Capítulo 11 - Ciclos limite e dinâmica populacional

$2x^2-4x=0 \Rightarrow x=0 \vee x=2$

$\dfrac{\partial(x(3-y))}{\partial y}=-x \qquad \dfrac{\partial(y(x-5))}{\partial x}=y$

Perguntas:

1. (Opção D).
2. (Opção D).
3. (Opção A).
4. (Opção E).
5. (Opção A).

Problemas:

1. (não interessa)
2. (não interessa)
3. $\vec{u}=\left(x(2-y),\ \frac{y}{2}(x-3)\right)$ $\quad \begin{cases} x(2-y)=0 \\ \frac{y}{2}(x-3)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \vee y=2 \\ \Downarrow \qquad \Downarrow \\ y=0 \vee x=3 \end{cases}$

Os pontos de equilíbrio são $(0,0)$ e $(3,2)$.

$$J=\begin{bmatrix} 2-y & -x \\ \frac{y}{2} & \frac{x-3}{2} \end{bmatrix} \qquad J(0,0)=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \qquad J(3,2)=\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$tr(J(0,0))=\frac{1}{2} \quad det(J(0,0))=-3 \quad \lambda^2-\frac{1}{2}\lambda-3=0 \Leftrightarrow \lambda=-\frac{3}{2} \vee \lambda=2$

Como os valores próprios são reais e de sinais opostos, $(0,0)$ é ponto de sela.

$tr(J(3,2))=0 \quad det(J(3,2))=3 \quad \lambda^2+3=0 \Leftrightarrow \lambda=\pm\sqrt{3}\,i$

Como os valores próprios são imaginários, $(3,2)$ é um centro.

O estado limite é um ciclo, em que as populações das duas espécies oscilam, sem que nenhuma seja extinta.

4. O termo $-2y$ na expressão de $\dot{x}$ implica que a população y faz diminuir a população x. E o termo $5x$ na expressão de $\dot{y}$ implica que a população x faz aumentar a população y. Logo, trata-se de um sistema predador presa, onde x são as presas e y os predadores.

Pontos de equilíbrio:

$\vec{u}=\left(x(1-x-2y),\ y(1+5x-y)\right) \qquad (0,0),\ (1,0),\ (0,1),\ \cancel{\left(-\frac{1}{11}, \frac{6}{11}\right)} \rightarrow$ só interessam valores positivos

$$J=\begin{bmatrix} -2y-2x+1 & -2x \\ 5y & -2y+5x+1 \end{bmatrix}$$

$(0,0) \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda=1 \vee \lambda=2 \Rightarrow$ nó repulsivo.

$(1,0) \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda=-1 \vee \lambda=6 \Rightarrow$ ponto de sela.

$(0,1) \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda=-1 \Rightarrow$ nó impróprio atrativo.

Se inicialmente existirem predadores $(y>0)$, o sistema evolui sempre até extinguirem-se todas as presas, ficando a população de predadores igual a uma unidade.

(5) a) Exclusão mútua, com extinção de y e $x \to 10$.

b) Coexistência, com $x \to \frac{20}{3}$ e $y \to \frac{100}{3}$. O ponto de equilíbrio é estável.

c) Coexistência no ponto instável $\left(\frac{80}{7}, \frac{24}{7}\right)$. O sistema pode terminar com uma das espécies extintas e $x \to 20$ ou $y \to 12$.

d) Extinção, com extinção da espécie y e $x \to 100$.

(6) $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta \\ \dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta \end{cases}$ Substituindo:

$$\begin{cases} \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta = r\sin\theta + r^3\cos\theta \\ \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta = -r\cos\theta + r^3\sin\theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{r} = r^3 \\ \dot{\theta} = -1 \end{cases}$$

Fora da origem, r é positivo, logo $\dot{r} = r^3$ é sempre positivo. Ou seja, o estado do sistema afasta-se sempre da origem (r aumenta). Enquanto o estado se afasta da origem, dá várias voltas no sentido negativo (sentido dos ponteiros do relógio, pois $\dot{\theta} = -1$. Logo, a origem é um foco repulsivo e não existe nenhum ciclo limite.

(7) a) $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta \\ \dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta \end{cases}$ Substituindo:

$$\begin{cases} \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta = r\cos\theta - r\sin\theta - r^3\cos^3\theta - r^3\cos\theta\sin^2\theta \\ \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta = r\cos\theta + r\sin\theta - r^3\cos^2\theta\sin\theta - r^3\sin^3\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{r} = r - r^3 \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases}$$

b) Existe uma única raiz diferente de zero, em $r = 1$, e r aumenta se for menor que 1 e diminui se for maior que 1. Logo, existe um único ciclo limite, atrativo, que é uma circunferência de raio 1.

c) O ciclo limite é a circunferência de raio 1 e centro na origem, logo a equação é $x^2 + y^2 = 1$

d) (feito no Maxima)

(8) $J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\det(J) = -1$ Como o determinante é negativo em qualquer ponto, não podem haver ciclos limite.

(9) Existem infinitos ciclos limite atrativos e repulsivos.

(10) (não interessa).