Distribuições Discretas Univariadas

6.1 i) a) Y: "número de grandes prémios terminados". $Y \sim B(6;0{,}20)$

$p(2) = {}^6C_2 \times 0{,}20^2 \times 0{,}80^4 = 0{,}246 = 24{,}6\%$

b) $p(Y \geq 3) = 1 - (p(0)+p(1)+p(2)) = 1-(0{,}262144 + 0{,}393216 + 0{,}24576) =$

$= 1 - 0{,}90112 = 0{,}099 = 9{,}9\%$

c) $p(Y \leq 2) = p(0)+p(1)+p(2) = 0{,}262144 + 0{,}393216 + 0{,}24576 = 0{,}90 = 90\%$

ii) N: "número de carros Fórmula 1 à chegada". $N \sim B(3;0{,}20)$

$p(N \geq 2) = p(2)+p(3) = {}^3C_2 \times 0{,}20^2 \times 0{,}80^1 + {}^3C_3 \times 0{,}20^3 \times 0{,}80^0 = 0{,}104$

G: "número de grandes prémios nos quais há pelo menos 2 carros Fórmula 1 à chegada". $G \sim B(6;0{,}104)$

$p(G \geq 3) = 1 - (p(0)+p(1)+p(2)) = 1 - (0{,}51742577 + 0{,}36035009 + 0{,}10456587) = 0{,}018 = 1{,}8\%$

6.2 i) N: "número de votos a favor da proposta do presidente". $N \sim B(6;0{,}35)$

$P(N \geq 3) = p(3)+p(4)+p(5)+p(6) = 0{,}2354093 + 0{,}0951021 + 0{,}02048353 + 1{,}8383 \times 10^{-3} = 0{,}353 = 35{,}3\%$

ii) $N \sim B(4;0{,}35)$ $\quad P(N \geq 1) = 1 - p(0) = 1 - 0{,}17850625 = 0{,}8215 = 82{,}15\%$

A: "foi aprovada na assembleia"

iii) N_1: "número de votos que aprovaram a proposta na votação prévia, dos vogais".

$N_1 \sim B(2;0{,}35)$ $\quad P(N_1 \geq 1) = 1 - p(0) = 1 - 0{,}4225 = 0{,}5775$

S: "mesmo na votação em conselho"

$P(S) = P(S|A) \times P(A) + P(S|\bar{A}) \times P(\bar{A})$ $\quad P(S|A) = 0{,}8215$ ($N \sim B(4;0{,}35)$) $\quad P(S|\bar{A}) = p(4) = 0{,}015$

$P(S) = 0{,}8215 \times 0{,}5775 + 0{,}015 \times 0{,}4225 = 0{,}481 = 48{,}1\%$

6.3 C_1: "número de calços defeituosos da remessa de 1º". $C_1 \sim B(10;0{,}05)$

C_2: "número de calços defeituosos da remessa de 2º". $C_2 \sim H(10p, 10(1-p), 2)$

$P(C_1=0) = {}^{10}C_0 \times 0{,}05^0 \times 0{,}95^{10} = 0{,}60$ $\quad P(C_1=1) = {}^{10}C_1 \times 0{,}05^1 \times 0{,}95^9 = 0{,}315$

$P(C_1=2) = {}^{10}C_2 \times 0{,}05^2 \times 0{,}95^8 = 0{,}075$ $\quad P(C_1=3) = {}^{10}C_3 \times 0{,}05^3 \times 0{,}95^7 = 0{,}0105$

As probabilidades restantes são desprezáveis. $(p(C_1>3) \approx 0)$

$p(C_2=0) = P(C_2=0|C_1=0) \times P(C_1=0) + P(C_2=0|C_1=1) \times P(C_1=1) +$

$+ P(C_2=0|C_1=2) \times P(C_1=2) + P(C_2=0|C_1=3) \times p(C_1=3)$

$p(C_2=0|C_1=0) = \dfrac{{}^{0}C_0 \times {}^{10}C_2}{{}^{10}C_2} = 1$ $\quad p(C_2=0|C_1=1) = \dfrac{{}^{1}C_0 \times {}^{9}C_2}{{}^{10}C_2} = 0{,}8$

$p(C_2=0|C_1=2) = \dfrac{{}^{2}C_0 \times {}^{8}C_2}{{}^{10}C_2} = 0{,}622$ $\quad p(C_2=0|C_1=3) = \dfrac{{}^{3}C_0 \times {}^{7}C_2}{{}^{10}C_2} = 0{,}467$

$P(C_2=0) = 1 \times 0{,}60 + 0{,}8 \times 0{,}315 + 0{,}622 \times 0{,}075 + 0{,}467 \times 0{,}0105 = 0{,}904$

$P(C_2 \geq 1) = 1 - P(C_2=0) = 1 - 0{,}904 = 0{,}096$ R: 9,6%

6.4 i) D: "Número de peças retocadas em 10 minutos". $D \sim B(10;0{,}07)$

$p(D=0) = {}^{10}C_0 \times 0{,}07^0 \times 0{,}93^{10} = 0{,}484 = 48{,}4\%$ $\quad S \sim BN(2;0{,}07)$

ii) S: "Número de peças não retocadas até ocorrer a segunda peça retocada".

$p(S=4) = {}^{4+2-1}C_4 \times 0{,}07^2 \times 0{,}93^4 = 0{,}0183 = 1{,}83\%$ $\quad N \sim G(0{,}07)$

iii) N: "Número de peças produzidas até ocorrer o primeiro retoque".

$\mu_N = \dfrac{0{,}93}{0{,}07} = 13{,}28$ peças. Como são produzidas 1 peça por minuto, esse tempo é de 13,28 minutos.

6.5 Há duas situações possíveis: → Estas probabilidades são iguais.

calcula-se esta. ← i) Nos N-1 cartas anteriores o colecionador recebe pelo menos um selo A, não recebe nenhum selo B e na N-ésima carta recebe um selo B.

ii) Nos N-1 cartas anteriores o colecionador recebe pelo menos um selo B, não recebe nenhum selo A e na N-ésima carta recebe um selo A.

Y: "número de selos A nas N-1 cartas" $\quad$ Z: "número de selos B nas N-1 cartas".

$P_N = P[(Y \geq 1 \cap Z=0) \cap B] = P(Y \geq 1|Z=0) \times P(Z=0) \times P(B) = [1 - P(Y=0|Z=0)] \times P(Z=0) \times P(B)$

$Z \sim (N-1, \frac{1}{6})$ $\quad P(Z=0) = {}^{N-1}C_0 \times \left(\frac{1}{6}\right)^0 \times \left(\frac{5}{6}\right)^{N-1} = \left(\frac{5}{6}\right)^{N-1}$ $\quad Y|Z=0 \sim B(N-1, \frac{1}{5})$

$P(Y=0|Z=0) = {}^{N-1}C_0 \times \left(\frac{1}{5}\right)^0 \times \left(\frac{4}{5}\right)^{N-1} = \left(\frac{4}{5}\right)^{N-1}$

$P_N = \left[1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{N-1}\right] \times \left(\frac{5}{6}\right)^{N-1} \times \frac{1}{6} = \dfrac{5^{N-1} - 4^{N-1}}{5^{N-1}} \times \dfrac{5^{N-1}}{6^{N-1}} \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{25^{N-1} - 20^{N-1}}{30^{N-1}} \times \dfrac{1}{6} =$

$= \dfrac{5^{N-1} - 4^{N-1}}{6^{N-1}} \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{5^{N-1} - 4^{N-1}}{6^N}$ $\quad$ R: $2 \times \dfrac{5^{N-1} - 4^{N-1}}{6^N}$, com $N \geq 2$

6.6 D: "número de peças defeituosas de entre as 5 retirados do lote de 300 peças." $D \sim H(0{,}01\times300;\ 0{,}99\times300;\ 5) = H(3, 297, 5)$

$$p(D\geq1) = 1 - p(D=0) = 1 - \frac{{}^{3}C_0 \times {}^{297}C_5}{{}^{300}C_5} = 1 - 0{,}95067 = 0{,}049 = 4{,}9\%$$

6.7 i) Por cada máquina: nº médio de avarias/hora: $\lambda_M = \frac{2 \text{ avarias}}{8 \text{ horas}} = 0{,}25$ av/h.

Por 20 máquinas: $\lambda_{20} = 20 \times \lambda = 20 \times 0{,}25 = 5$ avarias/h

Em 10 minutos (0,1667 h): $\lambda = \lambda_{20} \times \Delta t = 5 \times 0{,}1667 = 0{,}8335$ av/10 min

Y: "nº de avarias por 20 máquinas em 10 minutos" $Y \sim \text{Poisson}(0{,}8335)$

$$p(y) = \frac{e^{-0{,}8335} \times 0{,}8335^y}{y!} \qquad p(3) = \frac{e^{-0{,}8335} \times 0{,}8335^3}{3!} = 0{,}042 = 4{,}2\%$$

ii) $\lambda_{20} = 5$ avarias/h $\quad \mu_Y = \lambda = 5$ avarias/h $\quad Var(Y) = \lambda = 5$ (avarias/h)^2

6.8 i) Y: "nº de bolhas por m²" $Y \sim \text{Poisson}(0{,}4)$ $\lambda = 0{,}4$

Y': "nº de bolhas numa placa de 1,5 × 3,0 m²" $\lambda = 0{,}4 \times 1{,}5 \times 3{,}0 = 1{,}8$ bolhas/placa

$Y' \sim \text{Poisson}(1{,}8)$ $\quad p(y') = \frac{e^{-1{,}8} \times 1{,}8^{y'}}{y'!}$ $\quad p(Y'\geq1) = 1 - p(0) =$

$$= 1 - \frac{e^{-1{,}8} \times 1{,}8^0}{0!} = 1 - 0{,}1652989 = 0{,}8347 = 83{,}47\%$$

ii) Z: "nº de placas com bolhas" $Z \sim B(6; 0{,}8347)$

$$P(Z\leq2) = P(Z=0) + P(Z=1) + P(Z=2) = 2{,}04\times10^{-5} + 6{,}1808\times10^{-4} + 7{,}8027\times10^{-3} = 7{,}8027\times10^{-3} = 0{,}0078 = 0{,}78\%$$

6.9 i) Q: "quantidade de cimento transferido do comboio para o entreposto".

$$Q \begin{cases} 20\times y, & y\leq3 \\ 80, & y>3 \end{cases} \qquad Y \sim \text{Poisson}(\lambda=3)$$

Y: "nº de camiões"

$$P(y>3) = 1 - (p(0)+p(1)+p(2)+p(3)) = 1 - (0{,}0498 + 0{,}1494 + 0{,}22404 + 0{,}22404) =$$
$$= 0{,}3528$$

y	p(y)
0	0,0498
1	0,1494
2	0,22404
3	0,22404
≥4	0,3528

$$E(Q) = 0\times0{,}0498 + 20\times0{,}1494 + 40\times0{,}22404 + 60\times0{,}22404 + 80\times0{,}3528 =$$
$= 53{,}6$ toneladas.

ii) PT: "procura total (diária)"
PNS: "procura não satisfeita (diariamente)" $\quad PNS = PT - Q$
Q: "procura satisfeita (diariamente)".

$E(PNS) = E(PT) - E(Q)$ $\qquad E(Q) = 53{,}6$ toneladas

$PT = 20\times Y$ $\quad E(PT) = 20\times E(Y)$ $\quad \lambda=3 \Rightarrow \mu_Y = 3$ $\quad E(PT) = 20\times3 = 60$

$E(PNS) = 60 - 53{,}6 = 6{,}4$ toneladas

R: 6,4 toneladas.

$$Y \sim BN\left(3, \frac{1}{6}\right)$$

6.10 i) Y: "número de insucessos até ocorrer o terceiro sucesso".

$P(Y \leq 3) = P(Y=0) + P(Y=1) + P(Y=2) + P(Y=3) = {}^2C_0 \times \left(\frac{1}{6}\right)^3 \times \left(\frac{5}{6}\right)^0 + {}^3C_1 \times \left(\frac{1}{6}\right)^3 \times \left(\frac{5}{6}\right)^1 +$

$+ {}^4C_2 \times \left(\frac{1}{6}\right)^3 \times \left(\frac{5}{6}\right)^2 + {}^5C_3 \times \left(\frac{1}{6}\right)^3 \times \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 4{,}63 \times 10^{-3} + 0{,}0116 + 0{,}0193 + 0{,}0268 = 0{,}0623 =$
$= 6{,}23\%.$

ii) N: "número de partidas perdidas até ganhar a primeira".

$N \sim G(0{,}0623) \quad p(y) = 0{,}0623 \times (1 - 0{,}0623)^y \quad p(y) \geq 0{,}25 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0{,}0623 \times 0{,}9377^y \geq 0{,}25 \Leftrightarrow 0{,}9377^y \geq 4{,}013$

Fazendo por tentativas: $y = 3 \Rightarrow F(3) = 0{,}1755$
$y = 4 \Rightarrow F(4) = 0{,}2269$
$y = 5 \Rightarrow F(5) = 0{,}2750$

R: Deve jogar 5 partidas.

iii) V: "número de partidas ganhas em 5 tentativas" $V \sim B(5; 0{,}0623)$

$p(y) = {}^5C_y \times 0{,}0623^y \times 0{,}9377^{5-y}$

y	p(y)	L	p(L)
0	0,0623	30	0,0623
1	0,0584	20	0,0584
2	0,0584	10	0,0584
3	0,0514	0	0,0514
4	0,0482	-10	0,0482

$p(0) = 0{,}725 \quad L(0) = -50$

G: "nº de partidas antes de ganhar"

$G \sim G(0{,}063)$

$E(L) = 30 \times 0{,}0623 + 20 \times 0{,}0584 + 10 \times 0{,}0584 + 0 \times 0{,}0514 - 10 \times 0{,}0482 - 50 \times 0{,}725 =$

$= -33{,}11$ moedas de ouro.