# Capítulo 10 – Sistemas não lineares

## Perguntas:

1. (Opção D).
2. (Opção A).
3. (Opção C).
4. (Opção D)
5. (Opção E).

$F_t = ma \Leftrightarrow a = \frac{4s(s-v^2)}{m}$

Ponto de equilíbrio $\rightarrow a = 0 \wedge v = 0$

$4s^2 = 0 \Leftrightarrow s = 0$

$\dot{x} = y^2 \quad \dot{y} = xy \qquad J = \begin{bmatrix} 0 & 2y \\ y & x \end{bmatrix}$

$\dot{x} = xy \quad \dot{y} = y+1 \qquad \vec{u} = (xy, y+1)$

$\vec{u}(1,2) = (2,3)$

## Problemas:

1. a) $F_x = ma \Leftrightarrow a = \frac{-mx(1+v_x)}{m} = -x(1+v_x) \qquad \dot{x} = v_x \quad \dot{v}_x = -x(1+v_x)$

$\begin{cases} v_x = 0 \\ -x(1+v_x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_x = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ O único ponto de equilíbrio é $(0,0)$.

$tr(J_1) = 0 \quad det(J_1) = 1$

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial v_x} \\ \frac{\partial(-x(1+v_x))}{\partial x} & \frac{\partial(-x(1+v_x))}{\partial v_x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(1+v_x) & -x \end{bmatrix} \qquad J_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\lambda^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = -1 \Leftrightarrow \lambda = \pm i$ Como os valores próprios são dois imaginários, o ponto de equilíbrio é um centro.

b) $F_x = ma \Leftrightarrow a = \frac{-mx(x^2+v_x-1)}{m} = -x(x^2+v_x-1) \qquad \dot{x} = v_x \quad \dot{v}_x = -x(x^2+v_x-1)$

$\begin{cases} v_x = 0 \\ -x(x^2+v_x-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_x = 0 \\ x = 0 \vee x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_x = 0 \\ x = 0 \vee x = -1 \vee x = 1 \end{cases}$ $P_1(0,0) \quad P_2(-1,0) \quad P_3(1,0)$

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial v_x} \\ \frac{\partial(-x(x^2+v_x-1))}{\partial x} & \frac{\partial(-x(x^2+v_x-1))}{\partial v_x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3x^2-v_x+1 & -x \end{bmatrix}$$

$J_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad tr(J_1) = 0 \quad det(J_1) = -1 \qquad \lambda^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = 1 \Leftrightarrow \lambda = -1 \vee \lambda = 1$

Como os dois valores próprios são reais e de sinais opostos, o ponto de equilíbrio $(0,0)$ é um ponto de sela.

$J_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \quad tr(J_2) = 1 \quad det(J_2) = 2 \qquad \lambda^2 - \lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1-8}}{2} \Leftrightarrow \lambda = -\frac{\sqrt{7}i-1}{2} \vee \lambda = \frac{\sqrt{7}i+1}{2}$

Como os dois valores próprios são complexos e com parte real positiva, o ponto de equilíbrio $(-1,0)$ é um foco repulsivo.

$J_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \quad tr(J_3) = -1 \quad det(J_3) = 2 \qquad \lambda^2 + \lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{\sqrt{7}i+1}{2} \vee \lambda = \frac{\sqrt{7}i-1}{2}$

Como os dois valores próprios são complexos e com parte real negativa, $(1,0)$ trata-se de um foco atractivo.

2 a) $\dot{x} = y^2+3y-10 \quad \dot{y} = xy+x+12 \quad \vec{u} = (y^2+3y-10, xy+x+12)$

$\vec{u} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} y^2+3y-10=0 \\ xy+x+12=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-5 \vee y=2 \\ 4x=12 \vee 3x=-12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-5 \vee y=2 \\ x=3 \vee x=-4 \end{cases}$

$J = \begin{bmatrix} 0 & 2y+3 \\ y+1 & x \end{bmatrix} \quad A=J(3,-5) = \begin{bmatrix} 0 & -7 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \quad B=J(-4,2) = \begin{bmatrix} 0 & 7 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$

Ponto de equilíbrio $(3,-5)$: $tr(A) = 3 \quad det(A) = -28$

$\lambda^2 - 3\lambda - 28 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 7 \vee \lambda = -4 \Rightarrow$ ponto de sela.

Ponto de equilíbrio $(-4,2)$: $tr(A) = -4 \quad det(A) = -21$

$\lambda^2 + 4\lambda - 21 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 3 \vee \lambda = -7 \Rightarrow$ ponto de sela.

b) $\dot{x} = 3xy^2 - 2y \quad \dot{y} = x - y^2 \quad \vec{u} = (3xy^2-2y, x-y^2)$

$\vec{u} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} 3xy^2-2y=0 \\ x-y^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y^4-2y=0 \\ x=y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \vee y=\sqrt[3]{\frac{2}{3}}=0{,}874 \\ x=0 \vee x=\sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^2}=0{,}763 \end{cases}$

$J = \begin{bmatrix} 3y^2 & 6xy-2 \\ 1 & -2y \end{bmatrix} \quad A=J(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B=J(0{,}763;0{,}874) = \begin{bmatrix} 2{,}292 & 2{,}001 \\ 1 & -1{,}748 \end{bmatrix}$

Ponto de equilíbrio $(0,0)$: $tr(A) = 0 \quad det(A) = 2$

$\lambda^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm\sqrt{2}i \Leftrightarrow \lambda = -\sqrt{2}i \vee \lambda = \sqrt{2}i \Rightarrow$ centro

Ponto de equilíbrio $(0{,}763, 0{,}874)$: $tr(B) = 0{,}544 \quad det(B) = -6{,}007$

$\lambda^2 - 0{,}544\lambda - 6{,}007 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -2{,}194 \vee \lambda = 2{,}738 \Rightarrow$ ponto de sela.

c) $\dot{x} = y^2+2xy+2 \quad \dot{y} = x^2-y^2-2 \quad \vec{u} = (y^2+2xy+2, x^2-y^2-2)$

$\vec{u} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} y^2+2xy+2=0 \\ x^2-y^2-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{2\sqrt{6}}{3} \vee x=\frac{2\sqrt{6}}{3} \\ y=\frac{\sqrt{6}}{3} \vee y=-\frac{\sqrt{6}}{3} \end{cases}$

$J = \begin{bmatrix} 2y & 2y+2x \\ 2x & -2y \end{bmatrix} \quad A=J\left(-\frac{2\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right) = \begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{6}}{3} & -\frac{2\sqrt{6}}{3} \\ -\frac{4\sqrt{6}}{3} & -\frac{2\sqrt{6}}{3} \end{bmatrix} \quad B=J\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{3}\right) = \begin{bmatrix} -\frac{2\sqrt{6}}{3} & \frac{2\sqrt{6}}{3} \\ \frac{4\sqrt{6}}{3} & \frac{2\sqrt{6}}{3} \end{bmatrix}$

Ponto de equilíbrio $\left(-\frac{2\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$: $tr(A) = 0 \quad det(A) = -\frac{4\times6}{9} - \frac{8\times6}{9} = -8$

$\lambda^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -2\sqrt{2} \vee \lambda = 2\sqrt{2} \Rightarrow$ ponto de sela.

Ponto de equilíbrio $\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$: $tr(B) = 0 \quad det(B) = -\frac{4\times6}{9} - \frac{8\times6}{9} = -8$

$\lambda^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -2\sqrt{2} \vee \lambda = 2\sqrt{2} \Rightarrow$ ponto de sela.

d) $\dot{x} = -x+4y-y^3 \quad \dot{y} = -y+4x-x^3 \quad \vec{u} = (-x+4y-y^3, -y+4x-x^3)$

$$\vec{u}=\vec{0} \Rightarrow \begin{cases} -x+4y-y^3=0 \\ -y+4x-x^3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \vee x=\sqrt{5} \vee x=-\sqrt{5} \vee x=\sqrt{3} \vee x=-\sqrt{3} \vee \\ y=0 \vee y=-\sqrt{5} \vee y=\sqrt{5} \vee y=\sqrt{3} \vee x=-\sqrt{3} \vee \end{cases}$$

$$\dots \begin{cases} \vee\ x=(\sqrt{3}-2)\sqrt{\sqrt{3}+2} \vee x=(2-\sqrt{3})\sqrt{\sqrt{3}+2} \vee x=-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} \vee x=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} \\ \vee\ y=-\sqrt{\sqrt{3}+2} \vee y=\sqrt{\sqrt{3}+2} \vee y=-\sqrt{2-\sqrt{3}} \vee y=\sqrt{2-\sqrt{3}} \end{cases}$$

$$J=\begin{bmatrix} -1 & 4-3x^2 \\ 4-3y^2 & -1 \end{bmatrix} \quad J(0,0)=\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \quad J(\sqrt{5},-\sqrt{5})=\begin{bmatrix} -1 & -11 \\ -11 & -1 \end{bmatrix} \quad J(-\sqrt{5},\sqrt{5})=\begin{bmatrix} -1 & -11 \\ -11 & -1 \end{bmatrix}$$

$$J(\sqrt{3},\sqrt{3})=J(-\sqrt{3},-\sqrt{3})=\begin{bmatrix} -1 & -5 \\ -5 & -1 \end{bmatrix} \quad J(\text{restante})=\begin{bmatrix} -1 & -\frac{4+3\sqrt{12}}{2} \\ -2+3\sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}$$

Ponto de equilíbrio $(0,0)$: $tr(J(0,0))=-2$ $\det(J(0,0))=-15$

$\lambda^2+2\lambda-15=0 \Leftrightarrow \lambda=3 \vee \lambda=-5 \Rightarrow$ ponto de sela

Pontos de equilíbrio $(\sqrt{5},-\sqrt{5})$ e $(-\sqrt{5},\sqrt{5})$: $tr(J(\sqrt{5},-\sqrt{5}))=-2$ $\det(J(\sqrt{5},-\sqrt{5}))=-120$

$\lambda^2+2\lambda-120=0 \Leftrightarrow \lambda=-12 \vee \lambda=10 \Rightarrow$ ponto de sela.

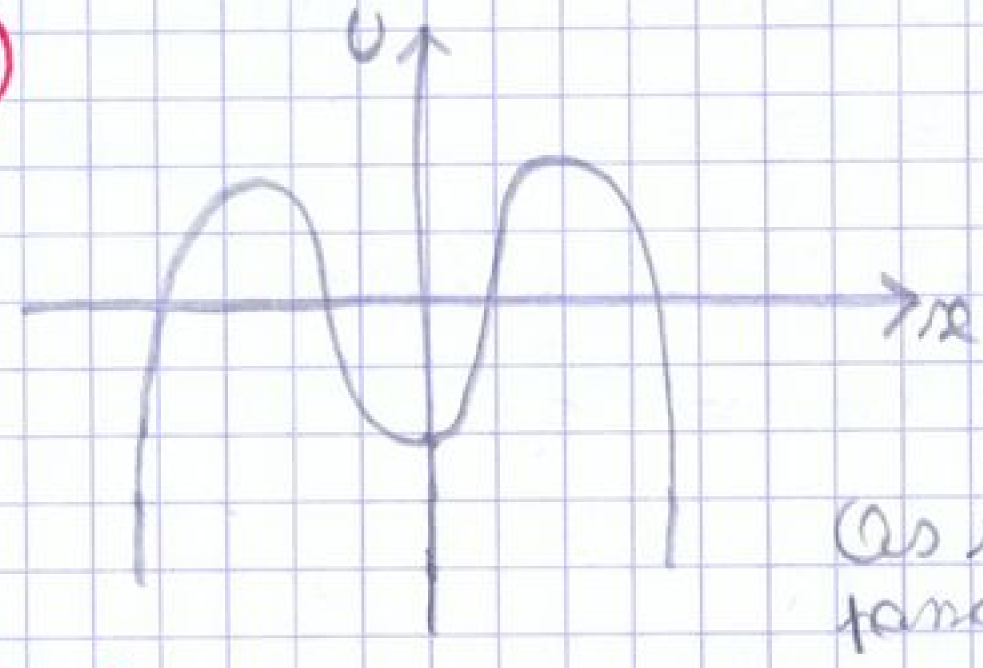
Pontos de equilíbrio $(\sqrt{3},\sqrt{3})$ e $(-\sqrt{3},-\sqrt{3})$: $tr(J(-\sqrt{3},-\sqrt{3}))=-2$ $\det(J(-\sqrt{3},-\sqrt{3}))=-24$

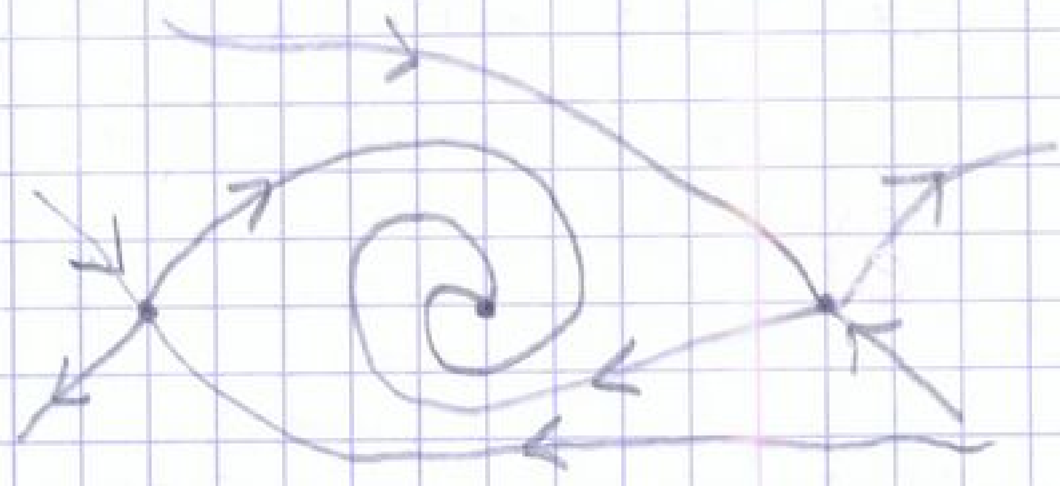
$\lambda^2+2\lambda-24=0 \Leftrightarrow \lambda=-6 \vee \lambda=4 \Rightarrow$ ponto de sela.

Pontos de equilíbrio (restante): $tr(J(\text{restante}))=-2$ $\det(J(\text{restante}))=24$

$\lambda^2+2\lambda+24=0 \Leftrightarrow \lambda=-\sqrt{23}i-1 \vee \lambda=\sqrt{23}i-1 \Rightarrow$ foco atrativo.

3



Os pontos de sela mantêm-se e o centro passa a ser foco estável.

4 a) (feito no Maxima) O pêndulo oscila com amplitude que decresce lentamente.

b) (feito no Maxima)

O pêndulo faz três voltas completas, rodando no sentido horário, e quando passa a quarta vez pela posição de equilíbrio estável, começa a oscilar com amplitude que decresce lentamente.

5 a) $E_c = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I_{cm}\omega_0^2 = \frac{1}{2} m r_g^2 \dot\theta^2 + \frac{1}{2} m r_g^2 \omega_0^2$

$l = \frac{r_g^2}{r} \Leftrightarrow r_g^2 = lr$ $\qquad U = -mgr\cos\theta$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial\dot\theta}\right) - \cancel{\frac{\partial E_c}{\partial\theta}}^{\,0} + \frac{\partial U}{\partial\theta} = 0 \Leftrightarrow \cancel{m} r_g^2\ddot\theta = -\cancel{m}gr\sin\theta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ddot\theta = -\frac{gr\sin\theta}{r_g^2} \Leftrightarrow \ddot\theta = \frac{-gr\sin\theta}{lr} \Leftrightarrow \ddot\theta = -\frac{g\sin\theta}{l}$

b) (não interessa)

c) (não interessa)

d) (não interessa)

6 (não interessa)

7 a) Seja $v = \dot x$ $\qquad \dot x = v \qquad \dot v = 4 - v^2 - 4x^2$

b) $\begin{cases} v = 0 \\ 4 - v^2 - 4x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 0 \\ 4x^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 0 \\ x = -1 \vee x = 1 \end{cases}$

Pontos de equilíbrio: $(-1,0)$ e $(1,0)$

c) $J = \begin{bmatrix} \frac{dv}{dx} & \frac{dv}{dv} \\ \frac{d(4-v^2-4x^2)}{dx} & \frac{d(4-v^2-4x^2)}{dv} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -8x & -2v \end{bmatrix}$

d) $A = J(-1,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}$ $\qquad tr(A) = 0 \qquad det(A) = -8$

$\lambda^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = 8 \Leftrightarrow \lambda = \pm 2\sqrt2$

Como os valores próprios são reais, de sinais opostos, conclui-se que o ponto $(-1,0)$ é um ponto de sela.

$B = J(1,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -8 & 0 \end{bmatrix}$ $\qquad tr(B) = 0 \qquad det(B) = 8$

$\lambda^2 + 8 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = \pm 2\sqrt2 i$

Como os valores próprios são imaginários, conclui-se que o ponto $(1,0)$ é um centro.

e) No Maxima: plot(rk([v,4-v^2-4x^2],[x,v],[1,1],[t,0,2,0.1]));

plot(rk([v,4-v^2-4x^2],[x,v],[1,1],[t,0,2,0.05]));

R: $x = 0{,}5859$ e $\dot x = 0{,}8277$.

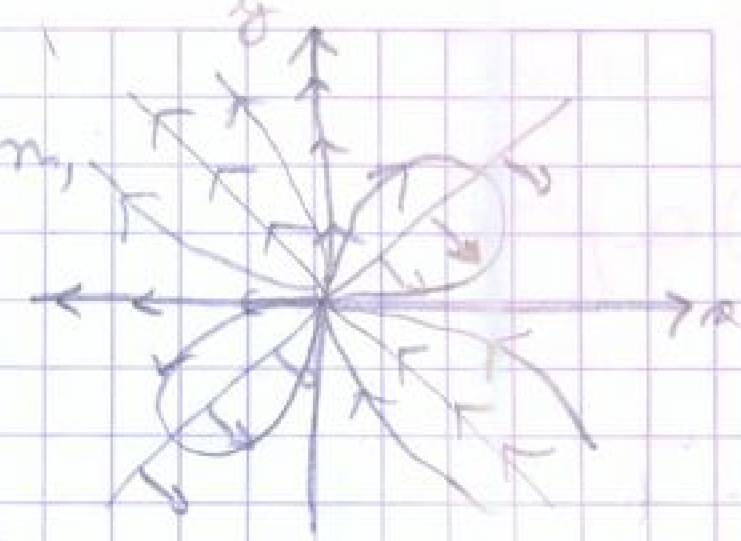
8 a) Eixo dos x: $y = 0$ $\qquad \vec u = (-x^4, 0) \Rightarrow \hat u = (-1,0) = -\hat\imath$

Eixo dos y: $x = 0$ $\qquad \vec u = (0, y^4) \Rightarrow \hat u = (0,1) = \hat\jmath$

b) Em $y = x$: $\vec u = (x^4, -x^4)$ $\qquad \hat u = \frac{(x^4, -x^4)}{\sqrt2 x^4} = \frac{1}{\sqrt2}(1,-1) = \frac{1}{\sqrt2}(\hat\imath - \hat\jmath)$

Em $y = -x$: $\vec u = (-3x^4, 3x^4)$ $\qquad \hat u = \frac{(-3x^4, 3x^4)}{3\sqrt2 x^4} = \frac{1}{\sqrt2}(-\hat\imath + \hat\jmath)$

c) Como há curvas que se aproximam da origem e outras que se afastam, a origem é ponto de sela.




d) Não existem ciclos ou órbitas heteroclínicas. Existe um número infinito de órbitas homoclínicas, todas as curvas de evolução do primeiro e terceiro quadrante são órbitas homoclínicas.

9 a) $F_x = -\left(\frac{k_y}{2}y^2 + \frac{k_x}{2}x^2\right)' = -k_x \times x \qquad \ddot{x} = -\frac{k_x}{m}x$

$F_y = -\left(\frac{k_y}{2}y^2 + \frac{k_x}{2}x^2\right)' = -k_y \times y \qquad \ddot{y} = -\frac{k_y}{m}y$

b) (não interessa)

c) (não interessa)

d) (não interessa)

e) (não interessa)

10 a) Pelo Maxima: $\ddot{x} = -\frac{4\pi^2 x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \qquad \ddot{y} = -\frac{4\pi^2 y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$

b) No Maxima.

c) No Maxima.

d) (não interessa).