Index

2Expressions algebraiques	2
2.2 Monomis	7
2.2.1 Suma i resta de monomis	1C
2.2.2 Multiplicar i dividir monomis	12
2.3 Polinomis	13
2.4 Repàs fraccions	16
2.5 Exercicis de reforç	30
2.6 Repàs ordre d'operacions aritmètiques i potències	36
2.6.1 Sumes, restes, multiplicacions i divisions	36
2.6.2 Multiplicació i divisió amb nombres negatius	37
2.6.3 Potències	40
2.7 Solucions	41

Pàg. 1 de 65 Paulino Posada

2 Expressions algebraiques

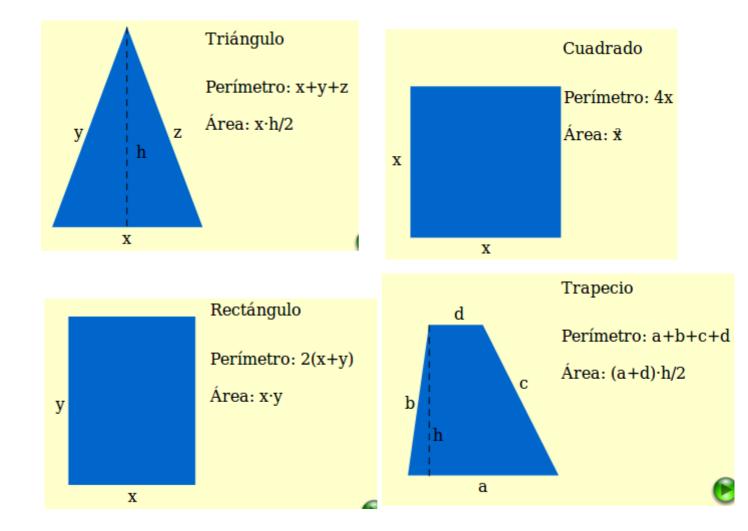
Una expressió algebraica és un conjunt de nombres i lletres units entre si per les operacions de sumar, restar, multiplicar, dividir i per parèntesis. Per exemple:

$$3+2\cdot x^2-x \text{ o } x\cdot y-32\cdot (x\cdot y2-y)$$

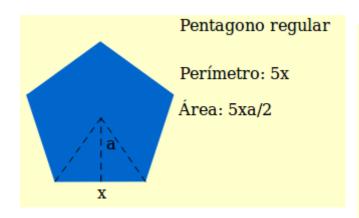
Les lletres representen valors que no coneixem i podem considerar-les com la generalització d'un nombre. Les cridarem variables.

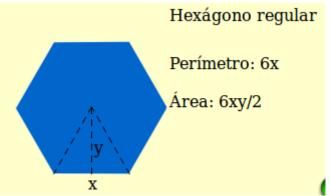
El signe de multiplicar se sobreentén davant d'una lletra o un parèntesi.

Així, $3 \cdot a$ és equivalent a 3a, i $3 \cdot (2+x)$ és equivalent a 3(2+x).



Paulino Posada Pàg. 2 de 65





Paulino Posada Pàg. 3 de 65

2.1 Obtenció d'expressions

Pretenem transformar un enunciat, on hi ha un o diversos valors que no coneixem, en una expressió algebraica.

Cadascun dels valors (variables) que no coneixem ho representarem per una lletra diferent.

Exercici 2.1-1

Transforma els enunciats en expressions algebraiques.

- a.) El triple del producte de dos nombres.
- b.) Un terç del producte de dos nombres més 5.
- c.) La desena part del producte de dos nombres, menys un.
- d.) El doble d'un nombre més set
- i.) La cinquena part d'un nombre més vuit.
- f.)Un terç de la suma de dos nombres més onze
- g.)La meitat del producte de dos nombres.
- h.) L'arrel quadrada de la suma de dos quadrats.
- i.) El 30% d'un nombre.
- j.) El quadrat de la suma de dos nombres.
- k.) La mitjana aritmètica de tres nombres.

Paulino Posada Pàg. 4 de 65

Valor numèric

Si en una expressió algebraica substituïm les lletres (variables) per nombres, tindrem una expressió numèrica. El resultat d'aquesta expressió és el que anomem valor numèric de l'expressió algebraica per a aquests valors de les variables.

És important que tinguis en compte la prioritat de les operacions

- 1. Potències
- 2. Productes i quocients
- 3. Summes i restes

Exercici 2.1-2

Calcula el valor numèric amb x = 7 i x = -3

- a) $\frac{x}{2}$ +7 b) 7x+2 c) 2(x+7) d) 2x+7

Paulino Posada Pàg. 5 de 65

Calcula el valor numèric

a.)
$$-x^2-y^2-3x-2y+2$$
 $x=0$ i $y=0$

b.)
$$x^2 + 3x + 1$$
 $x = 5$

c.)
$$2x^2 - 3x$$
 $x = 3$

d.)
$$-x^2+y^2-xy+3x-1$$
 $x=9 i y=0$

e.)
$$2x^2 + 3x - 1$$
 $x = 7$

f.)
$$2x^2+2x+3$$
 $x=3$

g.)
$$-x^2-x-3$$
 $x=9$

h.)
$$3x^2 + 3x + 3$$
 $x = 4$

i.)
$$3x^2-2y^2-3xy+2x+1$$
 $x = 0$ i $y = 0$

j.)
$$-x^2+y^2-xy+x+3y$$
 $x = 5 i y = 0$

k.)
$$2x^2+3x+2$$
 $x=9$

1.)
$$-x^2-3x$$
 $x=1$

m.)
$$3x^2-2x-1$$
 $x=8$

n.)
$$-3y^2+2xy-2x-3$$
 $x = 9 i y = 0$

o.)
$$3x^2 + x + 3$$
 $x = 4$

p.)
$$-x^2-x-3$$
 $x=3$

2.2 Monomis

Un monomi és una expressió algebraica formada pel producte d'un nombre i una o més variables. Al nombre ho anomenem coeficient i al conjunt de les variables, literal.

Anomenem grau del monomi a la suma dels exponents de la seva part literal i grau respecte d'una variable, a l'exponent d'aquesta variable.

Dos monomis són semblants si els seus literals són iguals.

Dos monomis són oposats si són semblants i els seus coeficients són oposats.

Exemple 2.2-1

Monomi 1: $-8x^4y^2$ Monomi 2: $-26x^4y^2$

Coeficient: -8 Coeficient: -26

Variables: x, y Variables: x, y

Literal: x^4y^2 Literal: x^4y^2

Grau: 6 Grau: 6

Els monomis 1 i 2 són semblants.

Els monomis 1 i 2 no són oposats.

Paulino Posada Pàg. 7 de 65

Crea un full de càlcul amb els resultats dels monomis 1 i 2 amb

$$-10 \le x \le 10$$

$$y \in \{-1,0,1\}$$

Crea les gràfiques dels monomis corresponents als valors de x i y.

Solució

Exemple 2.2-2

Monomi 2: $6x^3y^4$ Monomi 1: $-17x^6y^3$

Coeficient: -17 Coeficient: 6

Variables: x, y Variables: x, y

Literal: x^6y^3 Literal: x^3y^4

Grau: 9 Grau: 7

Els monomis 1 i 2 no són semblants, els graus són diferents.

Els monomis 1 i 2 no són oposats.

Exercici 2.2-2

Crea un full de càlcul amb els resultats dels monomis 1 i 2 en el qual

$$-10 \le x \le 10$$

$$y \in \{-1,0,1\}$$

Crea els gràfics dels monomis corresponents als valors de x i y.

Paulino Posada Pàg. 8 de 65 FPB - Ciències Aplicadas 2

Unitat 2 – Expressions algebraiques

09/18

Exemple 2.2-3

Monomi 1: $11x^5y^2$ Monomi 2: $-11x^5y^2$

Coeficient: 11 Coeficient: -11

Variables: x, y Variables: x, y

Literal: $x^5 y^2$ Literal: $x^5 y^2$

Grau: 7 Grau: 7

Els monomis 1 i 2 són semblants, els seus graus són iguals.

Els monomis 1 i 2 són oposats, els seus coeficients són complementaris.

Exercici 2.2-3

Crea un full de càlcul amb els resultats dels monomis 1 i 2 en la qual

$$-10 \le x \le 10$$

$$y \in \{-1,0,1\}$$

Crea els gràfics dels monomis corresponents als valors de x i y.

Paulino Posada Pàg. 9 de 65

Relaciona les cel·les de la taula.

	1	2	3	4
Α	Y³	πу	Coefic. TT Grado 1	2×3y
В	y+3	x ³ /2	No es un monomio	Coeficiente 1 Grado 3
С	Coeficiente 2 Grado 8	Coefic7 Grado 5	Coeficiente 1 Grado 4	Coeficiente 6 Grado 3
D	χγ³	2x3y5	-7x ⁵	Coefic. 0.5 Grado 3

2.2.1 Suma i resta de monomis

Tres peres i dues peres són 5 peres. Però 3 peres i 2 pomes no són 5 peres ni 5 pomes, són 3 peres + 2 pomes.



El mateix ocorre amb els monomis. Si dos monomis són semblants, sumem o restem els coeficients i deixem el mateix literal. Si no són semblants, aquesta operació no pot expressar-se de manera més simplificada.

3x+2x=5x, però les expressions $3x^2+2x$ o 2x+7y no es poden simplificar.

Paulino Posada Pàg. 10 de 65

Exercici 2.2.1-1

e.) 6 x 5 y 3

Suma i resta els monomis.

a.)
$$-22 x^4 y^2$$
 $-5 x^4 y^2$ f.) $-4 x^6 y$ $5 x^4 y^2$ b.) $20 x^5 y^3$ $-4 x^3 y^2$ g.) $11 x^6$ $-8 x^6$ c.) $-13 x^5 y^3$ $16 x^5 y^3$ h.) $4 x^6 y^3$ $-25 x^7 y^2$ d.) $16 x^2 y$ $3 x^3 y^2$ i.) $10 x^5 y^3$ $-25 x^5 y^3$ e.) $6 x^5 y^3$ $-12 x^5 y^3$ j.) $-25 x^7 y^3$ $5 x^6 y^3$

Paulino Posada Pàg. 11 de 65

2.2.2 Multiplicar i dividir monomis

El producte de dos monomis és un monomi que té per coeficient el producte dels coeficients i per part literal el producte de les parts literals (recorda la propietat: $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$).

Exemple 2.2.2-1

$$(3x^2y)\cdot(2x) = (3\cdot 2)x^2yx = 6x^{2+1}y = 6x^3y$$

Per dividir de monomis, es fa la divisió dels coeficients i es divideixen les parts

literals, tenint en compte que $a^n: a^m = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$.

Exemple 2.2.2-2

$$(3x^2y): (2x) = \frac{3}{2} \cdot \frac{x^2y}{x} = \frac{3}{2} \cdot \frac{x \cdot x \cdot y}{x} = \frac{3}{2} \cdot xy$$

Exercici 2.2.2-1

Suma, resta, multiplica i divideix els monomis.

a.)
$$3 \times y^2$$
 $4 \times y$ f.) $-5 \times y^3$ $4 \times y^3$
b.) $5 \times y$ $-8 \times y^2$ g.) $\frac{4}{5} \times^3 y^3$ $-\frac{7}{10} \times^3$
c.) $-\frac{7}{5} \times y$ $-\frac{2}{3} \times^2 y$ h.) $-4 \times^2 y^3$ $\times^2 y^3$
d.) $\times y$ $\times y^2$ i.) $\times y^3$ $\times y^3$ $\times y^3$ $\times y^3$ j.) $\frac{3}{4} \times y^2$ $-\frac{5}{8} \times^2 y^3$

Paulino Posada Pàg. 12 de 65

2.3 Polinomis

¿Què són?

La suma de diversos monomis no semblants és un polinomi, el conjunt dels polinomis està format per monomis o summes de monomis no semblants. Si un dels monomis no té part literal, és anomenat terme independent. El major grau de tots els seus monomis, és anomenat grau del polinomi. Nomenem els polinomis amb una lletra majúscula i posem entre parèntesis les variables que ho integren, però en aquesta explicació ens restringirem a una sola variable.

És important que sàpigues identificar els coeficients d'un polinomi segons el seu grau, així si $P(x)=x^3+2x-4$. el seu grau és 3 i el seu coeficient de grau tres és 1, el seu coeficient de grau un és 2 i el terme independent o coeficient de grau zero és -4.

Exemple 2.3-1

$P(x) = -5 x^3$	3	
Sus coeficient	es, ordenados de gra	ado mayor a menor
gr 3 gr 2 gr 1 -5 0 0	or 0 O Término indep	pendiente
Su grado	¿Cuántos monomi	os lo forman?
3	1	
Valor numéric	o en_ 1	
-5		
		OWO

Paulino Posada Pàg. 13 de 65

Exemple 2.3-2

Exemple 2.3-3

$P(x) = -7 x^5 + 4 x^3 + 9 x^2$		
Sus coeficiente	s, ordenados de grado mayor a menor	
	gr 2 gr 1 gr 0	
-7 0 4	9 0 0 Término independiente	
Su grado	¿Cuántos monomios lo forman?	
5	3	
Valor numérico	en -4	
7056		

Paulino Posada Pàg. 14 de 65

En els següents polinomis indica coeficients, grau i nombre de monomis que els formen.

Calcula el valor numèric en 6.

Amb Calc fes una gràfica de cadascun d'ells per a -8 < x < 8

- a.) $P(x) = 6x^4$
- b.) $P(x)=3x^6+2x^5$
- c.) $P(x) = -8 x^5 2 x^3 + 5 x^2$
- d.) $P(x) = -3 x^5 + 2 x^3 + x^2$
- e.) $P(x) = -9 x^5 9 x^4 + 8 x^2$

Paulino Posada Pàg. 15 de 65

2.4 Repàs fraccions

Una fracció $\frac{a}{b}$ és la división del nombre sencer a entre el nombre sencer b.

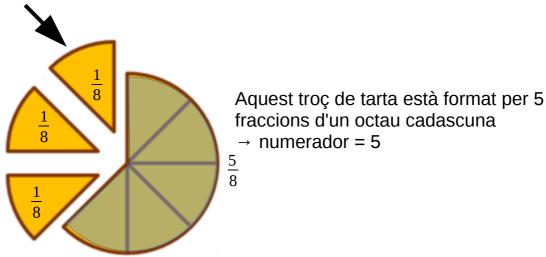
$$\frac{a}{b} = a \div b$$

Anomenem:

 $a \rightarrow$ numerador, indica el nombre d'unidades fraccionarias

 $b \rightarrow$ denominador, indica el nombre de parts en les quals es divideix la unitat.

Aquesta és una fraccion d'un octau.



La unitat (tarta) està dividida en 8 parts → denominador = 8

Paulino Posada Pàg. 16 de 65

Fraccions equivalents

Dues fraccions són equivalents quan representen la mateixa quantitat.

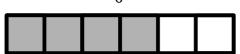
Exemples:

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$$

 $\frac{2}{3}$

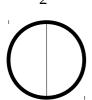


 $\frac{4}{6}$



$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$$

 $\frac{1}{2}$



 $\frac{2}{4}$

L'amplificació d'una fracció s'aconsegueix multiplicant numerador i denominador amb el mateix nombre.

Exemple:

$$\frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{4}{6} = \frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 7} = \frac{14}{21}$$

La **simplificació d'una fracció** resulta de dividir numerador i denominador per el mateix nombre.

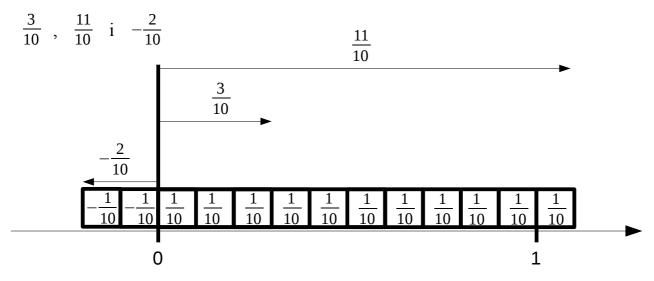
Exemple:

$$\frac{18}{12} = \frac{18 \div 2}{12 \div 2} = \frac{9}{6} = \frac{18 \div 3}{12 \div 3} = \frac{6}{4}$$

Les fraccions obtingudes per amplificació o simplificació són equivalents.

Per representar una **fracció en la recta numèrica**, es divideix la unitat en tantes parts com indica el denominador.

Exemple:



Paulino Posada Pàg. 18 de 65

Quines de les següents parelles de fraccions són equivalents?

Exercici 2.4-2

Escriu dues fraccions amplificades per a cada fracció.

- a) $\frac{3}{5}$
- b) $\frac{15}{2}$

Exercici 2.4-3

Simplifica les següents fraccions fins obtenir una fracció irreductible.

- $a) \frac{1}{20}$
- b) $\frac{36}{24}$
- c) $\frac{14}{10}$

Paulino Posada Pàg. 19 de 65

Cerca les parelles de fraccions equivalents.

a) $\frac{3}{5}$	d) $\frac{18}{20}$
b) $\frac{25}{35}$	e) $\frac{5}{4}$
c) $\frac{3}{5}$	f) $\frac{9}{15}$

Exercici 2.4-5

Amplifica cada fracció.

		_
a)		
a)		
b)	2	
(b)	5	
c)	.	
1)	4	
d)	<u>5</u>	

Exercici 2.4-6

Transforma en fraccions irreductibles.

a)	$\frac{20}{28}$
b)	$\frac{-125}{45}$
c)	360 480
d)	$\frac{270}{15}$

Paulino Posada Pàg. 20 de 65

Omple els buits per aconseguir fraccions equivalents.

- a) $\frac{2}{6} = \frac{(...)}{12} = \frac{1}{(...)} = \frac{(...)}{18}$
- b) $\frac{(...)}{7} = \frac{6}{21} = \frac{18}{(...)} = \frac{(...)}{126}$
- c) $\frac{1}{4} = \frac{3}{(...)} = \frac{(...)}{8}$
- d) $\frac{15}{10} = \frac{(...)}{2} = \frac{6}{(...)}$

Exercici 2.4-8

Representa en la recta numèrica les següents fraccions.

- a) $-\frac{2}{5}$ b) $\frac{7}{3}$ c) $\frac{4}{7}$ d) $-\frac{8}{3}$

Exercici 2.4-9

Simplifica hasta transformar en fracción irreductible.

- a) $\frac{25}{3}$ b) $\frac{16}{24}$ c) $\frac{3300}{1100}$ d) $\frac{60}{75}$

Exercici 2.4-10

Simplifica fins transformar en fracció irreductible.

a) $\frac{260}{300}$	d) $\frac{180}{120}$
b) $\frac{75}{120}$	e) $\frac{330}{121}$
c) $\frac{45}{90}$	f) $\frac{36}{54}$

Paulino Posada Pàg. 21 de 65

Representa gràficament les següents fraccions ordenades de major a menor.

- a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{3}{4}$ c) $\frac{3}{8}$

Pàg. 22 de 65 Paulino Posada

Suma i resta

Primer cas: Fraccions amb denominador idèntic.

Quan el denominador és idèntic, les fraccions es poden sumar i restar sumant i restant els numeradors.

Paulino Posada Pàg. 23 de 65

Segon cas: Fraccions amb denominador distint.

Quan el denominador de les fraccions a sumar o restar és distint, s'han de transformar les fraccions per aconseguir que tinguin un denominador comú.

Exemples:

Denominadors 3 i 6 → denominador comú 6.

Denominadors 3 i 6 → denominador comú 12.

$$\frac{2}{3} + \frac{2}{6} = \frac{4 \cdot 2}{4 \cdot 3} + \frac{2 \cdot 2}{2 \cdot 6} = \frac{8}{12} + \frac{4}{12} = \frac{12}{12} = 1$$

$$\frac{2}{3} \quad \frac{2}{6} \quad \frac{8}{12} \quad \frac{4}{12} \quad \frac{12}{12} \quad 1$$

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{6} = \frac{2 \cdot 2}{2 \cdot 3} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} - \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{3 \div 3}{6 \div 3} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{2}{3} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{4}{6} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{3}{6} \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Paulino Posada Pàg. 24 de 65

Denominadors 3 i 6 → denominador comú 12.

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{6} = \frac{4 \cdot 2}{4 \cdot 3} - \frac{2 \cdot 1}{2 \cdot 6} = \frac{8}{12} - \frac{2 \cdot 1}{2 \cdot 6} = \frac{8}{12} - \frac{2}{12} = \frac{6}{12} = \frac{6 \div 6}{12 \div 6} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{2}{3}$$
 $\frac{1}{6}$ $\frac{8}{12}$ $\frac{2}{12}$ $\frac{6}{12}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$

Multiplicació

Es multiplica numerador amb numerador i denominador amb denominador.

Exemples:

$$\frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{1} = \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 1} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{6} = \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 6} = \frac{4}{18} \text{ Aquesta fracció es pot simplificar. } \frac{4}{18} = \frac{4 \div 2}{18 \div 2} = \frac{2}{9}$$

Paulino Posada Pàg. 25 de 65

Divisió (multiplicació en creu)

Es divideix multiplicant numerador de la primera fracció amb denominador de la segona fracció, donant aquesta multiplicació el numerador de la fracció resultant. El denominador de la fracció resultant el dóna la multiplicació de denominador de la primera fracció amb numerador de la segona fracció.

Exemples:

$$\frac{2}{3}$$
: $2 = \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$: $\frac{2}{1} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{1}} = \frac{2 \cdot 1}{3 \cdot 2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$$\frac{2}{3}$$
: $\frac{4}{2} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{2}} = \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 4} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} \cdot \frac{\frac{d}{d}}{\frac{d}{c}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

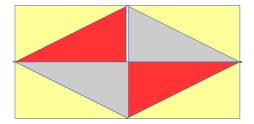
Potencia

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^b}{b^n}$$
 Exemple: $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n}$$
 Exemple: $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{0} = 1 = \left(\frac{3}{2}\right)^{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{3} \rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{2}\right)^{3}$

Paulino Posada Pàg. 26 de 65

Quines fraccions de la superficie de la imatge representen les àrees grises, grogues i vermelles?



Exercici 2.4-13

Ordena de major a menor les fraccions.

$$\frac{3}{8}$$
, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{4}$

Exercici 2.4-14

Suma i resta les següents fraccions.

$$\frac{3}{6} + \frac{2}{5} - \frac{3}{8}$$

Exercici 2.4-15

Resol.

a)
$$\frac{2}{7} \div \frac{3}{5}$$

b)
$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}$$

c)
$$8 \cdot \frac{3}{5} \div \frac{23}{7}$$

Calcula.

- a) $(\frac{3}{5})^2 \cdot (\frac{3}{5})^3$
- b) $(\frac{1}{2})^5 \div (\frac{1}{2})^2$
- c) $(\frac{2}{3}) + (\frac{2}{3} \frac{4}{9}) \div (\frac{1}{3} \frac{3}{5})$

Exercici 2.4-17

Calcula.

a) $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6}$	d) $\frac{8}{10} + \frac{13}{15} + \frac{2}{30}$
b) $\frac{2}{3} - \frac{2}{5} + \frac{7}{4}$	e) $\frac{12}{6} - \frac{3}{5} + \frac{4}{7}$
c) $\frac{4}{7} + \frac{3}{8} - (\frac{2}{3} + \frac{1}{3})$	f) $-\frac{2}{3} - \frac{3}{7} - \frac{5}{8}$

Exercici 2.4-18

Ordena de major a menor.

$$\frac{2}{3}$$
 , $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{2}$

Exercici 2.4-19

Calcula.

a) $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7}$	d) $\frac{3}{5} \div \frac{1}{2}$
b) $2 \cdot \frac{3}{8}$	e) $\frac{3}{7} \cdot 2 \div \frac{1}{5}$
c) $\frac{5}{7} \cdot \frac{4}{8}$	f) $\left(\frac{2}{7} \div \frac{4}{5}\right) \cdot \frac{4}{7}$

Paulino Posada Pàg. 28 de 65

Calcula.

a) $(\frac{1}{3})^3 \div (\frac{1}{3})^2$	d) $\left(\frac{-5}{4}\right)^2 \div \left(\frac{-5}{4}\right)^3$
b) $-(\frac{3}{5})^5 \div (\frac{3}{5})^7$	e) $(\frac{3}{7})^{-2}$
c) $\left[\left(\frac{2}{3} \right)^{-2} \right]^{-2}$	f) $(\frac{8}{3})^2 \div (\frac{8}{3})^5$

Exercici 2.4-21

Calcula.

a) $\frac{5}{3} - \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{5}$	d) $\frac{5}{3} \div \frac{2}{3} - \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{6} + \frac{1}{3} \cdot (\frac{3}{7} \div \frac{2}{14})$
b) $\frac{3}{2} + \frac{2}{3} \div \frac{3}{4} - \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2}$	e) $3 - \frac{5}{7} \cdot (\frac{2}{3} \div \frac{7}{2}) + (\frac{3}{5})^{-1} \cdot \frac{5}{3}$
c) $\frac{5}{2} - (\frac{3}{4} + \frac{1}{2}) + \frac{10}{6} \cdot (\frac{1}{2} - \frac{3}{5})$	f) $(\frac{2}{7} - \frac{3}{5}) \div (\frac{1}{2} + \frac{3}{7}) - \frac{2}{7}$

Exercici 2.4-22

Uns pantalons encogeixen $\frac{1}{13}$ de la seva llargària al rentar-los.

Quant mesuraran els pantalons després de rentar-los, si la seva llargària original era de 130 cm?

Exercici 2.4-23

Al teatre han assistit 793 persones , de les quals $\frac{6}{13}$ són adolescents.

- a) Quants adolescents hi han assistit?
- b) Si $\frac{2}{3}$ dels adolescents eren al·lotes, quantes al·lotes hi han assistit?

Paulino Posada Pàg. 29 de 65

2.5 Exercicis de reforç

Exercici 2.5-1

Transforma els enunciats en expressions algebraiques.

- a.) El doble d'un nombre més quatre.
- b.) La tercera part del quadrat d'un nombre.
- c.) Un nombre menys set.
- d.) El doble de la suma d'un nombre més quatre.
- e.) La meitat d'un nombre menys tres, elevat el quadrat.
- f.) El cub de la suma d'un nombre més sis.
- g.) El triple d'un nombre més la seva quarta part.
- h.) El nombre onze menys el triple d'un nombre.
- i.) El doble d'un nombre elevat al cub.
- j.) Un nombre més el doble del seu següent.
- k.) El cub del doble d'un nombre menys vuit.
- 1.) La suma de dos nombres consecutius.

Paulino Posada Pàg. 30 de 65

Calcula el valor numèric

a.)
$$A(x) = 7x^3 - 3x^2 - x + 10$$
 $A(2) = A(-5) =$

$$A(2) =$$

$$A(-5) =$$

b.)
$$P(x) = 5x^7 - 4x^2 + 11x + 17$$
 $P(-1) = P(3) =$

$$P(-1) =$$

$$P(3) =$$

c.)
$$B(x) = x^4 - 5x^2 + 7x - 20$$
 $B(0) =$

$$B(0) =$$

$$B(5) =$$

d.)
$$C(x) = (x - 5)^2 \cdot (x - 7) \cdot (x + 12)$$
 $C(4) =$

$$C(4) =$$

$$C(-6) =$$

Exercici 2.5-3

Simplifica les fraccions algebraiques.

a.)
$$\frac{x^2-3x}{x^2+3x} =$$

b.)
$$\frac{x^2-3x}{x-3x} =$$

c.)
$$\frac{x^3+3x^2}{x^2-3x^3} =$$

d.)
$$\frac{(x^3+3y^2)\cdot(1-x)}{2-2x} =$$

e.)
$$\frac{x^3+3x^2-x^3}{5x-2x}$$
 =

T 1 1'C' 1	4	1 1	•	•	. 1.	•	,	11	, .		4
Identifica els	components	dels 1	monomis	1 1	າກຕາດຈ	Q1	SOn	semnia	ants 1	വ	nosats
raciitiiica cis	components	ucib i	111011011115		marca	$\mathbf{o}_{\mathbf{I}}$	5011	SCIIIOIC	illus i	. ບ	posais.

a.)

Monomi 1: $3a^2y^2$ Monomi 2: $3b^4x^2$

Coeficient: Coeficient:

Variables: Variables:

Literal: Literal:

Grau: Grau:

Semblants: Oposats:

b.)

Monomi 1: $2a^2y^2$ Monomi 2: $-2a^2y^2$

Coeficient: Coeficient:

Variables: Variables:

Literal: Literal:

Grau: Grau:

Semblants: Oposats:

c.)

Monomi 1: $4 y^2 xz^3$ Monomi 2: $-13z^3xy^2$

Coeficient: Coeficient:

Variables: Variables:

Literal: Literal:

Grau: Grau:

Semblants: Oposats:

d.)

Paulino Posada Pàg. 32 de 65 FPB - Ciències Aplicadas 2 Unitat 2 – Expressions algebraiques 09/18 Monomi 1: $-3xyz^3$ Monomi 2: $-3zxy^3$ Coeficient: Coeficient: Variables: Variables: Literal: Literal: Grau: Grau: Semblants: Oposats: e.) Monomi 2: 42 yxz³ Monomi 1: $-42xyz^3$ Coeficient: Coeficient: Variables: Variables: Literal: Literal: Grau: Grau: Semblants: Oposats: f.) Monomi 1: $2x^3yz^3$ Monomi 2: $42 yx^3 z^3$ Coeficient: Coeficient: Variables: Variables: Literal: Literal:

Paulino Posada Pàg. 33 de 65

Grau:

Oposats:

Grau:

Semblants:

Suma, resta, multiplica i divideix els monomis.

a.)
$$12x^4y^2$$
 $3x^4y^2$

$$3x^{4}y^{2}$$

m.)
$$8xy^2$$

b.)
$$-22x^5y^3$$
 $7x^3y^2$

$$7x^3y^2$$

n.)
$$\frac{12}{4}y$$
 $\frac{4}{12}y$

$$\frac{4}{12}y$$

c.)
$$-25x^5y^3$$
 $-5x^5y^3$

$$-5x^5y^3$$

d.)
$$-36x^2y$$

$$-3x^{3}(-2y^{2})$$

d.)
$$-36x^2y$$
 $-3x^3(-2y^2)$ p.) $\frac{-4}{16}x^4y^2$ $3x^4y^2$

$$3x^4y^2$$

e.)
$$-36x^2y$$

$$-3x^{3}(-2y^{2})$$

e.)
$$-36x^2y$$
 $-3x^3(-2y^2)$ q.) $\frac{16}{5}x^4y^2$ $-\frac{3}{7}x$

$$-\frac{3}{7}x$$

f.)
$$11x^5y^3$$
 $-11x^5y^3$

$$-11x^5y^3$$

r.)
$$\frac{5}{8}x^5y^3$$

r.)
$$\frac{5}{8}x^5y^3$$
 $(-1)\cdot\frac{5}{9}x^2y^4$

g.)
$$3x^6y$$
 $9x^4y^2$

$$9x^{4}v^{2}$$

s.)
$$\frac{3}{4}a^4b^2c$$
 $\frac{5}{6}cb^2a^4$

$$\frac{5}{6}cb^2a^4$$

h.)
$$-6x^6$$

$$(-9x^6)(-2)$$

h.)
$$-6x^6$$
 $(-9x^6)(-2)$ t.) $\frac{7}{-8}x^4y^2$ $\frac{10}{9}a^4b^2$

$$\frac{10}{9}a^4b^2$$

i.)
$$-13x^6y^3$$
 $-25x^7y^2$

$$-25 x^7 y^2$$

u.)
$$\frac{11}{-12}x^4y^2$$
 $\frac{-3}{4}x^4y^2$

$$\frac{-3}{4}x^4y^2$$

j.)
$$10x^5y^3$$
 $17x^5y^3$

$$17 x^5 y^3$$

v.)
$$\frac{-3}{4}x^4y^2$$
 $\frac{-9}{8}x^4y^2$

$$\frac{-9}{8}x^4y^2$$

k.)
$$10x^5y^3$$
 $17x^5y^3$

$$17 x^5 y^3$$

1.)
$$(-5)(-3)x^7y^3(-2)$$
 15 x^5

$$15 x^5$$

En els següents polinomis indica coeficients, grau i nombre de monomis que els formen.

Calcula el valor numèric en -5 i 7.

a.)
$$P(x)=7x^4+6x^3+8x^2-9x-3$$

b.)
$$P(x)=4x^5+2x^2+15x$$

c.)
$$P(x)=4x^5+2x^2+15x$$

d.)
$$P(x) = -4x^3 - 2x^2 + 18$$

e.)
$$P(x) = -3x^3 - 4x^2 - 5x^2 - x$$

f.)
$$P(x) = -3x^5 - 3x^4 - 3x^3 + 3x^2 + 3x + 3$$

g.)
$$P(x) = -2x^5 - 2x - 22$$

h.)
$$P(x) = -6x^6 + 4x^4 - 2x^2 + 1x^0$$

i.)
$$P(x) = -\frac{2}{3}x^6 + 4x^4 - \frac{4}{5}x^2 + \frac{6}{6}x^0$$

j.)
$$P(x) = \frac{5}{8}x^5 + \frac{3}{2}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 1x^2$$

Paulino Posada Pàg. 35 de 65

2.6 Repàs ordre d'operacions aritmètiques i potències

2.6.1 Sumes, restes, multiplicacions i divisions

Quan es combinen operacions aritmètiques, com són suma, resta, multiplicació i divisió, s'ha de seguir el següent ordre:

- 1 Fer les multiplicacions i divisions
- 2 Una vegada fetes les multiplicacions i ivisions, fer les sumes i restes.

Exemple 2.6.1-1:

$$2+5\cdot 3-6 \div 2=2+15-3=14$$

Quan hi ha parèntesis, el primer que es resol és el parèntesis.

Exemple 2.6.1-2:

$$(2+5)\cdot(3-6)\div 2=7\cdot(-3)\div 2=14$$

Paulino Posada Pàg. 36 de 65

2.6.2 Multiplicació i divisió amb nombres negatius

Quan es multipliquen o divideixen dos nombres positius, el reslutat sempre és positiu.

Exemple 2.6.2-1

$$2.5 = 10$$

$$15 \div 3 = 5$$

Quan es multiplica o divideix un nombre positiu amb un nombre negatiu, el reslutat sempre és negatiu.

El nombre negatiu sovint s'escriu amb parèntesis per no confondre'l amb una resta.

Exemple 2.6.2-2

$$2 \cdot (-5) = -10$$

$$(-15) \div 3 = -5$$

Quan es multipliquen o divideixen dos nombres negatius, el reslutat sempre és positiu.

Exemple 2.6.2-3

$$(-2)\cdot(-5)=10$$

$$(-15) \div (-3) = 5$$

Paulino Posada Pàg. 37 de 65

Recorda

Nombres positius

$$1 \cdot 1 = 1$$

$$1 \div 1 = 1$$

Nombre negatiu i nombre positiu

$$(-1) \cdot 1 = -$$

$$(-1)\cdot 1 = -1$$
 $(-1) \div 1 = -1$

Nombres negatius

$$(-1)\cdot(-1)=1$$

$$(-1)\cdot(-1)=1$$
 $(-1)\div(-1)=1$

Exercici 2.6.2-1

Calcula el resultat

a)
$$5-3+2\cdot 4\div (-8)+4 =$$

b)
$$5-3+2\cdot 4\div (-8)+4 =$$

c)
$$5-3+2\cdot 4\div (-8)+4 =$$

d)
$$((1\cdot(-1)\div1)\div(-2))\cdot(-4) =$$

e)
$$((2+3)\cdot 3)-((8-4)\div 2)+2\cdot (1+1) =$$

f)
$$((2+3)\cdot 3)-((8-4)\div 2)+2\cdot (1+1) =$$

g)
$$\frac{5}{4} \cdot \frac{4}{5} + \frac{3 \cdot (-3) \cdot 3}{(-3) \cdot (-3) \cdot 3 \cdot 3} =$$

h)
$$\frac{5}{4} \div \frac{-4}{5} - \frac{3 \cdot 3}{(-3) \cdot (-3) \cdot 3 \cdot 3}$$

i)
$$\frac{5}{4} + \frac{(\frac{-4}{5}) \cdot 3 \cdot 3}{-3}$$

j)
$$\frac{5}{4} + (\frac{-4}{5}) \cdot \frac{-3 \cdot 3}{3}$$

$$k) \frac{\frac{5}{4}}{\left(\frac{-4}{5}\right)} \cdot \frac{-3 \cdot 3 - 2}{3}$$

Paulino Posada Pàg. 39 de 65

2.6.3 Potències

Veure document

https://paulinoposada.github.io/web/websites/fp_basica/fpb_1/documentacio/ca1_u2. pdf

Pàg. 40 de 65 Paulino Posada

2.7 Solucions

Exercici 2.1-1

Transforma els enunciats en expressions algebraiques.

$$3 \cdot x \cdot y = 3xy$$

$$\frac{1}{3} \cdot x \cdot y = \frac{xy}{3}$$

c.) La desena part del producte de dos nombres, menys un.
$$\frac{1}{10} \cdot x \cdot y - 1 = \frac{xy}{10} - 1$$

$$2 \cdot x + 7 = 2x + 7$$

$$\frac{1}{5} \cdot x + 8 = \frac{x}{5} + 8$$

$$\frac{1}{3}$$
·(x+y)+11= $\frac{x+y}{3}$ +11

$$\frac{1}{2} \cdot x \cdot y = \frac{xy}{2}$$

$$\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\frac{30}{100} \cdot x$$

$$(x+x)^2$$

$$\frac{x+y+x}{3}$$

Calcula el valor numèric amb x = 7 i x = -3

- a) $\frac{x}{2}$ +7 b) 7x+2 c) 2(x+7) d) 2x+7

- a) $x = 7 \Rightarrow \frac{7}{2} + 7 = 10.5$ $x = -3 \Rightarrow \frac{-3}{2} + 7 = 5.5$
- b) $x = 7 \Rightarrow 7.7 + 2 = 51$ $x = -3 \Rightarrow 7.(-3) + 2 = -19$
- c) $x = 7 \Rightarrow 2 \cdot (7+7) = 28$ $x = -3 \Rightarrow 2 \cdot (-3+7) = 8$
- d) $x = 7 \Rightarrow 2.7 + 7 = 21$ $x = -3 \Rightarrow 2.(-3) + 7 = 1$

Pàg. 42 de 65 Paulino Posada

Calcula el valor numèric

a.)
$$-x^2-y^2-3x-2y+2$$
 $x=0$ i $y=0$ $-0^2-0^2-0-0+2=2$

$$x = 0 i y = 0$$

$$-0^2-0^2-0-0+2=2$$

b.)
$$x^2+3x+1$$
 $x=5$ $5^2+3\cdot 5+1=41$

$$x = 5$$

$$5^2 + 3.5 + 1 = 41$$

c.)
$$2x^2-3x$$

$$x = 3$$

$$2 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 = 9$$

d.)
$$-x^2+y^2-xy+3x-1$$

$$x = 9 i v = 0$$

d.)
$$-x^2+y^2-xy+3x-1$$
 $x = 9 i y = 0$ $-9^2+0^2-9\cdot0+3\cdot9-1=108$

e.)
$$2x^2+3x-1$$

$$x = 7$$

e.)
$$2x^2+3x-1$$
 $x=7$ $2\cdot 7^2+3\cdot 7-1=118$

f.)
$$2x^2+2x+3$$

$$x = 3$$

f.)
$$2x^2+2x+3$$
 $x=3$ $2\cdot 3^2+2\cdot 3+3=27$

g.)
$$-x^2-x-3$$

$$x = 9$$

g.)
$$-x^2-x-3$$
 $x=9$ $-9^2-9-3=-93$

h.)
$$3x^2+3x+3$$

$$x = 4$$

h.)
$$3x^2+3x+3$$
 $x=4$ $3\cdot 4^2+3\cdot 4+3=63$

i.)
$$3x^2-2y^2-3xy+2x+1$$

$$x = 0 i y = 0$$

i.)
$$3x^2-2y^2-3xy+2x+1$$
 $x = 0$ i $y = 0$ $3\cdot 0^2-2\cdot 0^2-3\cdot 0\cdot 0+2\cdot 0+1=1$

i.)
$$-x^2+y^2-xy+x+3y$$

$$x = 5 i y = 0$$

j.)
$$-x^2+y^2-xy+x+3y$$
 $x = 5 i y = 0$ $-5^2+0^2-(5\cdot0)+5+3\cdot0=41$

k.)
$$2x^2+3x+2$$
 $x=9$ $2\cdot 9^2+3\cdot 9+2=191$

$$x = 9$$

$$2.9^2 + 3.9 + 2 = 19$$

1.)
$$-x^2-3x$$
 $x=1$ $-1^2-3\cdot 1=-4$

$$x = 1$$

$$1^2 - 3 \cdot 1 = -4$$

m.)
$$3x^2-2x-1$$
 $x=8$ $3\cdot 8^2-2\cdot 8-1=175$

$$x = 8$$

$$3.8^2 - 2.8 - 1 = 175$$

n.)
$$-3y^2+2xy-2x-3$$
 $x = 9 i y = 0$ $-3\cdot0^2+2\cdot9\cdot0-2\cdot9-3=21$

$$x = 9 i v = 0$$

p.)
$$-x^2-x-3$$
 $x=3$

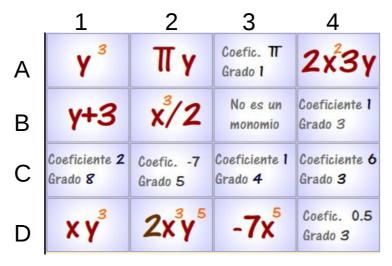
o.)
$$3x^2+x+3$$
 $x=4$

$$-3^2-3-3=-15$$

 $3 \cdot 4^2 + 4 + 3 = 55$

Paulino Posada

Relaciona les cel·les de la taula.



Paulino Posada Pàg. 44 de 65

Exercici 2.2.1-1

Suma i resta els monomis.

a.)
$$-22 x^4 y^2$$
 $-5 x^4 y^2$ f.) $-4 x^6 y$ $5 x^4 y^2$ b.) $20 x^5 y^3$ $-4 x^3 y^2$ g.) $11 x^6$ $-8 x^6$ c.) $-13 x^5 y^3$ $16 x^5 y^3$ h.) $4 x^6 y^3$ $-25 x^7 y^2$ d.) $16 x^2 y$ $3 x^3 y^2$ i.) $10 x^5 y^3$ $-25 x^5 y^3$ e.) $6 x^5 y^3$ $-12 x^5 y^3$ j.) $-25 x^7 y^3$ $5 x^6 y^3$

a) S:
$$-27x^4y^2$$
 R: $-17x^4y^2$

- b) No es pot sumar ni restar per tenir parts literals diferents
- c) S: $3x^5y^3$ R: $-29x^5y^3$
- d) No es pot sumar ni restar per tenir parts literals diferents
- e) S: $-6x^5y^3$ R: $-18x^5y^3$
- f) No es pot sumar ni restar per tenir parts literals diferents
- g) S: $3x^6$ R: $-19x^6$
- h) No es pot sumar ni restar per tenir parts literals diferents
- i) S: $-15x^5y^3$ R: $-35x^5y^3$
- j) No es pot sumar ni restar per tenir parts literals diferents

Paulino Posada Pàg. 45 de 65

Exercici 2.2.2-1

Suma, resta, multiplica i divideix els monomis.

- a.) $3 \times y^2$ $4 \times y$
- a.) $3 \times y$ $4 \times y$ 1.) $-5 \times y$ $4 \times y$ b.) $5 \times y$ $-8 \times y^2$ g.) $\frac{4}{5} \times x^3 y^3$ $-\frac{7}{10} \times x^3$ c.) $-\frac{7}{5} \times y$ $-\frac{2}{3} \times x^2 y$ h.) $-4 \times x^2 y^3$ $x^2 y^3$ d.) $\times y$ $\times y^2$ i.) $\times x^3$ $-6 \times x^3$ e.) $-\frac{5}{4} \times x^2 y^2$ $\frac{7}{4} \times x^3 y^3$ j.) $\frac{3}{4} \times y^2$ $-\frac{5}{8} \times x^2 y^3$

- a) No es pot sumar ni restar per tenir parts literals diferents
 - M: $12x^2y^3$ D: $\frac{3}{4}y$
- b) No es pot sumar ni restar per tenir parts literals diferents
 - M: $-40 y^3$ D: $-\frac{5}{8} y^{-1} = -\frac{5}{8 y}$
- c) No es pot sumar ni restar per tenir parts literals diferents
 - M: $\frac{14}{15}x^3y^2$ D: $\frac{21}{10}x^{-1} = \frac{21}{10x}$
- d) No es pot sumar ni restar per tenir parts literals diferents
 - M: x^2y^3 D: $y^{-1} = \frac{1}{y}$
- e) No es pot sumar ni restar per tenir parts literals diferents
 - M: $-\frac{35}{16}x^5y^5$ D: $\frac{20}{28}x^{-1}y = \frac{20}{28}\frac{y}{x}$
- f) S: $-xy^3$ R: $-9xy^3$
 - M: $-20x^2y^6$ D: $\frac{-5}{4} = -\frac{5}{4}$
- g) No es pot sumar ni restar per tenir parts literals diferents
 - M: $-\frac{28}{50}x^6y^3$ D: $-\frac{28}{50}x^6y^3$

h) S:
$$-3x^2y^3$$
 R: $-5x^2y^3$

R:
$$-5x^2y^3$$

M:
$$-4x^4y^6$$
 D: -4

$$D: -4$$

i) No es pot sumar ni restar per tenir parts literals diferents

M:
$$-6x^4$$

M:
$$-6x^4$$
 D: $-\frac{1}{6}x^2$

j) No es pot sumar ni restar per tenir parts literals diferents

M:
$$-\frac{15}{40}x^3y^5$$

M:
$$-\frac{15}{40}x^3y^5$$
 D: $-\frac{24}{20}x^{-1}y^{-1} = -\frac{24}{20xy}$

En els següents polinomis indica coeficients, grau i nombre de monomis que els formen.

Calcula el valor numèric en 6.

Amb Calc fes una gràfica de cadascun d'ells per a -8 < x < 8

a.) $P(x) = 6x^4$

Coeficient: 6 Grau: 4 Nombre polinomis: 1 P(6) = 7776

b.) $P(x)=3x^6+2x^5$

Coeficients: 3, 2 Grau: 6 Nombre polinomis: 2 P(6) = 155520

c.) $P(x) = -8 x^5 - 2 x^3 + 5 x^2$

Coeficients: -8, -2, 5 Grau: 5 Nombre polinomis: 3 P(6) = -62460

d.) $P(x) = -3 x^5 + 2 x^3 + x^2$

Coeficients: -3, 2, 1 Grau: 5 Nombre polinomis: 3 P(6) = -22860

e.) $P(x) = -9 x^5 - 9 x^4 + 8 x^2$

Coeficients: -9, -9, 8 Grau: 5 Nombre polinomis: 3 P(6) = -81360

Exercici 2.4-1

Quines de les següents parelles de fraccions són equivalents?

a) $\frac{12}{5}$ i $\frac{18}{20}$ No són equivalents

b) $\frac{25}{35}$ i $\frac{5}{4}$ No són equivalents

c) $\frac{3}{5}$ i $\frac{9}{15}$ Sí són equivalents

Paulino Posada Pàg. 48 de 65

Escriu dues fraccions amplificades per a cada fracció.

- a) $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$
- b) $\frac{15}{2} = \frac{30}{4}$

Exercici 2.4-3

Simplifica les següents fraccions fins obtenir una fracció irreductible.

- a) $\frac{48}{20} = 2 + \frac{2}{5}$
- $b) \frac{36}{24} = 1 + \frac{1}{2}$
- c) $\frac{14}{10} = 1 + \frac{2}{5}$

Exercici 2.4-4

Cerca les parelles de fraccions equivalents.

a) $\frac{3}{5}$ c, f	d) $\frac{18}{20}$
b) $\frac{25}{35}$	e) $\frac{5}{4}$
c) $\frac{3}{5}$ a,f	f) $\frac{9}{15}$ a,c

Les fraccions $\frac{3}{5}$ i $\frac{9}{15}$ són equivalents

Amplifica cada fracció.

Pàg. 50 de 65 Paulino Posada

Transforma en fraccions irreductibles.

- a) $\frac{20}{28} = \frac{5}{7}$
- b) $\frac{-125}{45} = 2 + \frac{7}{9}$
- c) $\frac{360}{480} = \frac{3}{4}$
- d) $\frac{270}{15} = 18$

Exercici 2.4-7

Omple els buits per aconseguir fraccions equivalents.

- a) $\frac{2}{6} = \frac{(...)}{12} = \frac{1}{(...)} = \frac{(...)}{18} = \frac{2}{6} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} = \frac{6}{18}$
- b) $\frac{(...)}{7} = \frac{6}{21} = \frac{18}{(...)} = \frac{(...)}{126} = \frac{2}{7} = \frac{6}{21} = \frac{18}{63} = \frac{36}{126}$
- c) $\frac{1}{4} = \frac{3}{(...)} = \frac{(...)}{8} = \frac{1}{4} = \frac{3}{12} = \frac{2}{8}$
- d) $\frac{15}{10} = \frac{(...)}{2} = \frac{6}{(...)} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2} = \frac{6}{4}$

Exercici 2.4-8

Representa en la recta numèrica les següents fraccions.

- a) $-\frac{2}{5}$ b) $\frac{7}{3}$ c) $\frac{4}{7}$ d) $-\frac{8}{3}$



Simplifica hasta transformar en fracción irreductible.

a)
$$\frac{25}{3}$$
 b) $\frac{16}{24} = \frac{2}{3}$

a)
$$\frac{25}{3}$$
 b) $\frac{16}{24} = \frac{2}{3}$ c) $\frac{3300}{1100} = 3$ d) $\frac{60}{75} = \frac{4}{5}$

Exercici 2.4-10

Simplifica fins transformar en fracció irreductible.

a) $\frac{260}{300} = \frac{13}{15}$	d) $\frac{180}{120} = 1 + \frac{1}{2}$
b) $\frac{75}{120} = \frac{5}{8}$	e) $\frac{330}{121} = 2 + \frac{8}{11}$
c) $\frac{45}{90} = \frac{1}{2}$	f) $\frac{36}{54} = \frac{2}{3}$

Exercici 2.4-11

Representa gràficament les següents fraccions ordenades de major a menor.

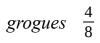
a)
$$\frac{1}{2}$$
 b) $\frac{3}{4}$ c) $\frac{3}{8}$

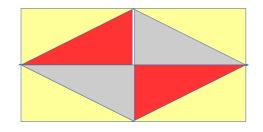
$$\frac{3}{4} > \frac{1}{2} > \frac{3}{8}$$

Quines fraccions de la superfície de la imatge representen les àrees grises, grogues i vermelles?

grises
$$\frac{2}{8}$$

vermelles $\frac{2}{8}$





Un quart de la superficie de la figura és gris, un altre quart és vermell i la resta, la meitat és groga.

Exercici 2.4-13

Ordena de major a menor les fraccions.

$$\frac{3}{8}$$
, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{4}$

$$\frac{3}{4} > \frac{2}{5} > \frac{3}{8}$$

Exercici 2.4-14

Suma i resta les següents fraccions.

$$\frac{3}{6} + \frac{2}{5} - \frac{3}{8} = \frac{60}{120} + \frac{48}{120} + \frac{45}{120} = \frac{153}{120} = 1 + \frac{11}{40}$$

Exercici 2.4-15

Resol.

a)
$$\frac{2}{7} \div \frac{3}{5} = \frac{10}{21}$$

b)
$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$$

c)
$$8 \cdot \frac{3}{5} \div \frac{23}{7} = \frac{168}{115}$$

Paulino Posada Pàg. 53 de 65

Calcula.

a)
$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^3 = \left(\frac{3}{5}\right)^5$$

b)
$$\left(\frac{1}{2}\right)^5 \div \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

c)

$$(\frac{2}{3}) + (\frac{2}{3} - \frac{4}{9}) \div (\frac{1}{3} - \frac{3}{5}) = (\frac{2}{3}) + (\frac{6}{9} - \frac{4}{9}) \div (\frac{5}{15} - \frac{9}{15}) = (\frac{2}{3}) + (\frac{2}{9}) \div (\frac{-4}{15})$$

$$(\frac{2}{3}) - \frac{30}{36} = (\frac{24}{36}) - \frac{30}{36} = -\frac{6}{36} = -\frac{1}{6}$$

Exercici 2.4-17

Calcula.

a) $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6} = \frac{6}{12} + \frac{9}{12} + \frac{10}{12} = \frac{25}{12}$	d) $\frac{8}{10} + \frac{13}{15} + \frac{2}{30} = \frac{48}{60} + \frac{52}{60} + \frac{4}{60} = \frac{104}{60} = 1 + \frac{11}{15}$
b) $\frac{2}{3} - \frac{2}{5} + \frac{7}{4} = \frac{40}{60} - \frac{24}{60} + \frac{105}{60} = \frac{121}{60} = 2 + \frac{1}{60}$	e) $\frac{12}{6} - \frac{3}{5} + \frac{4}{7} = \frac{420}{210} - \frac{126}{210} + \frac{120}{210} = \frac{414}{210} = 1 + \frac{34}{35}$
c) $\frac{4}{7} + \frac{3}{8} - (\frac{2}{3} + \frac{1}{3}) = \frac{4}{7} + \frac{3}{8} - 1 = \frac{32}{56} + \frac{21}{56} - 1$	f) $-\frac{2}{3} - \frac{3}{7} - \frac{5}{8} = -\frac{112}{168} - \frac{72}{168} - \frac{105}{168} = \frac{145}{168}$
$\frac{32}{56} + \frac{21}{56} - \frac{56}{56} = -\frac{3}{56}$	

Exercici 2.4-18

Ordena de major a menor.

$$\frac{2}{3}$$
 , $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{2}$

$$\frac{3}{2} > \frac{2}{3} > \frac{1}{4}$$

Paulino Posada Pàg. 54 de 65

Calcula.

a) $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{10}{21}$	d) $\frac{3}{5} \div \frac{1}{2} = \frac{6}{5}$
b) $2 \cdot \frac{3}{8} = \frac{6}{8}$	e) $\frac{3}{7} \cdot 2 \div \frac{1}{5} = \frac{30}{7}$
c) $\frac{5}{7} \cdot \frac{4}{8} = \frac{20}{56}$	f) $\left(\frac{2}{7} \div \frac{4}{5}\right) \cdot \frac{4}{7} = \frac{10}{28} \cdot \frac{4}{7} = \frac{40}{196}$

Exercici 2.4-20

Calcula.

a) $\left(\frac{1}{3}\right)^3 \div \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)$	d) $\left(\frac{-5}{4}\right)^2 \div \left(\frac{-5}{4}\right)^3 = \left(\frac{-5}{4}\right)^{-1} = \frac{-4}{5}$
b) $-\left(\frac{3}{5}\right)^5 \div \left(\frac{3}{5}\right)^7 = -\left(\frac{3}{5}\right)^{-2} = -\left(\frac{5}{3}\right)^2$	e) $\left(\frac{3}{7}\right)^{-2} = \left(\frac{7}{3}\right)^2$
c) $\left[\left(\frac{2}{3} \right)^{-2} \right]^{-2} = \left(\frac{2}{3} \right)^4 = \frac{2^4}{3^4}$	f) $\left(\frac{8}{3}\right)^2 \div \left(\frac{8}{3}\right)^5 = \frac{8}{3}^{-3} = \left(\frac{3}{8}\right)^3$

Exercici 2.4-21

Calcula.

a) $\frac{5}{3} - \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{5}$	d) $\frac{5}{3} \div \frac{2}{3} - \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{6} + \frac{1}{3} \cdot (\frac{3}{7} \div \frac{2}{14})$
b) $\frac{3}{2} + \frac{2}{3} \div \frac{3}{4} - \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2}$	e) $3 - \frac{5}{7} \cdot (\frac{2}{3} \div \frac{7}{2}) + (\frac{3}{5})^{-1} \cdot \frac{5}{3}$
c) $\frac{5}{2} - (\frac{3}{4} + \frac{1}{2}) + \frac{10}{6} \cdot (\frac{1}{2} - \frac{3}{5})$	f) $(\frac{2}{7} - \frac{3}{5}) \div (\frac{1}{2} + \frac{3}{7}) - \frac{2}{7}$

a)
$$\frac{5}{3} - \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{5} = \frac{5}{3} - \frac{12}{35} = \frac{175}{105} - \frac{36}{105} = \frac{139}{105} = 1 + \frac{34}{105}$$

b)
$$\frac{3}{2} + \frac{2}{3} \div \frac{3}{4} - \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2} + \frac{8}{9} - \frac{2}{10} = \frac{135}{90} + \frac{80}{90} - \frac{18}{90} = \frac{197}{90} = 2 + \frac{17}{90}$$

Paulino Posada Pàg. 55 de 65

c)
$$\frac{5}{2} - (\frac{3}{4} + \frac{1}{2}) + \frac{10}{6} \cdot (\frac{1}{2} - \frac{3}{5}) = \frac{5}{2} - (\frac{3}{4} + \frac{2}{4}) + \frac{10}{6} \cdot (\frac{5}{10} - \frac{6}{10})$$

 $\frac{5}{2} - \frac{5}{4} - \frac{10}{6} \cdot \frac{1}{10} = \frac{5}{2} - \frac{5}{4} - \frac{1}{6} = \frac{30}{12} - \frac{15}{12} - \frac{2}{12} = \frac{17}{12}$

d)
$$\frac{5}{3} \div \frac{2}{3} - \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{6} + \frac{1}{3} \cdot (\frac{3}{7} \div \frac{2}{14}) = \frac{15}{6} - \frac{16}{30} + \frac{1}{3} \cdot \frac{42}{14}$$

$$\frac{15}{6} - \frac{16}{30} + \frac{42}{42} = \frac{15}{6} - \frac{16}{30} + 1 = \frac{75}{30} - \frac{16}{30} + \frac{30}{30} = \frac{89}{30} = 2 + \frac{29}{30}$$

e)
$$3 - \frac{5}{7} \cdot (\frac{2}{3} \div \frac{7}{2}) + (\frac{3}{5})^{-1} \cdot \frac{5}{3} = 3 - \frac{5}{7} \cdot \frac{4}{21} + \frac{5}{3} \cdot \frac{5}{3} = 3 - \frac{20}{147} + (\frac{5}{3})^2 = \frac{1323}{441} - \frac{60}{441} + \frac{1225}{441} = \frac{1288}{441} = 2 + \frac{58}{63}$$

$$\textit{f}) \quad (\frac{2}{7} - \frac{3}{5}) \div (\frac{1}{2} + \frac{3}{7}) - \frac{2}{7} = (\frac{10}{35} - \frac{21}{35}) \div (\frac{7}{14} + \frac{6}{14}) - \frac{2}{7} = -\frac{11}{35} \div \frac{13}{14} - \frac{2}{7} = \frac{154}{455} - \frac{2}{7} = \frac{154}{455} - \frac{130}{455} = \frac{24}{455} + \frac{24}{455} = \frac{24}{455} +$$

Uns pantalons encogeixen $\frac{1}{13}$ de la seva llargària al rentar-los.

Quant mesuraran els pantalons després de rentar-los, si la seva llargària original era de 130 cm?

$$y = 130 cm - 130 cm \cdot \frac{1}{13} = 130 cm \left(1 - \frac{1}{13}\right) = 130 cm \left(\frac{13}{13} - \frac{1}{13}\right) = 130 cm \cdot \frac{12}{13} = 120 cm$$

Exercici 2.4-23

Al teatre han assistit 793 persones, de les quals $\frac{6}{13}$ són adolescents.

- a) Quants adolescents hi han assistit? $x=793 \text{ total} \cdot \frac{6 \text{ adolescents}}{13 \text{ total}} = 366 \text{ adolescents}$
- b) Si $\frac{2}{3}$ dels adolescentes eren al·lotes, quantes al·lotes hi han assistit?

$$x = 366 \text{ total adolescents} \cdot \frac{2 \text{ al·lotes}}{3 \text{ total adolescents}} = 244 \text{ al·lotes}$$

Paulino Posada Pàg. 56 de 65

Transforma els enunciats en expressions algebraiques.

a.) El doble d'un nombre més quatre.

$$2 \cdot x + 4$$

b.) La tercera part del quadrat d'un nombre.

$$\frac{1}{3}$$
 · x^2

c.) Un nombre menys set.

$$x-7$$

d.) El doble de la suma d'un nombre més quatre.

$$2 \cdot (x+4)$$

e.) La meitat d'un nombre menys tres, elevat el quadrat.

$$\frac{1}{2} \cdot (x-3)^2 o(\frac{1}{2} \cdot (x-3))^2 = \frac{1}{4} \cdot (x-3)^2$$

f.) El cub de la suma d'un nombre més sis.

$$(x+6)^3$$

g.) El triple d'un nombre més la seva quarta part.

$$3x + \frac{x}{4}$$

h.) El nombre onze menys el triple d'un nombre.

$$11 - 3x$$

i.) El doble d'un nombre elevat al cub.

$$(2x)^2 = 4x^2$$

- j.) Un nombre més el doble del seu següent.
- x+2x
- k.) El cub del doble d'un nombre menys vuit.
- $x^{3}-8$
- 1.) La suma de dos nombres consecutius.
- x+(x+1)=2x+1

Calcula el valor numèric

a.)
$$A(x) = 7x^3 - 3x^2 - x + 10$$

$$A(2) = 7 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^2 - 2 + 10 = 7 \cdot 8 - 3 \cdot 4 - 2 + 10 = 52$$

$$A(-5) = 7 \cdot (-5)^3 - 3 \cdot (-5)^2 - (-5) + 10 = 7 \cdot (-125) - 3 \cdot 25 + 5 + 10 = -935$$

b.)
$$P(x) = 5x^7 - 4x^2 + 11x + 17$$

$$P(-1) = 5 \cdot (-1)^7 - 4 \cdot (-1)^2 + 11 \cdot (-1) + 17 = -5 - 4 - 11 + 17 = -3$$

$$P(3) = 5 \cdot 3^7 - 4 \cdot 3^2 + 11 \cdot 3 + 17 = 5 \cdot 2187 - 4 \cdot 9 + 11 \cdot 3 + 17 = 10949$$

c.)
$$B(x) = x^4 - 5x^2 + 7x - 20$$

$$B(0) = 0^4 - 5 \cdot 0^2 + 7 \cdot 0 - 20 = -20$$

$$B(5) = 5^4 - 5 \cdot 5^2 + 7 \cdot 5 - 20 = 625 - 125 + 35 - 20 = 515$$

d.)
$$C(x) = (x-5)^2 \cdot (x-7) \cdot (x+12)$$

$$C(4) = (4-5)^2 \cdot (4-7) \cdot (4+12) = (-1)^2 \cdot (-3) \cdot 16 = -48$$

$$C(-6) = (-6-5)^2 \cdot (-6-7) \cdot (-6+12) = 121 \cdot (-13) \cdot 6 = -9438$$

Exercici 2.5-3

Simplifica les fraccions algebraiques.

a.)
$$\frac{x^2-3x}{x^2+3x} = \frac{x(x-3)}{x(x+3)} = \frac{x-3}{x+3}$$

b.)
$$\frac{x^2-3x}{x-3x} = \frac{x(x-3)}{x(1-3)} = \frac{x-3}{1-3}$$

c.)
$$\frac{x^3+3x^2}{x^2-3x^3} = \frac{x^2(x+3)}{x^2(1-3x)} = \frac{x+3}{1-3x}$$

d.)
$$\frac{(x^3+3y^2)\cdot(1-x)}{2-2x} = \frac{(x^3+3y^2)\cdot(1-x)}{2(1-x)} = \frac{(x^3+3y^2)}{2}$$

e.)
$$\frac{x^3+3x^2-x^3}{5x-2x} = \frac{x^2(x+3-x)}{x(5-2)} = \frac{3x^2}{3x} = x$$

Paulino Posada Pàg. 58 de 65

Identifica els components dels monomis i indica si són semblants i oposats.

a.)

Monomi 1: $3a^2y^2$ Monomi 2: $3b^4x^2$

Coeficient: 3 Coeficient: 3

Variables: a, y Variables: b, x

Literal: a^2y^2 Literal: b^4x^2

Grau: 4 Grau: 6

Semblants: No Oposats: No

b.)

Monomi 1: $2a^2y^2$ Monomi 2: $-2a^2y^2$

Coeficient: 2 Coeficient: -2

Variables: a, y Variables: a, y

Literal: $a^2 y^2$ Literal: $a^2 y^2$

Grau: 4 Grau: 4

Semblants: Sí Oposats: Sí

c.)

Monomi 1: $4 y^2 xz^3$ Monomi 2: $-13 z^3 xy^2$

Coeficient: 4 Coeficient: -13

Variables: y, x, z Variables: z, x, y

Literal: y^2xz^3 Literal: z^3xy^2

Grau: 6 Grau: 6

Semblants: Sí Oposats: No

Paulino Posada Pàg. 59 de 65

09/18

d.)

Monomi 1: $-3xyz^3$ Monomi 2: $-3zxy^3$

Coeficient: -3 Coeficient: -3

Variables: x, y, z Variables: z, x, y

Literal: xyz³ Literal: zxy³

Grau: 5 Grau: 5

Semblants: No Oposats: No

e.)

Monomi 1: $-42 xyz^3$ Monomi 2: $42 yxz^3$

Coeficient: -42 Coeficient: 42

Variables: x, y, z Variables: y, x, z

Literal: xyz³ Literal: yxz³

Grau: 5 Grau: 5

Semblants: Sí Oposats: Sí

f.)

Monomi 1: $2x^3yz^3$ Monomi 2: $42yx^3z^3$

Coeficient: 2 Coeficient: 42

Variables: x, y, z Variables: y, x, z

Literal: x^3yz^3 Literal: yx^3z^3

Grau: 7 Grau: 7

Semblants: Sí Oposats: No

Paulino Posada Pàg. 60 de 65

Suma, resta, multiplica i divideix els monomis.

a.)
$$12x^4y^2$$
 $3x^4y^2$

$$3x^4y^2$$

S:
$$15x^4y^2$$
 R: $9x^4y^2$ M: $36x^8y^4$ D: 4

R:
$$9x^4y^2$$

M:
$$36x^8y^4$$

b.)
$$-22x^5y^3$$
 $7x^3y^2$

$$7x^3v^2$$

M:
$$-154 x^8 y^5$$
 D: $\frac{-22}{7} x^2 y$

D:
$$\frac{-22}{7}x^2y$$

c.)
$$-25x^5y^3$$
 $-5x^5y^3$

$$-5x^5y^3$$

S:
$$-30x^5y^3$$

R:
$$-20x^5y^3$$

S:
$$-30x^5y^3$$
 R: $-20x^5y^3$ M: $125x^{10}y^6$ D: 5

d.)
$$-36x^2y$$

d.)
$$-36x^2y$$
 $-3x^3(-2y^2)$

M:
$$216 x^5 y^3$$
 D: $6 x^{-1} y^{-1}$

D:
$$6x^{-1}y^{-1}$$

e.)
$$11x^5y^3$$
 $-11x^5y^3$

$$-11x^5y^3$$

R:
$$-20x^5y$$

0 R:
$$-20x^5y^3$$
 M: $-121x^{10}y^6$ D: -1

f.)
$$3x^6y$$
 $9x^4y^2$

$$9x^{4}y^{2}$$

M:
$$27x^{10}y^3$$
 D: $\frac{3}{9}x^2y^{-1}$

D:
$$\frac{3}{9}x^2y^{-1}$$

g.)
$$-6x^{6}$$

g.)
$$-6x^6$$
 $(-9x^6)(-2)$

$$-24 x^{6}$$

$$108 x^{12}$$

S:
$$12x^6$$
 R: $-24x^6$ M: $108x^{12}$ D: $\frac{-6}{18} = \frac{-1}{3}$

h.)
$$-13x^6y^3$$
 $-25x^7y^2$

$$-25x^{7}y^{2}$$

M:
$$325 x^{13} y^5$$
 D: $\frac{13}{25} x^{-1} y$

D:
$$\frac{13}{25}x^{-1}y$$

i.)
$$10x^5y^3$$
 $17x^5y^3$

$$17x^5v^3$$

$$S$$
 $27x^5y$

S:
$$27x^5y^3$$
 R: $-7x^5y^3$ M: $170x^{10}y^6$ D: $\frac{10}{17}$

$$170 x^{10} v^{6}$$

D:
$$\frac{10}{17}$$

j.)
$$(-5)(-3)x^7y^3(-2)$$
 15 x^5

$$15 x^5$$

M:
$$-450 x^{12} y^3$$
 D: $-2 x^2 y^3$

D:
$$-2x^2y^3$$

k.)
$$8xy^2$$
 $3xy$

M:
$$-450x^{12}y^3$$
 D: $\frac{8}{3}y$

D:
$$\frac{8}{3}$$

1.)
$$\frac{12}{4}y$$
 $\frac{4}{12}y$

$$\frac{4}{12}y$$

S:
$$(\frac{12}{4} + \frac{4}{12})y = \frac{40}{12}y$$
 R: $32y$ M: y^2 D: 36

$$32 y M: y^2$$

$$\frac{30}{9}x^2y$$

S:
$$\frac{30}{9}x^2y$$
 R: $-24x^2y$ M: x^4y^2 D: $\frac{1}{9}$

$$x^4y^2$$

D:
$$\frac{1}{9}$$

$$3x^4y^2$$

$$\frac{38}{16}x^4y^2$$

$$\frac{-46}{16}x^4y^2$$

S:
$$\frac{38}{16}x^4y^2$$
 R: $\frac{-46}{16}x^4y^2$ M: $\frac{-12}{16}x^8y^4$ D: $\frac{-4}{42} = \frac{2}{21}$

o.)
$$\frac{16}{5}x^4y^2$$
 $-\frac{3}{7}x$

$$-\frac{3}{7}x$$

M:
$$\frac{-42}{35}x^5y^2$$
 D: $\frac{-112}{15}x^3y^2$

D:
$$\frac{-112}{15}x^3y^2$$

p.)
$$\frac{5}{9}x^5y$$

p.)
$$\frac{5}{8}x^5y^3$$
 $(-1)\cdot\frac{5}{9}x^2y^4$

M:
$$\frac{-25}{72}x^7y^7$$
 D: $\frac{-45}{40}x^3y^{-1}$

D:
$$\frac{-45}{40}x^3y^{-1}$$

q.)
$$\frac{3}{4}a^4b^2c$$
 $\frac{5}{6}cb^2a^4$

$$\frac{5}{6}cb^2a^4$$

S:
$$\frac{19}{12}a^4b^2c$$

S:
$$\frac{19}{12}a^4b^2c$$
 R: $\frac{-1}{12}a^4b^2c$ M: $\frac{15}{24}a^8b^4c^2$ D: $\frac{18}{20}$

D:
$$\frac{18}{20}$$

r.)
$$\frac{7}{-8}x^4y^2$$
 $\frac{10}{9}a^4b^2$

$$\frac{10}{9}a^4b^2$$

M:
$$\frac{-70}{72}x^4y^2a^4b^2$$
 D: $\frac{-63}{80}x^4y^2a^{-4}b^{-2}$

D:
$$\frac{-63}{80}x^4y^2a^{-4}b^{-2}$$

s.)
$$\frac{11}{-12}x^4y^2$$
 $\frac{-3}{4}x^4y^2$

$$\frac{-3}{4}x^4y^2$$

S:
$$\frac{-20}{12}x$$

S:
$$\frac{-20}{12}x^4y^2$$
 R: $\frac{-2}{12}x^4y^2$ M: $\frac{33}{48}x^8y^4$ D: $\frac{44}{36}$

$$\frac{33}{48}x^8y^4$$

D:
$$\frac{44}{36}$$

t.)
$$\frac{-3}{4}x^4y^2$$
 $\frac{-9}{8}x^4y^2$

$$\frac{-9}{8}x^4y^2$$

S:
$$\frac{-15}{8}x^4y^2$$
 R: $\frac{3}{8}x^4y^2$ M: $\frac{27}{32}x^8y^4$ D: $\frac{24}{36}$

$$\frac{27}{32}x^8y^4$$

D:
$$\frac{24}{36}$$

Paulino Posada

En els següents polinomis indica coeficients, grau i nombre de monomis que els formen.

Calcula el valor numèric en -5 i 7.

a.)
$$P(x)=7x^4+6x^3+8x^2-9x-3$$

b.)
$$P(x)=4x^5+2x^2+15x$$

c.)
$$P(x)=4x^5+2x^2+15x$$

d.)
$$P(x) = -4x^3 - 2x^2 + 18$$

e.)
$$P(x) = -3x^3 - 4x^2 - 5x^2 - x$$

f.)
$$P(x) = -3x^5 - 3x^4 - 3x^3 + 3x^2 + 3x + 3$$

g.)
$$P(x) = -2x^5 - 2x - 22$$

h.)
$$P(x) = -6x^6 + 4x^4 - 2x^2 + 1x^0$$

i.)
$$P(x) = -\frac{2}{3}x^6 + 4x^4 - \frac{4}{5}x^2 + \frac{6}{6}x^0$$

j.)
$$P(x) = \frac{5}{8}x^5 + \frac{3}{2}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 1x^2$$

Font:

Paulino Posada Pàg. 64 de 65

http://recursostic.educacion.es/secundaria/edad/2esomatematicas/2quincena5/index2_5.htm https://www.vitutor.com/ab/p/a_1e.html

https://www.vitutor.com/ab/p/f_e.html

Paulino Posada Pàg. 65 de 65