Index

3 Equacions

Igualtats i equacions

Utilitzem equacions quan tractem d'esbrinar una certa quantitat, desconeguda, però de la qual sabem que compleix certa condició.

La quantitat desconeguda es diu incògnita i es representa per x (o qualsevol altra lletra) i la condició que compleix s'escriu com una igualtat algebraica a la qual cridem equació.

Resoldre una equació és trobar el valor de la incògnita amb la qual es compleix la igualtat.

Quan hi ha més d'una incògnita parlem d'un sistema d'equacions. Normalment el nombre d'equacions serà igual al nombre d'incògnites, ja que això permet una solució única del sistema.

Exemple 3-1

Es reparteixen 40 euros entre dues persones, de manera que un rebi 10 euros més que l'altre. quant rep cadascun?

En primer lloc traduïm a llenguatge matemàtic la informació que dues persones reben 40 euros.

Equació 1: $x + i = 40$ euros

x representa l'import que rep la primera persona i i el que rep la segona.

A continuació traduïm la informació que un rep 10 euros més que un altre.

Equació 2: x = i - 10 euros

x rep 10 euros menys que i.

Veiem que hi ha dues incògnites x i i i dues equacions. Es tracta per tant d'un sistema d'equacions.

Ara eliminem la incògnita x, inserint l'equació 2 en 1.

i - 10 euros + i = 2i -10 euros = 40 euros

per resoldre cap a i, obtenint el seu valor.

i = (40 euros -10 euros) / 2 = 15 euros

Inserint el valor d'i = 15 euros en qualsevol de les equacions 1 o 2, obtenim

x = 25 euros

3.1 Transformacó d'equacions

Per resoldre una equació cap a una incògnita, normalment serà necessari transformar l'equació.

Podem transformar una equació, mantenint la igualtat, és a dir, mantenint la informació que conté, aplicant qualsevol operació matemàtica idèntica a banda i banda de l'equació. Cada banda de l'equació també es pot anomenar membre de l'equació.

Vegem uns exemples senzills per a les operacions de suma, resta, multiplicació i divisió.

Exemple 3.1-1

$x - 7 = 14$

Intuïm que x haurà de ser 21, però anem a demostrar-ho. Per a això vam sumar 7 a banda i banda de l'equació.

$x - 7 = 14 \mid +7$

$x -7 + 7 = 14 + 7 \rightarrow x = 14 + 7 = 21$

Exemple 3.1-2

$x + 7 = 14$

Intuïm que x haurà de ser 7, però anem a demostrar-ho. Per a això restem 7 a banda i banda de l'equació.

$x + 7 = 14 \mid -7$

$x +7 - 7 = 14 - 7 \rightarrow x = 14 - 7 = 7$

Exemple 3.1-3

$x / 7 = 3$

Intuïm que x haurà de ser 21, però anem a demostrar-ho. Per a això multipliquem per 7 tots dos costats de l'equació.

$x / 7 = 3 \mid \cdot 7$

$(x / 7) \cdot 7 = 3 \cdot 7 \rightarrow x = 3 \cdot 7 = 21$

Exemple 3.1-4

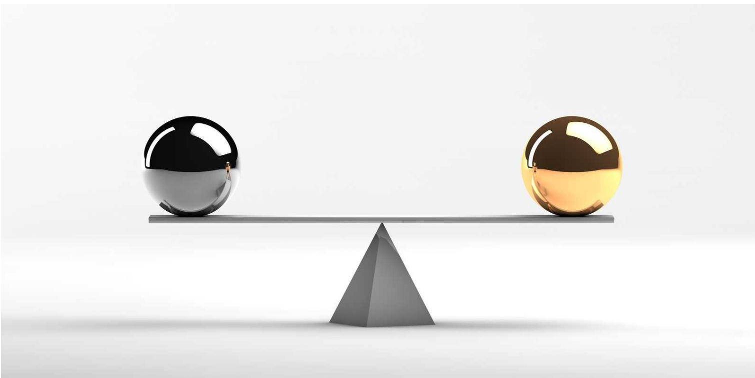
$x \cdot 7 = 49$

Intuïm que x haurà de ser 7, però anem a demostrar-ho. Per a això dividim entre 7 tots dos costats de l'equació.

$x \cdot 7 = 49 \mid /7$

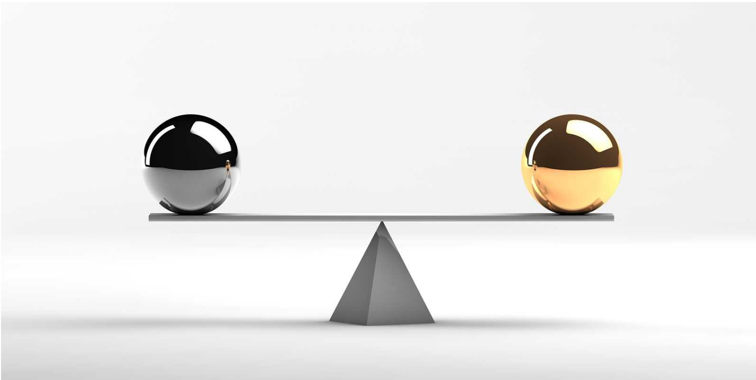
$(x \cdot 7) / 7 = 49 / 7 \rightarrow x = 49 / 7 = 7$

Una equació és com una balança en equilibri. Per mantenir l'equilibri, podem aplicar operacions a cada costat de la balança, però estàs han de ser idèntiques.



Exemple 3.1-5

2y -10 euros = 40 euros



Tenim la següent equació 2i -10 euros = 40 euros i la volem resoldre cap a i.

Apliquem una operació de suma a banda i banda de l'equació.

2i -10 euros = 40 euros | + 10 euros

2i -10 euros + 10 euros = 40 euros + 10 euros

2i = 50 euros

Ara apliquem una operació de divisió a banda i banda de l'equació.

2i = 50 euros | : 2

2i : 2= 50 euros : 2

i = 25 euros

Exemple 3.1-6

Tenim la següent equació $20\,\Omega=50\frac{V}{I+1\,A}$ i la volem resoldre cap a ***I***.

Apliquem una operació de multiplicació a banda i banda de l'equació.

$20\,\Omega=50\frac{V}{I+1\,A}$ | · (I + 1A)

$20\,\Omega\cdot(I+1\,A)=50\frac{V}{I+1\,A}\cdot(I+1\,A)$

→ $20\,\Omega\cdot(I+1\,A)=50\,V$ → $20\,\Omega\cdot I+20\,\Omega\cdot 1\,A=50\,V$

$20\,\Omega\cdot I+20\,V=50\,V$

Apliquem una operació de resta a banda i banda de l'equació.

$20\,\Omega\cdot I+20\,V=50\,V$ | - 20V

$20\,\Omega\cdot I+20\,V-20\,V=50\,V-20\,V$

$20\,\Omega\cdot I=30\,V$

I obtenim el resultat d'I, aplicant una operació de divisió a banda i banda de l'equació.

$20\,\Omega\cdot I=30\,V$ | : 20 Ω

$\frac{20\,\Omega\cdot I}{20\,\Omega}=30\frac{V}{20\,\Omega}$

$I=30\frac{V}{20\,\Omega}=1{,}5\,A$

Exercici 3.1-1

Resol les equacions

a.) $3x-6+5x=2$

b.) $x+3(-6+5x)-2=7+7x-8$

c.) $\frac{7}{4}=\frac{9x}{4}-\frac{1}{8}$

d.) $\frac{1}{3}\cdot(5-x)=\frac{5x}{6}-\frac{5}{2}$

e.) $7\cdot(5+\frac{1}{x})=\frac{5}{6x}-\frac{2}{5}$

f.) $15x\cdot\frac{1}{5}=5x-\frac{2}{5}$

3.2 Equacions equivalents

Es diuen equacions equivalents a les quals tenen les mateixes solucions.

• Si se suma o resta una quantitat o expressió a cada costat (membre) d'una equació s'obté una altra equivalent.

• Si es multipliquen o divideixen els dos costats (membres) d'una equació per un nombre (o una expressió algebraica) s'obté una altra equivalent.

Exemple 3.2-1

Equació 1: 2x -5 = 7

Si sumem 4 a cada costat de l'equació obtenim

Equació 2: 2x -5 + 4 = 7 + 4

Les equacions 1 i 2 són equivalents. Podemos comprovar-ho obtenint la seva solució.

Ecuación 1: $x=\frac{12}{2}=6$ Ecuación 2: $x=\frac{12}{2}=6$

Si **restem**, per exemple 7 de cada costat de l'equación 1, obtenim

Equació 3: 2x -5 -70 = 7 – 70

La solució de l'equació 3 és $x=\frac{12}{2}=6$, i torna a ser equivalent a les equacions 1 i 2.

Ara anem a **dividir** ambdós costats de l'equació 1 entre 20, obtenint

Equació 4: $\frac{2x-5}{20}=\frac{7}{20} \rightarrow \frac{2x}{20}-\frac{5}{20}=\frac{7}{20} \rightarrow 0{,}1x-0{,}25=0{,}35 \rightarrow 0{,}1x=0{,}35+0{,}25 \rightarrow 0{,}1x=0{,}6$

x = 6

Finalment **multipliquem** ambdós costats de l'equació 1 per 3, obtenint

Equació 5: $(2x-5)\cdot 3=7\cdot 3 \rightarrow 6x-15=21 \rightarrow 6x=21+15 \rightarrow 6x=36 \rightarrow x=\frac{36}{6}=6$

Les equacions 1 a 5 donen totes el mateix resultat x = 6. Per tant, són equivalents.

Exercici 3.2-1

Quines de les següents equacions són equivalents?

a) $3x=6$	e) $\frac{x-7}{4}=\frac{6}{16}-\frac{21}{12}$	i) $3^2 x=6^2$
b) $12x=18$	f) $\frac{3x}{3^3}=\frac{6}{3\cdot 9}$	j) $\sqrt{12}\cdot x=\sqrt{18}$
c) $\frac{x}{3}=\frac{6}{9}$	g) $\frac{3x}{\sqrt{2}}=\frac{6}{2^2}$	k) $\frac{(20-8)x}{15+3}=1$
d) $4x+5=11$	h) $\frac{\sqrt{36}\cdot x}{\sqrt{9}}=\frac{6\cdot 2}{3}$	l) $(3+1)x=6+1$

3.3 Sistemes d'equacions

De vegades, per resoldre un problema es necessita més d'una incògnita.
Per poder solucionar un problema amb diverses incògnites, necessitem diverses equacions i a aquestes les cridem un sistema d'equacions.
Perquè a cada incògnita correspongui una única solució, el nombre d'incògnites i equacions ha de ser igual.

Exemple 3.3-1
Una ploma és 3 € més cara que un bolígraf. Per 5 plomes i 4 bolígrafs paguem 33,9 €.
Quins són els preus de la ploma i el bolígraf?

En aquest exemple tenim les dues incògnites x i i, amb x representant les plomes i i els bolígrafs. En tenir dues incògnites, necessitarem dues equacions.

Comencem traduint al llenguatge matemàtic que una ploma x és 3 € més cara que un bolígraf i.
Equació 1: $x=y+3€$
Ara traduïm al llenguatge matemàtic que per 5 plomes x i 4 bolígrafs i paguem 33,9 €.
Equació 2: $5x+3y=33{,}9€$

Finalment substituïm x per i + 3 € en l'equació 2 i resolem cap a i,

$$5(y+3€)+3y=33{,}9€ \rightarrow y=\frac{33{,}9€-15€}{8}=2{,}36€$$

obtenint el següent resultat

Els bolígrafs i costen 2,36 € i les plomes x costen 5,36 €.

Podem comprovar que el resultat és correcte inserint els valors de ***x*** i ***y*** en les equacions 1 i 2 i que efectivament es compleixen les igualtats.

Exemple 3.3-2

Pau és 5 anys més jove que Maria i 5 anys major que Federic. Entre els tres igualen l'edat de la seva mare, 48 anys. Quina edat té cadascun?

En aquest exemple tenim tres incògnites, que són les edats de Maria (m), Pau (p) i Federic (f).

Comencem traduint al llenguatge matemàtic que Pau és 5 anys més jove que Maria.

Equació 1: $p+5=m$

Ara traduïm al llenguatge matemàtic que Pau és 5 anys major que Federic.

Equació 2: $p-5=f$

Falta traduir al llenguatge matemàtic que entre els tres igualen l'edat de la seva mare, 48 anys.

Equació 3: $p+m+f=48$

Hem obtingut les tres equacions necessàries per trobar els valors de les tres incògnites.

Ara inserim les equacions 1 i 2 en 3, substituint les incògnites ***m*** i ***f***.

$$p+(p+5)+(p-5)=48 \rightarrow 3p=48 \rightarrow p=\frac{48}{3}=16$$

L'edat de Pau és 16 anys, la de Maria 21 i la de Federic 11. Si vam sumar les edats, ens donen els 48 anys de la mare. Veiem que les tres equacions es compleixen.

Exercici 3.3-1

a) Quant mesura una corda si la seva tercera quarta part mesura 200 metres?

b) Trobar tres nombres consecutius que la seva sumeixi sigui 219.

c) Héctor guarda 25 euros en la seva guardiola, que suposa sumar una quarta part dels diners que ja hi havia. Quants diners hi ha en la guardiola?

d) En sumar el triple d'un nombre amb la meitat d'aquest nombre s'obté 126.
De quin nombre es tracta?

i) Llorenç gasta la meitat dels seus diners en un videojoc, i la setena part a anar al cinema. Quant tenia si encara li queden 20 €?

f) Trobar els costats d'un rectangle de 18 cm de perímetre, si la base és de l'altura.

g) Coloma, Pau i Andreu cobren 1638 € per un treball. Pau ha treballat el triple de dies que Andreu i Coloma el doble que Pau. Com repartiran els diners?

h) Carme té 16 anys i els seus dos germans petits tenen 2 i 3 anys. Quants anys han de passar perquè el doble de la suma de les edats dels germans de Carme sigui la mateixa que la que té ella?

i) Donat un nombre, la suma de la seva meitat, el seu doble i el seu triple és 55. Quin nombre és?

https://www.matesfacil.com/ESO/Ecuaciones/resueltos-problemas-ecuaciones.html

3.4 Exercicis de repàs

Es diuen equacions equivalents a les quals tenen les mateixes solucions.

Exercici 3.4-1

¿És 7 solució de $(x-6)\cdot 13=13$?

Exercici 3.4-2

Són equivalents les equacions $7-6(x-13)=1$ i $7-6x+78=1$?

Exercici 3.4-3

L'equació $6x^2-7x+c=0$ té per solució x = 8. Quin és el valor de c?

Exercici 3.4-4

Són equivalents $\frac{x}{8}-\frac{1-x}{7}=1$ i $7x-8+8x=56$?

Exercici 3.4-5

Resol l'equació $\frac{17}{2}=(x+\frac{45}{2})\cdot\frac{1}{3}$.

Exercici 3.4-6

Resol l'equació**.**

$$\frac{3x+19}{4}=(-\frac{1}{9})\cdot(-37-x)$$

Exercici 3.4-7

Resol l'equació.

$$\frac{x-2}{5}-\frac{5-x}{2}=2$$

Exercici 3.4-8

Per 2 pantalons i 4 samarretes paguem 86 euros. Si uns pantalons costa 4 euros més que una samarreta, quant costa una samarreta?

Exercici 3.4-9

La suma de tres nombres consecutius és 84. Troba el menor dels tres.

Exercici 3.4-10

La superfície d'una finca és de 158 Ha. El blat ocupa la meitat de superfície que l'ordi, i les oliveres ocupenla tercera part que l'ordi. També hi ha una superfície de 4 Ha dedicada a hortalisses. Quant ocupa el blat?