Index

3 Ecuaciones

Igualdades y ecuaciones

Utilizamos ecuaciones cuando tratamos de averiguar una cierta cantidad, desconocida, pero de la que sabemos que cumple cierta condición.

La cantidad desconocida se llama incógnita y se representa por ***x*** (o cualquier otra letra) y la condición que cumple se escribe como una igualdad algebraica a la que llamamos **ecuación**.

Resolver una ecuación es encontrar el valor de la incógnita con la que se cumple la igualdad.
Cuando hay más de una incógnita hablamos de un sistema de ecuaciones.
Normalmente el número de ecuaciones será igual al número de incógnitas, ya que esto permite una solución única del sistema.

Ejemplo 3-1

Se reparten 40 € entre dos personas, de manera que uno reciba 10 € más que el otro. ¿cuánto recibe cada uno?

En primer lugar traducimos a lenguaje matemático la información de que dos personas reciben 40 €.
Ecuación 1: $x + y = 40$ €
x representa el importe que recibe la primera persona e ***y*** el que recibe la segunda.

A continuación traducimos la información de que uno recibe 10 € más que otro.
Ecuación 2: $x = y - 10$ €
x recibe 10 € menos que ***y***.

Vemos que hay dos incógnitas ***x*** y ***y*** y dos ecuaciones. Se trata por tanto de un sistema de ecuaciones.

Ahora eliminamos la incógnita ***x***, insertando la ecuación 2 en 1.

y - 10 € + y = 2y -10 € = 40 €

para resolver hacia ***y***, obteniendo su valor.

y = (40 € +10 €) / 2 = 25 €

Insertando el valor de ***y*** = 25 € en cualquiera de las ecuaciones 1 o 2, obtenemos

x = 15 €

3.1 Transformación de ecuaciones

Para resolver una ecuación hacia una incógnita, normalmente será necesario transformar la ecuación.

Podemos transformar una ecuación, manteniendo la igualdad, es decir, manteniendo la información que contiene, aplicando cualquier operación matemática idéntica a ambos lados de la ecuación.

Veamos unos ejemplos sencillos para las operaciones de suma, resta, multiplicación y división.

Ejemplo 3.1-1

$x - 7 = 14$

Intuimos que ***x*** deberá ser 21, pero vamos a demostrarlo. Para ello **sumamos** 7 a ambos lados de la ecuación.

$x - 7 = 14 \mid +7$

$x -7 + 7 = 14 + 7 \quad \rightarrow \quad x = 14 + 7 = 21$

Ejemplo 3.1-2

$x + 7 = 14$

Intuimos que ***x*** deberá ser 7, pero vamos a demostrarlo. Para ello **restamos** 7 a ambos lados de la ecuación.

$x + 7 = 14 \mid -7$

$x +7 - 7 = 14 - 7 \quad \rightarrow \quad x = 14 - 7 = 7$

Ejemplo 3.1-3

$x / 7 = 3$

Intuimos que ***x*** deberá ser 21, pero vamos a demostrarlo. Para ello **multiplicamos** por 7 ambos lados de la ecuación.

$x / 7 = 3 \mid \cdot 7$

$(x / 7) \cdot 7 = 3 \cdot 7 \quad \rightarrow \quad x = 3 \cdot 7 = 21$

Ejemplo 3.1-4

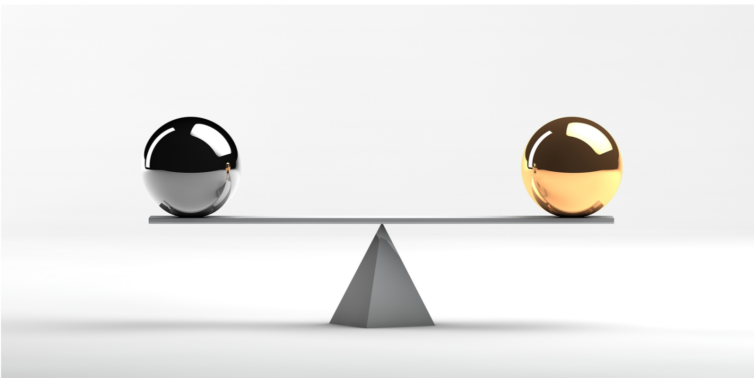
$x \cdot 7 = 49$

Intuimos que ***x*** deberá ser 7, pero vamos a demostrarlo. Para ello **dividimos** entre 7 ambos lados de la ecuación.

$x \cdot 7 = 49 \mid /7$

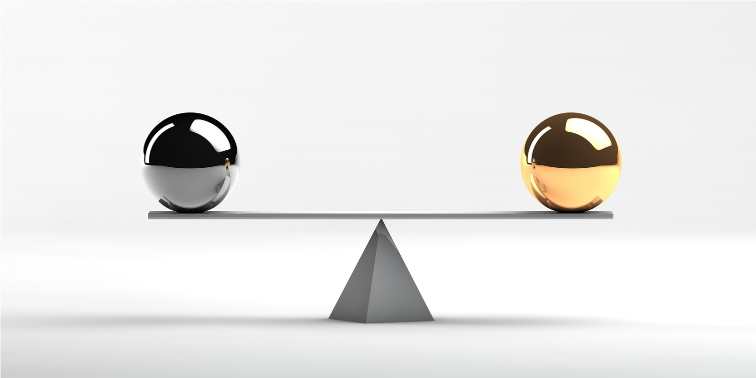
$(x \cdot 7) / 7 = 49 / 7 \quad \rightarrow \quad x = 49 / 7 = 7$

Una **ecuación** es como una **blanza en equilibrio**. Para mantener el equilibrio, podemos aplicar operaciones a cada lado de la balanza, pero estás deben ser idénticas.



Ejemplo 3.1-5

2y -10 euros = 40 euros



Tenemos la siguiente ecuación 2y -10 € = 40 € y la queremos resolver hacia ***y***.

Aplicamos una operación de suma a ambos lados de la ecuación.

2y -10 € = 40 € | + 10 €

2y -10 € + 10 € = 40 € + 10 €

2y = 50 €

Ahora aplicamos una operación de división a ambos lados de la ecuación.

2y = 50 € | : 2

2y : 2= 50 € : 2

y = 25 €

Ejemplo 3.1-6

Tenemos la siguiente ecuación $20\,\Omega=50\dfrac{V}{I+1\,A}$ y la queremos resolver hacia ***I***.

Aplicamos una operación de multiplicación a ambos lados de la ecuación.

$$20\,\Omega=50\frac{V}{I+1\,A} \quad | \cdot (\mathrm{I} + 1\mathrm{A})$$

$$20\,\Omega\cdot(I+1\,A)=50\frac{V}{I+1\,A}\cdot(I+1\,A)$$

$$\rightarrow \quad 20\,\Omega\cdot(I+1\,A)=50\,V \quad \rightarrow \quad 20\,\Omega\cdot I+20\,\Omega\cdot 1\,A=50\,V$$

$$20\,\Omega\cdot I+20\,V=50\,V$$

Aplicamos una operación de resta a ambos lados de la ecuación.

$$20\,\Omega\cdot I+20\,V=50\,V \quad | - 20\mathrm{V}$$

$$20\,\Omega\cdot I+20\,V-20\,V=50\,V-20\,V$$

$$20\,\Omega\cdot I=30\,V$$

Y obtenemos el resultado de ***I****, a*plicando una operación de división a ambos lados de la ecuación.

$$20\,\Omega\cdot I=30\,V \quad | : 20\ \Omega$$

$$\frac{20\,\Omega\cdot I}{20\,\Omega}=30\frac{V}{20\,\Omega}$$

$$I=30\frac{V}{20\,\Omega}=1{,}5\,A$$

Ejercicio 3.1-1

Resuelve las ecuaciones

a.) $3x-6+5x=2$ b.) $x+3(-6+5x)-2=7+7x-8$ c.) $\frac{7}{4}=\frac{9x}{4}-\frac{1}{8}$

d.) $\frac{1}{3}\cdot(5-x)=\frac{5x}{6}-\frac{5}{2}$ e.) $7\cdot(5+\frac{1}{x})=\frac{5}{6x}-\frac{2}{5}$ f.) $15x\cdot\frac{1}{5}=5x-\frac{2}{5}$

3.2 Ecuaciones equivalentes

Se llaman ecuaciones equivalentes a las que tienen las mismas soluciones.

• Si se suma o resta una cantidad o expresión a cada lado (miembro) de una ecuación se obtiene otra equivalente.

• Si se multiplican o dividen los dos lados (miembros) de una ecuación por un número (o una expresión algebraica) se obtiene otra equivalente.

Ejemplo 3.2-1

Ecuación 1: 2x -5 = 7

Si **sumamos** 4 a cada lado de la ecuación obtenemos

Ecuación 2: 2x -5 + 4 = 7 + 4

Las ecuaciones 1 y 2 son equivalentes. Podemos comprobarlo obteniendo su solución.

Ecuación 1: $x=\frac{12}{2}=6$ Ecuación 2: $x=\frac{12}{2}=6$

Si **restamos**, por ejemplo 70 de cada lado de la ecuación 1, obtenemos

Ecuación 3: 2x -5 -70 = 7 – 70

La solución de la ecuación 3 es $x=\frac{12}{2}=6$, que vuelve a ser equivalente a las ecuaciones 1 y 2.

Ahora vamos a **dividir** ambos lados de la ecuación 1 entre 20, obteniendo

Ecuación 4: $\frac{2x-5}{20}=\frac{7}{20} \rightarrow \frac{2x}{20}-\frac{5}{20}=\frac{7}{20} \rightarrow 0{,}1x-0{,}25=0{,}35 \rightarrow 0{,}1x=0{,}35+0{,}25 \rightarrow 0{,}1x=0{,}6$

x = 6

Finalmente **multiplicamos** ambos lados de la ecuación 1 por 3, obteniendo

Ecuación 5: $(2x-5)\cdot 3=7\cdot 3 \rightarrow 6x-15=21 \rightarrow 6x=21+15 \rightarrow 6x=36 \rightarrow x=\frac{36}{6}=6$

Las ecuaciones 1 a 5 dan todas el mismo resultado x = 6. Por tanto, son equivalentes.

Ejercicio 3.2-1

¿Cuáles de las siguientes ecuaciones son equivalentes?

a) $3x=6$

b) $12x=18$

c) $\frac{x}{3}=\frac{6}{9}$

d) $4x+5=11$

e) $\frac{x-7}{4}=\frac{6}{16}-\frac{21}{12}$

f) $\frac{3x}{3^3}=\frac{6}{3\cdot 9}$

g) $\frac{3x}{\sqrt{2}}=\frac{6}{2^2}$

h) $\frac{\sqrt{36}\cdot x}{\sqrt{9}}=\frac{6\cdot 2}{3}$

i) $3^2x=6^2$

j) $\sqrt{12}\cdot x=\sqrt{18}$

k) $\frac{(20-8)x}{15+3}=1$

l) $(3+1)x=6+1$

Fuente:

http://recursostic.educacion.es/secundaria/edad/2esomatematicas/2quincena6/index2_6.htm

3.3 Sistemas de ecuaciones

A veces, para resolver un problema se necesita más de una incógnita.
Para poder solucionar un problema con varias incógnitas, necesitamos varias ecuaciones y a estas las llamamos un sistema de ecuaciones.
Para que a cada incógnita corresponda una única solución, el número de incógnitas y ecuaciones ha de ser igual.

Ejemplo 3.3-1

Una pluma es 3 € más cara que un bolígrafo. Por 5 plumas y 4 bolígrafos pagamos 33,9 €.
¿Cuánto cuesta la pluma y cuánto el bolígrafo?

En este ejemplo tenemos las dos incógnitas ***x*** e ***y***, con ***x*** representando las plumas e ***y*** los boligrafos. Al tener dos incógnitas, necesitaremos dos ecuaciones.

Comenzamos traduciendo al lenguaje matemático que una pluma ***x*** es 3 € más cara que un bolígrafo ***y***.

Ecuación 1: $x = y + 3€$

Ahora traducimos al lenguaje matemático que por 5 plumas **x** y 4 bolígrafos ***y*** pagamos 33,9 €.

Ecuación 2: $5x + 3y = 33,9€$

Finalmente sustituimos ***x*** por ***y*** + 3 € en la ecuación 2 y resolvemos hacia ***y***,

$$5(y+3€)+3y=33,9€ \rightarrow y=\frac{33,9€-15€}{8}=2,36€$$

obteniendo el siguiente resultado

Los bolígrafos ***y*** cuestan 2,36 € y las plumas ***x*** cuestan 5,36 €.

Podemos comprobar que el resultado es correcto insertando los valores de ***x*** e ***y*** en las ecuaciones 1 y 2 para comprobar que efectivamente se cumplen las igualdades.

Ejemplo 3.3-2

Pablo es 5 años más joven que María y 5 años mayor que Federico. Entre los tres igualan la edad de su madre, 48 años. ¿Qué edad tiene cada uno?

En este ejemplo tenemos tres incógnitas, que son las edades de María (***m***), Pablo (***p***) y Federico (***f***).

Comenzamos traduciendo al lenguaje matemático que Pablo es 5 años más joven que María.

Ecuación 1: $p+5=m$

Ahora traducimos al lenguaje matemático que Pablo es 5 años mayor que Federico.

Ecuación 2: $p-5=f$

Falta traducir al lenguaje matemático que entre los tres igualan la edad de su madre, 48 años.

Ecuación 3: $p+m+f=48$

Hemos obtenido las tres ecuaciones necesarias para encontrar los valores de las tres incógnitas.

Ahora insertamos las ecuaciones 1 y 2 en 3, sustituyendo las incógnitas ***m*** y ***f***.

$$p+(p+5)+(p-5)=48 \rightarrow 3p=48 \rightarrow p=\frac{48}{3}=16$$

La edad de Pablo es 16 años, la de María 21 y la de Federico 11. Si sumamos las edades, nos dan los 48 años de la madre. Vemos que las tres ecuaciones se cumplen.

Ejercicio 3.3-1

a) ¿Cuánto mide una cuerda si su tercera cuarta parte mide *200* metros?
b) Hallar tres números consecutivos cuya suma sea *219*.
c) Héctor guarda *25* euros en su hucha, que supone sumar una cuarta parte del dinero que ya había. ¿Cuánto dinero hay en la hucha?
d) Al sumar el triple de un número con la mitad de dicho número se obtiene 126. ¿De qué número se trata?
e) Lorenzo gasta la mitad de su dinero en un videojuego, y la séptima parte en ir al cine. ¿Cuánto tenía si aún le quedan 20 €?
f) Hallar los lados de un rectángulo de 18 cm de perímetro, si la base es $\frac{2}{7}$ de la altura.
g) Paloma, Pablo y Andrés cobran 1638 € por un trabajo. Pablo ha trabajado el triple de días que Andrés y Palomael doble que Pablo. ¿Cómo repartirán el dinero?
h) Carmen tiene *16* años y sus dos hermanos pequeños tienen *2* y *3* años. ¿Cuántos años han de pasar para que el doble de la suma de las edades de los hermanos de Carmen sea la misma que la que tiene ella?
i) Dado un número, la suma de su mitad, su doble y su triple es *55*. ¿Qué número es?

https://www.matesfacil.com/ESO/Ecuaciones/resueltos-problemas-ecuaciones.html

3.4 Ejercicios de repaso

Se llaman ecuaciones equivalentes a las que tienen las mismas soluciones.

Ejercicio 3.4-1

¿Es 7 solución de $(x-6)\cdot 13=13$?

Ejercicio 3.4-2

¿Son equivalentes las ecuaciones $7-6(x-13)=1$ y $7-6x+78=1$?

Ejercicio 3.4-3

La ecuación $6x^2-7x+c=0$ tiene por solución ***x*** = 8. ¿Cuál es el valor de ***c***?

Ejercicio 3.4-4

¿Son equivalentes $\frac{x}{8}-\frac{1-x}{7}=1$ y $7x-8+8x=56$?

Ejercicio 3.4-5

Resuelve la ecuación $\frac{17}{2}=(x+\frac{45}{2})\cdot\frac{1}{3}$.

Ejercicio 3.4-6

Resuelve la ecuación $\frac{3x+19}{4}=(-\frac{1}{9})\cdot(-37-x)$.

Ejercicio 3.4-7

Resuelve la ecuación $\frac{x-2}{5}-\frac{5-x}{2}=2$.

Ejercicio 3.4-8

Por 2 pantalones y 4 camisertas pagamos 86 €. Si un pantalón cuesta 4 € más que una camiseta, ¿cuánto cuesta una camiseta?

Ejercicio 3.4-9

La suma de tres números consecutivos es 84. Haya el menor de los tres.

Ejercicio 3.4-10

La superficie de una finca es de 158 Ha. Un olivar ocupa la mitad de superficie que un encinar, y el trigo ocupa la tercera parte que el encinar. También hay una superficie de 4 Ha dedicada a huerta. ¿Cuánto ocupa el encinar?

Soluciones