Index

3 Equacions

Igualtats i equacions

Utilitzem equacions quan tractem d'esbrinar una certa quantitat, desconeguda, però de la qual sabem que compleix certa condició.

La quantitat desconeguda es diu incògnita i es representa per x (o qualsevol altra lletra) i la condició que compleix s'escriu com una igualtat algebraica a la qual cridem equació.

Resoldre una equació és trobar el valor de la incògnita amb la qual es compleix la igualtat.

Quan hi ha més d'una incògnita parlem d'un sistema d'equacions. Normalment el nombre d'equacions serà igual al nombre d'incògnites, ja que això permet una solució única del sistema.

Exemple 3-1

Es reparteixen 40 euros entre dues persones, de manera que un rebi 10 euros més que l'altre. quant rep cadascun?

En primer lloc traduïm a llenguatge matemàtic la informació que dues persones reben 40 euros.

Equació 1: $x + i = 40$ euros

x representa l'import que rep la primera persona i i el que rep la segona.

A continuació traduïm la informació que un rep 10 euros més que un altre.

Equació 2: x = i - 10 euros

x rep 10 euros menys que i.

Veiem que hi ha dues incògnites x i i i dues equacions. Es tracta per tant d'un sistema d'equacions.

Ara eliminem la incògnita x, inserint l'equació 2 en 1.

i - 10 euros + i = 2i -10 euros = 40 euros

per resoldre cap a i, obtenint el seu valor.

i = (40 euros -10 euros) / 2 = 15 euros

Inserint el valor d'i = 15 euros en qualsevol de les equacions 1 o 2, obtenim

x = 25 euros

3.1 Transformacó d'equacions

Per resoldre una equació cap a una incògnita, normalment serà necessari transformar l'equació.

Podem transformar una equació, mantenint la igualtat, és a dir, mantenint la informació que conté, aplicant qualsevol operació matemàtica idèntica a banda i banda de l'equació. Cada banda de l'equació també es pot anomenar membre de l'equació.

Vegem uns exemples senzills per a les operacions de suma, resta, multiplicació i divisió.

Exemple 3.1-1

$x - 7 = 14$

Intuïm que x haurà de ser 21, però anem a demostrar-ho. Per a això vam sumar 7 a banda i banda de l'equació.

$x - 7 = 14 \mid +7$

$x -7 + 7 = 14 + 7 \rightarrow x = 14 + 7 = 21$

Exemple 3.1-2

$x + 7 = 14$

Intuïm que x haurà de ser 7, però anem a demostrar-ho. Per a això restem 7 a banda i banda de l'equació.

$x + 7 = 14 \mid -7$

$x +7 - 7 = 14 - 7 \rightarrow x = 14 - 7 = 7$

Exemple 3.1-3

$x / 7 = 3$

Intuïm que x haurà de ser 21, però anem a demostrar-ho. Per a això multipliquem per 7 tots dos costats de l'equació.

$x / 7 = 3 \mid \cdot 7$

$(x / 7) \cdot 7 = 3 \cdot 7 \rightarrow x = 3 \cdot 7 = 21$

Exemple 3.1-4

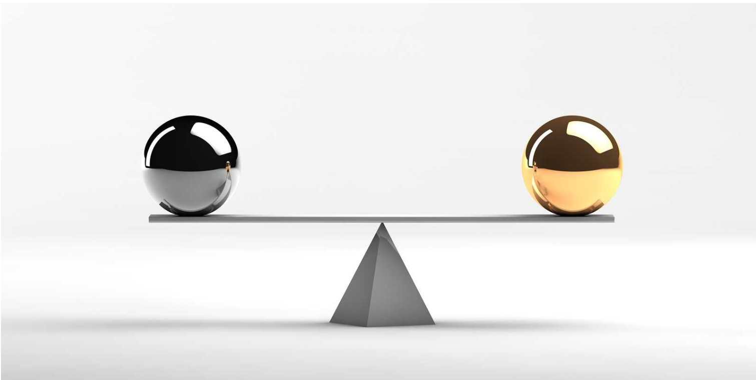
$x \cdot 7 = 49$

Intuïm que x haurà de ser 7, però anem a demostrar-ho. Per a això dividim entre 7 tots dos costats de l'equació.

$x \cdot 7 = 49 \mid /7$

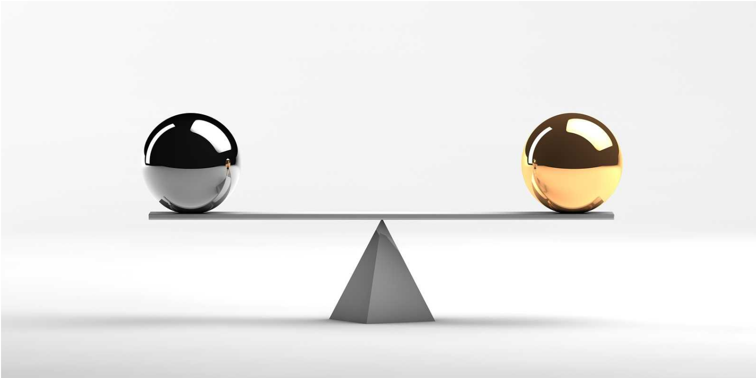
$(x \cdot 7) / 7 = 49 / 7 \rightarrow x = 49 / 7 = 7$

Una equació és com una balança en equilibri. Per mantenir l'equilibri, podem aplicar operacions a cada costat de la balança, però estàs han de ser idèntiques.



Exemple 3.1-5

2y -10 euros = 40 euros



Tenim la següent equació 2i -10 euros = 40 euros i la volem resoldre cap a i.

Apliquem una operació de suma a banda i banda de l'equació.

2i -10 euros = 40 euros | + 10 euros

2i -10 euros + 10 euros = 40 euros + 10 euros

2i = 50 euros

Ara apliquem una operació de divisió a banda i banda de l'equació.

2i = 50 euros | : 2

2i : 2= 50 euros : 2

i = 25 euros

Exemple 3.1-6

Tenim la següent equació $20\,\Omega=50\frac{V}{I+1\,A}$ i la volem resoldre cap a ***I***.

Apliquem una operació de multiplicació a banda i banda de l'equació.

$20\,\Omega=50\frac{V}{I+1\,A}$ | · (I + 1A)

$20\,\Omega\cdot(I+1\,A)=50\frac{V}{I+1\,A}\cdot(I+1\,A)$

→ $20\,\Omega\cdot(I+1\,A)=50\,V$ → $20\,\Omega\cdot I+20\,\Omega\cdot 1\,A=50\,V$

$20\,\Omega\cdot I+20\,V=50\,V$

Apliquem una operació de resta a banda i banda de l'equació.

$20\,\Omega\cdot I+20\,V=50\,V$ | - 20V

$20\,\Omega\cdot I+20\,V-20\,V=50\,V-20\,V$

$20\,\Omega\cdot I=30\,V$

I obtenim el resultat d'I, aplicant una operació de divisió a banda i banda de l'equació.

$20\,\Omega\cdot I=30\,V$ | : 20 Ω

$\frac{20\,\Omega\cdot I}{20\,\Omega}=30\frac{V}{20\,\Omega}$

$I=30\frac{V}{20\,\Omega}=1{,}5\,A$

Exercici 3.1-1

Resol les equacions

a.) $3x-6+5x=2$ b.) $x+3(-6+5x)-2=7+7x-8$ c.) $\frac{7}{4}=\frac{9x}{4}-\frac{1}{8}$

d.) $\frac{1}{3}\cdot(5-x)=\frac{5x}{6}-\frac{5}{2}$ e.) $7\cdot(5+\frac{1}{x})=\frac{5}{6x}-\frac{2}{5}$ f.) $15x\cdot\frac{1}{5}=5x-\frac{2}{5}$

Exercici 3.1-2

a) En sumar el triple d'un nombre amb la meitat d'aquest nombre s'obté 126.

De quin nombre es tracta?

b) Una ploma és 3 euros més cara que un bolígraf. Per 5 plomes i 4 bolígrafs paguem 33,9 euros.

Quant costa la ploma i quant el bolígraf?

c) Pablo és 5 anys més jove que María i 5 anys major que Federico. Entre els tres igualen l'edat de la seva mare, 48 anys. Quina edat té cadascun?

d) Lorenzo gasta la meitat dels seus diners en un videojoc, i la setena part a anar al cinema. Quant tenia si encara li queden 20 euros?

i) Trobar els costats d'un rectangle de 18 cm de perímetre, si la base és de l'altura.

f) Paloma, Pablo i Andrés cobren 1638 euros per un treball. Pablo ha treballat el triple de dies que Andrés i, Paloma el doble que Pablo. Com repartiran els diners?

3.2 Ecuacions equivalents

Es diuen equacions equivalents a les quals tenen les mateixes solucions.

• Si se suma o resta una quantitat o expressió a cada costat (membre) d'una equació s'obté una altra equivalent.

• Si es multipliquen o divideixen els dos costats (membres) d'una equació per un nombre (o una expressió algebraica) s'obté una altra equivalent.

Exemple 3.2-1

Equació 1: 2x -5 = 7

Si sumem 4 a cada costat de l'equació obtenim

Equació 2: 2x -5 + 4 = 7 + 4

Les equacions 1 i 2 són equivalents. Podemos comprovar-ho obtenint la seva solució.

Ecuación 1: $x=\frac{12}{2}=6$ Ecuación 2: $x=\frac{12}{2}=6$

Si **restem**, por ejemplo 7 de cada costat de l'ecuación 1, obtenim

Ecuació 3: 2x -5 -70 = 7 – 70

La solució de l'ecuació 3 és $x=\frac{12}{2}=6$, i torna a ser equivalent a les ecuacions 1 i 2.

Ara anem a **dividir** ambdós costats de laecuació 1 entre 20, obtenint

Ecuació 4: $\frac{2x-5}{20}=\frac{7}{20} \rightarrow \frac{2x}{20}-\frac{5}{20}=\frac{7}{20} \rightarrow 0{,}1x-0{,}25=0{,}35 \rightarrow 0{,}1x=0{,}35+0{,}25 \rightarrow 0{,}1x=0{,}6$

x = 6

Finalment **multipliquem** ambdós costats de l'equació 1 per 3, obtenint

Ecuació 5: $(2x-5)\cdot 3=7\cdot 3 \rightarrow 6x-15=21 \rightarrow 6x=21+15 \rightarrow 6x=36 \rightarrow x=\frac{36}{6}=6$

Les equacions 1 a 5 donen totes el mateix resultat x = 6. Per tant, són equivalents.

Exercici 3.2-1

Quines de les següents equacions són equivalents?

a) $3x=6$

b) $12x=18$

c) $\frac{x}{3}=\frac{6}{9}$

d) $4x+5=11$

e) $\frac{x-7}{4}=\frac{6}{16}-\frac{21}{12}$

f) $\frac{3x}{3^3}=\frac{6}{3\cdot 9}$

g) $\frac{3x}{\sqrt{2}}=\frac{6}{2^2}$

h) $\frac{\sqrt{36}\cdot x}{\sqrt{9}}=\frac{6\cdot 2}{3}$

i) $3^2x=6^2$

j) $\sqrt{12}\cdot x=\sqrt{18}$

k) $\frac{(20-8)x}{15+3}=1$

l) $(3+1)x=6+1$

3.3 Exercicis de repas

Es diuen equacions equivalents a les quals tenen les mateixes solucions.

Exercici 3.3-1

¿Es 7 solución de $(x-6)\cdot 13=13$?

Ejercicio 3.3-2

¿Son equivalentes las ecuaciones $7-6(x-13)=1$ y $7-6x+78=1$?

Ejercicio 3.3-3

La ecuación $6x^2-7x+c=0$ tiene por solución ***x*** = 8. ¿Cuál es el valor de ***c***?

Ejercicio 3.3-4

¿Son equivalentes $\frac{x}{8}-\frac{1-x}{7}=1$ y $7x-8+8x=56$?

Ejercicio 3.3-5

Resuelve la ecuación $\frac{17}{2}=(x+\frac{45}{2})\cdot\frac{1}{3}$.

Ejercicio 3.3-6

Resuelve la ecuación $\frac{3x+19}{4}=(-\frac{1}{9})\cdot(-37-x)$.

Ejercicio 3.3-7

Resuelve la ecuación $\frac{x-2}{5}-\frac{5-x}{2}=2$.

Ejercicio 3.3-8

Por 2 pantalones y 4 camisertas pagamos 86 euros. Si un pantalón cuesta 4 euros más que una camiseta, ¿cuánto cuesta una camiseta?

Ejercicio 3.3-9

La suma de tres números consecutivos es 84. Haya el menor de los tres.

Ejercicio 3.3-10

La superficie de una finca es de 158 Ha. Un olivar ocupa la mitad de superficie que un encinar, y el trigo ocupa la tercera parte que el encinar. También hay una superficie de 4 Ha dedicada a huerta. ¿Cuánto ocupa el encinar?

Fuente:
http://recursostic.educacion.es/secundaria/edad/2esomatematicas/2quincena6/index2_6.htm