INTRODUÇÃO AOS SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

Exercícios Propostos

1. Resolva, recorrendo ao método de Gauss, os seguintes sistemas de equações lineares:

a)
$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 8 \\ 4x + 2y + 2z = 4 \\ 2x + 5y + 3z = -12 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} y + z = 3 \\ x + 2y - z = 1 \\ x + y + z = 4 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} 2x - y + 2z = -2 \\ x + 3y - z = -2 \\ -4x - y = 6 \end{cases}$$

2. Determine o valor do parâmetro real α de modo a que o sistema de equações dado seja possível e determinado.

$$\begin{cases} 5x + 3z + 2 = 0 \\ 2y - z + 1 = 0 \\ \alpha x + 6y + \alpha = 0 \end{cases}$$

3. Classifique, utilizando o método de Gauss, os seguintes sistemas de equações lineares:

a)
$$\begin{cases} 2x - 3y - z = -4 \\ -x + y + z = 1 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x - y + 4z = 1 \\ 2x - y - 2z = 0 \\ 3x - 2y + 2z = 1 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} 2x + 4y = 16 \\ 5x - 2y = 4 \\ 3x + y = 9 \\ 4x - 5y = -7 \end{cases}$$

4. Resolva os seguintes sistemas de equações lineares:

a)
$$\begin{cases} 2x + 4y = 16 \\ 5x - 2y = 4 \\ 10x - 4y = 3 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 3x + 2y - 2z = 6 \\ -x - 4y + 4z = 1 \end{cases}$$

5. Aplique o método de Gauss para estudar a influência do parâmetro real β na solução do sistema de equações dado; apresente as várias soluções possíveis.

$$\begin{cases} \beta z + 6w = 0 \\ y + 7z + 8w = 1 \\ x + 2y + 3z + 4w = 0 \\ 5z + 6w = 0 \end{cases}$$

6. Encontre uma solução geral e uma solução particular para o seguinte sistema de três equações lineares a cinco incógnitas:

$$\begin{cases} x + 2y - z + u = 0 \\ 3t - 2u = 0 \\ -x - 2y + z + 3t - 3u = 0 \end{cases}$$

7. Determine $\alpha \in \mathbb{R}$ de modo a que o sistema de equações lineares dado:

a) Não admita solução além da nula.

b) Seja possível e simplesmente indeterminado; apresente, neste caso, a sua solução.

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x + \alpha y + 2z + 3t = 0 \\ x + y + \alpha z + 4t = 0 \\ x + y + z + \alpha t = 0 \end{cases}$$

8. Determine os valores dos parâmetros reais a e b, de forma a que o sistema dado seja possível e duplamente indeterminado e, neste caso, obtenha a sua solução.

$$\begin{cases} x - y + 2z + 2t = b \\ x - y + at = 5 \\ x - y + 3z - t = -1 \end{cases} \qquad (a, b \in \mathbb{R})$$

9. Estude a dependência da solução dos seguintes sistemas de equações lineares, em relação aos respectivos parâmetros, recorrendo ao método de Gauss:

a)
$$\begin{cases} x + a\,y + z = 2 \\ -x - a\,y + 2\,z = b \\ 2x + a\,z = 3 \end{cases} \qquad (a, b \in \mathbb{R})$$

b)
$$\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ -2y + z = 0 \\ 4x + a\,y + 2\,z = 2 \\ 6x - 3y + 3\,z = b \end{cases} \qquad (a, b \in \mathbb{R})$$

c)
$$\begin{cases} x + y = 0 \\ -2x + y + a\,z = 1 \\ a\,x + y = a - 1 \\ -2x + 2\,a\,z = 2 \end{cases} \qquad (a \in \mathbb{R})$$

d)
$$\begin{cases} x + a\,y + 2\,z = 0 \\ -x + 2y + z = b \\ y + a\,z = 1 \end{cases} \qquad (a, b \in \mathbb{R})$$

e)
$$\begin{cases} x + a^2\,y + a\,z = a\,b \\ x + y + z = b \\ x + a^2\,y + a^2\,z = a\,b \end{cases} \qquad (a, b \in \mathbb{R})$$

Soluções dos Exercícios

1. a) $(x, y, z) = (2, -5, 3)$. b) $(x, y, z) = (1, 1, 2)$.
   c) $(x, y, z) = (-3/2, 0, 1/2)$.

2. $\alpha \in \mathbb{R} / \{5\}$.