

---

## PARTIE II : Etude analytique de l'effet de l'anisotropie de pression

---

*Quelle citation ?*  
*Auteur*



Les fonctions de distributions des ions observées dans le vent solaire montrent une différence de largeur entre les directions parallèle et perpendiculaires au champ magnétique (CASSAK et BARBHUIYA 2022 ; CASSAK, BARBHUIYA et WELDON 2022). Cette observation s'explique par l'existence d'un champ magnétique, favorisant une certaine direction, et par le manque de collisions dans le milieu. Ce type d'anisotropie a tout d'abord été modélisé par CHEW, GOLDBERGER et LOW 1956 à travers une pression de forme tensorielle et diagonale (gyrotrope) et supposant l'isentropie du modèle. Ce modèle, nommé CGL en hommage aux auteurs, sera présenté plus en détail dans le chapitre 1 de cette deuxième partie. Il y sera accompagné de l'extension proposée pour la théorie de Kolmogorov prenant en compte un tenseur de pression. Dans le chapitre 2, nous nous poserons la question suivante : l'incompressibilité est-elle compatible avec la gyrotropie de pression ? Et dans le 3, nous sortirons du cadre idéal de l'équation d'induction pour tendre vers le modèle bi-fluide.

Dans cette partie qui concentre le cœur analytique du travail effectué, nous conserverons l'hypothèse d'une zone inertielle isentrope et nous ne regarderons pas en détail les termes non gyrotrope du tenseur de pression.



## PARTIE II : CHAPITRE 1

# LOI EXACTE POUR LE MODÈLE CGL

### Sommaire

1.1	D'un tenseur de pression dans le modèle fluide au modèle CGL . . . . .	51
1.2	Instabilités linéaires et potentiel impact sur la turbulence du vent solaire . . . . .	53
1.3	Loi exacte générale pour tout type de pression et application au modèle CGL . . . . .	55
1.4	Synthèse de l'étude analytique de turbulence compressible avec pression tensorielle et modèle CGL . . . . .	60

Dans le vent solaire, utiliser un modèle MHD compressible avec pression isotrope peut s'avérer ardue à justifier et devient injustifiable dès que l'on aborde les propriétés de fort champ magnétique ou de faibles collisions. Il faut prendre en compte, à minima, une pression gyrotrope par exemple en utilisant le modèle dit «CGL» du nom des auteurs de l'article fondateur CHEW, GOLDBERGER et LOW 1956. C'est la direction que l'on propose via ce chapitre pour notre étude de la cascade turbulente : décrire la cascade turbulente d'énergie totale à travers une loi exacte associée au modèle CGL. Encore une fois, on ne réduira le champ d'application qu'après avoir obtenue une loi plus générale, valable pour tout tenseur de pression. Les nouveaux résultats exposés ici ont fait l'objet principal de l'article SIMON et SAHRAOUI 2022.

## 1.1 D'un tenseur de pression dans le modèle fluide au modèle CGL

Dans le cadre général défini à partir de l'équation de Vlasov et menant au modèle MHD, la pression et le flux de chaleur sont défini tensoriellement, tel que des tenseurs de dimension  $3 \times 3$  et  $3 \times 3 \times 3$ . La pression,  $\overline{P}$ , est un tenseur symétrique obtenu en effectuant le produit de deux vecteurs vitesse tandis que le flux de chaleur s'obtient à partir du produit de trois vecteurs vitesse. Dans cette partie, nous négligerons ce dernier, nous plaçant ainsi dans une situation similaire à la fermeture isentropique. Cette hypothèse est la première du modèle CGL. Elle sera relaxée dans la partie III.

Fondamentalement, le modèle CGL n'est pas un modèle mono-fluide défini en prenant le même point de vue que pour le modèle MHD, même si les équations sont similaires. Dans le modèle MHD, les électrons sont accrochés aux ions et aux lignes de champ magnétique. Dans le modèle CGL, seul le mouvement des ions est pris en compte, les électrons sont considérés comme froids, immobiles, et n'agissent que via le courant grâce à leur charge. Dans le premier cas, le fluide est modélisé comme des particules de fluides neutres, dans le deuxième, c'est un mono-fluide d'ions dans un environnement froid mais neutralisant. Nous reviendrons sur ce point dans le chapitre 3.

Dans la partie I, la pression était supposée isotrope, c'est à dire  $\bar{\mathbf{P}} = p\bar{\mathbf{I}}$  avec  $\bar{\mathbf{I}}$  le tenseur identité. Dans le modèle CGL, elle est définie comme gyrotrope et alignée sur le champ magnétique (de direction  $\mathbf{b}$ ), c'est-à-dire que l'on considère 2 pressions, une dite parallèle  $p_{\parallel}$  et une perpendiculaire  $p_{\perp}$ . Dans un repère cartésien orienté tel que  $\mathbf{b}$  coïncide avec la direction  $\mathbf{e}_z$ , le tenseur gyrotrope devient :

$$\bar{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} p_{\perp} & 0 & 0 \\ 0 & p_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & p_{\parallel} \end{pmatrix}$$

Plus généralement, on peut l'écrire :  $\bar{\mathbf{P}} = p_{\perp}\bar{\mathbf{I}} + (p_{\parallel} - p_{\perp})\mathbf{b}\mathbf{b}$ . La part isotrope de la pression est obtenue en faisant le produit dual ":" entre  $\bar{\mathbf{P}}$  et  $\bar{\mathbf{I}}$ , ce qui revient à considérer la trace de  $\bar{\mathbf{P}}$ . Ainsi :  $p = \frac{1}{3}\bar{\mathbf{P}} : \bar{\mathbf{I}} = \frac{1}{3}(2p_{\perp} + p_{\parallel})$ . Cela permet de réécrire le tenseur de pression en séparant la part isotrope de la composante dite anisotrope :  $\bar{\mathbf{P}} = p\bar{\mathbf{I}} + (p_{\parallel} - p_{\perp})(\mathbf{b}\mathbf{b} - \frac{1}{3}\bar{\mathbf{I}})$ , on notera la composante anisotrope  $\bar{\Pi}$ . Dans le cas général non-gyrotrope, d'autres composantes non isotropes sont à ajouter. On n'abordera pas leur détail et on les résumera simplement par la notation  $\bar{\Pi}_{ng}$ . D'après CASSAK et BARBHUIYA 2022,  $\bar{\Pi} = (p_{\parallel} - p_{\perp})(\mathbf{b}\mathbf{b} - \frac{1}{3}\bar{\mathbf{I}}) + \bar{\Pi}_{ng}$  contribue à la déformation incompressible du fluide par compression/expansion et cisaillement à travers le terme  $\bar{\mathbf{P}} : \nabla \mathbf{v}$  tandis que  $p$  résulte en sa dilatation, compressible. En mécanique des fluides, ces termes de pression anisotrope sont souvent une réécriture des termes de dissipation visqueuse d'où leur interprétation dissipative.

On définira le modèle général fermé tel que dépendant des moments  $\rho, \mathbf{v}, \bar{\mathbf{P}}$  :

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (\text{II.1.1})$$

$$\partial_t (\rho \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v} - \rho \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A) + \nabla \bar{\mathbf{P}}_* = 0 \quad (\text{II.1.2})$$

$$\partial_t \bar{\mathbf{P}} + \nabla \cdot (\mathbf{v} \bar{\mathbf{P}}) + (\bar{\mathbf{P}} \cdot \nabla \mathbf{v})^S + \Omega_g (\mathbf{b} \times \bar{\Pi}_{ng})^S = 0 \quad (\text{II.1.3})$$

$$\partial_t \mathbf{v}_A - \nabla \cdot (\mathbf{v}_A \mathbf{v} - \mathbf{v} \mathbf{v}_A) + \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{v}_A - \frac{\mathbf{v}_A}{2} \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (\text{II.1.4})$$

sachant que  $\mathbf{b} \times \bar{\mathbf{I}} = 0$  et  $\mathbf{b} \times \mathbf{b}\mathbf{b} = 0$ , et en notant  $\bar{\mathbf{P}}_* = \bar{\mathbf{P}} + p_m \bar{\mathbf{I}}$ , le tenseur de pression totale. On utilisera ce modèle pour obtenir une loi exacte générale sur l'énergie totale applicable sous l'hypothèse d'une cascade isentrope quelque soit la forme de la pression. Comme dans le cas avec pression isotrope, l'équation II.1.3 ne servira pas complètement : seule sa trace, sa composante isotrope, obtenue en effectuant le produit dual avec l'identité et liée à l'énergie interne sera considérée, c'est-à-dire :

$$\partial_t p + \nabla \cdot (p \mathbf{v}) + \frac{2}{3} \bar{\mathbf{P}} : \nabla \mathbf{v} = 0 \quad (\text{II.1.5})$$

puisque  $\bar{\Pi}_{ng}$  étant symétrique  $(\mathbf{b} \times \bar{\Pi}) : \bar{\mathbf{I}} = 0$ . L'énergie interne sera définie par  $\rho u = \frac{1}{2} \bar{\mathbf{P}}$  :

$\bar{\mathbf{I}} = \frac{3}{2}p = \frac{1}{2}(2p_{\perp} + p_{\parallel})$ , la dernière formulation étant associée au cas particulier gyrotrope (HAZELTINE, MAHAJAN et MORRISON 2013). On retrouve donc l'équation (I.2.29) écrit pour un tenseur de pression général et avec l'hypothèse  $\nabla \cdot \mathbf{q} = 0$  :

$$\partial_t(\rho u) + \nabla \cdot (\rho u \mathbf{v}) + \bar{\mathbf{P}} : \nabla \mathbf{v} = 0 \quad (\text{II.1.6})$$

Cette équation est assez générale et peut-être obtenue indépendamment de l'expression de  $u$  en fonction de  $p$  et de l'équation (II.1.3), avec un bilan énergétique, comme celui que l'on a effectué dans le chapitre I.2 (ECKART 1940 ; HAZELTINE, MAHAJAN et MORRISON 2013).

Dans le modèle CGL, l'équation tensorielle de pression prend la forme de deux équations (voir HUNANA et al. 2019 pour les détails de dérivations) :

$$\partial_t p_{\parallel} + \nabla \cdot (p_{\parallel} \mathbf{v}) + 2p_{\parallel} \mathbf{b}\mathbf{b} : \nabla \mathbf{v} = 0 \quad (\text{II.1.7})$$

$$\partial_t p_{\perp} + \nabla \cdot (p_{\perp} \mathbf{v}) + p_{\perp} \nabla \cdot \mathbf{v} - p_{\perp} \mathbf{b}\mathbf{b} : \nabla \mathbf{v} = 0 \quad (\text{II.1.8})$$

En les sommant, on retrouve l'équation d'énergie interne. En les manipulant avec l'équation d'induction, ces deux équations de pressions peuvent s'écrire dans le cadre de l'hypothèse d'une loi d'Ohm idéale, sous les formes conservatives :

$$d_t\left(\frac{p_{\parallel} \mathbf{v}_A^2}{\rho^2}\right) = 0 \quad d_t\left(\frac{p_{\perp}}{\rho^{3/2} |\mathbf{v}_A|}\right) \quad (\text{II.1.9})$$

De ce lien, entre  $p_{\parallel, \perp}$  et des puissances de  $\rho$ , proviennent la deuxième appellation du modèle, «bi-adiabatique», et les formes explicites des pressions :  $p_{\parallel} \propto \frac{\rho^2}{v_A^2}$  et  $p_{\perp} \propto \rho^{3/2} |\mathbf{v}_A|$ .

## 1.2 Instabilités linéaires et potentiel impact sur la turbulence du vent solaire

Contrairement au modèle MHD, le modèle gyrotrope a la particularité d'être potentiellement linéairement instable. Sa linéarisation (voir méthode dans le chapitre I.1 et pour plus de détail le chapitre 3 de HUNANA et al. 2019) nous donne l'équation de dispersion suivante :

$$\begin{pmatrix} \frac{\omega^2}{v_{A0}^2 k_{\parallel}^2} - (\beta_{\parallel 0} a_{p0} + 1) \frac{k_{\perp}^2}{k_{\parallel}^2} + (\frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0}) - 1) & 0 & -\frac{\beta_{\parallel 0}}{2} a_{p0} \frac{k_{\perp}}{k_{\parallel}} \\ 0 & \frac{\omega^2}{v_{A0}^2 k_{\parallel}^2} + (\frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0}) - 1) & 0 \\ -\frac{\beta_{\parallel 0}}{2} a_{p0} \frac{k_{\perp}}{k_{\parallel}} & 0 & \frac{\omega^2}{v_{A0}^2 k_{\parallel}^2} - \frac{3}{2} \beta_{\parallel 0} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_{x1} \\ v_{y1} \\ v_{z1} \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{II.1.10})$$

où  $a_{p0} = \frac{p_{\perp 0}}{p_{\parallel 0}}$  est appelé taux d'anisotropie et  $\beta_{\parallel 0} = \frac{2p_{\parallel 0}}{\rho_0 v_{A0}^2}$  est le paramètre  $\beta$  linéaire du plasma calculé avec la pression parallèle. La relation de dispersion s'écrit alors :

$$0 = \left( \frac{\omega^2}{k_{\parallel}^2 v_{A0}^2} - 1 + \frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0}) \right) \left( \frac{\omega^2}{k^2 v_{A0}^2} - \frac{1}{2}(A \pm \sqrt{A^2 - 4B}) \right) \quad (\text{II.1.11})$$

avec

$$\begin{aligned}
A &= 1 + \beta_{\parallel 0} a_{p0} \left(1 - \frac{1}{2} \cos^2 \theta\right) + \beta_{\parallel 0} \cos^2 \theta \\
B &= \frac{3}{2} \beta_{\parallel 0} \cos^2 \theta \left( \left(1 - \frac{\beta_{\parallel 0}}{2} (1 - a_{p0})\right) \cos^2 \theta + \left(1 + \beta_{\parallel 0} a_{p0} \left(1 - \frac{1}{6} a_{p0}\right)\right) \sin^2 \theta \right) \\
&= \frac{3}{2} \beta_{\parallel 0} \cos^2 \theta \left(1 + \beta_{\parallel 0} a_{p0} \left(1 - \frac{1}{2} \cos^2 \theta\right) - \frac{\beta_{\parallel 0}}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{6} \beta_{\parallel 0} a_{p0}^2 \sin^2 \theta\right) \\
A^2 - 4B &= \left(1 + \beta_{\parallel 0} a_{p0} \left(1 - \frac{1}{2} \cos^2 \theta\right) - \beta_{\parallel 0} \cos^2 \theta\right)^2 + 3\beta_{\parallel 0}^2 \cos^4 \theta + \beta_{\parallel 0} a_{p0}^2 \sin^2 \theta
\end{aligned}$$

Dans le premier mode  $\frac{\omega^2}{k_{\parallel}^2 v_{A0}^2} + \left(\frac{\beta_{\parallel 0}}{2} (1 - a_{p0}) - 1\right) = 0$ , on retrouve le mode d'Alfvén incompressible si  $a_{p0} = 1$ . Ce mode est instable si  $1 - \frac{\beta_{\parallel 0}}{2} (1 - a_{p0}) < 0$ . Cette instabilité est l'instabilité firehose («lance d'incendie» ou «tuyau d'arrosage»). Son nom provient du comportement des tubes de flux magnétique qui ressemble à celui d'un tuyau d'arrosage devenu fou après avoir été lâché par son utilisateur : la pression parallèle qui joue le rôle de la force centrifuge est alors trop importante et n'est plus compensée par les pressions perpendiculaire (force de pression thermique extérieure au tuyau d'arrosage) et magnétique (tension du tube).

Les deux autres modes visibles dans la relation (II.1.11) sont les modes magnétosoniques rapide (+) et lent (−) du modèle CGL. Même en y considérant  $a_{p0} = 1$ , il est impossible de retrouver les modes magnétosoniques MHD dans les expressions des modes CGL. Cela est dû à l'utilisation des équations de pression dans le calcul pour obtenir les relations de dispersion. On ne pourra donc pas s'attendre à retrouver le comportement MHD dans des simulations CGL initialisée à  $a_{p0} = 1$ . En effet, comme cela a été remarqué par HUNANA et al. 2019 et comme on pourra l'observer dans la partie ??, de l'anisotropie de pression pourra s'y développer. D'après l'expression de  $A^2 - 4B$ , le mode rapide va rester stable. Le mode lent peut quant à lui devenir instable si  $B < 0$ . Cela peut arriver dans deux cas de figure :

- $1 - \frac{\beta_{\parallel 0}}{2} (1 - a_{p0}) < 0$  correspondant à l'instabilité firehose, qui est dans ce cas de figure nommée firehose parallèle puisque qu'elle apparaît principalement si  $k_{\parallel} \gg k_{\perp}$ ,
- $1 + \beta_{\parallel 0} a_{p0} \left(1 - \frac{1}{6} a_{p0}\right) < 0$  correspondant à l'instabilité miroir.

L'expression du critère d'instabilité miroir est légèrement différente de celle provenant de la théorie linéaire cinétique à cause du facteur  $1/6$ . Ce facteur d'erreur translate la condition nécessaire pour qu'il y ait des instabilités miroir à  $a_{p0} > 6$  au lieu de  $a_{p0} > 1$  comme on peut le voir sur la figure II.1.1. La condition nécessaire pour qu'il y ait apparition d'instabilité firehose est, quant à elle,  $a_{p0} < 1$  et en accord avec la théorie cinétique. Dans le vent solaire, ces critères d'instabilité semblent avoir un impact majeur puisque l'état du plasma semble maintenu, sur les diagrammes  $a_p - \beta_{\parallel}$ , dans une zone qu'ils semblent délimiter comme l'a observé HELLINGER, TRÁVNÍČEK et al. 2006 dans les données relevées par la sonde WIND.

Dans le chapitre I.1, nous avons rappelé l'importance des ondes d'Alfvén dans les théories turbulentes et dans le chapitre I.2, nous avons rappelé que le sujet de l'impact des ondes compressibles MHD est toujours ouvert (BRODIANO, ANDRÉS et DMITRUK 2021). On peut donc s'attendre à ce que ces instabilités et la cascade turbulente s'influencent. Cela semble en effet être le cas si l'on regarde les résultats de l'étude de la température isotrope (LIU et al. 2006), des fluctuations magnétiques et de l'âge collisionnel du plasma (BALE, KASPER et al. 2009) et du taux de cascade incompressible OSMAN et al. 2013



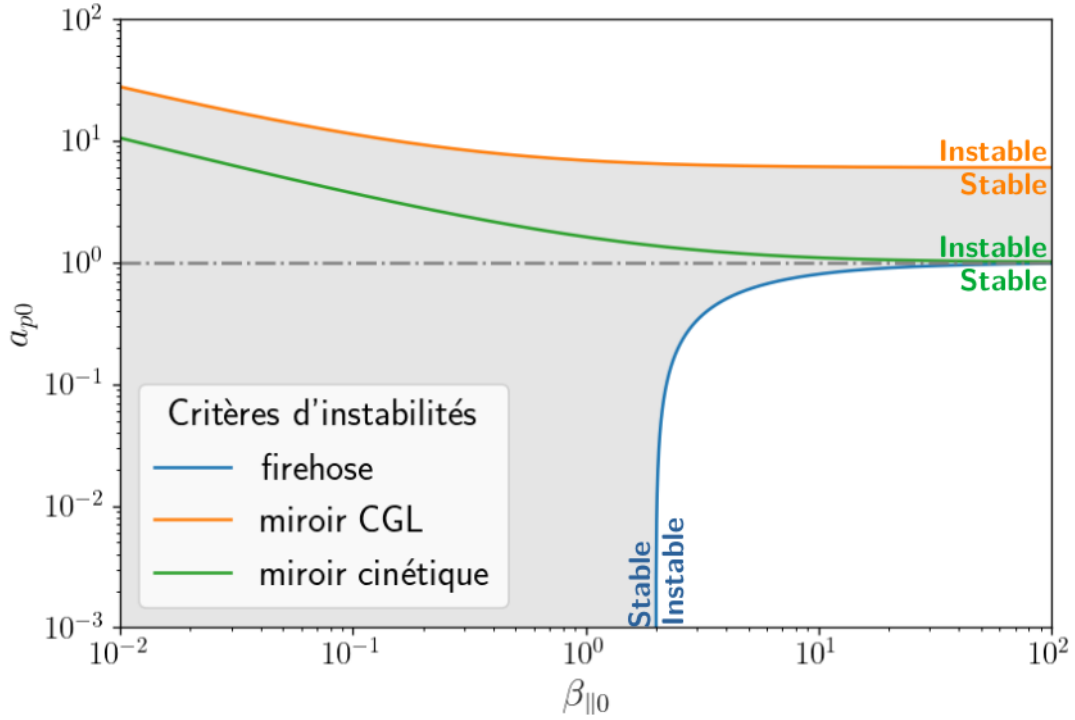


FIGURE II.1.1 – Zones de stabilité du modèle CGL (zone grisée). Critères d'instabilité firehose (bleu), miroir (orange) et miroir cinétique. Horizontale  $a_p = 1$  en gris.

dans les données relevées par WIND et ceux du taux compressible isotherme observés par LZ HADID, SAHRAOUI, GALTIER et SY HUANG 2018 dans les données des missions THEMIS et CLUSTER : sur les diagrammes  $a_p - \beta_{||}$ , près des frontières des zones instables, la température des protons semble plus chaude, le champ magnétique, plus fluctuant, le plasma plus jeune et les taux de cascade plus importants. Mais la relation entre instabilités et turbulence reste à clarifier : est-ce que le plasma est plus chaud et turbulent parcequ'il est plus jeunes ou est-ce que les instabilités jouent un rôle dans son chauffage ? Et est-ce que ce chauffage s'effectue via la cascade turbulente ? Ces questions viennent motiver l'obtention d'une loi exacte pour un écoulement avec pression gyrotrope permettant de calculer un taux de cascade plus réaliste, potentiellement lié aux anisotropies de pressions, et de mettre en place un cadre d'étude rigoureux afin d'étudier l'influence des instabilités linéaires sur la cascade non-linéaire turbulente.

### 1.3 Loi exacte générale pour tout type de pression et application au modèle CGL

Pour obtenir une loi exacte pour le modèle CGL, nous avons utilisé la méthode mise en place dans le chapitre I.3 : prendre en compte l'équation d'énergie interne (II.1.6) et non la forme explicite des pressions parallèle et perpendiculaire (II.1.9). Le modèle utilisé

est donc :

$$\partial_t \rho = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \quad (\text{II.1.12})$$

$$\partial_t \mathbf{v} = -\nabla \cdot (\mathbf{v} \mathbf{v}) + \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A) - \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}}_* + \mathbf{f}_c + \mathbf{d}_c \quad (\text{II.1.13})$$

$$\partial_t \mathbf{v}_A = \nabla \cdot (\mathbf{v}_A \mathbf{v} - \mathbf{v} \mathbf{v}_A) - \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{v}_A + \frac{\mathbf{v}_A}{2} \nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{f}_m + \mathbf{d}_m \quad (\text{II.1.14})$$

$$\partial_t u = -\nabla \cdot (u \mathbf{v}) + u \nabla \cdot \mathbf{v} - \frac{\overline{\mathbf{P}}}{\rho} : \nabla \mathbf{v} \quad (\text{II.1.15})$$

Toujours de manière cohérente avec les choix effectués dans le chapitre I.3, la fonction de corrélation d'énergie totale choisie est :  $\mathcal{R} = \mathcal{R}_c + \mathcal{R}_m + \mathcal{R}_u$  avec  $\mathcal{R}_c = \langle \frac{1}{4}(\rho' + \rho) \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v} \rangle$ ,  $\mathcal{R}_m = \langle \frac{1}{4}(\rho' + \rho) \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A \rangle$  et  $\mathcal{R}_u = \frac{1}{2} \langle \rho' u + \rho u' \rangle$ .

Et en appliquant la même méthode que celle utilisée pour obtenir (I.3.7), (I.3.8) et (I.3.9), on obtient l'évolution temporelle des fonctions de corrélation associées à chaque canal énergétique :

— Canal d'énergie cinétique :  $\mathcal{R}_c = \langle (\rho' + \rho) \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v} \rangle / 4$

$$\begin{aligned} 4\partial_t \mathcal{R}_c &= \nabla_{\ell} \cdot \langle \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{v} \delta \mathbf{v} - (\delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \delta \mathbf{v} \delta \mathbf{v}_A + \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{v}_A \delta \mathbf{v}_A) \rangle \\ &\quad + \nabla_{\ell} \cdot \langle \rho' \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v} \mathbf{v}_A - \rho \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}' \mathbf{v}'_A - \rho' \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}_A \mathbf{v}'_A + \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'_A \mathbf{v}_A \rangle \\ &\quad + \langle \rho \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v} \nabla' \cdot \mathbf{v}' - \rho' \mathbf{v}' \cdot \delta \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{v} + 2\rho' \mathbf{v}' \cdot \delta \mathbf{v}_A \nabla \cdot \mathbf{v}_A - 2\rho \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v}_A \nabla' \cdot \mathbf{v}'_A \rangle \\ &\quad + \nabla_{\ell} \cdot \langle (\rho + \rho') \frac{\overline{\mathbf{P}}_*}{\rho} \cdot \mathbf{v}' - (\rho' + \rho) \frac{\overline{\mathbf{P}}'}{\rho'} \cdot \mathbf{v} \rangle \\ &\quad - \langle \frac{\rho'}{\rho} \mathbf{v}' \cdot \overline{\mathbf{P}}_* \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} + \frac{\rho}{\rho'} \mathbf{v} \cdot \overline{\mathbf{P}}' \cdot \frac{\nabla' \rho'}{\rho'} \rangle \\ &\quad + \langle (\rho' + \rho)(\mathbf{v} \cdot \mathbf{f}'_c + \mathbf{v}' \cdot \mathbf{f}_c) \rangle + \langle (\rho' + \rho)(\mathbf{v} \cdot \mathbf{d}'_c + \mathbf{v}' \cdot \mathbf{d}_c) \rangle \end{aligned} \quad (\text{II.1.16})$$

— Canal d'énergie magnétique :  $\mathcal{R}_m = \langle (\rho' + \rho) \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A \rangle / 4$

$$\begin{aligned} 4\partial_t \mathcal{R}_m &= \nabla_{\ell} \cdot \langle \delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \delta \mathbf{v}_A \delta \mathbf{v} \rangle \\ &\quad - \nabla_{\ell} \cdot \langle \rho' \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v} \mathbf{v}_A - \rho \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}' \mathbf{v}'_A - \rho' \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}_A \mathbf{v}'_A + \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'_A \mathbf{v}_A \rangle \\ &\quad + \langle (\rho \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{v}_A - \frac{1}{2}(\rho' + \rho) \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A) \nabla' \cdot \mathbf{v}' \rangle \\ &\quad - \langle (\rho' \mathbf{v}'_A \cdot \delta \mathbf{v}_A + \frac{1}{2}(\rho' + \rho) \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A) \nabla \cdot \mathbf{v} \rangle \\ &\quad + \langle (\rho' \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v} - \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'_A) \nabla \cdot \mathbf{v}_A \rangle + \langle (\rho' \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}_A - \rho \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}') \nabla' \cdot \mathbf{v}'_A \rangle \\ &\quad + \langle (\rho' + \rho)(\mathbf{v}_A \cdot \mathbf{f}'_m + \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{f}_m) \rangle + \langle (\rho' + \rho)(\mathbf{v}_A \cdot \mathbf{d}'_m + \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{d}_m) \rangle \end{aligned} \quad (\text{II.1.17})$$

— Canal d'énergie interne :  $\mathcal{R}_u = \langle \rho' u + \rho u' \rangle / 2$

$$\begin{aligned} 2\partial_t \mathcal{R}_u &= \nabla_{\ell} \cdot \langle \delta \rho \delta u \delta \mathbf{v} \rangle + \langle \rho \delta u \nabla' \cdot \mathbf{v}' - \rho' \delta u \nabla \cdot \mathbf{v} \rangle \\ &\quad - \langle \rho' \frac{\overline{\mathbf{P}}}{\rho} : \nabla \mathbf{v} + \rho \frac{\overline{\mathbf{P}}'}{\rho'} : \nabla' \mathbf{v}' \rangle \end{aligned} \quad (\text{II.1.18})$$

Le résultat pour le canal d'énergie magnétique n'est pas influencé par le type de pression (tensoriel ou isotrope) contrairement à ceux des canaux d'énergie cinétique et interne. La question qui s'est posée alors était : est-il possible d'améliorer la formulation des termes

dépendants de la pression ? de faire apparaître l'influence de la pression dans les termes de type flux sous la forme d'une fonction de structure ? En remarquant que  $\overline{\mathbf{P}}$  ou  $\overline{\mathbf{P}}_*$  est, dans tous les termes, accompagné de  $\frac{1}{\rho}$  pris au même point, l'idée de travailler sur la fonction de structure  $\langle \delta\rho\delta\frac{\overline{\mathbf{P}}}{\rho} \cdot \delta\mathbf{v} \rangle$  puis sur la fonction  $\langle \delta\rho\delta\frac{\overline{\mathbf{P}}_*}{\rho} \cdot \delta\mathbf{v} \rangle$  a émergé. Développer cette dernière sous la divergence locale en utilisant l'hypothèse d'homogénéité de Kolmogorov et l'indépendance des points donne :

$$\nabla_{\ell} \cdot \langle \delta\rho\delta\frac{\overline{\mathbf{P}}_*}{\rho} \cdot \delta\mathbf{v} \rangle = \nabla_{\ell} \cdot \langle (\rho - \rho')\frac{\overline{\mathbf{P}}_*}{\rho'} \cdot \mathbf{v} + (\rho - \rho')\frac{\overline{\mathbf{P}}_*}{\rho} \cdot \mathbf{v}' + \rho'\frac{\overline{\mathbf{P}}_*}{\rho} \cdot \mathbf{v} - \rho\frac{\overline{\mathbf{P}}_*}{\rho'} \cdot \mathbf{v}' \rangle$$

On va donc pouvoir remplacer dans (II.1.16) ou  $\nabla_{\ell} \cdot \langle \rho'\frac{\overline{\mathbf{P}}_*}{\rho} \cdot \mathbf{v}' - \rho\frac{\overline{\mathbf{P}}_*}{\rho'} \cdot \mathbf{v} \rangle$  ou  $\nabla_{\ell} \cdot \langle \overline{\mathbf{P}}_* \cdot \mathbf{v}' - \overline{\mathbf{P}}_*' \cdot \mathbf{v} \rangle$ . En voyant que ce dernier s'écrit aussi  $\langle \rho\frac{\overline{\mathbf{P}}_*}{\rho} : \nabla'\mathbf{v}' + \rho'\frac{\overline{\mathbf{P}}_*'}{\rho'} : \nabla\mathbf{v} \rangle$  qui rappelle les termes dépendant de la pression de l'équation (II.1.18), nous avons choisi la première possibilité. Ainsi :

$$\begin{aligned} \nabla_{\ell} \cdot \langle (\rho' + \rho)\frac{\overline{\mathbf{P}}_*}{\rho} \cdot \mathbf{v}' - (\rho' + \rho)\frac{\overline{\mathbf{P}}_*'}{\rho'} \cdot \mathbf{v} \rangle \\ = -\nabla_{\ell} \cdot \langle \delta\rho\delta\frac{\overline{\mathbf{P}}_*}{\rho} \cdot \delta\mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v} \cdot \frac{\overline{\mathbf{P}}_*}{\rho} \cdot \nabla'\rho' + \mathbf{v}' \cdot \frac{\overline{\mathbf{P}}_*'}{\rho'} \cdot \nabla\rho \rangle \\ + \langle 2\rho\frac{\overline{\mathbf{P}}}{\rho} : \nabla'\mathbf{v}' + 2\rho'\frac{\overline{\mathbf{P}}'}{\rho'} : \nabla\mathbf{v} + \rho\mathbf{v}_A^2\nabla' \cdot \mathbf{v}' + \rho'\mathbf{v}_A'^2\nabla \cdot \mathbf{v} \rangle \end{aligned}$$

La loi KHM générale pour l'énergie totale avec  $\mathcal{R} = \mathcal{R}_c + \mathcal{R}_m + \mathcal{R}_u$  devient alors :

[1]	$4\partial_t\mathcal{R} = \nabla_{\ell} \cdot \langle (\delta(\rho\mathbf{v}) \cdot \delta\mathbf{v} + \delta(\rho\mathbf{v}_A) \cdot \delta\mathbf{v}_A\delta\mathbf{v} - (\delta(\rho\mathbf{v}_A) \cdot \delta\mathbf{v} + \delta(\rho\mathbf{v}) \cdot \delta\mathbf{v}_A)\delta\mathbf{v}_A \rangle$
[2]	$+ \langle (\rho\mathbf{v} \cdot \delta\mathbf{v} + \frac{1}{2}\rho\mathbf{v}_A \cdot \delta\mathbf{v}_A - \frac{1}{2}\delta(\rho\mathbf{v}_A) \cdot \mathbf{v}_A)\nabla' \cdot \mathbf{v}' \rangle$
[3]	$- \langle (\rho'\mathbf{v}' \cdot \delta\mathbf{v} + \frac{1}{2}\rho'\mathbf{v}_A' \cdot \delta\mathbf{v}_A - \frac{1}{2}\delta(\rho\mathbf{v}_A) \cdot \mathbf{v}_A')\nabla \cdot \mathbf{v} \rangle$
[4]	$+ \langle (2\rho'\mathbf{v}' \cdot \delta\mathbf{v}_A - \delta(\rho\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}_A' + \rho'\mathbf{v}_A' \cdot \delta\mathbf{v})\nabla \cdot \mathbf{v}_A \rangle$
[5]	$- \langle (2\rho\mathbf{v} \cdot \delta\mathbf{v}_A - \delta(\rho\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}_A + \rho\mathbf{v}_A \cdot \delta\mathbf{v})\nabla' \cdot \mathbf{v}_A' \rangle$
[6]	$+ \nabla_{\ell} \cdot \langle 2\delta\rho\delta u\delta\mathbf{v} - \delta\rho\delta\frac{\overline{\mathbf{P}}_*}{\rho} \cdot \delta\mathbf{v} \rangle + 2 \langle \rho\delta u\nabla' \cdot \mathbf{v}' - \rho'\delta u\nabla \cdot \mathbf{v} \rangle$
[7]	$- \nabla_{\ell} \cdot \langle \delta\rho\delta\frac{\overline{\mathbf{P}}_*}{\rho} \cdot \delta\mathbf{v} \rangle - 2 \langle \rho\delta\frac{\overline{\mathbf{P}}}{\rho} : \nabla'\mathbf{v}' - \rho'\delta\frac{\overline{\mathbf{P}}}{\rho'} : \nabla\mathbf{v} \rangle$
[8]	$+ \langle \mathbf{v} \cdot (\frac{\overline{\mathbf{P}}_*}{\rho}\delta\rho - \rho\delta\frac{\overline{\mathbf{P}}_*}{\rho}) \cdot \frac{\nabla'\rho'}{\rho'} - \mathbf{v}' \cdot (\frac{\overline{\mathbf{P}}_*'}{\rho'}\delta\rho - \rho'\delta\frac{\overline{\mathbf{P}}_*'}{\rho'}) \cdot \frac{\nabla\rho}{\rho} \rangle$
[9]	$+ \langle (\rho' + \rho)(\mathbf{v} \cdot \mathbf{f}_c' + \mathbf{v}' \cdot \mathbf{f}_c + \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{f}_m' + \mathbf{v}_A' \cdot \mathbf{f}_m) \rangle$
[10]	$+ \langle (\rho' + \rho)(\mathbf{v} \cdot \mathbf{d}_c' + \mathbf{v}' \cdot \mathbf{d}_c + \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{d}_m' + \mathbf{v}_A' \cdot \mathbf{d}_m) \rangle$

(II.1.19)

Les lignes [7] et [8] contiennent les contributions des tenseurs de pression et de pression

totale. La loi exacte générale de type Kolmogorov est alors :

$$\begin{aligned}
 -4\varepsilon = & \nabla_{\ell} \cdot < (\delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{v} + \delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \delta \mathbf{v}_A \delta \mathbf{v} - (\delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \delta \mathbf{v} + \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{v}_A) \delta \mathbf{v}_A > \\
 & + \nabla_{\ell} \cdot < 2\delta\rho\delta u\delta \mathbf{v} - \delta\rho\delta\frac{\overline{P}_*}{\rho} \cdot \delta \mathbf{v} > \\
 & + < (\rho \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v} + \frac{1}{2}\rho \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{v}_A - \frac{1}{2}\delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \mathbf{v}_A + 2\rho\delta u)\nabla' \cdot \mathbf{v}' - 2\rho\delta\frac{\overline{P}}{\rho} : \nabla' \mathbf{v}' > \\
 & - < (\rho' \mathbf{v}' \cdot \delta \mathbf{v} + \frac{1}{2}\rho' \mathbf{v}'_A \cdot \delta \mathbf{v}_A - \frac{1}{2}\delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \mathbf{v}'_A + 2\rho'\delta u)\nabla \cdot \mathbf{v} - 2\rho'\delta\frac{\overline{P}}{\rho} : \nabla \mathbf{v} > \\
 & + < (2\rho' \mathbf{v}' \cdot \delta \mathbf{v}_A - \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}'_A + \rho' \mathbf{v}'_A \cdot \delta \mathbf{v})\nabla \cdot \mathbf{v}_A > \\
 & - < (2\rho \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v}_A - \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}_A + \rho \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{v})\nabla' \cdot \mathbf{v}'_A > \\
 & + < \mathbf{v} \cdot (\frac{\overline{P}_*}{\rho}\delta\rho - \rho\delta\frac{\overline{P}_*}{\rho}) \cdot \frac{\nabla'\rho'}{\rho'} - \mathbf{v}' \cdot (\frac{\overline{P}_*}{\rho'}\delta\rho - \rho'\delta\frac{\overline{P}_*}{\rho'}) \cdot \frac{\nabla\rho}{\rho} >
 \end{aligned}
 \tag{II.1.20}$$

Cette loi est valable quelle que soit la forme du tenseur de pression ou de l'énergie interne tant que la zone inertielle est supposée isentrope. Si l'on considère la pression sous forme isotrope  $\overline{P} = p\overline{\mathbf{I}}$ , on trouve la loi (I.3.15) analysée dans la section I.3.2.

Dans le cas d'un tenseur de pression gyrotrope/CGL, on peut faire apparaître  $p_{\parallel}$  et  $p_{\perp}$  :

$$\begin{aligned}
 -4\varepsilon = & \nabla_{\ell} \cdot < (\delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{v} + \delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \delta \mathbf{v}_A \delta \mathbf{v} - (\delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \delta \mathbf{v} + \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{v}_A) \delta \mathbf{v}_A > \\
 & + \nabla_{\ell} \cdot < \delta\rho\delta(\frac{p_{\perp} + p_{\parallel} + p_m}{\rho})\delta \mathbf{v} + \delta\rho\delta(\frac{p_{\perp} - p_{\parallel}}{\rho}\mathbf{b}\mathbf{b}) \cdot \delta \mathbf{v} > \\
 & + < (\rho \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v} + \frac{1}{2}\rho \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{v}_A - \frac{1}{2}\delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \mathbf{v}_A + \rho\delta(\frac{p_{\parallel}}{\rho}))\nabla' \cdot \mathbf{v}' > \\
 & - < (\rho' \mathbf{v}' \cdot \delta \mathbf{v} + \frac{1}{2}\rho' \mathbf{v}'_A \cdot \delta \mathbf{v}_A - \frac{1}{2}\delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \mathbf{v}'_A + \rho'\delta(\frac{p_{\parallel}}{\rho}))\nabla \cdot \mathbf{v} > \\
 & + 2 < \rho\delta(\frac{p_{\perp} - p_{\parallel}}{\rho}\mathbf{b}\mathbf{b}) : \nabla' \mathbf{v}' - \rho'\delta(\frac{p_{\perp} - p_{\parallel}}{\rho}\mathbf{b}\mathbf{b}) : \nabla \mathbf{v} > \\
 & + < (2\rho' \mathbf{v}' \cdot \delta \mathbf{v}_A - \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}'_A + \rho' \mathbf{v}'_A \cdot \delta \mathbf{v})\nabla \cdot \mathbf{v}_A > \\
 & - < (2\rho \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v}_A - \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}_A + \rho \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{v})\nabla' \cdot \mathbf{v}'_A > \\
 & + < (\frac{p_{\perp} + p_m}{\rho}\mathbf{v}\delta\rho - \rho\mathbf{v}\delta(\frac{p_{\perp} + p_m}{\rho}) + \frac{p_{\parallel} - p_{\perp}}{\rho}\mathbf{v} \cdot \mathbf{b}\mathbf{b}\delta\rho - \rho\mathbf{v} \cdot \delta(\frac{p_{\parallel} - p_{\perp}}{\rho}\mathbf{b}\mathbf{b})) \cdot \frac{\nabla'\rho'}{\rho'} > \\
 & - < (\frac{p'_{\perp} + p'_m}{\rho'}\mathbf{v}'\delta\rho - \rho'\mathbf{v}'\delta(\frac{p_{\perp} + p_m}{\rho}) + \frac{p'_{\parallel} - p'_{\perp}}{\rho'}\mathbf{v}' \cdot \mathbf{b}'\mathbf{b}'\delta\rho - \rho'\mathbf{v}' \cdot \delta(\frac{p_{\parallel} - p_{\perp}}{\rho}\mathbf{b}\mathbf{b})) \cdot \frac{\nabla\rho}{\rho} >
 \end{aligned}
 \tag{II.1.21}$$

Pour obtenir la loi associée au modèle CGL idéal, il faudrait y expliciter  $p_{\parallel}$  et  $p_{\perp}$  en fonction de  $\rho$ ,  $\mathbf{v}_A$  à partir de (II.1.9) mais à cause des constantes et des puissances, aucune simplification n'apparaît. Afin de faire ressortir l'apport du modèle gyrotrope ou CGL par rapport au modèle isotrope dans le taux de cascade, il est plus intéressant d'y faire apparaître  $p$ . Cela nous permet d'isoler la contribution de pression anisotrope :

$$\begin{aligned}
 -4(\varepsilon - \varepsilon_{iso}) = & -\nabla_{\ell} \cdot < \delta\rho\delta(\frac{p_{\parallel} - p_{\perp}}{\rho}(\mathbf{b}\mathbf{b} - \frac{1}{3}\overline{\mathbf{I}})) \cdot \delta \mathbf{v} > \\
 & - < 2\rho\delta(\frac{p_{\parallel} - p_{\perp}}{\rho}(\mathbf{b}\mathbf{b} - \frac{1}{3}\overline{\mathbf{I}})) : \nabla' \mathbf{v}' - 2\rho'\delta(\frac{p_{\parallel} - p_{\perp}}{\rho}(\mathbf{b}\mathbf{b} - \frac{1}{3}\overline{\mathbf{I}})) : \nabla \mathbf{v} > \\
 & + < \mathbf{v} \cdot ((\frac{p_{\parallel} - p_{\perp}}{\rho}(\mathbf{b}\mathbf{b} - \frac{1}{3}\overline{\mathbf{I}}))\delta\rho - \rho\delta(\frac{p_{\parallel} - p_{\perp}}{\rho}(\mathbf{b}\mathbf{b} - \frac{1}{3}\overline{\mathbf{I}}))) \cdot \frac{\nabla'\rho'}{\rho'} > \\
 & - < \mathbf{v}' \cdot ((\frac{p'_{\parallel} - p'_{\perp}}{\rho'}(\mathbf{b}'\mathbf{b}' - \frac{1}{3}\overline{\mathbf{I}}))\delta\rho - \rho'\delta(\frac{p_{\parallel} - p_{\perp}}{\rho}(\mathbf{b}\mathbf{b} - \frac{1}{3}\overline{\mathbf{I}}))) \cdot \frac{\nabla\rho}{\rho} >
 \end{aligned}
 \tag{II.1.22}$$

en notant  $\varepsilon_{iso}$  le taux de cascade dépendant de la pression isotrope donné par (I.3.15).

Nous quantifierons et analyserons cette contribution grâce à des simulations dans la partie III.

On peut aussi faire apparaître  $a_p$  et  $\beta_{\parallel}$  dans (II.1.21) pour identifier les termes potentiellement impactés par les instabilités. Ainsi :

$$\begin{aligned}
 -4\varepsilon = & \nabla_{\ell} \cdot < (\delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{v} + \delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \delta \mathbf{v}_A \delta \mathbf{v} - (\delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \delta \mathbf{v} + \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{v}_A) \delta \mathbf{v}_A > \\
 & + \frac{1}{2} \nabla_{\ell} \cdot < \delta \rho \delta(\mathbf{v}_A^2 (\beta_{\parallel} (a_p + 1) + 1)) \delta \mathbf{v} + \delta \rho \delta(\beta_{\parallel} (a_p - 1) \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A) \cdot \delta \mathbf{v} > \\
 & + < (\rho \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v} + \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{v}_A - \frac{1}{2} \delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \mathbf{v}_A + \frac{1}{2} \rho \delta(\mathbf{v}_A^2 \beta_{\parallel})) \nabla' \cdot \mathbf{v}' > \\
 & - < (\rho' \mathbf{v}' \cdot \delta \mathbf{v} + \frac{1}{2} \rho' \mathbf{v}'_A \cdot \delta \mathbf{v}_A - \frac{1}{2} \delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \mathbf{v}'_A + \frac{1}{2} \rho' \delta(\mathbf{v}_A^2 \beta_{\parallel})) \nabla \cdot \mathbf{v} > \\
 & + < \rho \delta(\beta_{\parallel} (a_p - 1) \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A) : \nabla' \mathbf{v}' - \rho' \delta(\beta_{\parallel} (a_p - 1) \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A) : \nabla \mathbf{v} > \\
 & + < (2 \rho' \mathbf{v}' \cdot \delta \mathbf{v}_A - \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}'_A + \rho' \mathbf{v}'_A \cdot \delta \mathbf{v}) \nabla \cdot \mathbf{v}_A > \\
 & - < (2 \rho \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v}_A - \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}_A + \rho \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{v}) \nabla' \cdot \mathbf{v}'_A > \\
 & + \frac{1}{2} < (\mathbf{v}_A^2 (\beta_{\parallel} a_p + 1) \delta \rho - \rho \delta(\mathbf{v}_A^2 (\beta_{\parallel} a_p + 1))) \mathbf{v} \cdot \frac{\nabla' \rho'}{\rho'} > \\
 & - \frac{1}{2} < (\mathbf{v}'_A^2 (\beta'_{\parallel} a'_p + 1) \delta \rho - \rho' \delta(\mathbf{v}_A^2 (\beta_{\parallel} a_p + 1))) \mathbf{v}' \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} > \\
 & + \frac{1}{2} < \mathbf{v} \cdot (\beta_{\parallel} (a_p - 1) \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A \delta \rho - \rho \delta(\beta_{\parallel} (a_p - 1) \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A)) \cdot \frac{\nabla' \rho'}{\rho'} > \\
 & - \frac{1}{2} < \mathbf{v}' \cdot (\beta'_{\parallel} (a'_p - 1) \mathbf{v}'_A \mathbf{v}'_A \delta \rho - \rho' \delta(\beta_{\parallel} (a_p - 1) \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A)) \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} >
 \end{aligned}
 \tag{II.1.23}$$

Les critères d'instabilité linéaires n'y sont pas explicites mais on voit que certains termes dépendent de  $a_p - 1$ , en particulier un terme de type flux. Par conséquent, le signe de ces termes va dépendre du régime de pression dans le système, si  $p_{\parallel}$  ou  $p_{\perp}$  domine, et est ainsi lié au type d'instabilité pouvant s'y développer. Comme ces termes dépendent de quantités incrémentales, il est néanmoins difficile de conclure sur leur apport au taux de cascade total sans regarder dans des simulations. Ce sera l'un des objectifs de la partie ???. On remarque que ces termes sont présents dans la contribution anisotrope (II.1.22) au taux de cascade.

## 1.4 Synthèse de l'étude analytique de turbulence compressible avec pression tensorielle et modèle CGL

**Fermeture CGL (gyrotrope +  $\nabla \cdot \mathbf{q} = 0$ ) :**  $\overline{\mathbf{P}} = \frac{2p_{\perp} + p_{\parallel}}{3} \overline{\mathbf{I}} + (p_{\parallel} - p_{\perp})(\mathbf{b}\mathbf{b} - \frac{1}{3}\overline{\mathbf{I}}) = p\overline{\mathbf{I}} + \overline{\Pi}$   
 et  $\rho u = \frac{3}{2}p$  avec  $\mathbf{b} = \frac{\mathbf{v}_A}{|\mathbf{v}_A|}$

$$\partial_t p_{\parallel} + \nabla \cdot (p_{\parallel} \mathbf{v}) + 2p_{\parallel} \mathbf{b}\mathbf{b} : \nabla \mathbf{v} = 0 \quad (\text{II.1.24})$$

$$\partial_t p_{\perp} + \nabla \cdot (p_{\perp} \mathbf{v}) + p_{\perp} \nabla \cdot \mathbf{v} - p_{\perp} \mathbf{b}\mathbf{b} : \nabla \mathbf{v} = 0 \quad (\text{II.1.25})$$

**Linéarisation du modèle CGL :**

- Relation de dispersion : (II.1.11)
- Mode d'Alfvén incompressible  $\Rightarrow$  instabilité firehose,
- Mode magnétosonique rapide gyrotrope : stable,
- Mode magnétosonique rapide gyrotrope  $\Rightarrow$  instabilité firehose parallèle et miroir
- instabilité firehose si  $1 - \frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0}) < 0$
- instabilité miroir si  $1 + \beta_{\parallel 0} a_{p0}(1 - \frac{1}{6}a_{p0}) < 0$

**Equations utilisées pour calculer la loi générale avec tenseur de pression ( $\nabla \cdot \mathbf{q}$  négligé) :**

$$\partial_t \rho = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \quad (\text{II.1.26})$$

$$\partial_t \mathbf{v} = -\nabla \cdot (\mathbf{v}\mathbf{v}) + \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A) - \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}}_* + (\mathbf{f}_c + \mathbf{d}_c) \quad (\text{II.1.27})$$

$$\partial_t \mathbf{v}_A = \nabla \cdot (\mathbf{v}_A \mathbf{v} - \mathbf{v} \mathbf{v}_A) - \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{v}_A + \frac{\mathbf{v}_A}{2} \nabla \cdot \mathbf{v} + (\mathbf{f}_m + \mathbf{d}_m) \quad (\text{II.1.28})$$

$$\partial_t u = -\nabla \cdot (u \mathbf{v}) + u \nabla \cdot \mathbf{v} - \frac{\overline{\mathbf{P}}}{\rho} : \nabla \mathbf{v} \quad (\text{II.1.29})$$

**Fonctions de corrélation d'énergie totale considérée :**

$$\mathcal{R} = \frac{1}{2} < \frac{1}{2}(\rho' + \rho) \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{2}(\rho' + \rho) \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A + \rho' u + \rho u' >$$

**Lois exactes dérivées dans ce chapitres (formulation f2) :**

- KHM générale  $\forall \overline{\mathbf{P}}$  : (II.1.19)
- K41 générale  $\forall \overline{\mathbf{P}}$  : (II.1.20)
- K41 gyrotrope/CGL : (II.1.21) [Résultat répondant à l'objectif initial]
- K41 gyrotrope/CGL apport anisotropie de pression : (II.1.22)
- K41 gyrotrope/CGL fonction de  $a_p = \frac{p_{\perp}}{p_{\parallel}}$  et  $\beta_{\parallel} = \frac{p_{\parallel}}{p_m}$  : (II.1.23)

Les résultats dérivés ici sont publiés dans SIMON et SAHRAOUI 2022.

## PARTIE II : CHAPITRE 2

## ET DANS LE CAS INCOMPRESSIBLE ?

### Sommaire

<b>2.1</b>	<b>De la limite incompressible dans la loi exacte générale vers un nouveau modèle . . . . .</b>	<b>61</b>
<b>2.2</b>	<b>Linéarisation du nouveau modèle proposé . . . . .</b>	<b>63</b>
<b>2.3</b>	<b>Etude des solutions linéaires du modèle proposé . . . . .</b>	<b>64</b>
<b>2.4</b>	<b>Synthèse : Limite incompressible et piste d'étude numérique</b>	<b>68</b>

Si l'on prend la limite incompressible de la loi exacte dépendant d'une pression isotrope (I.3.15), on retrouve la loi PP98 donnant le taux de cascade  $\varepsilon_{PP98}$  (I.1.34). Mais est-ce aussi le cas si la pression est tensorielle ? De cette question à émerger une autre question : qu'est-ce qu'un système incompressible avec pression tensorielle ? Dans ce chapitre, sera présenté le travail effectué pour tenter de répondre à ces questions. Ce travail n'a pas encore été publié.

### 2.1 De la limite incompressible dans la loi exacte générale vers un nouveau modèle

Si l'on considère la limite incompressible ( $\rho = \rho_0$ ,  $\delta\rho = 0$ ,  $\nabla\rho = 0$ ,  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ ,  $\nabla \cdot \mathbf{v}_A = 0$ ) dans l'équation (II.1.22),  $\varepsilon_{iso} \rightarrow \varepsilon_{PP98}$ , tous les termes s'annulent sauf :

$$\begin{aligned} -4(\varepsilon - \varepsilon_{PP98}) &= -2 < \delta((p_{\parallel} - p_{\perp})\mathbf{bb}) : \nabla' \mathbf{v}' - \delta((p_{\parallel} - p_{\perp})\mathbf{bb}) : \nabla \mathbf{v} > \\ &= -2 < \delta((p_{\parallel} - p_{\perp})\mathbf{bb}) : \delta(\nabla \mathbf{v}) > \end{aligned} \quad (\text{II.2.1})$$

car seule la trace de  $\nabla \mathbf{v}$  s'annule par incompressibilité :  $\bar{\mathbf{I}} : \nabla \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ . On obtient ainsi une correction à la théorie PP98 dépendant de l'anisotropie de pression.

Plus généralement, seule la composante isotrope du tenseur de pression peut annuler ce terme en y faisant ressortir  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$  par produit dual avec l'identité. La correction générale, ne dépendant que de la composante participant à la déformation incompressible (CASSAK et BARBHUIYA 2022), serait donc :

$$\boxed{-4(\varepsilon - \varepsilon_{PP98}) = -2 < \delta(\bar{\mathbf{P}} - p\bar{\mathbf{I}}) : \delta(\nabla \mathbf{v}) > = -2 < \delta\bar{\mathbf{\Pi}} : \delta(\nabla \mathbf{v}) >} \quad (\text{II.2.2})$$

Et dans le cas particulier gyrotrope, on aurait :

$$\boxed{-4(\varepsilon - \varepsilon_{PP98}) = -2 < \delta((p_{\parallel} - p_{\perp})(\mathbf{b}\mathbf{b} - \frac{1}{3}\bar{\mathbf{I}})) : \delta(\nabla\mathbf{v}) >} \quad (\text{II.2.3})$$

cela semble révéler qu'une part compressible subsisterait dans (II.2.1), cachée dans  $\mathbf{b}\mathbf{b}$ .

On remarque que ce terme dépend de  $p_{\parallel} - p_{\perp}$ , c'est à dire de  $\beta_{\parallel}(1 - a_p)$ . Analyser et valider cette correction de la loi PP98 serait donc numériquement plus simple que le cas compressible et permettrait de donner un début de réponse à l'impact des instabilités sur la cascade. Rigoureusement, cela nécessiterait l'utilisation de simulation incompressible. Mais aucune trace d'un modèle incompressible avec pression tensorielle n'a été trouvée dans la littérature. En fait, si l'on approche le problème sous un autre angle, celui des fermetures, on se rend compte que le cadre gyrotrope est habituellement abordé à travers la fermeture CGL. Ajouter une fermeture incompressible signifierait alors, surcontraindre le système (une équation de trop par rapport au nombre de variables). Une équation de compatibilité doit alors être vérifiée par les solutions.

Par exemple, dans le cas linéaire, le modèle CGL donne l'équation de dispersion (II.1.10) que l'on va simplement noter  $\bar{\mathbf{M}}\mathbf{v}_1 = 0$ . Avec la contrainte incompressible  $\nabla \cdot \mathbf{v}_1 = 0$ , on peut écrire  $\mathbf{v}_1$  sous la forme d'un potentiel vecteur  $\Omega : \mathbf{v}_1 = \nabla \times \Omega = \bar{\mathbf{N}}\Omega$  avec  $\bar{\mathbf{N}} = i\mathbf{k} \times \bar{\mathbf{I}} = i \begin{pmatrix} 0 & -k_{\parallel} & 0 \\ k_{\parallel} & 0 & -k_{\perp} \\ 0 & k_{\perp} & 0 \end{pmatrix}$ . Le modèle CGL surcontraint incompressiblement donnerait l'équation de dispersion :  $\bar{\mathbf{M}}\bar{\mathbf{N}}\Omega = 0$  avec

$$\bar{\mathbf{M}}\bar{\mathbf{N}} = \begin{pmatrix} 0 & -k_{\parallel}(\frac{\omega^2 - \omega_F^2}{v_{A0}^2 k_{\parallel}^2} - (\frac{\beta_{\parallel 0}}{2} a_{p0} + 1)\frac{k_{\perp}^2}{k_{\parallel}^2}) & 0 \\ k_{\parallel} \frac{\omega^2 - \omega_F^2}{v_{A0}^2 k_{\parallel}^2} & 0 & -k_{\perp} \frac{\omega^2 - \omega_F^2}{v_{A0}^2 k_{\parallel}^2} \\ 0 & k_{\perp}(\frac{\omega^2}{v_{A0}^2 k_{\parallel}^2} - \frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(3 - a_{p0})) & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{II.2.4})$$

où  $\omega_F^2 = -v_{A0}^2 k_{\parallel}^2 (\frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0}) - 1)$  correspond à l'onde d'Alfvén incompressible gyrotrope. Le déterminant de cette matrice est nul, le système admet donc ou une infinité de solutions ou aucune solution mais il ne peut nous aider à les déterminer. On remarque que si  $\omega^2 = \omega_F^2$ , alors il faut que  $\Omega_y = 0$ , c-à-d que l'ensemble solution soit une droite orientée suivant  $\mathbf{v}_1 = (0, 1, 0)$ . On retrouve le mode d'Alfvén gyrotrope. Mais contrairement au modèle incompressible MHD, une autre solution existe. L'autre possibilité non triviale, telle que  $\Omega_y \neq 0$ , est de considérer  $k_{\parallel}\Omega_x - k_{\perp}\Omega_z = 0$ , c'est à dire l'ensemble de droites de vecteur directeur  $\mathbf{v}_1 = (-k_{\parallel}, 0, k_{\perp})$ , dans ce cas  $\omega^2 = v_{A0}^2 k_{\parallel}^2 \frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(3 - a_{p0})$ . Cet ensemble de solution est contraint par l'équation de compatibilité  $\tan^2 \theta = \frac{k_{\perp}^2}{k_{\parallel}^2} = \frac{2(\beta_{\parallel 0}(2 - a_{p0}) - 1)}{\beta_{\parallel 0} a_{p0} + 2}$  et n'est donc pas valable pour tout  $k_{\parallel}$  et  $k_{\perp}$ . Si l'on suppose l'isotropie de pression dans ce mode, on trouve un mode sonore :  $\omega^2 = 2k_{\parallel}^2 \frac{p_0}{\rho_0}$ . Imposer l'incompressibilité dans le système CGL ne semble donc pas influencer sur le mode d'Alfvén mais contraindre les modes magnéto-sonores en un mode sonique improbable dans le cas MHD et n'existant que pour un certain angle entre  $\mathbf{k}$  et  $\mathbf{b}_0$ .

On s'est alors demandé à quoi pourrait ressembler un modèle incompressible gyrotrope qui serait viable (non sur-contraint). Il serait a priori constitué de l'équation sur la vitesse (II.1.2) et de l'équation d'induction (II.1.4) avec  $\rho$  constant et  $\bar{\mathbf{P}}$  gyrotrope, de la fermeture  $\nabla \cdot \mathbf{v}$  et d'une autre équation de fermeture. Différentes possibilités sont envisageables pour cette équation supplémentaire : garder l'une des équations de pression ou considérer une



combinaison linéaire des pressions. Afin de maintenir la cohérence avec le bilan énergétique et l'équation d'énergie interne, nous avons décidé de fermer le système avec l'équation sur la trace du tenseur de pression (II.1.5). Ce système est donc compatible avec la loi exacte (II.2.3). Dans la section 2.2, nous présenterons les solutions linéaires de ce système. Puis dans la section ??, une étude paramétrique de ces solutions linéaires.

## 2.2 Linéarisation du nouveau modèle proposé

Le modèle incompressible gyrotrope envisagé est :

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \nabla \cdot \mathbf{v}_A = 0 \quad (\text{II.2.5})$$

$$\partial_t \mathbf{v} + \nabla \cdot (\mathbf{v}\mathbf{v} - \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A + \frac{1}{\rho_0} \overline{\mathbf{P}}_*) = 0 \quad (\text{II.2.6})$$

$$\partial_t p + \nabla \cdot (p\mathbf{v}) + \frac{2}{3} \overline{\Pi} : \nabla \mathbf{v} = 0 \quad (\text{II.2.7})$$

$$\partial_t \mathbf{v}_A - \nabla \cdot (\mathbf{v}_A \mathbf{v} - \mathbf{v} \mathbf{v}_A) = 0 \quad (\text{II.2.8})$$

avec  $\overline{\mathbf{P}} = p\overline{\mathbf{I}} + \overline{\Pi} = \frac{1}{3}(2p_\perp + p_\parallel)\overline{\mathbf{I}} + (p_\parallel - p_\perp)(\mathbf{b}\mathbf{b} - \frac{1}{3}\overline{\mathbf{I}})$ .  $\nabla \cdot \overline{\mathbf{P}}_*$  et  $\overline{\Pi} : \nabla \mathbf{v}$  y sont donc :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}}_* &= \nabla(p_\perp + \frac{1}{2}\rho_0 \mathbf{v}_A^2) + \mathbf{b}\mathbf{b} \cdot \nabla(p_\parallel - p_\perp) + (p_\parallel - p_\perp) \frac{1}{\mathbf{v}_A^2} (\mathbf{v}_A \cdot \nabla \mathbf{v}_A - 2\mathbf{v}_A \mathbf{b}\mathbf{b} : \nabla \mathbf{v}_A) \\ \overline{\Pi} : \nabla \mathbf{v} &= (p_\parallel - p_\perp) \mathbf{b}\mathbf{b} : \nabla \mathbf{v} \end{aligned}$$

Les équations linéarisées en suivant la méthode résumée section I.1.4 sont :

$$0 = k_\perp v_{1x} + k_\parallel v_{1z} \quad (\text{II.2.9})$$

$$0 = -\omega v_{1x} + \frac{p_{\perp 1}}{\rho_0} k_\perp + (\frac{p_{\parallel 0} - p_{\perp 0}}{\rho_0 v_{A0}^2} - 1) v_{A0} k_\parallel v_{A1x} + v_{A0} k_\perp v_{A1z} \quad (\text{II.2.10})$$

$$0 = -\omega v_{1y} + (\frac{p_{\parallel 0} - p_{\perp 0}}{\rho_0 v_{A0}^2} - 1) v_{A0} k_\parallel v_{A1y} \quad (\text{II.2.11})$$

$$0 = -\omega v_{1z} + \frac{p_{\parallel 1}}{\rho_0} k_\parallel - \frac{p_{\parallel 0} - p_{\perp 0}}{\rho_0 v_{A0}^2} v_{A0} k_\parallel v_{A1z} \quad (\text{II.2.12})$$

$$0 = -\omega(2p_{\perp 1} + p_{\parallel 1}) + 2(p_{\parallel 0} - p_{\perp 0}) k_\parallel v_{1z} \quad (\text{II.2.13})$$

$$0 = -\omega \mathbf{v}_{A1} - k_\parallel v_{A0} \mathbf{v}_1 \quad (\text{II.2.14})$$

On retrouve le mode d'Alfvén incompressible polarisé suivant  $(0, 1, 0)$  grâce aux composantes suivant  $y$  qui sont décorréliées des autres :

$$(\omega^2 + (\frac{p_{\parallel 0} - p_{\perp 0}}{\rho_0 v_{A0}^2} - 1) v_{A0}^2 k_\parallel^2) v_{1y} = 0 \Rightarrow \frac{\omega^2}{v_{A0}^2 k_\parallel^2} + (\frac{p_{\parallel 0} - p_{\perp 0}}{\rho_0 v_{A0}^2} - 1) = 0 \quad (\text{II.2.15})$$

Ce mode, identique au mode présent dans le système CGL, peut devenir instable. On retrouve ainsi l'instabilité firehose. Il est aussi polarisé suivant  $y$ .

Pour les autres directions, on peut remplacer  $v_{A1x}$  et  $v_{A1z}$  à l'aide de (II.2.14) dans

(II.2.10) et (II.2.12) :

$$\omega \frac{p_{\perp 1}}{\rho_0} k_{\perp} = (\omega^2 + (\frac{p_{\parallel 0} - p_{\perp 0}}{\rho_0 v_{A0}^2} - 1) v_{A0}^2 k_{\parallel}^2) v_{1x} + v_{A0}^2 k_{\parallel} k_{\perp} v_{1z} \quad (\text{II.2.16})$$

$$\omega \frac{p_{\parallel 1}}{\rho_0} k_{\parallel} = (\omega^2 - \frac{p_{\parallel 0} - p_{\perp 0}}{\rho_0} k_{\parallel}^2) v_{1z} \quad (\text{II.2.17})$$

$$0 = k_{\perp} v_{1x} + k_{\parallel} v_{1z} \quad (\text{II.2.18})$$

$$0 = -2\omega \frac{p_{\perp 1}}{\rho_0} - \omega \frac{p_{\parallel 1}}{\rho_0} + 2 \frac{p_{\parallel 0} - p_{\perp 0}}{\rho_0} k_{\parallel} v_{1z} \quad (\text{II.2.19})$$

Puis remplacer  $v_{1x}$  à l'aide de (II.2.18) et  $p_{\perp 1}$  et  $p_{\parallel 1}$  dans (II.2.19) pour obtenir une équation de dispersion ne dépendant plus que de  $v_{1z}$  et enfin la relation de dispersion :

$$\Rightarrow \frac{\omega^2}{v_{A0}^2 k_{\parallel}^2} - \frac{2(\frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0}) - 1)k_{\parallel}^2 + (3\frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0}) - 2)k_{\perp}^2}{k_{\perp}^2 - 2k_{\parallel}^2} = 0 \quad (\text{II.2.20})$$

Ce mode est polarisé suivant  $(1, 0, -\frac{k_{\perp}}{k_{\parallel}}) = (1, 0, -\tan \theta)$ . On y retrouve l'instabilité firehose parallèle ( $\frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0}) - 1 > 0$ ) si  $k_{\parallel} \gg k_{\perp}$ . Si  $k_{\parallel} \ll k_{\perp}$ , un autre type d'instabilité est visible, de critère  $\frac{3}{2}\frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0}) - 1 < 0$ . Ce critère ressemble beaucoup au critère firehose mais avec un signe inverse et un facteur  $\frac{3}{2}$ . On va le nommer «firehose inverse».

## 2.3 Etude des solutions linéaires du modèle proposé

La question que l'on peut se poser maintenant est : est-ce qu'il existe un intervalle pour  $a_{p0}$  et  $\beta_{\parallel 0}$  tel que le système ne devienne pas instable ? Répondre à cette question est nécessaire pour savoir si ce système peut être linéairement viable et pourrait être simulé (les instabilités sont difficilement gérables numériquement). En regardant les critères, on se rend compte que le système semble être stable si  $\frac{2}{3} < \frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0}) < 1$ . Sa zone de stabilité semble donc extrêmement réduite comme on peut le voir sur le diagramme  $a_{p0}$  vs  $\beta_{\parallel 0}$  de la figure II.2.1 (zone grise foncée).

Ensuite, on peut comparer le mode donné par la relation (II.2.20) avec les modes compressibles et le mode d'Alfvén incompressible. Sur la figure II.2.1, quatre croix rouges correspondent à quatre couples  $\{\beta_{\parallel 0}; a_{p0}\}$  sélectionnés afin de refléter les différents comportements possibles des modes linéaires.

On notera :

- $F = 1 - \frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0})$ , le critère firehose.  $F < 0$  indique l'instabilité des modes d'Alfvén, magnétosonique lent et du nouveau mode incompressible.
- $I = 3\frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0}) - 2$ , le critère firehose inverse.  $I < 0$  indique l'instabilité du nouveau mode incompressible.
- $M = 1 + \beta_{\parallel 0}a_{p0}(1 - \frac{a_{p0}}{6})$ , le critère miroir CGL.  $M < 0$  indique l'instabilité du mode magnétosonique lent.

La figure II.2.2 montre pour chaque mode (associé à une couleur) et chaque couple de paramètres (associée à une ligne de graphiques), les vitesses de propagation  $\frac{\omega}{k}$  normalisée par  $kv_{A0}$  (colonne de gauche) et les taux de croissance des instabilités  $\gamma$  normalisé par  $kv_{A0}$  (colonne de droite) en fonctions de l'angle  $\theta$  défini entre  $\mathbf{k}$  et  $\mathbf{b}_0$ . La vitesse de propagation correspond  $\frac{\omega}{k}$  réel, si elle est non nulle, le mode se propage, et le taux de croissance correspond à la part imaginaire. On remarque que les modes considérés sont ou purement

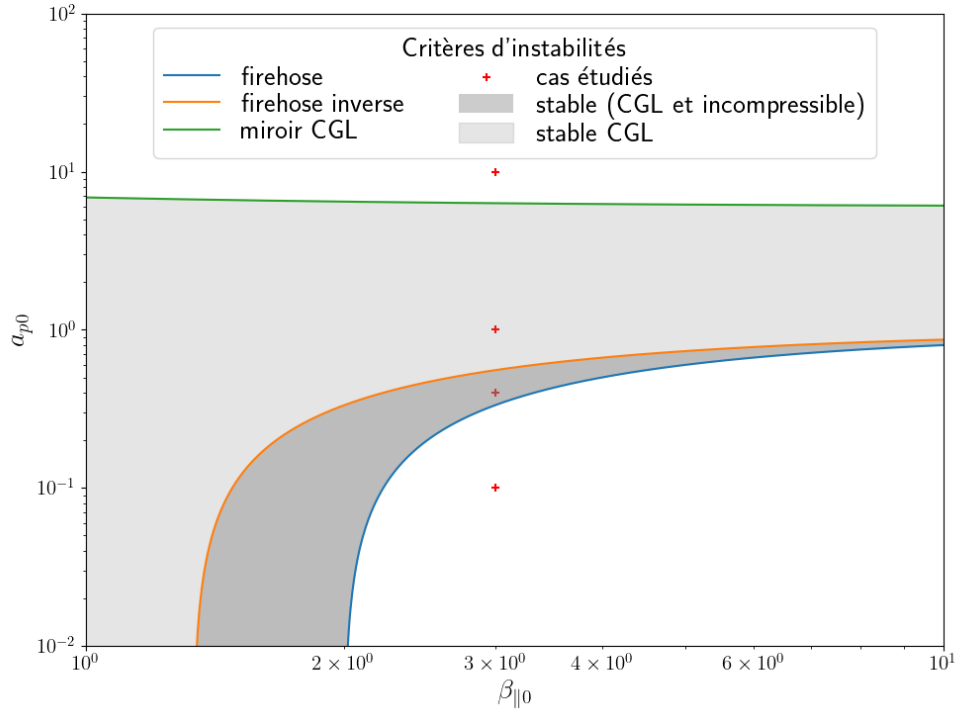


FIGURE II.2.1 – Diagramme  $a_{p0} - \beta_{||0}$ . Zones de stabilités des modèles CGL et incompressible proposé grisées. Critères d'instabilité firehose ( $F$ , bleu) firehose inverse ( $I$ , orange) et miroir ( $M$ , vert). Points rouges : cas détaillés dans la figure II.2.2.

réels, ou purement imaginaire. Cela se retrouve sur la figure II.2.2 où, pour un angle donné, un mode n'apparaîtra que sur le graphique de gauche ou celui de droite. Ainsi, on retrouve la stabilité attendue du mode magnétosonique rapide (rouge), qui n'apparaît que sur les graphiques de gauche, et celle du mode d'Alfvén (bleu) tant que  $F > 0$  indépendamment de  $\theta$ . La stabilité du nouveau mode (orange) et celle du mode magnétosonique lent (vert) dépendent quant à elles de  $\theta$ . On retrouve l'instabilité firehose du mode magnétosonique lent si  $F < 0$  et pour  $\theta$  autour de  $0^\circ$  (première ligne) et l'instabilité miroir si  $M < 0$  et pour  $\theta$  autour de  $90^\circ$  (quatrième ligne). Similairement, le nouveau mode se montre instable de type firehose si  $F < 0$  autour de  $0^\circ$  (première ligne) et de type firehose inverse si  $I < 0$  et pour  $\theta$  autour de  $90^\circ$  (troisième et quatrième ligne).

Si l'on analyse, un peu plus finement, la relation de dispersion (équation (??)), on remarque que le dénominateur va changer de signe si  $\tan \theta = \sqrt{2}$ , c'est-à-dire, si  $\theta \simeq 55^\circ$ . En cet angle singulier, la vitesse de phase de ce mode tend vers l'infini. Ce changement de signe va venir compenser le changement de signe du numérateur. D'où la croissance de l'instabilité firehose si  $\theta < 55^\circ$  dans le cas de la première ligne (le numérateur est alors défini positif) ou de l'instabilité firehose inverse dans les troisième et quatrième lignes si  $\theta > 55^\circ$ , le numérateur étant défini négatif. Par contre, la deuxième ligne montre que ce mode peut devenir instable pour une plage angulaire oblique si  $F > 0$  et  $I > 0$ . En effet, si  $F > 0$  et  $I > 0$ , le signe du numérateur sera imposé par le signe de  $F > 0$  proche de  $\theta = 0^\circ$  (il sera alors négatif) mais par le signe de  $F > 0$  proche de  $\theta = 90^\circ$  (il sera alors positif). Si  $\theta > 55^\circ$  et le signe du numérateur imposé par  $I > 0$ , le dénominateur est positif et le mode stable (cas Isup), mais si le signe du numérateur est imposé par  $F > 0$ , le mode sera instable (cas Fsup). Similairement, si  $\theta < 55^\circ$ , le signe du numérateur imposé par  $F > 0$ , les signes se compensent et le mode est stable (cas Finf), mais si le signe du

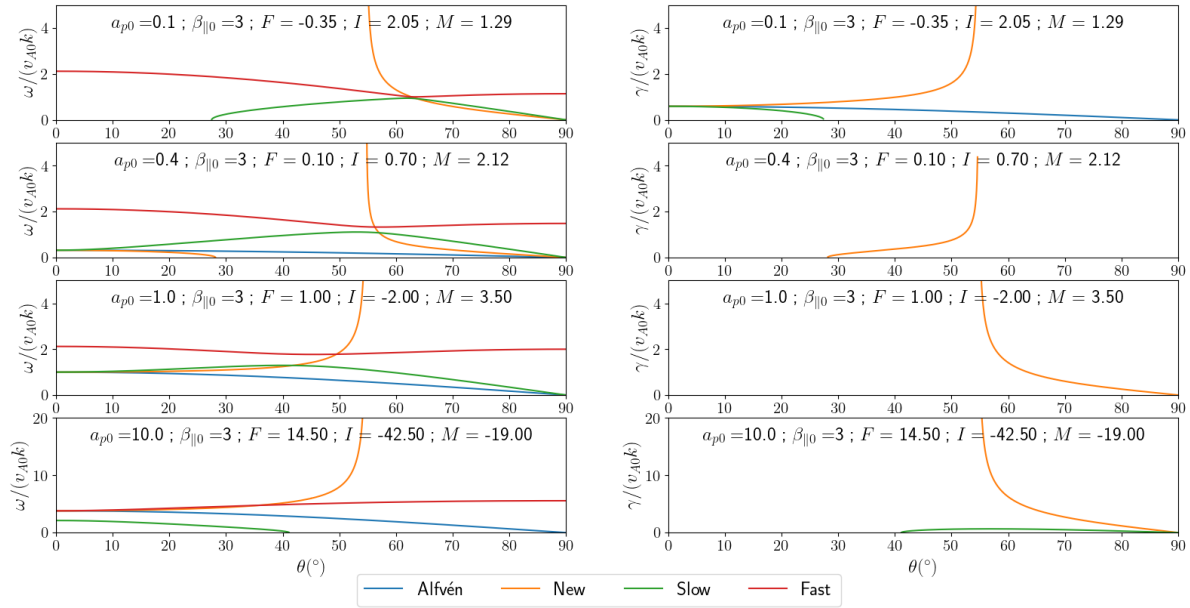


FIGURE II.2.2 – Vitesse de phase  $\omega/k$  (à gauche) et taux de croissance des instabilités  $\gamma/k$  (à droite) normalisés par  $v_{A0}$  en fonction de l'angle  $\theta$  pour les modes d'Alfvén (bleu), magnétosoniques CGL lent (vert) et rapide (rouge) et pour le nouveau mode incompressible (orange). Première ligne :  $a_{p0} = 0.1$ ,  $\beta_{||0} = 3 \Rightarrow$  instabilité firehose ( $F$ ). Deuxième ligne :  $a_{p0} = 0.4$ ,  $\beta_{||0} = 3 \Rightarrow$  a priori stable. Troisième ligne :  $a_{p0} = 1$ ,  $\beta_{||0} = 3 \Rightarrow$  instabilité firehose inverse ( $I$ ). Quatrième ligne :  $a_{p0} = 10$ ,  $\beta_{||0} = 3 \Rightarrow$  instabilité firehose inverse ( $I$ ) et miroir ( $M$ ).

numérateur est imposé par  $I > 0$ , le mode sera instable (cas linf). Dans le cas présenté sur la deuxième ligne, le numérateur change de signe autour de  $27^\circ$ , avant  $27^\circ$  on est dans le cas Finf, entre  $27^\circ$  et  $55^\circ$ , dans le cas linf et après  $55^\circ$  dans le cas Isup. L'instabilité firehose inverse va donc pouvoir croître entre  $27^\circ$  et  $55^\circ$ . Le cas Finf n'est pas illustré ici.

Sur le diagramme de la figure II.2.1, on peut faire figurer une frontière d'instabilité oblique indiquant à partir de quel jeu de paramètre, l'instabilité apparaissant pour des angles obliques sera firehose ou firehose inverse. Le changement de signe du numérateur ayant lieu lorsque  $\tan^2 \theta = \frac{2F}{I}$  et celui du dénominateur lorsque  $\tan^2 \theta = 2$ , cette nouvelle frontière sera paramétrisée par  $F = I$ , c'est à dire :

$$0 = 1 - \frac{2}{3}\beta_{||0}(1 - a_{p0}). \quad (\text{II.2.21})$$

Cette frontière est affichée sur la figure II.2.3 avec les régions associées à chaque type d'instabilités qui peuvent se développer dans le système suivant le couple  $\{\beta_{||0}; a_{p0}\}$ . Finalement, il n'existe pas de configuration  $\{\beta_{||0}; a_{p0}\}$  telle que le nouveau mode soit stable. Ce modèle incompressible proposé sera donc difficilement implémentable voir impossible à implémenter. Sachant que l'objectif principal de ce travail se place dans le cadre compressible, la recherche d'un modèle alternatif permettant l'étude numérique rigoureuse de la loi exacte incompressible n'a pas été engagée.

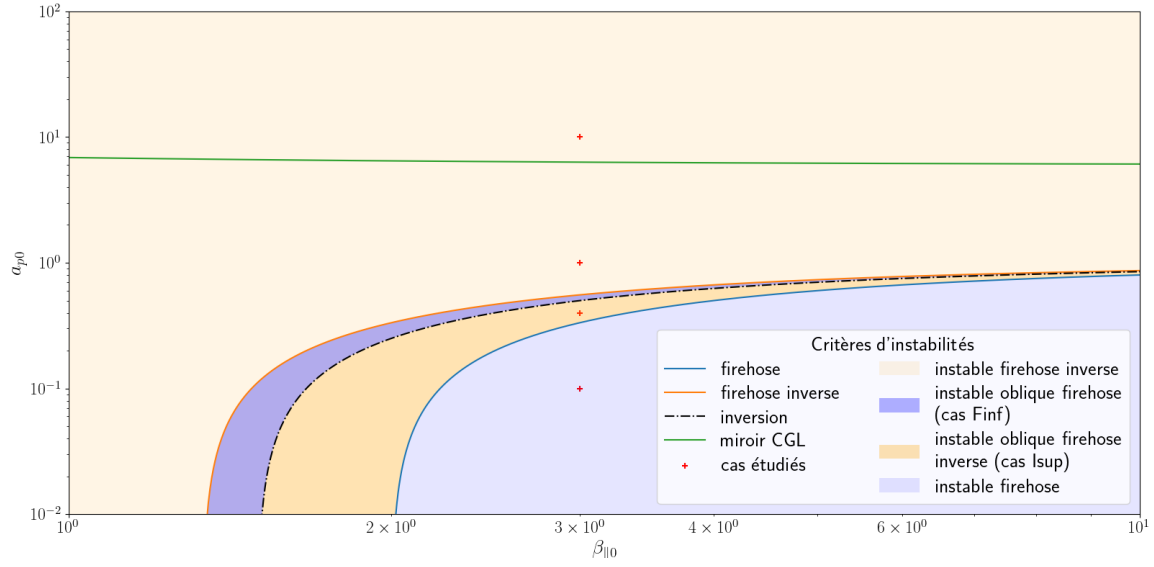


FIGURE II.2.3 – Diagramme  $a_{p0} - \beta_{\parallel 0}$ . Zones d'instabilité du modèle incompressible proposé. Critères d'instabilité firehose ( $F$ , bleu) firehose inverse ( $I$ , orange) et miroir ( $M$ , vert). Ligne segmentée : Frontière des types d'instabilité obliques (équation (II.2.21)). Points rouges : cas détaillés dans la figure II.2.2.

## 2.4 Synthèse : Limite incompressible et piste d'étude numérique

**Limite incompressible de la loi exacte avec pression tensorielle et cas gyrotrope :**

$$-4(\varepsilon - \varepsilon_{PP98}) = -2 < \delta(\bar{\mathbf{P}} - p\bar{\mathbf{I}}) : \delta(\nabla \mathbf{v}) > = -2 < \delta\bar{\mathbf{\Pi}} : \delta(\nabla \mathbf{v}) > \quad (\text{II.2.22})$$

$$-4(\varepsilon - \varepsilon_{PP98}) = -2 < \delta((p_{\parallel} - p_{\perp})(\mathbf{b}\mathbf{b} - \frac{1}{3}\bar{\mathbf{I}})) : \delta(\nabla \mathbf{v}) > \quad (\text{II.2.23})$$

**Modèle incompressible avec pression gyrotrope proposé pour l'étude numérique de turbulence incompressible :**

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (\text{II.2.24})$$

$$\partial_t \mathbf{v} + \nabla \cdot (\mathbf{v}\mathbf{v} - \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A + \frac{1}{\rho_0} \bar{\mathbf{P}}_*) = 0 \quad (\text{II.2.25})$$

$$\partial_t p + \nabla \cdot (p\mathbf{v}) + \frac{2}{3} \bar{\mathbf{\Pi}} : \nabla \mathbf{v} = 0 \quad (\text{II.2.26})$$

$$\partial_t \mathbf{v}_A - \nabla \cdot (\mathbf{v}_A \mathbf{v} - \mathbf{v} \mathbf{v}_A) = 0 \quad (\text{II.2.27})$$

$$\text{avec } \bar{\mathbf{P}}_* = (p + p_m)\bar{\mathbf{I}} + \bar{\mathbf{\Pi}} \quad p_m = \frac{\rho_0 |\mathbf{v}_A|^2}{2} \quad p = \frac{1}{3}(2p_{\perp} + p_{\parallel})$$

$$\bar{\mathbf{\Pi}} = \bar{\mathbf{P}} - p\bar{\mathbf{I}} = (p_{\parallel} - p_{\perp})(\mathbf{b}\mathbf{b} - \frac{1}{3}\bar{\mathbf{I}})$$

**Etude linéaire du modèle proposé :**

— Mode d'Alfvén incompressible polarisé suivant  $(0, 1, 0)$  :

$$\frac{\omega^2}{v_{A0}^2 k_{\parallel}^2} + \frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0}) - 1 = 0 \quad (\text{II.2.28})$$

$$\text{Instabilité firehose : } \frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0}) - 1 > 0 \quad (\text{II.2.29})$$

— Nouveau mode polarisé suivant  $(1, 0, -\tan \theta)$  :

$$\frac{\omega^2}{v_{A0}^2 k_{\parallel}^2} - \frac{2(\frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0}) - 1) \cos^2 \theta + (3\frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0}) - 2) \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta - 2 \cos^2 \theta} = 0 \quad (\text{II.2.30})$$

$$\text{Instabilité firehose parallèle } (\theta \ll 90^\circ) : 1 < \frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0}) \quad (\text{II.2.31})$$

$$\text{Instabilité firehose inverse perpendiculaire } (0^\circ \ll \theta) : \frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0}) < \frac{2}{3} \quad (\text{II.2.32})$$

$$\text{Instabilité firehose obliques } (0^\circ \ll \theta \ll 90^\circ) : \frac{2}{3} < \frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0}) < \frac{3}{4} \quad (\text{II.2.33})$$

$$\text{Instabilité firehose inverse obliques : } \frac{3}{4} < \frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(1 - a_{p0}) < 1 \quad (\text{II.2.34})$$

$\Rightarrow$  Ce modèle proposé n'est donc linéairement pas stable et sera difficilement implémentable.

## PARTIE II : CHAPITRE 3

# SORTIR DU CADRE IDÉAL ET ALLER VERS LE BI-FLUIDE

### Sommaire

3.1	L'hypothèse Hall : sans conséquences sur la pression dans la loi exacte . . . . .	69
3.2	Chauffer les électrons : conséquences sur l'équation d'énergie interne et nouveaux termes dans la loi exacte . . . . .	70
3.3	Du modèle bi-fluide vers l'impact des différentes approximations de la loi d'Ohm sur la loi exacte mono-fluide . . . . .	72
3.4	Synthèse de l'extension de la théorie des lois exactes à d'autres régimes . . . . .	82

Dans les chapitres précédents, l'équation d'induction était supposée idéale (cas MHD) ou les électrons froids (cas CGL original) :  $eqB$ . Dans ce chapitre, nous allons relaxer petit à petit les hypothèses sur l'équation d'induction en prenant d'abord en compte le terme Hall (section 3.1) puis la pression électronique (section 3.2) et finalement, nous aboutirons sur une loi exacte bi-fluide (section 3.3).

### 3.1 L'hypothèse Hall : sans conséquences sur la pression dans la loi exacte

La correction Hall signifie que les effets du champ magnétique sur la vitesse d'ensemble électronique est perceptible  $\mathbf{v}_e = \mathbf{v} - \lambda \frac{\mathbf{j}}{\rho}$  avec  $\lambda = m_i/|q_e|$ , une constante, et  $\mathbf{j} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0}} \nabla \times (\sqrt{\rho} \mathbf{v}_A)$  avec  $\mu_0$  la perméabilité du vide.

En prenant en compte la correction Hall, l'équation d'induction devient :

$$\frac{\partial \mathbf{v}_A}{\partial t} = \nabla \cdot (\mathbf{v}_A \mathbf{u} - \mathbf{u} \mathbf{v}_A) - \mathbf{u} \nabla \cdot \mathbf{v}_A + \frac{\mathbf{v}_A}{2} \nabla \cdot \mathbf{u} - \frac{\lambda}{\sqrt{\rho}} \nabla \times \left( \frac{\mathbf{j}}{\sqrt{\rho}} \times \mathbf{v}_A \right) \quad (\text{II.3.1})$$

Et, puisque  $\sqrt{\rho} \mathbf{v}_A \cdot \nabla \times \left( \frac{\mathbf{j}}{\sqrt{\rho}} \times \mathbf{v}_A \right) = \nabla \cdot ((\mathbf{j} \times \mathbf{v}_A) \times \mathbf{v}_A)$ , l'équation d'énergie magnétique

(I.2.6) devient :

$$\partial_t E_m + \nabla \cdot (E_m \mathbf{v} + \lambda(\mathbf{j} \times \mathbf{v}_A) \times \mathbf{v}_A) = \rho \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A : \nabla \mathbf{v} - p_m \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (\text{II.3.2})$$

Les autres équations du modèle ne sont pas modifiées tant que les électrons restent froids (hypothèse  $\overline{\mathbf{P}_e} = 0$ ). Cette correction n'ajoutant qu'un terme de type flux au bilan énergétique, elle n'influera pas littéralement sur les contributions de la pression, du tenseur de pression et de l'énergie interne dans la loi exacte. En effet, en notant génériquement  $\varepsilon_{ideal}$  le taux de cascade compressible obtenu avec un modèle dans lequel le terme Hall est négligé et  $\varepsilon_{hall}$  la correction Hall, le nouveau taux de cascade sera  $\varepsilon = \varepsilon_{ideal} + \varepsilon_{hall}$  et :

$$\begin{aligned} -4\varepsilon_{hall} = & \lambda \nabla_{\ell} \cdot \langle (\mathbf{j} \times \mathbf{v}_A + \mathbf{j}' \times \mathbf{v}'_A) \times \delta \mathbf{v}_A - \delta(\frac{1}{\rho} \mathbf{j} \times \mathbf{v}_A) \times (\rho \mathbf{v}_A + \rho' \mathbf{v}'_A) \rangle \\ & + \frac{\lambda}{2} \langle (\rho' \mathbf{v}'_A \cdot \delta \mathbf{v}_A - \delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \mathbf{v}'_A) \nabla \cdot (\frac{\mathbf{j}}{\rho}) - (\rho \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{v}_A - \delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \mathbf{v}_A) \nabla' \cdot (\frac{\mathbf{j}'}{\rho'}) \rangle \\ & - \lambda \langle (\rho' \mathbf{v}'_A \cdot \delta(\frac{\mathbf{j}}{\rho}) - \delta(\mathbf{j}) \cdot \mathbf{v}'_A) \nabla \cdot \mathbf{v}_A - (\rho \mathbf{v}_A \cdot \delta(\frac{\mathbf{j}}{\rho}) - \delta(\mathbf{j}) \cdot \mathbf{v}_A) \nabla' \cdot \mathbf{v}'_A \rangle \end{aligned} \quad (\text{II.3.3})$$

Ce résultat est une adaptation à nos notations du résultat obtenu par ANDRÉS, GALTIER et SAHRAOUI 2018 qui utilise la même fonction de corrélations de l'énergie magnétique,  $\mathcal{R}_m = \frac{1}{4} \langle (\rho' + \rho) \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A \rangle$ , que nous. Dans le cas incompressible, diverses formes de  $\varepsilon_{hall}$  existent et ont été comparées par FERRAND, GALTIER, SAHRAOUI, MEYRAND et al. 2019. On retiendra la forme qu'ils ont dérivée :

$$-4\varepsilon_{hall} \xrightarrow{\rho=\rho_0} -\frac{\lambda}{2} \nabla_{\ell} \cdot \langle \delta \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{v}_A \delta \mathbf{j} - 2\delta \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{j} \delta \mathbf{v}_A \rangle \quad (\text{II.3.4})$$

qui peut être retrouvée en termes de limite incompressible de la correction (II.3.3).

Linéairement, le terme Hall couple les directions du champ magnétique. Dans le cas incompressible MHD, le mode d'Alfvén se découple et on voit apparaître des modes dits whistlers polarisés circulairement autour de la direction  $\mathbf{e}_y$  qui tendent à basse fréquence vers un mode cyclotron ionique. Dans le cas compressible MHD, le couplage va avoir lieu principalement dans le cas parallèle ( $\mathbf{k} \parallel \mathbf{b}_0$ ,  $\theta = 0$ ) où les modes d'Alfvén et magnéto-soniques vont se coupler en des modes whistlers et cyclotron ionique. Plus l'angle de propagation sera oblique par rapport à  $\mathbf{b}_0$  et plus la correction Hall à la relation de dispersion sera affaiblie. Dans le cas CGL, la situation sera similaire HUNANA et al. 2019. En terme d'instabilité, l'instabilité firehose sera quelque peu stabilisée, le critère d'instabilité devenant  $1 + \frac{\beta_{\parallel 0}}{2}(a_{p0} - 1) < \frac{k_{\parallel}^2 v_{A0}^2}{4\omega_{ci}^2}$  avec  $\omega_{ci} = \frac{B_0}{\lambda}$ , la fréquence cyclotron ionique. Le critère miroir ne sera pas modifié.

### 3.2 Chauffer les électrons : conséquences sur l'équation d'énergie interne et nouveaux termes dans la loi exacte

Si l'on prend en compte le terme thermique dans l'équation d'induction, il semble plus logique d'exprimer le système en fonction de  $\{\rho, \mathbf{v}, \mathbf{v}_A, \mathbf{j}, \overline{\mathbf{P}_i}, \overline{\mathbf{P}_e}\}$ . Cela correspond à un modèle hybride :  $\{\rho, \mathbf{v}, \mathbf{v}_A, \mathbf{j}\}$  sont des grandeurs mono-fluides et  $\{\overline{\mathbf{P}_i}, \overline{\mathbf{P}_e}\}$ , bi-fluides. L'inertie des électrons est toujours négligée, mais leur agitation influe sur et est influencée



par le champ magnétique. Les équations du modèle sont alors (cas sans non-gyrotropie) :

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (\text{II.3.5})$$

$$\partial_t (\rho \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v} - \rho \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A) + \nabla \overline{\mathbf{P}}_* = 0 \quad (\text{II.3.6})$$

$$\partial_t \overline{\mathbf{P}}_i + \nabla \cdot (\mathbf{v} \overline{\mathbf{P}}_i) + (\overline{\mathbf{P}}_i \cdot \nabla \mathbf{v})^S = 0 \quad (\text{II.3.7})$$

$$\partial_t \overline{\mathbf{P}}_e + \nabla \cdot (\mathbf{v} \overline{\mathbf{P}}_e) + (\overline{\mathbf{P}}_e \cdot \nabla \mathbf{v})^S = \lambda \nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{j}}{\rho} \overline{\mathbf{P}}_e \right) + \lambda (\overline{\mathbf{P}}_e \cdot \nabla \left( \frac{\mathbf{j}}{\rho} \right))^S \quad (\text{II.3.8})$$

$$\partial_t \mathbf{v}_A - \nabla \cdot (\mathbf{v}_A \mathbf{v} - \mathbf{v} \mathbf{v}_A) + \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{v}_A - \frac{\mathbf{v}_A}{2} \nabla \cdot \mathbf{v} = -\frac{\lambda}{\sqrt{\rho}} \nabla \times \left( \frac{\mathbf{j}}{\sqrt{\rho}} \times \mathbf{v}_A \right) + \frac{\lambda}{\sqrt{\mu_0 \rho}} \nabla \times \left( \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}}_e \right) \quad (\text{II.3.9})$$

avec  $\overline{\mathbf{P}}_* = \overline{\mathbf{P}}_i + \overline{\mathbf{P}}_e + p_m \overline{\mathbf{I}}$  et  $p_m = \frac{1}{2} \rho |\mathbf{v}_A|^2$ . Dans le cas où la pression électronique est isotrope, que le premier principe thermodynamique (I.2.30) est valable, que l'on peut définir une enthalpie électronique telle que  $h = u_e + \frac{m_i}{m_e} \frac{p_e}{\rho}$  et que l'hypothèse adiabatique/isentrope s'applique dans le système, alors le terme thermique de l'équation d'induction s'annule puisque  $\nabla \times \left( \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}}_e \right) = \nabla \times \left( \frac{1}{\rho} \nabla p_e \right) = \frac{m_i}{m_e} \nabla \times \nabla h = 0$ .

En terme d'énergétique, l'équation de densité d'énergie cinétique (I.2.5) n'est modifiée que par la prise en compte de la pression électronique dans la pression totale et celle de densité d'énergie magnétique devient :

$$\partial_t E_m + \nabla \cdot (E_m \mathbf{v} + \lambda ((\mathbf{j} \times \mathbf{v}_A) \times \mathbf{v}_A + \frac{\mathbf{v}_A}{\sqrt{\mu_0 \rho}} \times \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}}_e - \frac{\mathbf{j}}{\rho} \cdot \overline{\mathbf{P}}_e)) = \rho \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A : \nabla \mathbf{v} - p_m \nabla \cdot \mathbf{v} - \lambda \overline{\mathbf{P}}_e : \nabla \left( \frac{\mathbf{j}}{\rho} \right) \quad (\text{II.3.10})$$

sachant que :

$$\sqrt{\frac{\rho}{\mu_0}} \mathbf{v}_A \cdot \nabla \times \left( \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}}_e \right) = -\nabla \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \rho}} \mathbf{v}_A \times \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}}_e \right) + \nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{j}}{\rho} \cdot \overline{\mathbf{P}}_e \right) - \overline{\mathbf{P}}_e : \nabla \left( \frac{\mathbf{j}}{\rho} \right) \quad (\text{II.3.11})$$

Pour que la conservation de l'énergie totale soit respectée, l'équation de densité d'énergie interne doit contenir le terme  $\lambda \overline{\mathbf{P}}_e : \nabla \left( \frac{\mathbf{j}}{\rho} \right)$ . A partir des équations de pression (II.3.7) et (II.3.8) et en définissant la densité d'énergie interne telle que  $\rho u = \rho_i u_i + \rho_e u_e = \frac{1}{2} \overline{\mathbf{P}}_i : \overline{\mathbf{I}} + \frac{1}{2} \overline{\mathbf{P}}_e : \overline{\mathbf{I}}$ , on obtient l'équation de densité d'énergie interne :

$$\partial_t (\rho u) + \nabla \cdot (\rho u \mathbf{v}) + (\overline{\mathbf{P}}_i + \overline{\mathbf{P}}_e) : \nabla \mathbf{v} = \lambda \nabla \cdot (\mu u_e \mathbf{j}) + \lambda \overline{\mathbf{P}}_e : \nabla \left( \frac{\mathbf{j}}{\rho} \right) \quad (\text{II.3.12})$$

en notant  $\mu = \frac{\rho_e}{\rho}$ . En général, dans le cadre MHD ou CGL, on considère que  $\mu \rightarrow 0$  comme on le verra dans la section 3.3. Les simulations qui seront utilisées dans la partie ?? concernent le modèle dérivé dans cette section avec  $\mu$  proche mais différent de 0. Par conséquent, nous garderons la contribution en dépendant dans l'équation (II.3.12) afin de dériver une loi exacte reflétant au mieux le modèle simulé.

Le dernier terme de cette équation pouvant être relié à  $\sqrt{\rho} \mathbf{v}_A \cdot \nabla \times \left( \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}}_e \right)$  et à des termes flux, sa contribution en tant que source dans le bilan énergétique s'annulera dans le cas particulier où l'on peut faire apparaître l'enthalpie  $h$ . L'équation de densité d'énergie

totale est donc dans le cas d'un modèle hybride (+ hypothèse adiabatique/isentrope) :

$$\partial_t E_{tot} + \nabla \cdot (E_{tot} \mathbf{v} + \overline{\mathbf{P}}_* \cdot \mathbf{v} - \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A + \lambda((\mathbf{j} \times \mathbf{v}_A) \times \mathbf{v}_A + \frac{\mathbf{v}_A}{\sqrt{\mu_0 \rho}} \times \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}}_e - \frac{\mathbf{j}}{\rho} \cdot \overline{\mathbf{P}}_e - \mu u_e \mathbf{j})) = 0 \quad (\text{II.3.13})$$

Pour ce qui est des corrections aux taux de cascade,  $\varepsilon = \varepsilon_{ideal} + \varepsilon_{hall} + \varepsilon_{hallpe}$  avec :

$$\begin{aligned} - & 4 \quad \varepsilon_{hallpe} \\ = & \frac{\lambda}{\sqrt{\mu_0}} < (\rho' + \rho)(\mathbf{v}_A \cdot (\frac{1}{\sqrt{\rho'}} \nabla' \times (\frac{1}{\rho'} \nabla' \cdot \overline{\mathbf{P}}_e')) + \mathbf{v}'_A \cdot (\frac{1}{\sqrt{\rho}} \nabla \times (\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}}_e))) > \\ & + 2\lambda < \frac{\rho'}{\rho} (\nabla \cdot (\mu u_e \mathbf{j}) + \overline{\mathbf{P}}_e : \nabla(\frac{\mathbf{j}}{\rho})) + \frac{\rho}{\rho'} (\nabla' \cdot (\mu u'_e \mathbf{j}') + \overline{\mathbf{P}}'_e : \nabla'(\frac{\mathbf{j}'}{\rho'})) > \\ = & 2 \frac{\lambda}{\sqrt{\mu_0}} (\nabla \cdot < \delta \rho \delta(\frac{\mathbf{v}_A}{\sqrt{\rho}} \times \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}}_e) \delta(\frac{1}{\rho}) > - < (\rho' \nabla(\frac{1}{\rho}) - \rho \nabla'(\frac{1}{\rho'})) \cdot \delta(\frac{\mathbf{v}_A}{\sqrt{\rho}} \times \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}}_e) >) \\ & - 2\lambda (\nabla \cdot < \delta \rho \delta(\frac{\mathbf{j}}{\rho} \cdot \overline{\mathbf{P}}_e) \delta(\frac{1}{\rho}) > - < (\rho' \nabla(\frac{1}{\rho}) - \rho \nabla'(\frac{1}{\rho'})) \cdot \delta(\frac{\mathbf{j}}{\rho} \cdot \overline{\mathbf{P}}_e) >) \\ & - 2\lambda \mu (\nabla \cdot < \delta \rho \delta u_e \delta(\frac{\mathbf{j}}{\rho}) > - < (\rho' \nabla \cdot (\frac{\mathbf{j}}{\rho}) - \rho \nabla' \cdot (\frac{\mathbf{j}'}{\rho'})) \delta u_e >) \\ & + \frac{\lambda}{\sqrt{\mu_0}} < (\mathbf{v}_A \delta \rho - 2\rho \delta \mathbf{v}_A) \cdot (\frac{1}{\sqrt{\rho'}} \nabla' \times (\frac{1}{\rho'} \nabla' \cdot \overline{\mathbf{P}}_e')) - (\mathbf{v}'_A \delta \rho - 2\rho' \delta \mathbf{v}_A) \cdot (\frac{1}{\sqrt{\rho}} \nabla \times (\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}}_e)) > \end{aligned} \quad (\text{II.3.14})$$

et en prenant en compte  $\frac{m_e}{m_i} u_e$  et  $\overline{\mathbf{P}}_e$  dans l'énergie interne  $u$  et les tenseurs de pression  $\overline{\mathbf{P}}$  et  $\overline{\mathbf{P}}_*$  présents dans  $\varepsilon_{ideal}$ . Les deux premières lignes de l'équation (II.3.14) correspondent aux formes brutes de la correction. L'égalité suivante, dépendant de termes flux et sources, est obtenue en injectant (II.3.11) et en identifiant les fonctions de structures  $< \delta \rho \delta(\frac{\mathbf{v}_A}{\sqrt{\rho}} \times \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}}_e) \delta(\frac{1}{\rho}) >$ ,  $< \delta \rho \delta(\frac{\mathbf{j}}{\rho} \cdot \overline{\mathbf{P}}_e) \delta(\frac{1}{\rho}) >$  et  $< \delta \rho \delta u_e \delta(\frac{\mathbf{j}}{\rho}) >$ . Dans le cas où l'on peut faire apparaître d'enthalpie  $h$ , la dernière ligne de (II.3.14) sera nulle. Ces corrections serviront dans l'étude numérique de la partie ?? puisque le modèle simulé est le modèle hybride.

Dans la limite incompressible, la majorité des termes de (II.3.14) s'annulent et il ne reste que la dernière ligne qui s'écrit :

$$\boxed{-4\varepsilon_{hallpe} \xrightarrow{\rho=\rho_0} -2 \frac{\lambda}{\sqrt{\rho_0}} < \delta \mathbf{v}_A \cdot \delta(\nabla \times \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}}_e) >} \quad (\text{II.3.15})$$

qui s'annule si  $\overline{\mathbf{P}}_e$  est isotrope.

Linéairement, la prise en compte de la pression électronique va venir modifier les critères d'instabilités comme l'ont montré par exemple **pantellini\_electron\_1995** ; **hellinger\_comment\_2007** pour le critère miroir. Dans la partie ??, on calculera les corrections à apporter aux différents critères en fonction des modèles simulés.

### 3.3 Du modèle bi-fluide vers l'impact des différentes approximations de la loi d'Ohm sur la loi exacte mono-fluide

Par curiosité, je me suis demandé à quoi ressemblerait la loi exacte si l'on prenait en compte l'ensemble de l'équation d'induction. Prendre en compte le terme inertiel électronique dans l'équation d'induction en plus des termes Hall et thermique, revient à considérer le modèle bi-fluide avec l'hypothèse de quasi-neutralité ( $q_i = -q_e$ ) qui implique pour la densité de particules  $n_i \simeq n_e = n$ ). On propose donc ici, de chercher à obtenir une loi exacte généralisée sur le modèle bi-fluide ouvert et ensuite de tendre vers la quasi-neutralité. Contrairement à BANERJEE et ANDRÉS 2020 proposant une loi

bi-fluide polytrophe, le système restera ouvert et la fonction de corrélation pour l'énergie électromagnétique sera choisie au plus près de celle utilisée dans l'ensemble de ces travaux c'est-à-dire  $\langle \rho \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}'_A \rangle$  et non  $\langle \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} \rangle$ . Les équations bi-fluides non relativiste<sup>1</sup> utilisée avec  $r = i, e$  sont :

$$\partial_t n_r + \nabla \cdot (n_r \mathbf{v}_r) = 0 \quad (\text{II.3.16})$$

$$\partial_t \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_r \cdot \nabla \mathbf{v}_r + \frac{1}{m_r n_r} \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}}_r = \frac{q_r}{m_r} \mathbf{v}_r \times \mathbf{B} (+ \frac{q_r}{m_r} \mathbf{E}) \quad (\text{II.3.17})$$

$$\partial_t u_r + \mathbf{v}_r \cdot \nabla u_r + \frac{1}{m_r n_r} \overline{\mathbf{P}}_r : \nabla \mathbf{v}_r = 0 \quad (\text{II.3.18})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \sum_r \frac{q_r n_r}{\varepsilon_0} \quad (\text{II.3.19})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\text{II.3.20})$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \sum_r q_r n_r \mathbf{v}_r \quad (\text{II.3.21})$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B} \quad (\text{II.3.22})$$

Les charges  $q_r$  et masses  $m_r$  sont des constantes caractéristiques de chaque fluide. Pour alléger un peu le calcul, on ne fait pas apparaître les termes de forçage, dissipation et flux de chaleur et on va adimensionnaliser les équations (les définitions utilisées pour cela ne seront valables que dans cette section). Pour cela, on va considérer  $\mu = \frac{m_e}{M} = \frac{m_e}{m_i + m_e}$ , une vitesse d'Alfvén de référence égale à la vitesse du son dans le vide  $v_{A0} = \frac{B_0}{\sqrt{\mu_0 n_0 M}} = c$ , une longueur et un temps caractéristiques  $L_0$  et  $t_0 = \frac{L_0}{v_{A0}}$ , la pression de référence sera  $p_0 = M n_0 v_{A0}^2$ , l'énergie spécifique  $v_{A0}^2$ , le champ électrique  $E_0 = B_0 v_{A0}$  et on définit une longueur inertielle sans dimension  $\lambda = \frac{L_0 \sqrt{\mu_0 n_0 e^2}}{\sqrt{M}}$ . Le système devient :

$$\tilde{\partial}_t \tilde{n}_r + \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{n}_r \tilde{\mathbf{v}}_r) = 0 \quad (\text{II.3.23})$$

$$\tilde{\partial}_t \tilde{\mathbf{v}}_i + \tilde{\mathbf{v}}_i \cdot \tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{v}}_i + \frac{1}{(1-\mu)\tilde{n}_i} \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\overline{\mathbf{P}}}_i = \frac{\lambda}{(1-\mu)} \tilde{\mathbf{v}}_i \times \tilde{\mathbf{B}} (+ \frac{\lambda}{(1-\mu)} \tilde{\mathbf{E}}) \quad (\text{II.3.24})$$

$$\tilde{\partial}_t \tilde{\mathbf{v}}_e + \tilde{\mathbf{v}}_e \cdot \tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{v}}_e + \frac{1}{\mu \tilde{n}_e} \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\overline{\mathbf{P}}}_e = -\frac{\lambda}{\mu} \tilde{\mathbf{v}}_e \times \tilde{\mathbf{B}} (-\frac{\lambda}{\mu} \tilde{\mathbf{E}}) \quad (\text{II.3.25})$$

$$\tilde{\partial}_t \tilde{u}_i + \tilde{\mathbf{v}}_i \cdot \tilde{\nabla} \tilde{u}_i + \frac{1}{(1-\mu)\tilde{n}_i} \tilde{\overline{\mathbf{P}}}_i : \tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{v}}_i = 0 \quad (\text{II.3.26})$$

$$\tilde{\partial}_t \tilde{u}_e + \tilde{\mathbf{v}}_e \cdot \tilde{\nabla} \tilde{u}_e + \frac{1}{\mu \tilde{n}_e} \tilde{\overline{\mathbf{P}}}_e : \tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{v}}_e = 0 \quad (\text{II.3.27})$$

$$\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{E}} = \lambda(\tilde{n}_i - \tilde{n}_e) \quad (\text{II.3.28})$$

$$\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{B}} = 0 \quad (\text{II.3.29})$$

$$\tilde{\nabla} \times \tilde{\mathbf{B}} = \lambda(\tilde{n}_i \tilde{\mathbf{v}}_i - \tilde{n}_e \tilde{\mathbf{v}}_e) \quad (\text{II.3.30})$$

$$\tilde{\nabla} \times \tilde{\mathbf{E}} = -\tilde{\partial}_t \tilde{\mathbf{B}} \quad (\text{II.3.31})$$

en notant les quantités sans dimension avec un « $\sim$ ». Pour la suite de cette section, on ne fera pas apparaître les « $\sim$ » afin d'alléger les notations.

1. L'hypothèse non-relativiste nous permet de négliger  $q_r n_r \mathbf{E}$  devant  $q_r n_r \mathbf{v}_r \times \mathbf{B}$  dans (II.3.17) (on l'y indique entre parenthèse car on en aura besoin dans la loi d'Ohm généralisée) et  $\varepsilon_0 \mu_0 \partial_t \mathbf{E}$  devant  $\nabla \times \mathbf{B}$  dans (II.3.21).

L'énergie totale de ce système est :

$$E_{tot} = \frac{1}{2}(1-\mu)n_i|\mathbf{v}_i|^2 + \frac{1}{2}\mu n_e|\mathbf{v}_e|^2 + (1-\mu)n_i u_i + \mu n_e u_e + \frac{|\mathbf{B}|^2}{2}$$

En définissant la vitesse d'Alfvén telle que  $\mathbf{v}_A = \frac{\mathbf{B}}{\sqrt{(1-\mu)n_i + \mu n_e}}$ , on peut écrire l'énergie magnétique  $\frac{|\mathbf{B}|^2}{2} = \frac{1}{2}((1-\mu)n_i + \mu n_e)|\mathbf{v}_A|^2$  et l'équation d'induction :

$$\partial_t \mathbf{v}_A = -\frac{\nabla \times \mathbf{E}}{\sqrt{(1-\mu)n_i + \mu n_e}} + \frac{\mathbf{v}_A}{2} \frac{(1-\mu)\nabla \cdot (n_i \mathbf{v}_i) + \mu \nabla \cdot (n_e \mathbf{v}_e)}{(1-\mu)n_i + \mu n_e} \quad (\text{II.3.32})$$

$$= -\frac{\nabla \times \mathbf{E}}{\sqrt{(1-\mu)n_i + \mu n_e}} + \frac{\mathbf{v}_A}{2} \frac{\nabla \cdot ((1-\mu)n_i \mathbf{v}_i + \mu n_e \mathbf{v}_e)}{(1-\mu)n_i + \mu n_e} \quad (\text{II.3.33})$$

$$(\text{II.3.34})$$

La loi d'Ohm généralisée sera aussi nécessaire, par exemple pour remplacer  $\mathbf{E}$ . Elle s'obtient à partir des équations (II.3.23), (II.3.24) et (II.3.25) en cherchant l'évolution de  $\mathbf{j} = \lambda(n_i \mathbf{v}_i - n_e \mathbf{v}_e)$  :

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{j} = & -\nabla \cdot \left( \lambda \frac{n_e - n_i}{n_i n_e} (\rho^2 \mathbf{v} \mathbf{v} + \frac{\mu^2}{\lambda^2} \mathbf{j} \mathbf{j}) + \frac{\rho \rho}{n_i n_e} \mathbf{v} \mathbf{j} + \frac{\rho \rho}{n_i n_e} \mathbf{j} \mathbf{v} + \frac{(2\mu - 1)n_i}{n_i n_e} \frac{1}{\lambda} \mathbf{j} \mathbf{j} \right) \\ & - \lambda \frac{\mu \nabla \cdot \bar{\mathbf{P}}_i - (1-\mu) \nabla \cdot \bar{\mathbf{P}}_e}{(1-\mu)\mu} + \frac{\lambda^2}{(1-\mu)\mu} \rho \mathbf{v} \times \mathbf{B} + \frac{\lambda(2\mu - 1)}{(1-\mu)\mu} \mathbf{j} \times \mathbf{B} \\ & \left[ + \frac{\lambda^2(\mu n_i + (1-\mu)n_e)}{\mu(1-\mu)} \mathbf{E} \right] \end{aligned} \quad (\text{II.3.35})$$

Afin de compacter un peu le résultat, on y a fait apparaître les grandeurs mono-fluides  $\rho = (1-\mu)n_i + \mu n_e$  et  $\mathbf{v} = \frac{(1-\mu)n_i \mathbf{v}_i + \mu n_e \mathbf{v}_e}{(1-\mu)n_i + \mu n_e}$ .

En appliquant la méthode résumée dans la section I.1 sur les fonctions de corrélations d'énergie totale ionique,  $\mathcal{R}_{toti} = \frac{1-\mu}{4} < (n'_i + n_i)(\mathbf{v}'_i \cdot \mathbf{v}_i + \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A) + 2n'_i u_i + 2n_i u'_i >$ , et électronique,  $\mathcal{R}_{tote} = \frac{\mu}{4} < (n'_e + n_e)(\mathbf{v}'_e \cdot \mathbf{v}_e + \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A) + 2n'_e u_e + 2n_e u'_e >$  puis en supposant les hypothèses de stationnarité statistique et de séparation d'échelles de Kolmogorov, on obtient les taux de cascade,  $\varepsilon_i$  et  $\varepsilon_e$ , associés à chaque fluide et exprimé dans la zone inertielle :

$$\begin{aligned} -4\varepsilon_i = & (1-\mu)(\nabla_{\ell} \cdot < \delta(n_i \mathbf{v}_i) \cdot \delta \mathbf{v}_i \delta \mathbf{v}_i > + < \delta \mathbf{v}_i \cdot (n_i \mathbf{v}_i \nabla' \cdot \mathbf{v}'_i - n'_i \mathbf{v}'_i \nabla \cdot \mathbf{v}_i) >) \\ & + 2(1-\mu)(\nabla_{\ell} \cdot < \delta n_i \delta u_i \delta \mathbf{v}_i > + < \delta u_i (n_i \nabla' \cdot \mathbf{v}'_i - n'_i \nabla \cdot \mathbf{v}_i) >) \\ & + \nabla_{\ell} \cdot < \delta(n_i \mathbf{v}_i) \cdot \delta \bar{\mathbf{P}}_i \delta(\frac{1}{n_i}) > + < \delta \bar{\mathbf{P}}_i : (n_i \mathbf{v}_i \nabla'(\frac{1}{n'_i}) - n'_i \mathbf{v}'_i \nabla(\frac{1}{n_i})) > \\ & + 2 < \delta(\frac{\bar{\mathbf{P}}_i}{n_i}) : (n'_i \nabla \mathbf{v}_i - n_i \nabla' \mathbf{v}'_i) > \\ & + \frac{1-\mu}{2} < \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A \frac{((1-\mu)(n'_i - n_i) - 2\mu n_e) \nabla \cdot (n_i \mathbf{v}_i) + \mu(n'_i + n_i) \nabla \cdot (n_e \mathbf{v}_e)}{(1-\mu)n_i + \mu n_e} > \\ & + \frac{1-\mu}{2} < \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}'_A \frac{((1-\mu)(n_i - n'_i) - 2\mu n'_e) \nabla' \cdot (n'_i \mathbf{v}'_i) + \mu(n'_i + n_i) \nabla' \cdot (n'_e \mathbf{v}'_e)}{(1-\mu)n'_i + \mu n'_e} > \\ & + \lambda < (n'_i + n_i)(\mathbf{v}'_i \cdot \mathbf{v}_i \times \mathbf{B} + \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}'_i \times \mathbf{B}') > \\ & - (1-\mu) < (n'_i + n_i) \left( \frac{\nabla' \cdot (\mathbf{E}' \times \mathbf{v}_A)}{\sqrt{(1-\mu)n'_i + \mu n'_e}} + \frac{\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{v}'_A)}{\sqrt{(1-\mu)n_i + \mu n_e}} \right) > \end{aligned} \quad (\text{II.3.36})$$

$$\begin{aligned}
-4\varepsilon_e = & \mu(\nabla_{\ell} \cdot \langle \delta(n_e \mathbf{v}_e) \cdot \delta \mathbf{v}_e \delta \mathbf{v}_e \rangle + \langle \delta \mathbf{v}_e \cdot (n_e \mathbf{v}_e \nabla' \cdot \mathbf{v}'_e - n'_e \mathbf{v}'_e \nabla \cdot \mathbf{v}_e) \rangle) \\
& + 2\mu(\nabla_{\ell} \cdot \langle \delta n_e \delta u_e \delta \mathbf{v}_e \rangle + \langle \delta u_e (n_e \nabla' \cdot \mathbf{v}'_e - n'_e \nabla \cdot \mathbf{v}_e) \rangle) \\
& + \nabla_{\ell} \cdot \langle \delta(n_e \mathbf{v}_e) \cdot \delta \overline{\mathbf{P}}_e \delta(\frac{1}{n_e}) \rangle + \langle \delta \overline{\mathbf{P}}_e : (n_e \mathbf{v}_e \nabla'(\frac{1}{n'_e}) - n'_e \mathbf{v}'_e \nabla(\frac{1}{n_e})) \rangle \\
& + 2 \langle \delta(\frac{\overline{\mathbf{P}}_e}{n_e}) : (n'_e \nabla \mathbf{v}_e - n_e \nabla' \mathbf{v}'_e) \rangle \\
& + \frac{\mu}{2} \langle \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A \frac{(1-\mu)(n'_e+n_e)\nabla' \cdot (n_i \mathbf{v}_i) + (\mu(n'_e-n_e) - 2(1-\mu)n_i)\nabla \cdot (n_e \mathbf{v}_e)}{(1-\mu)n_i + \mu n_e} \rangle \\
& + \frac{\mu}{2} \langle \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}'_A \frac{(1-\mu)(n'_e+n_e)\nabla' \cdot (n'_i \mathbf{v}'_i) + (\mu(n_e-n'_e) - 2(1-\mu)n'_i)\nabla \cdot (n'_e \mathbf{v}'_e)}{(1-\mu)n'_i + \mu n'_e} \rangle \\
& - \lambda \langle (n'_e + n_e)(\mathbf{v}'_e \cdot \mathbf{v}_e \times \mathbf{B} + \mathbf{v}_e \cdot \mathbf{v}'_e \times \mathbf{B}') \rangle \\
& - \mu \langle (n'_e + n_e) \left( \frac{\nabla' \cdot (\mathbf{E}' \times \mathbf{v}_A)}{\sqrt{(1-\mu)n'_i + \mu n'_e}} + \frac{\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{v}'_A)}{\sqrt{(1-\mu)n_i + \mu n_e}} \right) \rangle
\end{aligned}
\tag{II.3.37}$$

On y retrouve des fonctions de structures et des termes sources similaires à ceux dérivés dans le cas mono-fluide (voir équations (II.1.16), (II.1.18) et (I.3.21)) pour les contributions cinétique et thermodynamique ( $\mathbf{v}_i$ ,  $\mathbf{v}_e$ ,  $u_i$ ,  $u_e$ ,  $\overline{\mathbf{P}}_i$  et  $\overline{\mathbf{P}}_e$ ). Par contre, la contribution électromagnétique diffère (quatre dernières lignes de (II.3.36) et (II.3.37)). On remarque d'ailleurs qu'elle reflète le couplage des deux fluides par le champ électromagnétique étant donné que dans (II.3.36) comme dans (II.3.37) elle dépend de  $\mathbf{v}_i$ ,  $\mathbf{v}_e$ ,  $\mathbf{v}_i$ ,  $n_i$  et  $n_e$ .

Si l'on somme les quatre premières lignes de (II.3.36) et (II.3.37), on obtient la contribution bi-fluide cinétique et thermique notée  $\varepsilon_{TH}$  :

$$\begin{aligned}
-4 \varepsilon_{TH} = & (1-\mu)(\nabla_{\ell} \cdot \langle \delta(n_i \mathbf{v}_i) \cdot \delta \mathbf{v}_i \delta \mathbf{v}_i \rangle + \langle \delta \mathbf{v}_i \cdot (n_i \mathbf{v}_i \nabla' \cdot \mathbf{v}'_i - n'_i \mathbf{v}'_i \nabla \cdot \mathbf{v}_i) \rangle) \\
& + 2(1-\mu)(\nabla_{\ell} \cdot \langle \delta n_i \delta u_i \delta \mathbf{v}_i \rangle + \langle \delta u_i (n_i \nabla' \cdot \mathbf{v}'_i - n'_i \nabla \cdot \mathbf{v}_i) \rangle) \\
& + \nabla_{\ell} \cdot \langle \delta(n_i \mathbf{v}_i) \cdot \delta \overline{\mathbf{P}}_i \delta(\frac{1}{n_i}) \rangle + \langle \delta \overline{\mathbf{P}}_i : (n_i \mathbf{v}_i \nabla'(\frac{1}{n'_i}) - n'_i \mathbf{v}'_i \nabla(\frac{1}{n_i})) \rangle \\
& + 2 \langle \delta \frac{\overline{\mathbf{P}}_i}{n_i} : (n'_i \nabla \mathbf{v}_i - n_i \nabla' \mathbf{v}'_i) \rangle \\
& + \mu(\nabla_{\ell} \cdot \langle \delta(n_e \mathbf{v}_e) \cdot \delta \mathbf{v}_e \delta \mathbf{v}_e \rangle + \langle \delta \mathbf{v}_e \cdot (n_e \mathbf{v}_e \nabla' \cdot \mathbf{v}'_e - n'_e \mathbf{v}'_e \nabla \cdot \mathbf{v}_e) \rangle) \\
& + 2\mu(\nabla_{\ell} \cdot \langle \delta n_e \delta u_e \delta \mathbf{v}_e \rangle + \langle \delta u_e (n_e \nabla' \cdot \mathbf{v}'_e - n'_e \nabla \cdot \mathbf{v}_e) \rangle) \\
& + \nabla_{\ell} \cdot \langle \delta(n_e \mathbf{v}_e) \cdot \delta \overline{\mathbf{P}}_e \delta(\frac{1}{n_e}) \rangle + \langle \delta \overline{\mathbf{P}}_e : (n_e \mathbf{v}_e \nabla'(\frac{1}{n'_e}) - n'_e \mathbf{v}'_e \nabla(\frac{1}{n_e})) \rangle \\
& + 2 \langle \delta \frac{\overline{\mathbf{P}}_e}{n_e} : (n'_e \nabla \mathbf{v}_e - n_e \nabla' \mathbf{v}'_e) \rangle
\end{aligned}
\tag{II.3.38}$$

On peut y faire apparaître les grandeurs mono-fluide  $\rho = (1-\mu)n_i + \mu n_e$  et  $\mathbf{v} = \frac{(1-\mu)n_i \mathbf{v}_i + \mu n_e \mathbf{v}_e}{(1-\mu)n_i + \mu n_e}$  et remplacer  $\mathbf{v}_i$  et  $\mathbf{v}_e$  par  $\mathbf{j} = \lambda(n_i \mathbf{v}_i - n_e \mathbf{v}_e)$  et  $\mathbf{v}$ .<sup>2</sup> On se place aussi

---

2. Si  $\mathbf{j} = \lambda(n_i \mathbf{v}_i - n_e \mathbf{v}_e)$  et  $\rho \mathbf{v} = (1-\mu)n_i \mathbf{v}_i + \mu n_e \mathbf{v}_e$  alors  $\mathbf{v}_i = \frac{1}{n_i} \rho \mathbf{v} + \frac{\mu}{\lambda n_i} \mathbf{j} = \mathbf{v} + \frac{\mu}{\lambda} \frac{\mathbf{j}}{\rho}$  et  $\mathbf{v}_e = \frac{1}{n_e} \rho \mathbf{v} - \frac{1-\mu}{\lambda n_e} \mathbf{j} = \mathbf{v} - \frac{1-\mu}{\lambda} \frac{\mathbf{j}}{\rho}$ .

dans le cadre quasi-neutre ( $n_i = n_e = \rho$ ). Ainsi :

$$\begin{aligned}
 -4 \quad \varepsilon_{TH} = & \nabla_{\ell} \cdot \langle \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{v} \delta \mathbf{v} \rangle + \frac{\mu(1-\mu)(2\mu-1)}{\lambda^3} \nabla_{\ell} \cdot \langle \delta(\mathbf{j}) \cdot \delta(\frac{1}{\rho} \mathbf{j}) \delta(\frac{1}{\rho} \mathbf{j}) \rangle \\
 & + \frac{\mu(1-\mu)}{\lambda} \nabla_{\ell} \cdot \langle \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \delta(\frac{1}{\rho} \mathbf{j}) \delta(\frac{1}{\rho} \mathbf{j}) + \delta(\mathbf{j}) \cdot \delta(\mathbf{v}) \delta(\frac{1}{\rho} \mathbf{j}) + \delta(\mathbf{j}) \cdot \delta(\frac{1}{\rho} \mathbf{j}) \delta(\mathbf{v}) \rangle \\
 & + \langle \delta \mathbf{v} \cdot (\rho \mathbf{v} \nabla' \cdot \mathbf{v}' - \rho' \mathbf{v}' \nabla \cdot \mathbf{v}) \rangle + \frac{\mu(1-\mu)}{\lambda} \langle \delta \frac{\mathbf{j}}{\rho} \cdot (\mathbf{j} \nabla' \cdot \mathbf{v}' - \mathbf{j}' \nabla \cdot \mathbf{v}) \rangle \\
 & + \frac{\mu(1-\mu)}{\lambda} \langle (\delta \mathbf{v} + \frac{(2\mu-1)}{\lambda^2} \delta \frac{\mathbf{j}}{\rho}) \cdot (\mathbf{j} \nabla' \cdot \frac{\mathbf{j}'}{\rho'} - \mathbf{j}' \nabla \cdot \frac{\mathbf{j}}{\rho}) \rangle \\
 & + \frac{\mu(1-\mu)}{\lambda} \langle \delta \frac{\mathbf{j}}{\rho} \cdot (\rho \mathbf{v} \nabla' \cdot \frac{\mathbf{j}'}{\rho'} - \rho \mathbf{v}' \nabla \cdot \frac{\mathbf{j}}{\rho}) \rangle \\
 & + 2 \nabla_{\ell} \cdot \langle \delta \rho \delta((1-\mu)u_i + \mu u_e) \delta(\mathbf{v}) \rangle \\
 & + 2 \langle \delta((1-\mu)u_i + \mu u_e) (\rho \nabla' \cdot (\mathbf{v}') - \rho' \nabla \cdot (\mathbf{v})) \rangle \\
 & + 2 \frac{(1-\mu)\mu}{\lambda} (\nabla_{\ell} \cdot \langle \delta \rho \delta(u_i - u_e) \delta(\frac{\mathbf{j}}{\rho}) \rangle + \langle \delta(u_i - u_e) (\rho \nabla' \cdot (\frac{\mathbf{j}'}{\rho'}) - \rho' \nabla \cdot (\frac{\mathbf{j}}{\rho})) \rangle) \\
 & + \nabla_{\ell} \cdot \langle \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \delta(\overline{\mathbf{P}}_i + \overline{\mathbf{P}}_e) \delta(\frac{1}{\rho}) \rangle + \langle \delta(\overline{\mathbf{P}}_i + \overline{\mathbf{P}}_e) : (\rho \mathbf{v} \nabla'(\frac{1}{\rho'}) - \rho' \mathbf{v}' \nabla(\frac{1}{\rho})) \rangle \\
 & + \frac{1}{\lambda} \nabla_{\ell} \cdot \langle \delta(\mathbf{j}) \cdot \delta(\mu \overline{\mathbf{P}}_i + (1-\mu) \overline{\mathbf{P}}_e) \delta(\frac{1}{\rho}) \rangle \\
 & + \frac{1}{\lambda} \langle \delta(\mu \overline{\mathbf{P}}_i + (1-\mu) \overline{\mathbf{P}}_e) : (\mathbf{j} \nabla'(\frac{1}{\rho'}) - \mathbf{j}' \nabla(\frac{1}{\rho})) \rangle \\
 & + 2 \langle \delta(\frac{\overline{\mathbf{P}}_i}{\rho} + \frac{\overline{\mathbf{P}}_e}{\rho}) : (\rho' \nabla(\mathbf{v}) - \rho \nabla'(\mathbf{v}')) \rangle \\
 & + \frac{2}{\lambda} \langle \delta(\mu \frac{\overline{\mathbf{P}}_i}{\rho} - (1-\mu) \frac{\overline{\mathbf{P}}_e}{\rho}) : (\rho' \nabla(\frac{\mathbf{j}}{\rho}) - \rho \nabla'(\frac{\mathbf{j}'}{\rho'})) \rangle
 \end{aligned}
 \tag{II.3.39}$$

Si  $\mu \rightarrow 0$ , on obtient :

$$\begin{aligned}
 -4 \quad \varepsilon_{TH} \\
 \xrightarrow{\mu \rightarrow 0} & \nabla_{\ell} \cdot \langle \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{v} \delta \mathbf{v} \rangle + \langle \delta \mathbf{v} \cdot (\rho \mathbf{v} \nabla' \cdot \mathbf{v}' - \rho' \mathbf{v}' \nabla \cdot \mathbf{v}) \rangle \\
 & + 2 (\nabla_{\ell} \cdot \langle \delta \rho \delta(u_i) \delta(\mathbf{v}) \rangle + \langle \delta(u_i) (\rho \nabla' \cdot (\mathbf{v}') - \rho' \nabla \cdot (\mathbf{v})) \rangle) \\
 & + \nabla_{\ell} \cdot \langle \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \delta(\overline{\mathbf{P}}_i + \overline{\mathbf{P}}_e) \delta(\frac{1}{\rho}) \rangle + \langle \delta(\overline{\mathbf{P}}_i + \overline{\mathbf{P}}_e) : (\rho \mathbf{v} \nabla'(\frac{1}{\rho'}) - \rho' \mathbf{v}' \nabla(\frac{1}{\rho})) \rangle \\
 & + \frac{1}{\lambda} (\nabla_{\ell} \cdot \langle \delta(\mathbf{j}) \cdot \delta(\overline{\mathbf{P}}_e) \delta(\frac{1}{\rho}) \rangle + \langle \delta(\overline{\mathbf{P}}_e) : (\mathbf{j} \nabla'(\frac{1}{\rho'}) - \mathbf{j}' \nabla(\frac{1}{\rho})) \rangle) \\
 & + 2 \langle \delta(\frac{\overline{\mathbf{P}}_i}{\rho} + \frac{\overline{\mathbf{P}}_e}{\rho}) : (\rho' \nabla(\mathbf{v}) - \rho \nabla'(\mathbf{v}')) \rangle - \frac{2}{\lambda} \langle \delta(\frac{\overline{\mathbf{P}}_e}{\rho}) : (\rho' \nabla(\frac{\mathbf{j}}{\rho}) - \rho \nabla'(\frac{\mathbf{j}'}{\rho'})) \rangle
 \end{aligned}
 \tag{II.3.40}$$

On y reconnaît les termes dérivés dans le cas idéal CGL section 1.3 mais aussi la contribution idéale de la pression électronique abordée dans la section 3.2 ainsi que des termes dépendant de  $\overline{\mathbf{P}}_e$  et  $\mathbf{j}$  qui font partie (moins explicitement) de la correction (II.3.14).

Si l'on somme les contributions électromagnétiques présentées dans (II.3.36) et (II.3.37), on obtient après quelques manipulations et en injectant  $\rho$  et  $\mathbf{v}$  et  $\mathbf{j}$ , la contribution notée

$\varepsilon_{EM}$  :

$$\begin{aligned}
-4 \varepsilon_{EM} &= -\nabla_{\ell} \cdot < (\rho' + \rho) \left( \frac{\mathbf{E}' \times \mathbf{v}_A}{\sqrt{\rho'}} - \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{v}'_A}{\sqrt{\rho}} \right) > + \frac{1}{2} < (\rho' - \rho) \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}'_A (\nabla \cdot \mathbf{v} - \nabla' \cdot \mathbf{v}') > \\
&+ < (\rho' - \rho) \left( \left( -\frac{\mathbf{E} \times \mathbf{v}'_A}{\sqrt{\rho}} + \frac{1}{2} \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}'_A \mathbf{v} \right) \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} + \left( \frac{\mathbf{E}' \times \mathbf{v}_A}{\sqrt{\rho'}} - \frac{1}{2} \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A \mathbf{v}' \right) \cdot \frac{\nabla' \rho'}{\rho'} \right) > \\
&+ \lambda < (n'_i + n_i) (\mathbf{v}'_i \cdot \mathbf{v}_i \times \mathbf{B} + \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}'_i \times \mathbf{B}') - (n'_e + n_e) (\mathbf{v}'_e \cdot \mathbf{v}_e \times \mathbf{B} + \mathbf{v}_e \cdot \mathbf{v}'_e \times \mathbf{B}') > \\
&= -\nabla_{\ell} \cdot < (\rho' + \rho) \left( \frac{\mathbf{E}' \times \mathbf{v}_A}{\sqrt{\rho'}} - \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{v}'_A}{\sqrt{\rho}} \right) > + \frac{1}{2} < (\rho' - \rho) \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}'_A (\nabla \cdot \mathbf{v} - \nabla' \cdot \mathbf{v}') > \\
&+ \frac{1}{2} < (\rho' - \rho) \left( \left( -\frac{\mathbf{E} \times \mathbf{v}'_A}{\sqrt{\rho}} + \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}'_A \mathbf{v} \right) \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} + \left( \frac{\mathbf{E}' \times \mathbf{v}_A}{\sqrt{\rho'}} - \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A \mathbf{v}' \right) \cdot \frac{\nabla' \rho'}{\rho'} \right) > \\
&- \lambda < \left( \frac{n'_i - n'_e}{n'_i n'_e} + \frac{n_i - n_e}{n_i n_e} \right) \rho \rho' (\mathbf{v}' \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{B} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}' \times \mathbf{B}') > \\
&+ < \left( \frac{\rho'}{n'_i n'_e} + \frac{\rho}{n_i n_e} \right) (\rho \mathbf{j}' \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{B} + \rho' \mathbf{j} \cdot \mathbf{v}' \times \mathbf{B}' + \rho \mathbf{v}' \cdot \mathbf{j} \times \mathbf{B} + \rho' \mathbf{v} \cdot \mathbf{j}' \times \mathbf{B}') > \\
&+ \frac{1}{\lambda} < (\mu^2 \frac{n'_i + n_i}{n'_i n_i} - (1 - \mu)^2 \frac{n'_e + n_e}{n'_e n_e}) (\mathbf{j}' \cdot \mathbf{j} \times \mathbf{B} + \mathbf{j} \cdot \mathbf{j}' \times \mathbf{B}') > \quad (\text{II.3.41})
\end{aligned}$$

Puis en remplaçant  $\mathbf{j}$  par  $\nabla \times \mathbf{B}$ , et  $\mathbf{B}$  par  $\sqrt{\rho}$  et en réarrangeant les termes :

$$\begin{aligned}
-4\varepsilon_{EM} &= \nabla_{\ell} \cdot < \left( \frac{\rho' \rho' \rho}{n'_i n'_e} + \frac{\rho' \rho \rho}{n_i n_e} \right) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'_A \mathbf{v}'_A - \frac{1}{2} \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}'_A \mathbf{v} - \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A + \frac{1}{2} \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}_A \mathbf{v}') > \\
&- < (\rho' \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A - \frac{1}{2} \rho' \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}_A \mathbf{v}') \cdot \left( \nabla \left( \frac{\rho \rho}{n_i n_e} \right) - \frac{\rho}{n_i n_e} \nabla \rho \right) > \\
&- < (\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'_A \mathbf{v}'_A - \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}'_A \mathbf{v}) \cdot \left( \nabla' \left( \frac{\rho' \rho'}{n'_i n'_e} \right) - \frac{\rho'}{n'_i n'_e} \nabla' \rho' \right) > \\
&- \nabla_{\ell} \cdot < (\rho' + \rho) \left( \frac{\mathbf{E}' \times \mathbf{v}_A}{\sqrt{\rho'}} - \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{v}'_A}{\sqrt{\rho}} \right) > + \frac{1}{2} < (\rho' - \rho) \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}'_A (\nabla \cdot \mathbf{v} - \nabla' \cdot \mathbf{v}') > \\
&+ \frac{1}{2} < (\rho' - \rho) \left( \left( -\frac{\mathbf{E} \times \mathbf{v}'_A}{\sqrt{\rho}} + \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}'_A \mathbf{v} \right) \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} + \left( \frac{\mathbf{E}' \times \mathbf{v}_A}{\sqrt{\rho'}} - \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A \mathbf{v}' \right) \cdot \frac{\nabla' \rho'}{\rho'} \right) > \\
&+ < \frac{1}{\lambda} \left( \frac{\rho'}{n'_i n'_e} + \frac{\rho}{n_i n_e} \right) \mathbf{j}' \cdot ((2\mu - 1) \mathbf{j} \times \mathbf{B} + \lambda \rho \mathbf{v} \times \mathbf{B}) > \\
&+ < \frac{1}{\lambda} \left( \frac{\rho'}{n'_i n'_e} + \frac{\rho}{n_i n_e} \right) \mathbf{j} \cdot ((2\mu - 1) \mathbf{j}' \times \mathbf{B}' + \lambda \rho' \mathbf{v}' \times \mathbf{B}') > \\
&+ \frac{\mu(\mu - 1)}{\lambda} < \left( \frac{n'_i - n'_e}{n'_i n'_e} + \frac{n_i - n_e}{n_i n_e} \right) (\mathbf{j}' \cdot \mathbf{j} \times \mathbf{B} + \mathbf{j} \cdot \mathbf{j}' \times \mathbf{B}') > \\
&- \lambda < \left( \frac{n'_i - n'_e}{n'_i n'_e} + \frac{n_i - n_e}{n_i n_e} \right) \rho \rho' (\mathbf{v}' \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{B} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}' \times \mathbf{B}') > \quad (\text{II.3.42})
\end{aligned}$$

Dans cette équation, on a gardé intact les termes qui nous rappelaient les termes de la loi d'Ohm généralisée (II.3.35), c'est-à-dire ceux contenant  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$  ou  $\rho \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ . La première ligne correspond à des termes flux. Mais pour pouvoir y faire apparaître les fonctions de structures  $< \delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \delta \mathbf{v}_A \delta \mathbf{v} >$ ,  $< \delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \delta \mathbf{v} \delta \mathbf{v}_A >$ ,  $< \delta(\rho \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{v}_A \delta \mathbf{v}_A >$  et  $< \delta(\rho \mathbf{v}) \delta \left( \frac{\rho \mathbf{v}_A^2}{2} \right) \delta(1/\rho) >$ , il nous manque des termes qui sont cachés dans la quatrième

ligne. On doit y remplacer  $\mathbf{E}$  grâce à la loi d'Ohm (II.3.35). On peut aussi utiliser la loi d'Ohm pour remplacer  $\mathbf{E}$  dans la cinquième ligne et  $(2\mu - 1)\mathbf{j} \times \mathbf{B} + \lambda\rho\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  dans les six et septième lignes. Mais avant de faire ces modifications, on va appliquer l'hypothèse de quasi-neutralité.

Dans le cas quasi-neutre ( $n_i = n_e = \rho$ ), les deux dernières lignes de (II.3.42) s'annulent ainsi que  $\nabla(\frac{\rho\rho}{n_i n_e})$ , cela nous donne :

$$\begin{aligned}
 -4\varepsilon_{EM} = & \nabla_{\ell} \cdot \left\langle (\rho + \rho')(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'_{\mathbf{A}} \mathbf{v}'_{\mathbf{A}} - \frac{1}{2} \mathbf{v}'_{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{v}'_{\mathbf{A}} \mathbf{v} - \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{A}} \mathbf{v}_{\mathbf{A}} + \frac{1}{2} \mathbf{v}_{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{A}} \mathbf{v}') \right\rangle \\
 & + \left\langle (\rho' \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{A}} \mathbf{v}_{\mathbf{A}} - \frac{1}{2} \rho' \mathbf{v}_{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{A}} \mathbf{v}') \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} + (\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'_{\mathbf{A}} \mathbf{v}'_{\mathbf{A}} - \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}'_{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{v}'_{\mathbf{A}} \mathbf{v}) \cdot \frac{\nabla' \rho'}{\rho'} \right\rangle \\
 & - \nabla_{\ell} \cdot \left\langle (\rho' + \rho) \left( \frac{\mathbf{E}' \times \mathbf{v}_{\mathbf{A}}}{\sqrt{\rho'}} - \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{v}'_{\mathbf{A}}}{\sqrt{\rho}} \right) \right\rangle + \frac{1}{2} \left\langle (\rho' - \rho) \mathbf{v}_{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{v}'_{\mathbf{A}} (\nabla \cdot \mathbf{v} - \nabla' \cdot \mathbf{v}') \right\rangle \\
 & + \frac{1}{2} \left\langle (\rho' - \rho) \left( \left( -\frac{\mathbf{E} \times \mathbf{v}'_{\mathbf{A}}}{\sqrt{\rho}} + \mathbf{v}_{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{v}'_{\mathbf{A}} \mathbf{v} \right) \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} + \left( \frac{\mathbf{E}' \times \mathbf{v}_{\mathbf{A}}}{\sqrt{\rho'}} - \mathbf{v}'_{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{A}} \mathbf{v}' \right) \cdot \frac{\nabla' \rho'}{\rho'} \right) \right\rangle \\
 & + \left\langle \frac{1}{\lambda} \left( \frac{1}{\rho'} + \frac{1}{\rho} \right) \mathbf{j}' \cdot ((2\mu - 1)\mathbf{j} \times \mathbf{B} + \lambda\rho\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \right\rangle \\
 & + \left\langle \frac{1}{\lambda} \left( \frac{1}{\rho'} + \frac{1}{\rho} \right) \mathbf{j} \cdot ((2\mu - 1)\mathbf{j}' \times \mathbf{B}' + \lambda\rho'\mathbf{v}' \times \mathbf{B}') \right\rangle
 \end{aligned}
 \tag{II.3.43}$$

Cette expression de  $\varepsilon_{EM}$ , sommée à (II.3.39) forment la loi exacte mono-fluide obtenue à partir du modèle bi-fluide. Dans la suite de cette section, nous allons décomposer  $\varepsilon_{EM}$  en fonctions des différentes contributions présentes dans la loi d'Ohm (II.3.35).

La loi d'Ohm (II.3.35) devient avec l'hypothèse quasi-neutre :

$$\begin{aligned}
 \partial_t \mathbf{j} = & -\nabla \cdot (\mathbf{v}\mathbf{j} + \mathbf{j}\mathbf{v} + \frac{(2\mu - 1)}{\rho} \frac{1}{\lambda} \mathbf{j}\mathbf{j}) - \lambda \frac{\mu \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}}_i - (1 - \mu) \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}}_e}{(1 - \mu)\mu} \\
 & + \frac{\lambda^2}{(1 - \mu)\mu} \rho \mathbf{v} \times \mathbf{B} + \frac{\lambda(2\mu - 1)}{(1 - \mu)\mu} \mathbf{j} \times \mathbf{B} \left[ + \frac{\lambda^2}{\mu(1 - \mu)} \rho \mathbf{E} \right]
 \end{aligned}
 \tag{II.3.44}$$

Et avec l'hypothèse de quasi-stationnarité de Kolmogorov :

$$\begin{aligned}
 0 = & -\mu(1 - \mu) \nabla \cdot (\mathbf{v}\mathbf{j} + \mathbf{j}\mathbf{v} + \frac{(2\mu - 1)}{\rho} \frac{1}{\lambda} \mathbf{j}\mathbf{j}) - \lambda(\mu \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}}_i - (1 - \mu) \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}}_e) \\
 & + \lambda^2 \rho \mathbf{v} \times \mathbf{B} + \lambda(2\mu - 1) \mathbf{j} \times \mathbf{B} \left[ + \lambda^2 \rho \mathbf{E} \right]
 \end{aligned}
 \tag{II.3.45}$$

Le dernier terme dépendant de  $\mathbf{E}$  s'annule en supposant l'hypothèse non-relativiste ou nous aide à remplacer  $\mathbf{E}$  dans (II.3.43), le terme en  $\rho\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  correspond au terme idéal, celui en  $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$  à la correction Hall. Le terme dépendant des pressions est la contribution thermique. Et la contribution sous la divergence correspond à la contribution inertielle.

En appliquant la loi d'Ohm (II.3.45) dans la contribution électromagnétique  $\varepsilon_{TEM}$  donnée par l'équation (II.3.43), on obtient :



— Pour la contribution idéale :

$$\begin{aligned}
-4 \varepsilon_{EM}^{ideal} &= \nabla_{\ell} \cdot < (\rho + \rho')(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'_A \mathbf{v}'_A - \frac{1}{2} \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}'_A \mathbf{v} - \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A + \frac{1}{2} \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}_A \mathbf{v}') > \\
&\quad + \nabla_{\ell} \cdot < (\rho' + \rho)((\mathbf{v}' \times \mathbf{v}'_A) \times \mathbf{v}_A - (\mathbf{v} \times \mathbf{v}_A) \times \mathbf{v}'_A) > \\
&\quad + \frac{1}{2} < (\rho' - \rho) \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}'_A (\nabla \cdot \mathbf{v} - \nabla' \cdot \mathbf{v}') > \\
&\quad + \frac{1}{2} < (\rho' - \rho)((\mathbf{v} \times \mathbf{v}_A) \times \mathbf{v}'_A + \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}'_A \mathbf{v}) \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} > \\
&\quad - \frac{1}{2} < (\rho' - \rho)((\mathbf{v}' \times \mathbf{v}'_A) \times \mathbf{v}_A + \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A \mathbf{v}') \cdot \frac{\nabla' \rho'}{\rho'} > \\
&\quad + < (\rho' \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}_A \mathbf{v}_A - \frac{1}{2} \rho' \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}_A \mathbf{v}') \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} + (\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'_A \mathbf{v}'_A - \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}'_A \mathbf{v}) \cdot \frac{\nabla' \rho'}{\rho'} > \\
&= \nabla_{\ell} \cdot < \delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \delta \mathbf{v}'_A \delta \mathbf{v} + \delta(\frac{\rho' \mathbf{v}'_A{}^2}{2}) \delta(\rho \mathbf{v}) \delta(\frac{1}{\rho}) - \delta \mathbf{v}_A \cdot \delta(\rho \mathbf{v}) \delta \mathbf{v}_A - \delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \delta \mathbf{v} \delta \mathbf{v}_A > \\
&\quad + \frac{1}{2} < (\delta(\rho \mathbf{v}_A) \cdot \mathbf{v}'_A - \delta \mathbf{v}_A \cdot \rho' \mathbf{v}'_A) \nabla \cdot \mathbf{v} - (\delta(\rho' \mathbf{v}'_A) \cdot \mathbf{v}_A - \rho \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{v}_A) \nabla' \cdot \mathbf{v}' > \\
&\quad + < \delta(\frac{\rho \mathbf{v}_A{}^2}{2}) (\rho \mathbf{v} \cdot \nabla' \frac{1}{\rho'} - \rho' \mathbf{v}' \cdot \nabla \frac{1}{\rho}) > \\
&\quad - < (2 \rho \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v}_A + \rho \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{v}) - \mathbf{v}_A \cdot \delta(\rho \mathbf{v}) \nabla' \cdot \mathbf{v}'_A > \\
&\quad + < (2 \rho' \mathbf{v}' \cdot \delta \mathbf{v}_A + \rho' \mathbf{v}'_A \cdot \delta \mathbf{v} - \mathbf{v}'_A \cdot \delta(\rho \mathbf{v})) \nabla \cdot \mathbf{v}_A >
\end{aligned} \tag{II.3.46}$$

On retrouve bien la contribution électromagnétique dérivée dans le cas idéal (voir équations (??) et (I.3.21) pour les termes de pression magnétique). Elle ne dépend ni de  $\mu$  ni de  $\lambda$  donc elle restera toujours la même tant que l'hypothèse de quasi-neutralité est valable.

— Pour la contribution Hall :

$$\begin{aligned}
-4 \varepsilon_{EM}^{Hall} &= \frac{2\mu - 1}{\lambda} \nabla_{\ell} \cdot < (\rho' + \rho)((\frac{1}{\rho'} \mathbf{j}' \times \mathbf{v}'_A) \times \mathbf{v}_A - (\frac{1}{\rho} \mathbf{j} \times \mathbf{v}_A) \times \mathbf{v}'_A) > \\
&\quad - \frac{2\mu - 1}{\lambda} < (\rho' - \rho)((\frac{1}{\rho'} \mathbf{j}' \times \mathbf{v}_A) \times \mathbf{v}'_A) \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} - (\frac{1}{\rho'} \mathbf{j}' \times \mathbf{v}'_A) \times \mathbf{v}_A \cdot \frac{\nabla' \rho'}{\rho'} > \\
&= \frac{2\mu - 1}{\lambda} \nabla_{\ell} \cdot < -(\mathbf{j}' \times \mathbf{v}'_A + \mathbf{j} \times \mathbf{v}_A) \times \delta \mathbf{v}_A + \delta(\frac{1}{\rho} \mathbf{j} \times \mathbf{v}_A) \times (\rho' \mathbf{v}'_A + \rho \mathbf{v}_A) > \\
&\quad + 2 \frac{2\mu - 1}{\lambda} < (\frac{\rho'}{\rho} - 1) \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{j} \nabla \cdot \mathbf{v}_A + (\frac{\rho}{\rho'} - 1) \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{j}' \nabla' \cdot \mathbf{v}'_A > \\
&\quad - \frac{2\mu - 1}{\lambda} < (\rho' - \rho) \mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{v}_A \nabla \cdot \frac{\mathbf{j}}{\rho} - (\rho' - \rho) \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}'_A \nabla' \cdot \frac{\mathbf{j}'}{\rho'} >
\end{aligned} \tag{II.3.47}$$

Dans le cas  $\mu \rightarrow 0$ , on retrouve le résultat de la section 3.1 (attention à la définition de  $\lambda$ )<sup>3</sup>. Si  $\mu \rightarrow 1$ , on obtient un résultat pour le modèle dit de MHD électronique

---

3. Dans cette section, on utilise des équations sans dimension, mais on a fait en sorte de choisir les quantités telles que les résultats présentés dans ce mémoire se recoupent. Attention toute fois à la définition de  $\lambda$  (différente dans cette section et dans les sections 3.1 et 3.2) et à la constante  $\mu_0$  absente

(EMHD) où les ions sont considérés comme immobiles et les électrons en mouvement.

— Pour la contribution des pressions :

$$\begin{aligned}
& -4 \varepsilon_{EM}^P \\
&= -\frac{\mu}{\lambda} \nabla_{\mathbf{e}} \cdot \langle (\rho' + \rho) \left( \frac{1}{\sqrt{\rho'}} \left( \left( \frac{1}{\rho'} \nabla' \cdot \overline{\mathbf{P}}_i' \right) \times \mathbf{v}_A - \frac{1}{\sqrt{\rho}} \left( \left( \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}}_i \right) \times \mathbf{v}_A' \right) \right) \right) \rangle \\
&+ \frac{\mu}{\lambda} \langle (\rho' - \rho) \left( \frac{1}{\sqrt{\rho}} \left( \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}}_i \right) \times \mathbf{v}_A' \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} - \frac{1}{\sqrt{\rho'}} \left( \frac{1}{\rho'} \nabla' \cdot \overline{\mathbf{P}}_i' \right) \times \mathbf{v}_A \cdot \frac{\nabla' \rho'}{\rho'} \right) \rangle \\
&+ \frac{\mu}{\lambda} \langle \left( \frac{1}{\rho'} + \frac{1}{\rho} \right) (\mathbf{j} \cdot \nabla' \cdot \overline{\mathbf{P}}_i' + \mathbf{j}' \cdot \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}}_i) \rangle \\
&+ \frac{1-\mu}{\lambda} \nabla_{\mathbf{e}} \cdot \langle (\rho' + \rho) \left( \frac{1}{\sqrt{\rho'}} \left( \left( \frac{1}{\rho'} \nabla' \cdot \overline{\mathbf{P}}_e' \right) \times \mathbf{v}_A - \frac{1}{\sqrt{\rho}} \left( \left( \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}}_e \right) \times \mathbf{v}_A' \right) \right) \right) \rangle \\
&- (1-\mu) \lambda \langle (\rho' - \rho) \left( \frac{1}{\sqrt{\rho}} \left( \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}}_e \right) \times \mathbf{v}_A' \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} - \frac{1}{\sqrt{\rho'}} \left( \frac{1}{\rho'} \nabla' \cdot \overline{\mathbf{P}}_e' \right) \times \mathbf{v}_A \cdot \frac{\nabla' \rho'}{\rho'} \right) \rangle \\
&- \frac{1-\mu}{\lambda} \langle \left( \frac{1}{\rho'} + \frac{1}{\rho} \right) (\mathbf{j} \cdot \nabla' \cdot \overline{\mathbf{P}}_e' + \mathbf{j}' \cdot \nabla \cdot \overline{\mathbf{P}}_e) \rangle
\end{aligned} \tag{II.3.48}$$

Cette contribution diffère, en prenant  $\mu \rightarrow 0$ , de celle dérivée dans la section 3.2 (équation (II.3.14)). En effet, cette dernière prend en compte tous les termes de pression électronique dépendant du champ magnétique ou du courant alors que tous les termes ne sont pas présents dans (II.3.48), on en a découvert quelques-uns dans  $\varepsilon_{TH}$  (II.3.39). Ce travail fastidieux pour passer de (II.3.48) à (II.3.14) ne sera pas présenté ici.

— Pour la contribution inertielle :

$$\begin{aligned}
-4\varepsilon_{EM}^{inert} &= -\frac{\mu(1-\mu)}{\lambda^2} \nabla_{\mathbf{e}} \cdot \langle \frac{\rho' + \rho}{\rho' \sqrt{\rho'}} \nabla' \cdot (\mathbf{v}' \mathbf{j}' + \mathbf{j}' \mathbf{v}' + \frac{(2\mu-1)}{\rho'} \frac{1}{\lambda} \mathbf{j}' \mathbf{j}') \times \mathbf{v}_A \rangle \\
&+ \frac{\mu(1-\mu)}{\lambda^2} \nabla_{\mathbf{e}} \cdot \langle \frac{\rho' + \rho}{\rho \sqrt{\rho}} \nabla \cdot (\mathbf{v} \mathbf{j} + \mathbf{j} \mathbf{v} + \frac{(2\mu-1)}{\rho} \frac{1}{\lambda} \mathbf{j} \mathbf{j}) \times \mathbf{v}_A' \rangle \\
&+ \frac{\mu(1-\mu)}{\lambda^2} \langle \frac{\rho' + \rho}{\rho \sqrt{\rho}} \nabla \cdot (\mathbf{v} \mathbf{j} + \mathbf{j} \mathbf{v} + \frac{(2\mu-1)}{\rho} \frac{1}{\lambda} \mathbf{j} \mathbf{j}) \times \mathbf{v}_A' \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} \rangle \\
&- \frac{\mu(1-\mu)}{\lambda^2} \langle \frac{\rho' + \rho}{\rho' \sqrt{\rho'}} \nabla' \cdot (\mathbf{v}' \mathbf{j}' + \mathbf{j}' \mathbf{v}' + \frac{(2\mu-1)}{\rho'} \frac{1}{\lambda} \mathbf{j}' \mathbf{j}') \times \mathbf{v}_A \cdot \frac{\nabla' \rho'}{\rho'} \rangle \\
&+ \frac{\mu(1-\mu)}{\lambda^2} \langle \left( \frac{1}{\rho'} + \frac{1}{\rho} \right) \mathbf{j}' \cdot \nabla \cdot (\mathbf{v} \mathbf{j} + \mathbf{j} \mathbf{v} + \frac{(2\mu-1)}{\rho} \frac{1}{\lambda} \mathbf{j} \mathbf{j}) \rangle \\
&+ \frac{\mu(1-\mu)}{\lambda^2} \langle \left( \frac{1}{\rho'} + \frac{1}{\rho} \right) \mathbf{j} \cdot \nabla' \cdot (\mathbf{v}' \mathbf{j}' + \mathbf{j}' \mathbf{v}' + \frac{(2\mu-1)}{\rho'} \frac{1}{\lambda} \mathbf{j}' \mathbf{j}') \rangle
\end{aligned} \tag{II.3.49}$$

Cette contribution est nulle si  $\mu \rightarrow 0$  (cas MHD) mais aussi si  $\mu \rightarrow 1$  (cas EMHD).

En dérivant une loi exacte pour un modèle bi-fluide quasi-neutre, puis en travaillant sur les termes électromagnétiques avec la loi d'Ohm généralisée, on vient d'obtenir différents niveaux de correction ainsi que deux régimes asymptotiques qui viennent étendre la description de la cascade turbulente d'énergie totale à de multiples systèmes. En fonction

---

dans les termes de pression (voir section 3.2) sans dimension.

---

de l'usage, il sera toujours possible de retravailler les termes pour obtenir des formulations potentiellement plus pratiques à analyser. Dans la partie suivante, nous reviendrons dans le cadre MHD ( $\mu \rightarrow 0$ ) afin d'étudier les effets de l'anisotropie de pression dans des simulations turbulentes. Afin de refléter au mieux la physique dans ces simulations, nous utiliserons les corrections Hall (section 3.1) et HallPe (section 3.2) dérivées dans ce chapitre. Comme on l'a vu partiellement dans cette section, ces corrections peuvent être retrouvées à partir du modèle bi-fluide.

### 3.4 Synthèse de l'extension de la théorie des lois exactes à d'autres régimes

#### Correction Hall

- Théorie linéaire : apparitions des ondes whistlers et cyclotron ionique, critère miroir inchangé mais décalage du critère firehose suivant le vecteur d'onde.
  - Correction turbulente compressible : (II.3.3)
  - Correction incompressible à la loi exacte PP98 : (II.3.4)
- ⇒ Contribution turbulente indépendante des tenseurs de pressions

#### Modèle hybride et correction HallPe

- Modèle ouvert utilisé pour obtenir la correction turbulente : équations (II.3.5), (II.3.6), (II.3.7), (II.3.8), (II.3.9)
- Théorie linéaire : la pression électronique va venir impacter les critères d'instabilités qui seront recalculé si nécessaire dans la partie ??
- Correction turbulente compressible : (II.3.14)
- Correction incompressible à la loi exacte PP98 : (II.3.15)

#### Dérivations des contributions provenant de la loi d'Ohm généralisée à partir du modèle bi-fluide

- Modèle bi-fluide **sans dimension** et ouvert utilisé pour obtenir la loi exacte généralisée : équations (II.3.23), (II.3.24), (II.3.25), (II.3.26), (II.3.27), (II.3.28), (II.3.29), (II.3.30), (II.3.31)
  - Loi exacte KHM généralisée écrite avec les quantités bi-fluide : (II.3.36) (part ionique) + (II.3.37) (part électronique)
  - Loi exacte KHM généralisée quasi-neutre écrite avec les quantités mono-fluide : (II.3.39) + (II.3.43)
  - Décomposition de (II.3.43) suivant les différentes contributions présentes dans la loi d'Ohm généralisée quasi-neutre (II.3.44) :
    - Contribution idéale : (II.3.46)
    - Contribution Hall : (II.3.47) équivalente à (II.3.3)
    - Contribution thermique : (II.3.48) doit être complétée par quelques termes présents dans (II.3.39) pour correspondre à (II.3.14)
    - Contribution inertielle : (II.3.49)
- ⇒ Ouvre le champ d'études potentielles au régime EMHD par exemple et à l'étude plus rigoureuse de l'impact sur la cascade turbulente des différentes approximations appliquées à la loi d'Ohm.

Ces résultats n'ont pas encore été publiés.

Dans cette partie, nous avons dérivé un cadre d'étude complet et rigoureux des écoulements turbulents (zone inertielle supposée isentrope) allant du régime mono-fluide au régime bi-fluide, et dépendant de pressions tensorielles.

Dans le chapitre 1 (synthèse 1.4), a été présenté une extension de la théorie de Kolmogorov à un écoulement magnétisé idéal dépendant d'une pression tensorielle. Cette extension a ensuite été appliquée à un tenseur de pression gyrotrope ou CGL afin de répondre analytiquement à la question de l'impact des anisotropies de pression sur la cascade turbulente. De nouveaux termes pouvant nourrir ou réduire la cascade et dépendant de  $1 - a_p$  avec  $a_p$  le taux d'anisotropie  $p_\perp/p_\parallel$  ont été découverts. Linéairement, le signe de  $1 - a_p$  est une condition nécessaire à l'existence d'instabilité firehose ou miroir dans l'écoulement, comme cela a été redémontré dans la section 1.2. On aurait donc potentiellement un lien entre instabilités linéaires et régimes turbulents qui pourrait venir expliquer les observations de OSMAN et al. 2013 ; LZ HADID, SAHRAOUI, GALTIER et SY HUANG 2018 dans le vent solaire mais une étude numérique est nécessaire afin d'affiner l'interprétation de la loi exacte.

Parmi les nouveaux termes dépendant de l'anisotropie de pression émergeant dans la loi exacte, un terme source survit dans la limite incompressible. Par curiosité, nous nous sommes alors demandés à quoi pourrait ressembler un modèle incompressible gyrotrope dans le chapitre 2 (synthèse 2.4). Un tel modèle incompressible, fermé par l'équation sur la trace du tenseur de pression, a alors été proposé et linéarisé. En plus de l'onde d'Alfvén-firehose, un nouveau mode peut y apparaître. On y retrouve le critère d'instabilité firehose parallèle mais aussi un critère d'instabilité firehose inversé apparaissant dans le cas quasi-perpendiculaire et venant réduire la zone de stabilité du modèle en fonction du taux d'instabilité moyen  $a_{p0}$  et du paramètre  $\beta_{\parallel 0}$ . Après une étude plus fine en fonction de l'angle de propagation, ce mode s'est révélé instable pour tout couple de paramètres  $\beta_{\parallel 0}$  et  $a_{p0}$ . Une étude numérique rigoureuse de la correction incompressible dans un modèle incompressible avec anisotropie de pression ne pourra donc se faire avec ce modèle compatible avec la loi exacte mais a priori instable.

Enfin, dans le chapitre 3 (synthèse 3.4), les approximations appliquées sur l'équation d'induction, ont été relaxées les unes après les autres. Des corrections prenant en compte l'effet Hall puis le tenseur de pression électronique ont été dérivées pour compléter la loi exacte idéale jusqu'à atteindre une description bi-fluide. Ces corrections serviront à refléter au mieux la cascade turbulente étudiée dans les simulations utilisés dans la partie ??.