Prática 1 – Induction

① • Estrutura de indução: números inteiros maiores ou igual a 1. O elemento base é 1, e os elementos seguintes são obtidos somando 1 unidade ao elemento anterior.

• Hipótese: $\sum_{i=0}^{m} 2i+1 = (m+1)^2$

• Caso base: Para $m=1$: $\sum_{i=0}^{1} 2i+1 = 1+3 = 4$. Do outro lado da igualdade, $(1+1)^2 = 2^2 = 4$. Verifica-se então a hipótese para o caso base.

• Passo indutivo: Se assumirmos que a hipótese é válida para m, será também para $m+1$? Formalmente:

$$\sum_{i=0}^{m} 2i+1 = (m+1)^2 \longrightarrow \sum_{i=0}^{m+1} 2i+1 = (m+2)^2$$

Assumimos então a premissa como verdadeira e tentamos desenvolver a segunda parte usando a primeira equivalência até encontrar uma igualdade.

$$\sum_{i=0}^{m+1} 2i+1 = (m+2)^2 \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{m} 2i+1 + 2(m+1)+1 = (m+2)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (m+1)^2 + 2m+3 = (m+2)^2 \Leftrightarrow m^2+4m+4 = (m+2)^2 \Leftrightarrow (m+2)^2 = (m+2)^2$$

Chegamos então a uma equivalência, pelo que a hipótese é então verdadeira.

② • Estrutura de indução: É a das árvores. O elemento base é um simples nó (0 bordas). Os elementos seguintes são obtidos acrescentando um novo nó e uma borda (edge).

• Hipótese: Uma árvore com n vértices tem $n-1$ edges.

• Caso base: Para um único nó, é uma árvore, por 1., e tem 0 edges, pelo que $E_1 = n-1 = 1-1 = 0$.

Verifica-se então a hipótese para o caso base.

· Passo indutivo: Se assumirmos que a hipótese é válida para n nós, será também para n+1 nós?

Seja "e" o edge que conecta os vértices V_1 e V_2 da árvore A.

Como A é uma árvore, só existe um caminho entre V_1 e V_2. Se retirarmos o edge "e" então a árvore A seria dividida em duas árvores, A_1 e A_2. Ora, estas árvores têm menos do que n+1 nós, diz-se então que têm n_1 e n_2 nós, respetivamente. Então, o número total de edges, E, de A, é:

$$E = (n_1 - 1) + (n_2 - 1) + 1 = \overbrace{n_1 + n_2}^{n+1} - 1 = n + 1 - 1 = n$$

Logo, para com uma árvore com n+1 nós, existem n edges, pelo que a hipótese fica provada.

③ · Estrutura de indução: Todos os "pal". O elemento base é um pal com um único caracter. Os elementos seguintes são obtidos concatenando qualquer caracter antes e depois de um pal.

· Hipótese: Todos os "pal" são "palíndromes".

· Caso base: Um único caracter é um "pal" (por 1.), e é também um "palíndrome", pois é lido da mesma forma da esquerda para a direita e da direita para a esquerda. Verifica-se então a hipótese para o caso base.

· Passo indutivo: Esta prova pode ser feita recorrendo a uma prova por contradição. Começamos por assumir o contrário do que queremos provar: Nem todos os "pal" são "palíndromes".

Ora, tendo em conta o caso base, e o ponto 2., que diz que qualquer "pal" a que seja concatenado um caracter antes e depois desse "pal", o resultado é também um pal, e consequentemente um "palíndrome", pois continua a ser lido de maneira igual da esquerda para a direita e da direita para a esquerda. Consequentemente, os "pal" formados a partir deste serão também "palíndromes".

Pelo ponto 3., conclui-se que não há nenhum "pal" que não seja palíndrome, pelo que chegamos a uma contradição.

Então, a hipótese é verdadeira.

Correção da definição: 2 letras iguais é um pal.

O contrário não é sempre verdade, pois existem "palíndromos" com número par de caracteres (ex: esse), enquanto que um "pal" tem número de caracteres ímpar. No entanto, todos os palíndromos com número de caracteres ímpar são "pal".

(4) • Estrutura de indução: Todas as quantias maiores ou igual a 40€. O elemento base é a quantia de 40€. Os elementos seguintes são obtidos somando 10€ ao elemento anterior.

• Hipótese: Esta ATM suporta uma quantia de n€.

• Caso base: Para 40€: $40 = 20 \times 2 + 50 \times 0$

São apenas necessárias duas notas de 20€. Logo, verifica-se a hipótese para o caso base.

• Passo indutivo: Se a hipótese é válida para n, será também para n+10€?

- Caso 1: A quantia n proveniente da ATM contém uma nota de 50€. Então substitui-se essa nota por três notas de 20€ e obtemos uma quantia igual a n+10€.

- Caso 2: A quantia n proveniente da ATM contém apenas notas de 20€. Como a quantia tem de ser maior ou igual a 40€, existem pelo menos 2 notas de 20€. Retira-se então 2 notas de 20€ e substituímos por uma de 50€, obtendo a quantia de n+10€.

Pode-se então concluir que a máquina ATM é capaz de suportar qualquer quantia maior ou igual a 40€.

(5) · Estrutura de indução: Todos os números naturais maiores ou igual a 2. O elemento base é 2. Os elementos seguintes são obtidos somando 1 ao anterior.

· Hipótese: $(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})\dots(1-\frac{1}{n})=\frac{1}{n}$

· Caso base: Para $n=2$: $1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}=\frac{1}{2}$
Verifica-se então a hipótese para o caso base.

· Passo indutivo: Se assumirmos que a hipótese é válida para n, será também válida para $n+1$? Formalmente:

$$(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})\dots(1-\frac{1}{n})=\frac{1}{n} \longrightarrow (1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})\dots(1-\frac{1}{n+1})=\frac{1}{n+1}$$

$$\underbrace{(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})\dots(1-\frac{1}{n})}_{\text{hipótese}}(1-\frac{1}{n+1})=\frac{1}{n+1} \Leftrightarrow \frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{n+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n}\left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)=\frac{1}{n+1} \Leftrightarrow \frac{n}{n(n+1)}=\frac{1}{n+1} \Leftrightarrow \frac{1}{n+1}=\frac{1}{n+1}$$

Chegamos a uma equivalência, pelo que podemos concluir que a hipótese é verdadeira.

(6) · Estrutura de indução: Todos os números naturais maiores ou igual a 1. O elemento base é 1, e os elementos seguintes são obtidos somando 1 ao anterior.

· Hipótese: 2 é fator de n^2+n (n^2+n é par).

· Caso base: Para $n=1$: $1^2+1=1+1=2$ e 2 é par.
Verifica-se então a hipótese para o caso base.

· Passo indutivo: Se assumirmos que a hipótese é verdadeira para n, será também válida para $n+1$? Formalmente:

$$n^2+n \text{ é par} \longrightarrow (n+1)^2+(n+1) \text{ é par.}$$

$(n+1)^2+n+1=n^2+2n+1+n+1=n^2+3n+2=n^2+n+2n+2=$
$=n^2+n+2(n+1)$ $\quad$ $2(n+1)$ é par, e n^2+n é par, pela hipótese.
Logo, a soma de dois números pares resulta num número par.
Então, podemos afirmar que a hipótese é verdadeira.

(7) · Estrutura de indução: Todos os números inteiros maiores ou igual a 1. O elemento base é 1 e os elementos seguintes são obtidos somando 1 ao anterior.

· Hipótese: $\sum_{i=1}^{n} i^3 = a^2$

· Caso base: Para $n=1$: $1^3 = 1 = 1^2$
Verifica-se então a hipótese para o caso base

· Passo indutivo: exemplos: $1^3+2^3 = 9 = 3^2$
$1^3+2^3+3^3 = 36 = 6^2$
Pode-se concluir que a equivale $1^3+2^3+3^3+4^3=100=10^2$
à soma dos elementos.

Nova hipótese: $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2$ (caso base igual ao anterior)

Se se verifica para n, será também verdade para $n+1$?
Isto é, $\sum_{i=1}^{n+1} i^3 = \left(\sum_{i=1}^{n+1} i\right)^2$?

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^3 = \left(\sum_{i=1}^{n+1} i\right)^2 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} i^3 + (n+1)^3 = \left(\sum_{i=1}^{n} i + (n+1)\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2 + (n+1)^3 = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2 + 2\sum_{i=1}^{n} i\,(n+1) + (n+1)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (n+1)^3 = 2\underbrace{\left(\frac{n}{2}\right)(n+1)}_{\sum_{i=1}^{n} i}(n+1) + (n+1)^2 \Leftrightarrow (n+1)^3 = (n+1)^2(n+1) \Leftrightarrow (n+1)^3 = (n+1)^3$$

Chegamos a uma equivalência, pelo que a hipótese é verdadeira.

(8) · Estrutura de indução: Todas as árvores com 1 ou mais nós (n° inteiros maiores ou igual a 1), elemento base é 1 e os elementos seguintes são obtidos somando 1 ao anterior.

· Hipótese: Para qualquer árvore binária, o nº de "leafs" é igual ao nº de "full nodes" mais um. $L = F + 1$

· Caso base: Árvore com 1 só nó (1 "leaf" e 0 "full nodes") $1 = 0+1 = 1$.

· Passo indutivo: caso 1: adiciona-se um "node" a uma folha existente na árvore, e tanto o nº de "full nodes" como o nº de folhas não muda. caso 2: adiciona-se um "node" a um outro já existente e com 1 "node filho". Esta árvore passa a ter $n+1$ "full nodes", e a ter 1 "leaf" a mais, pelo que de $n+1$ "leafs" (pela hipótese) passa a ter $n+1+1 = n+2$ leafs. Logo, a diferença entre o nº de "leafs" pelo nº de "full nodes" será sempre igual a 1.