6. Teorema de Cauchy e regra de L'Hôpital

a) $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{e^{-x}} = \frac{\infty}{\infty}$ (ind) → Aplicar a regra de L'Hôpital:

$= \lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{-e^{-x}} = \frac{\infty}{\infty}$ (ind) → Aplicar a regra de L'Hôpital:

$= \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{e^{-x}} = \frac{2}{+\infty} = 0$

b) $\lim_{x \to +\infty} e^{-x}\sqrt{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{e^{x}} = \frac{\infty}{\infty}$ (ind) → Aplicar a regra de L'Hôpital:

$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{e^{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2e^{x}\sqrt{x}} = \frac{1}{+\infty} = 0$

c) $\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{x} = 1^{+\infty}$ (ind) → Aplicar logaritmos:

$\ln y = \ln\left(\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{x}\right) \Leftrightarrow \ln y = \lim_{x \to +\infty} \left[\ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)^{x}\right] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln y = \lim_{x \to +\infty} \left[x \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)\right] \Leftrightarrow \ln y = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow$ ← Aplicar a regra de L'Hôpital

$\Leftrightarrow \ln y = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{-\frac{2}{x^2}}{1+\frac{2}{x}}}{-\frac{1}{x^2}} \Leftrightarrow \ln y = \lim_{x \to +\infty} \frac{-\frac{2}{x^2+2x}}{-\frac{1}{x^2}} \Leftrightarrow \ln y = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2}{x^2+2x} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln y = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{1+\frac{2}{x}} \Leftrightarrow \ln y = \frac{2}{1+0} \Leftrightarrow \ln y = 2 \Leftrightarrow y = e^2$

d) $\lim_{x \to 0^+} (\operatorname{sen} x)^{x} = 0^0$ (ind) → Aplicar logaritmos:

$\ln y = \ln\left(\lim_{x \to 0^+} (\operatorname{sen} x)^{x}\right) \Leftrightarrow \ln y = \lim_{x \to 0^+} \left(\ln (\operatorname{sen} x)^{x}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln y = \lim_{x \to 0^+} x \ln(\operatorname{sen} x) \Leftrightarrow \ln y = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(\operatorname{sen} x)}{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow$ Aplicar a regra de L'Hôpital:

$\Leftrightarrow \ln y = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}}{-\frac{1}{x^2}} \Leftrightarrow \ln y = \lim_{x \to 0^+} \left(-\frac{x^2 \cos x}{\operatorname{sen} x}\right) = \frac{0}{0}$ (ind) $\Leftrightarrow$ Aplicar a regra de L'Hôpital:

$\Leftrightarrow \ln y = \lim_{x \to 0^+} \frac{2x \operatorname{sen} x}{\cos x} \Leftrightarrow \ln y = \frac{0}{1} \Leftrightarrow \ln y = 0 \Leftrightarrow y = e^0 \Leftrightarrow y = 1$

e) $\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{x} - (1+x)}{x^3} = \frac{0}{0}$ (ind) → Aplicar regra de L'Hôpital:

$= \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{x} - 1}{3x^2} = \frac{0}{0}$ (ind) → Aplicar regra de L'Hôpital:

$= \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{x}}{6x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

f) $\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x^2 - 1} = \frac{0}{0}$ (ind) → Aplicar regra de L'Hôpital:

$= \lim_{x \to 1} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{2x^2} = \frac{1}{2 \times 1} = \frac{1}{2}$

g) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x} = \frac{0}{0}$ (ind) $\rightarrow$ Aplicar a regra de L'Hôpital:

$= \lim_{x \to 0} \frac{2\cos 2x}{3\cos 3x} = \frac{2\cos 0}{3\cos 0} = \frac{2 \times 1}{3 \times 1} = \frac{2}{3}$

h) $\lim_{x \to 0^+} (e^x + x)^{\frac{1}{x}} = 1^\infty$ (ind) $\rightarrow$ Aplicar logaritmos:

$\ln y = \ln\left(\lim_{x \to 0^+} (e^x+x)^{\frac{1}{x}}\right) \Leftrightarrow \ln y = \lim_{x \to 0^+} \left(\ln(e^x+x)^{\frac{1}{x}}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln y = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(e^x+x)}{x} \Leftrightarrow$ (Aplicar a regra de L'Hôpital):

$\Leftrightarrow \ln y = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{e^x+1}{e^x+x}}{1} \Leftrightarrow \ln y = \lim_{x \to 0^+} \frac{e^x+1}{e^x+x} \Leftrightarrow \ln y = \frac{2}{1} \Leftrightarrow \ln y = 2 \Leftrightarrow y = e^2$