GEOMETRIA ANALÍTICA

Exercícios Propostos

80. Determine uma equação vectorial da recta que passa pelos pontos:
   a) $P = (2, -5)$ e $Q = (-1, 4)$.
   b) $P = (4, 7)$ e $Q = (10, 7)$.
   c) $P = (7, 2, -4)$ e $Q = (2, -1, 4)$.
   d) $P = (-4, 3, 0)$ e $Q = (2, 1, 7)$.
   e) $P = (1, 3, 0, 2)$ e $Q = (0, -1, 2, 0)$.
   f) $P = (3, 7, -1, 5, 0)$ e $Q = (1, -1, 4, 2, 5)$.

81. Determine uma equação vectorial para cada uma das seguintes rectas de $\mathbb{R}^2$:
   a) $y = x$. b) $y = 5x$. c) $2x - 3y = 0$.
   d) $y = 0$. e) $y = 5x - 6$. f) $x = 4$.
   g) $2x - 4y + 3 = 0$.

82. Encontre uma equação vectorial para cada uma das seguintes rectas:
   a) Recta r que passa no ponto $P = (5, -2)$ e é paralela à recta $3x = 2y$.
   b) Recta s que passa no ponto $Q = (4, 0)$ e é paralela à recta $y = x$.
   c) Recta t que passa no ponto $R = (1, 2)$ e é paralela à recta $x = 5$.

83. Encontre o ponto médio M do segmento de recta que une os pares de pontos do exercício 80.

84. Seja $r = L(P; A) = \{ P + sA \}$ uma recta definida pelo ponto $P = (-3, 1, 1)$ e pelo vector direcção $A = (1, -2, 3)$. Verifique quais dos seguintes pontos pertencem a r:
   a) $O = (0, 0, 0)$. b) $Q = (2, -1, 4)$. c) $R = (-2, -1, 4)$.
   d) $S = (-4, 3, -2)$. e) $T = (2, -9, 16)$.

85. Em cada um dos casos seguintes verifique se os pontos P, Q e R são colineares:
   a) $P = (2, 1, 1)$, $Q = (4, 1, -1)$, $R = (3, -1, 1)$.
   b) $P = (2, 2, 3)$, $Q = (-2, 3, 1)$, $R = (-6, 4, 1)$.
   c) $P = (2, 1, 1)$, $Q = (-2, 3, 1)$, $R = (5, -1, 1)$.

86. Prove que três pontos P , Q e R de $\mathbb{R}^3$ estão situados sobre uma mesma recta r , se e só se $(Q - P) \times (R - P) = O$.

87. Em cada um dos casos seguintes encontre uma equação vectorial para a recta s , que passa no ponto P e é perpendicular à recta r :
a) $P = (0 , 0)$ e $r : X(t) = t(1 , -3)$.
b) $P = (5 , 4)$ e $r : X(t) = t(4 , 4)$.
c) $P = (2 , 1)$ e $r : X(t) = (4 , 2) + t(0 , 7)$.
d) $P = (1 , 0)$ e $r : X(t) = (7 , 1) + t(2 , 5)$.

88. Determine uma equação cartesiana para a recta que passa pelos pontos $P = (2 , -5)$ e $Q = (-1 , 4)$; apresente-a em seguida na sua forma reduzida.

89. Prove que o segmento de recta que une os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao outro lado e tem metade do comprimento deste.

90. Determine equações do tipo vectorial, paramétricas e cartesiana para a recta r que passa pelos pontos $P = (2 , 5 , -4)$ e $Q = (7 , -1 , 2)$.

91. Verifique se as rectas $\dfrac{x + 1}{-4} = \dfrac{y - 2}{3} = \dfrac{z + 3}{-1}$ e $\dfrac{x + 3}{8} = \dfrac{4 - y}{6} = \dfrac{z - 2}{2}$ são paralelas.

92. Prove que duas rectas $r = L(P ; A)$ e $s = L(Q ; B)$ de $\mathbb{R}^n$ são concorrentes, se e só se o vector $(P - Q)$ pertencer ao subespaço gerado por A e B .

93. Sejam $X(t) = P + tA$ um ponto genérico da recta $r = L(P ; A)$, sendo $P = (1 , 2 , 3)$ e $A = (1 , -2 , 2)$, e Q um ponto de coordenadas $(3 , 3 , 1)$.
a) Calcule o valor de $\| Q - X(t) \|^2$.
b) Prove que existe exactamente um ponto da recta r , $X(t_0)$, para o qual a distância $\| Q - X(t_0) \|$ é mínima; calcule o valor dessa distância.
c) Mostre que o vector $(Q - X(t_0))$ é ortogonal ao vector direcção A da recta r .

94. Considere a recta $r : X(t) = P + tA$, em que $P = (0 , 2 , -2)$ e $A = (1 , -1 , 2)$, e o ponto $Q = (0 , 2 , 1)$. Determine todos os pontos R da recta r que distam $\sqrt{3}$ unidades do ponto Q . Esclareça se a distância de Q à recta r é maior, menor ou igual a $\sqrt{3}$; porquê?

95. Considere a recta $r = \{ P + t A \}$ e um ponto Q exterior a r. Mostre que a distância de Q à recta r tem o valor da expressão $d_{Q,r} = \dfrac{\| (Q - P) \times A \|}{\| A \|}$, ou ainda o valor de $d_{Q,r} = \left\| Q - \dfrac{Q \cdot A}{\| A \|^2} A \right\|$ se a recta r passar na origem do referencial.

96. Determine a distância do ponto $Q = (-1, -1, 4)$ à recta r definida pela equação cartesiana $\dfrac{x + 1}{2} = y - 1 = -z$.

97. Em cada um dos casos seguintes determine o ponto S da recta r, equidistante dos pontos Q e R:
a) $Q = (1, 1, 1)$, $R = (0, 0, 1)$, $r = \{ P + t A \}$ com $P = (1, 0, 0)$ e $A = (1, 1, 1)$.
b) $r : x - 2 = y - 3/2 = z - 4$, $Q = (3, 3, 3)$ e $R = (3, 2, 1)$.

98. Sejam os pontos $P = (1, 0, 1)$ e $Q = (0, 1, 1)$. Em cada um dos casos seguintes encontre os pontos C situados na recta que contém P e Q, de forma a que a área do triângulo ABC seja igual a $1/2$:
a) $A = (1, 2, 1)$ e $B = (1, 2, 3)$.
b) $A = (3, -2, 1)$ e $B = (0, 0, 1)$.

99. Considere o ponto $C = (1, 1, 0)$ e a recta $r : X(t) = t(0, 1, -1)$. Obtenha os vértices A e B do triângulo equilátero ABC, sabendo que o lado $\overline{AB}$ está situado sobre a recta r.

100. Encontre equações do tipo vectorial, paramétricas e cartesiana para os seguintes planos:
a) Contém o ponto $P = (1, 2, 1)$ e é gerado por $A = (0, 1, 0)$ e $B = (1, 1, 4)$.
b) Contém os pontos $P = (1, 2, 1)$, $Q = (0, 1, 0)$ e $R = (1, 1, 4)$.
c) Contém a origem e é gerado por $A = (0, 1, 0)$ e $B = (1, 1, 4)$.

101. Seja M um plano de equação cartesiana $3x - 5y + z = 9$. Obtenha uma equação vectorial da forma $X(s, t) = P + sA + tB$ para definir o plano dado.

102. Seja $M = \{ P + s A + t B \}$ um plano definido pelo ponto $P = (1, 2, -3)$ e pelos vectores geradores $A = (3, 2, 1)$ e $B = (1, 0, 4)$. Determine quais dos seguintes pontos pertencem a M:
a) $Q = (1, 2, 0)$. b) $R = (1, 2, 1)$. c) $S = (6, 4, 6)$.
d) $T = (6, 6, 6)$. e) $U = (6, 6, -5)$.

103. Determine um vector N que seja normal a um plano que tem como vectores geradores $A = (2, 3, 4)$ e $B = (-1, 1, 3)$.

104. Em cada um dos casos seguintes escreva equações do tipo vectorial e cartesiana para o plano que passa no ponto P e tem N como vector normal:
a) $P = (1, -2, 3)$ e $N = (4, -1, 2)$.
b) $P = (1, 2, 0)$ e $N = (0, 0, 1)$.
c) $P = (1, 1, 1)$ e o vector N faz ângulos de 60^o, 45^o e 60^o com os vectores coordenados unitários $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$, respectivamente.

105. Considere a recta $r : X(t) = P + t A$, em que $P = (1, 2, 3)$ e $A = (1, 1, 1)$, e o ponto $Q = (2, 3, 5)$ exterior a r. Determine equações do tipo vectorial e cartesiana para o plano M que passa no ponto Q e contém a recta r.

106. Considere a recta $r : z - x = 4x + 2y = 2$ e o ponto $P = (2, 2, 3)$. Determine uma equação cartesiana para o plano M que contém o ponto P e é perpendicular à recta r.

107. Considere as rectas $r : X(u) = P + u A$ e $s : X(t) = Q + t B$, sendo $P = (2, 0, 5)$, $A = (2, 3, 4)$, $Q = (-5, -3, 6)$ e $B = (-1, 1, 3)$. Verifique se as rectas dadas são complanares.

108. Considere as rectas $r : X(u) = P + u A$ e $s : X(t) = Q + t B$, sendo $P = (1, 0, 2)$, $A = (2, 1, 3)$, $Q = (0, 1, -1)$ e $B = (1, k, 2k)$. Determine o valor do parâmetro real k de forma a que as rectas dadas sejam complanares.

109. Uma recta r passa no ponto $P = (1, 1, 1)$ e é paralela ao vector $A = (1, 2, 3)$. Outra recta s contém o ponto $Q = (2, 1, 0)$ e tem $B = (3, 8, 13)$ como vector direcção.
a) Prove que as duas rectas se intersectam num ponto I.
b) Determine esse ponto de intersecção.

110. Sejam dadas as rectas $r = \{ P + t A \}$ e $s = \{ Q + u B \}$, em que $P = (1, 1, -1)$, $A = (-2, 1, 3)$, $Q = (3, -4, 1)$ e $B = (-1, 5, 2)$. Verifique se as rectas são concorrentes e, em caso afirmativo, determine o ponto de intersecção I.

111. Determine o ângulo α formado pelas rectas

$$r: \frac{x-4}{6} = \frac{-y}{3} = \frac{z+1}{-6} \quad \text{e} \quad s: \begin{cases} x = 1 \\ \dfrac{y+1}{4} = \dfrac{z-2}{3} \end{cases}$$

depois de verificar que as rectas são enviesadas.

112. Determine o ponto I de intersecção da recta $r : X(t) = (4, -4, 1) + t(1, 2, 3)$ com o plano $M : 3y + 2z - x = 8$.

113. Encontre o ponto S pertencente ao plano $M : 2x + y - z = 7$, situado à distância mínima do ponto $P = (-1, 0, 3)$.

114. Para cada um dos casos seguintes verifique se a recta r está contida no plano M:
a) $r : X(t) = (1, 0, 0) + t(2, -1, 0)$ e $M : x + 2y + 3z = 1$.
b) $M : X(t, u) = (1, 4, 1) + t(1, -1, 1) + u(-1, 2, -1)$ e r passa pelos pontos $P = (2, 3, 2)$ e $Q = (0, 0, 1)$.

115. Encontre os valores dos parâmetros reais k e w, de forma a que a recta r que passa no ponto $P = (w, 2, 0)$ e é paralela ao vector $A = (2, k, k)$, esteja contida no plano $M : x - 3y + z = 1$.

116. Determine o valor do comprimento da projecção ortogonal do segmento de recta com extremidades nos pontos $P = (1, 2, 3)$ e $Q = (-3, 2, -1)$, sobre o plano M de equação $x + 2y + 3z = 0$.

117. Sejam o vector $V = (1, 2, 4)$, a recta $r : X(u) = u\,C$, em que $C = (2, 1, 0)$, e o plano $M = \{ P + sA + tB \}$ com $P = (1, 1, 0)$, $A = (1, 0, 1)$ e $B = (0, 1, -1)$. Em cada um dos casos seguintes decomponha o vector V em duas parcelas V_1 e V_2 tais que:
a) V_1 seja paralela ao plano M e V_2 seja paralela à recta r.
b) V_1 e V_2 sejam, respectivamente, paralela e ortogonal ao plano M.

118. Dados o plano $M : x + y - z = 3$ e a recta r que passa pelos pontos $P = (1, 0, 0)$ e $Q = (0, -1, -1)$, determine a recta s simétrica da recta r em relação ao plano M.

119. Um paralelogramo com vértices consecutivos em A, B, C e D tem os lados $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ paralelos à recta r, de equação $X(s) = s\,V$ com $V = (3, 4, 5)$, e os dois lados restantes paralelos ao plano $M : x + y + 3z = 0$. Sabendo que $A = (0, 0, 0)$ e $C = (1, 1, 1)$ determine os vértices B e D.

120. Determine os vértices B e C do triângulo rectângulo ABC, sabendo que:
   i) $A = (1, 1, 1)$ e a componente segundo z de C é maior do que a de A;
   ii) A hipotenusa $\overline{AC}$ é ortogonal ao plano $M : x + y - z = 10$ e mede $\sqrt{3}$ unidades;
   iii) O cateto $\overline{AB}$ é ortogonal ao plano $M' : 2x - y - z = 0$.

121. Mostre que o lugar geométrico dos pontos de $\mathbb{R}^3$ que são equidistantes dos pontos $A = (1, -1, 2)$ e $B = (4, 3, 1)$ é um plano. Prove ainda que esse plano é perpendicular ao segmento $\overline{AB}$ e passa pelo respectivo ponto médio.

122. Prove que o lugar geométrico dos pontos de $\mathbb{R}^3$ que são equidistantes dos três pontos $A = (2, 1, 1)$, $B = (-1, 0, 1)$ e $C = (0, 2, 1)$ é uma recta perpendicular ao plano que contém A, B e C. Escreva as equações paramétricas dessa recta.

123. Considere os dois planos $M = \{ P + sA + tB \}$ e $M' = \{ Q + uC + vD \}$, em que $P = (1, 1, 1)$, $A = (2, -1, 3)$, $B = (-1, 0, 2)$, $Q = (2, 3, 1)$, $C = (1, 2, 3)$ e $D = (3, 2, 1)$. Encontre dois pontos R e S distintos na intersecção de M com M'.

124. Mostre que os dois planos $M = \{ sA + tB \}$ e $M' = \{ Q + uC + vD \}$, em que $A = (-1, m, 1)$, $B = (2, 0, 1)$, $Q = (1, 2, 3)$, $C = (m, 1, 0)$ e $D = (1, 0, m)$, são concorrentes para todo o valor real m.

125. Considere o ponto $P = (0, 0, 1)$ e o plano M que passa pelo ponto $Q = (1, 1, 0)$ e é gerado pelos vectores $A = (2, -1, 3)$ e $B = (0, 1, -1)$.
   a) Determine um vector N ortogonal ao plano dado.
   b) Determine uma equação do plano M', paralelo a M e que contém o ponto P.
   c) Mostre que a distância do ponto P ao plano M, $d_{P,M}$, tem o valor da expressão
   $$d_{P,M} = \frac{|(P - Q) \cdot N|}{\|N\|}$$
   onde Q e N têm os significados atrás apresentados; calcule esse valor.

126. Considere o vector $C = (-2, 1, 1)$, os planos $M : x - 2y - z = 0$ e M' que passa no ponto $P = (0, 1, -1)$ e é gerado pelos vectores $A = (1, 2, 0)$ e $B = (1, 0, 0)$, e o ponto $Q = (-1, 1, 1)$. Seja r a recta de intersecção de M com M'. Determine:
   a) Uma equação cartesiana do plano M'', paralelo ao vector C e que contém a recta **r**.
   b) Um plano α, perpendicular à recta r e que dista 1 unidade da origem.
   c) Um plano π que contém a recta r e que dista 2 unidades do ponto Q.

127. Considere o ponto $Q = (2, 0, 0)$ e os planos $M' : 3x + 4y = 0$, e M que passa no ponto $P = (0, 0, -1)$ e é gerado por $A = (1, 0, 2)$ e $B = (0, 1, 2)$. Determine:
   a) O conjunto U de todos os pontos pertencentes ao plano coordenado xOz que distam 3 unidades do plano M.
   b) Uma recta r perpendicular ao plano M' e que passa num ponto do conjunto U que dista 3 unidades do ponto Q.

128. Sejam dados o plano $M = \{ P + sA + tB \}$, em que $P = (2, 3, 1)$, $A = (1, 2, 3)$ e $B = (3, 2, 1)$, e o plano M' com a equação cartesiana $x - 2y + z = 0$.
   a) Verifique se os dois planos dados são paralelos.
   b) Determine dois pontos Q e R distintos da recta r de intersecção de M' com um plano M'' de equação $x + 2y + z = 0$. Escreva uma equação vectorial para **r**.
   c) Determine o lugar geométrico dos pontos equidistantes dos planos M' e xOy.

129. Sejam o plano M, contendo os pontos não colineares $P = (0, 0, -1)$, $Q = (0, -1, 0)$ e $R = (1, 1, 0)$, e a recta $r : 7x - 5y = 5z - 3x = 2$.
   a) Determine a posição relativa da recta r em relação ao plano M.
   b) Considere o plano M' definido por r e pelo ponto Q. Determine o plano M'' que passa na origem e é perpendicular aos planos M e M'.
   c) Determine o plano α, paralelo a M, de forma a que o ponto $T = (-1, 0, 3)$ seja equidistante de ambos.

130. Sejam o ponto $Q = (0, 1, 1)$, as rectas $r : X(t) = (1, -1, 2) + t(-3, 0, 1)$ e h dada por $2x + 2y - 2z = x - y - z = 4$, e o plano M definido pelo ponto Q e a recta r.
   a) Classifique as rectas dadas quanto à sua posição relativa.
   b) Determine a recta r' que é a projecção ortogonal da recta h sobre o plano M.
   c) Determine os pontos P e P' pertencentes à recta h e que são equidistantes dos planos M e $M' : 2x + y + 3z = 2$.

131. Considere as rectas $r : X(u) = (3 + u , 1 + u , u)$ e $s : x + y - 2z = 10\ y = 10$.
   a) Classifique as rectas dadas quanto à sua posição relativa.
   b) Determine o plano M que contém a recta r e é paralelo a s .
   c) Determine os pontos R e S das rectas r e s , respectivamente, situados sobre a respectiva perpendicular comum; defina a perpendicular comum t em questão.
   d) Tendo em atenção as alíneas anteriores, determine o plano M' , paralelo às rectas r e s e que passa num ponto I , equidistante destas, situado sobre a recta t .

132. Considere o triângulo existente no plano $M : z = 2$ com vértices em $A = (1 , 1 , 2)$, $B = (3 , 1 , 2)$ e $C = (2 , 2 , 2)$. Admitindo que existe uma fonte luminosa pontual situada em $F = (0 , 0 , 5)$, determine a sombra que o triângulo dado projecta num pavimento contituido por uma rampa, definida pelo plano $\alpha : y + 2z = 2$, e por uma parte horizontal representada pelo plano $\beta : z = 0$. Faça um esboço da situação presente, procurando localizar os vértices que definem o contorno da sombra criada.

133. Calcule a distância entre os planos M e M' , definidos, respectivamente, pelas equações cartesianas $7x + 4y + 5 - 4z = 0$ e $14x + 8y - 8z - 8 = 0$.

134. Determine o ângulo α formado pelos planos $M : x + y = 1$ e $M' : y + z = 2$.

135. Condicione os parâmetros reais k e w de modo a que a equação $x + kz = w$ represente um plano M , tal que:
   a) A distância da origem a M seja igual a $\sqrt{2}$ unidades.
   b) O plano em questão forme um ângulo de 60^o com o plano $M' : y + z = 5$.

136. Determine um plano M que contém a recta $r : x - 2y = z = -1$ e faz um ângulo de 45^o com o plano $M' : x + z = 0$.

137. Encontre todos os pontos situados sobre a intersecção dos três planos seguintes: $M : 3x + y + z = 5$, $M' : 3x + y + 5z = 7$ e $M'' : x - y + 3z = 3$.

138. Considere a recta r que passa nos pontos $P = (1 , 0 , 1)$ e $Q = (-1 , 1 , 2)$. Defina vectorialmente a recta s que passa em P , é paralela ao plano $M : 3x + 2y + z = 0$ e é ortogonal à recta r .

139. Considere a recta $r : 4x + 2y = z - 3x = -4$ e o ponto $P = (8, -1, 8)$. Obtenha equações do tipo vectorial e cartesiana para a recta r' que passa em P e intersecta perpendicularmente a recta r.

140. Obtenha uma equação vectorial para a recta r que passa no ponto $P = (1, 1, 0)$, é paralela ou está contida no plano $M : 2x + y - z - 3 = 0$ e é concorrente com a recta $s : X(t) = (1, 0, 0) + t(-1, 0, 1)$.

141. Considere o plano $M : 2x - y + 3z = 1$, e as rectas $s : X(u) = (4 + 3u, 5 + 6u, u)$ e r definida pelos pontos $P = (1, 0, 1)$ e $Q = (0, 1, 2)$. Defina vectorialmente a recta t, paralela ao plano M, ortogonal à recta r e concorrente com a recta s no ponto desta, I, mais próximo da origem.

142. Dados o plano $M : 2x + y - z = 3$ e a recta r de equação vectorial $X(u) = P + uA$, em que $P = (-1, 0, 1)$ e $A = (1, 1, 0)$, determine:
   a) O ponto I de intersecção de r com M.
   b) A recta r' contida no plano M e perpendicular a r no ponto I.
   c) Um ponto Q da recta r situado à distância de $\sqrt{6}$ unidades do plano M.
   d) A recta r'', paralela ao plano M, concorrente com r no ponto Q e que faz um ângulo de 60^o com r.

143. Considere a recta $r : X(u) = R + uA$, em que $R = (-1, 2, -1)$ e $A = (1, -1, 1)$, e o plano $M : x - y = 1$. Determine:
   a) O ponto I de intersecção da recta r com o plano M.
   b) Os pontos Q e Q' da recta r situados à distância de $\sqrt{2}$ unidades do plano M.
   c) Os pontos P e P' tais que os triângulos com vértices em I, Q e $P(P')$ sejam rectângulos em Q, tenham $\sqrt{12}$ unidades de área e os lados $\overline{QP(P')}$ estejam situados sobre uma recta paralela ao plano M. Considere para Q a solução da alínea anterior que se encontra mais afastada do plano coordenado xOy.

144. Considere os planos $M : x + y + z = 5$ e M' definido pelo ponto $P = (1, 2, 3)$ e pela recta $r : X(t) = (1, 0, 1) + t(0, 2, 1)$. Determine:
   a) A recta s que passa no ponto $Q = (2, -1, 1)$ e é paralela aos planos M e M'.
   b) A distância da recta s ao plano M.
   c) As rectas r' e r'' do plano M, concorrentes com r e que fazem um ângulo de 60^o com a recta s.

145. Considere o ponto $P = (1, 0, 1)$ e o plano $M : x - 4y + z = 0$. Seja a recta s que contém o ponto $S = (1, 1, 0)$ e tem A como vector direcção. Determine:
   a) O vector A, de forma a que a recta s seja paralela ao plano M e forme um ângulo de valor arc sen $1/3$ com o plano coordenado xOz.
   b) Uma recta r do plano M, paralela ao vector $B = (2, 1, 2)$ e que dista $\sqrt{20}/3$ unidades do ponto P; caso pretenda, pode recorrer ao enunciado no exercício 95.
   c) A recta t do plano M, ortogonal à recta s e à distância mínima do ponto P.

146. Considere o plano $M : x + y - z = 3$, a recta $r : X(t) = (1, 2, 3) + t(2, 1, 0)$ e os pontos $P = (3, 5, 2)$ e $Q = (1, 5, 2)$. Determine:
   a) A recta r' do plano M, concorrente e perpendicular à recta r.
   b) Uma recta r'' que contém P, intersecta a recta r e faz um ângulo de 60^o com o plano M.
   c) O ponto R da recta r, de forma a que P, Q e R sejam vértices de um triângulo com 1 unidade de área.

147. Sejam dados os planos $M : x + y - z = d$ e $M' : 2x - y + z = d'$ e ainda os pontos $P = (1, -1, 1)$ e $Q = (4, -1, 2)$.
   a) Determine o valor de d, de forma a que P e Q sejam equidistantes de M.
   b) Determine as rectas r e r' que contêm P, são paralelas ao plano M e fazem um ângulo de 60^o com o plano M'.
   c) Identifique qual das rectas obtidas na alínea anterior está mais próxima de Q.
   d) Sendo R e R', respectivamente, os pontos de intersecção de r e r' com o plano M', determine os valores de d', de forma a que o triângulo com vértices em R, P e R' tenha $\sqrt{3}/2$ unidades de área.

148. Sejam a recta $r : X(t) = (1, -1, 1) + t(-1, 0, 2)$ e o ponto $Q = (-1, 1, 3)$.
   a) Calcule a distância do ponto Q à recta r e indique o ponto I desta recta mais próximo de Q.
   b) Escreva uma equação cartesiana para a recta r' que contém o ponto Q, é complanar com a recta r e é paralela ao plano coordenado xOz.

149. Considere o plano $M : 2x - y - 2z = 2$ e a recta $r : X(u) = (-1, 0, 1) + u(1, -2, 3)$.
   a) Determine o ponto I de intersecção da recta r com o plano M.
   b) Seja M' o plano definido pela recta r e paralelo ao vector $A = (7, 8, 3)$. Determine a recta s do plano M', de maior inclinação em relação ao plano M e que passa no ponto I.

150. Dados os planos $M = \{ Q + s A + t B \}$, em que $Q = (0, 0, -3)$, $A = (0, 3, 3)$ e $B = (2, 0, 4)$, e M' definido pelo ponto $P = (2, 1, 2)$ e pela recta r de equação vectorial $X(u) = R + u C$ com $R = (4, 3, 2)$ e $C = (2, -2, 0)$, determine:
   a) A distância da recta r à origem.
   b) A recta r' do plano M', de maior inclinação relativamente ao plano M e que passa num ponto S do plano M' que dista 2 unidades do ponto $T = (2, 1, 0)$.

151. Determine o conjunto V dos pontos do plano $M : y + z = 0$ situados à distância de $3\sqrt{2}$ unidades da recta $r : y = z = 0$; caso pretenda, pode recorrer ao enunciado no exercício 95 . Encontre ainda um ponto S do conjunto V, situado num plano M' que é perpendicular aos planos $x + 2y = 7$ e $y + z = 6$ e que dista $\sqrt{6}$ unidades do ponto $R = (1, -1, 1)$.

152. Considere as rectas enviesadas $r : X(t) = P + t A$ e $s : X(u) = Q + u B$.
   a) Mostre que a distância entre as rectas enviesadas r e s, $d_{r,s}$, pode ser dada por
   $$d_{r,s} = \frac{|(Q - P) \cdot A \times B|}{\|A \times B\|}$$
   Note que $d_{r,s}$ pode ser definida como a distância de um ponto da recta s, seja Q, ao plano que contém a recta r e é paralelo a s.
   b) Sejam dados o ponto $P = (1, 3, -1)$, a recta $s : x - z = y + 2 = z - x + 4$ e o plano $M : x + z = 2$. Escreva uma equação vectorial para a recta r que contém P, é paralela a M e dista 3 unidades de s. Pode recorrer à expressão da alínea anterior, após verificar que r e s serão rectas enviesadas.

153. Considere a recta $s : X(u) = R + u A$, em que $R = (1, 1, 0)$ e $A = (2, 1, 2)$, o ponto $P = (1, 0, 1)$ e o plano $M : x - 4y + z = 0$.
   a) Seja M' o plano que contém o ponto P e é ortogonal à recta s. Determine a recta t que é a intersecção dos planos M e M'.
   b) Sejam I' o ponto de intersecção de s com M' e I a projecção ortogonal de P em M. Determine a área do triângulo com vértices em I, P e I'.
   c) Determine uma recta r paralela à recta s, contida no plano M e que dista $\sqrt{20}/3$ unidades do ponto P ; caso pretenda, pode recorrer ao enunciado no exercício 95 ou, em alternativa, atente na situação apresentada na alínea a).

154. Considere as rectas $r : X(t) = (1, 0, 1) + t(1, 1, 2)$ e $r' : x - 2z = 2y = 2$, e o ponto $Q = (3, 2, 1)$. Determine a recta r'' que contém o ponto Q e é concorrente com as rectas r e r'.

155. Sejam as rectas enviesadas r, que contém os pontos $P = (0, 1, 0)$ e $Q = (1, 1, 0)$, e r' definida pelos pontos $R = (-3, 1, -4)$ e $S = (-1, 2, -7)$. Obtenha uma equação vectorial da recta s, paralela ao vector $V = (1, -5, -1)$ e concorrente com as rectas dadas.

156. Sejam dadas as rectas $r : X(t) = P + tA$, em que $P = (1, 0, 1)$ e $A = (1, 1, 2)$, e $r' : x - 2z = 2y = 2$. Determine uma recta s que intersecta as rectas r e r', é paralela ao plano coordenado xOy e dista deste uma unidade.

157. Considere o ponto $P = (1, 2, -3)$ e a recta $r : 2y - x = 2z = -2$. Determine:
   a) O plano M perpendicular à recta r e que contém o ponto P.
   b) Os planos M' e M'' que contêm P, são perpendiculares ao plano M e estão situados à distância de 2 unidades do ponto I de intersecção de r com M.

158. Considere as rectas enviesadas $r : X(u) = (2 + u, u, -1 + u)$ e $s : x - 2z = 9y = 9$.
   a) Seja $M : x + y + z = d$ ($d \in \mathbb{R}$) um plano genérico de $\mathbb{R}^3$ perpendicular à recta r. Determine os pontos de intersecção das rectas r e s com o plano M.
   b) Tendo em conta os resultados encontrados na alínea a), defina vectorialmente a recta h perpendicular comum às rectas r e s.

159. Considere o plano $M : x + y + z = 0$ e as rectas $r : X(u) = (0, 0, 2) + u(1, 1, 1)$, $s : X(v) = (2, 0, 5) + v(0, 1, 1)$ e $t : X(w) = (-3, -3, 3) + w(1, 0, 2)$ as quais são enviesadas.
   a) Determine os pontos de intersecção das rectas dadas com o plano $M' : x + y + z = d$ ($d \in \mathbb{R}$), plano genérico de $\mathbb{R}^3$ paralelo ao plano M.
   b) Tendo em conta os resultados encontrados na alínea a), defina vectorialmente uma recta h, paralela ao plano M e concorrente com as rectas r, s e t.

Soluções dos Exercícios

80. a) $X(u) = P + uA$ com $P = (2, -5)$ e $A = (1, -3)$.
   b) $X(u) = P + uA$ com $P = (4, 7)$ e $A = (1, 0)$.
   c) $X(u) = P + uA$ com $P = (7, 2, -4)$ e $A = (5, 3, -8)$.
   d) $X(u) = Q + uA$ com $Q = (2, 1, 7)$ e $A = (-6, 2, -7)$.
   e) $X(u) = P + uA$ com $P = (1, 3, 0, 2)$ e $A = (1, 4, -2, 2)$.
   f) $X(u) = P + uA$ com $P = (3, 7, -1, 5, 0)$ e $A = (2, 8, -5, 3, -5)$.

81. a) $X(u) = O + u\,A$ com $O = (0, 0)$ e $A = (1, 1)$.
b) $X(u) = O + u\,A$ com $O = (0, 0)$ e $A = (1, 5)$.
c) $X(u) = O + u\,A$ com $O = (0, 0)$ e $A = (3, 2)$.
d) $X(u) = O + u\,A$ com $O = (0, 0)$ e $A = (1, 0)$.
e) $X(u) = P + u\,A$ com $P = (1, -1)$ e $A = (1, 5)$.
f) $X(u) = P + u\,A$ com $P = (4, 0)$ e $A = (0, 1)$.
g) $X(u) = P + u\,A$ com $P = (1/2, 1)$ e $A = (2, 1)$.

82. a) $r : X(u) = P + u\,A$ com $P = (5, -2)$ e $A = (2, 3)$.
b) $s : X(u) = Q + u\,A$ com $Q = (4, 0)$ e $A = (1, 1)$.
c) $t : X(u) = R + u\,A$ com $R = (1, 2)$ e $A = (0, 1)$.

83. a) $M = (1/2, -1/2)$.
b) $M = (7, 7)$.
c) $M = (9/2, 1/2, 0)$.
d) $M = (-1, 2, 7/2)$.
e) $M = (1/2, 1, 1, 1)$.
f) $M = (2, 3, 3/2, 7/2, 5/2)$.

84. a) Não. b) Não. c) Sim.
d) Sim. e) Sim.

85. a) Não. b) Não. c) Não.

86. - - - - -

87. a) $s : X(u) = P + u\,A$ com $P = (0, 0)$ e $A = (3, 1)$.
b) $s : X(u) = P + u\,A$ com $P = (5, 4)$ e $A = (1, -1)$.
c) $s : X(u) = P + u\,A$ com $P = (2, 1)$ e $A = (1, 0)$.
d) $s : X(u) = P + u\,A$ com $P = (1, 0)$ e $A = (5, -2)$.

88. Equação cartesiana: $3x + y = 1$. Equação reduzida: $y = -3x + 1$.

89. - - - - -

90. Equação vectorial: $r : X(u) = P + u\,A$ com $P = (2, 5, -4)$ e $A = Q - P = (5, -6, 6)$;
Equações paramétricas: $x = 2 + 5u$, $y = 5 - 6u$, $z = -4 + 6u$;
Equação cartesiana: $(x - 2)/5 = (5 - y)/6 = (z + 4)/6$.

91. As rectas são paralelas.

92. - - - - -

93. a) $\| Q - X(t) \|^2 = 9t^2 + 8t + 9$.
b) $X(t_0) = X(-4/9) = (5, 26, 19)/9$; $\| Q - X(-4/9) \| = \sqrt{65}/3$.
c) - - - - -

94. Só existe um ponto $R = X(1) = (1, 1, 0)$. A distância de Q à recta r é igual a $\sqrt{3}$ já que existe apenas um ponto da recta que dista $\sqrt{3}$ unidades do ponto Q ; aquela distância seria menor se existissem dois pontos da recta à mesma distância de Q e seria maior se não existisse qualquer ponto.

95. - - - - -

96. A distância do ponto Q à recta r tem o valor $d_{Q,r} = \sqrt{14}$.

97. a) $S = P = (1, 0, 0)$. b) $S = (1, 1/2, 3)$.

98. a) Não existe qualquer ponto C .
b) Há duas soluções possíveis: $C = (4, -3, 1) \vee C = (2, -1, 1)$.

99. $A = O = (0, 0, 0)$ e $B = (0, 1, -1)$.

100. a) Equação vectorial: $X(u, v) = P + uA + vB$ com $P = (1, 2, 1)$, $A = (0, 1, 0)$ e $B = (1, 1, 4)$.
Equações paramétricas: $x = 1 + v$, $y = 2 + u + v$, $z = 1 + 4v$.
Equação cartesiana: $4x - z = 3$.
b) Equação vectorial: $X(u, v) = P + u(P - Q) + v(P - R)$, em que $P = (1, 2, 1)$, $(P - Q) = (1, 1, 1)$ e $(P - R) = (0, 1, -3)$.
Equações paramétricas: $x = 1 + u$, $y = 2 + u + v$, $z = 1 + u - 3v$.
Equação cartesiana: $4x - 3y - z = -3$.
c) Equação vectorial: $X(u, v) = uA + vB$ com $A = (0, 1, 0)$ e $B = (1, 1, 4)$.
Equações paramétricas: $x = v$, $y = u + v$, $z = 4v$.
Equação cartesiana: $4x - z = 0$.

101. $M : X(s, t) = P + sA + tB$ com $P = (3, 0, 0)$, $A = (2, 1, -1)$ e $B = (1, 1, 2)$, por exemplo.

102. a) Não. b) Não. c) Sim.
d) Não. e) Sim.

103. $N = (1, -2, 1)$, por exemplo.

104. a) Equação cartesiana: $4x - y + 2z = 12$.
Equação vectorial: $X(u, v) = P + uA + vB$ com $P = (1, -2, 3)$, $A = (0, 2, 1)$ e $B = (1, 0, -2)$, por exemplo.
b) Equação cartesiana: $z = 0$.
Equação vectorial: $X(u, v) = uA + vB$ com $A = (1, 0, 0)$ e $B = (0, 1, 0)$, por exemplo.
c) Equação cartesiana: $x + \sqrt{2}\, y + z = 2 + \sqrt{2}$.
Equação vectorial: $X(u, v) = P + uA + vB$, em que $P = (1, 1, 1)$ e os vectores geradores são $A = (\sqrt{2} - 1, -1, 1)$ e $B = (1, -1, \sqrt{2} - 1)$, por exemplo.

105. Equação vectorial: $X(u, v) = P + uA + vB$ com $P = (1, 2, 3)$, $A = (1, 1, 1)$ e $B = Q - P = (1, 1, 2)$.
Equação cartesiana: $x - y = -1$.

106. $M : x - 2y + z = 1$.

107. As rectas r e s são complanares (são concorrentes).

108. Para $k = 2/3$ as rectas r e s são concorrentes (portanto complanares) no ponto $I = (-9, -5, -13)$.

109. a) - - - - -   b) $I = (5, 9, 13)$.

110. As rectas r e s não são concorrentes (são enviesadas).

111. As rectas r e s são enviesadas dado que não são complanares; por outro lado tem-se $\alpha = \arccos(2/3)$.

112. $I = (6, 0, 7)$.

113. $S = (3, 2, 1)$.

114. a) A recta r está contida no plano M ($r \subset M$).
b) A recta r não está contida no plano M ($r \not\subset M$); r intersecta M no ponto P ($P = r \cap M$).

115. $k = 1 \wedge w = 7$.

116. O seu valor é $4\sqrt{42}/7$.

117. a) $V = V_1 + V_2$ com $V_1 = (11, 7, 4)$ e $V_2 = (-10, -5, 0)$.
b) $V = V_1 + V_2$ com $V_1 = (8, 1, 7)/3$ e $V_2 = (-5, 5, 5)/3$.

118. $s : X(u) = I + u\,A$ com $I = r \cap M = (3, 2, 2)$ e $A = (1, 1, 5)$.

119. $B = (15, 20, 25)/22$ e $D = (7, 2, -3)/22$.

120. $B = (1/3, 4/3, 4/3)$ e $C = (0, 0, 2)$.

121. O lugar geométrico dos pontos equidistantes de A e B é o plano M com a equação $3x + 4y - z = 10$. Pode verificar-se que o vector normal a M, $N = (3, 4, -1)$, é paralelo ao segmento $\overline{AB}$ (neste caso $N = B - A$) e o ponto médio deste segmento, dado por $P = (A + B)/2 = (5/2, 1, 3/2)$, pertence a M.

122. O lugar geométrico dos pontos equidistantes de A, B e C é a recta r com equações paramétricas $x = 1/2$, $y = 1/2$, $z = u$, $u \in \mathbb{R}$. Esta recta é perpendicular ao plano $M : z = 1$ que contém A, B e C, já que o seu vector direcção, $\vec{k}$, é um vector normal a M.

123. $R = (4, 1, -5)$ e $S = (-5, 2, 6)$, por exemplo.

124. - - - - -

125. a) $N = (1, -1, -1)$, por exemplo.
b) $M' : x - y - z = -1$ (equação cartesiana).
c) A distância do ponto P ao plano M tem o valor $d_{P,M} = \sqrt{3}/3$.

126. a) $M'' : x - 2y + 4z = -5$.
b) Há duas soluções posssíveis: $\alpha : 2x + y = \sqrt{5} \;\vee\; \alpha : 2x + y = -\sqrt{5}$.
c) Há duas soluções posssíveis: $\pi = M' : z = -1 \;\vee\; \pi : x - 2y - 2z = 1$.

127. a) O conjunto U contém todos os pontos situados em duas rectas, r' e r'', paralelas entre si e ao plano M, definido por: $U = r' \cup r'' = \{ (a, 0, 2a - 10), a \in \mathbb{R} \} \cup \{ (a, 0, 2a + 8), a \in \mathbb{R} \}$.
b) Há duas soluções possíveis (paralelas entre si) para a recta r pedida, isto é:
$r : X(v) = S + v\,C$ com $S = (5, 0, 0)$ e $C = (3, 4, 0)$ ou
$r : X(w) = T + w\,C$ com $T = (19/5, 0, -12/5)$ e $C = (3, 4, 0)$.

128. a) Os planos M e M' são paralelos.
b) $Q = O = (0, 0, 0)$ e $R = (1, 0, -1)$, por exemplo; $r : X(u) = u\,(1, 0, -1)$.
c) O lugar geométrico dos pontos equidistantes dos planos M' e xOy são dois planos concorrentes, com as equações $x - 2y + (1 - \sqrt{6})\,z = 0$ e $x - 2y + (1 + \sqrt{6})\,z = 0$.

129. a) A recta r é paralela ao plano M.
b) $M'' : 5x + 7y + 3z = 0$.
c) $\alpha : 2x - y - z = -11$.

130. a) As rectas r e h são concorrentes.
   b) $r' : X(u) = I + u\,A$ com $I = r \cap h = (4\,,\,-1\,,\,1)$ e $A = (5\,,\,-4\,,\,1)$.
   c) $P = (-4\,,\,-1\,,\,-7)$ e $P' = (28/9\,,\,-1\,,\,1/9)$.

131. a) As rectas r e s são enviesadas (não são complanares).
   b) $M : x + y - 2z = 4$.
   c) $R = (2\,,\,0\,,\,-1)$ e $S = (3\,,\,1\,,\,-3)$. A perpendicular comum às rectas r e s é a recta $t : X(v) = R + v\,A$ com $A = S - R = (1\,,\,1\,,\,-2)$.
   d) $M' : x + y - 2z = 7$.

132. A sombra é formada por um quadrilátero de vértices consecutivos A_α, V_1, V_2 e B_α localizado no plano α, e por um triângulo de vértices consecutivos V_1, C_β e V_2 sobre o plano β (é evidente que V_1 e V_2 pertencem à recta de intersecção dos planos α e β), sendo definidos por:
   - $A_\alpha = (8\,,\,8\,,\,1)/5$ é a sombra do vértice A sobre o plano α;
   - $B_\alpha = (24\,,\,8\,,\,1)/5$ é a sombra do vértice B sobre o plano α;
   - $C_\beta = (10\,,\,10\,,\,0)/3$ é a sombra do vértice C sobre o plano β;
   - $V_1 = (2\,,\,2\,,\,0)$ é um dos vértices sobre a recta de intersecção atrás referida;
   - $V_2 = (14/3\,,\,2\,,\,0)$ é o vértice restante sobre a recta de intersecção.

133. A distância entre os planos paralelos M e M' tem o valor $d_{M,M'} = 1$.

134. $\alpha = \pi/3$ rad..

135. a) $w = \pm\sqrt{2 + 2\,k^2} \;\wedge\; k \in \mathbb{R}$.
   b) $(k = -1 \;\vee\; k = 1) \;\wedge\; w \in \mathbb{R}$.

136. Há duas soluções posssíveis: $M : z = -1 \;\vee\; M : x - 2y + 2z = -3$.

137. A intersecção dos planos M, M' e M'' é um único ponto $I = (3/2\,,\,0\,,\,1/2)$.

138. $s : X(u) = P + u\,A$ em que $A = (1\,,\,-5\,,\,7)$.

139. Equação vectorial: $X(u) = P + u\,A$ em que $A = (5\,,\,7\,,\,3)$.
   Equação cartesiana: $3x - 5z = -16 \;\wedge\; 7x - 5y = 61$.

140. $r : X(u) = P + u\,A$ em que $A = (1\,,\,-3\,,\,-1)$. Note que, neste caso, se verifica que $r \subset M$ já que $P \in M$.

141. $t : X(v) = I + v\,A$ com $I = (29\,,\,-11\,,\,-21)/23$ e $A = (4\,,\,5\,,\,-1)$.

142. a) $I = r \cap M = (1, 2, 1)$.
b) $r' : X(s) = I + s\,B$ em que $B = (1, -1, 1)$.
c) Há duas soluções possíveis: $Q = P = (-1, 0, 1) \vee Q = (3, 4, 1)$.
d) $r'' : X(v) = Q + v\,C$ com $C = (0, 1, 1)$ e Q é um dos pontos obtidos em c). Note que, em cada ponto Q atrás encontrado, só é possível definir uma única recta r'' nas condições desejadas, já que a recta r faz um ângulo de 60° com M.

143. a) $I = r \cap M = (1, 0, 1)$.
b) $Q = (2, -1, 2)$ e $Q' = (0, 1, 0)$.
c) $P = (2 + 2\sqrt{2}, -1 + 2\sqrt{2}, 2)$ e $P' = (2 - 2\sqrt{2}, -1 - 2\sqrt{2}, 2)$, tendo-se considerado a solução $(2, -1, 2)$ para o ponto Q.

144. a) $s : X(u) = Q + u\,A$ em que $A = (0, 1, -1)$.
b) A distância da recta s ao plano M tem o valor $d_{s,M} = d_{Q,M} = \sqrt{3}$.
c) $r' : X(b) = I + b\,B$ e $r'' : X(c) = I + c\,C$, onde o ponto comum é definido por $I = r \cap M = (1, 2, 2)$, $B = (-1, 1, 0)$ e $C = (1, 0, -1)$.

145. a) $A = (2, 1, 2)$, por exemplo.
b) Há duas soluções possíveis (paralelas entre si) para a recta r pedida, isto é: $r : X(u) = Q + u\,B$ e $Q = (-1, 0, 1) \vee r : X(t) = R + t\,B$ e $R = (1, 0, -1)$.
c) $t : X(v) = T + v\,D$ com $T = (8, 4, 8)/9$ e $D = (1, 0, -1)$.

146. a) $r' : X(u) = I + u\,A$ com $I = r \cap M = (3, 3, 3)$ e $A = (1, -2, -1)$.
b) Há duas soluções possíveis (concorrentes entre si) para a recta r'' pedida, isto é:
$r'' : X(v) = P + v\,B$ com $B = (2\sqrt{3} + 6, 9 - \sqrt{3}, \sqrt{3} - 3)$ ou
$r'' : X(w) = P + w\,C$ com $C = (-2\sqrt{3} + 6, 9 + \sqrt{3}, -\sqrt{3} - 3)$.
c) $R = (7, 5, 3)$.

147. a) $d = 0$.
b) $r : X(u) = P + u\,A$ e $r' : X(v) = P + v\,B$, sendo $A = (1, -1, 0)$ e $B = (1, 0, 1)$.
c) A recta r' é a que está mais próxima de Q.
d) Há duas soluções possíveis: $d' = 1 \vee d' = 7$.

148. a) A distância de Q a r tem o valor $d_{Q,r} = 2\sqrt{30}/5$ e $I = (-1, -5, 17)/5$.
b) $r' : 2x + z = 1 \wedge y = 1$.

149. a) $I = (-4, 6, -8)$.
b) $s : X(t) = I + t\,B$ com $B = (1, -2, 3)$.

150. a) A distância da recta r à origem tem o valor $d_{O,r} = \sqrt{57/2}$.
b) $r' : X(v) = S + v\,D$ com $S = P = (2, 1, 2)$ e $D = (2, 1, 0)$. Note que, neste caso, o ponto S é único, já que o ponto T dista 2 unidades do plano M'.

151. $V = \{ (x, y, z) = (a, -3, 3), a \in \mathbb{R} \} \cup \{ (x, y, z) = (a, 3, -3), a \in \mathbb{R} \}$. Há quatro soluções possíveis para o ponto S desejado: $S = (-4, -3, 3) \vee S = (2, -3, 3) \vee S = (2, 3, -3) \vee S = (8, 3, -3)$.

152. a) - - - - -

b) $r : X(t) = P + t\,A$ com $A = (1, 0, -1)$. As rectas r e s não são paralelas dado que, sendo A ortogonal ao vector $N = (1, 0, 1)$ (vector normal ao plano M), A não é paralelo ao vector direcção de s (vector paralelo a N); por outro lado, r e s não são concorrentes, já que distam entre si de um valor não nulo.

153. a) $t : x + z = 4\,y = 16/9$ (equação cartesiana).

b) A área do triângulo com vértices em I, P e I' tem o valor $1/6$.

c) Há duas soluções possíveis (paralelas entre si) para a recta r pedida, isto é:

$r : X(v) = T + v\,A$ com $T = (1, 0, -1)$ ou

$r : X(w) = S + w\,A$ com $S = (-1, 0, 1)$.

154. $r'' : X(u) = Q + u\,A$ com $A = (1, 1, 1)$.

155. $s : X(u) = I + u\,V$ com $I = (-15/4, -9, -2)$.

156. Há duas soluções possíveis para a recta s pedida, isto é:

$s : X(u) = R + u\,B$ com $R = P = (1, 0, 1)$ e $B = (3, 1, 0)$ ou

$s : X(w) = S + w\,C$ com $S = (0, 1, -1)$ e $C = (0, 1, 0)$.

157. a) $M : 2\,x + y = 4$.

b) $M' : z = -3$ e $M'' : 4\,x - 8\,y - z = -9$.

158. a) Os pontos de intersecção das rectas r e s com o plano M são, respectivamente, $R = (d + 5, d - 1, d - 4)/3$ e $S = (2\,d + 7, 3, d - 10)/3$ $(d \in \mathbb{R})$.

b) A recta h é dada por $X(a) = R + a\,A$, em que $R = (2, 0, -1)$ e $A = (1, 1, -2)$, e está associada ao valor $d = 1$ na equação do plano M.

159. a) Os pontos de intersecção das rectas r, s e t com M' são, respectivamente: $R = (d - 2, d - 2, d + 4)/3$, $S = (4, d - 7, d + 3)/2$ e $T = (d - 6, -9, 2\,d + 15)/3$ $(d \in \mathbb{R})$.

b) Há duas soluções possíveis para a recta h pedida, isto é:

$h : X(a) = S + a\,A$ com $S = (2, 1, 6)$ e $A = (1, 4, -5)$ (para $d = 9$ em M') ou

$h : X(b) = R + b\,B$ com $R = (-4, -4, -2)$ e $B = (4, -3, -1)$ (para $d = -10$ em M').