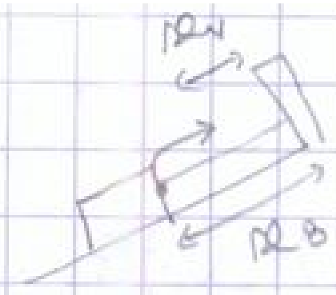
Capítulo 2 - Cinemática Vetorial



Perguntas:

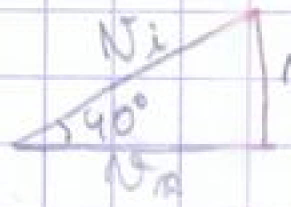
derivando

1 $l = x_B + x_B - x_V \Leftrightarrow v_B + v_B - v = 0 \Leftrightarrow v = 2v_B \Leftrightarrow v_B = \frac{v}{2}$ (Opção B).

2 $\vec{a_m} = \frac{\vec{\Delta v}}{\Delta t}$ $\quad \vec{\Delta v} = \vec{v_f} - \vec{v_i} = -10\vec{j} - (-10\vec{i}) = 10\vec{i} - 10\vec{j}$ $\quad \Delta t = 6s$

$\vec{a_m} = \frac{10}{6}\vec{i} - \frac{10}{6}\vec{j}$ $\quad |\vec{a_m}| = \sqrt{\left(\frac{10}{6}\right)^2 + \left(-\frac{10}{6}\right)^2} = 2{,}36\,m/s^2$ (Opção B).

3 $v_x = 80\,m/s$ $\quad v_i = \frac{v_x}{\cos 40°} = \frac{80}{\cos 40°} = 104{,}4\,m/s$



(Opção A).

4 $\vec{v_i} = 4\vec{j}$ $\quad \vec{a_x} = 3\vec{i}$ $\quad \Delta t = 2s$ $\quad \vec{a} = \frac{\vec{\Delta v}}{\Delta t} \Leftrightarrow \vec{\Delta v} = 3\vec{i} \times 2 = 6\vec{i}$

$\Delta\vec{v} = \vec{v_f} - \vec{v_i} \Leftrightarrow \vec{v_f} = 6\vec{i} + 4\vec{j} = (6,4)$ $\quad |\vec{v_f}| = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{52} = 7{,}2\,m/s$

(Opção C).

5 (Opção B).

Problemas:

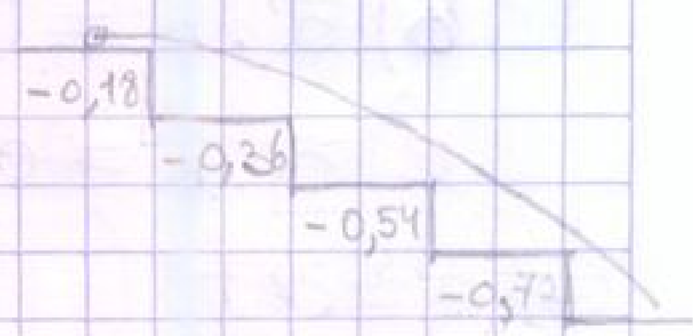
1 a) $y = y_0 + v_{0y} t + \frac{1}{2} g t^2 \Leftrightarrow 0 = 7 + 15 \times \sin(56{,}3°) t + \frac{1}{2} \times (-9{,}8) \times t^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t = \cancel{-0{,}47} \vee t = 3{,}02\,s$ R: $t = 3{,}02\,s$

b) $x = x_0 + v_{0x} t \Leftrightarrow x = 0 + 15 \times \cos(56{,}3°) \times 3{,}02 \Leftrightarrow x = 25{,}1\,m$

2 $v_x = \text{constante} = 3\,m/s$ $x = \cancel{x_0} + v_x t \Leftrightarrow x = 3t$

Cada degrau: $0{,}3 = 3t \Leftrightarrow t = 0{,}1\,s$



$y = \cancel{y_0} + \cancel{v_{0y} t} + \frac{1}{2} g t^2 \Leftrightarrow y = -\frac{9{,}8}{2} t^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = -4{,}9 t^2$

As várias alturas dos degraus segue a sequência $h_n = -0{,}18, -0{,}36, -0{,}54, -0{,}72, \ldots$

Se durante o tempo em que o berlinde demora a avançar cada degrau a distância vertical y for menor do que a altura h_n, então o degrau n será o degrau em que o berlinde bate.

$y_1 = -4{,}9 \times 0{,}1^2 = -0{,}049\,m$ $y_2 = -4{,}9 \times 0{,}2^2 = -0{,}196\,m$

$y_3 = -4{,}9 \times 0{,}3^2 = -0{,}441$ $y_4 = -4{,}9 \times 0{,}4^2 = -0{,}784\,m$

Como $y_4 < h_4$ $(-0{,}784 < 0{,}72)$, conclui-se que o berlinde bate no quarto degrau.

3 a) $a_t = \frac{dv}{dt} \Leftrightarrow \int dt = \int \frac{1}{g - \frac{cv^2}{m}} dv \Leftrightarrow \int dt = \int \frac{1}{g(1 - \frac{c}{mg} v^2)} dv \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \int dt = \frac{1}{g} \int \frac{1}{1 - Kv^2} dv \Leftrightarrow$ $(K = \frac{c}{mg}) \leftarrow$ constante $v = \frac{\sqrt{K} e^{2g\sqrt{K} t} + \sqrt{K}}{K e^{2g\sqrt{K} t} - K} \Leftrightarrow$

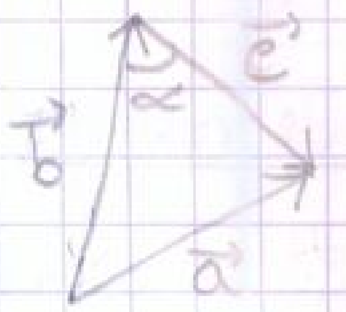
$\Leftrightarrow v = \frac{\sqrt{\frac{c}{gm}} \left(e^{2gt\sqrt{\frac{c}{gm}}} + 1\right)}{\frac{c}{gm} \left(e^{2gt\sqrt{\frac{c}{gm}}} - 1\right)} \Leftrightarrow v = \sqrt{\frac{mg}{c}} \times \frac{e^{2t\sqrt{\frac{cg}{m}}} + 1}{e^{2t\sqrt{\frac{cg}{m}}} - 1} \Leftrightarrow v = \sqrt{\frac{mg}{c}}$

b) $a_t = v \frac{dv}{ds} \Leftrightarrow g - \frac{cv^2}{m} = \sqrt{\frac{mg}{c}} \tanh\left(\sqrt{\frac{cg}{m}}\, t\right) \frac{dv}{ds} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \int ds = \int \frac{\sqrt{\frac{mg}{c}} \tanh\left(\sqrt{\frac{cg}{m}}\, t\right)}{g - \frac{cv^2}{m}} dv \Leftrightarrow v = \frac{\sqrt{cgm}\, e^{\frac{2\sqrt{cgm}\, s}{m\sqrt{\frac{gm}{c}} \tanh\left(\sqrt{\frac{cg}{m}} t\right)}} + \sqrt{cgm}}{c\, e^{\frac{2\sqrt{cgm}\, s}{m\sqrt{\frac{gm}{c}} \tanh\left(\sqrt{\frac{cg}{m}} t\right)}} - c} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow v = \frac{\sqrt{cgm}\left(e^{2gm^2 \frac{s}{\tanh\left(\sqrt{\frac{cg}{m}} t\right)}} + 1\right)}{c\left(e^{2gm^2 \frac{s}{\tanh\left(\sqrt{\frac{cg}{m}} t\right)}} - 1\right)} \Leftrightarrow v = \sqrt{\frac{mg}{c}}$ coth

④ a) $\vec{a}\cdot\vec{a} = (\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{b}+\vec{c}) \Leftrightarrow$



$\Leftrightarrow a^2 = \vec{b}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{c} + \vec{c}\cdot\vec{b} + \vec{c}\cdot\vec{c} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^2 = b^2 + 2\vec{b}\cdot\vec{c} + c^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^2 = b^2 + 2bc\cos(\pi-\alpha) + c^2 \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$

b) $a^2 = 5^2 + 8^2 - 2\times5\times8\times\cos(180^\circ-42^\circ) = 12,18$ unidades

⑤ a) $|\vec{a}| = \sqrt{3^2+4^2+(-5)^2} = 5\sqrt{2}$ $\quad |\vec{b}| = \sqrt{(-1)^2+2^2+6^2} = \sqrt{41}$

b) $\vec{a}\cdot\vec{b} = (3,4,-5)\cdot(-1,2,6) = -3+8-30 = -25$

c) $\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos\theta \Leftrightarrow -25 = 5\sqrt{82}\cos\theta \Leftrightarrow \cos\theta = -\frac{5}{\sqrt{82}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \theta = \cos^{-1}\left(-\frac{5}{\sqrt{82}}\right) \Leftrightarrow \theta = 123,5^\circ$

d) $\vec{a}+\vec{b} = 3\hat{i}+4\hat{j}-5\hat{k}-\hat{i}+2\hat{j}+6\hat{k} = 2\hat{i}+6\hat{j}+\hat{k}$

e) $\vec{a}-\vec{b} = 3\hat{i}+4\hat{j}-5\hat{k}+\hat{i}-2\hat{j}-6\hat{k} = 4\hat{i}+2\hat{j}-11\hat{k}$

⑥ a) $\vec{r}(t) = \vec{r}_i + \int_0^t \vec{v}(t')\,dt' \Leftrightarrow \vec{r}(t) = (0,2) + \int_0^t (3e^{-2t'}, -5e^{-t'})\,dt' \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \vec{r}(t) = 3\left(\frac{1}{2}-\frac{e^{-2t}}{2}\right)\hat{i} + 2-5(1-e^{-t})\hat{j}$

$2-5(1-e^{-t}) = 0 \Leftrightarrow t = 0,5108\,s$

$\vec{r}(0,5108) = 0,96\hat{i} + 0,0\hat{j}$ $\quad$ R: $t = 0,5108\,s$, $x = 0,96\,m$

b) $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} \Leftrightarrow \vec{a}(t) = (3e^{-2t}, -5e^{-t})' \Leftrightarrow \vec{a}(t) = -6e^{-2t}\hat{i} + 5e^{-t}\hat{j}$

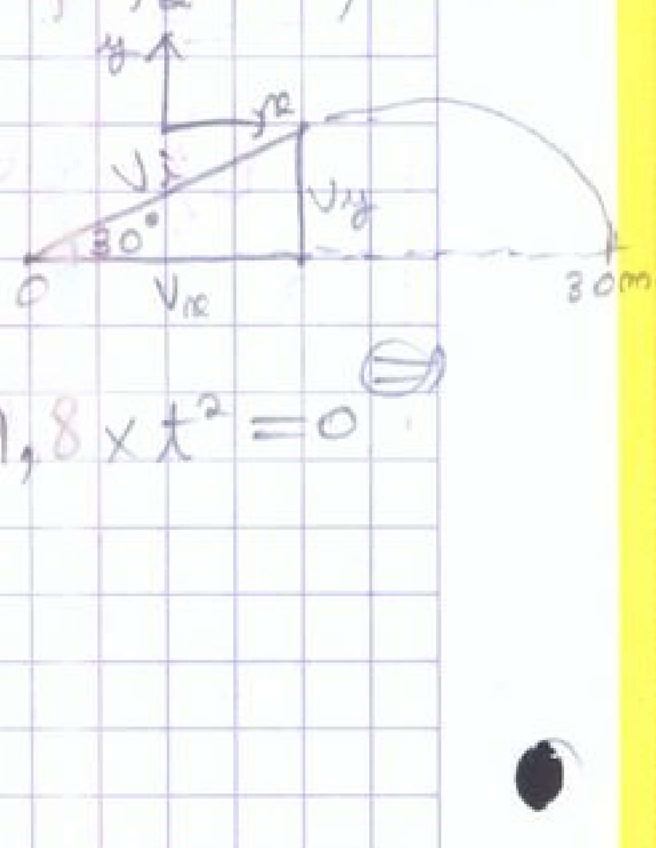
$\vec{a}(0) = -6\hat{i}+5\hat{j}\ \left(\frac{m}{s^2}\right)$ $\quad \vec{a}(0,5108) = -2,16\hat{i}+3,0\hat{j}\ \left(\frac{m}{s^2}\right)$

⑦ $\vec{v}(t) = \vec{v}_i + \int_0^t \vec{a}(t')\,dt' \Leftrightarrow \vec{v}(t) = (0,5,4) + \int_0^t (2t'^2, 0, 3t')\,dt' \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \vec{v}(t) = \frac{2}{3}t^3\hat{i} + 5\hat{j} + \left(\frac{3}{2}t^2+4\right)\hat{k}$

$\vec{r}(t) = \vec{r}_i + \int_0^t \vec{v}(t')\,dt' \Leftrightarrow \vec{r}(t) = (3,1,-1) + \int_0^t \left(\frac{2}{3}t'^3, 5, \frac{3}{2}t'^2+4\right)dt' \Leftrightarrow$

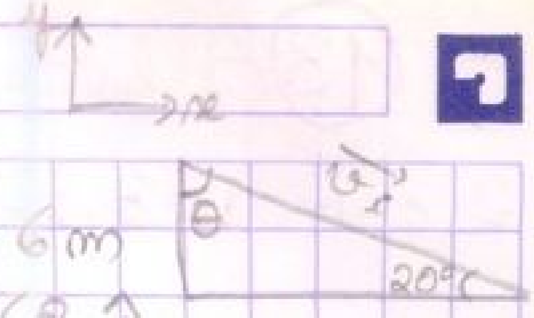
$\Leftrightarrow \vec{r}(t) = \left(\frac{t^4}{6}+3\right)\hat{i} + (5t+1)\hat{j} + \left(\frac{t^3}{2}+4t-1\right)\hat{k}$



⑧ $\begin{cases} x = \cancel{x_0}^{\,0} + v_x t \\ y = \cancel{y_0}^{\,0} + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 30 = v_i\cos30^\circ\, t \\ v_i\sin30^\circ\, t - \frac{1}{2}\times9,8\times t^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 1,88\,s \\ v_i = 18,43\,m/s \end{cases}$ $\quad$ (Máxima)

R: $v_i = 18,43\,m/s$



9) $v_i = 4$ m/s $\vec{r}_i = 6\hat{j}$ $\vec{a} = -9,8\hat{j}$

a) $\vec{v}_i = 4\cos(20°)\hat{i} - 4\sin(20°) = 3,759\hat{i} - 1,368\hat{j}$

$\vec{v}(t) = \vec{v}_i + \int_0^t \vec{a}(t')\,dt' \Leftrightarrow \vec{v}(t) = 3,759\hat{i} - 1,368\hat{j} + \int_0^t -9,8\,dt' \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \vec{v}(t) = 3,759\hat{i} - (1,368 + 9,8t)\hat{j}$

$\vec{r}(t) = \vec{r}_i + \int_0^t \vec{v}(t')\,dt' \Leftrightarrow \vec{r}(t) = 6\hat{j} + \int_0^t 3,759\hat{i} - (1,368 + 9,8t')\hat{j}\,dt' \Leftrightarrow$

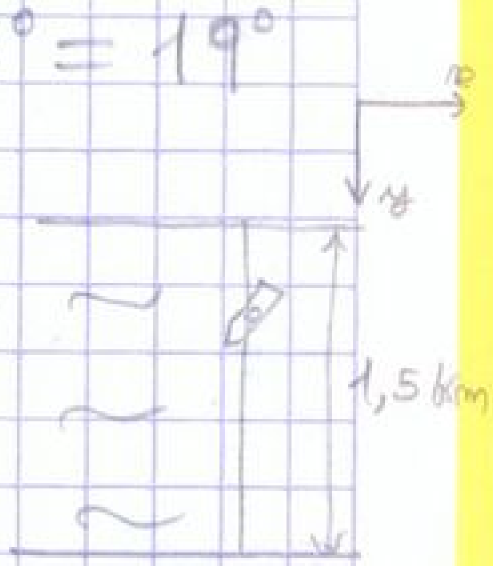
$\Leftrightarrow \vec{r}(t) = 3,759t\,\hat{i} + (-4,9t^2 - 1,368t + 6)\hat{j}$ $y_f = 0$ m

$-4,9t^2 - 1,368t + 6 = 0 \Leftrightarrow t = 0,976$ s   R: 0,976 s

b) $x(0,976) = 3,759 \times 0,976 = 3,67$ m

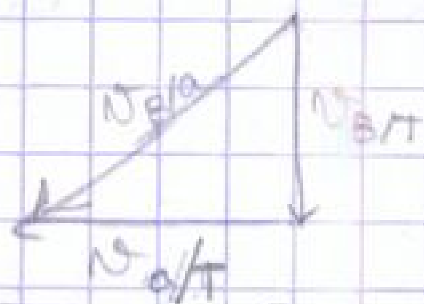
c) $\vec{v}(0,976) = 3,759\hat{i} - 10,93\hat{j}$

$\tan\theta = \frac{3,759}{10,93} \Leftrightarrow \theta = \arctan\left(\frac{3,759}{10,93}\right) \Leftrightarrow \theta = 18,98° = 19°$



10) a) $v_{B/T} = \text{constante} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{1500}{20 \times 60} = 1,25$ m/s

b) $v_{a/T} = 1,2$ m/s



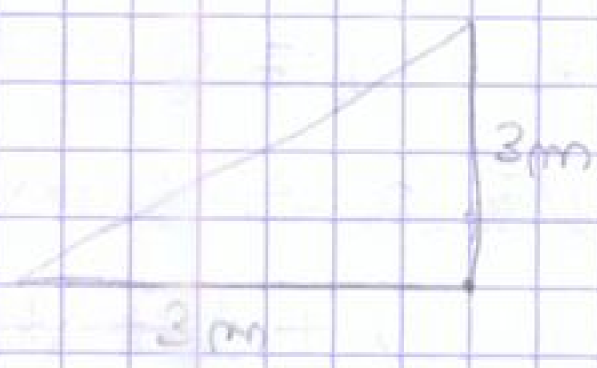
$v_{B/a} = \sqrt{1,2^2 + 1,25^2} = 1,73$ m/s

c) A velocidade do barco em relação à água depende apenas do motor, logo será a mesma no dia em que a corrente tem velocidade 0,8 m.

$1,73^2 = v_{B/T}^2 + 0,8^2 \Leftrightarrow v_{B/T} = 1,534$ m/s

$v_{B/T} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \Leftrightarrow \Delta t = \frac{1500\text{ m}}{1,534\text{ m/s}} \Leftrightarrow \Delta t = 978\text{ s} = 16\text{ min e } 18\text{ s}$

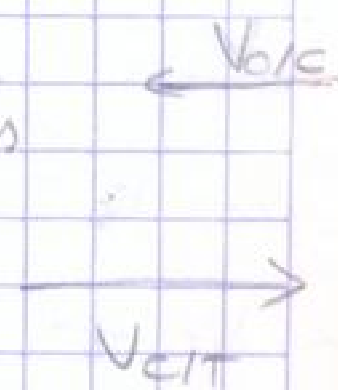
11) $v_{C/T} = 35$ Km/h $= 9,72$ m/s $V_{O/T} = ?$



$x = \cancel{x_0} + V_0 t \Leftrightarrow V_0 t = -3$

$\cancel{y}^0 = y_0 + \cancel{v_{0y}}\,t + \frac{1}{2} g t^2 \Leftrightarrow -\frac{9,8}{2} t^2 = -3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t = 0,7825$ $V_{O/C} = \frac{-3}{t} = \frac{-3}{0,7825} = -3,834$ m/s



$V_{O/T} = V_{O/C} + V_{C/T} = -3,834 + 9,72 = 5,886$ m/s

$x = \cancel{x_0}^0 + V_{O/T}\,t \Leftrightarrow x = 5,886 \times 0,7825 = 4,6$ m

12) a) $\lim_{t \to +\infty} \left(3(1 - e^{-t}), 4(1 - e^{-2t})\right) = 3\hat{i} + 4\hat{j}$ $s = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$ m

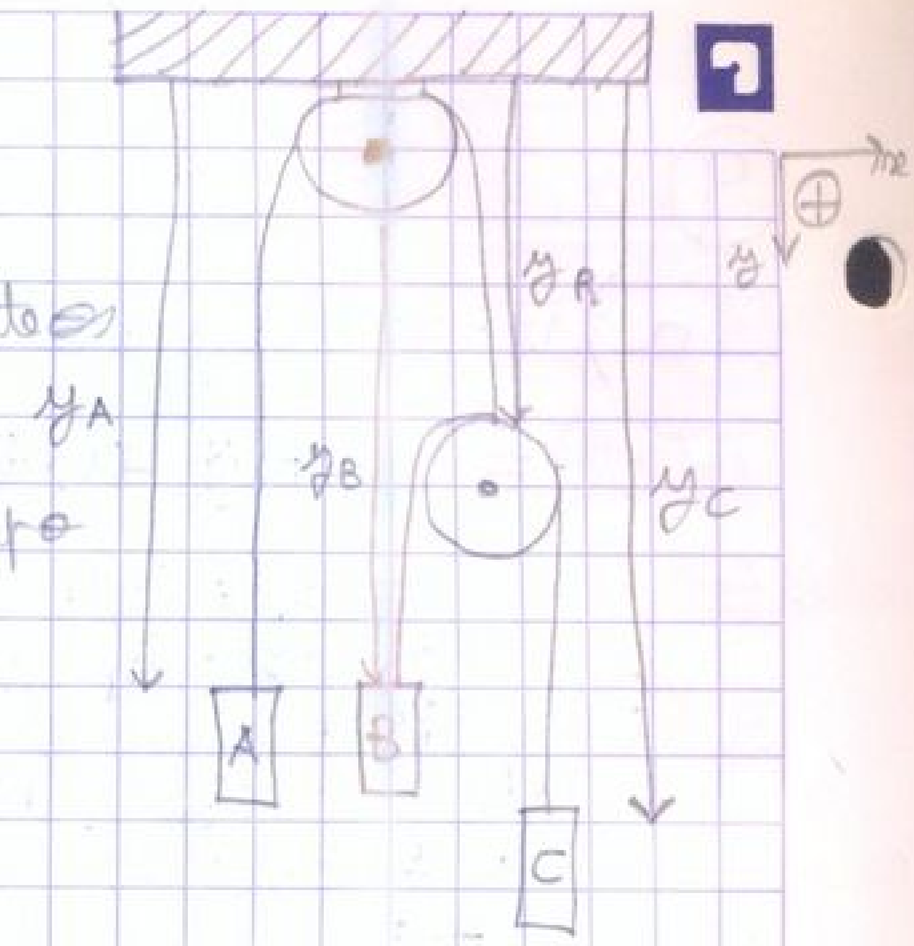
b) $v = \dot{r} = (3e^{-t}, 8e^{-2t})$

(13) 4 funções de t: y_A, y_B, y_C, y_R

2 condições: fio 1: $y_A + y_R = \text{constante}$

fio 2: $(y_B - y_R) + (y_C - y_R) = \text{constante} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y_B + y_C - 2y_R = \text{constante}$



Derivando essas equações em ordem ao tempo obtemos-se as relações para as velocidades:

$$\begin{cases} v_A + v_R = 0 \\ v_B + v_C - 2v_R = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_R = -v_A \\ v_B = 2v_R - v_C \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow v_B = -2v_A - v_C$

Se o cilindro A sobe, então o B e o C descem, pelo que têm velocidades positivas, no referencial considerado.

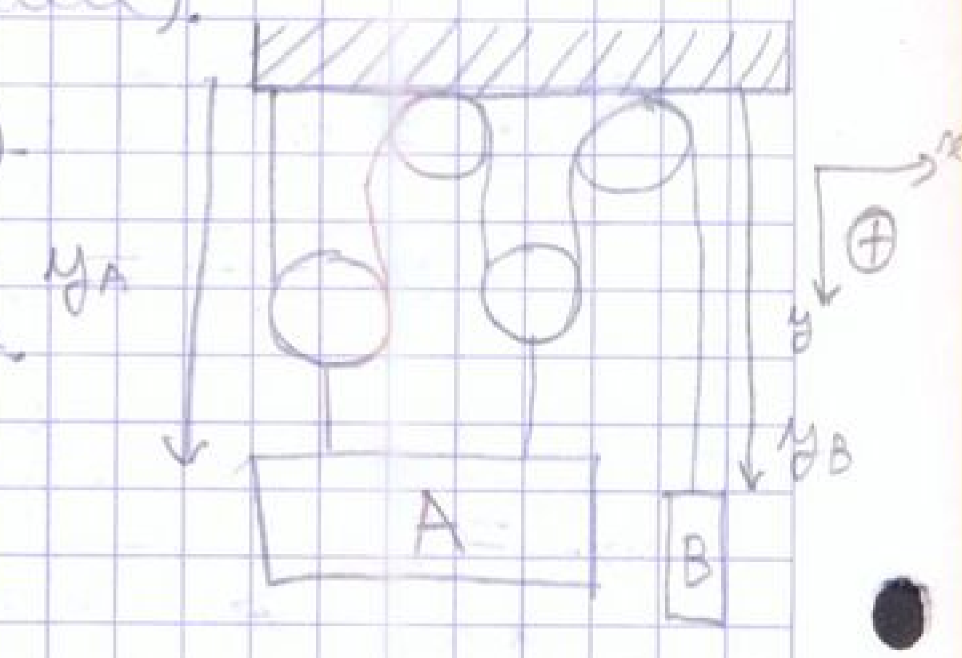
$v_B = -2\times(-3) - 1 = 6 - 1 = 5\ m/s$ B tem velocidade 5 m/s, para baixo.

Derivando a expressão das velocidades, obtemos a expressão das acelerações.

$a_B = -2a_A - a_C \Leftrightarrow a_B = -2\times 2 - (-4) \Leftrightarrow a_B = -4+4 \Leftrightarrow a_B = 0\ m/s$

B tem aceleração 0 m/s. (aceleração nula).

(14) Seja l o comprimento do fio (constante).



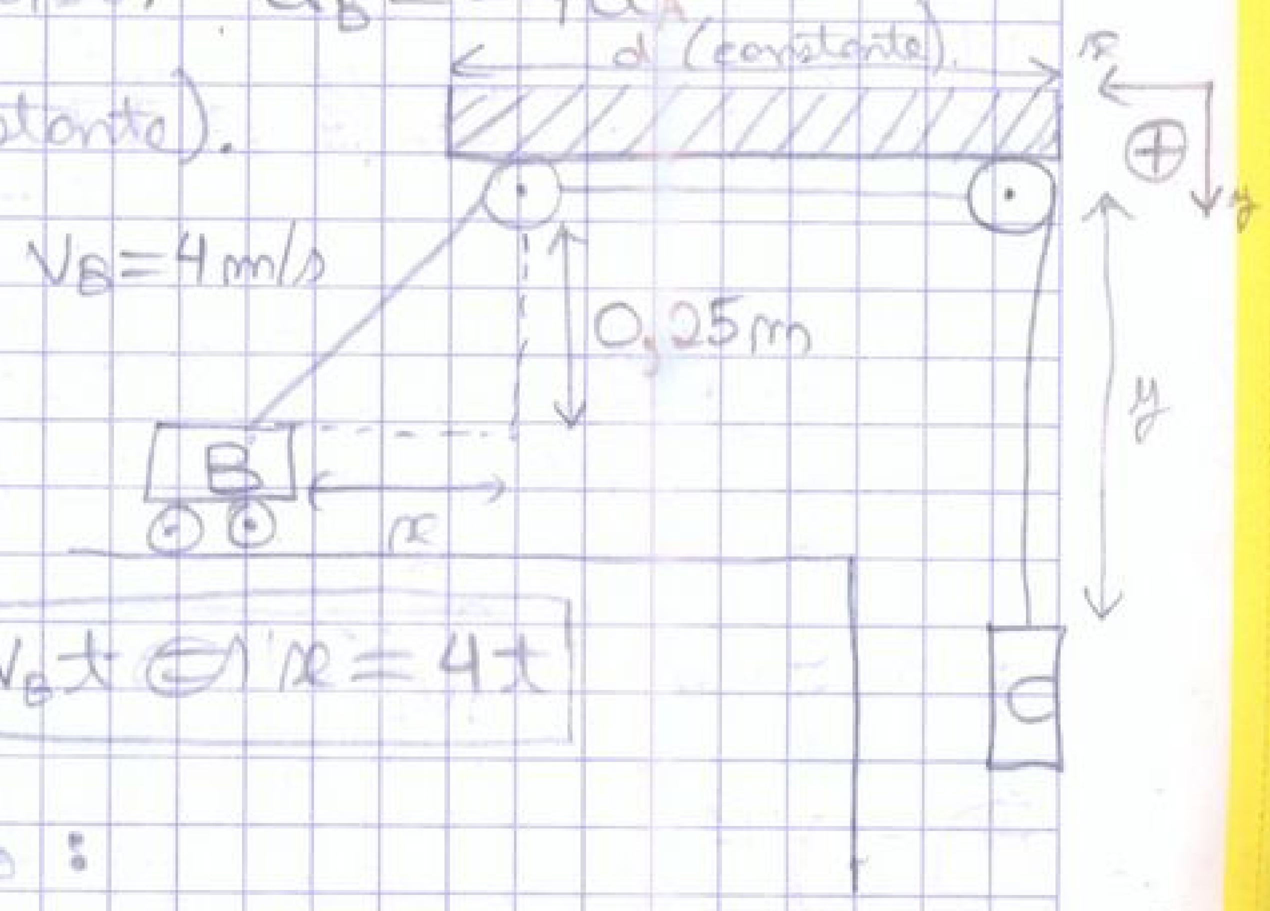
A distância entre o centro de uma das roldanas móveis e uma das hastes é constante.

Logo o comprimento do fio é igual a:

$l = 4x_A + x_B + \text{constante}$ Derivando:

$4V_A + V_B = 0 \Leftrightarrow V_B = -4V_A$ Derivando: $a_B = -4a_A$

(15) Seja l o comprimento do fio (constante).



$l = y_C + d + \sqrt{0{,}25^2 + x^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow l = y_C + d + \sqrt{0{,}0625 + 16t^2}$

Derivando:

$V_C + \dfrac{16t}{\sqrt{16t^2 + 0{,}0625}} = 0 \Leftrightarrow$ $\boxed{x = V_B t \Leftrightarrow x = 4t}$

$\Leftrightarrow |V_C| = \dfrac{64t}{\sqrt{256t^2+1}}$ Derivando:

$|a_C| = \dfrac{64\sqrt{256t^2+1}}{65536t^4 + 512t^2 + 1}$ (SI).