

Funções polinomiais: Definição; Propriedades; Cálculos Método dos coeficientes indeterminados; Dispositivo prático de Briot-Ruffini

Exercício 1: Definição e Propriedades

Considere a função polinomial $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 7x + 2$

- Determine o grau da função polinomial.
- Encontre o coeficiente principal e o termo constante da função.
- Determine o número de raízes reais e imaginárias da função.
- Calcule $f(-1)$
- Encontre todas as raízes reais da função

Exercício 2: Cálculos de Funções Polinomiais

Considere as funções polinomiais $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ e $g(x) = 2x^2 - 3x + 1$

- Encontre $f(x) * g(x)$
- Determine $f(x) - g(x)$
- Calcule $\frac{f(x)}{g(x)}$, onde for possível.
- Determine o domínio de $f(x)$ e $g(x)$.
- Encontre os valores de x para os quais $f(x) = g(x)$.

Exercício 3: Relações entre Coeficientes e Raízes

Considere uma função polinomial $f(x)$ de grau 4 com coeficientes reais, sabendo que $f(2)=0$ e $f(3)=0$.

- Determine a soma das raízes da função.
- Encontre a média das raízes da função.

c) Sabendo que uma das raízes da função é $x=-1$, encontre o polinómio resultante após sua divisão por $x+1$.

d) Encontre uma relação entre os coeficientes do polinómio e suas raízes.

e) Determine o polinómio $f(x)$ se uma das suas raízes é $x=4$.

Exercício 4: Aplicações e Problemas

Uma empresa produz e vende camisetas e o lucro mensal, em milhares de reais, pode ser modelado por uma função polinomial $P(x) = -2x^3 + 5x^2 + 3x - 10$, onde x é o número de camisetas vendidas.

a) Qual é o lucro quando $x=0$ e quando $x=1000$?

b) Determine o número de camisetas que devem ser vendidas para maximizar o lucro.

c) Qual é o lucro máximo mensal?

d) Sabendo que o preço de uma camiseta é de R\$ 20, determine a expressão da receita mensal em termos de x .

e) Determine o número de camisetas que devem ser vendidas para que a receita seja igual ao dobro do custo mensal.

Exercício 5: Desafio Teórico

Explique por que o Teorema do Resto é útil no estudo de funções polinomiais. Como você usaria o Teorema do Resto para determinar se $x-2$ é um fator de

$f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3x - 6$? Explique o processo passo a passo.

Exercício 6: Dispositivo Prático de Briot-Ruffini

Use o dispositivo prático de Briot-Ruffini para dividir o polinômio

$$f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 5x - 7 \text{ por } x-2$$

Exercício 7: Dispositivo Prático de Briot-Ruffini

Use o dispositivo prático de Briot-Ruffini para dividir o polinômio

$$g(x) = 2x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 2x + 1 \text{ por } x+1.$$

Exercício 8: Aplicações e Problemas

Um polinómio $p(x)$ é dividido por $x-3$ usando o dispositivo prático de Briot-Ruffini, e o resto é 10. Se o coeficiente de x^2 em $p(x)$ é 4, encontre o polinômio $p(x)$.

8. **Derivação:** Noção de limite; Derivada num ponto; Função derivada; Operações; Aproximação afim duma função; Aplicação das derivadas: Tabela de variações e Extremos

Exercício 1: Noção de Limite e Derivada em um Ponto

Determine a derivada da função $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ em $x=2$ utilizando a definição de limite.

Exercício 2: Noção de Limite e Derivada em um Ponto

Calcule a derivada da função $f(x) = \frac{1}{x}$ em $x=3$ utilizando a definição de limite

Exercício 3: Função Derivada e Operações

Se $f(x) = \sin(x) + \ln(x)$, encontre $f'(x)$ e $f''(x)$.

Exercício 4: Função Derivada e Operações

Dada a função $g(x) = e^x \cos x$, encontre $g'(x)$ e $g''(x)$.

Exercício 5: Aproximação Afim de uma Função

Dada a função $g(x)=x$, encontre uma aproximação linear de $g(x)$ em torno de $x=4$.

Exercício 6: Aproximação Afim de uma Função

Determine a equação da reta tangente à curva $y=x$ no ponto $(4, 2)$.

Exercício 7: Aplicação das Derivadas - Tabela de Variações e Extremos

Considere a função $h(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$

- Encontre os intervalos de crescimento e decrescimento de $h(x)$.
- Determine os valores críticos de $h(x)$ e classifique-os como máximos locais, mínimos locais ou pontos de inflexão.
- Encontre os pontos de máximo e mínimo absolutos de $h(x)$ no intervalo $[0,4]$.

Exercício 8: Aplicação das Derivadas - Tabela de Variações e Extremos

Considere a função $f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 + 2$

- Encontre os intervalos de crescimento e decrescimento de $f(x)$.
- Determine os valores críticos de $f(x)$ e classifique-os como máximos locais, mínimos locais ou pontos de inflexão.
- Encontre os pontos de máximo e mínimo absolutos de $f(x)$ no intervalo $[-1,3]$.

Exercício 9: Aplicação das Derivadas - Extremos e Problemas de Otimização

Um fazendeiro tem 1200 metros de cerca e quer cercar um campo retangular ao longo de um rio, usando o rio como um dos lados do campo. Se ele não precisa colocar uma cerca ao longo do rio, determine as dimensões do campo que maximizam a área.

Exercício 10: Aplicação das Derivadas - Extremos e Problemas de Otimização

Uma lata cilíndrica sem tampa deve ter volume de 1000 cm^3 . Determine as dimensões da lata que minimizam a quantidade de material necessária para construí-la.

Esses exercícios adicionais devem ajudar a reforçar os conceitos de Derivação e Aplicações das Derivadas, cobrindo uma variedade de problemas e técnicas.

Comportamento assimptótico de funções: Abordagem; Limite infinito em a
Limite no infinito; Assíntotas; Estudo duma função; Gráfico

Exercício 1: Abordagem de Assíntotas

Considere a função $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$.

- Determine os valores de x para os quais $f(x)$ é indefinido.
- Encontre as assíntotas verticais de $f(x)$.
- Determine as assíntotas horizontais de $f(x)$.

Exercício 2 : Limite Infinito em $x=a$

Calcule $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2-9}{x-3}$.

Exercício 3: Comportamento Assintótico

Considere a função $g(x) = e^x - \frac{1}{x}$

- Determine o comportamento assintótico de $g(x)$ quando $x \rightarrow +\infty$ e $x \rightarrow -\infty$
- Encontre as assíntotas horizontais e verticais de $g(x)$, se existirem.

Exercício 4: Comportamento Assintótico de Funções Racionais

Considere a função $h(x) = \frac{3x^2-5x+2}{2x^2+x-1}$.

- Encontre os limites para $x \rightarrow +\infty$ e $\rightarrow -\infty$ de $h(x)$.
- Determine as assíntotas verticais de $h(x)$.

Exercício 5: Interseção de Assíntotas

Dada a função $f(x) = \frac{2x^2+3x-5}{x-1}$.

- Encontre as assíntotas verticais e horizontais de $f(x)$.
- Determine se $f(x)$ intersecta alguma de suas assíntotas.

Exercício 6: Comportamento Assintótico e Limite Infinito

Considere a função $f(x) = \frac{3x^2 - 2x + 5}{x - 1}$

- Determine o comportamento assintótico de $f(x)$ quando x se aproxima de $+\infty$.
- Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ e interprete o resultado.

Exercício 7: Assíntotas Verticais e Horizontais

Estude as assintotas verticais e horizontais da função

$$g(x) = \frac{2x^2 - 3x + 1}{x - 2}$$

Exercício 8: Estudo de uma Função e Assíntotas

Considere a função $h(x) = \frac{4x^3 - 3x^2 + 2}{2x^2 + x - 3}$

- Determine o domínio de $h(x)$.
- Encontre as assintotas verticais e horizontais de $h(x)$.
- Determine o comportamento de $h(x)$ nos limites de seu domínio.

Exercício 9: Gráfico e Comportamento Assintótico

Desenhe o gráfico da função $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 2}$ e identifique suas assintotas.

Exercício 10: Limite no Infinito e Assíntotas

Estude o comportamento assintótico da função $g(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 2}$ quando $x \rightarrow +\infty$ e $x \rightarrow -\infty$.

Vectores no plano: Projecção ortogonal dum vector Produto escalar de dois vectores;

Exercício 1: Projeção Ortogonal

Dado o vetor $\vec{v} = \langle 3,4 \rangle$, encontre a projeção ortogonal de \vec{v} sobre o vetor $\vec{u} = \langle 1, -1 \rangle$

Exercício 2: Projeção Ortogonal e Vetores Ortogonais

Dado o vetor $\vec{a} = \langle 2, -1 \rangle$, encontre a projeção ortogonal de \vec{a} sobre o eixo x. Além disso, determine um vetor \vec{b} tal que \vec{a} e \vec{b} sejam ortogonais.

Exercício 3: Projeção Ortogonal e Decomposição de Vectores

Considere o vetor $\vec{v} = \langle 3,4 \rangle$. Encontre a projeção ortogonal de \vec{v} sobre o eixo y e a decomposição de \vec{v}

em componentes paralela e ortogonal ao eixo y.

Exercício 4: Projeção Ortogonal e Vectores Unitários

Dado o vetor $\vec{u} = \langle 1,2 \rangle$, encontre um vetor unitário na mesma direção de \vec{u} e use-o para encontrar a projeção ortogonal de \vec{u} sobre o eixo y.

Exercício 5: Aplicação de Projeção Ortogonal

Um barco está navegando em um lago em uma direção representada pelo vetor $\vec{v} = \langle 3, -4 \rangle$. O vento está soprando em uma direção representada pelo vetor $\vec{w} = \langle 1, 1 \rangle$. Encontre a componente do movimento do barco que é paralela ao vento e a componente do movimento que é perpendicular ao vento.

Exercício 6: Produto Escalar em \mathbb{R}^2

Dado os vetores $\vec{u} = \langle 2, -3 \rangle$ e $\vec{v} = \langle -1, 4 \rangle$, calcule o produto escalar $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

Exercício 7: Ângulo entre Vetores

Se $\vec{a} = \langle 1, 2 \rangle$ e $\vec{b} = \langle -3, 5 \rangle$, determine o ângulo entre os vetores \vec{a} e \vec{b} .

Exercício 8: Vetores Ortogonais e Produto Escalar

Dado o vetor $\vec{u} = \langle 3, 1 \rangle$, encontre um vetor \vec{v} tal que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, ou seja, \vec{u} e \vec{v} sejam ortogonais.

Exercício 9: Projeção Ortogonal e Produto Escalar

Dado o vetor $\vec{a} = \langle 2, -1 \rangle$, encontre a projeção ortogonal de \vec{a} sobre o eixo x e verifique que ela é dada por $\frac{\vec{a} \cdot \hat{i}}{\|\hat{i}\|}$ onde \hat{i} é o vetor unitário na direção do eixo x.

Exercício 10: Aplicação do Produto Escalar

Um objeto se move ao longo do vetor $\vec{v} = \langle 3, 4 \rangle$ com uma velocidade de 55 unidades por segundo. Determine a taxa de mudança da posição do objeto na direção perpendicular ao vetor \vec{v} .

Sucessões: Generalidades; Notações; Modo de geração duma sucessão;

Exercício 1: Generalidades e Notações

Considere a sucessão $a_n = \frac{1}{n}$.

- Escreva os primeiros cinco termos da sucessão.
- Determine a fórmula geral para o termo a_n .
- Calcule o limite da sucessão a_n quando n tende ao infinito.

Exercício 2: Modo de Geração de uma Sucessão

Seja a sucessão b_n definida por $b_1 = 2$ e $b_{n+1} = b_n + 3$ para todo $n \geq 1$.

- Escreva os primeiros cinco termos da sucessão b_n .
- Determine uma fórmula geral para o termo b_n .
- Calcule o limite da sucessão b_n quando n tende ao infinito.

Exercício 3: Sucessão Recorrente

Considere a sucessão c_n definida por $c_1 = 1$ e $c_{n+1} = \frac{1}{2}(c_n + \frac{3}{c_n})$ para todo $n \geq 1$.

- Encontre os primeiros cinco termos da sucessão c_n .
- Determine uma fórmula geral para o termo c_n .
- Calcule o limite da sucessão c_n quando n tende ao infinito.

Exercício 4: Progressão Geométrica

Seja a sucessão d_n uma progressão geométrica tal que $d_1 = 5$ e $d_4 = 80$.

- Determine a razão da progressão geométrica.
- Encontre uma fórmula geral para o termo d_n .
- Calcule o quinto termo da sucessão.

Exercício 5: Sucessão Alternada

Considere a sucessão $e_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$.

- a) Escreva os primeiros cinco termos da sucessão e_n .
- b) Determine uma fórmula geral para o termo e_n .
- c) Calcule o limite da sucessão e_n quando n tende ao infinito.