangle = \langle \nabla' \cdot \rangle = - \langle \nabla \cdot \rangle$  grâce à l'hypothèse d'homogénéité statistique.

Une cascade d'énergie implique une source d'injection et un canal de dissipation, respectivement à grandes et petites échelles, d'après les hypothèses de Kolmogorov. Pour symboliser cela dans le système, on va ajouter une force  $\mathbf{f}_k$  d'injection dans l'équation sur la vitesse et une  $\mathbf{f}_m$  dans l'équation d'induction et deux termes dissipatifs, un dans l'équation sur la vitesse (en général une force de viscosité),  $\mathbf{d}_k$ , et un dans celle d'induction (en général liée à la résistivité),  $\mathbf{d}_m$ . Leur forme n'est pas importante pour l'existence de la cascade contrairement à leur présence, on restera dans un cadre général en ne détaillant

2. Il est possible de corréler plus de deux points mais, ce ne sera pas un sujet de ce mémoire. Tout lecteur intéressé pourra se référer au papier de CHO et LAZARIAN 2009

pas leur contenu. Ainsi :

$$\partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} - \mathbf{v}_A \cdot \nabla \mathbf{v}_A + \frac{1}{\rho_0} \nabla p_{tot} = \mathbf{f}_k + \mathbf{d}_k \quad (1.12)$$

$$\partial_t \mathbf{v}_A + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}_A - \mathbf{v}_A \cdot \nabla \mathbf{v} = \mathbf{f}_m + \mathbf{d}_m \quad (1.13)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (1.14)$$

Maintenant, si l'on veut une loi exacte sur l'énergie totale, on doit choisir une fonction de corrélation qui, lorsque  $\mathbf{x}' = \mathbf{x}$ , est égale à l'énergie totale moyenne, ici  $\langle E_{tot} \rangle = \langle E_c + E_m \rangle = \langle \frac{1}{2} \rho_0 \mathbf{v}^2 + \frac{1}{2} \rho_0 \mathbf{v}_A^2 \rangle$ . Cela nous donne bien des choix :  $\langle \sqrt{E_{tot}} \cdot \sqrt{E'_{tot}} \rangle$ ,  $\langle \sqrt{E_c} \cdot \sqrt{E'_c} + \sqrt{E_m} \cdot \sqrt{E'_m} \rangle$ , et pourquoi pas d'autres puissances ? Ici, c'est la même quantité à une constante près, mais on pourrait avoir à choisir en  $\mathbf{B}$  ou  $\mathbf{v}_A$ , ou encore utiliser les variables d'Elsasser. Une autre possibilité est de définir cette fonction à l'aide des incréments de quantités, dans ce cas, il faut s'assurer que, lorsque  $\mathbf{x}' = \mathbf{x}$ , le résultat soit nul. Du choix de cette fonction va dépendre la difficulté du calcul, la sauvegarde du sens physique (que voudrait dire  $\mathbf{v}^{1/5}$  ?) et potentiellement l'élégance et la compacité du résultat. Ici, on prendra comme exemple la fonction d'auto-corrélation pour chaque canal d'énergie :  $\mathcal{R} = \langle \frac{1}{2} \rho_0 \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}' + \frac{1}{2} \rho_0 \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}'_A \rangle$ ,  $\rho_0/2$  étant une constante et donc n'étant par impactée dans ce cadre incompressible.

Ensuite, on doit dériver une équation pour cette fonction de corrélation, elle s'obtient en notant que  $\partial_t \mathcal{R} = \frac{1}{2} \rho_0 (\langle \partial_t(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}' + \mathbf{v} \cdot \partial_t(\mathbf{v}') \rangle + \langle \partial_t(\mathbf{v}_A) \cdot \mathbf{v}'_A + \mathbf{v}_A \cdot \partial_t(\mathbf{v}'_A) \rangle)$  et en remplaçant les dérivées temporelles grâce aux équations du modèle. Pour alléger la démonstration, on peut noter que  $\langle \partial_t(\mathbf{v}') \cdot \mathbf{v} \rangle$  et le conjugué de  $\langle \partial_t(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}' \rangle$ , c'est-à-dire en échangeant les rôles (prime ou pas) de chacun des points. Ainsi, on obtient en jouant un peu avec l'hypothèse d'homogénéité statistique et la contrainte incompressible :

$$\langle \mathbf{v}' \cdot \partial_t \mathbf{v} \rangle = \nabla_{\ell} \cdot \langle \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v} \mathbf{v} - \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A \rangle + \langle \mathbf{v}' \cdot \mathbf{f}_k + \mathbf{v}' \cdot \mathbf{d}_k \rangle \quad (1.15)$$

$$\langle \mathbf{v}'_A \cdot \partial_t \mathbf{v}_A \rangle = \nabla_{\ell} \cdot \langle \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A \mathbf{v} - \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v} \mathbf{v}_A \rangle + \langle \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{f}_m + \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{d}_m \rangle \quad (1.16)$$

puisque  $-\langle \mathbf{v}' \cdot \nabla p_{tot} \rangle = \nabla_{\ell} \cdot \langle p_{tot} \mathbf{v}' \rangle = \langle p_{tot} \nabla' \cdot \mathbf{v}' \rangle = 0$ .

En turbulence, on s'intéresse principalement à l'étude des fonctions de structures ou multiplication d'incrémentes, il serait donc pertinent d'en faire apparaître ici, en particulier dans les termes flux, sous l'opérateur  $\nabla_{\ell}$ , seuls termes non-linéaires dans le cas incompressible. Avec les hypothèses d'homogénéité et les contraintes, on remarque par exemple que l'on peut les factoriser pour faire ressortir :

$$\nabla_{\ell} \cdot \langle \delta \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v} \delta \mathbf{v} \rangle \quad (1.17)$$

$$= \nabla_{\ell} \cdot \langle \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}' \mathbf{v}' - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \mathbf{v} - \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}' \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \mathbf{v}' + 2 \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}' \mathbf{v} - 2 \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v} \mathbf{v}' \rangle \quad (1.18)$$

$$= 2 \nabla_{\ell} \cdot \langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}' \mathbf{v} - \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v} \mathbf{v}' \rangle \quad (1.19)$$

Et de même :

$$\nabla_{\ell} \cdot \langle \delta \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{v}_A \delta \mathbf{v} \rangle = 2 \nabla_{\ell} \cdot \langle \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}'_A \mathbf{v} - \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A \mathbf{v}' \rangle \quad (1.20)$$

$$\nabla_{\ell} \cdot \langle \delta \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v}_A \delta \mathbf{v}_A \rangle = \nabla_{\ell} \cdot \langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'_A \mathbf{v}_A - \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}_A \mathbf{v}'_A + \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'_A \mathbf{v}'_A \rangle \quad (1.21)$$

On définit donc des fonctions de structures d'ordre 3 :  $\langle \delta \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v} \delta \mathbf{v} \rangle$  et  $\langle \delta \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{v}_A \delta \mathbf{v} \rangle$  qui rappellent la convection de l'énergie, respectivement, cinétique et magnétique par le champ de vitesse (voir l'équation d'énergie totale), et  $\langle \delta \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v}_A \delta \mathbf{v}_A \rangle$  qui rappelle la



convection de l'hélicité par le champ magnétique.

Ainsi, si l'on en revient à l'équation de la fonction de corrélation de l'énergie totale :

$$\partial_t \mathcal{R} = \frac{1}{4} \rho_0 \nabla_{\ell} \cdot \langle \delta \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v} \delta \mathbf{v} + \delta \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{v}_A \delta \mathbf{v} + 2 \delta \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v}_A \delta \mathbf{v}_A \rangle \quad (1.22)$$

$$+ \frac{1}{2} \rho_0 \langle \mathbf{v}' \cdot \mathbf{f}_k + \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}'_k + \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{f}_m + \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{f}'_m \rangle \quad (1.23)$$

$$+ \frac{1}{2} \rho_0 \langle \mathbf{v}' \cdot \mathbf{d}_k + \mathbf{v} \cdot \mathbf{d}'_k + \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{d}_m + \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{d}'_m \rangle \quad (1.24)$$

où dans le terme de droite la première ligne décrit la cascade non-linéaire, la deuxième, l'injection, et la troisième, la dissipation. Cette équation est une loi exacte dite de von Karman, Howarth et Monin (KHM). En  $\ell = 0$ , on retrouve l'équation de densité d'énergie totale moyenne dans ce système ouvert :  $\partial_t \langle E_{tot} \rangle = \langle E_F \rangle + \langle E_D \rangle$  avec  $\langle E_F \rangle = \rho_0 \langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}_k + \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{f}_m \rangle$ , la densité d'énergie moyenne injectée et  $\langle E_D \rangle = \rho_0 \langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{d}_k + \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{d}_m \rangle$ , la densité d'énergie moyenne dissipée.

En appliquant les hypothèses de stationnarité statistique et de séparations d'échelle, on peut définir les taux de cascade, injection et dissipation (resp.  $\varepsilon_{NL}$ ,  $\varepsilon_F$ ,  $\varepsilon_D$ ) qui, considéré dans leur domaine d'échelles de Fourier respectif, doivent s'égaliser. En effet, en cas de stationnarité statistique, le terme d'évolution temporelle s'annule, et avec la séparation d'échelles l'énergie qui est injectée n'a pas d'autre choix que de cascader et puis d'être dissipée. On notera ce taux  $\varepsilon$ . Et si l'on regarde en une frontière, par exemple entre la zone d'injection et celle de cascade, aussi appelée zone inertielle, la troisième ligne de l'équation ( $\varepsilon_D$ ) s'annule, la deuxième est  $\varepsilon_F$  donc  $\varepsilon$  et finalement :

$$\varepsilon = -\frac{1}{4} \rho_0 \nabla_{\ell} \cdot \langle \delta \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v} \delta \mathbf{v} + \delta \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{v}_A \delta \mathbf{v} + 2 \delta \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v}_A \delta \mathbf{v}_A \rangle \quad (1.25)$$

Cette équation est la loi exacte PP98 pour l'énergie totale du modèle IMHD, obtenue à partir de la théorie de Kolmogorov. Cette formule du taux de cascade nous permet, dans le vent solaire par exemple, d'estimer ou le taux de forçage ou celui de dissipation pour répondre par exemple au problème du chauffage (CITATION). En effet, ces derniers sont difficiles à estimer : quel processus injecte de l'énergie ? La création d'onde ? les rayons cosmiques ? Quels processus cinétiques la dissipent ? Sans aborder les limites de résolutions des instruments de mesures.

Phénoménologiquement, en supposant  $\varepsilon$  constant et l'isotropie, on remarque que :  $(\delta \mathbf{v})^3 \sim (\delta \mathbf{v}_A)^3 \sim \varepsilon \ell \Rightarrow (\delta \mathbf{v})^2 \sim (\delta \mathbf{v}_A)^2 \sim \ell^{2/3}$ , ce qui donne les spectres 1D d'énergie cinétique et magnétique en  $E(k) \sim k(\delta \mathbf{v}(k))^2 \sim k(\delta \mathbf{v}_A(k))^2 \sim k^{-5/3}$ . On retrouve ainsi la loi phénoménologique des spectres en 5/3 de Kolmogorov étendue aux fluides magnétisés.<sup>3</sup>

Pour en revenir à la différence entre les fonctions de corrélation, regardons ce qu'il se passe si l'on considère une fonction incrémentale, par exemple  $\mathcal{S} = \langle \frac{1}{2} \rho_0 \delta \mathbf{v}^2 + \frac{1}{2} \rho_0 \delta \mathbf{v}_A^2 \rangle$  qui rappelle les fonctions de structures impliquées dans le taux de cascade. On remarque

---

3. Lorsque le champ magnétique est important, de l'anisotropie apparait dans l'espace de Fourier entre la direction parallèle au champ magnétique et le plan perpendiculaire. La description phénoménologique doit donc être complétée par la condition dite de "critical balance". Pour plus d'information, voir ARTICLE.

que  $\mathcal{S} = 2 \langle E_{tot} \rangle - 2\mathcal{R}$ . Ainsi la loi exacte KHM devient :

$$\partial_t \mathcal{S} = -\frac{1}{2} \rho_0 \nabla_{\ell} \cdot \langle \delta \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v} \delta \mathbf{v} + \delta \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{v}_A \delta \mathbf{v} + 2 \delta \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v}_A \delta \mathbf{v}_A \rangle \quad (1.26)$$

$$+ \rho_0 \langle \delta \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{f}_k + \delta \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{f}_m \rangle \quad (1.27)$$

$$+ \rho_0 \langle \delta \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{d}_k + \delta \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{d}_m \rangle \quad (1.28)$$

La partie non-linéaire, le taux de cascade, n'est pas impactée. Mais une question émerge : la définition des autres taux est-elle vraiment avec des fonctions de corrélations du type non incrémentales ou est-ce celle écrite avec des incréments ? Regarder les incréments informent sur les structures cohérentes cinétiques et magnétiques de taille  $\ell$ , cette équation est donc l'équation d'évolution énergétique de ces structures, formées aux échelles où le champ de forçage est le plus similaire au champ de vitesse ou au champ magnétique et dissipées de manière analogue. Au final, regarder  $\mathcal{S}$  ou  $\mathcal{R}$  revient à regarder où l'énergie stockée dans la structure ou celle restant dans le bilan énergétique totale. Le choix de la définition des taux dépend donc du point de vue que l'on veut étudier mais, comme on vient de le voir, il est très facile de passer analytiquement, d'un point de vue à un autre.

## 1.4 Synthèse des définitions et méthodes (cadre IMHD)

**Modèle :**

$$\partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} - \mathbf{v}_A \cdot \nabla \mathbf{v}_A + \frac{1}{\rho_0} \nabla p_{tot} = \mathbf{f}_k + \mathbf{d}_k \quad (1.29)$$

$$\partial_t \mathbf{v}_A + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}_A - \mathbf{v}_A \cdot \nabla \mathbf{v} = \mathbf{f}_m + \mathbf{d}_m \quad (1.30)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \nabla \cdot \mathbf{v}_A = 0 \quad (1.31)$$

**Fermetures/Contraintes :**  $\rho = \rho_0 \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$

**Points méthodologiques de linéarisation :**

- Négliger toutes quantités ou termes n'étant pas d'ordre 0 ou 1
- $\mathbf{v} \simeq \mathbf{v}_{(1)}$ ,  $\mathbf{v}_A \simeq \mathbf{v}_A^{(0)} + \mathbf{v}_A^{(1)}$  avec  $\mathbf{v}_A^{(0)} = v_{A0} \mathbf{e}_z$
- Passage dans l'espace de Fourier :  $\partial_t \rightarrow -i\omega$  et  $\nabla \rightarrow i\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{k} = k_\perp \mathbf{e}_x + k_\parallel \mathbf{e}_z$

**Relation de dispersion linéaire :**  $\omega = \pm k_\parallel v_A^{(0)} \Rightarrow$  existence de modes d'Alfvén

**Hypothèse de Kolmogorov :**

- Homogénéité statistique
- Stationnarité statistique
- Séparation des gammes d'échelles d'injection/forçage (taux  $\varepsilon_F$ ), de cascade/inertielles (taux  $\varepsilon_{NL}$ ), et de dissipation (taux  $\varepsilon_D$ ) dans l'espace de Fourier

**Fonctions de corrélation d'énergie totale :**

- $\mathcal{R} = \frac{1}{2} \rho_0 \langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}' + \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}'_A \rangle$
- $\mathcal{S} = \frac{1}{2} \rho_0 \langle (\delta \mathbf{v})^2 + (\delta \mathbf{v}_A)^2 \rangle = 2 \langle E_{tot} \rangle - 2\mathcal{R}$
- $\langle E_{tot} \rangle = \mathcal{R}(\ell = 0)$

**Equations statistiques et lois exactes KHM :**

$$\begin{aligned} \partial_t \langle E_{tot} \rangle &= \langle E_F \rangle + \langle E_D \rangle \\ &= \rho_0 \langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}_k + \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{f}_m \rangle + \rho_0 \langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{d}_k + \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{d}_m \rangle \end{aligned} \quad (1.32)$$

$$\begin{aligned} \partial_t \mathcal{R} = -\varepsilon_{NL} + \varepsilon_F + \varepsilon_D &= \frac{1}{4} \rho_0 \nabla_\ell \cdot \langle \delta \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v} \delta \mathbf{v} + \delta \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{v}_A \delta \mathbf{v} + 2 \delta \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v}_A \delta \mathbf{v}_A \rangle \\ &\quad + \frac{1}{2} \rho_0 \langle \mathbf{v}' \cdot \mathbf{f}_k + \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}'_k + \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{f}_m + \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{f}'_m \rangle \\ &\quad + \frac{1}{2} \rho_0 \langle \mathbf{v}' \cdot \mathbf{d}_k + \mathbf{v} \cdot \mathbf{d}'_k + \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{d}_m + \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{d}'_m \rangle \end{aligned} \quad (1.33)$$

$$\begin{aligned} \partial_t \mathcal{S} = -\varepsilon_{NL} + \varepsilon_F + \varepsilon_D &= -\frac{1}{2} \rho_0 \nabla_\ell \cdot \langle \delta \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v} \delta \mathbf{v} + \delta \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{v}_A \delta \mathbf{v} + 2 \delta \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v}_A \delta \mathbf{v}_A \rangle \\ &\quad + \rho_0 \langle \delta \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{f}_k + \delta \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{f}_m \rangle \\ &\quad + \rho_0 \langle \delta \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{d}_k + \delta \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{d}_m \rangle \end{aligned} \quad (1.34)$$

**Loi exacte PP98 sur les taux d'énergie :**  $\varepsilon = \varepsilon_{NL} = \varepsilon_F = \varepsilon_D$  chacun considéré dans leur zone d'échelles d'influence optimale

$$\varepsilon = -\frac{1}{4} \rho_0 \nabla_\ell \cdot \langle \delta \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v} \delta \mathbf{v} + \delta \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{v}_A \delta \mathbf{v} + 2 \delta \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v}_A \delta \mathbf{v}_A \rangle \quad (1.35)$$



## PARTIE I : CHAPITRE 2

# DU MODÈLE À LA LOI EXACTE DANS LE CAS COMPRESSIBLE

### Sommaire

1.1	Le modèle et l'énergie totale . . . . .	5
1.2	Le cas linéaire et les ondes d'Alfvén . . . . .	6
1.3	La loi exacte de Politano et Pouquet, le problème de la fonction de corrélation . . . . .	7
1.4	Synthèse des définitions et méthodes (cadre IMHD) . . . . .	11

Lorsque la contrainte d'incompressibilité est relaxée, le modèle n'est plus fermé. Dans ce chapitre, on va aborder différents types de fermetures en considérant toujours une pression isotrope. Ensuite, on regardera ce qu'il advient du taux de cascade.

## 2.1 Que sait-on sur le modèle compressible ?

Si l'on reprend les équations du modèle MHD idéal dérivées du modèle cinétique dans l'introduction et que l'on suppose une pression isotrope, on obtient le système écrit avec la vitesse d'Alfvén,  $\mathbf{v}_A = \frac{\mathbf{B}}{\sqrt{\mu_0 \rho}}$ , :

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (2.1)$$

$$\partial_t (\rho \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v} - \rho \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A) + \nabla p_* = 0 \quad (2.2)$$

$$3\partial_t p + \nabla \cdot (3p \mathbf{v} + 2\mathbf{q}) + 2p \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2.3)$$

$$\partial_t \mathbf{v}_A - \nabla \cdot (\mathbf{v}_A \mathbf{v} - \mathbf{v} \mathbf{v}_A) + \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{v}_A - \frac{\mathbf{v}_A}{2} \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2.4)$$

La contrainte de conservation du champ magnétique peut s'écrire :  $\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}_A) = -\rho \nabla \cdot \mathbf{v}_A$ . Ce système n'est pas fermé, mais avant de le fermer, regardons ce qu'il nous indique en terme d'énergétique.

L'équation de densité d'énergie cinétique  $E_c = \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}^2$  est :

$$\partial_t E_c + \nabla \cdot (E_c \mathbf{v} + p_* \mathbf{v} - \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A) = -\rho \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A : \nabla \mathbf{v} + p_* \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (2.5)$$

L'équation de densité d'énergie magnétique  $E_c = \frac{1}{2}\rho\mathbf{v}_A^2$  est :

$$\partial_t E_m + \nabla \cdot (E_m \mathbf{v}) = \rho \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A : \nabla \mathbf{v} - p_m \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (2.6)$$

On remarque que l'échange entre ces deux canaux énergétiques se fait à travers la pression magnétique et un terme croisé (termes de droite).

Afin que l'énergie totale soit conservée, il faut ajouter une équation annulant le terme source dépendant de  $p$  dans l'équation d'énergie cinétique. Cette équation est l'équation de densité d'énergie interne,  $E_u = \rho u$  avec  $u$  l'énergie interne spécifique, dans laquelle on doit aussi faire figurer un terme de flux de chaleur,  $\nabla \cdot \mathbf{q}$ , :

$$\partial_t E_u + \nabla \cdot (E_u \mathbf{v} + \mathbf{q}) = -p \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (2.7)$$

On peut remarquer que dans le cas incompressible, l'énergie interne est découplée de l'énergie cinétique et magnétique puisque  $p \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ .

L'équation de densité d'énergie totale,  $E_{tot} = E_c + E_m + E_u$ , est alors :

$$\partial_t E_{tot} + \nabla \cdot (E_{tot} \mathbf{v} + p_* \mathbf{v} - \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A + \mathbf{q}) = 0 \quad (2.8)$$

Comme on peut le voir ici, il n'est pas utile de fermer le système pour obtenir l'équation de densité d'énergie totale. De la même manière, ce ne sera pas utile pour obtenir une loi exacte dite "générale" sur l'énergie totale comme on le verra par la suite. En MHD compressible avec pression isotrope, généralement, l'équation de fermeture est une relation entre la pression,  $p$ , et la densité,  $\rho$ , issue de la thermodynamique ou de l'équation sur la pression. Par la suite, on appellera thermodynamique tout ce qui est relatif à la pression, la densité, l'énergie interne du système et pouvant relever du champ de discipline empirique de la Thermodynamique (BOREL et FAVRAT 2005) à l'équilibre ou hors équilibre (LIVADIOTIS et MCCOMAS 2012).

Le premier principe de la thermodynamique peut s'écrire

$$du = \delta q + \delta w = T ds + \frac{p}{\rho^2} d\rho \quad (2.9)$$

avec  $q$  la chaleur et  $w$  le travail de pression. En y formant la dérivée temporelle totale lagrangienne à partir des dérivées partielles eulériennes :  $D_t = \partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla$  et en injectant l'équation de densité de masse, on retrouve l'équation sur la densité d'énergie interne :

$$D_t(\rho u) = \rho T D_t s - (p + \rho u) \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (2.10)$$

Cette équation est compatible avec l'équation proposée au-dessus si  $\nabla \cdot \mathbf{q} = \rho T D_t s$ ,  $s$  étant l'entropie spécifique et  $T$  la température. Ces équations sont compatibles avec l'équation de pression du modèle fluide si  $\rho u = \frac{3}{2}p$ . Dans la partie suivante, cette similarité nous servira à écrire une forme explicite de l'énergie interne.

La définition originale, thermodynamique (BOREL et FAVRAT 2005), des dénominations «polytrophe», «isochore», «isobare», «isotherme» ou «isentropes» ne s'applique qu'à des transformations :

- isochore (ou incompressible puisque  $\rho = m/V$ ) signifie à volume  $V$  constant
- isobare signifie à pression  $P$  constante,
- isotherme signifie à température  $T$  constante,
- isentropes signifie à entropie  $s$  constante,

— polytrophe signifie à  $\sigma = \frac{Tds}{VdP}$  constant.

En astrophysique et physique des plasmas, on entend ces termes en tant que caractéristique du système et ils sont utilisés pour qualifier une fermeture. Ici, dans une volonté de clarifier cet usage, on considèrera qu'un système décrit idéalement avec l'une de ces caractéristiques est un système dans lequel la quantité caractérisée ne pourra évoluer qu'en suivant le type de transformation associée. En réalité, ces caractéristiques coexistent souvent, l'une pouvant dominer les autres, par exemple dans les plasmas spatiaux (LIVADIOTIS et MCCOMAS 2012). Les transformations isochore, isobare, isotherme et isentrope peuvent être vue comme des cas particuliers de la transformation polytrophe.

D'après HOREDT 2004, l'hypothèse polytrophe, introduite par CHANDRASEKHAR 1939 en astrophysique, peut s'écrire  $pV^\gamma$  constant avec  $\gamma = \frac{c_p - c}{c_V - c}$ , nommé indice spectral ou indice polytropique,  $c = \frac{dQ}{dT}$  étant la chaleur spécifique,  $c_p$  la chaleur spécifique à pression constante et  $c_V$  celle à volume constant. Cette définition rappelle celle de l'indice adiabatique  $\gamma_a = c_p/c_V$ . On peut d'ailleurs réécrire  $\gamma$  en fonction de  $\gamma_a$  en se plaçant dans le cadre d'un gaz parfait et en utilisant les relations (1.2.19) à (1.2.24) de HOREDT 2004. Ainsi  $\gamma = (\gamma_a - 1)K + \gamma_a$  avec  $K = \frac{\delta q}{\delta w} = \frac{Tds}{-PdV}$ . Sachant que  $d(pV^\gamma) = 0$ , le lien entre  $pV^\gamma$  et  $\sigma = \frac{Tds}{VdP}$  est  $\sigma = K/\gamma = \frac{1-\gamma_a/\gamma}{\gamma_a-1}$ .

La figure 2.1 inspirée de LIVADIOTIS et MCCOMAS 2012, complétée avec les valeurs de  $\sigma$  et quelques exemples de plasmas spatiaux données par LIVADIOTIS 2018 résume le lien entre les différentes fermetures et l'hypothèse polytrophe. Les plasmas pouvant être modélisés comme des gaz parfaits monoatomique,  $\gamma_a = 5/3$ . Dans le cas isochore,  $\sigma = \frac{1}{\gamma_a-1} = 3/2$ . La variation de l'indice polytropique suivant le type de plasmas spatiaux

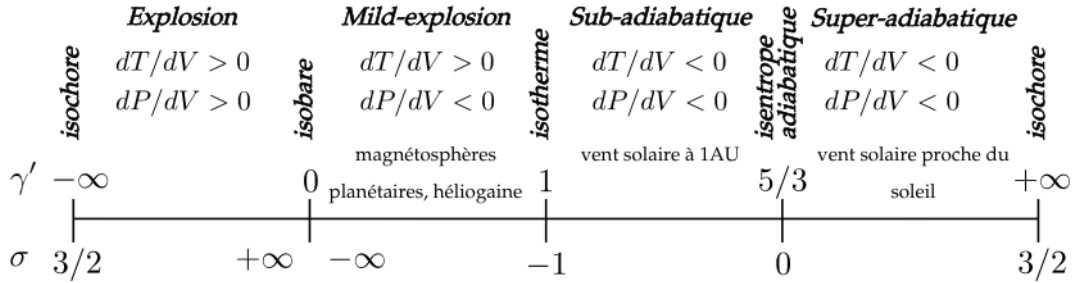


FIGURE 2.1 – Transformations thermodynamiques et intervalles en fonction du  $\gamma'$  du milieu (LIVADIOTIS et MCCOMAS 2012) et du  $\sigma$  (BOREL et FAVRAT 2005), exemple de plasmas spatiaux (LIVADIOTIS 2018).

vient motiver la dérivation d'une loi exacte polytrophe pour étudier la cascade énergétique dans ces milieux.

Dans l'équation d'énergie interne,  $\sigma$  permet d'écrire :

$$du = \delta q + \delta w = (K + 1)\delta w = (\sigma\gamma + 1)\delta w \quad (2.11)$$

$$D_t(\rho u) = -[(\sigma\gamma + 1)p + \rho u]\nabla \cdot \mathbf{v} \quad (2.12)$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{q} = -\rho T D_t s = \sigma\gamma p \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (2.13)$$

D'un autre côté, la relation entre  $p$  et  $V$  peut s'écrire  $p \propto \rho^\gamma$ . Cela donne l'équation :

$$D_t p = -\gamma p \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (2.14)$$

Cette équation est compatible avec l'équation de pression du modèle fluide si :

$$\left(\frac{5}{3} - \gamma\right)p\nabla \cdot \mathbf{v} = -\frac{2}{3}\nabla \cdot \mathbf{q} \Rightarrow \left(\frac{5}{3} + \left(\frac{2}{3}\sigma - 1\right)\gamma\right)p\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2.15)$$

Dans le cas adiabatique, on retrouve l'isentropie  $\nabla \cdot \mathbf{q} = 0$ . Dans le cas isotherme, on retrouve  $\delta w = -\delta q$ , c'est-à-dire  $du = 0$ . En effet, l'énergie interne d'un gaz parfait ne dépendant que de la température, elle ne peut qu'être nulle sous l'hypothèse d'isothermie. Les cas isochore (ou incompressible) et isobare sont plus délicats puisque le produit  $\infty \times 0$  apparaît. Fermer le modèle fluide avec une fermeture thermodynamique, ne garantit donc pas la cohérence avec les équations des moments fluides suivants, telle que celle de pression, et donc le réalisme du modèle final, mais reste mathématiquement acceptable, le système d'équations étant alors autocohérent. Ce type d'incohérence a motivé la recherche de fermetures entreprise par CHUST et BELMONT 2006.

Dans le cadre de la cascade turbulente, on va définir quatre fermetures que l'on appliquera sur la loi exacte générale à travers  $p$ ,  $u$  et  $\mathbf{q}$  dans la dernière section de ce chapitre. La première est la fermeture polytrophe définie précédemment :  $p = \frac{c_s^2}{\gamma}\rho^\gamma$ , avec  $c_s^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho}$  le carré de la vitesse thermique. Pour ce qui est de la variation d'énergie interne spécifique, elle devient :

$$du = (\sigma\gamma + 1)\frac{p}{\rho^2}d\rho = (\sigma\gamma + 1)\frac{p}{\rho^\gamma}\rho^{\gamma-2}d\rho \quad (2.16)$$

$$= \begin{cases} \frac{\sigma\gamma+1}{\gamma-1}\frac{p}{\rho^\gamma}d\rho^{\gamma-1} & \text{si } \gamma \neq 1 \\ (\sigma+1)\frac{p}{\rho}d(\ln \rho) & \text{si } \gamma = 1 \end{cases} \quad (2.17)$$

$$u - u_0 = \begin{cases} \frac{\sigma\gamma+1}{\gamma-1}\frac{p}{\rho^\gamma}(\rho^{\gamma-1} - \rho_0^{\gamma-1}) & \text{si } \gamma \neq 1 \\ (\sigma+1)\frac{p}{\rho}\ln \frac{\rho}{\rho_0} & \text{si } \gamma = 1 \end{cases} \quad (2.18)$$

La deuxième est le cas particulier de la fermeture isotherme :  $\gamma = 1$ ,  $\sigma = -1$ ,  $p = c_s^2\rho$  avec  $c_s$  constante,  $du = 0$ . GALTIER et BANERJEE 2011 avance l'hypothèse que seul le terme de travail de l'énergie interne affecte la cascade dans la zone inertielle. Cela revient à considérer une cascade isentrope  $\sigma = 0$  et à supposer que le terme de chaleur joue un rôle aux autres échelles et s'adapte afin que les règles thermodynamiques soit respectées dans le système global. La fermeture considérée dans cet article est la fermeture isotherme qui alors implique dans la zone inertielle :  $\gamma = 1$ ,  $\sigma = 0$ ,  $p = c_s^2\rho$  avec  $c_s$  constante et  $du = \delta w \Rightarrow u - u_0 = \frac{p}{\rho}\ln \frac{\rho}{\rho_0}$ . On appellera cette fermeture «isentrope-isotherme». En suivant cette hypothèse, on a proposé la fermeture générale «isentrope-polytrophe» :  $\sigma = 0$ ,  $p = \frac{c_s^2}{\gamma}\rho^\gamma$  (SIMON et SAHRAOUI 2021).

$$u - u_0 = \begin{cases} \frac{1}{\gamma-1}\frac{p}{\rho^\gamma}(\rho^{\gamma-1} - \rho_0^{\gamma-1}) & \text{si } \gamma \neq 1 \\ \frac{p}{\rho}\ln \frac{\rho}{\rho_0} & \text{si } \gamma = 1 \end{cases} \quad (2.19)$$

Dans l'usage des formes explicite de l'énergie interne dans les calculs de lois exactes avec l'hypothèse polytrophe, les constantes sont souvent annulées entre elles. Par exemple, dans le cas polytrophe avec  $\sigma = 0$ , BANERJEE et GALTIER 2014 considère comme forme explicite de l'énergie interne  $\rho u = \frac{1}{(\gamma-1)}p$ . Sont résumés dans la table 2.1, les caractéristiques et dénominations des fermetures qui serviront par la suite.



Nom	Paramètres polytropes	Pression	Energie interne explicite
Polytrophe	$\{\sigma, \gamma \neq 1\}$	$\frac{p}{\rho} = \frac{c_s^2}{\gamma}$	$u = \frac{\sigma+1}{\gamma-1} \frac{c_s^2}{\gamma}$
Isotherme	$\{-1, 1\}$	$\frac{p}{\rho} = c_s^2$	$u = 0$
Isentrope-polytrophe	$\{0, \gamma \neq 1\}$	$\frac{p}{\rho} = \frac{c_s^2}{\gamma}$	$u = \frac{1}{\gamma-1} \frac{c_s^2}{\gamma}$
Isentrope-isotherme	$\{0, 1\}$	$\frac{p}{\rho} = c_s^2$	$u = c_s^2 \ln \frac{\rho}{\rho_0}$

TABLE 2.1 – Fermetures et relations associées. La forme de l'énergie interne de l'isentrope-isotherme est calquée sur celle utilisée dans le papier GALTIER et BANERJEE 2011 et celle de l'isentrope-polytrophe sur celle utilisée dans le papier BANERJEE et GALTIER 2014. Le cas incompressible a été étudié indépendamment.

## 2.2 Propriétés linéaires

D'un point de vue linéaire, la méthode présentée dans le chapitre 1 ne demande pas une forme explicite de l'énergie interne. Par conséquent, on fermera le système avec la fermeture polytrophe pour rester dans le cadre le plus général possible. Ainsi, on utilise le système d'équations :

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (2.20)$$

$$\partial_t (\rho \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v} - \rho \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A) + \nabla p_* = 0 \quad (2.21)$$

$$\partial_t \mathbf{v}_A - \nabla \cdot (\mathbf{v}_A \mathbf{v} - \mathbf{v} \mathbf{v}_A) + \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{v}_A - \frac{\mathbf{v}_A}{2} \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2.22)$$

fermé par et  $p = \frac{c_s^2}{\gamma} \rho = \frac{p_0}{\rho_0} \rho^\gamma$ .

L'application de la méthode du chapitre 1 nous donne l'équation de dispersion suivante :

$$\begin{pmatrix} \omega^2 - c_{s0}^2 k_\perp^2 - k^2 v_{A0}^2 & 0 & -c_{s0}^2 k_\parallel k_\perp \\ 0 & \omega^2 - k_\parallel^2 v_{A0}^2 & 0 \\ -c_{s0}^2 k_\parallel k_\perp & 0 & \omega^2 - c_{s0}^2 k_\parallel^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_x^{(1)} \\ v_y^{(1)} \\ v_z^{(1)} \end{pmatrix} = 0 \quad (2.23)$$

avec  $c_0^2 = \gamma \frac{p(0)}{\rho(0)}$ . L'équation de pression traduite par  $(\frac{2}{3}\sigma - \gamma + \frac{5}{3})p \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$  impose que  $\gamma = \frac{2}{3}\sigma + \frac{5}{3}$  dans le cas compressible. La relation de dispersion est donnée par l'annulation du déterminant de la matrice, c'est-à-dire, en notant  $\theta$  l'angle entre  $\mathbf{k}$  et  $\mathbf{e}_z$ , :

$$0 = (\omega^2 - k_\parallel^2 v_{A0}^2) \left( \omega^2 - \frac{1}{2} k^2 (c_{s0}^2 + v_{A0}^2 \pm \sqrt{c_{s0}^4 + v_{A0}^4 - 2c_{s0}^2 v_{A0}^2 \cos(2\theta)}) \right) \quad (2.24)$$

La première racine correspond au mode d'Alfvén similaire à celui obtenu en incompressible et les deux autres aux modes magnétosoniques rapide (+) et lent (-). (INFO SUR LA CASCADE MAGNETOSONORE)

## 2.3 Dérivation d'une loi exacte compressible générale

La méthode utilisée ici pour dériver une loi exacte compressible correspond à celle détaillée dans le chapitre précédent. La première étape est de définir une fonction de corrélation. La pluralité de possibilité est d'autant plus importante que cette fois la compression impacte les densités d'énergie :  $E_{tot} = \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}^2 + \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}_A^2 + \rho u$ . Pour l'énergie cinétique,

la volonté de considérer une forme de type auto-corrélation, à pousser des études HD et MHD considérant sa racine carré en  $\sqrt{\rho}\mathbf{v}$ , alors que d'autres ont privilégié le sens physique de la quantité de mouvement  $\rho\mathbf{v}$ . Pour l'énergie magnétique, la question est la même :  $\mathbf{B}$  ou  $\rho\mathbf{v}_A$  ? Et pour l'énergie interne, les choix présents dans la littérature ont été en partie orientés suivant le type de fermeture : dans le cas polytrophe par exemple, la forme explicite de l'énergie interne spécifique peut s'écrire tel que le carré de la vitesse thermique, d'où  $\rho\sqrt{u}$  ou  $\sqrt{\rho u}$  alors que, dans le cas isotherme, le choix était plutôt orienté sur la conservation de son intégrité et de corréluer  $\rho$  à  $u$ . Un autre courant propose même de ne pas la prendre en compte. On analysera cette dernière possibilité dans la troisième partie de ce mémoire. Trois possibilités ont été investiguées pour chaque type d'énergie (dont la forme est ici généralisée en  $E_X = \rho X^2$ ) :

- l'auto-corrélation :  $\mathcal{R}_{X1} = \langle \sqrt{\rho'}X' \cdot \sqrt{\rho}X \rangle$  de fonction incrémentale associée :  $\mathcal{S}_{X1} = \langle (\delta(\sqrt{\rho}X))^2 \rangle$
- la moyenne de densité :  $\mathcal{R}_{X2} = \frac{1}{2} \langle (\rho' + \rho)X' \cdot X \rangle$  de fonction incrémentale associée :  $\mathcal{S}_{X2} = \langle \delta(\rho X) \cdot \delta X \rangle$
- la corrélation avec la densité :  $\mathcal{R}_{X3} = \frac{1}{2} \langle \rho'X^2 + \rho X'^2 \rangle$  de fonction incrémentale associée :  $\mathcal{S}_{X3} = \langle \delta\rho\delta X^2 \rangle$

Au final, les formes choisies sont :  $\mathcal{R}_c = \mathcal{R}_{c2} = \langle \frac{1}{4}(\rho' + \rho)\mathbf{v}' \cdot \mathbf{v} \rangle$ ,  $\mathcal{R}_m = \mathcal{R}_{m2} = \langle \frac{1}{4}(\rho' + \rho)\mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A \rangle$  et  $\mathcal{R}_u = \mathcal{R}_{u3} = \frac{1}{2} \langle \rho'u + \rho u' \rangle$ . Les raisons de ces choix sont la simplicité de la forme (pas de racines carrées) et la possibilité de comparer les résultats de simulations avec ceux de ANDRÉS, SAHRAOUI, GALTIER, HADID, DMITRUK et al. 2018 dans la troisième partie.

Pour ce qui est du modèle considéré, la première idée était d'appliquer la méthode de calcul des lois exactes sur le modèle fermé par l'hypothèse  $p \propto \rho^\gamma$  dans la lignée des dérivations effectuées dans la littérature. Mais après avoir retravaillé la littérature, il s'est révélé que ce n'était pas forcément le plus judicieux. En effet, l'ensemble de la dérivation de la loi exacte peut se faire sans expliciter  $p$  ou  $u$ , seulement, en utilisant une équation d'évolution de  $u$  : c'est le rôle de l'équation de densité d'énergie interne. En première approximation et en accord avec l'hypothèse que seuls les termes mécaniques ont un rôle dans la cascade proposée par GALTIER et BANERJEE 2011, l'hypothèse isentrope  $\nabla \cdot \mathbf{q} = 0$  a d'abord été posée. Ce travail fait partie des résultats publiés dans SIMON et SAHRAOUI 2021. Par la suite, en se posant la question de l'effet du flux de chaleur, a été dérivé le résultat que l'on a choisi de montrer dans ce mémoire. On reviendra sur la loi isentrope dans la section suivante. Les équations considérées sont celles de densité de masse, vitesse, induction et énergie interne avec des termes de forçage et de dissipations définis comme dans le cas incompressible :

$$\partial_t \rho = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \quad (2.25)$$

$$\partial_t \mathbf{v} = -\nabla \cdot (\mathbf{v} \mathbf{v}) + \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A) - \frac{1}{\rho} \nabla p_* + \mathbf{f}_c + \mathbf{d}_c \quad (2.26)$$

$$\partial_t \mathbf{v}_A = \nabla \cdot (\mathbf{v}_A \mathbf{v} - \mathbf{v} \mathbf{v}_A) - \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{v}_A + \frac{\mathbf{v}_A}{2} \nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{f}_m + \mathbf{d}_m \quad (2.27)$$

$$\partial_t u = -\nabla \cdot (u \mathbf{v}) + u \nabla \cdot \mathbf{v} - \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{q} - \frac{p}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (2.28)$$

Au niveau des fonctions de structure, le jeu a été de trouver les plus proches des termes présents dans la divergence de l'équation d'énergie totale en accord avec les particularités de la fonction de corrélation choisie, seront donc considérées :  $\langle \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{v} \delta \mathbf{v} \rangle$ ,  $\langle \delta \rho \delta u \delta \mathbf{v} \rangle$ ,  $\langle \delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \delta \mathbf{v}_A \delta \mathbf{v} \rangle$ ,  $\langle \delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \delta \mathbf{v} \delta \mathbf{v}_A \rangle$ ,  $\langle \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{v}_A \delta \mathbf{v}_A \rangle$ ,  $\langle$

$\delta(1/\rho)\delta p_*\delta(\rho\mathbf{v}) >$  et  $< \delta(1/\rho)\delta\rho\delta\mathbf{q} >$ . Ci-après sont données les résultats pour chaque canal d'énergie et pour l'énergie totale.

### Cas de l'énergie cinétique :

$$\begin{aligned}
4\partial_t\mathcal{R}_c &= < \partial_t(\rho'\mathbf{v}') \cdot \mathbf{v} + \rho'\mathbf{v}' \cdot \partial_t\mathbf{v} + \partial_t(\rho\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}' + \rho\mathbf{v} \cdot \partial_t\mathbf{v}' > \\
&= \nabla_{\ell} \cdot < \delta(\rho\mathbf{v}) \cdot \delta\mathbf{v}\delta\mathbf{v} - (\delta(\rho\mathbf{v}_A) \cdot \delta\mathbf{v}\delta\mathbf{v}_A + \delta(\rho\mathbf{v}) \cdot \delta\mathbf{v}_A\delta\mathbf{v}_A) + \delta(1/\rho)\delta p_*\delta(\rho\mathbf{v}) > \\
&\quad + \nabla_{\ell} \cdot < \rho'\mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}\mathbf{v}_A - \rho\mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}'\mathbf{v}'_A - \rho'\mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}_A\mathbf{v}'_A + \rho\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'_A\mathbf{v}_A > \\
&\quad + < \rho\mathbf{v} \cdot \delta\mathbf{v}\nabla \cdot \mathbf{v}' - \rho'\mathbf{v}' \cdot \delta\mathbf{v}\nabla \cdot \mathbf{v} > + 2 < p'_*\nabla \cdot \mathbf{v} + p_*\nabla' \cdot \mathbf{v}' > \\
&\quad + 2 < \rho'\mathbf{v}' \cdot \delta\mathbf{v}_A\nabla \cdot \mathbf{v}_A - \rho\mathbf{v} \cdot \delta\mathbf{v}_A\nabla \cdot \mathbf{v}'_A > \\
&\quad + < \delta(p_*)\rho\mathbf{v} \cdot \nabla'(\frac{1}{\rho'}) - \delta(p_*)\rho'\mathbf{v}' \cdot \nabla(\frac{1}{\rho}) > \\
&\quad + < (\rho' + \rho)(\mathbf{v} \cdot \mathbf{f}'_c + \mathbf{v}' \cdot \mathbf{f}_c) > + < (\rho' + \rho)(\mathbf{v} \cdot \mathbf{d}'_c + \mathbf{v}' \cdot \mathbf{d}_c) >
\end{aligned}$$

### Cas de l'énergie magnétique :

$$\begin{aligned}
4\partial_t\mathcal{R}_m &= < \partial_t(\rho'\mathbf{v}'_A) \cdot \mathbf{v}_A + \rho'\mathbf{v}'_A \cdot \partial_t\mathbf{v}_A + \partial_t(\rho\mathbf{v}_A) \cdot \mathbf{v}'_A + \rho\mathbf{v}_A \cdot \partial_t\mathbf{v}'_A > \\
&= \nabla_{\ell} \cdot < \delta(\rho\mathbf{v}_A) \cdot \delta\mathbf{v}_A\delta\mathbf{v} > \\
&\quad + \nabla_{\ell} \cdot < -\rho'\mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}\mathbf{v}_A + \rho\mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}'\mathbf{v}'_A + \rho'\mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}_A\mathbf{v}'_A - \rho\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'_A\mathbf{v}_A > \\
&\quad + < (\frac{1}{2}\rho\mathbf{v}_A \cdot \delta\mathbf{v}_A - \frac{1}{2}\mathbf{v}_A \cdot \delta(\rho\mathbf{v}_A) - 2p_m)\nabla' \cdot \mathbf{v}' > \\
&\quad - < (\frac{1}{2}\rho'\mathbf{v}'_A \cdot \delta\mathbf{v}_A - \frac{1}{2}\mathbf{v}'_A \cdot \delta(\rho\mathbf{v}_A) + 2p'_m)\nabla \cdot \mathbf{v} > \\
&\quad + < (\rho'\mathbf{v}'_A \cdot \delta\mathbf{v} - \delta(\rho\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}'_A)\nabla \cdot \mathbf{v}_A > + < (\delta(\rho\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}_A - \rho\mathbf{v}_A \cdot \delta\mathbf{v})\nabla' \cdot \mathbf{v}'_A > \\
&\quad + < (\rho' + \rho)(\mathbf{v}_A \cdot \mathbf{f}'_m + \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{f}_m) > + < (\rho' + \rho)(\mathbf{v}_A \cdot \mathbf{d}'_m + \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{d}_m) >
\end{aligned}$$

### Cas de l'énergie interne :

$$\begin{aligned}
2\partial_t\mathcal{R}_u &= < \partial_t(\rho')u + \rho'\partial_t u + \partial_t(\rho)u' + \rho\partial_t u' > \\
&= \nabla_{\ell} \cdot < \delta\rho\delta u\delta\mathbf{v} + \delta(1/\rho)\delta\rho\delta\mathbf{q} > + < \rho\delta u\nabla \cdot \mathbf{v}' - \rho'\delta u\nabla \cdot \mathbf{v} > \\
&\quad - < \rho'\frac{p}{\rho}\nabla \cdot \mathbf{v} + \rho\frac{p'}{\rho'}\nabla' \cdot \mathbf{v}' > + < \rho\delta\mathbf{q} \cdot \nabla'(\frac{1}{\rho'}) - \rho'\delta\mathbf{q} \cdot \nabla(\frac{1}{\rho}) >
\end{aligned}$$

### Loi KHM pour l'énergie totale :

$$\begin{aligned}
4\partial_t \mathcal{R} = & \nabla_{\ell} \cdot < (\delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{v} + \delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \delta \mathbf{v}_A + 2\delta\rho\delta u)\delta \mathbf{v} - (\delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \delta \mathbf{v} + \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{v}_A)\delta \mathbf{v}_A > \\
& + \nabla_{\ell} \cdot < (\delta p_* \delta(\rho \mathbf{v}) + 2\delta\rho\delta \mathbf{q})\delta(1/\rho) > \\
& + < (\rho \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v} + \frac{1}{2}\rho \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{v}_A - \frac{1}{2}\mathbf{v}_A \cdot \delta(\rho \mathbf{v}_A) + 2\rho\delta u - 2\rho\delta(\frac{p}{\rho}))\nabla \cdot \mathbf{v}' > \\
& - < (\rho' \mathbf{v}' \cdot \delta \mathbf{v} + \frac{1}{2}\rho' \mathbf{v}'_A \cdot \delta \mathbf{v}_A - \frac{1}{2}\mathbf{v}'_A \cdot \delta(\rho \mathbf{v}_A) + 2\rho'\delta u - 2\rho'\delta(\frac{p}{\rho}))\nabla \cdot \mathbf{v} > \\
& + < (2\rho' \mathbf{v}' \cdot \delta \mathbf{v}_A - \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}'_A + \rho' \mathbf{v}'_A \cdot \delta \mathbf{v})\nabla \cdot \mathbf{v}_A > \\
& - < (2\rho \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v}_A - \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}_A + \rho \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{v})\nabla' \cdot \mathbf{v}'_A > \\
& + < (\delta(p_*)\rho \mathbf{v} + 2\rho\delta \mathbf{q}) \cdot \nabla'(\frac{1}{\rho'}) - (\delta(p_*)\rho' \mathbf{v}' + 2\rho'\delta \mathbf{q}) \cdot \nabla(\frac{1}{\rho}) > \\
& + < (\rho' + \rho)(\mathbf{v} \cdot \mathbf{f}'_c + \mathbf{v}' \cdot \mathbf{f}_c + \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{f}'_m + \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{f}_m) > \\
& + < (\rho' + \rho)(\mathbf{v} \cdot \mathbf{d}'_c + \mathbf{v}' \cdot \mathbf{d}_c + \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{d}'_m + \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{d}_m) >
\end{aligned}$$

$$\text{avec } \mathcal{R} = \frac{1}{2} < \frac{1}{2}(\rho' + \rho)\mathbf{v}' \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{2}(\rho' + \rho)\mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A + \rho'u + \rho u' >.$$

Dans le cadre de la fonction de structure incrémentale associée à  $\mathcal{R}$ ,  $\mathcal{S} = \frac{1}{2} < \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{v} + \delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \delta \mathbf{v}_A + 2\delta\rho\delta u >$ , la loi KHM devient :

$$\begin{aligned}
2\partial_t \mathcal{S} = & -\nabla_{\ell} \cdot < (\delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{v} + \delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \delta \mathbf{v}_A + 2\delta\rho\delta u)\delta \mathbf{v} - (\delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \delta \mathbf{v} + \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{v}_A)\delta \mathbf{v}_A > \\
& - \nabla_{\ell} \cdot < (\delta p_* \delta(\rho \mathbf{v}) + 2\delta\rho\delta \mathbf{q})\delta(1/\rho) > \\
& - < (\rho \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v} + \frac{1}{2}\rho \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{v}_A - \frac{1}{2}\mathbf{v}_A \cdot \delta(\rho \mathbf{v}_A) + 2\rho\delta u - 2\rho\delta(\frac{p}{\rho}))\nabla \cdot \mathbf{v}' > \\
& + < (\rho' \mathbf{v}' \cdot \delta \mathbf{v} + \frac{1}{2}\rho' \mathbf{v}'_A \cdot \delta \mathbf{v}_A - \frac{1}{2}\mathbf{v}'_A \cdot \delta(\rho \mathbf{v}_A) + 2\rho'\delta u - 2\rho'\delta(\frac{p}{\rho}))\nabla \cdot \mathbf{v} > \\
& - < (2\rho' \mathbf{v}' \cdot \delta \mathbf{v}_A - \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}'_A + \rho' \mathbf{v}'_A \cdot \delta \mathbf{v})\nabla \cdot \mathbf{v}_A > \\
& + < (2\rho \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v}_A - \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}_A + \rho \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{v})\nabla' \cdot \mathbf{v}'_A > \\
& - < (\delta(p_*)\rho \mathbf{v} + 2\rho\delta \mathbf{q}) \cdot \nabla'(\frac{1}{\rho'}) - (\delta(p_*)\rho' \mathbf{v}' + 2\rho'\delta \mathbf{q}) \cdot \nabla(\frac{1}{\rho}) > \\
& + < \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{f}_c + \delta(\rho \mathbf{f}_c) \cdot \delta \mathbf{v} + \delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \delta \mathbf{f}_m + \delta(\rho \mathbf{f}_m) \cdot \delta \mathbf{v}_A > \\
& + < \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{d}_c + \delta(\rho \mathbf{d}_c) \cdot \delta \mathbf{v} + \delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \delta \mathbf{d}_m + \delta(\rho \mathbf{d}_m) \cdot \delta \mathbf{v}_A >
\end{aligned}$$

À partir de la loi KHM, il est maintenant facile d'obtenir la loi exacte générale de type Kolmogorov sur le taux de cascade :

$$\begin{aligned}
-4\varepsilon = & \nabla_{\ell} \cdot < (\delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{v} + \delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \delta \mathbf{v}_A + 2\delta\rho\delta u)\delta \mathbf{v} - (\delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \delta \mathbf{v} + \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{v}_A)\delta \mathbf{v}_A > \\
& + \nabla_{\ell} \cdot < (\delta p_* \delta(\rho \mathbf{v}) + 2\delta\rho\delta \mathbf{q})\delta(1/\rho) > \\
& + < (\rho \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v} + \frac{1}{2}\rho \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{v}_A - \frac{1}{2}\mathbf{v}_A \cdot \delta(\rho \mathbf{v}_A) + 2\rho\delta u - 2\rho\delta(\frac{p}{\rho}))\nabla' \cdot \mathbf{v}' > \\
& - < (\rho' \mathbf{v}' \cdot \delta \mathbf{v} + \frac{1}{2}\rho' \mathbf{v}'_A \cdot \delta \mathbf{v}_A - \frac{1}{2}\mathbf{v}'_A \cdot \delta(\rho \mathbf{v}_A) + 2\rho'\delta u - 2\rho'\delta(\frac{p}{\rho}))\nabla \cdot \mathbf{v} > \\
& + < (2\rho' \mathbf{v}' \cdot \delta \mathbf{v}_A - \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}'_A + \rho' \mathbf{v}'_A \cdot \delta \mathbf{v})\nabla \cdot \mathbf{v}_A > \\
& - < (2\rho \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v}_A - \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}_A + \rho \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{v})\nabla' \cdot \mathbf{v}'_A > \\
& + < (\delta(p_*)\rho \mathbf{v} + 2\rho\delta \mathbf{q}) \cdot \nabla'(\frac{1}{\rho'}) - (\delta(p_*)\rho' \mathbf{v}' + 2\rho'\delta \mathbf{q}) \cdot \nabla(\frac{1}{\rho}) >
\end{aligned}$$

Pour ce qui est de sa structure, on remarque que, contrairement au cas incompressible où seuls des termes flux sous la divergence en échelle  $\nabla_{\ell}$  apparaissaient, cette fois, ils sont accompagnés de termes sources s'annulant dans la limite incompressible. Les termes flux se complexifient aussi et on y reconnaît des termes d'énergie interne, de pressions et de chaleur, eux aussi hautement compressibles car dépendant de  $\delta\rho$ . On rappelle que dans la loi exacte ainsi écrite, aucune fermeture du modèle ni forme explicite de l'énergie interne n'ont été considérées. Pour simplifier l'étude de l'impact des fermetures et des différentes formulations, on sépare les différentes contributions associées :

— Contribution d'énergie interne :

$$-4\varepsilon_u = 2\nabla_{\ell} \cdot \langle \delta\rho\delta u\delta\mathbf{v} \rangle + 2 \langle \rho\delta u\nabla' \cdot \mathbf{v}' - \rho'\delta u\nabla \cdot \mathbf{v} \rangle$$

— Contribution de pression thermodynamique :

$$\begin{aligned} -4\varepsilon_p = & \nabla_{\ell} \cdot \langle \delta p\delta(\rho\mathbf{v})\delta(1/\rho) \rangle + 2 \langle \rho'\delta(\frac{p}{\rho})\nabla \cdot \mathbf{v} - \rho\delta(\frac{p}{\rho})\nabla' \cdot \mathbf{v}' \rangle \\ & + \langle \rho\mathbf{v}\delta p \cdot \nabla'(\frac{1}{\rho'}) - \rho'\mathbf{v}'\delta p \cdot \nabla(\frac{1}{\rho}) \rangle \end{aligned}$$

— Contribution de pression magnétique :

$$\begin{aligned} -4\varepsilon_{pm} = & \nabla_{\ell} \cdot \langle \delta p_m\delta(\rho\mathbf{v})\delta(1/\rho) \rangle + \langle \delta(p_m)\rho\mathbf{v} \cdot \nabla'(\frac{1}{\rho'}) - \delta(p_m)\rho'\mathbf{v}' \cdot \nabla(\frac{1}{\rho}) \rangle \\ & + \frac{1}{2} \langle (\rho\mathbf{v}_A \cdot \delta\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_A \cdot \delta(\rho\mathbf{v}_A))\nabla' \cdot \mathbf{v}' - (\rho'\mathbf{v}'_A \cdot \delta\mathbf{v}_A - \mathbf{v}'_A \cdot \delta(\rho'\mathbf{v}_A))\nabla \cdot \mathbf{v} \rangle \end{aligned}$$

— Contribution du flux de chaleur :

$$\begin{aligned} -4\varepsilon_q = & -2 \langle \frac{\rho'}{\rho}\nabla \cdot \mathbf{q} + \frac{\rho}{\rho'}\nabla' \cdot \mathbf{q}' \rangle \\ = & \nabla_{\ell} \cdot \langle 2\delta\rho\delta\mathbf{q}\delta(1/\rho) \rangle + \langle 2\rho\delta\mathbf{q} \cdot \nabla'(\frac{1}{\rho'}) - 2\rho'\delta\mathbf{q}' \cdot \nabla(\frac{1}{\rho}) \rangle \end{aligned}$$

## 2.4 Formulations ultérieures et insertion de la fermeture dans la loi exacte

Comme abordé au début de ce chapitre, la relation de fermeture peut nous donner un lien entre pression et densité et une forme explicite de l'énergie interne. Dans les premières dérivations de lois exactes compressibles, une telle relation faisait partie intégrante du modèle utilisé. Ce n'est qu'au début du travail présenté dans ce mémoire, que l'évidence d'utiliser l'équation d'énergie interne s'est imposée. Dans cette section, nous allons donc comparer la loi exacte générale obtenue à de précédentes formulations et nous regarderons ce qu'elle devient si l'on y injecte les fermetures initialement considérées : isotherme et polytropique avec  $\sigma = 0$  ou  $\sigma \neq 0$ . Dans le cas où  $\sigma = 0$ ,  $\mathbf{q} = 0$  et la première loi de la thermodynamique s'écrit  $\partial u = -p\partial(1/\rho)$ .

**Formulations des articles SIMON et SAHRAOUI 2021 ; SIMON et SAHRAOUI 2022 :** Dans ces articles est supposée l'isentropie c'est-à-dire  $\sigma = 0$  ou  $\varepsilon_q = 0$ . Dans le premier, la loi a été écrite avec une formulation des termes dépendant des pressions magnétique et thermodynamique correspondante à celle de ANDRÉS et SAHRAOUI 2017 et dans

le deuxième en considérant la fonction de structure  $\langle \delta \rho \delta \frac{p_*}{\rho} \delta \mathbf{v} \rangle$ .  $\langle \delta(1/\rho) \delta p_* \delta(\rho \mathbf{v}) \rangle$ , utilisée dans la section précédente est inspirée du travail sur la fonction de structure du flux de chaleur et n'a été envisagée que bien après la publication de ce travail dans le cas isentropique (SIMON et SAHRAOUI 2022).

Pour passer de la formulation obtenue dans la section précédente à celle de SIMON et SAHRAOUI 2022, il faut prendre en compte dans les contributions de pression thermodynamique et magnétique que :

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{e}} \cdot \langle \delta p_* \delta(\rho \mathbf{v}) \delta(1/\rho) \rangle &+ \langle \delta(p_*) \rho \mathbf{v} \cdot \nabla'(\frac{1}{\rho'}) - \delta(p_*) \rho' \mathbf{v}' \cdot \nabla(\frac{1}{\rho}) \rangle \\ &= -\nabla_{\mathbf{e}} \cdot \langle \delta \rho \delta \frac{p_*}{\rho} \delta \mathbf{v} \rangle + \langle (\delta \rho \frac{p_*}{\rho} - \rho \delta(\frac{p_*}{\rho})) \mathbf{v} \cdot \frac{\nabla' \rho'}{\rho'} - (\delta \rho \frac{p'_*}{\rho'} - \rho' \delta(\frac{p_*}{\rho})) \mathbf{v}' \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} \rangle \end{aligned}$$

On remarque que cette formulation dépend de  $\frac{p_*}{\rho}$ , y appliquer la fermeture isotherme ou polytrophe y est donc facilitée puisque  $\frac{p}{\rho} = \frac{c_s^2}{\gamma}$ .

La différence avec la formulation de SIMON et SAHRAOUI 2021 se situe aussi bien dans les termes de pression thermodynamique que dans ceux de pression magnétique. Pour passer de l'une à l'autre, il faut noter :

$$\begin{aligned} -4\varepsilon_p &= \nabla_{\mathbf{e}} \cdot \langle (1 + \frac{\rho'}{\rho}) p \mathbf{v}' - (1 + \frac{\rho}{\rho'}) p' \mathbf{v} \rangle - 2 \langle \rho \frac{p'}{\rho'} \nabla \cdot \mathbf{v}' + \rho' \frac{p}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{v} \rangle \\ &\quad - \langle \rho \frac{p'}{\rho'} \mathbf{v} \cdot \frac{\nabla' \rho'}{\rho'} + \rho' \frac{p}{\rho} \mathbf{v}' \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} \rangle \\ &= \nabla_{\mathbf{e}} \cdot \langle (1 + \frac{\rho'}{\rho}) p \mathbf{v}' - (1 + \frac{\rho}{\rho'}) p' \mathbf{v} + \rho u' \mathbf{v} - \rho' u \mathbf{v}' \rangle - 2 \langle \rho \frac{p'}{\rho'} \nabla \cdot \mathbf{v}' + \rho' \frac{p}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{v} \rangle \end{aligned}$$

La dernière ligne est obtenue en appliquant la relation thermodynamique  $\partial u = \frac{p}{\rho} \frac{\partial \rho}{\rho}$ . Et pour la pression magnétique :

$$\begin{aligned} -4\varepsilon_{pm} &= \nabla_{\mathbf{e}} \cdot \langle (1 + \frac{\rho'}{\rho}) p_m \mathbf{v}' - (1 + \frac{\rho}{\rho'}) p'_m \mathbf{v} \rangle - \langle \rho \frac{p'_m}{\rho'} \mathbf{v} \cdot \frac{\nabla' \rho'}{\rho'} + \rho' \frac{p_m}{\rho} \mathbf{v}' \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} \rangle \\ &\quad + \langle (\rho \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{v}_A - \frac{1}{2}(\rho' + \rho) \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A) \nabla' \cdot \mathbf{v}' - (\rho' \mathbf{v}'_A \cdot \delta \mathbf{v}_A + \frac{1}{2}(\rho' + \rho) \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A) \nabla \cdot \mathbf{v} \rangle \end{aligned}$$

En y appliquant la relation thermodynamique,  $-\langle \rho \frac{p'_m}{\rho'} \mathbf{v} \cdot \frac{\nabla' \rho'}{\rho'} + \rho' \frac{p_m}{\rho} \mathbf{v}' \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} \rangle = -\langle \frac{p'_m}{\rho'} \nabla' \cdot (\rho u' \mathbf{v}) + \frac{p_m}{\rho} \nabla \cdot (\rho' u \mathbf{v}') \rangle$ . On y fait ainsi ressortir le paramètre  $\beta = \frac{p}{p_m}$  du plasma qui caractérise la relation entre le fluide et le champ magnétique. Après avoir effectué cette transformation, la formulation de ANDRÉS et SAHRAOUI 2017 se retrouve en introduisant les notations :  $\bar{\rho} = (\rho' + \rho)/2$  pour la moyenne de densité,  $H = \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_A$  pour l'hélicité croisée,  $R_E = \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'/2 + \rho \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}'_A/2 + \rho u'$ ,  $R_B = \rho \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}'_A/2$  et  $R_H = \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'_A/2 + \rho \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}'/2$ , les fonctions de corrélation non moyennées de l'énergie totale, magnétique et de l'hélicité croisée. On remarque que cette formulation est plus contraignante car elle dépend de la validité de la relation  $\partial u = \frac{p}{\rho} \frac{\partial \rho}{\rho}$  c'est-à-dire  $du = \delta w$ .

**Fermeture polytrophe et isotherme dans le cas isentropique :** Trouver une loi exacte pour un système MHD dépendant de la fermeture isentropie-polytrophe est l'objectif principal qui a motivé le travail menant au papier SIMON et SAHRAOUI 2021. Le résultat y est écrit avec les notations de ANDRÉS et SAHRAOUI 2017, y est comparé dans le

cas isotherme et, est comparé dans la limite hydrodynamique avec la loi polytrophe HD de BANERJEE et GALTIER 2014. La différence avec BANERJEE et GALTIER 2014 réside dans l'utilisation d'une autre fonction de corrélation pour l'énergie interne, celle de type  $\mathcal{R}_{u2} = \frac{1}{2\gamma(\gamma-1)} < (\rho' + \rho)c'_s c_s >$  en considérant  $u = \frac{c_s^2}{\gamma(\gamma-1)}$ . Le lecteur intéressé par ces résultats pourra aller voir le papier SIMON et SAHRAOUI 2021 en annexe de ce mémoire. Ici, on choisit de montrer les résultats que l'on peut obtenir avec la formulation de la loi générale issue de SIMON et SAHRAOUI 2022 lorsque que l'on injecte les fermetures, leur obtention étant quasi-directe. Ainsi en posant  $\gamma p = c_s^2 \rho$  et en explicitant  $p_m$  et  $u = \frac{c_s^2}{\gamma(\gamma-1)}$ , les contributions d'énergie interne et pression deviennent :

$$\begin{aligned} -4(\varepsilon_u + \varepsilon_p) &= -\nabla_{\ell} \cdot < \delta \rho \delta \left( \frac{c_s^2(\gamma-3)}{\gamma(\gamma-1)} \right) \delta \mathbf{v} > \\ &\quad - < 2\rho \delta \left( \frac{c_s^2(\gamma-2)}{\gamma(\gamma-1)} \right) \nabla' \cdot \mathbf{v}' > + < 2\rho' \delta \left( \frac{c_s^2(\gamma-2)}{\gamma(\gamma-1)} \right) \nabla \cdot \mathbf{v} > \\ &\quad + < \left( \frac{c_s^2}{\gamma} \delta \rho - \rho \delta \left( \frac{c_s^2}{\gamma} \right) \right) \mathbf{v} \cdot \frac{\nabla' \rho'}{\rho'} > - < \left( \frac{c_s^2}{\gamma} \delta \rho - \rho' \delta \left( \frac{c_s^2}{\gamma} \right) \right) \mathbf{v}' \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} > \end{aligned}$$

Dans le cas d'une zone inertielle isentrope-isotherme (GALTIER et BANERJEE 2011),  $c_s$  est constant,  $\gamma = 1$  et  $u = c_s^2 \ln \frac{\rho}{\rho_0}$ , les contributions d'énergie interne et pression deviennent :

$$\begin{aligned} -4(\varepsilon_u + \varepsilon_p) &= 2\nabla_{\ell} \cdot < \delta \rho \delta u \delta \mathbf{v} > + < 2\rho \delta u \nabla' \cdot \mathbf{v}' > - < 2\rho' \delta u \nabla \cdot \mathbf{v} > \\ &\quad + < \beta \frac{\mathbf{v}_A^2}{2} \delta \rho \mathbf{v} \cdot \frac{\nabla' \rho'}{\rho'} > - < \beta' \frac{\mathbf{v}'_A^2}{2} \delta \rho \mathbf{v}' \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} > \end{aligned}$$

avec  $u = c_s^2 \ln \frac{\rho}{\rho_0}$  non remplacé pour ne pas alourdir l'expression,  $\beta = \frac{2c_s^2}{\mathbf{v}_A^2}$  et  $\beta' = \frac{2c_s^2}{\mathbf{v}'_A^2}$ . En comparant ces deux cas isentropes, on peut résumer les contributions d'énergie interne et pression sous une seule expression dans laquelle, il sera facile d'injecter  $\gamma$ ,  $u$  et  $\beta$  :

$$\begin{aligned} -4(\varepsilon_u + \varepsilon_p) &= -\nabla_{\ell} \cdot < \delta \rho \delta ((\gamma-3)u) \delta \mathbf{v} > \\ &\quad + < 2(\gamma-2)\rho' \delta u \nabla \cdot \mathbf{v} > - < 2(\gamma-2)\rho \delta u \nabla' \cdot \mathbf{v}' > \\ &\quad + < \left( \beta \frac{\mathbf{v}_A^2}{2} \delta \rho - \rho \delta \left( \beta \frac{\mathbf{v}_A^2}{2} \right) \right) \mathbf{v} \cdot \frac{\nabla' \rho'}{\rho'} > \\ &\quad - < \left( \beta' \frac{\mathbf{v}'_A^2}{2} \delta \rho - \rho' \delta \left( \beta' \frac{\mathbf{v}'_A^2}{2} \right) \right) \mathbf{v}' \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} > \end{aligned}$$

De manière similaire, avec la formulation la plus récente, on aurait :

$$\begin{aligned} -4(\varepsilon_u + \varepsilon_p) &= \nabla_{\ell} \cdot < 2\delta \rho \delta u \delta \mathbf{v} + \delta(p_m \beta) \delta(\rho \mathbf{v}) \delta(1/\rho) > \\ &\quad + < 2(\gamma-2)\rho' \delta u \nabla \cdot \mathbf{v} > - < 2(\gamma-2)\rho \delta u \nabla' \cdot \mathbf{v}' > \\ &\quad + < \delta(p_m \beta) \rho \mathbf{v} \cdot \nabla' \left( \frac{1}{\rho'} \right) - \delta(p_m \beta) \rho' \mathbf{v}' \cdot \nabla \left( \frac{1}{\rho} \right) > \end{aligned}$$

**Fermeture polytrophe et isotherme dans le cas non-isentrope :** Dans le cas non-isentrope,  $\sigma \neq 0$  donc on peut l'utiliser pour transformer les termes de flux de chaleur puisque  $\nabla \cdot \mathbf{q} = \sigma \gamma p \nabla \cdot \mathbf{v}$  :

$$-4\varepsilon_q = -2\sigma \gamma < \rho' \frac{p}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{v} + \rho \frac{p'}{\rho'} \nabla' \cdot \mathbf{v}' >$$

et  $u = \frac{\sigma\gamma+1}{\gamma-1} \frac{c_s^2}{\gamma}$  d'où la contribution polytrophe que l'on peut faire dépendre de  $\beta = \frac{2c_s^2}{\gamma v_A^2}$  et  $\beta' = \frac{2c_s'^2}{\gamma v_A'^2}$  :

$$\begin{aligned}
-4 \quad (\varepsilon_u + \varepsilon_p + \varepsilon_q) = & \nabla \cdot \langle \delta \rho \delta \left( \frac{v_A^2}{2} \left( \beta \frac{(2\sigma-1)\gamma+3}{\gamma-1} \right) \delta \mathbf{v} \right) \rangle \\
& + \langle \left( 2\rho \delta \left( \frac{v_A^2}{2} \beta \frac{(\sigma-1)\gamma+2}{\gamma-1} \right) - 2\sigma\gamma\rho \frac{v_A'^2}{2} \beta' \right) \nabla' \cdot \mathbf{v}' \rangle \\
& - \langle \left( 2\rho' \delta \left( \frac{v_A^2}{2} \beta \frac{(\sigma-1)\gamma+2}{\gamma-1} \right) + 2\sigma\gamma\rho' \frac{v_A^2}{2} \beta \right) \nabla \cdot \mathbf{v} \rangle \\
& + \langle \left( \beta \frac{v_A^2}{2} \delta \rho - \rho \delta \left( \beta \frac{v_A^2}{2} \right) \right) \mathbf{v} \cdot \frac{\nabla' \rho'}{\rho'} \rangle - \langle \left( \beta' \frac{v_A'^2}{2} \delta \rho - \rho' \delta \left( \beta' \frac{v_A'^2}{2} \right) \right) \mathbf{v}' \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} \rangle
\end{aligned}$$

Dans le cas non-isentrope isotherme avec  $c_s$  et  $u$  constants,  $\gamma = 1$  et  $\sigma = -1$ , la contribution d'énergie interne s'annule tout comme les incréments de  $p/\rho$ . Les contributions de pression et flux de chaleur deviennent, après quelques manipulations des termes de flux de chaleur, :

$$-4(\varepsilon_p + \varepsilon_q) = \langle \left( \beta \frac{v_A^2}{2} \delta \rho - 2\rho' \frac{v_A^2}{2} \beta \right) \mathbf{v} \cdot \frac{\nabla' \rho'}{\rho'} \rangle - \langle \left( \beta' \frac{v_A'^2}{2} \delta \rho + 2\rho \frac{v_A'^2}{2} \beta' \right) \mathbf{v}' \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} \rangle$$

On remarque qu'alors la thermodynamique du système n'est présente que dans un nombre réduit de termes (à travers  $\beta$ ), la fermeture isotherme non-isentrope simplifiant au maximum l'expression de la loi exacte compressible.



## 2.5 Synthèse de l'étude analytique de turbulence compressible avec pression isotrope

**Modèle :** voir section 2.1 et 2.3 dans le cas turbulent.

**Fermetures écrites dans le cadre général polytrophe et formes explicites de l'énergie interne spécifiques considérées :**

$$p = \rho \frac{c_s^2}{\gamma}, \quad c_s^2 \propto \rho^\gamma, \quad \sigma = \frac{\nabla \cdot \mathbf{q}}{\gamma p \nabla \cdot \mathbf{v}} \quad (2.29)$$

- cas polytrophe hors isotherme :  $u = \frac{\sigma\gamma+1}{\gamma(\gamma-1)} c_s^2$
- cas isotherme :  $\sigma = -1$ ,  $\gamma = 1$ ,  $u$  et  $c_s$  constants
- cas isentrope-polytrophe hors isotherme :  $\sigma = 0$  et  $u = \frac{1}{\gamma(\gamma-1)} c_s^2$
- cas isentrope-isotherme :  $\sigma = 0$ ,  $\gamma = 1$ ,  $c_s$  constant et  $u = c_s^2 \ln \frac{\rho}{\rho_0}$  (validité discutée section 2.1)

**Relation de dispersion linéaire :** voir section 2.2

$$0 = (\omega^2 - k_{\parallel}^2 v_{A0}^2) (\omega^2 - \frac{1}{2} k^2 (v_{s0}^2 + v_{A0}^2 \pm \sqrt{v_{s0}^4 + v_{A0}^4 - 2v_{s0}^2 v_{A0}^2 \cos(2\theta)})) \quad (2.30)$$

La première racine correspond au mode d'Alfvén similaire à celui obtenu en incompressible et les deux autres aux modes magnétosoniques rapide (+) et lent (-).

**Fonctions de corrélation d'énergie totale considérée (autres possibilités évoquées section 2.3) :**

- $\mathcal{R} = \frac{1}{2} < \frac{1}{2}(\rho' + \rho) \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{2}(\rho' + \rho) \mathbf{v}'_{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{A}} + \rho' u + \rho u' >$
- $\mathcal{S} = \frac{1}{2} < \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{v} + \delta(\rho \mathbf{v}_{\mathbf{A}}) \cdot \delta \mathbf{v}_{\mathbf{A}} + 2\delta \rho \delta u >$

**Loi exacte générale sur les taux d'énergie :**  $\varepsilon = \varepsilon_{NL} = \varepsilon_F = \varepsilon_D$  chacun considéré dans leur zone d'échelles d'influence optimale. Aucune fermeture n'est appliquée. Voir section 2.3 pour les lois KHM.

$$\begin{aligned} -4\varepsilon &= \nabla_{\mathbf{r}} \cdot < (\delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{v} + \delta(\rho \mathbf{v}_{\mathbf{A}}) \cdot \delta \mathbf{v}_{\mathbf{A}} + 2\delta \rho \delta u) \delta \mathbf{v} - (\delta(\rho \mathbf{v}_{\mathbf{A}}) \cdot \delta \mathbf{v} + \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{v}_{\mathbf{A}}) \delta \mathbf{v}_{\mathbf{A}} > \\ &\quad \nabla_{\mathbf{r}} \cdot < (\delta p_* \delta(\rho \mathbf{v}) + 2\delta \rho \delta \mathbf{q}) \delta(1/\rho) > \\ &\quad < (\rho \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v} + \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}_{\mathbf{A}} \cdot \delta \mathbf{v}_{\mathbf{A}} - \frac{1}{2} \mathbf{v}_{\mathbf{A}} \cdot \delta(\rho \mathbf{v}_{\mathbf{A}}) + 2\rho \delta u - 2\rho \delta(\frac{p}{\rho})) \nabla \cdot \mathbf{v}' > \\ &\quad - < (\rho' \mathbf{v}' \cdot \delta \mathbf{v} + \frac{1}{2} \rho' \mathbf{v}'_{\mathbf{A}} \cdot \delta \mathbf{v}_{\mathbf{A}} - \frac{1}{2} \mathbf{v}'_{\mathbf{A}} \cdot \delta(\rho \mathbf{v}_{\mathbf{A}}) + 2\rho' \delta u - 2\rho' \delta(\frac{p}{\rho})) \nabla \cdot \mathbf{v} > \\ &\quad < (2\rho' \mathbf{v}' \cdot \delta \mathbf{v}_{\mathbf{A}} - \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}'_{\mathbf{A}} + \rho' \mathbf{v}'_{\mathbf{A}} \cdot \delta \mathbf{v}) \nabla \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{A}} > \\ &\quad - < (2\rho \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v}_{\mathbf{A}} - \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{A}} + \rho \mathbf{v}_{\mathbf{A}} \cdot \delta \mathbf{v}) \nabla' \cdot \mathbf{v}'_{\mathbf{A}} > \\ &\quad < (\delta(p_*) \rho \mathbf{v} + 2\rho \delta \mathbf{q}) \cdot \nabla'(\frac{1}{\rho'}) - (\delta(p_*) \rho' \mathbf{v}' + 2\rho' \delta \mathbf{q}) \cdot \nabla(\frac{1}{\rho}) > \end{aligned}$$

D'autres formulations de cette loi existent, un comparatif est donné section 2.4 ainsi que quelques exemples de résultats obtenus après applications des différentes fermetures sur les contributions d'énergie interne, pressions et flux de chaleur. Ces résultats sont en partie inédits et en partie publiés dans SIMON et SAHRAOUI 2021 et SIMON et SAHRAOUI 2022.



## PARTIE I : CHAPITRE 3

# ETUDES DE CAS DANS LES DONNÉES DE PSP

### Sommaire

<b>2.1</b>	<b>Que sait-on sur le modèle compressible ? . . . . .</b>	<b>13</b>
<b>2.2</b>	<b>Propriétés linéaires . . . . .</b>	<b>17</b>
<b>2.3</b>	<b>Dérivation d'une loi exacte compressible générale . . . . .</b>	<b>17</b>
<b>2.4</b>	<b>Formulations ultérieures et insertion de la fermeture dans la loi exacte . . . . .</b>	<b>21</b>
<b>2.5</b>	<b>Synthèse de l'étude analytique de turbulence compressible avec pression isotrope . . . . .</b>	<b>25</b>

Ce chapitre résume le travail de comparaison des lois compressibles isentropes-isotherme et isentrope-polytrophe et de la loi incompressible PP98, dans deux jeux de données issus de Parker Solar Probe (PSP). Ce travail a été publié dans SIMON et SAHRAOUI 2021. La formulation des lois compressibles utilisée est celle associée au susdit article (voir section 2.4).

### 3.1 Données et conditions d'adaptation d'une loi exacte dans des observations issues d'une seule sonde

Les données PSP utilisées ont été relevées le 4 Novembre 2018 entre 00h00 et 02h30 durant son premier orbite à environ 36 Rs avec Rs le rayon solaire (FOX et al. 2016). Elles proviennent des expériences FIELDS, pour le champ magnétique mesuré avec une résolution temporelle de 3 ms (BALE et al. 2016) et SWEAP, pour les moments de la fonction de distribution du plasma résolus à 0.873 s (KASPER et al. 2016). Afin de calculer le taux de cascade qui corrèle les moments au champ magnétique, nous devons ré-échantillonner l'une des deux expériences. Le choix fait est de sous-échantillonner les données FIELDS à la résolution des mesures SWEAP pour ne pas créer de l'information. Les données analysées sont montrées sur la figure 3.1. Les sous-intervalles analysés (marqués en rouge) sont associés à deux niveaux moyens de fluctuations de densité. Le premier, de 00h35 à 01 :05 a une compressibilité très faible,  $\langle \delta\rho/\rho_0 \rangle \sim 8\%$ , tandis que le second, de 01h45 à 02h15, est plus compressible,  $\langle \delta\rho/\rho_0 \rangle \sim 20\%$ . Grâce à ces deux intervalles, nous

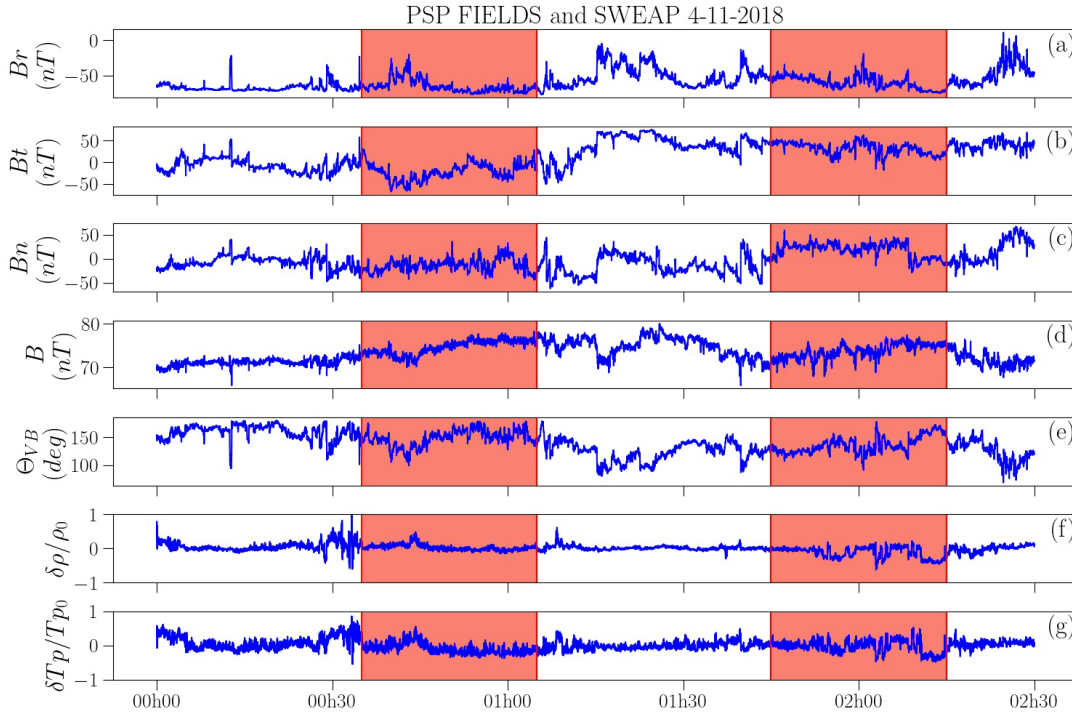


FIGURE 3.1 – Données PSP mesurées dans l’héliosphère interne le 4 Novembre 2018. (a) à (c) : les trois composantes du champ magnétique dans le système de représentation RTN. (d) : Norme du champs magnétique. (e) : angle entre le champ de vitesse du fluide et le champ magnétique. (f) et (g) : fluctuations de densité et température relative des protons. Les zones rouges représentent les intervalles utilisés pour le calculer des taux de cascade.

pouvons étudier l’impact des différents niveaux de fluctuation de densité sur le taux de cascade calculé avec les lois isentrope-isotherme, isentrope-polytrope et incompressible. L’estimation de taux de cascade nécessite des intervalles de durée supérieure à plusieurs fois le temps de corrélation des fluctuations turbulentes. Les 30 minutes d’intervalle temporel garantissent le respect de cette règle empirique. En effet, le temps de corrélation estimé par PARASHAR et al. 2020 pour ces données est autour de 10 min. Une autre règle empirique proposée par HADID, SAHRAOUI et GALTIER 2017 est de s’assurer que l’angle entre le champ magnétique et la vitesse reste relativement stationnaire, afin d’éviter de forte variations du taux de cascade et de maintenir la validité de la relation de Taylor. Cette relation permet de lier l’échelle spatiale à l’incrément temporelle par effet Doppler :  $\ell \sim \mathbf{v}_0 \tau$  avec  $\tau$  l’incrément temporel et l’indice 0 dans  $\mathbf{v}_0$  dénotant la moyenne de la quantité, ici  $\mathbf{v}$ , sur l’intervalle considéré. CITATION/INFOS. Cette règle est respectée dans les deux sous-intervalles comme le montre la ligne (e) de la figure 3.1.

### 3.2 Comparaison des lois incompressible vs compressible et des fermetures isentrope-isotherme vs isentrope-polytrope

Pour ce qui est de la forme de la loi exacte, l’utilisation d’une seule sonde impose deux autres hypothèses. La première correspond à la négligence des termes sources. Ces derniers ne peuvent pas être calculés à cause de leur dépendance en des dérivées locales ( $\nabla$  et

$\nabla'$ ) qui ne sont accessibles qu'avec des missions multi-sondes telles que MMS ou CLUSTER envoyées autour de la Terre (ANDRÉS, SAHRAOUI, GALTIER, HADID, FERRAND et al. 2019). Physiquement, une telle hypothèse pourrait avoir un impact significatif, mais d'après l'étude numérique de ANDRÉS, SAHRAOUI, GALTIER, HADID, DMITRUK et al. 2018 en turbulence MHD subsonique, seuls les termes flux écrit sous la forme de fonction de structure sont dominants, les termes sources et les termes hybrides sont négligeables ou se compensent. La deuxième hypothèse est celle d'isotropie des fluctuations qui permet d'intégrer tridimensionnellement la loi exacte dans une boule de rayon  $\ell$ , la norme de l'échelle incrémentale  $\ell$ . L'expression du taux de cascade calculée est alors :

$$\varepsilon = -\frac{3}{4|\mathbf{v}_0|\tau} < (\delta(\rho\mathbf{v})\cdot\delta\mathbf{v} + \delta(\rho\mathbf{v}_A)\cdot\delta\mathbf{v}_A + 2\delta\rho\delta u)\delta\mathbf{v} - (\delta(\rho\mathbf{v}_A)\cdot\delta\mathbf{v} + \delta(\rho\mathbf{v})\cdot\delta\mathbf{v}_A)\delta\mathbf{v}_A > \quad (3.1)$$

avec suivant les fermetures :

- incompressible :  $\rho = \rho_0$ , pas de  $u$  nécessaire
- isentrope-isotherme :  $u = c_s^2 \ln(\frac{\rho}{\rho_0})$  et  $\gamma = 1$
- isentrope-polytrophe ou adiabatique :  $u = \frac{c_s^2 - c_{s0}^2}{\gamma(\gamma-1)}$  et  $\gamma = 5/3$

Ces choix assurent une certaine cohérence entre les différentes fermetures dans le cas moyenné : si  $\rho = \rho_0$  alors  $u = 0$ . La vitesse du son est obtenue grâce à la relation des gaz parfaits :  $c_s^2 = \gamma k_B T_p / m_p$  avec  $k_B$ , la constante de Boltzmann et  $T_p$  et  $m_p$ , la température et la masse des protons. La contribution d'énergie interne sera notée  $F_2 = -\frac{3}{4|\mathbf{v}_0|\tau} < 2\delta\rho\delta u\delta\mathbf{v} >$  et les termes restant seront résumés sous l'appellation  $F_1$ . Ces derniers représentent les termes flux dit quasi-incompressible ou compressible Yaglom car ne s'annulant pas dans la loi PP98. L'impact de la fermeture thermodynamique n'est portée que par  $F_2$ .

Sur la figure 3.2 apparaissent les résultats pour les deux sous-intervalles, le quasi-incompressible à gauche et le plus compressible à droite. La première ligne montre l'estimation du taux de cascade avec la loi incompressible PP98 en bleu, la loi isentrope-isotherme en vert et adiabatique en rouge. Sur la deuxième ligne,  $F_2$  est comparé à  $F_1$  dans le cas isotherme (vert) et le cas adiabatique (rouge). Le ratio entre les  $F_2$  adiabatique ( $F_{2p}$ ) et isotherme ( $F_{2i}$ ) est donné sur la troisième ligne. L'intérêt de l'étude est cristallisé dans le niveau du taux de cascade (donné par la première ligne) et non son signe qui nécessite de plus importants intervalles pour statistiquement converger (COBURN et al. 2015; HADID, SAHRAOUI et GALTIER 2017). La question de l'inversion de la cascade potentiellement visualisée à travers le signe du taux ne peut donc pas être couverte par cette étude. Pour le premier intervalle, le signe montre des variations avant  $\tau \sim 10$  s et après  $\tau \sim 400$  s et reste constant au centre. On supposera donc que cette zone centrale correspond à la zone inertielle. À grande échelle, ces variations proviennent de  $F_1$  et se reflètent dans la brusque augmentation apparaissant sur la deuxième ligne de graphiques. Pour le second intervalle, le signe ne varie pas contrairement à ce que pourrait laisser présager le creux apparaissant en  $\tau \sim 50$  s. Malgré tout, nous limitons l'interprétation d'une zone inertielle à l'intervalle  $\tau \in [50; 800]$  s où le niveau reste quasiment constant. Figure 3.2(a2) met en avant le rôle de la prise en compte de la compression dans le taux de cascade : les taux de cascade compressible sont translatés d'un facteur 3 par rapport au taux incompressible alors que Figure 3.2(a1) provenant de données bien moins compressible montre des niveaux similaires. Cette observation coïncide avec de précédentes issues de données du vent solaire (BANERJEE, HADID et al. 2016; HADID, SAHRAOUI et GALTIER 2017; ANDRÉS, SAHRAOUI, HADID et al. 2021). Par contre, les deux modèles

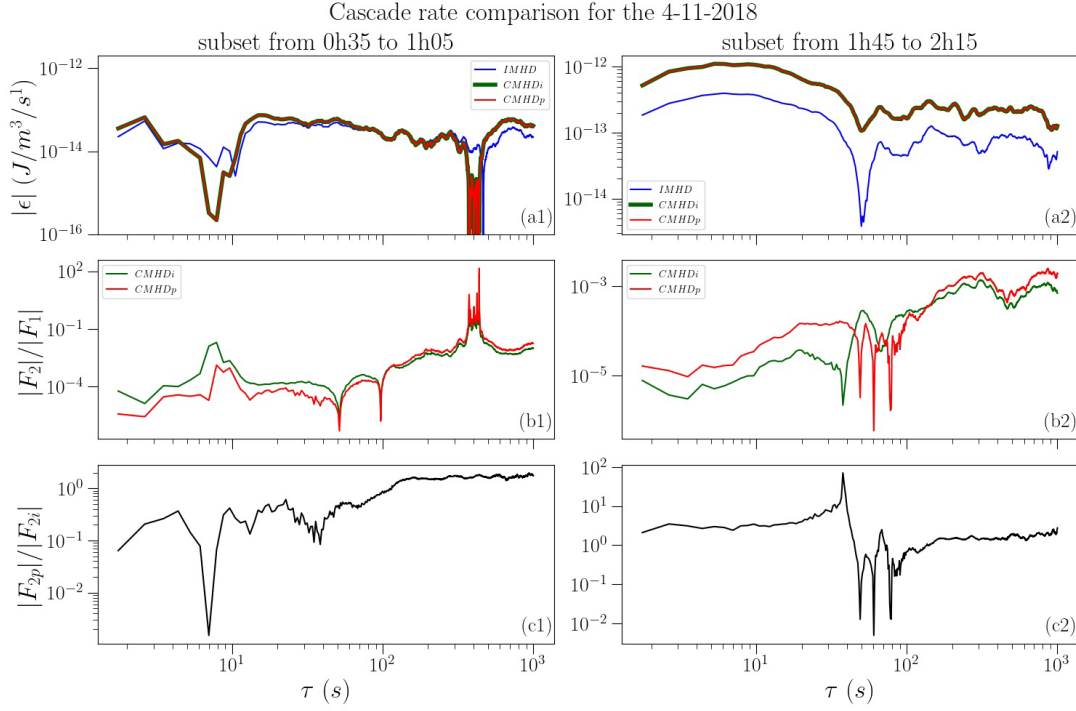


FIGURE 3.2 – Comparaison des taux de cascade obtenus avec différentes lois exactes pour le sous-intervalle  $\{00h35-01h05\}$  à gauche et  $\{01h45-02h15\}$  à droite. (a1)–(a2) : valeur absolue des taux de cascade obtenus avec les modèles incompressible en bleu, compressible isentrope-isotherme en vert et adiabatique en rouge. (b1)–(b2) : ratio entre la contribution d’énergie interne  $F_2$  et celle quasi-incompressible  $F_1$  dans le cas isotherme (vert) et le cas adiabatique (rouge). (c1)–(c2) : ratio entre les contributions de l’énergie interne adiabatique  $F_{2p}$  et isotherme  $F_{2i}$ .

compressibles montrent les mêmes résultats. La raison de cette convergence est révélée par les graphiques 3.2(b1)–(b2) : la contribution de  $F_2$  est bien négligeable devant celle de  $F_1$ . Le facteur 3 observé précédemment provient donc de la prise en compte de la densité dans  $F_1$ . Même si l’impact du terme dépendant de la fermeture à une importance moindre dans le taux total, nous pouvons en examiner l’effet dans le graphique 3.2(c1)–(c2). À large échelles ( $\tau > 100$  s), les deux fermetures apportent une contribution similaire tandis qu’à plus faible échelle (hors de la suspectée zone inertielle pour le deuxième intervalle), un ordre de grandeur de différence apparaît. Dans le cas du premier intervalle, la fermeture isotherme contribue plus que l’adiabatique tandis que dans le cas du deuxième intervalle, c’est le contraire. Une interprétation complète de cette différence de comportement ne peut être apportée avec cette étude de cas et nécessite une analyse statistique (effectuée ultérieurement par BRODIANO, ANDRÉS et DMITRUK 2022).

Cette étude de cas a permis de visualiser l’impact de la compression sur l’estimation du taux de cascade et l’apport potentiel d’une fermeture par rapport à une autre dans des données réelles. Cet apport pourrait d’ailleurs être plus important dans la magnétogaine, où les mesures in-situ ont révélé de plus importantes fluctuations de densité (CITATION). Une autre contribution pourrait y être étudiée grâce aux constellations de satellites présentes : celles des termes sources, impossible à analyser ici. Par la suite, il serait aussi intéressant d’étudier les termes flux dépendant des pressions magnétique et thermodynamique présents dans les autres formulations ayant été analytiquement déri-

vées ultérieurement.

### 3.3 Synthèse de l'étude de cas observationnelle dans les données de PSP

**Données choisies :** expérience SWEAP et FIELDS présents sur la sonde PSP, mesures relevées le 4 Novembre 2018, comparaison d'un intervalle quasi-incopressible et d'un plus compressible.

**Hypothèses nécessaires à l'utilisation de données in-situ issues d'une mission composée d'une seule sonde pour l'estimation de taux de cascade :**

- taille d'intervalle supérieur à plusieurs fois le temps de corrélation des fluctuations turbulentes.
- hypothèse de Taylor,  $\ell \sim \mathbf{v}_0 \tau$ , valide si angle  $\theta_{VB}$  quasi-stationnaire.
- négligence des termes sources dans la loi exacte, valide si vent subsonique et avec la formulation de loi étudiée ici.
- intégration isotrope de la loi exacte, validité à nuancer tant que l'angle  $\theta_{VB}$  reste quasi-stationnaire.

**Loi exacte analysée :**  $\varepsilon = F_1 + F_2$  avec

$$F_1 = -\frac{3}{4|\mathbf{v}_0|\tau} < (\delta(\rho\mathbf{v}) \cdot \delta\mathbf{v} + \delta(\rho\mathbf{v}_A) \cdot \delta\mathbf{v}_A)\delta\mathbf{v} - (\delta(\rho\mathbf{v}_A) \cdot \delta\mathbf{v} + \delta(\rho\mathbf{v}) \cdot \delta\mathbf{v}_A)\delta\mathbf{v}_A >$$

$$F_2 = -\frac{3}{4|\mathbf{v}_0|\tau} < 2\delta\rho\delta u\delta\mathbf{v} >$$

**Fermetures :**

- incompressible :  $\rho = \rho_0$ , pas de  $u$  nécessaire
- isentrope-isotherme :  $u = c_s^2 \ln(\frac{\rho}{\rho_0})$  et  $\gamma = 1$
- isentrope-polytrope ou adiabatique :  $u = \frac{c_s^2 - c_{s0}^2}{\gamma(\gamma-1)}$  et  $\gamma = 5/3$

**Conclusion :**

- apport substantiel de la compression via la densité dans les termes de type  $F_1$  indépendant de la fermeture
- apport de la fermeture important dans  $F_2$  à petite échelle
- $F_2$  négligeable devant  $F_1$  pour les fermtures compressibles et dans les cas analysés

Ces résultats sont publiés dans SIMON et SAHRAOUI 2021.



Depuis 1998 et la loi exacte de POLITANO et POUQUET 1998a étendant aux modèles fluides magnétisés incompressibles, la théorie de Kolmogorov décrivant la cascade turbulence forte à travers des lois exactes, de multiples extensions ont été proposées prenant en compte la compressibilité.

Dans cette partie, nous nous sommes concentrés sur l'effet de fermetures thermodynamiques dépendant de pression isotrope. Dans un premier chapitre, nous avons utilisé la théorie incompressible afin d'illustrer simplement l'application de la théorie de Kolmogorov à des plasmas. Le second chapitre pose le problème de la compressibilité dans l'étude de la turbulence et y répond de manière analytique. La stratégie mise en œuvre ne repose pas sur une fermeture thermodynamique, a contrario de celles entreprises dans la littérature (GALTIER et BANERJEE 2011 ; BANERJEE et GALTIER 2013 ; BANERJEE et GALTIER 2014 ; ANDRÉS et SAHRAOUI 2017), mais plutôt, sur l'équation de densité d'énergie interne. La loi exacte résultante obtient ainsi un caractère général et la fermeture ne devient qu'un détail, une hypothèse, à ne considérer qu'à la fin du calcul en fonction du besoin. La formulation finale de la loi exacte, dépendant de termes flux rappelant ceux de l'équation de densité d'énergie totale, n'a pas été obtenue du premier coup mais plutôt par tâtonnement en fonction de l'usage. Diverses formulations ont ainsi vu le jour.

La première inspirée du travail dans le cadre isentrope-isotherme de ANDRÉS, SAHRAOUI, GALTIER, HADID, DMITRUK et al. 2018 a permis l'étude comparative, dans deux jeux de données issus de la mission PSP composée d'une seule sonde envoyée en orbite autour du Soleil, de l'impact de la compression et des fermetures isentropes sur la cascade turbulente. Cette étude fait l'objet du troisième chapitre. L'intérêt de cette formulation est que les termes impossibles à calculer à cause des caractéristiques de la mission ont préalablement été numériquement démontrés comme négligeable dans le taux de cascade total. La deuxième formulation de la loi exacte a initialement vu le jour comme une conséquence du travail analytique qui sera présenté dans la partie suivante relaxant l'isotropie de pression, mais le résultat, dépendant de  $p/\rho$ , peut s'avérer plus adapté à l'application d'une fermeture comme on a pu le voir dans la dernière partie du deuxième chapitre. La troisième et dernière, celle que l'on a choisie d'utiliser ici pour présenter la loi générale, est la plus récente et provient de la relaxation de l'hypothèse d'isentropie et de la prise en compte du flux de chaleur dans l'équation d'énergie interne qui s'est révélée nécessaire lors de l'étude numérique qui sera présentée dans la troisième partie. À travers le résumé de ces résultats obtenus avec pression isotrope, nous introduisons donc la structure chronologique du travail présenté ici, la méthode scientifique mise en œuvre et les points

méthodologiques utilisés.

En termes de physique, cette partie illustre l'impact de la compression dans sa forme la plus "simple" : une densité variable, une pression isotrope, une énergie interne et un flux de chaleur souvent négligé. Ces grandeurs nous permettent de fermer le modèle fluide par des relations basées sur des hypothèses thermodynamiques telles que l'isentropie, l'isothermie ou la polytropie. À travers l'analyse de ces hypothèses, quatre possibilités de fermeture ont émergées. La première, isentrope-isotherme est la première à avoir été utilisée dans l'extension des lois exactes (GALTIER et BANERJEE 2011 ; BANERJEE et GALTIER 2013 ; ANDRÉS et SAHRAOUI 2017). La deuxième, isentrope-polytrophe, introduite en HD (BANERJEE et GALTIER 2014), est celle qui nous a permis de généraliser la méthode d'obtention des lois exactes à toutes fermetures, elle prend en compte l'existence d'un  $\gamma$  et reflète un peu mieux la pluralité de transformations thermodynamiques observée dans les plasmas spatiaux et astrophysiques. La troisième, polytropique basée sur un  $\gamma$  et un  $\sigma$ , lie le flux de chaleur au travail de pression et étend un peu plus loin les possibilités d'application des lois exactes. De la dernière, non-isentrope isotherme, émerge la loi exacte compressible qui semble la plus simple malgré la prise en compte des flux de chaleur.

Pour ce qui est de l'impact de la compression et des fermetures observé dans l'étude du taux de cascade dans le vent solaire, l'étude de cas comparative montre que la compression peut jouer un rôle important dans la cascade, mais, dans les cas étudiés, la fermeture isentrope-polytrophe ou isentrope-isotherme a peu d'impact malgré le rôle qu'elle joue à travers l'énergie interne. Les termes dominants s'avèrent en effet être ceux n'en dépendant pas. On peut aussi les interpréter comme ceux subsistant dans le cas d'une fermeture non-isentrope isotherme. Ce travail pose ainsi les bases d'une étude observationnelle, plus générale, complète et systématique, de l'impact de compression et des fermetures sur la turbulence dans les plasmas spatiaux. Cette étude est laissée au futur car le vent solaire ayant la particularité d'être peu collisionnel et magnétisé, une autre question, un autre type de fermeture se sont posés et ont orienté le travail dans une autre direction : celle de l'effet de l'anisotropie de pression.