Distribuições Contínuas Univariadas

7.1 i) $\frac{1}{\lambda} = 4,5 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{4,5}$ $\quad F(x) = 1 - e^{-\frac{1}{4,5}x}$

$P(t \geq 6) = 1 - F(6) = 1 - \left(1 - e^{-\frac{1}{4,5}\times 6}\right) = e^{-\frac{1}{4,5}\times 6} = 0,2634 = 26,36\%$

ii) $P(t \geq 6 \mid t \geq 4) = \frac{P(t \geq 6 \cap t \geq 6)}{P(t \geq 4)} = \frac{P(t \geq 6)}{P(t \geq 4)} = \frac{1 - F(6)}{1 - F(4)} = \frac{1 - (1 - e^{-\frac{1}{4,5}\times 6})}{1 - (1 - e^{-\frac{1}{4,5}\times 4})} =$

$= \frac{0,2636}{0,4111} = 0,641 = 64,1\%$

iii) $\lambda_6 = 6 \times \lambda = 6 \times \frac{1}{4,5} = 1,333$ avarias por 6 horas.

Y: "nº de avarias por hora" $\quad Y \sim Poisson(1,333)$

$p(y) = \frac{e^{-1,333} \times 1,333^y}{y!}$ $\quad p(2) = \frac{e^{-1,333} \times 1,333^2}{2!} = 0,2343$

R: 23,43%

7.2 i) X: "altura de um cidadão de um dado país"

Admita-se que as alturas são medidas com precisão de $\pm 0{,}005$ m

$X \sim N(1{,}7;\, 0{,}05)$ Normal Padronizada: $Z = \dfrac{X - 1{,}7}{0{,}05}$

$P(1{,}795 \leq X \leq 1{,}805) = P\left(\dfrac{1{,}795 - 1{,}7}{0{,}05} \leq Z \leq \dfrac{1{,}805 - 1{,}7}{0{,}05}\right) = P(1{,}9 \leq Z \leq 2{,}1) =$

$= P(Z \geq 1{,}9) - P(Z \geq 2{,}1) = 0{,}0287 - 0{,}0179 = 0{,}0108 = 1{,}08\%$

ii) $P(X \geq 1{,}805) = P\left(Z \geq \dfrac{1{,}805 - 1{,}7}{0{,}05}\right) = P(Z \geq 2{,}1) = 0{,}0179 = 1{,}79\%$

iii) $P(X \geq 1{,}805 \mid X \geq 1{,}755) = \dfrac{P(X \geq 1{,}805 \cap X \geq 1{,}755)}{P(X \geq 1{,}755)} = \dfrac{P(X \geq 1{,}085)}{P(X \geq 1{,}755)} \overset{(1)}{=}$

$P(X \geq 1{,}755) = P\left(Z \geq \dfrac{1{,}755 - 1{,}7}{0{,}05}\right) = P(Z \geq 1{,}1) = 0{,}1357$

$\overset{(1)}{=} \dfrac{0{,}0179}{0{,}1357} = 0{,}132$ R: 13,2%

iv) $P(1{,}595 \leq X \leq 1{,}805) = P\left(\dfrac{1{,}595 - 1{,}7}{0{,}05} \leq Z \leq \dfrac{1{,}805 - 1{,}7}{0{,}05}\right) =$

$= P(-2{,}1 \leq Z \leq 2{,}1) = P(Z \geq -2{,}1) - P(Z \geq 2{,}1) = 1 - P(Z \geq 2{,}1) - P(Z \geq 2{,}1) =$

$= 1 - 2P(Z \geq 2{,}1) = 1 - 2 \times 0{,}0179 = 0{,}9642 = 96{,}42\%$

7.3 i) X: "rendimento mensal (em milhares de euros) dos agricultores numa determinada região" $R \sim LN(3{,}25;\, 0{,}25)$ $V = \ln X \sim V \sim N(\mu_V, \sigma_V^2)$

$\mu_V = \dfrac{1}{2} \times \ln\left(\dfrac{3{,}25^4}{0{,}25 + 3{,}25^2}\right) = 1{,}167$ $\sigma_V^2 = \ln\left(\dfrac{0{,}25}{3{,}25^2} + 1\right) = 0{,}0234$

$V \sim N(1{,}167;\, 0{,}0234)$ $\sigma_V = \sqrt{0{,}0234} = 0{,}153$

$P(X > 3{,}25) = P(V = \ln X > \ln(3{,}25)) = P(V > 1{,}179) = P\left(Z > \dfrac{1{,}179 - 1{,}167}{0{,}153}\right) =$

$= P(Z > 0{,}08) = 0{,}4681 = 46{,}81\%$

ii) $\eta_X = e^{\mu_V} = e^{1{,}167} = 3{,}21$ R: 3,21 milhares de euros.

iii) $P(X < 0{,}9) = P(V = \ln X < \ln(0{,}9)) = P(V < -0{,}1054) =$

$= P\left(Z < \dfrac{-0{,}1054 - 1{,}167}{0{,}153}\right) = P(Z < -8{,}32) = P(Z > 8{,}32) \simeq 0$

7.4 Y: "número de peças com grau de qualidade A na amostra de 300".

$Y \sim H(7000 \times p,\, 7000 \times (1-p),\, 300)$ $p = \dfrac{5000}{7000} = \dfrac{5}{7}$ $Y \sim H(5000,\, 2000,\, 300)$

$\mu_Y = 300 \times \dfrac{5}{7} = 214{,}3$ $\sigma_Y^2 = 300 \times \dfrac{5}{7} \times \dfrac{2}{7} \times \dfrac{7000 - 300}{7000 - 1} = 58{,}61$ $\sigma_Y = \sqrt{58{,}61} = 7{,}656$

Como $7000 \geq 10 \times 300$, Y pode ser aproximada por uma distribuição binomial.
Como $300 \geq 20$ e $300 \times \frac{5}{7} > 7$, a distribuição binomial pode ser aproximada por uma distribuição normal, logo, $Y \sim N(214{,}3;\, 58{,}61)$

$P(Y > 220) = P\left(Z > \dfrac{220 - 214{,}3}{7{,}656}\right) = P(Z > 0{,}744) = 0{,}2296 - \dfrac{0{,}2296 - 0{,}2266}{0{,}75 - 0{,}74}(0{,}744 - 0{,}74) =$

$= 0{,}2284 = 22{,}84\%$

7.5 i) $X \sim \chi^2_{19}$ $P(X < x_0) = 0{,}05 \Leftrightarrow P(X > x_0) = 0{,}95$

Por análise das tabelas, $x_0 = 10{,}12$

ii) $P(8{,}91 < X < 22{,}72) = P(X > 8{,}91) - P(X > 22{,}72) = 0{,}975 - 0{,}25 = 0{,}725 =$
$= 72{,}5\%$

7.6 i) $V \sim t_7$ $P(V > v_0) = 0{,}01$ Por análise das tabelas, $v_0 = 2{,}998$

ii) $P(-1{,}12 < V < 2{,}99) = P(V < 2{,}99) - P(V < -1{,}12) = 1 - [P(V > 2{,}99) + P(V > 1{,}12)] =$
$= 1 - (0{,}010 + 0{,}15) = 0{,}84$ R: 84%

7.7 i) $U \sim F_{24,30}$ $P(U > u_0) = 0{,}05$ Por análise das tabelas: $u_0 = 1{,}89$

ii) $P(U < u_1) = 0{,}01$ $F_{GL_1,GL_2}(1-\alpha) = \frac{1}{F_{GL_2,GL_1}(\alpha)} \Leftrightarrow F_{24,30}(0{,}99) = \frac{1}{F_{30,24}(0{,}01)} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow F_{24,30}(0{,}99) = \frac{1}{2{,}58} \Leftrightarrow u_1 = \frac{1}{2{,}58} = 0{,}388$

7.8 $T \sim N(150, 5^2)$ $A \sim N(156, 3^2)$ $P(T > A) = P(T - A > 0)$

$\mu_{T-A} = E(T) - E(A) = 150 - 156 = -6$ $Var_{T-A} = Var(T) + Var(A) = 5^2 + 3^2 = 34$

$\sigma_{T-A} = \sqrt{34} = 5{,}831$ $P(T-A > 0) = P\left(Z > \frac{0+6}{5{,}831}\right) = P(Z > 1{,}029) = 0{,}1515 =$
$= 15{,}15\%$