Capítulo 7 - Sistemas dinâmicos

Perguntas:

1) (Opção B)
2) (Opção E).
3) (Opção B).
4) (Opção E)
5) (Opção A).

$U = -\int_0^s F\,ds \Leftrightarrow F = -(3s^2)' = -3s^2$

$F = ma \Leftrightarrow a = \frac{-3s^2}{3} = -s^2$

$\vec{u} = v\,\hat{e}_s - s^2\,\hat{e}_v$

Problemas:

(No máximo)

1) a) equação de movimento $\rightarrow \ddot{y} = -9{,}8$

equações de evolução $\rightarrow \dot{y} = v \quad \dot{v} = -9{,}8$

O ponto onde cada curva intersecta o eixo y corresponde ao instante em que a bola atinge a sua altura máxima e a velocidade é nula.

Os dois pontos onde a curva intersecta o eixo v são o instante inicial em que a bola é lançada desde $y=0$, com velocidade positiva, e o instante em que a bola cai regressando a $y=0$, com velocidade negativa.

b) Quando a curva de evolução chega até ao ponto $y=0$ com velocidade negativa (a bola bate no chão), a curva continua num arco elíptico do lado negativo de y, que corresponde à ação da força elástica enquanto a bola está em contacto com o chão, sendo deformada e recuperando logo a sua forma esférica inicial (oscilador harmónico simples, admitindo que não há perdas de energia durante a deformação). O arco elíptico descreve metade de uma elipse, terminando no ponto inicial da curva de evolução, com $y=0$ e velocidade positiva e a curva repete-se indefinidamente. Quanto mais rígida for a bola, menor será o semieixo do arco elíptico no lado negativo de y.

2) Para determinar se um sistema com um grau de liberdade é ou não autónomo, há que conhecer a expressão da aceleração tangencial. No problema 1, esta é desconhecida, logo nada se pode concluir.

(2) $\rightarrow a_t(t) = 12t - 12$ (4) $\rightarrow a_t(t) = 9 - 3t^2$ (5) $\rightarrow a_t(t) = 3t^2 - 2t - 2$ (11) $\rightarrow a_t(t) = 15t - 12t^4$

No problema 9: $v^2 = b - ms \Rightarrow 2v\frac{dv}{ds} = -m \Rightarrow a_t = v\frac{dv}{ds} = -\frac{m}{2}$

Logo, os problemas 2, 4, 5 e 11 não são autónomos (nem conservativos) pois as expressões da aceleração dependem do tempo.
Nos problemas 3, 6, 7, 8, 9 e 10 os sistemas são autónomos. $\dot{s} = v \quad \dot{v} = f(s,v)$

divergência: $\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial f(s,v)}{\partial v}$ Unicamente no problema 10 a_t depende de v, logo a divergência é diferente de 0, logo o sistema não é conservativo.

Nos problemas 3, 6, 7, 8, 9 o sistema é conservativo.

(No máximo) $\rightarrow$ retrato de fase do problema 6.

③ a) $a_t = -4s \qquad \dot{s} = v \qquad \dot{v} = -4s \qquad \vec{u} = (v, -4s)$

$$\begin{cases} v = 0 \\ -4s = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 0 \\ s = 0 \end{cases}$$

Existe apenas um ponto de equilíbrio estável, em $s=0$ e $v=0$. Todas as curvas de evolução são ciclos e não existem órbitas.

b) $a_t = -4s(1+0{,}015s^2) \qquad \dot{s} = v \qquad \dot{v} = -4s(1+0{,}015s^2) \qquad \vec{u} = (v, -4s(1+0{,}015s^2))$

$$\begin{cases} v = 0 \\ -4s(1+0{,}015s^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 0 \\ s = 0 \lor \underbrace{0{,}015s^2 = -1}_{\text{(impossível)}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 0 \\ s = 0 \end{cases}$$

Existe apenas um ponto de equilíbrio estável, em $s=0$ e $v=0$, todas as curvas de evolução são ciclos e não existem órbitas.

c) $a_t = -4s(1-0{,}015s^2) \qquad \dot{s} = v \qquad \dot{v} = -4s(1-0{,}015s^2) \qquad \vec{u} = (v, -4s(1-0{,}015s^2))$

$$\begin{cases} v = 0 \\ -4s(1-0{,}015s^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 0 \\ s = 0 \lor 0{,}015s^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 0 \\ s = 0 \lor s = -8{,}16 \lor s = 8{,}16 \end{cases}$$

Existe um ponto de equilíbrio estável em $s=0$ e $v=0$, e dois pontos de equilíbrio instáveis em $s=-8{,}16$ e $v=0$ e em $s=8{,}16$ e $v=0$. Existe uma órbita heteroclínica e todas as curvas de evolução no seu interior são ciclos. Não existe nenhuma órbita homoclínica.

④ a) $F = m\,a_t \Leftrightarrow a_t = \dfrac{F}{m} \Leftrightarrow a_t = x^3 - 4x \qquad \dot{x} = v \qquad \dot{v} = x^3 - 4x$

$$\vec{u} = (v, x^3-4x) \qquad \vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 0 \\ x^3 - 4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 0 \\ x(x^2-4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 0 \\ x = 0 \lor x = -2 \lor x = 2 \end{cases}$$

No espaço de fase (x, v), as coordenadas dos pontos de equilíbrio são $(-2,0)$, $(0,0)$ e $(2,0)$.

b) $U = -\int F\,dx = -\int x^3 - 4x\,dx = -\left(\dfrac{x^4}{4} - \dfrac{4x^2}{2}\right) = 2x^2 - \dfrac{x^4}{4}$

$$E_m = E_c + U = \frac{1}{2}mv^2 + 2x^2 - \frac{x^4}{4} = \frac{v^2}{2} + 2x^2 - \frac{x^4}{4}$$

c) Equações de evolução: $\dot{x} = v \qquad \dot{v} = x^3 - 4x$

Divergência: $\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial(x^3-4x)}{\partial v} = 0$ Trata-se de um sistema autónomo e conservativo, pois o tempo não aparece explicitamente no lado direito das equações, e porque a divergência da velocidade de fase é 0. A função hamiltoniana é, neste caso, a energia mecânica.

d) No ponto $x=0$, a força é positiva no lado esquerdo ou seja, aponta no sentido de $x=0$, e negativa no lado direito, também no sentido de $x=0$. Logo o ponto $(0,0)$ no espaço de fase é estável.

Nos pontos $x=-2$ e $x=2$, a força é negativa no lado esquerdo do ponto e positiva no lado direito, ou seja, na vizinhança do ponto de equilíbrio, a força aponta no sentido oposto do ponto, logo os pontos $(-2,0)$ e $(2,0)$ no espaço de fase são instáveis.

e) Se $0 < E_m < 4$, em $-2 < x < 2$, o sistema pode estar a oscilar à volta do ponto de equilíbrio em $x=0$. Logo existem infinitos ciclos.
Se $E_m = 4$, existem 7 possíveis movimentos:

1) $x_0 = -2 \lor x_0 = 2$ e $v_0 = 0$ e $a_0 = 0 \Rightarrow$ repouso
2) $-2 < x_0 < 2$ e $v_0 > 0$, a partícula aproxima-se de $x=2$
3) $-2 < x_0 < 2$ e $v_0 < 0$, a partícula aproxima-se de $x=-2$
4) $x_0 > 2$ e $v_0 > 0 \Rightarrow x \to +\infty$
5) $x_0 > 2$ e $v_0 < 0 \Rightarrow x \to 2$
6) $x_0 < -2$ e $v_0 > 0 \Rightarrow x \to -2$
7) $x_0 < -2$ e $v_0 < 0 \Rightarrow x \to -\infty$

Existem infinitos ciclos e uma órbita heteroclínica.

5 a) $U = -\int F\,dx \Leftrightarrow F = -\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right) = -(x + x^2) = -x - x^2$

b) $F = ma \Leftrightarrow a = F = -x - x^2 \qquad \dot{x} = v \qquad \dot{v} = -x - x^2$

$\vec{u} = (v, -x - x^2) \qquad \vec{u} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} v = 0 \\ -x - x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 0 \\ -x(1+x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 0 \\ x = 0 \vee x = -1 \end{cases}$

Os pontos de equilíbrio no espaço de fase (x, v) são os pontos $(0,0)$ e $(-1,0)$.

c) O ponto $(0,0)$ é estável e o ponto $(-1,0)$ é instável.

d) Existem infinitos ciclos e uma órbita homoclínica.

6 a) $\vec{u} = (y - y^3, -x - y^2) \qquad \vec{u} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} y - y^3 = 0 \\ -x - y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(1 - y^2) = 0 \\ \text{———} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \vee y = -1 \vee y = 1 \\ \quad\downarrow \qquad\quad \downarrow \\ x = 0 \vee x = -1 \end{cases}$ Os pontos de equilíbrio são $(0,0)$, $(-1,1)$ e $(-1,-1)$.

Existem infinitos ciclos em torno da origem e uma órbita heteroclínica entre os pontos $(-1,1)$ e $(-1,-1)$.

b) As duas parábolas são realmente 2 pontos de equilíbrio e 6 curvas de evolução diferentes, que se aproximam assimptoticamente ou se afastam destes dois pontos sem tocá-los. As curvas de evolução nunca podem cruzar-se.

7 a) $F_t = m a_t \Leftrightarrow a_t = \frac{F_t}{m} \Leftrightarrow a_t = s + s^2 \qquad \dot{s} = v \qquad \dot{v} = s + s^2$

$\vec{u} = (v, s + s^2) \qquad \vec{u} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} v = 0 \\ s + s^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 0 \\ s(1+s) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 0 \\ s = 0 \vee s = -1 \end{cases}$

Os pontos de equilíbrio são $(0,0)$ e $(-1,0)$. O ponto $(0,0)$ é instável e o $(-1,0)$ é estável.

b) $U = -\int F_t\,ds = -\int s + s^2\,ds = -\left(\frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{3}\right) = -\frac{s^2}{2} - \frac{s^3}{3}$

$U(0) = -\frac{0}{2} - \frac{0}{3} = 0$ J $\qquad U(-1) = -\frac{(-1)^2}{2} - \frac{(-1)^3}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = -\frac{1}{6}$ J

c) (feito no Maxima).

d) $-\frac{s^2}{2} - \frac{s^3}{3} = 0 \Leftrightarrow -s^2\left(\frac{1}{2} + \frac{s}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow s = 0 \vee \frac{s}{3} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow s = 0 \vee s = -\frac{3}{2}$

O corpo acelera no sentido positivo de s, começa a abrandar a sua velocidade em $s = -1$ e acaba por parar em $s = 0$, ficando em repouso.

8 a) $F_t = m a_t \Leftrightarrow a_t = \frac{F_t}{m} \Leftrightarrow a_t = -\frac{ks}{m} + \frac{a}{ms^3} \qquad \dot{s} = v \qquad \dot{v} = -\frac{ks}{m} + \frac{a}{ms^3}$

$\vec{u} = \left(v, -\frac{ks}{m} + \frac{a}{ms^3}\right) \qquad \vec{u} = 0 \Rightarrow \begin{cases} v = 0 \\ \frac{ks}{m} = \frac{a}{ms^3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 0 \\ ks^4 = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 0 \\ s = \pm\sqrt[4]{\frac{a}{k}} \end{cases}$

$U = -\int -ks + \frac{a}{s^3} = \frac{ks^2}{2} + \frac{a}{2s^2}$

Ao traçar o gráfico de F_t, para $a = 1$ e $k = 1$, por exemplo, conclui-se que ambos são estáveis.

b) O movimento é sempre oscilatório, em s positiva ou negativa, de acordo com o estado inicial.

c) $\vec{u} = \left(v, -s + \frac{1}{s^3}\right)$

9 a) $\dot{\theta} = \omega$ e $\dot{\omega} = -\frac{g}{l}\sin\theta$

b) $\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial \omega} \Leftrightarrow \omega = \frac{\partial H}{\partial \omega} \Leftrightarrow \int dH = \int \omega\, d\omega \Leftrightarrow h_1 = \frac{\omega^2}{2}$

$$\dot{\omega} = -\frac{\partial H}{\partial \theta} \Leftrightarrow -\frac{g}{l}\sin\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} \Leftrightarrow \frac{g}{l}\int \sin\theta\, d\theta = \int dH \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow h_2 = -\frac{g}{l}\cos\theta \qquad H(\theta,\omega) = \frac{\omega^2}{2} - \frac{g}{l}\cos\theta$

c) $U = -\frac{g}{l}\cos\theta$ A energia potencial é igual a uma constante negativa vezes $\cos\theta$. Assim sendo, o seu gráfico tem a mesma forma do gráfico de $-\cos\theta$, mas oscila entre $-\frac{g}{l}$ e $\frac{g}{l}$, em vez de -1 e 1. O gráfico tem mínimos (pontos de equilíbrio estável) em $0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$, e pontos máximos (pontos de equilíbrio instável) em $\pm\pi, \pm 3\pi, \ldots$. Qualquer valor de H entre $-\frac{g}{l}$ e $\frac{g}{l}$ produz um segmento horizontal que corta o gráfico de U em dois pontos e, assim sendo, corresponde a um ciclo. A reta horizontal $H = \frac{g}{l}$ passa por todos os pontos máximos de U e, portanto, corresponde a uma órbita heteroclínica entre $-\pi$ e π, e outra órbita heteroclínica entre 3π e 5π, etc. Não existem órbitas homoclínicas porque qualquer segmento na reta $H = \frac{g}{l}$ começa e termina em dois pontos máximos diferentes e não intersecta a curva U em nenhum outro ponto.

10 a) $U = -\int F\, dx \Leftrightarrow F = -(U)' \Leftrightarrow F = 2U_0 x(ax^2-1)e^{-ax^2}$

b) $F = ma \Leftrightarrow a = \frac{F}{m} \Leftrightarrow a = \frac{2U_0 x(ax^2-1)e^{-ax^2}}{m}$

$\dot{x} = v \qquad \dot{v} = \frac{2U_0 x(ax^2-1)e^{-ax^2}}{m} \qquad \vec{u} = \left(v, \frac{2U_0 x(ax^2-1)e^{-ax^2}}{m}\right)$

$$\vec{u} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} v = 0 \\ \frac{2U_0 x(ax^2-1)e^{-ax^2}}{m} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 0 \\ x(ax^2-1)e^{-ax^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v = 0 \\ x(ax^2-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 0 \\ x = 0 \vee x = \pm\frac{1}{\sqrt{a}} \end{cases} \qquad \underset{\text{mínimo}}{U(0) = 0} \qquad U\left(-\frac{1}{\sqrt{a}}\right) = U\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right) = \underset{\text{máximo}}{\frac{U_0}{ea}}$$

Equilíbrio estável em $x=0$ e equilíbrio instável em $x = -\frac{1}{\sqrt{a}}$ e $x = \frac{1}{\sqrt{a}}$

c) $U = x^2 e^{-x^2}$ (feito no Maxima).

d)

$\vec{u} = \left(v, 2x(x^2-1)e^{-x^2}\right)$ (feito no Maxima).