Capítulo 1 - Cinemática

Perguntas:

1. $a_t = \dot{v} \Leftrightarrow 4t = \frac{dv}{dt} \Leftrightarrow \int_0^3 4t\,dt = \int_4^{v_f} dv \Leftrightarrow 2t^2\Big|_0^3 = v\Big|_4^{v_f} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 18 - 0 = v_f - 4 \Leftrightarrow v_f = 18+4 \Leftrightarrow v_f = 22$ m/s (Opção A).

2. (Opção B).

3. $a_t = v\frac{dv}{ds} \Leftrightarrow a_t = 2s^2 \times (2s^2)' = 2s^2 \times 4s = 8s^3$ (Opção A).

4. $\Delta s = A_I + A_{II} + A_{III} = \frac{3\times 2}{2} + 2\times 2 + \frac{2+3}{2}\times 2 = 3+4+5 = 12$ m (Opção B).

5. $a_t = v\frac{dv}{ds} \Leftrightarrow \frac{dv}{ds} = \frac{a_t}{v} \Leftrightarrow m = \frac{a_t}{v}$ (Opção C).

Problemas:

1. a) $v(t) = \dot{s}(t) \Leftrightarrow v(t) = \frac{ds(t)}{dt} \Leftrightarrow \int_{t_i}^{t} v(t')\,dt' = \int_{s_i}^{s(t)} ds(t) \Leftrightarrow \int_{t_i}^{t} v(t')\,dt' = s(t)\Big|_{s_i}^{s(t)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow s(t) - s_i = \int_{t_i}^{t} v(t')\,dt' \Leftrightarrow s(t) = s_i + \int_{t_i}^{t} v(t')\,dt'$

b) $s(t) = s_i + \int_{t_i}^{t} v\,dt' \Leftrightarrow s(t) = s_i + vt'\Big|_{t_i}^{t} \Leftrightarrow s(t) = s_i + vt - vt_i \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow s(t) = s_i + v(t - t_i)$, com v constante.

c) $a_t(t) = \dot{v}(t) \Leftrightarrow a_t(t) = \frac{dv(t)}{dt} \Leftrightarrow \int_{t_i}^{t} a_t(t')\,dt' = \int_{v_i}^{v(t)} dv(t) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \int_{t_i}^{t} a_t(t')\,dt' = v(t)\Big|_{v_i}^{v(t)} \Leftrightarrow \int_{t_i}^{t} a_t(t')\,dt' = v(t) - v_i \Leftrightarrow v(t) = v_i + \int_{t_i}^{t} a_t(t')\,dt'$

d) $v(t) = v_i + \int_{t_i}^{t} a_t\,dt' \Leftrightarrow v(t) = v_i + a_t t'\Big|_{t_i}^{t} \Leftrightarrow v(t) = v_i + a_t(t - t_i)$

$v(t) = \dot{s}(t) \Leftrightarrow v_i + a_t(t - t_i) = \frac{ds(t)}{dt} \Leftrightarrow \int_{t_i}^{t} v_i + a_t(t' - t_i)\,dt' = \int_{s_i}^{s(t)} ds(t) \Leftrightarrow$

$u = t - t_i$
$du = 1dt$

$\Leftrightarrow v_i t'\Big|_{t_i}^{t} + a_t \int_{t_i}^{t} u\,du = s(t)\Big|_{s_i}^{s(t)} \Leftrightarrow s(t) = s_i + v_i(t - t_i) + a_t\frac{u^2}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow s(t) = s_i + v_i(t - t_i) + \frac{1}{2}a_t(t - t_i)^2$

e) $a_t(s)=v(s)\frac{dv}{ds} \Leftrightarrow a_t(s)\,ds = v(s)\,dv \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \int_{s_i}^{s} a_t(s')\,ds' = \int_{v_i}^{v} v'(s)\,dv' \Leftrightarrow \int_{s_i}^{s} a_t(s')\,ds' = \frac{v'(s)^2}{2}\Big|_{v_i}^{v} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{v(s)^2}{2}-\frac{v_i^2}{2} = \int_{s_i}^{s} a_t(s')\,ds' \Leftrightarrow v(s)^2 = v_i^2+2\int_{s_i}^{s} a_t(s')\,ds'$

f) $v(s)^2 = v_i^2 + 2\int_{s_i}^{s} a_t\,ds' \Leftrightarrow v(s)^2 = v_i^2 + 2a_t s'\Big|_{s_i}^{s} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow v(s)^2 = v_i^2+2a_t(s-s_i)$, com a_t constante.

2) $v(t)=\dot s(t) \Leftrightarrow v(t)=\frac{ds}{dt} \Leftrightarrow v(t) = (2t^3-6t^2+10)' \Leftrightarrow v(t)=6t^2-12t$

$v(t)=0 \Leftrightarrow 6t^2-12t=0 \Leftrightarrow t(6t-12)=0 \Leftrightarrow t=0 \vee 6t=12 \Leftrightarrow t=0 \vee t=2$ (s)

$s(0)=2\times0^3-6\times0^2+10=10$ m $s(2)=2\times2^3-6\times2^2+10=2$ m

$a_t(t)=\dot v(t) \Leftrightarrow a_t(t)=\frac{dv}{dt} \Leftrightarrow a_t(t)=(6t^2-12t)' \Leftrightarrow a_t(t)=12t-12$

$a_t(0)=12\times0-12=-12$ m/s² $a_t(2)=12\times2-12=24-12=12$ m/s²

3) $a_t=\dot v(t) \Leftrightarrow -4=\frac{dv(t)}{dt} \Leftrightarrow \int_0^8 -4\,dt=\int_{24}^{v_8} dv(t) \Leftrightarrow -4t\Big|_0^8 = v(t)\Big|_{24}^{v_8} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow v_8-24=-32 \Leftrightarrow v_8=-8$ m/s $v(8)=-8$ m/s

$a_t = v\frac{dv}{ds} \Leftrightarrow \int_0^s -4\,ds' = \int_{24}^{-8} v\,dv \Leftrightarrow -4s'\Big|_0^s = \frac{v^2}{2}\Big|_{24}^{-8} \Leftrightarrow -4s = 32-288 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow s=64$ m $s(8)=64$ m

Como a velocidade é negativa, significa que o objeto deslocou-se até um ponto onde parou e em t=8 está a voltar para a origem. Determinando a posição do ponto onde parou:

$a_t = v\frac{dv}{ds} \Leftrightarrow \int_0^s -4\,ds' = \int_{24}^{0} v\,dv \Leftrightarrow -4s'\Big|_0^s = \frac{v^2}{2}\Big|_{24}^{0} \Leftrightarrow -4s=-288 \Leftrightarrow s=72$ m

Logo, o objeto deslocou-se de 0 a 72 m, e depois andou mais 72−64=8 m

R: $\Delta s = 72+8 = 80$ m.

(Maxima)

4) a) $a_t=\dot v \Leftrightarrow 9-3t^2 = \frac{dv}{dt} \Leftrightarrow \int_0^{t_1} 9-3t^2\,dt = \int_0^0 dv \Leftrightarrow \cancel{t_1=0} \vee \cancel{t_1=-3} \vee t_1=3$ (s)

b) $a_t=\dot v \Leftrightarrow \int_0^t 9-3t'^2\,dt = \int_0^v dv' \Leftrightarrow v(t)=9t-t^3$

$v=\dot s \Leftrightarrow 9t-t^3=\frac{ds}{dt} \Leftrightarrow \int_0^3 9t-t^3\,dt = \int_5^s 1\,ds \Leftrightarrow s=25,25$ cm

5) a) $a_t(t)=\dot v(t) \Leftrightarrow a_t(t)=\frac{dv(t)}{dt} \Leftrightarrow a_t(t)=(t^3-t^2-2t)' \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a_t(t)=3t^2-2t-2$ (SI)

b) $v_t(t)=\dot s(t) \Leftrightarrow v_t(t)=\frac{ds(t)}{dt} \Leftrightarrow \int_0^t t'^3-t'^2-2t'\,dt = \int_3^{s(t)} ds(t) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow s(t)=\frac{t^4}{4}-\frac{t^3}{3}-t^2+3$

c) (feito no computador)

d) $s_1=2,724$ $v_1=-1,125$ $a_1=-2,25$ (feito no computador).

$s_2=1,307$ $v_2=4,375$ $a_2=11,75$

e) $\int_{0,5}^{2,5} v(t) = \int_{0,5}^{2,5} t^3 - t^2 - 2t \, dt = -1,417 \quad s_2 - s_1 = 1,307 - 2,724 = -1,417.$

f) $\int_{0,5}^{2,5} a_t(t) = \int_{0,5}^{2,5} 3t^2 - 2t - 2 \, dt = 5,5 \quad v_2 - v_1 = 4,375 - (-1,125) = 5,5.$

g) No gráfico da velocidade:

$v(t) = 0 \Leftrightarrow t^3 - t^2 - 2t = 0 \Leftrightarrow \cancel{t = -1} \vee \cancel{t = 0} \vee t = 2 \ (s)$

$A_m = -\int_{0,5}^{2} t^3 - t^2 - 2t = 2,391 \qquad A_p = \int_{2}^{2,5} t^3 - t^2 - 2t = 0,974$

No gráfico da aceleração tangencial:

$a_t(t) = 0 \Leftrightarrow 3t^2 - 2t - 2 = 0 \Leftrightarrow \cancel{t = -0,549} \vee t = 1,215 \ (s)$

$A_m = -\int_{0,5}^{1,215} 3t^2 - 2t - 2 \, dt = 0,9876 \quad A_p = \int_{1,215}^{2,5} 3t^2 - 2t - 2 \, dt = 6,488$

6 a) $a_t = v \frac{dv}{ds} \Leftrightarrow -\frac{K}{s^2} ds = v \, dv \Leftrightarrow \int_{0,800}^{0,500} -\frac{K}{s^2} ds = \int_{0}^{-6} v \, dv \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow K = 24 \ m^3/s^2$

b) $a_t = -\frac{24}{s^2} (m/s^2) \qquad a_t = v \frac{dv}{ds} \Leftrightarrow \int_{0,800}^{s} -\frac{24}{s^2} ds = \int_{0}^{v} v \, dv \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow v = -2\sqrt{3}\sqrt{\frac{4}{s} - 5} \vee v = 2\sqrt{3}\sqrt{\frac{4}{s} - 5}$

Como a posição final é inferior à inicial, e como andou no sentido negativo, pelo que a velocidade é negativa.

$v = -2\sqrt{3}\sqrt{\frac{4}{0,250} - 5} \Leftrightarrow v = -11,49 \ m/s$

7 a) $a_t = v \frac{dv}{ds} \Leftrightarrow -Ks \, ds = v \, dv \Leftrightarrow \int_{0}^{3} -Ks \, ds = \int_{15}^{0} v \, dv \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow K = 25 \ s^{-2}$

b) $a_t = -25s \qquad a_t = v \frac{dv}{ds} \Leftrightarrow \int_{0}^{2} -25s \, ds = \int_{15}^{v_f} v \, dv \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow v_f = \pm 11,18 \ m/s$ A velocidade tanto pode ser negativa como positiva, pois o objeto passa várias vezes em $s = 2$, umas vezes no sentido negativo e outras no sentido positivo, uma vez que oscila.

8 a) $a_t = -4s(1 + 0 \times s^2) = -4s \qquad a_t = v \frac{dv}{ds} \Leftrightarrow \int_{0}^{s} -4s \, ds = \int_{17}^{v} v' \, dv' \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow v(s) = \pm\sqrt{289 - 4s^2}$ Logo, e como oscila, $v(4) = \pm 15 \ m/s$

b) $a_t = -4s(1 + 0,015 \times s^2) = -4s - 0,06s^3 \quad a_t = v \frac{dv}{ds} \Leftrightarrow \int_{0}^{s} -4s - 0,06s^3 ds = \int_{17}^{v} v' \, dv' \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow v = \pm \frac{\sqrt{-3s^4 - 400s^2 + 28900}}{10}$ Logo, e como oscila, $v(4) = \pm 14,74 \ m/s.$

c) $a_t = -4s(1 - 0,015 s^2) = -4s + 0,06s^3 \quad a_t = v \frac{dv}{ds} \Leftrightarrow \int_{0}^{s} -4s + 0,06s^3 ds = \int_{17}^{v} v' \, dv' \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow v = 15,25 \ m/s$ → é positiva porque o objecto só se desloca no sentido positivo.

9) $y - y_0 = m(x - x_0) \Leftrightarrow v^2 - 900 = \frac{2500-900}{100-400}(s-400) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow v^2 = \frac{9100}{3} - \frac{16}{3}s$ Como a velocidade diminui, então o objeto tem velocidade positiva, logo:

$v = \sqrt{\frac{9100}{3} - \frac{16}{3}s}$

$v = \dot{s} \Leftrightarrow v = \frac{ds}{dt} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{9100}{3} - \frac{16}{3}s} = \frac{ds}{dt} \Leftrightarrow \int_0^2 dt = \int_s^{400} \frac{1}{\sqrt{\frac{9100}{3} - \frac{16}{3}s}} ds \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow s = 334,7 \text{ m}$ $\Delta s = 400 - 334,7 = 65,33 \text{ m}$

10) a) $a_t = v\frac{dv}{ds} \Leftrightarrow -0,4v = v\frac{dv}{ds} \Leftrightarrow \int_0^s -0,4\, ds = \int_{30}^0 dv \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow s = 75 \text{ mm}$ $\Delta s = 75 - 0 = 75 \text{ mm}$

b) $a_t = \frac{dv}{dt} \Leftrightarrow -0,4v = \frac{dv}{dt} \Leftrightarrow \int_{30}^0 -\frac{1}{0,4v} dv = \int_0^t dt' \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t = +\infty$ R: infinito.

c) $0,01 \times 30 = 0,3$

$a_t = \frac{dv}{dt} \Leftrightarrow -0,4v = \frac{dv}{dt} \Leftrightarrow \int_{30}^{0,3} -\frac{1}{0,4v} dv = \int_0^t dt' \Leftrightarrow t = 11,51 \text{ s}$

11) a) $v(t) = \dot{s}(t) \Leftrightarrow v(t) = \frac{ds}{dt} \Leftrightarrow v(t) = (2,5t^3 - 62t^2 + 10,3t)' \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow v(t) = 7,5t^2 - 124t + 10,3$ (m/s) $a(t) = \dot{v}(t) = (7,5t^2 - 124t + 10,3)' = 15t - 124$ (m/s²)

b) $v(t) = 0 \Leftrightarrow 7,5t^2 - 124t + 10,3 = 0 \Leftrightarrow t = 0,0835 \text{ s} \vee t = 16,4 \text{ s}$

$s(0,0835) = 0,429 \text{ m}$ $s(16,4) = -5479 \text{ m}$

$a(0,0835) = -123 \text{ m/s}^2$ $a(16,4) = 122 \text{ m/s}^2$

c) (feito no computador).