Capítulo 6 – Trabalho e energia

Perguntas:

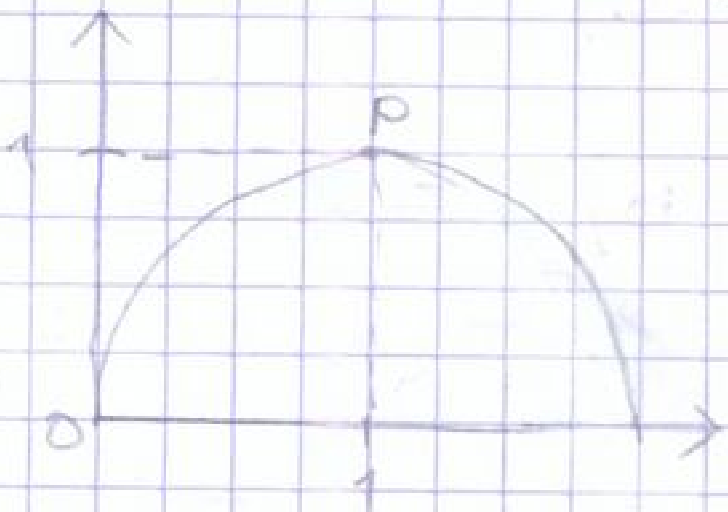
1 (Opção C).
2 (Opção B)
3 (Opção B).
4 (Opção E).
5 (Opção D).

$\vec{v} = 4t\,\hat{i} + 5t^2\,\hat{j}$ $\quad \vec{v}(2) = 8\hat{i} + 20\hat{j}$

$(8,20).(-5,2) = -40 + 40 = 0$

$\int_0^{0,20} 1,6 \times \cos 60° = 0,16\,J = 160\,mJ$

$E_m = E_c + U \Leftrightarrow E_c = 2 - (-3) = 5\,J$



Problemas:

1 $(x-1)^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow y^2 = 1 - (x-1)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = \sqrt{1 - (x^2 - 2x + 1)} \Leftrightarrow y = \sqrt{2x - x^2}$

$\int_0^1 (3x + y)\,\hat{i}\,dx = \int_0^1 \left(3x + \sqrt{2x - x^2}\right) dx = \frac{\pi + 6}{4} \simeq 2,29$

2 a) $U_g = -\int \vec{F_g} \cdot d\vec{r} = -\int -\frac{GMm}{r^2}\,dr = \int \frac{GMm}{r^2}\,dr = -\frac{GMm}{r}$

b) A série de Taylor de U_g é: $-\frac{GMm}{r_0} + \frac{GMm}{r_0^2}(r - r_0) - \dots$

$(r - r_0)$ corresponde à altura z desde a superfície da Terra (r_0 é o raio da Terra).

$\frac{GM}{r_0^2}$ é constante, igual a g.

Ignorando o resto da série, obtém-se $U_g \simeq mgz$.

3 a) $E_{m_1} = E_{c_5} + E_{pH} + E_{pV} = \frac{1}{2} \times 74,5 \times 9^2 + 70 \times 9,8 \times 1 + 4,5 \times 9,8 \times 1,5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow E_{m_1} = 3769,4\,J$ Na 3ª fase, o atleta e a vara estão em repouso.

$E_{m_3} = E_{pH} + E_{pV} = 70 \times 9,8 \times 5,8 + 4,5 \times 9,8 \times 2,45 = 4086,8\,J$

$W = E_{m_3} - E_{m_1} = 4086,8 - 3769,4 = 317,4\,J$

b) $E_{m_2} = E_{m_1} = 3769,4$ (sistema conservativo).

Na 2ª fase, o atleta e a vara estão em repouso.

$E_{m_2} = E_{pH} + E_{pV} \Leftrightarrow 3769,4 = 70 \times 9,8 \times h + 4,5 \times 9,8 \times 2,45 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow h = 5,337\,m$ $\quad W = F \times \Delta r \Leftrightarrow F = \frac{W}{\Delta r} \Leftrightarrow$

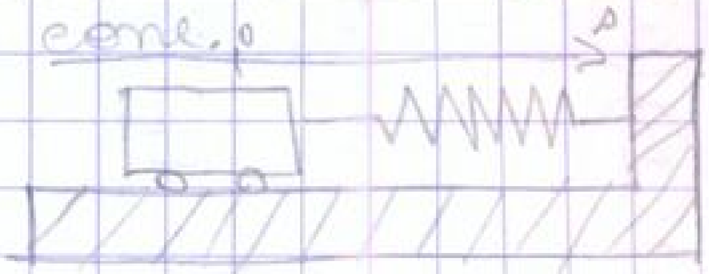
$\Leftrightarrow F = \frac{317,4}{5,8 - 5,337} \Leftrightarrow F = 686\,N$

4) $\Delta E_m = \cancel{\Delta E_c}^{\,0} + \Delta E_p = E_{pf} - E_{pi} = mg\,h_f - mg\,h_i =$

$= 0{,}3 \times 9{,}8 \times (-0{,}05) - 0{,}3 \times 9{,}8 \times 0{,}30 = -1{,}029\,J = W_{F_{nc}}$

$W_{F_{nc}} = \int_{-0{,}05}^{0} F_b \, dx \Leftrightarrow -1{,}029 = \int_{-0{,}05}^{0} -Kx^2 \, dx \Leftrightarrow K = 24696\ N/m^2$

A força do bloco não é conservativa, pois só atua quando o cone está a penetrar (se o cone voltasse a subir o bloco já não produzia nenhuma força sobre o cone.)



5) a) É 5 cm

b) $\Omega = 2\pi f = 2\pi \times \left(\frac{1}{1{,}2}\right) \simeq 5{,}236$

$\Omega = \sqrt{\frac{K}{m}} \Leftrightarrow 5{,}236 = \sqrt{\frac{K}{0{,}450}} \Leftrightarrow K = 12{,}34\ N/m$

c) $E_{m_i} = \cancel{E_c}^{\,0} + U_e = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} \times 12{,}34 \times 0{,}05^2 = 0{,}015425\,J$

Sistema conservativo $\rightarrow E_{m_i} = E_{m_f}$

$E_{m_f} = E_c + \cancel{U_e}^{\,0} \Leftrightarrow 0{,}015425 = \frac{1}{2} m v^2 \Leftrightarrow v^2 = \frac{2 \times 0{,}015425}{0{,}450} \Leftrightarrow v_f = 0{,}262\ m/s$
$= 26{,}2\ cm/s$

6) a) $E_m = E_c + U = \frac{1}{2} m v^2 + mgh$ (Considerando $\downarrow \oplus$)

$s = l\theta \qquad v = \dot{s} = (l\theta)' = l\dot{\theta} \qquad v^2 = l^2 \dot{\theta}^2$

$E_m = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 - mgl\cos\theta$ c.q.p.

(derivando)

b) $E_m = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 + mgl\cos\theta \Rightarrow 0 = m l^2 \dot{\theta}\ddot{\theta} + \dot{\theta}\, mgl\sin\theta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cancel{m} l^2 \cancel{\dot{\theta}} \ddot{\theta} = -\cancel{\dot{\theta}}\, \cancel{m} g l \sin\theta \Leftrightarrow \ddot{\theta} = -\frac{g\,l\sin\theta}{l^2} \Leftrightarrow \ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta$ c.q.p

7) a) $s_{cm} = (R-r)\theta \qquad v_{cm} = \dot{s} = (R-r)\dot{\theta} \qquad E_c = \frac{1}{2} m v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_{cm}\omega^2$

$\omega = \frac{v_{cm}}{r} = \frac{(R-r)\dot{\theta}}{r} \qquad I_{cm} = \frac{2}{5} m r^2$

$E_c = \frac{1}{2} m (R-r)^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} m r^2 \times \left(\frac{(R-r)\dot{\theta}}{r}\right)^2 \Leftrightarrow$ c.q.p.

$\Leftrightarrow E_c = \frac{1}{2} m (R-r)^2 \dot{\theta}^2 + \frac{2}{10} m r^2 \times \frac{(R-r)^2 \dot{\theta}^2}{r^2} \Leftrightarrow E_c = \frac{7}{10} m (R-r)^2 \dot{\theta}^2$

(derivando)

b) $E_m = E_c + E_p \Leftrightarrow E_m = \frac{7}{10} m (R-r)^2 \dot{\theta}^2 - mg(R-r)\cos\theta \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 = \frac{7}{5} m (R-r)^2 \dot{\theta}\ddot{\theta} + mg(R-r)\dot{\theta}\sin\theta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{7}{5} \cancel{m} (R-r)^2 \dot{\theta}\ddot{\theta} = -\cancel{m} g (R-r)\dot{\theta}\sin\theta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ddot{\theta} = -\frac{5}{7} \times \frac{g\sin\theta}{R-r} \Leftrightarrow \ddot{\theta} = -\frac{5g}{7(R-r)}\sin\theta$

c) A energia mínima é quando a esfera fica no ponto mais baixo da calha ($\theta = 0$) e com velocidade nula ($\dot{\theta} = 0$):

$$E_{mín} = -mg(R-r)$$

A energia máxima é quando a esfera chega até ao ponto A ($\theta = 90^\circ$) com velocidade nula ($\dot{\theta} = 0$):

$E_{max} = 0$ R: Está entre $-mg(R-r)$ e 0.

d) $\ddot{\theta}_1 = -\frac{5}{7} \times \frac{g}{R} \sin\theta$ $\ddot{\theta}_2 = -\frac{g}{\ell} \sin\theta$

O valor absoluto de $\ddot{\theta}$ é menor num fator $\frac{5}{7}$, pois parte da energia potencial gravítica é transformada em energia cinética de rotação da esfera. A energia cinética de rotação é sempre $\frac{2}{5}$ da energia cinética de translação, independentemente do valor de r. Assim sendo, no limite $r \to 0$ também $\frac{2}{7}$ da energia gravítica são convertidos em energia de rotação e apenas os restantes $\frac{5}{7}$ fazem aumentar θ.

8 $E_{m_A} = \cancel{E_{c_A}}^{0} + \cancel{U_{p_A}}^{0} + U_{e_A} = \frac{1}{2} K s^2 = \frac{1}{2} \times 600 \times (0{,}40 - 0{,}30)^2 \Leftrightarrow$

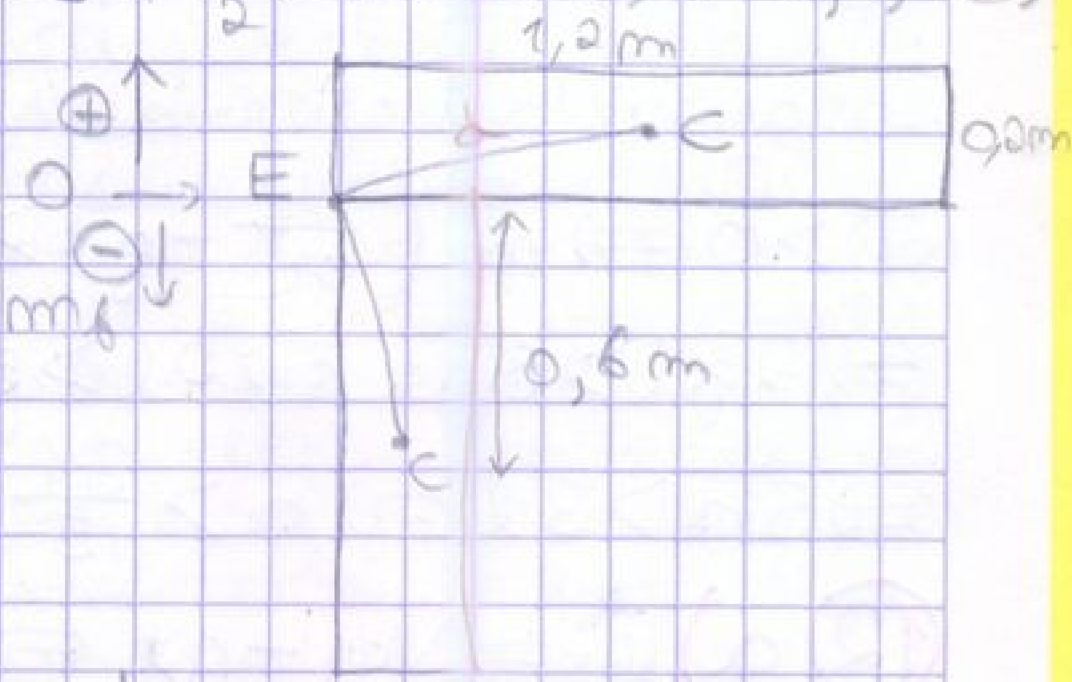
$\Leftrightarrow E_{m_A} = 3\,J$

$W_{F_{m.e.}} = \Delta E_m \Leftrightarrow 60 \times 0{,}30 \times \cos 35^\circ = E_{m_B} - 3 \Leftrightarrow E_{m_B} = 17{,}745$

$E_{m_B} = E_{c_B} + U_{p_B} + U_{e_B} \Leftrightarrow$ CA: $0{,}30^2 + 0{,}40^2 = h^2 \Leftrightarrow h = 0{,}5$

$17{,}745 = \frac{1}{2} \times 0{,}080 \times v_B^2 + 0{,}080 \times 9{,}8 \times 0{,}30 + \frac{1}{2} \times 600 \times (0{,}5 - 0{,}3)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow v_B = 11{,}74\ m/s$



9 Sistema conservativo $\rightarrow E_{m_i} = E_{m_f}$

$E_{m_i} = \cancel{E_{c_i}}^{0} + U_i = mg\,h_c = 0{,}1\,mg$

$E_{m_f} = E_{c_f} + U_f$

$E_{c_f} = \frac{1}{2} m v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2$ $v_{cm} = d\omega$

$I_{cm} = \frac{m}{12}(a^2 + b^2) = \frac{m}{12} \times (2d)^2 = \frac{4md^2}{12} = \frac{1}{3} m d^2$

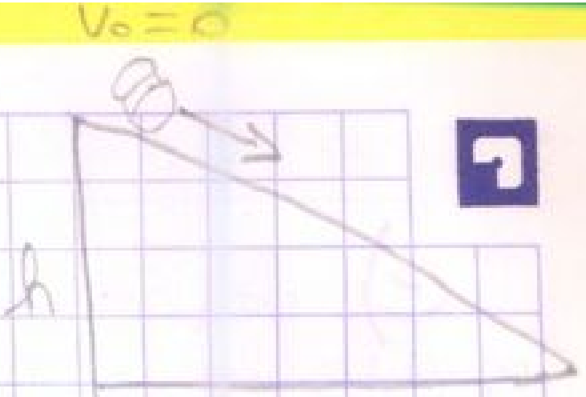
$U_f = mgh = -0{,}6\,mg$ $d^2 = 0{,}6^2 + 0{,}1^2 = 0{,}37$

$E_{m_f} = \frac{1}{2} m (d\omega)^2 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} m d^2 \times \omega^2 - 0{,}6\,mg \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0{,}1\,mg = \frac{1}{2} m d^2 \omega^2 + \frac{1}{6} m d^2 \omega^2 - 0{,}6\,mg \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0{,}7\,\cancel{m} g = \frac{2}{3} \cancel{m} d^2 \omega^2 \Leftrightarrow \omega^2 = \frac{3}{2} \times 0{,}7 \times g \times \frac{1}{d^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \omega^2 = 1{,}05 \times 9{,}8 \times \frac{1}{0{,}37} \Leftrightarrow \omega = 5{,}274\ s^{-1}$



(10) $Em_i = \cancel{Ec_i}^0 + Up_i = mgh$

Sistema conservativo $\rightarrow Em_i = Em_f$

$Em_f = Ec_f + \cancel{Up_f}^0 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2$

$I_{cm} = \frac{m}{2}R^2$ $v = R\omega \Leftrightarrow \omega = \frac{v}{R}$

$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\times\frac{m}{2}R^2\times\left(\frac{v}{R}\right)^2 \Leftrightarrow \cancel{m}gh = \frac{\cancel{m}}{2}v^2 + \frac{\cancel{m}}{4}v^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow gh = \frac{3}{4}v^2 \Leftrightarrow v^2 = \frac{4}{3}gh \Leftrightarrow v = \sqrt{\frac{4}{3}gh} = \sqrt{\frac{4gh}{3}}$

A esfera desce mais rápido que o cilindro, por ter menor momento de inércia.

(11) Sistema conservativo $\rightarrow Em_i = Em_f$

$Em_A = \cancel{Ec_A}^0 + Up_A = mgl$

$Em_D = Ec_D + \cancel{Up_D}^0 = \frac{1}{2}mv_D^2$

$Em_A = Em_D \Leftrightarrow \cancel{m}gl = \frac{1}{2}\cancel{m}v_D^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow v_D^2 = 2gl$

$Em_E = Em_D \Leftrightarrow Ec_E + Up_E = \frac{1}{2}m\times 2gl \Leftrightarrow \frac{1}{2}\cancel{m}v_E^2 + \cancel{m}g(2r) = \cancel{m}gl \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{v_E^2}{2} = gl - 2gr \Leftrightarrow v_E^2 = 2gl - 4gr$

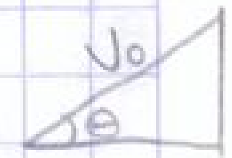
$F_c = T + F_g \Leftrightarrow T = ma_n - mg \Leftrightarrow T = m\frac{v_E^2}{r} - mg$

Para que a trajetória seja uma circunferência:

$T > 0 \Leftrightarrow m\left(\frac{v_E^2}{r} - g\right) > 0 \Leftrightarrow \frac{2gl - 4gr}{r} - g > 0 \Leftrightarrow 2gl - 4gr > gr \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2gl > 5gr \Leftrightarrow 2l > 5(l-a) \Leftrightarrow 2l > 5l - 5a \Leftrightarrow -5a < -3l \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5a > 3l \Leftrightarrow a > \frac{3l}{5}$ O valor mínimo de a é $\frac{3l}{5}$.



(12) a) $v_y = v_{0y} - gt \Leftrightarrow 0 = V_0\sin\theta - gt \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow V_0\sin\theta = gt \Leftrightarrow t = \frac{V_0}{g}\sin\theta$

$x = \cancel{x_0}^0 + V_{0x}t = V_0\cos\theta\times\frac{V_0}{g}\sin\theta = \frac{V_0^2\sin\theta\cos\theta}{g} = \frac{V_0^2}{2g}\sin(2\theta)$

$y = \cancel{y_0}^0 + V_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 = V_0\sin\theta\times\frac{V_0}{g}\sin\theta - \frac{1}{2}g\left(\frac{V_0^2\sin^2\theta}{g^2}\right) =$

$= \frac{V_0^2\sin^2\theta}{g} - \frac{V_0^2\sin^2\theta}{2g} = \frac{V_0^2\sin^2\theta}{2g}$ $\vec{r} = \frac{V_0^2}{2g}\left(\sin(2\theta)\hat{i} + \sin^2\theta\hat{j}\right)$

b) O projétil descreve uma parábola, logo a posição de encontrado na altura máxima, é o ponto médio.

$R = 2\times\frac{V_0^2}{2g}\sin(2\theta) = \frac{V_0^2\sin(2\theta)}{g}$ c.q.p.