Capítulo 9 - Sistemas lineares

Perguntas:

1. (Opção E).
2. (Opção E).
3. (Opção B).
4. (Opção B).
5. (Opção A).

$\omega = \sqrt{(4i)^2} = \sqrt{(-4i)^2} = \sqrt{16} = 4$

$\omega = \frac{2\pi}{T} \Leftrightarrow T = \frac{2\pi}{4} \Leftrightarrow T = \frac{\pi}{2}$

$\lambda^2 - tr(A)\lambda + det(A) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lambda = \frac{4 \pm 2}{2} \Leftrightarrow \lambda = 3 \vee \lambda = 1 \Rightarrow$ nó instável

Problemas:

1. a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$

No Maxima:

Valores próprios: $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = -1$

Vetores próprios: $\vec{v_1} = \hat{i} + 2\hat{j}$ e $\vec{v_2} = \hat{i} - 2\hat{j}$

O ponto de equilíbrio é um ponto de sela.

b) $B = \begin{bmatrix} -3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2 \end{bmatrix}$

No Maxima:

Valores próprios: $\lambda_1 = -4$ e $\lambda_2 = -1$

Vetores próprios: $\vec{v_1} = \hat{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{j}$ e $\vec{v_2} = \hat{i} + \sqrt{2}\hat{j}$

O ponto de equilíbrio é um nó atrativo estável.

c) $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

No Maxima:

Valores próprios: $\lambda = 2$

Vetores próprios: $\vec{v} = \hat{i} - \hat{j}$

O ponto de equilíbrio é um nó impróprio repulsivo instável.

2. a) Sistema conservativo $\rightarrow E_{m_i} = E_{m_f}$

No ponto de altura máxima: $E_{m_i} = \cancel{E_{c_i}}^{0} + U_i = mgh = 10mg$

No ponto de velocidade máxima: $E_{m_f} = E_{c_f} + \cancel{E_{p_f}}^{0} \Leftrightarrow 10mg = \frac{1}{2}mv^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{v^2}{2} = 10 \times 9{,}8 \Leftrightarrow v^2 = 196 \Leftrightarrow v = 14$ m/s

b) No ponto de deformação máxima: $E_m = \cancel{\frac{1}{2}mv^2}^{0} + \frac{1}{2}Ks^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 10mg = \frac{1}{2}Ks^2 \Leftrightarrow 20g = \frac{K}{m}s^2 \Leftrightarrow \frac{K}{m} = \frac{20 \times 9{,}8}{0{,}01^2} \Leftrightarrow \frac{K}{m} = 1960000$

$\Omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{1960000} = 1400\ s^{-1}$

c) $\Omega = \frac{2\pi}{T} \Leftrightarrow \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\Omega} = \frac{\pi}{1400} = 2{,}24$ ms

O tempo que a bola permanece em contacto é metade do período.

③ a) $W_{Fnc} = \Delta E_m \Leftrightarrow F_a \times \Delta x \times \cos\theta = E_{mf} - E_{mi} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \mu_c R_n \times s = U_f + E_{cf} - \cancel{U_i}^0 - \cancel{E_{ci}}^0 \Leftrightarrow \mu_c m g s = \frac{1}{2}Ks^2 + \frac{1}{2}mv^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2 \times 0,4 \times 0,6 \times 9,8 \times s = 50s^2 + 0,6v^2 \Leftrightarrow 0,6v^2 = 4,704s - 50s^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow v = \sqrt{\dfrac{4,704s - 50s^2}{0,6}}$ $\quad E_c = \frac{1}{2}mv^2 \quad U = \frac{1}{2}Ks^2$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial v}\right) - \cancel{\frac{\partial E_c}{\partial s}}^0 + \frac{\partial U}{\partial s} \Leftrightarrow ma = Ks \Leftrightarrow a = \frac{K}{m}s$ $\quad \dot{s} = v \quad \dot{v} = \frac{K}{m}s = \frac{50}{0,6}s$

b) O único ponto de equilíbrio é na origem.

④ a) $E_c = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 \qquad U = U_g + U_e = mgy + \frac{1}{2}Ky^2$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{y}}\right) - \cancel{\frac{\partial E_c}{\partial y}}^0 + \frac{\partial U}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt}(m\dot{y}) + mg + Ky = 0 \Leftrightarrow m\ddot{y} = -mg - Ky \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ddot{y} = -g - \frac{K}{m}y$

b) $\ddot{y} = 0 \Leftrightarrow -g - \frac{K}{m}y = 0 \Leftrightarrow \frac{K}{m}y = -g \Leftrightarrow y = -\frac{mg}{K}$

c) $-g - \frac{K}{m}y = -\frac{K}{m}z \Leftrightarrow z = \frac{mg}{K} + y \qquad \ddot{z} = -\frac{K}{m}z$, que é a equação de um oscilador harmónico simples, com $\Omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$.

⑤ a) $F_r = I - F_g = A(h - x)\rho_{ag}\, g - A h \rho g = 10(16 - x) \times 980 - 10 \times 16 \times 0,9 \times 980 =$
$= 156800 - 9800x - 141120 = 15680 - 9800x$ (com x em cm).

b) $m_c = A h \rho = 10 \times 16 \times 0,9 = 144$ g

$\ddot{x} = \frac{F_r}{m_c} = \frac{15680 - 9800x}{144} = \frac{980}{9} - \frac{1225}{18}x$

c) $\ddot{x} = 0 \Leftrightarrow \frac{980}{9} - \frac{1225}{18}x = 0 \Leftrightarrow x = 1,6$ cm

d) $\frac{980}{9} - \frac{1225}{18}x = -\frac{1225}{18}z \Leftrightarrow z = x - 1,6 \qquad \dot{z} = v \qquad \dot{v} = -\frac{1225}{18}z$

Estas equações correspondem a um sistema linear com a matriz $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1225}{18} & 0 \end{bmatrix}$.

e) $tr(A) = 0 \qquad \det(A) = \frac{1225}{18} \qquad \lambda^2 + \frac{1225}{18} = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm 8,25i$

Ou seja, o ponto de equilíbrio em $x = 1,6$ cm é um centro, e o movimento do cilindro é oscilatório, com $\Omega = 8,25$

$\Omega = \frac{2\pi}{T} \Leftrightarrow T = \frac{2\pi}{8,25} \Leftrightarrow T = 0,762$ s

⑥ $\dot{s} = v \qquad \dot{v} = C_1 s + C_2 v$ $\qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ C_1 & C_2 \end{bmatrix}$ $\quad tr(C) = C_2 \quad \det(C) = -C_1$

$\lambda^2 - C_2\lambda - C_1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{C_2 \pm \sqrt{C_2^2 + 4C_1}}{2}$ Como $C_2^2 + 4C_1 > 0$, os valores próprios são reais.

$\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$, logo são diferentes.

$\lambda_1 \lambda_2 = \frac{1}{4}(C_2^2 - C_2^2 - 4C_1) = -C_1 < 0$, logo, C_1 e C_2 têm sinais opostos.

7 a) Resolvendo as duas equações no Maxima:

$$\dot{I}_1 = \frac{I_1 L_2 R_1 - I_2 M R_2}{M^2 - L_1 L_2} \qquad \dot{I}_2 = -\frac{I_1 M R_1 - I_2 L_1 R_2}{M^2 - L_1 L_2}$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{L_2 R_1}{M^2 - L_1 L_2} & \frac{-M R_2}{M^2 - L_1 L_2} \\ -\frac{M R_1}{M^2 - L_1 L_2} & \frac{L_1 R_2}{M^2 - L_1 L_2} \end{bmatrix}$$

b) $A = \begin{bmatrix} -\frac{8}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{4}{7} \end{bmatrix}$ $\quad \lambda_1 = -1{,}527 \quad \lambda_2 = -0{,}187$

Como ambos os valores próprios são reais e negativos, o ponto de equilíbrio é um nó atrativo estável.

c) $\dot{I}_1 = -\frac{8I_1 - 6I_2}{7} \qquad \dot{I}_2 = \frac{3I_1 - 4I_2}{7}$ (feito no Maxima).

d) $A = \begin{bmatrix} \frac{8}{9} & -\frac{10}{9} \\ -\frac{5}{9} & \frac{4}{9} \end{bmatrix} \qquad \lambda_1 = -0{,}15 \qquad \lambda_2 = 1{,}483$

Como ambos os valores próprios são reais e com diferentes sinais, o ponto de equilíbrio seria um ponto de sela. Não pode descrever um transformador real, porque a instabilidade do sistema implica que com correntes iniciais finitas as correntes aumentariam até ao infinito, o que não é possível.

8 a) $A = \begin{bmatrix} -K_1 & 0 \\ K_1 & -K_2 \end{bmatrix} \qquad \lambda_1 = -K_2 \qquad \lambda_2 = -K_1$

b) Existem dois casos diferentes. Primeiro, se K_1 e K_2 são diferentes, há dois valores próprios, reais e negativos, ou seja, o ponto de equilíbrio é um nó atrativo. Mas se os dois valores são iguais, existe um único valor próprio, real e negativo, pelo que o ponto de equilíbrio é um nó impróprio atrativo.

c) Como o ponto de equilíbrio na origem é atrativo, após um tempo elevado o sistema aproxima-se desse ponto de equilíbrio, ou seja, $N_1 = 0$ e $N_2 = 0$. Se já não existem mais isótopos das espécies A nem B, isso quer dizer que todos os isótopos iniciais transformaram-se na espécie C e, como tal, N_3 será igual ao número total de isótopos das 3 espécies no início, $9N_A$.

9 $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 10+K & K \end{bmatrix} \qquad tr(A) = K \qquad det(A) = 10+K$