Métodos Estatísticos MEST

Probabilidades

3.1 i) Número de casos possíveis (N): 1 726 348 + 2 110 253 + 628 309 + 753 125 + 15 239 + 7 435 = = 5 240 709

Número de casos favoráveis (N_B): 1 726 348 + 2 110 253 = = 3 836 601

Acontecimento B: "O indivíduo selecionado é branco."

$$P(B) = \frac{N_B}{N} = \frac{3\,836\,601}{5\,240\,709} = 0{,}732 = 73{,}2\%$$

ii) Número de casos possíveis (N): 5 240 709

Número de casos favoráveis (N_N): 628 309 + 753 125 = 1 381 434

Acontecimento N: "O indivíduo selecionado é negro."

$$P(N) = \frac{N_N}{N} = \frac{1\,381\,434}{5\,240\,709} = 0{,}264 = 26{,}4\%$$

iii) Acontecimento M: "O indivíduo selecionado é mulher."

Acontecimento $M \cap B$: "O indivíduo selecionado é uma mulher branca."

Número de casos possíveis (N): 5 240 709

Número de casos favoráveis ($N_{M\cap B}$): 2 110 253

$$P(M \cap B) = \frac{N_{M\cap B}}{N} = \frac{2\,110\,253}{5\,240\,709} = 0{,}403 = 40{,}3\%$$

iv) $$P(B|M) = \frac{P(M\cap B)}{P(M)} = \frac{\frac{2\,110\,253}{5\,240\,709}}{\frac{2\,870\,813}{5\,240\,709}} = \frac{2\,110\,253}{2\,870\,813} = 0{,}735 = 73{,}5\%$$

v) $$P(M \cap N) = \frac{753\,125}{5\,240\,709} = 0{,}1438 = 14{,}38\%$$

$$P(M) \times P(N) = \frac{2\,870\,813}{5\,240\,709} \times \frac{1\,381\,434}{5\,240\,709} = 0{,}1444 = 14{,}44\%$$

Como $P(M\cap N) \neq P(M) \times P(N)$, conclui-se que estes acontecimentos não são independentes.

3.2 Acontecimento A_1: "ganhar o primeiro prémio."

$$P(A_1) = \frac{1}{{}^{49}C_6} = \frac{1}{\frac{49!}{43! \times 6!}} = 7{,}15 \times 10^{-8}$$

Acontecimento A_2: "ganhar o segundo prémio."

$$P(5B) = \frac{{}^6C_5 \times {}^{43}C_1}{{}^{49}C_6} = \frac{6 \times 43}{{}^{49}C_6} \qquad P(A_2) = \frac{1}{43} \times \frac{6\times 43}{{}^{49}C_6} = 4{,}29 \times 10^{-7}$$

Acontecimento A_3: "ganhar o terceiro prémio."

$$P(5B) = \frac{{}^6C_5 \times {}^{43}C_1}{{}^{49}C_6} = \frac{6\times 43}{{}^{49}C_6} \qquad P(NAE_2/5E_1) = \frac{42}{43}$$

$$P(A_3) = \frac{42}{43} \times \frac{6\times 43}{{}^{49}C_6} = 1{,}80 \times 10^{-5}$$

3.3 Acontecimento A: "Pelo menos 2 pessoas fazem anos no mesmo dia."

Acontecimento $\overline{A}$: "Todas as pessoas fazem anos em dias diferentes."

$$P(\overline{A}) = \frac{\text{nº casos favoráveis}}{\text{nº casos possíveis}} = \frac{A_{25}^{365}}{365^{25}} = 0{,}431 = 43{,}1\%$$

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0{,}431 = 0{,}569 = 56{,}9\%.$$

3.4 Acontecimento A_e: "O diretor financeiro fica num dos extremos."

Acontecimento A_m: "O diretor financeiro fica num dos lugares do meio."

Acontecimento A_{dj}: "Você e o diretor ficam em lugares adjacentes."

$$P(A_{dj}) = P(A_{dj} \mid A_e) \times P(A_e) + P(A_{dj} \mid A_m) \times P(A_m)$$

$$P(A_e) = \frac{2}{13} \qquad P(A_m) = \frac{11}{13} \qquad P(A_{dj} \mid A_e) = \frac{1}{12} \qquad P(A_{dj} \mid A_m) = \frac{2}{12}$$

$$P(A_{dj}) = \frac{1}{12} \times \frac{2}{13} + \frac{2}{12} \times \frac{11}{13} = 0{,}154 = 15{,}4\%$$

3.5 A: "Entre N mísseis enviados, há pelo menos um que acerta no alvo."

$\overline{A}$: "Nenhum dos N mísseis acerta no alvo."

A probabilidade de um míssil não acertar é $1 - 0{,}3 = 0{,}7$.

$$P(\overline{A}) = 0{,}7^N \qquad P(A) = 1 - 0{,}7^N \qquad 1 - 0{,}7^N \geq 0{,}9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln(0{,}7^N) \geq \ln(0{,}1) \Leftrightarrow N \ln(0{,}7) \geq \ln(0{,}1) \Leftrightarrow N \geq \frac{\ln(0{,}1)}{\ln(0{,}7)} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow N \geq 6{,}46$ Como N é inteiro, deverão ser disparados pelo menos 7 mísseis.

3.6 Acontecimento A: "As duas peças foram selecionadas a partir do contentor A."

Acontecimento B: "As duas peças foram selecionadas a partir do contentor B."

Acontecimento 2PB: "As duas peças selecionadas são Boas".

$$P(2PB) = P(2PB \mid A) \times P(A) + P(2PB \mid B) \times P(B) \qquad P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$$

Acontecimento PPB: "A primeira peça retirada é Boa".

Acontecimento SPB: "A segunda peça retirada é Boa".

$$P(2PB \mid A) = P(PPB \cap SPB \mid A) = P((P(PPB) \times P(SPB \mid PPB)) \mid A) = \frac{10}{13} \times \frac{9}{12} = 0{,}577$$

$$P(2PB \mid B) = P(PPB \cap SPB \mid B) = P((P(PPB) \times P(SPB \mid PPB)) \mid B) = \frac{7}{13} \times \frac{6}{12} = 0{,}269$$

$$P(2PB) = 0{,}577 \times 0{,}5 + 0{,}269 \times 0{,}5 = 0{,}423 = 42{,}3\%.$$

Acontecimento P1: "Pelo menos uma das peças é Boa."

Acontecimento S1: "Só 1 das peças é boa". → pois são mutuamente exclusivos.

$$P(P1) = P(2PB \cup S1) = P(2PB) + P(S1)$$

$$P(S1) = P(PPB \cap \overline{SPB}) + P(\overline{PPB} \cap SPB) = P(PPB) \times P(\overline{SPB} \mid PPB) + P(\overline{PPB}) \times P(SPB \mid \overline{PPB})$$

(A) $P(S1) = \frac{10}{13} \times \frac{3}{12} + \frac{3}{13} \times \frac{10}{12} = 0{,}385 = P(S1|A)$

(B) $P(S1) = \frac{7}{13} \times \frac{6}{12} + \frac{6}{13} \times \frac{7}{12} = 0{,}538 = P(S1|B)$

$P(S1) = P(S1|A) \times P(A) + P(S1|B) \times P(B) = 0{,}5 \times 0{,}385 + 0{,}5 \times 0{,}538 = 0{,}462$

$P(P1) = 0{,}423 + 0{,}462 = 0{,}885 = 88{,}5\%$

3.7 i) Acontecimento S: "Faz sol." Acontecimento PS: "Prevê sol"

Acontecimento C: "Faz chuva" Acontecimento PC: "Prevê chuva"

Acontecimento E: "Erra a previsão".

$P(E) = P(S \cap PC) + P(C \cap PS) \qquad P(S) = 0{,}75 \qquad P(C) = 0{,}25$

$P(PS|C) = 0{,}10 \qquad P(PC|S) = 0{,}30$

$P(E) = P(PC|S) \times P(S) + P(PS|C) \times P(C) = 0{,}30 \times 0{,}75 + 0{,}10 \times 0{,}25 =$

$= 0{,}25 = 25\%$

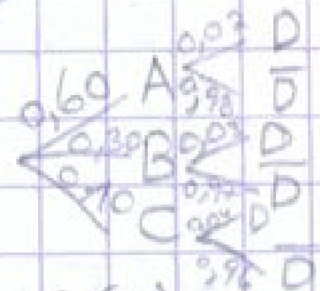
ii) $P(S|PC) = \frac{P(S \cap PC)}{P(PC)} = \frac{P(PC|S) \times P(S)}{P(PC|S) \times P(S) + P(PC|C) \times P(C)} \overset{(1)}{=}$

$P(PC|C) = 1 - P(PS|C) = 1 - 0{,}10 = 0{,}90$

$\overset{(1)}{=} \frac{0{,}30 \times 0{,}75}{0{,}30 \times 0{,}75 + 0{,}90 \times 0{,}25} = 0{,}5 = 50\%$

3.8 Acontecimento A: "A peça foi produzida pela máquina A".
Acontecimento B: "A peça foi produzida pela máquina B".
Acontecimento C: "A peça foi produzida pela máquina C".
Acontecimento D: "A peça é defeituosa".

$P(C|D) = \frac{P(C \cap D)}{P(D)}$



$P(D|C) = 0{,}04$
$P(D|A) = 0{,}02$
$P(D|B) = 0{,}03$

$P(C|D) = \frac{P(D|C) \times P(C)}{P(D|C) \times P(C) + P(D|A) \times P(A) + P(D|B) \times P(B)}$

$P(C|D) = \frac{0{,}04 \times 0{,}10}{0{,}04 \times 0{,}10 + 0{,}02 \times 0{,}60 + 0{,}03 \times 0{,}30} = 0{,}16 = 16\%$

3.9 Acontecimento FE: "O acidente foi causado por falha estrutural"
Acontecimento DC: "O acidente foi diagnosticado como falha estrutural"

$P(FE) = 0{,}42 \qquad P(DC|FE) = 0{,}80 \qquad P(DC|\overline{FE}) = 0{,}15 \qquad P(\overline{FE}) = 1 - 0{,}42 = 0{,}58$

$P(FE|DC) = \frac{P(FE \cap DC)}{P(DC)} = \frac{P(DC|FE) \times P(FE)}{P(DC|FE) \times P(FE) + P(DC|\overline{FE}) \times P(\overline{FE})} =$

$= \frac{0{,}80 \times 0{,}42}{0{,}80 \times 0{,}42 + 0{,}15 \times 0{,}58} = 0{,}794 = 79{,}4\%$

3.10 As várias tentativas da dona de casa são acontecimentos independentes.

Acontecimento C_n: "A chave escolhida abriu a porta".

$$P(\overline{C_1} \cap \overline{C_2} \cap \overline{C_3} \cap C_4) = P(\overline{C_1}) \times P(\overline{C_2}) \times P(\overline{C_3}) \times P(C_4) =$$

$$= \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} \times \frac{3}{5} = 0{,}107 = 10{,}7\%$$

3.11 Caso o primeiro estudante chegue entre os 45 mins e os 60 mins, o encontro será sempre realizado, pois, assumindo que o segundo estudante chega antes das 13h, a diferença entre os tempos é sempre inferior ou igual a 15 min.

$$P_1 = \frac{15}{60}$$

Por outro lado, se o primeiro estudante chegar dentro dos primeiros 45 minutos, para que o encontro se realize nos próximos 15 minutos após a chegada, como a chegada dos dois alunos são acontecimentos independentes:

$$P_2 = \frac{45}{60} \times \frac{15}{60}$$

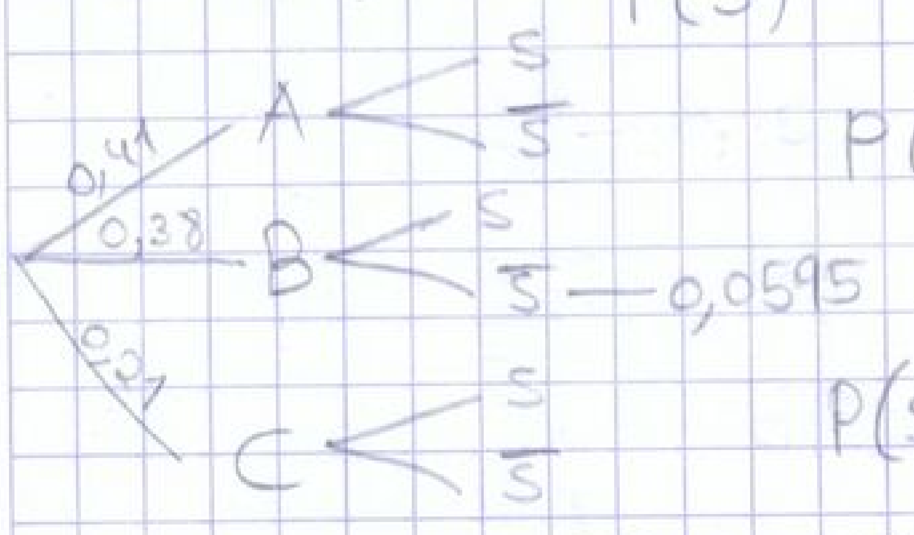
$$P = P_1 + P_2 = \frac{15}{60} + \frac{45}{60} \times \frac{15}{60} = 0{,}4375 = 43{,}75\%$$

3.12 Acontecimento A: "O utilizador é cliente da empresa A".
Acontecimento B: "O utilizador é cliente da empresa B".
Acontecimento C: "O utilizador é cliente da empresa C."
Acontecimento S: "O cliente está satisfeito".

$P(A) = 0{,}41 \quad P(B) = 0{,}38 \quad P(C) = 0{,}21 \quad P(\overline{S}) = 0{,}17$

$P(A|\overline{S}) = 0{,}35 \quad P(B|\overline{S}) = 0{,}35 \quad P(C|\overline{S}) = 0{,}30$

$$P(B|S) = \frac{P(B \cap S)}{P(S)} = \frac{P(S|B) \times P(B)}{1 - 0{,}17} = \frac{0{,}38 \times P(S|B)}{0{,}83}$$



$$P(B|\overline{S}) = \frac{P(B \cap \overline{S})}{P(\overline{S})} \Leftrightarrow P(B \cap \overline{S}) = 0{,}35 \times 0{,}17 = 0{,}0595$$

$$P(\overline{S}|B) = \frac{P(B \cap \overline{S})}{P(B)} \Leftrightarrow P(\overline{S}|B) = \frac{0{,}0595}{0{,}38} = 0{,}157$$

$$P(S|B) = 1 - P(\overline{S}|B) = 0{,}843$$

$$P(B|S) = \frac{0{,}38 \times 0{,}843}{0{,}83} = 0{,}386 = 38{,}6\%$$

A e B são independentes.

3.13 Acontecimento A: "O jogador A aceita na pergunta".
Acontecimento B: "O jogador B aceita na pergunta".
Acontecimento D: "Saiu o tema Desporto".

$$P(D_A \cap D_B | A \cap \overline{B}) = \frac{P(D_A \cap D_B \cap A \cap \overline{B})}{P(A \cap \overline{B})} = \frac{P(D_A \cap A) \times P(D_B \cap \overline{B})}{P(A) \times P(\overline{B})} =$$

$$= P(D_A | A) \times P(D_B | \overline{B})$$

$$P(D_A|A)=\frac{P(D_A\cap A)}{P(A)}=\frac{P(A|D_A)\times P(D_A)}{P(A|D_A)\times P(D_A)+P(A|L_A)\times P(L_A)+\ldots}=$$

$$=\frac{0{,}90\times\frac{1}{6}}{0{,}90\times\frac{1}{6}+0{,}10\times\frac{1}{6}+0{,}80\times\frac{1}{6}+0{,}10\times\frac{1}{6}+0{,}40\times\frac{1}{6}+0{,}30\times\frac{1}{6}}=$$

$$=0{,}346$$

$$P(D_B|\overline{B})=\frac{P(D_B\cap\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{P(\overline{B}|D_B)\times P(D_B)}{P(\overline{B}|D_B)\times P(D_B)+P(\overline{B}|L_B)\times P(L_B)+\ldots}=$$

$$=\frac{0{,}60\times\frac{1}{6}}{0{,}60\times\frac{1}{6}+0{,}50\times\frac{1}{6}+0{,}30\times\frac{1}{6}+0{,}45\times\frac{1}{6}+0{,}80\times\frac{1}{6}+0{,}15\times\frac{1}{6}}=$$

$$=0{,}214$$

$$P(D_A\cap D_B|A\cap\overline{B})=0{,}346\times 0{,}214=0{,}074=7{,}4\,\%$$