FEUP FACULDADE DE ENGENHARIA
UNIVERSIDADE DO PORTO

DEMEC
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

ANÁLISE MATEMÁTICA

Problemas Propostos para as Aulas Práticas

2018/2019

Mestrado Integrado em Engenharia Informática e Computação

Docentes:
Alexandre Afonso
Carolina Furtado
Mariana Seabra
Sónia Pinto

AMAT - Exercícios

1. DIFERENCIAÇÃO EM R

A. Regras de Derivação

Calcular a derivada de *f(x)* considerando que *x* toma unicamente os valores para os quais a fórmula que define *f(x)* tem significado:

1.

$$f(x)=\sqrt[5]{\frac{1}{x}}+\sqrt[3]{3x^7} \qquad \text{Solução: } f'(x)=-\frac{1}{5x\sqrt[5]{x}}+\frac{7x}{3}\sqrt[3]{3x}$$

2.

$$f(x)=\frac{5\pi}{x^2+x+3}$$

3.

$$f(x)=\frac{x^5}{x^2+1}+\sqrt{x} \qquad \text{Solução: } f'(x)=\frac{3x^6+5x^4}{\left(x^2+1\right)^2}+\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

4.

$$f(x)=x^{3/2}+\tfrac{5}{2}x^2$$

5.

$$f(x)=x^2e^{-x} \qquad \text{Solução: } f'(x)=e^{-x}\left(2x-x^2\right)$$

6.

$$f(x)=\frac{e^x-x-1}{x^2}$$

7.

$$f(x)=\exp\left(x^2+1/x+3\right) \qquad \text{Solução: } f'(x)=e^{x^2+\frac{1}{x}+3}\left(2x-\frac{1}{x^2}\right)$$

8.

$$f(x)=3x\,ln(x)$$

9.

$$f(x)=\frac{\ln(x)}{2x}$$

10.

$$f(x)=3x\ln(3x^2+1) \qquad \text{Solução: } f'(x)=3\ln(3x^2+1)+\frac{18x^2}{3x^2+1}$$

11. $f(x)=\dfrac{1}{1+\ln(x)}x^{3/2}$

12.

$$f(x)=\ln(\ln(x+1)) \qquad \text{Solução: } f'(x)=\frac{1}{(x+1)\,\ln(x+1)}$$

13.

$$f(x)=\ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right) \qquad \text{Solução: } f'(x)=\frac{1}{(x+1)}-\frac{1}{(x+2)}$$

14.

$$f(x)=e^{1/x}\ln(x)$$

15.

$$f(x)=\frac{\ln(x^2+1)}{\ln(x^4+x+1)} \qquad \text{Solução: } f'(x)=\frac{\dfrac{2x}{x^2+1}\ln(x^4+x+1)-\dfrac{4x^3+1}{x^4+x+1}\ln(x^2+1)}{\left[\ln(x^4+x+1)\right]^2}$$

16.

$$f(x)=\frac{e^x\log(x+1)}{x^2}$$

17.

$$f(x)=\frac{\log(x)}{2^x}$$

18.

$$f(x)=x^e+e^x+5^{x-1}$$

19. $f(x)=5\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ Solução: $f'(x)=\dfrac{5}{x^2}sen\left(\dfrac{1}{x}\right)$

20. $f(x)=x^4\cos(x)$ Solução: $f'(x)=4x^3\cos(x)-x^4 sen(x)$

21.

$$f(x)=x\,sen(\tfrac{\pi}{2}x)sen(x^{-1})$$

22.

$$f(x)=sen(xe^x) \qquad \text{Solução: } f'(x)=e^x(x+1)\cos(xe^x)$$

23.

$$f(x) = tg(x^2 + 1)$$

24.

$f(x) = \ln(x)\ tg(x^2)$ Solução: $f(x) = \frac{1}{x} tg(x^2) + 2x\ \ln x\ \sec^2\left(x^2\right)$

25.

$f(x) = \sec(x) + \log(x)$ Solução: $f'(x) = \sec(x) tg(x) + \frac{1}{x}$

26.

$$f(x) = \sec(x) + \operatorname{cosec}(x)$$

27.

$$f(x) = x^2 tg(x^3)$$

28.

$$f(x) = \log(\cos(x)) + tg(\log(x))$$

29.

$$f(x) = sen^2(x+1) + tg(x^3)$$

30.

$f(x) = \cos(\sqrt{x}) + sen^2(x)$ Solução: $f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x}} sen(\sqrt{x}) + 2sen(x)\ \cos(x)$

31.

$$f(x) = 2tg(e^x) - 5\sec(x) + \tfrac{\pi}{2}$$

32.

$$f(x) = \frac{tg(x) + sen(x^2+1)}{\cos^2(x)}$$

33.

$f(x) = (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{tg} x}$ Solução: $f'(x) = \left(sen(x)\right)^{tg(x)} \left(\sec^2(x)\ \ln(sen(x)) + 1\right)$

34.

$$f(x) = e^{\operatorname{tg}(x)\ \ln(\operatorname{sen}(x))}$$

35.

$f(x)=(\ln(x))^{1/x}$ Solução: $f'(x)=[\ln(x)]^{\frac{1}{x}}\left[-\frac{\ln(\ln(x))}{x^2}+\frac{1}{x^2\ln(x)}\right]$

36.
$f(x)=(\sec(x)+3)^{\ln(x)}$

Solução: $f'(x)=(\sec(x)+3)^{\ln(x)}\left[\frac{\ln(\sec(x)+3)}{x}+\frac{\ln(x)\sec(x)tg(x)}{\sec(x)+3}\right]$

B. **Derivação da função inversa**

Seja $y=f(x)$. Usando o conceito de derivada da inversa de uma função calcule $f'(x)=\frac{dy}{dx}$

37.
$f(x)=arcsen\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$ Solução: $f'(x)=\frac{-2}{(1+x^2)\sqrt{(2+x^2)}}$

38.
$$f(x)=\frac{arctg(x)}{x^2}$$

39.
$$f(x)=x^7\left(\tfrac{\pi}{2}-arctg(x)\right)$$

40.
$$f(x)=\frac{arctg\left(1/x\right)-\left(1/x\right)}{\cos\left(1/x\right)-1}$$

41.
$$f(x)=\log\left(arctg\left(\frac{x}{x+1}\right)\right)$$

42.
$$f(x)=arc\sec(\ln x)$$

43.
$$f(x)=\text{arccosec}(x^2)+sen(sen(sen(x)))$$

Solução: $f'(x)=\frac{-2}{x\sqrt{x^4-1}}+\cos(sen(senx))\cos(senx)\cos x$

44. $f(x)=\left(arctg\left(\pi\sqrt{x}\right)\right)^3$

C. Gráficos de funções

Traçar o gráfico de cada uma das seguintes funções:

1.
$$f(x) = 3\sec(x)$$

2.
$$f(x) = \cos(x^2)$$

3.
$$f(x) = arctg(x) + \frac{\pi}{2}$$

4.
$$f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x - 1}$$

5.
$$f(x) = \mathrm{cosec}(x)$$

6.
$$f(x) = \mathrm{cotg}(x)$$

D. Derivada da função composta (regra da cadeia): exercícios de aplicação

a) O volume de um cubo cresce à razão de 300 cm ^{3}/min no instante em que a aresta é 20 cm. Qual a razão de variação da aresta nesse instante? (Solução: 0.25cm/min)

b) Um pequeno balão esférico está a ser cheio de gás à razão de 1m ^{3}/s. No instante inicial (t = 0 s) considere o balão vazio (V = 0 m ^{3}). Qual a razão de crescimento do diâmetro, 2 s depois da operação começar. (Solução: $\dfrac{2}{\sqrt[3]{12^2\,\pi}}$ m/s). Qual a velocidade de crescimento da área superficial do balão? (Solução: $4\sqrt[3]{\dfrac{\pi}{12}}$ m^2/s **)**

c) Verte-se água num tanque cónico invertido (vértice para baixo) à razão de 2cm ^{3}/s. Qual a razão de variação do nível de água quando ela atinge metade do cone?

d) No topo de um poste com 20 m de altura está instalado um foco de luz. Uma bola é largada de 20 m de altura a uma distância de 15 m do poste. Calcular a velocidade de deslocamento da sombra da bola no solo quando decorreu 0,5 s após a largada. (Obs.: considerar que a queda da bola se faz de acordo com a seguinte lei de espaços: $s = 0.5\,g\,t^2$).

e) Uma escada de 5 m de altura está apoiada numa parede vertical. Se a base da escada é arrastada horizontalmente da parede a 5m/s, a que velocidade desliza a parte superior da escada ao longo da parede quando a base se encontra a 3 m desta? (Solução: 3.75m/s)

f) Um menino soltando um papagaio liberta a corda a 0.2 m/s quando o papagaio se move horizontalmente a uma altura de 10 m. Supondo a corda tensa determine a velocidade do papagaio quando a corda está com 12.5 m. (Solução: 1/3 m/s)

g) Enche-se um recipiente de água, à razão de 100 cm^3 /s. O recipiente tem 3 m de comprimento e a secção perpendicular a esta dimensão é trapezoidal, de altura 50cm, de base inferior 25 cm e base superior 1 m. A que velocidade sobe o nível da água quando a profundidade da água é de 25 cm. (Solução: 5.33×10^{-3} cm/s)

h) Se y é uma função de u e u função de x e se existe d^2y/dx^2, então prove que:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{du}\frac{d^2u}{dx^2} + \left(\frac{du}{dx}\right)^2 \frac{d^2y}{du^2}$$

i) Se y é uma função diferenciável de u, u uma função diferenciável de v e v uma função diferenciável de x, então prove que:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dv}\frac{dv}{dx}$$

j) Seja $f(x) = \dfrac{1}{1+1/x}$ se $x \neq 0$, e seja $g(x) = \dfrac{1}{1+1/f(x)}$. Calcular $f'(x)$ e $g'(x)$.

E. Outros exercícios de aplicações de derivadas

a) Em que pontos o gráfico de $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$ tem reta tangente horizontal?

b) Ao vender x unidades de um produto obtém-se um lucro dado por

$$P(x) = 50\sqrt{x} - 0.5x - 500 \quad , \quad \text{para } 0 \leq x \leq 8000$$

Qual a taxa de variação de P relativamente a x, quando x = 900 ou x = 1600?

c) Determinar as equações das duas rectas que são tangentes simultaneamente aos gráficos das funções $y = x^2$ e $y = -x^2 + 6x - 5$. Faça um esboço destes gráficos.

d) Achar a equação da recta tangente ao gráfico de $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ e que é paralela à reta $x + 2y - 6 = 0$.

e) Determinar as equações das rectas tangentes ao gráfico de $y = 4x - x^2$ e que passam pelo ponto (2,5).

f) Analisar se existe algum valor de x em $[0, 2\pi[$ tal que a taxa de variação de $y = secx$ e de $y = cosec\, x$ são iguais.

g) Verifique que a função $y = \dfrac{1}{1+x+ln\, x}$ satisfaz a equação $x\, y' = y\,(y\, ln\, x - 1)$.

h) Determinar o ângulo entre as curvas $y = x^2$ e $y = x^3$ em cada ponto de intersecção.

F. NOÇÃO DE DIFERENCIAL - APROXIMAÇÃO LINEAR

1.1 Determine um valor aproximado da variação do volume de uma esfera de raio $r = 15$ cm, quando este aumenta 2 mm.

1.2 Calcule os diferenciais de:

a) $y = x\ log\,x - x$ **b)** $r = cotg\,\theta + cosec\,\theta$

1.3 Deduza a expressão aproximada

$$\sqrt{x+\Delta x} \approx \sqrt{x} + \frac{\Delta x}{2\sqrt{x}}$$

1.4 Usando diferenciais, calcular valores aproximados das seguintes expressões

a) $cos(11\pi/36)$ **b)** $\sqrt{16.5}$

1.5 A medição do diâmetro de uma esfera registou o valor de 75 cm. Todavia, a técnica utilizada pode ter introduzido um erro de ± 2.5 mm. Se se calcula o volume da esfera utilizando o diâmetro de 75 cm estimar o erro relativo máximo possível no volume calculado.

1.6 O lado de um cubo mede 25 cm sendo esta medida afectada a um erro de $\pm x$ cm. Qual é o maior valor admissível se x, que assegura uma percentagem máxima possível de erro no volume do cubo, de $\pm 4\%$.

G. TEOREMA DE CAUCHY E REGRA DE L'HÔPITAL

Calcule os seguintes limites usando a regra de L'Hôpital

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2}{e^{-x}}$ **b)** $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}\sqrt{x}$ **c)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x$

d) $\lim\limits_{x\to0^+} (sen\,x)^x$ **e)** $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{e^x-(1+x)}{x^3}$ **f)** $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{ln\,x}{x^2-1}$

g) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{sen\,2x}{sen\,3x}$ **h)** $\lim\limits_{x\to0^+} (e^x+x)^{1/x}$

2. INTEGRAL DEFINIDO

1. Utilizando os integrais já conhecidos e as propriedades do integral definido, calcule:

a) $\int_1^2 (5x^4-1)\,dx$

b) $\int_0^2 (5x^3-3x+6)\,dx$

c) $\int_{-1}^0 (x+1)^2\,dx$

d) $\int_{-1}^4 (1-t)(t-2)\,dt$

e) $\int_0^3 (2x-5)^5\,dx$

f) $\int_{-2}^3 \left|x^2-1\right|\,dx$

g) $\int_{-1}^3 \left|x(1-x)\right|\,dx$

h) $\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

i) $\int_4^1 \sqrt[5]{5x}\,dx$

j) $\int_1^8 4\,\sqrt[3]{x-1}\,dx$

k) $\int_1^4 \frac{t-3}{\sqrt{t}}\,dt$

l) $\int_1^3 \left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)dx$

2. Calcule os seguintes integrais:

a) $\int_0^2 f(x)\,dx$ sendo $f(x)=\begin{cases} x^2 , & 0\le x\le 1 \\ 2-x , & 1<x\le 2 \end{cases}$

3. CÁLCULO DE ÁREAS USANDO INTEGRAIS

1. Calcule a área da região **S** entre os gráficos de f e g sobre [a,b],

sendo $f(x) = |x+1| + |x+2|$ $\qquad g(x) = x^2 + 3x$

$a = -3$ e $b = 0$

2. Calcule as áreas das regiões limitadas por:

a) $f(x) = x^2$ e $g(x) = -x^2$ e as rectas $x = -1$ e $x = 1$

b) $f(x) = x^2$ e $g(x) = 1 - x^2$

c) $f(x) = \sqrt{x}$, $y = x$ e $x = 2$

d) $f(x) = |x-1|$, $g(x) = x^2 - 2x$, $x = 0$ e $x = 2$

e) $f(x) = |x| + |x-1|$, $g(x) = 0$, $x = -1$ e $x = 2$

f) $f(x) = |x|$, $g(x) = 1 - x^2$

g) $f(x) = 4 - x^2$, $g(x) = 8 - 2x^2$, $x = -2$ e $x = 2$

4. PRIMITIVAÇÃO POR SUBSTITUIÇÃO

1. Calcule as seguintes primitivas usando o seu conhecimento de derivadas e o método de substituição

a) $\int \sqrt{x+1}\, dx$ **b)** $\int \frac{1}{4+x^2}\, dx$ **c)** $\int \frac{e^x}{\sqrt[3]{1+2e^x}}\, dx$

d) $\int \frac{x^2+5x+6}{x^2+4}\, dx$ **e)** $\int a^x\, dx \quad ,a>0$ **f)** $\int \frac{1}{\sqrt{2-x^2}}\, dx$

g) $\int 2^{3x}\, dx$ **h)** $\int x \sec^2(x^2)\, dx$ **i)** $\int \frac{\log x}{x}\, dx$

j) $\int \operatorname{cotg} x\, dx$ **k)** $\int \frac{4}{(1+2x)^3}\, dx$ **l)** $\int \cos x\, \operatorname{sen}^2 x\, dx$

m) $\int \frac{2a}{(a-x)^2}\, dx$ **n)** $\int \frac{x\, e^{x^2-1}}{e^{x^2-1}-1}\, dx$ **o)** $\int \frac{1}{a^2-x^2}\, dx$

p) $\int x^2 \cos x^3\, dx$ **q)** $\int \frac{x^3}{x^4+a^4}\, dx$ **r)** $\int \sec 2x\, \operatorname{tg} 2x\, dx$

s) $\int \frac{x}{a+bx}\, dx$ **t)** $\int \cosh x\, dx$ **u)** $\int \frac{x^2+1}{x-1}\, dx$

v) $\int \cos x\, \operatorname{sen} x\, e^{\cos^2 x}\, dx$ **x)** $\int \frac{x}{(x+1)^2}\, dx$

5. PRIMITIVAÇÃO POR SUBSTITUIÇÃO TRIGONOMÉTRICA

a) $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x} dx$

b) $\int \sqrt{x(6-x)}\ dx$

c) $\int \frac{x^3}{\sqrt{2-x^2}} dx$

d) $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^2} dx$

e) $\int \frac{1}{x^3\sqrt{x^2-9}}\ dx$

f) $\int \frac{1-x}{x\sqrt{1-x^2}}\ dx$

g) $\int \frac{1}{(4+x^2)^{3/2}}\ dx$

h) $\int x\sqrt{3+4x-4x^2}\ dx$

6. PRIMITIVAÇÃO POR PARTES

a) $\int x \cos x\ dx$

b) $\int x^2 \operatorname{sen} x\ dx$

c) $\int \operatorname{sen}^2 x\ dx$

d) $\int \cos^5 x\ dx$

e) $\int \cos^4 x\ dx$

f) $\int e^x \cos x\ dx$

g) $\int x^2\ e^x\ dx$

h) $\int \log(1+x^2)\ dx$

i) $\int x \log^2 x \, dx$

j) $\int x^2 \log(1+x) \, dx$

k) $\int arcsen \frac{x}{\sqrt{2}} \, dx$

l) $\int x \, arctg\, x \, dx$

m) $\int \frac{x \, arctg\, x}{\sqrt{1+x^2}} \, dx$

n) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} \, dx$

o) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$

p) $\int sen^2 x \, \cos^2 x \, dx$

q) $\int x \sec^2 x \, dx$

r) $\int \sec^3 x \, dx$

7. PRIMITIVAÇÃO POR DECOMPOSIÇÃO EM FRAÇÕES SIMPLES

a) $\int \frac{x+1}{x^3+x^2-6x} \, dx$

b) $\int \frac{x^4-x^3-3x^2-2x+2}{(x^3+x^2-2)\, x} \, dx$

c) $\int \frac{x^4-x^3-x-1}{x^3-x^2} \, dx$

d) $\int \frac{x^3+2}{x^3-1} \, dx$

e) $\int \frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2} \, dx$

f) $\int \frac{x^2+x+2}{(x^2+2x+3)^2} \, dx$

g) $\int \frac{x^3-1}{x^2\,(x-2)^3} \, dx$

h) $\int \frac{x^2}{x^4-1} \, dx$

8. CÁLCULO DE VOLUMES USANDO INTEGRAIS

1. Em cada alínea esboce a região **R** delimitada pelos gráficos das equações dadas e determine o volume do sólido gerado pela rotação de R em torno do eixo indicado.

a) $y = \dfrac{1}{x}$, $x = 1$, $x = 3$, $y = 0$; em torno do eixo dos xx.

b) $y - x^2 - 1 = 0$, $y - x - 3 = 0$; em torno do eixo dos xx.

c) $x + y = 1$, $x = 0$, $y = 0$; em torno da recta y = 1.

d) $y^2 = x$, $2y = x$; em torno do eixo dos yy.

e) $y = 3^x$, $y = 1 - x^2, x = 1$; em torno da recta x = 2.

2. Determine o volume do sólido gerado pela revolução da região limitada pelos gráficos de $y = x^2$ e $y = 4$ em torno de:

a) y = 0 **b)** y = 4 **c)** $y = 5$ **d)** $x = 2$ **e)** $x = 3$

9. DEFINIÇÃO DE FUNÇÕES E CÁLCULO DE ÁREAS USANDO COORDENADAS POLARES

1. Determinar a equação polar das curvas de equações cartesianas,

a) $x^2+y^2-x=(x^2+y^2)^{1/2}$ **b)** $9x^2+4y^2=36$

c) $(x-1)^2+y^2=1$ **d)** $(x^2+y^2)^2=\left|x^2-y^2\right|$

2. Desenhe o gráfico de f em coordenadas polares e calcule a área do conjunto radial de f no intervalo indicado:

a) $f(\theta)=\theta$, $0\le\theta\le 2\pi$ (espiral de Arquimedes)

b) $f(\theta)=2\cos\theta$, $-\pi/2\le\theta\le\pi/2$ (circunferência tangente a *Oy*)

c) $f(\theta)=2\left|\cos\theta\right|$, $0\le\theta\le 2\pi$ (duas circunferências tangentes a *Oy*)

d) $f(\theta)=sen\ 2\theta$, $0\le\theta\le\pi/2$ (pétala de rosa)

e) $f(\theta)=\left|sen\,2\theta\right|$, $0\le\theta\le 2\pi$ (rosa de 4 folhas)

f) $f(\theta)=4\,sen\,\theta$, $0\le\theta\le\pi$ (circunferência tangente a *Ox*)

g) $f(\theta)=4\left|sen\,\theta\right|$, $0\le\theta\le 2\pi$ (duas circunferências tangentes a *Ox*)

h) $f(\theta)=\left|\cos\theta\right|^{1/2}$, $0\le\theta\le 2\pi$ (oito achatado)

i) $f(\theta)=\left|\cos 2\theta\right|^{1/2}$, $0\le\theta\le 2\pi$ (trevo de 4 folhas)

j) $f(\theta)=1+\cos\theta$, $0\le\theta\le 2\pi$ (cardioide)

k) $f(\theta)=2+\cos\theta$, $0\le\theta\le 2\pi$ (caracol)

10. EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

1. Calcule a solução geral das seguintes equações diferenciais:

   a) $(x^2 - x).\frac{dy}{dx} = y^2 + y$

   b) $y' - 2cosxsenx.\, y = e^{\,sen^2 x}$

   c) $y' = \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}$

   d) $sec^2 x\, tgy.\, dx + sec^2 y\, tgx.\, dy = 0$

   e) $y' + 3y = e^{-3x} x^{-2}$

2. Dada a equação diferencial $y' = \frac{2}{x} y - 1$

   a) Calcule a solução geral

   b) Calcule a solução particular considerando $y(1) = 3$

3. Calcule a solução geral das seguintes equações diferenciais:

   a) $(ax^2 + b)^{1/2} y' - xy^3 = 0$ para $a, b \in R$

   b) $y' + \frac{2y}{x} = \frac{y^3}{x^3}$

   c) $xy' + x^2 - y = 0$

   d) $3y' + y = (1 - 2x)y^4$

   e) $xy' = y(lny - lnx + 1)$

   f) $\frac{1}{y} dx - \frac{x}{y^2} dy = 0$

   g) $(x + y)dx + (x + 2y)dy = 0$

4. Calcule a solução particular das seguintes equações diferenciais:

   a) $\frac{dy}{dx} = \frac{2x-y}{x-2y}$, $y(1) = 3$

   b) $y' + 3x^2 y = e^{-x^3+x}$, $y(0) = 2$

   c) $(x^2 - 9)y' + xy = 0, y(5) = y_0$

5. Mostre que $y_1(x) = x^2$ e $y_2(x) = x^5$ são soluções da equação

$$x^2y'' - 6xy' + 10y = 0$$

6. Escolha a equação diferencial linear de 2ª ordem que tem como soluções particulares:

   a) $y_1 = e^x$; $y_2 = e^{-x}$

   b) $y_1 = e^{2x}$; $y_2 = xe^{2x}$

   c) $y_1 = e^{-x/2}cosx$; $y_1 = e^{-x/2}senx$

7. Resolva as seguintes equações diferenciais:

   a) $y'' - 4y = 0$

   b) $y'' + 2y' + y = 0$

   c) $y'' - 5y' + 6y = 0$

   d) $y'' + 4y' + 13y = 0$

   e) $y'' - 6y' + 9y = e^{3x}\,lnx$

   f) $y'' + 9y = sec3x$

Soluções:

1) a) $\frac{xy}{(x-1)(y+1)} = k$ 1) b) $y = \frac{ex+C}{e^{cos^2 x}}$ 1) c) $arsen\ y = arcsen\ x + C$

1) d) $tg\ x.\ tg\ y = K$ 1) e) $y = e^{-3x}\left(C - \frac{1}{x}\right)$

2) a) $y = x + Cx^2$ 2) b) $y = x + 2x^2$

3) a) $-\frac{1}{2y^2} = \frac{1}{a}\sqrt{ax^2 + b} + C$ 3) b) $y^{-2} = \frac{1}{3x^2} + Cx^4$ 3) c) $y = -x^2 + Cx$

3) d) $y^{-3} = Ce^x - 2x - 1$ 3) e) $y = xe^{Cx}$ 3) f) $\frac{x}{y} = C$

3) g) $\frac{x^2}{2} + xy + y^2 = C$

4) a) $x^2 - xy + y^2 = 7$ 4) b) $y = e^{x-x^3} + e^{-x^3}$ 4) c) $y = \frac{4y_0}{\sqrt{x^2-9}}$

6) a) $y'' - y = 0$ 6) b) $y'' - 4y' + 4y = 0$ 6) c) $y'' + y' + \frac{5}{4}y = 0$

7) a) $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x}$ 7) b) $y = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x}$ 7) c) $y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}$

7) d) $y = C_1e^{-2x}cos3x + C_2e^{-2x}sen3x$ 7) e) $y = C_1e^{3x} + C_2xe^{3x} - \frac{3}{4}x^2e^{3x} + \frac{x^2}{2}lnx\ e^{3x}$

7) f) $y = C_1cos3x + C_2sen3x + \frac{1}{9}cos3x\ ln\ |cos3x| + \frac{1}{3}xsen3x$

11. TRANSFORMADAS DE LAPLACE

1. Determine as transformadas de Laplace das funções definidas pelas seguintes expressões analíticas:

(a) $f(t) = e^{3t}\cos 2t$; R: $F(s) = \frac{s-3}{(s-3)^2+4}$

(b) $f(t) = \cos^2 at$; R: $F(s) = \frac{1}{2s} + \frac{s}{2(s^2+4a^2)}$

(c) $f(t) = \sin 5t\ \cos 2t$; R: $F(s) = \frac{1}{2}\left(\frac{7}{s^2+49} + \frac{3}{s^2+9}\right)$

(d) $f(t) = t^2 \sin t$; R: $F(s) = \frac{6s^2-2}{(s^2+1)^3}$

(e) $f(t) = t^3\ e^{-t}$. R: $F(s) = \frac{6}{(s+1)^4}$

(f) $f(t) = te^{at}\cos(bt)\,,\ a, b \in \mathbb{R}$ R: $F(s) = \frac{(s-a)^2-b^2}{\left[(s-a)^2+b^2\right]^2}$

(g) Considere a função $f(t) = t[1-u(t-4)] + (t-6)^2[u(t-4) - u(t-6)]$,definida para valores positivos de t, onde $u(t)$ representa a função degrau unitário Faça um esboço da função e Calcule a sua transformada de Laplace

2. Calcule

(a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{(s-2)^{-2}\right\}$; R: te^{2t}

(b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{7}{(s-1)^3} + \frac{1}{(s+1)^2-4}\right\}$; R: $\frac{7}{2}t^2e^t + \frac{1}{2}e^{-t}\sinh(2t)$

(c) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s+1)^2(s^2+1)}\right\}$; R: $-\frac{1}{2}e^{-t}t + \frac{1}{2}\sin t$

(d) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-\pi s}}{s^2+16}\right\}$; R: $\begin{cases} 0 & ,\ t < \pi \\ \frac{1}{4}\sin(4t) & ,\ t \geq \pi \end{cases}$

(e) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)^2}\right\}$ R: $\frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{2}t\cos t$

3. Use o operador Transformada de Laplace para determinar as soluções das seguintes equações diferenciais que verifiquem as condições iniciais dadas.

(a) $y'' + 4y' + 4y = e^{-x}$, $\begin{cases} y(0) & = & 0 \\ y'(0) & = & 1 \end{cases}$, $x \geq 0$;

R: $y = e^{-x} - e^{-2x}$

(b) $y'' + 4y' + 3y = 0$, $\begin{cases} y(0) & = & 0 \\ y'(0) & = & 1 \end{cases}$, $t \geq 0$;

R: $y = \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t}$

(c) $y'' + 6y - 7 = 0$, $\begin{cases} y(0) & = & 1 \\ y'(0) & = & 0 \end{cases}$, $t \geq 0$;

R: $y = \frac{7}{6} - \frac{1}{6}\cos\left(\sqrt{6}t\right)$

(d) $y'' - y' - 2y = x$, $\begin{cases} y(0) & = & 0 \\ y'(0) & = & 0 \end{cases}$, $x \geq 0$;

R: $y = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}e^{-x} + \frac{1}{12}e^{2x}$

(e) $y'' - 2y' + 5y = 0$, $\begin{cases} y(0) & = & 0 \\ y'(0) & = & 1 \end{cases}$, $t \geq 0$;

R: $y = \frac{1}{2}e^{t}\sin(2t)$

(f) $y'' - 9y' = 5e^{-2t}$, $\begin{cases} y(0) & = & 1 \\ y'(0) & = & 2 \end{cases}$, $t \geq 0$;

R: $y = \frac{1}{2} + \frac{3}{11}e^{9t} + \frac{5}{22}e^{-2t}$

Tabela de Transformadas de Laplace

	$f(t)$	$\mathcal{L}\{f\}$	Domínio
1	1	$\frac{1}{s}$	$s > 0$
2	t	$\frac{1}{s^2}$	$s > 0$
3	t^2	$\frac{2}{s^3}$	$s > 0$
4	$t^n,\ n \in \mathbf{N}_0$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$s > 0$
5	$e^{at} f(t)$	$F(s-a)$	$s > \gamma + a$
6	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$s > a$
7	$\cos(wt)$	$\frac{s}{s^2+w^2}$	$s > 0$
8	$\sin(wt)$	$\frac{w}{s^2+w^2}$	$s > 0$
9	$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$s > \|a\|$
10	$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	$s > \|a\|$
11	$e^{at}t^n$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	$s > a$
12	$e^{at}\cos(wt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+w^2}$	$s > a$
13	$e^{at}\sin(wt)$	$\frac{w}{(s-a)^2+w^2}$	$s > a$

$$\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n [F(s)]^{(n)}$$

$$\mathcal{L}[f'(t)] = s\mathcal{L}[f(t)] - f(0) \qquad \mathcal{L}[f''(t)] = s^2\mathcal{L}[f(t)] - sf(0) - f'(0)$$

12. POLINÓMIO DE TAYLOR COM RESTO DE LAGRANGE

1. Obtenha os polinómios de Taylor das seguintes funções no ponto dado e com o grau indicado:

a) $f(x)=e^x$, ponto $x_o=0$, grau n

b) $f(x)=cos\,x$, ponto $x_o=0$, grau $2n$

c) $f(x)=sen\,x$, ponto $x_o=\pi/2$, grau $2n$

d) $f(x)=log\,x$, ponto $x_o=2$, grau n

e) $f(x)=1/x$, ponto $x_o=2$, grau n

f) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$, ponto $x_o=1$, grau n

2. Escreva a fórmula de Taylor com resto de Lagrange correspondente a cada uma das alíneas do exercício 1.

13. SÉRIES NUMÉRICAS

1. Prove que as seguintes séries são convergentes e têm a soma indicada

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)\,(2n+1)}=\frac{1}{2}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^{n-1}}=3$

c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}=\frac{3}{4}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{6^n}=\frac{3}{2}$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}}=1$

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=1$

2. Calcule a soma, se existir, das séries:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{5}\frac{1}{n}+\sum_{n=6}^{\infty}\frac{1}{n\,(n+1)}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\log\frac{n+1}{n}$

3. Classifique as séries:

a) $1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2n(n-1)}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(n+2)!}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{e}}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} n\ sen\,\frac{1}{n}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n(n+1)}-\frac{4}{n}\right)$

f) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{8^n}-\frac{1}{n(n+1)}\right)$

4. Estude a convergência das séries:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{5^n(n+1)}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{e^n}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\,n!}{n^n}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{2^{2n}}$

f) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+n^2+2n}{3^{n+1}\,n(n+2)}$

g) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-e^{-n^2}\right)$

h) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$

i) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{log(e^n+e^{-n})}$

j) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n(n-1)/2}}{2^n}$

k) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$

l) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$

m) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{n^2+n^3}$

n) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n$

14. SÉRIES DE FOURIER

1. Considere a função de período 2π:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } -\pi < x < 0 \\ 0 & \text{se } 0 < x < \pi \end{cases}$$

   (a) Esboçe o gráfico da função para $-2\pi < x < 2\pi$
   (b) Calcule os coeficientes da série de Fourier de $f(x)$: a_0, a_n e b_n
   (c) Escreva a forma geral da série de Fourier de $f(x)$
   (d) Escreva os primeiros 5 termos da série de Fourier de $f(x)$

2. Considere a função de período 2π:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } -\pi < x < 0 \\ x & \text{se } 0 < x < \pi \end{cases}$$

   (a) Esboçe o gráfico da função para $-3\pi < x < 3\pi$
   (b) Calcule os coeficientes da série de Fourier de $f(x)$: a_0, a_n e b_n
   (c) Escreva a forma geral da série de Fourier de $f(x)$
   (d) Escreva os primeiros 5 termos da série de Fourier de $f(x)$

3. Considere a função de período 2π:

$$f(x) = x/2 \quad 0 < x < 2\pi$$

   (a) Esboçe o gráfico da função para $0 < x < 4\pi$
   (b) Calcule os coeficientes da série de Fourier de $f(x)$: a_0, a_n e b_n
   (c) Escreva a forma geral da série de Fourier de $f(x)$
   (d) Escreva os primeiros 5 termos da série de Fourier de $f(x)$

Soluções

1) $a_0 = 1$	$a_n = 0$	$b_n = 0$ para n par, $b_n = \frac{-2}{n\pi}$ para n ímpar
2) $a_0 = \pi/2$	$a_n = 0$ para n par, $a_n = \frac{-2}{n^2\pi}$ para n ímpar	$b_n = -\frac{(-1)^n}{n}$
3) $a_0 = \pi$	$a_n = 0$	$b_n = \frac{-1}{n}$