13. Séries numéricas

① a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\frac{1}{2}}{2n-1} - \frac{\frac{1}{2}}{2n+1} \right) =$

$= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$ é série telescópica

Se $a_n = \frac{1}{2n-1}$ $\quad a_{n+1} = \frac{1}{2n+1}$ $\quad$ R: $\frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n - a_{n+1} = a_1 - \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2n+1} = 1 - 0 = 1$

C.A.:

$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{A}{2n-1} + \frac{B}{2n+1}$

$B(2n-1) + A(2n+1) = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2Bn - B + 2An + A = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2B + 2A = 0 \\ A - B = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4B = -2 \\ A = B + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = -\frac{1}{2} \\ A = \frac{1}{2} \end{cases}$

b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{3^{n-1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{6}{3^n} = 6\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n} = 6\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n \overset{(1)}{=} \quad \left(r=\frac{1}{3}\right)$

série geométrica de razão $\frac{1}{3}$

Como $|r|<1$, esta série converge.

$\overset{(1)}{=} 6\times \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^1}{1-\frac{1}{3}} = 6\times\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = 6\times\frac{1}{2} = 3$

c) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2-1} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)(n+1)} =$

C.A.: $\frac{1}{(n-1)(n+1)} = \frac{A}{n-1} + \frac{B}{n+1}$

$A(n+1)+B(n-1)=1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow An+A+Bn-B=1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ A-B=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-B \\ -2B=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{2} \\ B=-\frac{1}{2} \end{cases}$

$= \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{\frac{1}{2}}{n-1} - \frac{\frac{1}{2}}{n+1}\right) = \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right) =$

$= \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right) =$

$= \frac{1}{2}\left[\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)\right] \overset{(2)}{=}$

Seja $b_n = \frac{1}{n-1}$

$b_{n+1} = \frac{1}{n}$

Seja $a_n = \frac{1}{n}$ $\quad a_{n+1} = \frac{1}{n+1}$

$\overset{(2)}{=} \frac{1}{2}\times\left[\left(a_2 - \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}\right)+\left(b_2-\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\right)\right] = \frac{1}{2}\times\left[\left(\frac{1}{2}-0\right)+(1-0)\right] =$

$= \frac{1}{2}\times\frac{3}{2} = \frac{3}{4}$

d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n+3^n}{6^n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n}{6^n}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3^n}{6^n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2}{6}\right)^n+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{3}{6}\right)^n =$

$= \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} + \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}+\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}+1 = \frac{3}{2}$

série geométrica de razão $\frac{1}{3}$ $\qquad$ série geométrica de razão $\frac{1}{2}$

Como $|r|<1$, converge $\qquad$ Como $|r|<1$, converge.

e) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}\times\sqrt{n+1}} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}\times\sqrt{n+1}}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) =$

$= \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) \overset{(1)}{=}$ Trata-se de uma série telescópica, em que

$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ e $a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$

$\overset{(1)}{=} a_1 - \lim_{n\to+\infty} a_{n+1} = 1 - \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}} = 1-\frac{1}{+\infty} = 1-0 = 1$

$+m^2 - m^2$

b) $\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{2m+1}{m^2(m+1)^2} = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{m^2+2m+1-m^2}{m^2(m^2+2m+1)} =$

$= \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{m^2+2m+1}{m^2(m^2+2m+1)} - \frac{m^2}{m^2(m^2+2m+1)} = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2} - \frac{1}{(m+1)^2}$

Esta série é telescópica, sendo que $a_m = \frac{1}{m^2}$ e $a_{m+1} = \frac{1}{(m+1)^2}$

$\sum_{m=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{(m+1)^2}\right) = a_1 - \lim_{m\to+\infty} a_{m+1} = 1 - \lim_{m\to+\infty} \frac{1}{(m+1)^2} = 1 - \frac{1}{+\infty} = 1 - 0 = 1$

② a) $\sum_{m=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{(m+1)^2}\right)$ Esta série é telescópica, em que: $a_m = \frac{1}{m^2}$ e $a_{m+1} = \frac{1}{(m+1)^2}$

$\sum_{m=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{(m+1)^2}\right) = a_1 - \lim_{m\to+\infty} a_{m+1} = 1 - \lim_{m\to+\infty} \frac{1}{(m+1)^2} = 1 - \frac{1}{+\infty} = 1 - 0 = 1$

b) $\sum_{m=1}^{5} \frac{1}{m} + \sum_{m=6}^{+\infty} \frac{1}{m(m+1)} = \sum_{m=1}^{5} \frac{1}{m} + \sum_{m=6}^{+\infty} \frac{m+1-m}{m(m+1)} =$

$= \sum_{m=1}^{5} \frac{1}{m} + \sum_{m=6}^{+\infty} \left(\frac{m+1}{m(m+1)} - \frac{m}{m(m+1)}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \sum_{m=6}^{+\infty} \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}\right) =$

$= \frac{3}{2} + \frac{7}{12} + \frac{1}{5} + a_6 - \lim_{m\to+\infty} \frac{1}{m+1} =$

série telescópica em que: $a_m = \frac{1}{m}$ $a_{m+1} = \frac{1}{m+1}$

$= \frac{25}{12} + \frac{12}{60} + \frac{1}{6} - \frac{1}{+\infty} = \frac{137}{60} + \frac{10}{60} = \frac{147}{60} = \frac{49}{20}$

c) $\sum_{m=1}^{+\infty} \log \frac{m+1}{m} = \sum_{m=1}^{+\infty} \log(m+1) - \log(m) = -\sum_{m=1}^{+\infty} \log(m) - \log(m+1) \overset{(1)}{=}$

É uma série telescópica, sendo $a_m = \log(m)$ e $a_{m+1} = \log(m+1)$

$\overset{(1)}{=} -\left(a_1 - \lim_{m\to+\infty} a_{m+1}\right) = -\left(\log(1) - \lim_{m\to+\infty} \log(m+1)\right) = \log(+\infty) = +\infty$

Logo, esta série diverge.

③ a) $1 + \sum_{m=2}^{+\infty} \frac{1}{2m(m-1)} = 1 + \frac{1}{2}\sum_{m=2}^{+\infty} \frac{1}{m(m-1)} = 1 + \frac{1}{2}\sum_{m=2}^{+\infty} \frac{1+m-m}{m(m-1)} =$

$= 1 + \frac{1}{2}\sum_{m=2}^{+\infty} \left(\frac{m}{m(m-1)} - \frac{m-1}{m(m-1)}\right) = 1 + \frac{1}{2}\sum_{m=2}^{+\infty} \frac{1}{m-1} - \frac{1}{m} \overset{(1)}{=}$

Trata-se de uma série telescópica em que $a_m = \frac{1}{m-1}$ e $a_{m+1} = \frac{1}{m}$

$\overset{(1)}{=} 1 + \frac{1}{2}\left(a_2 - \lim_{m\to+\infty} a_{m+1}\right) = 1 + \frac{1}{2}\left(1 - \lim_{m\to+\infty} \frac{1}{m}\right) = 1 + \frac{1}{2}(1-0) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

R: Série convergente para $\frac{3}{2}$.

b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{(n+2)!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{(n+2)(n+1)n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)(n+1)} \overset{(1)}{=}$

CA: $\frac{1}{(n+2)(n+1)} = \frac{A}{n+2} + \frac{B}{n+1}$ $\quad A(n+1)+B(n+2)=1 \Leftrightarrow An+A+Bn+2B=1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ A+2B=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-B \\ B=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-1 \\ B=1 \end{cases}$

$\overset{(1)}{=} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \overset{(2)}{=}$

Trata-se de uma série telescópica, em que $a_n = \frac{1}{n+1}$ e $a_{n+1} = \frac{1}{n+2}$

$\overset{(2)}{=} a_1 - \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{+\infty} = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$ R: É uma série convergente para $\frac{1}{2}$

c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{e}}$ Teste da divergência: $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{e}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{e^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{e^0} = 1$

Como este limite é diferente de zero, conclui-se que esta série geométrica diverge.

d) $\sum_{n=1}^{+\infty} n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ Teste da divergência: $\lim_{n \to +\infty} n \sin\left(\frac{1}{n}\right) =$

$= \lim_{n \to +\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \overset{R.L.H.}{=} \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{-\frac{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{n^2}}{-\frac{1}{n^2}} \right) = \lim_{n \to +\infty} \frac{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{1} =$

$= \lim_{n \to +\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right) = \cos(0) = 1$ Como este limite é diferente de 0, conclui-se que esta série é divergente.

e) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{4}{n} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1-n}{n(n+1)} - 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n+1}{n(n+1)} - \frac{n}{n(n+1)} \right) - 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} =$

$= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) - 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \overset{(1)}{=}$

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ é a série harmónica, um caso especial das séries p, e como $p \leq 1$, neste caso, esta série diverge.

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ é uma série telescópica em que $a_n = \frac{1}{n}$ e $a_{n+1} = \frac{1}{n+1}$

Logo, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = a_1 - \lim_{n \to +\infty} a_{n+1} = 1 - \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 1 - 0 = 1$

$\overset{(1)}{=}$ Como a soma de uma série convergente com uma divergente resulta numa série divergente, conclui-se que $\sum_{n=1} \left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{4}{n} \right)$ diverge.

f) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{8^n} - \frac{1}{n(n+1)} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{8^n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \sum_{n=1} \left(\frac{1}{8} \right)^n - \sum_{n=1} \frac{n+1}{n(n+1)} - \frac{n}{n(n+1)}$

$= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{8} \right)^n - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{8}\right)^n$ é uma série geométrica, de razão $\frac{1}{8}$. Como $|r|<1$, conclui-se que esta série converge, para $\frac{\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{8}} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{7}{8}} = \frac{1}{7}$

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ é uma série telescópica, em que: $a_n = \frac{1}{n}$ e $a_{n+1} = \frac{1}{n+1}$

Logo, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = a_1 - \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 1 - 0 = 1$

Como se trata de uma subtração entre duas séries convergentes, então a série pedida converge, para:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{8}\right)^n - \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{7} - 1 = \frac{1}{7} - \frac{7}{7} = -\frac{6}{7}$$

4 a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n-1}}{5^n(n+1)}$ Aplicando o teste da razão:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{2^n}{5^{n+1}(n+2)}}{\frac{2^{n-1}}{5^n(n+1)}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^n \times 5^n (n+1)}{2^{n-1}\times 5^{n+1}(n+2)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^n \times 5^n(n+1)}{2^n \times \frac{1}{2} \times 5^n \times 5(n+2)} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{2(n+1)}{5(n+2)} = \frac{2}{5} \times \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n+2} = \frac{2}{5} \times \lim_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}} = \frac{2}{5} \times 1 = \frac{2}{5}$$

Como $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{2}{5} < 1$: Logo, pelo teste da razão, esta série converge absolutamente

b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{e^n}$ Seja $a_n = \frac{n!}{e^n}$ Aplicando o teste da razão:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{e^{n+1}}}{\frac{n!}{e^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^n (n+1)!}{e^{n+1} \times n!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^n (n+1) n!}{e^n \times e \times n!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{e} =$$

$= +\infty$ Como $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = +\infty > 1$, esta série diverge.

c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ Seja $a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ Aplicando o teste da razão:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!}}{\frac{(n!)^2}{(2n)!}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{((n+1)!)^2 (2n)!}{(n!)^2 \times (2n+2)!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{((n+1)n!)^2 (2n)!}{(n!)^2 \times (2n+2)(2n+1)(2n)!} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^2 (n!)^2 (2n)!}{(n!)^2 \times (2n+2)(2n+1)(2n)!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+2n+1}{4n^2+6n+2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{4+\frac{6}{n}+\frac{2}{n^2}} = \frac{1}{4}$$

Como $\lim \left|\frac{a_{m+1}}{a_m}\right| = \frac{1}{4} < 1$, pelo teste da razão, conclui-se que esta série converge absolutamente.

d) $\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{2^m m!}{m^m}$ Seja $a_m = \frac{2^m m!}{m^m}$ Pelo teste da razão:

$$\lim_{m\to+\infty} \left| \frac{\frac{2^{m+1}(m+1)!}{(m+1)^{m+1}}}{\frac{2^m m!}{m^m}} \right| = \lim_{m\to+\infty} \left| \frac{2^{m+1}(m+1)!\, m^m}{2^m\, m!\,(m+1)^{m+1}} \right| = 2\lim_{m\to+\infty} \left| \frac{2^m (m+1) m!\, m^m}{2^m\, m!\,(m+1)^{m+1}} \right| =$$

$$= 2\lim_{m\to+\infty} \left| \frac{m^m}{(m+1)^m} \right| = 2\lim_{m\to+\infty} \left| \left(\frac{m}{m+1}\right)^m \right| = 2\lim_{m\to+\infty} \left(\frac{m}{m+1}\right)^m =$$

$$= 2\lim_{m\to+\infty} e^{\ln\left(\frac{m}{m+1}\right)^m} = 2e^{\lim_{m\to+\infty} m \ln\left(\frac{m}{m+1}\right)} = 2e^{\lim_{m\to+\infty} \frac{\ln\left(\frac{m}{m+1}\right)}{\frac{1}{m}}} \xrightarrow{R.L.H.} =$$

$$= 2e^{\lim_{m\to+\infty} \frac{\frac{\frac{m+1-m}{(m+1)^2}}{\frac{m}{m+1}}}{-\frac{1}{m^2}}} = 2e^{\lim_{m\to+\infty} \frac{\frac{1}{m(m+1)}}{-\frac{1}{m^2}}} = 2e^{\lim_{m\to+\infty} -\frac{m}{m+1}} = 2e^{-\lim_{m\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{m}}} =$$

$= 2e^{-1} = \frac{2}{e}$ Como $\lim_{m\to+\infty} \left|\frac{a_{m+1}}{a_m}\right| = \frac{2}{e} < 1$, pelo teste da razão, conclui-se que esta série converge absolutamente.

e) $\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{m!}{2^{2m}}$ Seja $a_m = \frac{m!}{2^{2m}}$ Pelo teste da razão:

$$\lim_{m\to+\infty} \left| \frac{\frac{(m+1)!}{2^{2m+2}}}{\frac{m!}{2^{2m}}} \right| = \lim_{m\to+\infty} \left| \frac{(m+1)m! \times 2^{2m}}{m! \times 4 \times 2^{2m}} \right| = \lim_{m\to+\infty} \left| \frac{m+1}{4} \right| = +\infty$$

Como $\lim_{m\to+\infty} \left|\frac{a_{m+1}}{a_m}\right| = +\infty > 1$, pelo teste da razão conclui-se que esta série diverge.

f) $\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{3^m + m^2 + 2m}{3^{m+1}\, m(m+2)} = \sum_{m=1}^{+\infty} \left(\frac{3^m}{3 \times 3^m\, m(m+2)} + \frac{m^2+2m}{3^{m+1}(m^2+2m)} \right) =$

$$= \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{3m^2+6m} + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{3^{m+1}} = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{3m^2+6m} + \frac{1}{3}\sum_{m=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^m$$

$\frac{1}{3}\sum_{m=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^m =$ Trata-se de uma série geométrica de razão $r = \frac{1}{3} < 1$, que converge, pois $|r| < 1$, e a sua soma é igual a:

$$= \frac{1}{3} \times \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \times \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{3m^2+6m}$ $\quad \sum_{m=1}^{+\infty} b_m = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2}$ é série p com $p > 1$, logo, converge.

Pelo critério da comparação por passagem ao limite:

$$\lim_{m\to+\infty} \frac{a_m}{b_m} = \lim_{m\to+\infty} \frac{\frac{1}{3m^2+6m}}{\frac{1}{m^2}} = \lim_{m\to+\infty} \frac{m^2}{3m^2+6m} = \lim_{m\to+\infty} \frac{1}{3+\frac{6}{m}} = \frac{1}{3} > 0$$

Logo se bm converge, an converge.

R: A soma de duas séries convergentes resulta numa série convergente.

g) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - e^{-n^2}\right) =$ $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n} - e^{-n^2}\right) = 0 - \frac{1}{+\infty} = 0 \leftarrow$ condição necessária

$= \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}}_{A} - \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{e^{n^2}}}_{B}$ $A \to \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \leftarrow$ série harmónica (série p com p=1), logo diverge.

$B \to \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{e^{n^2}}$ Seja $a_n = \frac{1}{e^{n^2}}$ Pelo teste da razão:

$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{\frac{1}{e^{(n+1)^2}}}{\frac{1}{e^{n^2}}} \right| = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{e^{n^2}}{e^{(n+1)^2}} \right| = \lim_{n\to+\infty} \left| e^{n^2-(n^2+2n+1)} \right| = \lim_{n\to+\infty} \left| e^{-2n-1} \right| =$

$= \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{1}{e^{2n+1}} \right| = \frac{1}{+\infty} = 0$ Como $\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$, a série converge absolutamente, pelo teste da razão.

R: Como a soma de uma série divergente com uma série convergente (absolutamente) resulta numa série divergente, conclui-se que a série pedida diverge.

h) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{+\infty} = 0 \to$ condição necessária.

Teste dos módulos:

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ Trata-se de uma série p com $p<1$, logo diverge.

Critério de Leibniz:

Como $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{\sqrt{n+1}}$, conclui-se que a série alternada é convergente condicionalmente.

i) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\log(e^n + e^{-n})}$ (log = com ln) $a_n = \frac{1}{\log(e^n+e^{-n})}$ $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\log(e^n+\frac{1}{e^n})} = \frac{1}{+\infty} \overset{C.N.C}{=} 0$

Teste dos módulos:

$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{1}{\ln(e^n+e^{-n})} \right|$ Seja $b_n = \frac{1}{n}$ $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \leftarrow$ a série harmónica (série p com p=1) logo diverge.

Teste da comparação do limite:

$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{\ln(e^n+e^{-n})}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\ln(e^n+e^{-n})} \overset{R.L.H}{=} \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\frac{e^n-e^{-n}}{e^n+e^{-n}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^n+\frac{1}{e^n}}{e^n-\frac{1}{e^n}} =$

$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{e^{2n}+1}{e^n}}{\frac{e^{2n}-1}{e^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{2n}+1}{e^{2n}-1} \overset{R.L.H.}{=} \lim_{n\to+\infty} \frac{2e^{2n}}{2e^{2n}} = 1$ Logo, como $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} > 0$ e como b_n diverge, conclui-se que a_n diverge.

Resta verificar se converge condicionalmente.

Pelo critério de Leibniz:

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln(e^n+e^{-n})} = \frac{1}{\ln(+\infty)} = \frac{1}{+\infty} = 0$ ✓

- Verificar se a_n é decrescente: $\frac{d\,a_n}{dn} = \left(\frac{1}{\ln(e^n+e^{-n})}\right)' = \frac{-\frac{e^n-e^{-n}}{e^n+e^{-n}}}{(\ln(e^n+e^{-n}))^2} =$

$= -\frac{\frac{e^{2n}-1}{e^{2n}+1}}{\ln^2(e^n+e^{-n})}$ Ora, como a derivada não tem zeros e é decrescente em todo o seu domínio, conclui-se que a série converge condicionalmente.

j) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{2^n}$ Teste dos módulos:

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{2^n}\right| = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ ← série geométrica de razão $r=\frac{1}{2}$
Como $|r|<1$, converge.

Logo, a série pedida converge absolutamente.

k) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$ Teste dos módulos: $\sum \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ → série geométrica com $p>1$: converge

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left|(-1)^{n-1}\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}\right| = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{\frac{1}{2}}}{n^2+1}$ Pelo teste da comparação com $b_n = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\frac{n^{\frac{1}{2}}}{n^2+1}}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{1+0} = 1$

Como $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} > 0$, e b_n converge, então a_n converge absolutamente.

l) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$ Teste dos módulos:

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}\right| = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{(+\infty)^0} = \frac{1}{1} = 1$ Logo, diverge.

Critério de Leibniz:

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{(+\infty)^0} = \frac{1}{1} = 1$ Logo, diverge. R: A série diverge.

m) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left|(-1)^n \frac{2n+1}{n^2+n^3}\right| = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+1}{n^2+n^3} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2n}{n^2+n^3} + \frac{1}{n^3+n^2} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^2+n} + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n+1)}$

$= 2\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3+n^2} = 2\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3+n^2}$ → $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3+n^2} \leq \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$ $\frac{1}{n^3}$ converge

$2\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ → (série telescópica) → $= 2\left(1 - \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1}\right) = 2(1-0) = 2$

Logo, como a série pedida resulta da soma de duas séries convergentes, então converge.

* continuação dos exercícios de AMAT na zona azul do caderno (Álgebra).
(parte final).

m) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n$ Teste dos módulos:

$\sum_{n=1}^{+\infty} \left|(-1)^n \left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n\right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n$ Teste da raiz:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n+100}{3n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2+\frac{100}{n}}{3+\frac{1}{n}} = \frac{2}{3}$$

Como $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n} < 1$, conclui-se que a série converge absolutamente.