Amostragem Aleatória. Distribuições por amostragem

8.1 i) Y_1: "número de computadores pessoais vendidos na primeira semana"
Y_2: "número de computadores pessoais vendidos na segunda semana".

$E(Y_1)=E(Y_2)=\sum_y y(p(y)) = 0\times0{,}10+1\times0{,}15+2\times0{,}45+3\times0{,}30 = 1{,}95$

$Var(Y_1)=Var(Y_2)=\sum_y (y-1{,}95)^2\times p(y) = (0-1{,}95)^2\times0{,}10+(1-1{,}95)^2\times0{,}15+(2-1{,}95)^2\times0{,}45+(3-1{,}95)^2\times0{,}3 =$

$=0{,}8475$ Q: "vendas quinzenais" $Q=Y_1+Y_2$ $E(Q)=E(Y_1)+E(Y_2)=$

$=2\times1{,}95=3{,}9$ $Var(Q)=Var(Y_1)+Var(Y_2)=2\times0{,}8475=1{,}695$ $\sigma=\sqrt{1{,}695}=1{,}302$

ii)

y_1	y_2	q	p(q)
0	0	0	0,01
0	1	1	0,015
0	2	2	0,045
0	3	3	0,03
1	0	1	0,015
1	1	2	0,0225
1	2	3	0,0675
1	3	4	0,045
2	0	2	0,045
2	1	3	0,0675
2	2	4	0,2025
2	3	5	0,135
3	0	3	0,03
3	1	4	0,045
3	2	5	0,135
3	3	6	0,09

Função de probabilidade do Q:

q	soma	p(q)
0	0,01	0,01
1	0,015 + 0,015	0,03
2	0,045+0,045 + 0,0225	0,1125
3	0,03+0,0675+0,0675+0,03	0,195
4	0,045+0,2025 + 0,045	0,2925
5	0,135 + 0,135	0,27
6	0,09	0,09

$E(Q)=3{,}9$

$Var(Q)=1{,}695$ $\sigma=1{,}302$

iii) (não é para fazer)

8.2 i) P: "número de jogos vendidos por dia na loja do Porto"
L: "número de jogos vendidos por dia na loja de Lisboa"

$P \sim N(150, 25^2)$ $L \sim N(200, 30^2)$ $P(P>L) = P(P-L>0)$ $P-L \sim N(\mu_{P-L}, \sigma^2_{P-L})$

$\mu_{P-L} = \mu_P - \mu_L = 150-200 = -50$ $\sigma^2_{P-L} = \sigma_P^2 + \sigma_L^2 = 25^2+30^2 = 1525$ $\sigma_{P-L} = \sqrt{1525} = 39{,}05$

$P(P-L>0) = P\left(Z > \frac{0+50}{39{,}05}\right) = P(Z>1{,}28) = 0{,}1003 = 10{,}03\%$

ii) J: "número de jogos vendidos num dia, no conjunto das duas lojas".

$J = P+L$ $E(J) = 150+200 = 350$ $J \sim N(\mu_J, \sigma_J^2)$ $\sigma_J^2 = Var(P)+Var(L) = 25^2+30^2 = 1525$

J: "... em 200 dias"

$\mu_J = E_1(J)+E_2(J)+\dots+E_n(J) = 200 \times 350 = 70\,000$ $J \sim N(70\,000; 305\,000)$

$\sigma_J^2 = Var_1(J)+Var_2(J)+\dots+Var_n(J) = 200 \times 1525 = 305\,000$ $\sigma_J = 552{,}27$

$P(J>69000) = P\left(Z > \frac{69000-70000}{552{,}27}\right) = P(Z>-1{,}81) = 1-P(Z<-1{,}81) =$

$= 1-P(Z>1{,}81) = 1-0{,}0351 = 0{,}965 = 96{,}5\%$.

8.3 Seja X o peso de cada mineiro, em kg, e $\bar{X}$ a média amostral de X em amostras de dimensão $N=50$.

$E(\bar{X}) = E(X) = 75$ $Var(\bar{X}) = \frac{650-50}{650-1} \times \frac{1}{50} \times 8^2 = 1{,}18$

S: "peso de 50 mineiros selecionados aleatoriamente"

$E(S) = 50 \times E(\bar{X}) = 50 \times 75 = 3750$

$Var(S) = 50^2 \times Var(\bar{X}) = 2950$ $S \sim N(3750, 54{,}38^2)$

$P(S \geq 3800) = P\left(Z \geq \frac{3800-3750}{54{,}38}\right) = P(Z \geq 0{,}92) = 0{,}1788 = 17{,}88\%$

8.4 i) A: "salário horário na Alemanha" $A \sim N(15{,}4; 3{,}0^2)$
P: "salário horário em Portugal" $P \sim N(11{,}2; 3{,}0^2)$

$\bar{A}$: "média salários horários dos 40 engenheiros inquiridos na Alemanha". $\sigma = \sqrt{0{,}225} = 0{,}474$

Pelo teorema do Limite Central: $E(\bar{A}) = E(A) = 15{,}4$ $\bar{A} \sim N(15{,}4; 0{,}225)$

$Var(\bar{A}) = \frac{1}{40} \times Var(A) = \frac{3{,}0^2}{40} = \frac{9}{40} = 0{,}225$ $P(15 \leq \bar{A} \leq 16) =$

$= P\left(\frac{15-15{,}4}{0{,}474} \leq Z \leq \frac{16-15{,}4}{0{,}474}\right) = P(-0{,}84 \leq Z \leq 1{,}26) = P(Z \leq 1{,}26) - P(Z \geq 0{,}84) =$

$= 1-P(Z \geq 1{,}26) - P(Z \geq 0{,}84) = 1-0{,}1038-0{,}2005 = 0{,}6957 = 69{,}57\%$

ii) $\bar{P}$: "média dos salários horários dos 50 engenheiros inquiridos em Portugal"

Pelo teorema do Limite Central: $E(\bar{P}) = E(P) = 11{,}2$ $\bar{P} \sim N(11{,}2;$

$Var(\bar{P}) = \frac{1}{50} \times Var(P) = \frac{3{,}0^2}{50} = \frac{9}{50} = 0{,}18$ $\sigma_{\bar{P}} = \sqrt{0{,}18} = 0{,}424$ $P(\bar{A}-\bar{P} \geq 4{,}5) \stackrel{(a)}{=}$

$E(\bar{A}-\bar{P}) = E(\bar{A}) - E(\bar{P}) = 15{,}4-11{,}2 = 4{,}2$ $Var(\bar{A}-\bar{P}) = Var(\bar{A}) + Var(\bar{P}) = 0{,}405$

(a) $P\left(Z \geq \frac{4{,}5-4{,}2}{\sqrt{0{,}405}}\right) = P(Z \geq 0{,}47) = 0{,}3192 = 31{,}92\%$

8.5 i) L: "Comprimento de um lado de um determinado tipo de peças paralelepipédicas" $L \sim N(30, 25)$

V: "Volume das peças" $V = L_1 \times L_2 \times L_3$

$E(V) = E(L) \times E(L) \times E(L) = 30 \times 30 \times 30 = 27000$

$Var(V) = \left[\frac{dV}{dL_1}\right]^2_{\mu_{L_1}, \mu_{L_2}, \mu_{L_3}} \times Var(L_1) + \left[\frac{dV}{dL_2}\right]^2_{\mu_{L_1}, \mu_{L_2}, \mu_{L_3}} \times Var(L_2) + \left[\frac{dV}{dL_3}\right]^2_{\mu_{L_1}, \mu_{L_2}, \mu_{L_3}} \times Var(L_3) =$

$= 3 \times [\mu_L^2]^2 \times Var(L) = 3 \times (30^2)^2 \times 25 = 6{,}075 \times 10^7$ $\sigma_V = \sqrt{6{,}075 \times 10^7} = 7794{,}23$

ii) $V \sim N(27000; 7794{,}23)$ $P(V > 35 \times 10^3) = P\left(Z > \frac{35 \times 10^3 - 27000}{7794{,}23}\right) =$

$= P(Z > 1{,}03) = 0{,}1515 = 15{,}15\%$

iii) $L \sim N(20, 25)$ $E(V) = E(L) \times E(L) \times E(L) = 20 \times 20 \times 20 = 8000$

$Var(V) = \left[\frac{dV}{dL}\right]^2_{\mu_L} \times Var(L) = (3[\mu_L^2])^2 \times \sigma^2 = 9 \times 400^2 \times 25 = 1{,}8225 \times 10^8$

$\sigma_L = \sqrt{1{,}8225 \times 10^8} = 13500$

8.6 (não é para fazer).

8.7 (não é para fazer)

8.8 (não é para fazer).