197

Geometria Analítica
(exs: propostos)

80 a) $\overrightarrow{PQ} = Q - P = (-1,4) - (2,-5) = (-3,9)$

$(x,y) = (2,-5) + K(-3,9), K \in \mathbb{R}$

b) $\overrightarrow{PQ} = Q - P = (10,7) - (4,7) = (6,0)$

$(x,y) = (4,7) + K(6,0), K \in \mathbb{R}$

c) $\overrightarrow{PQ} = Q - P = (2,-1,4) - (7,2,-4) = (-5,-3,8)$

$(x,y,z) = (7,2,-4) + K(-5,-3,8), K \in \mathbb{R}$

d) $\overrightarrow{PQ} = Q - P = (2,1,7) - (-4,3,0) = (6,-2,7)$

$(x,y,z) = (-4,3,0) + K(6,-2,7), K \in \mathbb{R}$

e) $\overrightarrow{PQ} = Q - P = (0,-1,2,0) - (1,3,0,2) = (-1,-4,2,-2)$

$(x,y,z,w) = (1,3,0,2) + K(-1,-4,2,-2), K \in \mathbb{R}$

f) $\overrightarrow{PQ} = Q - P = (1,-1,4,2,5) - (3,7,-1,5,0) = (-2,-8,5,-3,5)$

$(x,y,z,w,v) = (3,7,-1,5,0) + K(-2,-8,5,-3,5), K \in \mathbb{R}$

81 a) $P(1,1)$ $Q(2,2)$ $P,Q \in y=x$ $\overrightarrow{PQ} = Q - P = (2,2) - (1,1) = (1,1)$

$(x,y) = (1,1) + K(1,1), K \in \mathbb{R}$

b) $P(1,5)$ $Q(2,10)$ $P,Q \in y=5x$ $\overrightarrow{PQ} = Q - P = (2,10) - (1,5) = (1,5)$

$(x,y) = (1,5) + K(1,5), K \in \mathbb{R}$

c) $2x-3y=0$ $\quad 2\times 0-3y=0 \Leftrightarrow y=0 \quad P(0,0)$

$2\times 1-3y=0 \Leftrightarrow 3y=2 \Leftrightarrow y=\frac{2}{3} \quad Q(1,\frac{2}{3})$

$\overrightarrow{PQ}=Q-P=(1,\frac{2}{3})-(0,0)=(1,\frac{2}{3})$

$(x,y)=(0,0)+K(1,\frac{2}{3}),\ K\in\mathbb{R}$

d) $P(1,0) \quad Q(2,0) \quad P,Q\in y=0 \quad \overrightarrow{PQ}=Q-P=(2,0)-(1,0)=(1,0)$

$(x,y)=(1,0)+K(1,0),\ K\in\mathbb{R}$

e) $5\times 0-6=y \Leftrightarrow y=-6 \quad P(0,-6) \quad 5\times 1-6=y \Leftrightarrow y=-1 \quad Q(1,-1)$

$\overrightarrow{PQ}=Q-P=(1,-1)-(0,-6)=(1,5)$

$(x,y)=(0,-6)+K(1,5),\ K\in\mathbb{R}$

f) $P(4,0) \quad Q(4,1) \quad \overrightarrow{PQ}=Q-P=(4,1)-(4,0)=(0,1)$

$(x,y)=(4,0)+K(0,1),\ K\in\mathbb{R}$

g) $2\times 0-4y+3=0 \Leftrightarrow 4y=3 \Leftrightarrow y=\frac{3}{4} \quad P(0,\frac{3}{4})$

$2\times 1-4y+3=0 \Leftrightarrow 4y=5 \Leftrightarrow y=\frac{5}{4} \quad Q(1,\frac{5}{4})$

$\overrightarrow{PQ}=Q-P=(1,\frac{5}{4})-(0,\frac{3}{4})=(1,\frac{2}{4})=(1,\frac{1}{2})$

$(x,y)=(0,\frac{3}{4})+K(1,\frac{1}{2}),\ K\in\mathbb{R}$

82 a) $3x=2y \Leftrightarrow y=\frac{3}{2}x \quad m=\frac{3}{2} \quad (3,2)\rightarrow$ vetor diretor da reta $3x=2y$

Se as retas são paralelas, $(3,2)$ também é vetor diretor da reta r.

Logo, $r: (x,y)=(5,-2)+K(3,2),\ K\in\mathbb{R}$

b) $y=x \quad m=1 \quad (1,1)\rightarrow$ vetor diretor da reta $y=x$

Se as retas são paralelas, $(1,1)$ também é vetor diretor da reta s.

Logo, $s: (x,y)=(4,0)+K(1,1),\ K\in\mathbb{R}$

c) $x=5 \quad P(5,0) \quad Q(5,1) \quad P,Q\in x=5$

$\overrightarrow{PQ}=Q-P=(5,1)-(5,0)=(0,1) \quad (x,y)=(5,0)+K(0,1),\ K\in\mathbb{R}$

Se as retas são paralelas, $(0,1)$ também é um vetor diretor da reta t.

Logo, $t: (x,y)=(1,2)+K(0,1),\ K\in\mathbb{R}$

83 a) $M(P,Q)=\left(\frac{2-1}{2}, \frac{-5+4}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

b) $M(P,Q)=\left(\frac{4+10}{2}, \frac{7+7}{2}\right)=\left(\frac{14}{2}, \frac{14}{2}\right)=(7,7)$

c) $M(P,Q)=\left(\frac{7+2}{2}, \frac{2-1}{2}, \frac{-4+4}{2}\right)=\left(\frac{9}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$

d) $M(P,Q)=\left(\frac{-4+2}{2}, \frac{3+1}{2}, \frac{0+7}{2}\right)=\left(-1, 2, \frac{7}{2}\right)$

e) $M\left(\frac{1+0}{2}, \frac{3-1}{2}, \frac{0+2}{2}, \frac{2+0}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}, 1, 1, 1\right)$

f) $M\left(\frac{3+1}{2}, \frac{7-1}{2}, \frac{-1+4}{2}, \frac{5+2}{2}, \frac{0+5}{2}\right)=\left(2, 3, \frac{3}{2}, \frac{7}{2}, \frac{5}{2}\right)$

84 $r: (x,y,z)=(-3,1,1)+K(1,-2,3)$

a) $(0,0,0)=(-3,1,1)+K(1,-2,3) \Leftrightarrow (K,-2K,3K)=(3,-1,-1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} K=3 \\ -2K=-1 \\ 3K=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} K=3 \\ K=\frac{1}{2} \\ K=-\frac{1}{3} \end{cases}$ Como foram encontrados diferentes valores para K, O não pertence à reta.

b) $(2,-1,4)=(-3,1,1)+K(1,-2,3) \Leftrightarrow (K,-2K,3K)=(5,-2,3) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} K=5 \\ -2K=-2 \\ 3K=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} K=5 \\ K=1 \\ K=1 \end{cases}$ Como foram encontrados diferentes valores para K, Q não pertence à reta.

c) $(-2,-1,4)=(-3,1,1)+K(1,-2,3) \Leftrightarrow (K,-2K,3K)=(1,-2,3) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} K=1 \\ -2K=-2 \\ 3K=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} K=1 \\ K=1 \\ K=1 \end{cases}$ Como apenas foi encontrado um valor para K, R pertence à reta.

d) $(-4,3,-2)=(-3,1,1)+K(1,-2,3) \Leftrightarrow (K,-2K,3K)=(-1,2,-3) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} K=-1 \\ -2K=2 \\ 3K=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} K=-1 \\ K=-1 \\ K=-1 \end{cases}$ Como apenas foi encontrado um valor para K, S pertence à reta.

e) $(2,-9,16)=(-3,1,1)+K(1,-2,3) \Leftrightarrow (K,-2K,3K)=(5,-10,15) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} K=5 \\ -2K=-10 \\ 3K=15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} K=5 \\ K=5 \\ K=5 \end{cases}$ Como apenas foi encontrado um valor para K, T pertence à reta.

Colinearidade:	1) $r: X(t) = P + t\overrightarrow{PQ}, t \in \mathbb{R}$ $R \in r$? 2) $\exists^1 K, \overrightarrow{PQ} = K\overrightarrow{PR}$? 3) P, Q, R formam um plano? 4) $\dim L(S)$ $S = \{\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}\}$	

85 **a)** $r: X(t) = (2,1,1) + t(2,0,-2), t \in \mathbb{R}$ $\quad \overrightarrow{PQ} = Q - P = (2,0,-2)$

$X(t) = (2+2t, 1, 1-2t)$ $\quad R \in r$? $\quad (3,-1,1) = (2+2t, 1, 1-2t) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2+2t = 3 \\ 1 = -1 \\ 1-2t = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{2} \\ 1 = -1 \\ t = 0 \end{cases}$ → impossível. Logo, os pontos não são colineares.

b) 1) $r: X(t) = (2,2,3) + t(-4,1,-2), t \in \mathbb{R}$ $\quad \overrightarrow{PQ} = Q - P = (-4,1,-2)$

$X(t) = (2-4t, 2+t, 3-2t)$ $\quad R \in r$? $\quad (-6,4,1) = (2-4t, 2+t, 3-2t) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2-4t = -6 \\ 2+t = 4 \\ 3-2t = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 8 \\ t = 2 \\ t = \frac{3}{2} \end{cases}$ → impossível. Logo, os pontos não são colineares

2) $\overrightarrow{PQ} = Q - P = (-4,1,-2)$ $\quad \overrightarrow{PR} = R - P = (-8,2,-2)$

$\overrightarrow{PQ} = K\overrightarrow{PR} \Leftrightarrow (-4,1,-2) = K(-8,2,-2) \Leftrightarrow (-4,1,-2) = (-8K, 2K, -2K) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -8K = -4 \\ 2K = 1 \\ -2K = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} K = \frac{1}{2} \\ K = \frac{1}{2} \\ K = 1 \end{cases}$ → Impossível. Logo, os pontos não são colineares.

3) $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 1 & -2 \\ -8 & 2 & -2 \end{vmatrix} \leftarrow$ D.L. $= (1,0,0) \times \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + (0,1,0) \times \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ -8 & -2 \end{vmatrix} + (0,0,1) \times \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -8 & 2 \end{vmatrix} = (2,8,0) \neq (0,0,0)$

Logo, os vetores não são colineares.

4) $S = \{\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}\}$ $\quad \dim L(S) \leq 2$ $\begin{cases} \text{se } \dim L(S) = 1 \to \text{lin. dep.} \\ \text{se } \dim L(S) = 2 \to \text{lin. indep.} \end{cases}$

$\vec{x} = \lambda_1\overrightarrow{PQ} + \lambda_2\overrightarrow{PR} \Leftrightarrow \vec{x} = \lambda_1(-4,1,-2) + \lambda_2(-8,2,-2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} -4 & -8 & x_1 \\ 1 & 2 & x_2 \\ -2 & -2 & x_3 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x_2 \\ -4 & -8 & x_1 \\ -2 & -2 & x_3 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x_2 \\ 0 & 0 & x_1+4x_2 \\ 0 & 2 & x_3+2x_2 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x_2 \\ 0 & 2 & x_3+2x_2 \\ 0 & 0 & x_1+4x_2 \end{array}\right]$

Possível e determinado se e só se $x_1 + 4x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -4x_2$

$L(S) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + 4x_2 = 0\} = \{(-4x_2, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3\}$

Logo, P, Q e R ~~são~~ não colineares. $\quad \dim L(S) = 2 \Rightarrow$ vetores lin. depend.

c) $\overrightarrow{PQ} = Q - P = (-4,2,0)$ $\quad \overrightarrow{PR} = R - P = (3,-2,0)$

$\overrightarrow{PQ} = K\overrightarrow{PR} \Leftrightarrow (-4,2,0) = K(3,-2,0) \Leftrightarrow (-4,2,0) = (3K,-2K,0) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3K = -4 \\ -2K = 2 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 = -4 \\ K = -1 \end{cases}$ ← impossível. Logo, os pontos não são colineares.