

Index

1.1	Repàs fraccions.....	3
1.2	Proporcionalitat.....	20
1.3	Resolució de proporcions numèriques amb una incògnita.....	29
1.4	Percentages.....	33
1.5	Ordre d'operacions.....	35
1.5.1	Símbols d'agrupació.....	37
1.6	Com orientar-se a un planeta inclinat.....	39
1.6.1	Un eix inclinat, causa de les estacions de l'any.....	40
1.6.2	Elevació del Sol respecte l'horitzó.....	42
1.6.3	Polaris.....	48
1.6.4	Latitud i longitud.....	50
1.6.5	Zones horàries.....	55
	Solucions.....	58

Introducció

Per a què serveixen les matemàtiques?

Les matemàtiques serveixen per a moltes coses, entre elles per fer prediccions. Per exemple, amb la Llei d'Ohm podem predir el corrent que passarà per una resistència, si apliquem certa tensió. Els coneixements necessaris per fer aquesta predicció són molt bàsics. Un altre exemple, que requereix coneixements matemàtics avançats, és realitzar models matemàtics per predir el temps.

Les matemàtiques també serveixen per descriure perímetres, superfícies o volums de figures i formes. Per això, troben la seva aplicació en el dibuix tècnic o la cartografia.

Per adquirir coneixements a qualsevol àrea tecnològica, és imprescindible tenir unes nocions matemàtiques mínimes. A més, encara que a primera vista sembli impossible, les matemàtiques poden resultar interessants.

L'apartat 1.6 explica les coordenades que s'utilitzen per determinar un lloc a la superfície terrestre. Utilitzem habitualment aquestes coordenades amb dispositius GPS.

En l'apartat 1.7 explorarem les causes de les estacions de l'any. El per què i on es produeixen.

Terminem aquesta unitat amb l'apartat 1.8 aclarint com canvia l'hora depenent del lloc geogràfic al que ens trobem.

1.1 Repàs fraccions

Una fracció $\frac{a}{b}$ és la divisió del nombre sencer **a** entre el nombre sencer **b**.

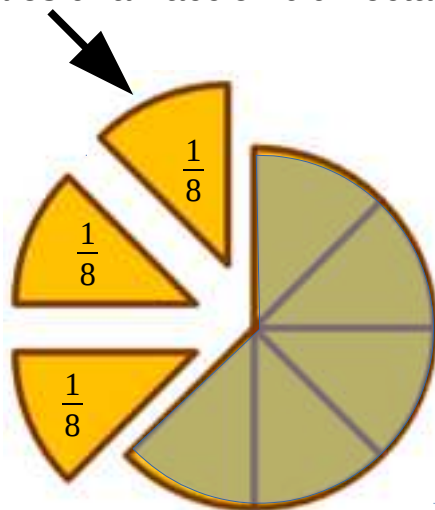
$$\frac{a}{b} = a \div b$$

Anomenem :

a → numerador, indica el nombre d'unitats fraccionaries

b → denominador, indica el nombre de parts en les quals es divideix la unitat.

Aquesta és una fracció d'un octau.



Aquest troç de tarta està format per 5 fraccions d'un octau cadascuna
→ numerador = 5

$\frac{5}{8}$

La unitat (tarta) està dividida en
8 parts → denominador = 8

Fraccions equivalents

Dues fraccions són equivalents quan representen la mateixa quantitat.

Exemples:

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$$

$$\frac{2}{3}$$

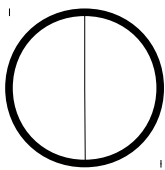


$$\frac{4}{6}$$

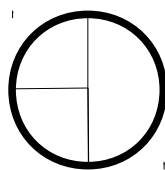


$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$$

$$\frac{1}{2}$$



$$\frac{2}{4}$$



Transformació de fracció a nombre decimal

Es pot comprovar que dues fraccions són equivalents, convertint-les en nombres decimals. Això es fa dividint el numerador entre el denominador.

Si donen el mateix nombre decimal, són equivalents.

Exemple:

Són equivalents $\frac{5}{6}$ i $\frac{15}{18}$

Sí, perquè ambdues divisions donen $\frac{5}{6} = \frac{15}{18} = 0,8333$

Són equivalents $\frac{5}{6}$ i $\frac{21}{24}$

No, perquè $\frac{5}{6} = 0,8333$ i $\frac{21}{24} = 0,875$. El valor decimal de les fraccions és diferent.

L'**amplificació d'una fracció** s'aconsegueix multiplicant numerador i denominador amb el mateix nombre.

Exemple:

$$\frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{4}{6} = \frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 7} = \frac{14}{21}$$

La **simplificació d'una fracció** resulta de dividir numerador i denominador per el mateix nombre.

Exemple:

$$\frac{18}{12} = \frac{18 \div 2}{12 \div 2} = \frac{9}{6} = \frac{18 \div 3}{12 \div 3} = \frac{6}{4}$$

Quan no existeix un divisor comú la **fracció** s'anomena **irreductible**.

Per obtenir una fracció irreductible, podem descomposar numerador i denominador en nombres primers i a continuació simplificar la fracció.

Exemple

Transforma $\frac{18}{12}$ en una fracció irreductible.

Descomposició de 18 en nombres primers

$$18 \mid 2$$

$$9 \mid 3$$

$$3 \mid 3$$

$$1$$

$$18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$$

Descomposició de 12 en nombres primers

$$12 \mid 2$$

$$6 \mid 2$$

$$3 \mid 3$$

$$1$$

$$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$$

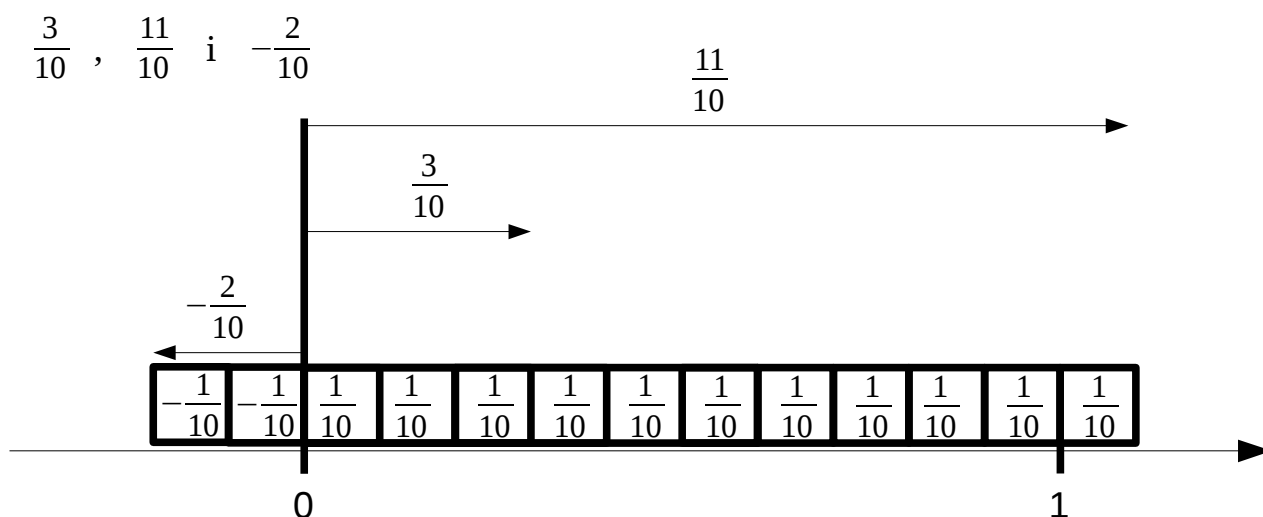
Falta simplificar la fracció.

$$\frac{18}{12} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 3}{2 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{3}{2}$$

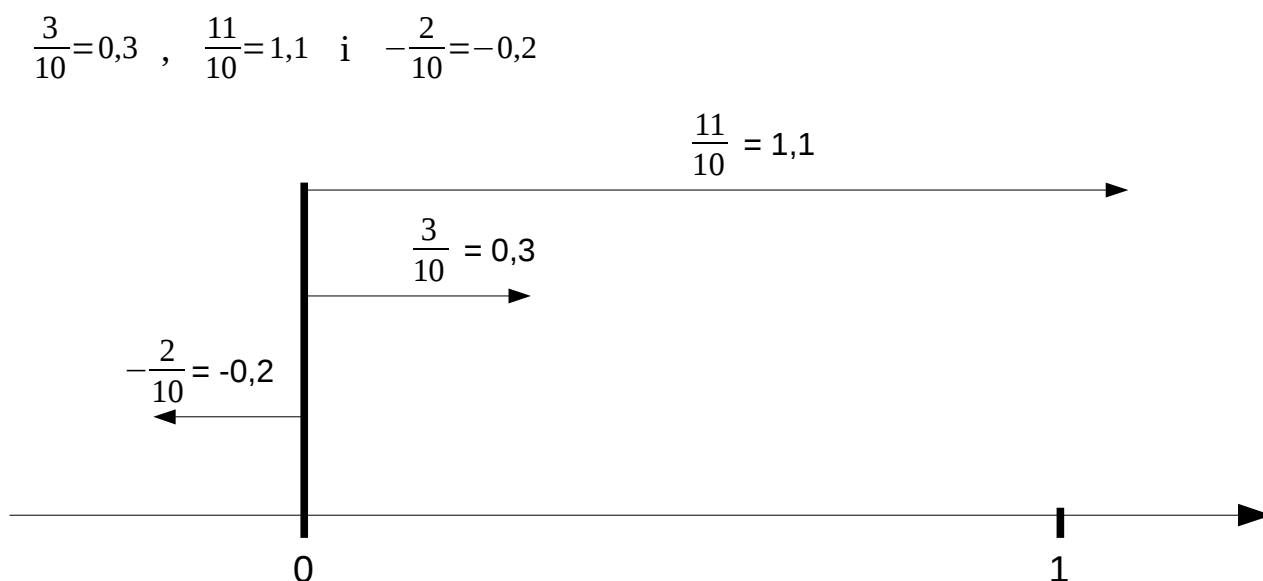
Les fraccions obtingudes per amplificació o simplificació són equivalents.

Per representar una **fracció en la recta numèrica**, es divideix la unitat en tantes parts com indica el denominador.

Exemple:



Una altra opció, pot ser més senzilla, és convertir les fraccions en nombres decimals i marcar la posició damunt la recta numèrica.



Exercici 1.1-1

En què es diferencien els següents grups de fraccions?

Transforma les fraccions en nombres decimals.

Grup 1 $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{12}$

Grup 2 $\frac{3}{2}$, $\frac{16}{8}$, $\frac{6}{4}$, $\frac{30}{12}$

Representa les fraccions en la recta numèrica.

Exercici 1.1-2

Quines de les següents parelles de fraccions són equivalents?

a) $\frac{12}{5}$ i $\frac{18}{20}$
b) $\frac{25}{35}$ i $\frac{5}{4}$
c) $\frac{3}{5}$ i $\frac{9}{15}$

Exercici 1.1-3

Escriu dues fraccions amplificades per a cada fracció.

a) $\frac{3}{5}$
b) $\frac{15}{2}$

Exercici 1.1-4

Simplifica les següents fraccions fins obtenir una fracció irreductible.

a) $\frac{48}{20}$
b) $\frac{36}{24}$
c) $\frac{14}{10}$

Exercici 1.1-5

Cerca les fraccions equivalents.

a) $\frac{6}{10}$	d) $\frac{18}{20}$
b) $\frac{25}{35}$	e) $\frac{5}{4}$
c) $\frac{3}{5}$	f) $\frac{9}{15}$

Exercici 1.1-6

Amplifica cada fracció.

a) $\frac{2}{3}$
b) $\frac{12}{5}$
c) $\frac{4}{7}$
d) $\frac{24}{15}$

Exercici 1.1-7

Transforma en fraccions irreductibles.

a) $\frac{20}{28}$
b) $\frac{-125}{45}$
c) $\frac{360}{480}$
d) $\frac{270}{15}$

Exercici 1.1-8

Omple els buits per aconseguir fraccions equivalents.

a) $\frac{2}{6} = \frac{(\dots)}{12} = \frac{1}{(\dots)} = \frac{(\dots)}{18}$
b) $\frac{(\dots)}{7} = \frac{6}{21} = \frac{18}{(\dots)} = \frac{(\dots)}{126}$
c) $\frac{1}{4} = \frac{3}{(\dots)} = \frac{(\dots)}{8}$
d) $\frac{15}{10} = \frac{(\dots)}{2} = \frac{6}{(\dots)}$

Exercici 1.1-9

Simplifica i representa les següents fraccions en la recta numèrica.

a) $-\frac{20}{10}$ b) $\frac{77}{77}$ c) $\frac{132}{66}$ d) $\frac{24}{8}$

Exercici 1.1-10

Representa en la recta numèrica les següents fraccions.

a) $-\frac{2}{5}$ b) $\frac{7}{3}$ c) $\frac{4}{7}$ d) $-\frac{8}{3}$

Exercici 1.1-11

Simplifica hasta transformar en fracción irreductible.

a) $\frac{25}{3}$ b) $\frac{16}{24}$ c) $\frac{3300}{1100}$ d) $\frac{60}{75}$

Exercici 1.1-12

Simplifica fins transformar en fracció irreductible.

a) $\frac{260}{300}$	d) $\frac{180}{120}$
b) $\frac{75}{120}$	e) $\frac{330}{121}$
c) $\frac{45}{90}$	f) $\frac{36}{54}$

Exercici 1.1-13

Representa gràficament les següents fraccions ordenades de major a menor.

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{3}{4}$ c) $\frac{3}{8}$

Suma i resta

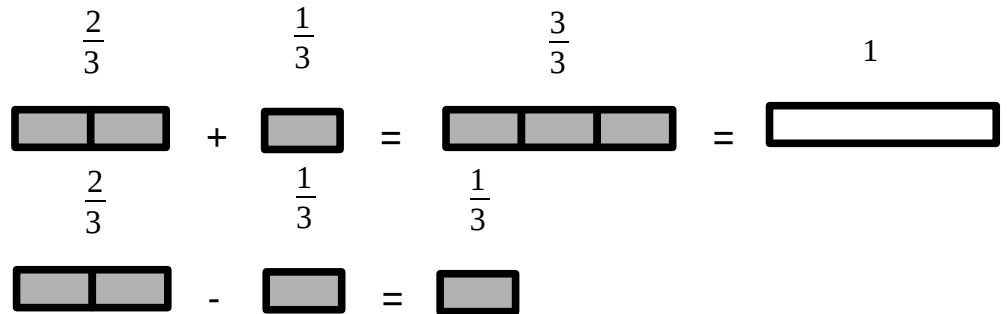
Primer cas: **Fraccions amb denominador idèntic.**

Quan el denominador és idèntic, les fraccions es poden sumar i restar sumant i restant els numeradors.

Exemples:

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \frac{3}{3}$$

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$




Segon cas: Fraccions amb denominador distint.


Quan el denominador de les fraccions a sumar o restar és distint, s'han de transformar les fraccions per aconseguir que tinguin un denominador comú.

Exemples:

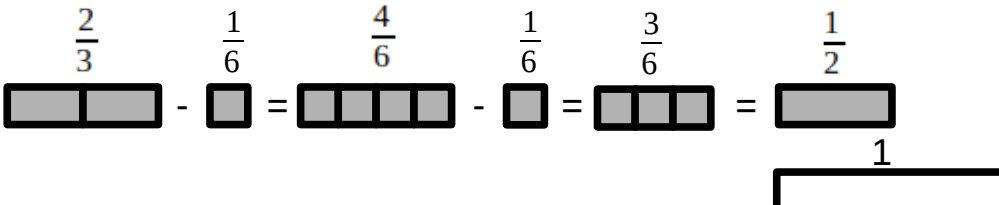
Denominadors 3 i 6 → denominador comú 6.

$$\frac{2}{3} + \frac{2}{6} = \frac{2 \cdot 2}{2 \cdot 3} + \frac{2}{6} = \frac{4}{6} + \frac{2}{6} = \frac{6}{6} = 1$$


Denominadors 3 i 6 → denominador comú 12.

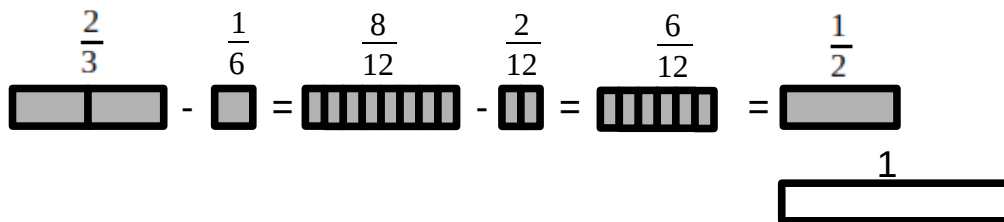
$$\frac{2}{3} + \frac{2}{6} = \frac{4 \cdot 2}{4 \cdot 3} + \frac{2 \cdot 2}{2 \cdot 6} = \frac{8}{12} + \frac{4}{12} = \frac{12}{12} = 1$$


Denominadors 3 i 6 → denominador comú 6.

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{6} = \frac{2 \cdot 2}{2 \cdot 3} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} - \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{3 \div 3}{6 \div 3} = \frac{1}{2}$$


Denominadors 3 i 6 → denominador comú 12.

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{6} = \frac{4 \cdot 2}{4 \cdot 3} - \frac{2 \cdot 1}{2 \cdot 6} = \frac{8}{12} - \frac{2}{12} = \frac{8}{12} - \frac{2}{12} = \frac{6}{12} = \frac{6 \div 6}{12 \div 6} = \frac{1}{2}$$



Multiplicació

Es multiplica numerador amb numerador i denominador amb denominador.

Exemples:

$$\frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{1} = \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 1} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{6} = \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 6} = \frac{4}{18}$$

Aquesta fracció es pot simplificar. $\frac{4}{18} = \frac{4 \div 2}{18 \div 2} = \frac{2}{9}$

Divisió (multiplicació en creu)

Es divideix multiplicant el numerador de la primera fracció amb el denominador de la segona fracció, donant aquesta multiplicació el numerador de la fracció resultant. El denominador de la fracció resultant el dóna la multiplicació de denominador de la primera fracció amb numerador de la segona fracció.

Exemples:

$$\frac{2}{3} : 2 = \frac{1}{3} = \frac{2}{3} : \frac{2}{1} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{1}} = \frac{2 \cdot 1}{3 \cdot 2} = \frac{2 \cdot 1}{3 \cdot 2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{2}{3} : \frac{4}{2} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{2}} = \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 4} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{\frac{a}{b} \cdot \frac{d}{d}}{\frac{c}{c} \cdot \frac{d}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{\frac{a}{b} \cdot \frac{d}{d}}{\frac{c}{c} \cdot \frac{d}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

=1

La divisió de fraccions es torna multiplicació, girant la segona fracció.

Potencia

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

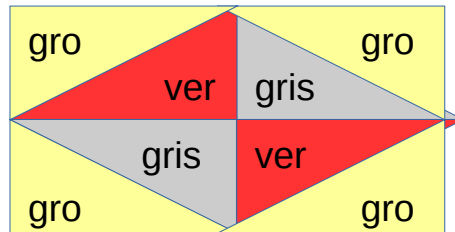
Exemple: $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

Exemple: $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{2}\right)^3$

Exercici 1.1-14

Quines fraccions de la superfície de la imatge representen les àrees grises, grogues i vermelles?

**Exercici 1.1-15**

Ordena de major a menor les fraccions.

$$\frac{3}{8}, \frac{2}{5}, \frac{3}{4}$$

Exercici 1.1-16

Indica el resultat en forma de fracció i nombre decimal.

$$\frac{3}{6} + \frac{2}{5} - \frac{3}{8}$$

Exercici 1.1-17

Indica el resultat en forma de fracció i nombre decimal.

a) $\frac{2}{7} \div \frac{3}{5}$
b) $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}$
c) $8 \cdot \frac{3}{5} \div \frac{23}{7}$

Exercici 1.1-18

Indica el resultat en forma de fracció i nombre decimal.

a) $\left(\frac{3}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^3$
b) $\left(\frac{1}{2}\right)^5 \div \left(\frac{1}{2}\right)^2$
c) $\left(\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2}{3} - \frac{4}{9}\right) \div \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{5}\right)$

Exercici 1.1-19

Indica el resultat en forma de fracció i nombre decimal.

a) $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6}$	d) $\frac{8}{10} + \frac{13}{15} + \frac{2}{30}$
b) $\frac{2}{3} - \frac{2}{5} + \frac{7}{4}$	e) $\frac{12}{6} - \frac{3}{5} + \frac{4}{7}$
c) $\frac{4}{7} + \frac{3}{8} - \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right)$	f) $-\frac{2}{3} - \frac{3}{7} - \frac{5}{8}$

Exercici 1.1-20

Ordena de major a menor.

$$\frac{2}{3}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{3}{2}$$

Exercici 1.1-21

Indica el resultat en forma de fracció i nombre decimal.

a) $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7}$	d) $\frac{3}{5} \div \frac{1}{2}$
b) $2 \cdot \frac{3}{8}$	e) $\frac{3}{7} \cdot 2 \div \frac{1}{5}$
c) $\frac{5}{7} \cdot \frac{4}{8}$	f) $\left(\frac{2}{7} \div \frac{4}{5}\right) \cdot \frac{4}{7}$

Exercici 1.1-22

Indica el resultat en forma de fracció i nombre decimal.

a) $(\frac{1}{3})^3 \div (\frac{1}{3})^2$	d) $(\frac{-5}{4})^2 \div (\frac{-5}{4})^3$
b) $-(\frac{3}{5})^5 \div (\frac{3}{5})^7$	e) $(\frac{3}{7})^{-2}$
c) $[(\frac{2}{3})^{-2}]^{-2}$	f) $(\frac{8}{3})^2 \div (\frac{8}{3})^5$

Exercici 1.1-23

Indica el resultat en forma de fracció i nombre decimal.

a) $\frac{5}{3} - \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{5}$	d) $\frac{5}{3} \div \frac{2}{3} - \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{6} + \frac{1}{3} \cdot (\frac{3}{7} \div \frac{2}{14})$
b) $\frac{3}{2} + \frac{2}{3} \div \frac{3}{4} - \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2}$	e) $3 - \frac{5}{7} \cdot (\frac{2}{3} \div \frac{7}{2}) + (\frac{3}{5})^{-1} \cdot \frac{5}{3}$
c) $\frac{5}{2} - (\frac{3}{4} + \frac{1}{2}) + \frac{10}{6} \cdot (\frac{1}{2} - \frac{3}{5})$	f) $(\frac{2}{7} - \frac{3}{5}) \div (\frac{1}{2} + \frac{3}{7}) - \frac{2}{7}$

Exercici 1.1-24

Uns pantalons encogeixen $\frac{1}{13}$ de la seva llargària al rentar-los.

Quant mesuraran els pantalons després de rentar-los, si la seva llargària original era de 130 cm?

Exercici 1.1-25

Al teatre han assistit 793 persones, de les quals $\frac{6}{13}$ són adolescents.

a) Quants adolescents hi han assistit?

b) Si $\frac{2}{3}$ dels adolescents eren al·lotes, quantes al·lotes i quants al·lots hi han assistit?

Exercici 1.1-26

- a) *Frederick té 10 euros i vol anar de marxa el divendres, però deu 3 euros a Frederick. Quants diners es deuria gastar Frederick divendres, com a màxim?*
- b) *Feysale té 5 euros i vol anar de marxa el divendres amb Frederick. Feysale deu 6 euros a Steven. Raul, Karen i Toni, també sortiran de marxa divendres, però deuen 5, 7 i 6 euros a Feysale. Quants diners es deuria gastar Feysale divendres, com a màxim?*

Exercici 1.1-27

Escriu sense parentesi i calcula.

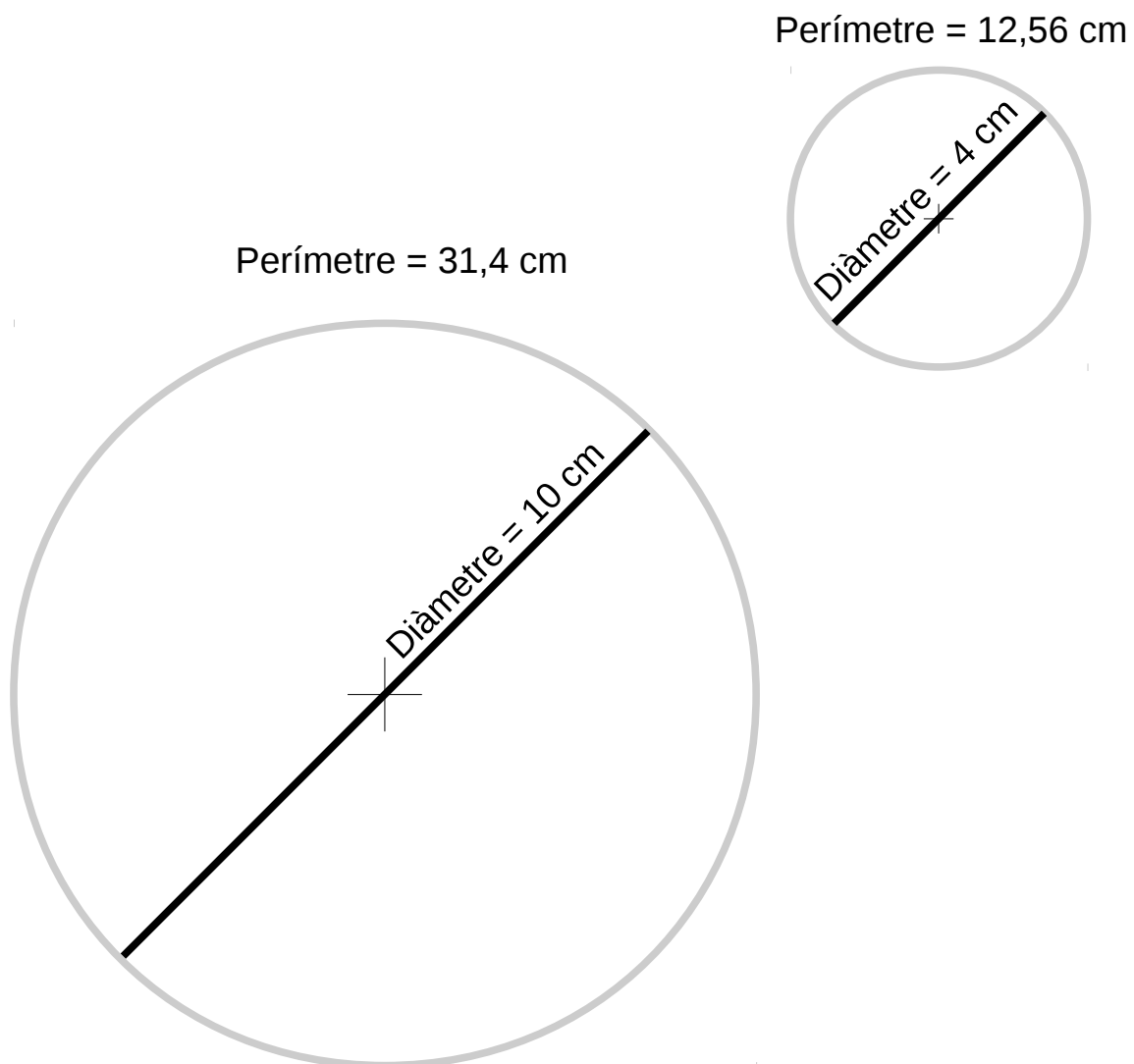
- | | | | |
|-------------------|------------------|-----------------|------------------|
| a) $(-3 + 5 - 2)$ | b) $(-4 -5 -6)$ | c) $(10 -2 +3)$ | d) $-(-3 -4 +1)$ |
| e) $-(3 +4 -1)$ | f) $-(-4 -5 -6)$ | g) $-(1 -2 -3)$ | h) $-(-6 +5 -4)$ |

1.2 Proporcionalitat

La proporcionalitat relaciona dues magnituds, veiem alguns exemples:

Exemple 1.2-1:

En la figura geomètrica d'un cercle, el **perímetre** i el **diàmetre** presenten una **relació proporcional**.



Podem dibuixar un cercle de la mida que vulguem, si dividim el perímetre entre el diàmetre, el resultat sempre és el mateix: 3,14.

Aquest nombre l'anomenem PI i també es pot anomenar factor de proporcionalitat.

Aquest factor de proporcionalitat és invariable i relaciona el perímetre amb el diàmetre d'un cercle.

$$\frac{\text{Perímetre}}{\text{Diàmetre}} = 3,14$$

En l'exemple, la **proporcionalitat** relaciona **perímetre** i **diàmetre**. El factor de proporcionalitat és 3,14.

Exemple 1.2-2:

Quan anem de compres, els preus dels productes són factors de proporcionalitat.

El preu de les patates està marcat amb $0,8 \frac{\text{€}}{\text{kg}}$.

Això significa que si dividim el preu de les patates que hem comprat, per exemple 3 €

entre el pes 3,75 kg, el resultat sempre serà el mateix, $0,8 \frac{\text{€}}{\text{kg}}$.

$$\frac{\text{Preu}}{\text{Pes}} = 0,8 \frac{\text{€}}{\text{kg}}$$

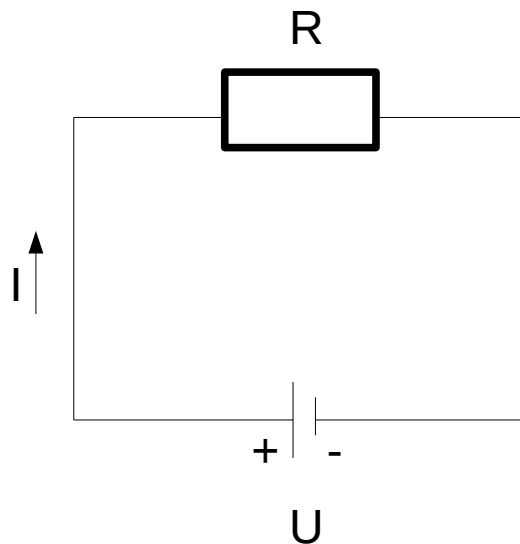
En aquest exemple la **proporcionalitat** relaciona **preu** i **pes** d'un producte. En el

factor de proporcionalitat és $0,8 \frac{\text{€}}{\text{kg}}$.

Exemple 1.2-3:

El valor R d'una resistència elèctrica, és un factor de proporcionalitat entre la tensió U i el corrent I .

$$R = \frac{U}{I} \quad (\text{Llei d'Ohm})$$



Si en aquest circuit augmentem o reduïm la tensió, el corrent augmentarà o disminuirà de forma proporcional.

En aquest exemple la **proporcionalitat** relaciona **tensió U** i **corrent I** en una resistència elèctrica.

Els exemples anteriors mostren una **proporcionalitat directa**. En augmentar el perímetre augmenta el diàmetre, en augmentar el pes del producte que comprem, augmenta el preu, en augmentar la tensió, augmenta el corrent elèctric.

Exercici 1.2-1

A la ciutat A, al gener va ploure una quantitat de 80 l i al llarg de tot l'any van ser 480 l. A la ciutat B al gener van caure 150 l. Si la pluja al llarg de l'any va ser proporcional entre les ciutats A i B, quants litres van ploure a la ciutat B a l'any?

Exercici 1.2-2

Completa la taula, calculant els perímetres dels cercles corresponents als diàmetres. Utilitza el programa Calc per crear un gràfic on l'eix horitzontal representi els diàmetres i l'eix vertical els perímetres.

Dibuixa un gràfic on l'eix horitzontal representi el diàmetre i l'eix vertical el perímetre.

L'escala de l'eix horitzontal ha de ser de $1 \frac{cm}{cm}$, la de l'eix vertical de $3 \frac{cm}{cm}$.

Diàmetre en cm	2	4	6	8	10
Perímetre en cm					

Exercici 1.2-3

Completa la taula, calculant el preu del conductor elèctric MANGUERA

ELECTRICA 3X1.5 RV-K0.6/1KV en funció de la seva llargària si el preu del metre és de 0,57 €.

Utilitza el programa Calc per crear un gràfic on l'eix horitzontal representi la llargària i l'eix vertical l'import.

Dibuixa un gràfic on l'eix horitzontal representi la llargària i l'eix vertical l'import.

L'escala de l'eix horitzontal ha de ser de $10 \frac{m}{cm}$, la de l'eix vertical de $5,7 \frac{€}{cm}$.

Llargària en m	20	40	60	80	100
Import en €					

Exercici 1.2-4

Completa la taula, calculant el corrent elèctric I en funció de la tensió U si la resistència del circuit és de 13Ω .

Utilitza el programa Calc per crear un gràfic on l'eix horitzontal representi la tensió i l'eix vertical el corrent.

Dibuixa un gràfic on l'eix horitzontal representi la tensió i l'eix vertical el corrent.

L'escala de l'eix horitzontal ha de ser de $10 \frac{V}{cm}$, la de l'eix vertical de $1,3 \frac{A}{cm}$.

Tensió U en V	20	40	60	80	100
Corrent I en A					

Exercici 1.2-5

Completa la taula, calculant el temps t en funció de la velocitat v necessari per recorre una distància s de 20 km.

Utilitza el programa Calc per crear un gràfic on l'eix horitzontal representi la velocitat i l'eix vertical el temps.

Dibuixa un gràfic on l'eix horitzontal representi la velocitat i l'eix vertical el temps.

L'escala de l'eix horitzontal ha de ser de $10 \frac{km}{h}$, la de l'eix vertical de $0,1 \frac{h}{cm}$.

Velocidad v en $\frac{km}{h}$	20	40	60	80	100
Tiempo t en h					

Exercici 1.2-6

Completa la taula, calculant el corrent I en funció de la resistència R . La tensió U del circuit és constant i té un valor de 5 V.

Utilitza el programa Calc per crear un gràfic on l'eix horitzontal representi la resistència i l'eix vertical el corrent.

Dibuixa un gràfic on l'eix horitzontal representi la resistència i l'eix vertical el corrent.

Resistència R en Ω	100	200	300	400	500
Corrent I en mA					

Exercici 1.2-7

En la següent taula es relaciona litres d'oli i nombre de garrafes.

Litres	15	25
Garrafes	3	5

Expressa la relació com a proporció.

Indica el factor de proporcionalitat

Calcula el nombre de litres d'oli en 10 garrafes.

Indica quantes garrafes es necessiten per emmagatzemar 125 l d'oli.

Exercici 1.2-8

Un kilo de castyes val 0,6 €. Fes una taula que relacioni el pes en kg amb el preu en euros.

Fes una representació gràfica de la taula.

Exercici 1.2-9

Comprova si les següents igualtats són correctes.

a) $\frac{12}{3} = \frac{16}{4}$ b) $\frac{14}{5} = \frac{56}{20}$ c) $\frac{14}{5} = \frac{21}{10}$

Exercici 1.2-10

Són correctes les següents igualtats?

a) $\frac{3}{2} = \frac{8}{7}$ b) $\frac{2}{5} = \frac{12}{30}$

Exercici 1.2-11

Per a la funció $y = 4x$:

- a) Estableix la taula de valors per a $x = -3, -2, 2$ i 4
- b) Indica el factor de proporcionalitat.

Exercici 1.2-12

Si 120 llibres del mateix preu valen 2400 €, quant valen 240 llibres del mateix preu?

Exercici 1.2-13

Hem comprat 4 quilos de fruita, pomes, peres, platans i raïm.

Una quinta parts són pomes,

un sisé són peres

quatre desenes parts són plàtans

i la resta és raïm.

Els preus són:

Pomes 1,6 euros / quilo

Peres 1 euros / quilo

Plàtans 1,3 euros / quilo

Raïm 2,5 euros / quilo

Quants quilos hem comprat de cada fruita?

Quant hem pagat per cada tipus de fruita?

1.3 Resolució de proporcions numèriques amb una incògnita

Si una proporció numèrica conté una incògnita, és a dir, un nombre desconegut, aquest es pot calcular.

Exemple 1.3-1

$\frac{1}{2} = \frac{x}{4}$ Perquè es compleixi la igualtat, la incògnita x ha de ser igual a 2.

El primer exemple es resol fàcilment sense necessitat d'aïllar la incògnita, però en el cas que els nombres siguin diferents, pot resultar convenient aïllar x .

Exemple 1.3-2

$$\frac{371}{88} = \frac{x}{25}$$

En aquest segon exemple convé resoldre la igualtat cap a x per calcular el seu valor. Per a això, hem de recordar que una igualtat es pot transformar aplicant les operacions de suma, resta, multiplicació o divisió a banda i banda de forma idèntica. En aquest cas, per aïllar x , multiplicarem tots dos costats pel denominador 25.

$$\left(\frac{371}{88}\right) \cdot 25 = \left(\frac{x}{25}\right) \cdot 25 \rightarrow \left(\frac{371}{88}\right) \cdot 25 = x$$

$$x = \left(\frac{371}{88}\right) \cdot 25 = 105,4$$

Exemple 1.3-3

$$\frac{234}{99} = \frac{25}{x}$$

En aquest cas, per aïllar x , primer la canviarem de posició, passant-la del denominador al numerador. Per a això multipliquem tots dos costats de la igualtat per x .

$$\frac{234}{99} = \frac{25}{x} \quad | \cdot x$$

$$\left(\frac{234}{99}\right) \cdot x = \left(\frac{25}{x}\right) \cdot x \rightarrow \left(\frac{234}{99}\right) \cdot x = 25$$

Tenint x en el numerador, l'aïllem multiplicant tots dos costats de la igualtat amb la inversa de $\frac{234}{99}$, és a dir, $\frac{99}{234}$, ja que una fracció multiplicada per la seva

$$\text{inversa da 1} \quad \rightarrow \left(\frac{234}{99}\right) \cdot \left(\frac{99}{234}\right) = 1$$

$$\left(\frac{234}{99}\right) \cdot x = 25 \quad | \cdot \frac{99}{234}$$

$$\left(\frac{234}{99}\right) \cdot x \cdot \left(\frac{99}{234}\right) = 25 \cdot \left(\frac{99}{234}\right)$$

$$x = 25 \cdot \left(\frac{99}{234}\right) = 10,6$$

Exercici 1.3-1

Fent un viatge amb moto, observem que el consum és de 8,5 litres cada 100 km.

Quant consumirà en un trajecte de 250 km?

Exercici 1.3-2

Una impressora imprimeix 8 pàgines per minut.

Quant tardarà en imprimir 400 pàgines?

Exercici 1.3-3

Un payés té 90 paquets d'herba per donar menjar a les vaques durant 40 dies.

Si només tingués 50 paquets, quants dies podria alimentar les vaques?

Exercici 1.3-4

Un autobús circulant a 60 km/hora tarda 5 hores en fer el trajecte.

Quant temps tardarà si circula a 50 km/h?

Exercici 1.3-5

Tres quaderns valen 6,75 €.

Quants quaderns es poden comprar amb 40,5 €?

Exercici 1.3-6

Per confeccionar 4 pantalons es necessiten 3,5 m² de tela.

Quants pantalons es poden confeccionar amb 12,25 m² ?

Exercici 1.3-7

Un payés compra 25 ovelles, pagant 1500 €. Quant li costaran 60 ovelles?

Exercici 1.3-8

Un treballador guanya 500 € en 5 dies. Quants dies haurà de treballar per guanyar 2000 €?

Exercici 1.3-9

Un ciclista tarda 6 h en recórrer la distància entre dues poblacions a una velocitat mitjana de 15 km/h.

Quant tardarà en recórrer el mateix camí a 12 km/h?

Exercici 1.3-10

Dues aixetes omplen una piscina en 10 h.

Quan tardaran en omplir la piscina 5 aixetes amb el mateix cabal d'aigua?

Exercici 1.3-11

En realitzar una compra per valor de 18 000 € es fa una descompte de 1 500 €.

Quin serà el descompte si es mantenen les condicions i la nostra compra és de 15 000 €?

Exercici 1.3-12

Quatre aixetes omplen en 12 hores 2 dipòsits de 60 m³ cadascun.

Quant tardaran 6 aixetes iguals en omplir 3 dipòsits de 80 m³ cadascun?

1.4 Percentages

El percentatge es una fracció en la qual el denominador és 100.

Quan parlem d'un percentatge estem repartint una quantitat total en 100 parts.

Exemples:

Aquest any els preus han pujat un 3 % = $\frac{3}{100}$ respecte dels preus de l'any passat.

Això significa que si l'any passat una cosa costava 100 €, aquest any costa

$$100 \text{ €} + 100 \text{ €} \cdot \frac{3}{100} = 100 \text{ €} + 3 \text{ €} = 103 \text{ €}$$

Un altre preu que l'any passat era de 175 € passa a

$$175 \text{ €} + 175 \text{ €} \cdot \frac{3}{100} = 175 \text{ €} + 5,25 \text{ €} = 180,25 \text{ €}$$

Per transformar una fracció en un percentatge, es multiplica el numerador amb 100 i és calcula el nombre decimal resultant.

Exemples

$$\frac{1}{3} \text{ a \%} \rightarrow \frac{1}{3} \cdot 100 = \frac{100}{3} = 33,3\%$$

$$\frac{3}{4} \text{ a \%} \rightarrow \frac{3}{4} \cdot 100 = \frac{300}{4} = 75 \%$$

Exercici 1.4-1

En una tenda fan dues rebaixes, una primera del 25% i una altra, posterior del 30%. A la factura el preu final es calcula afegint un 25% d'IVA. Quant es pagarà per un article etiquetat amb un preu de 25 €?

Exercici 1.4-2

En comprar un producte valorat en 7830,00 € ens han fet un descompte de 626,4 €. Calcula el descompte en % aplicat.

Exercici 1.4-3

En un curs de l'ESO hi ha 15 alumnes que pertanyen a un grup de diversificació i 7 alumnes que formen un grup ordinari. Considerant el nombre total d'alumnes, calcula el percentatge que representa el grup ordinari i el de diversificació.

Exercici 1.4-4

Calcula el 26% de 11 700 €.

Exercici 1.4-5

Es deposita un capital de 150 000 € en un banc a un interès anual del 3 %. Calcula l'import passat un any, dos anys i 5 anys, si no es retiren diners del compte.

Exercici 1.4-6

Troba x en les següents igualtats.

a) $\frac{x}{4} = \frac{10}{8}$ b) $\frac{6}{12} = \frac{10}{x}$

1.5 Ordre d'operacions

Una expressió pot contenir diverses operacions com sumes, restes, divisions i multiplicacions. Hem de saber quin és l'ordre de prioritats de cada tipus d'operació, per obtenir el resultat correcte.

Exemple 1.5-1

En l'expressió $3+5\cdot 2=?$ hem de saber si començar amb la suma i continuar amb la multiplicació, en aquest cas el resultat seria

$$3+5\cdot 2=8\cdot 2=16$$

o començar amb la multiplicació i terminar amb la suma

$$3+5\cdot 2=3+10=13$$

Si recordem que una multiplicació no és altra cosa que una suma escrita de forma abreujada $5\cdot 2=5+5$, sembla lògic que $3+5+5=13$

Exemple 1.5-2

En l'expressió $4+6\div 2=?$ hem de saber si començar amb la suma i continuar amb la divisió, en aquest cas el resultat seria

$$4+6\div 2=10\div 2=5$$

o començar amb la divisió i terminar amb la suma

$$4+6\div 2=4+3=7$$

Per obtenir el resultat correcte, hem de començar per la divisió.

Norma:

Les operacions de multiplicació i divisió s'han de fer abans de les operacions de suma i resta.

Exemple 1.5-3

En l'expressió $60 - 30 \div 3 \cdot 5 + 7 = ?$ es junten les operacions de suma, resta, multiplicació i divisió.

Seguint la norma, comencem amb la divisió i multiplicació, que es farà de l'esquerra cap a la dreta

$$30 \div 3 \cdot 5 = 10 \cdot 5 = 50 \text{ fet d'esquerra a dreta – correcte}$$

$$30 \div 3 \cdot 5 = 30 \div 15 = 2 \text{ fet de dreta a esquerra - incorrecte}$$

ara apliquem aquest resultat a la expressió inicial

$$60 - 50 + 7 = 17$$

Norma:

Les operacions de multiplicació i divisió s'han de fer d'esquerra a dreta.

Exercici 1.5-1

Calcula el resultat.

a.) $20 \cdot 3 \div 6 - 5 \div 5$

b.) $20 - 6 \div 3 + 5 - 2$

c.) $20 - 6 + 3 + 5 \cdot 2$

d.) $30 \div 5 \cdot 3 \div 6 \cdot 2$

e.) $30 + 5 + 3 + 6 + 2$

f.) $30 + 5 \cdot 3 + 6 \div 2$

g.) $3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 5 + 2$

1.5.1 Símbols d'agrupació

En cas que volguem donar prioritat a una suma o resta sobre la multiplicació o divisió, podem utilitzar un parentesi

$$(3+5) \cdot 2 = 3 \cdot 2 + 5 \cdot 2 = 8 \cdot 2 = 16$$

$$(4+6) \div 2 = 4 \div 2 + 6 \div 2 = 10 \div 2 = 5$$

El parentesi és un símbol d'agrupació, ni ha d'altres com el claudàtor [] i la clau {}. Quan en una expressió apareixen diversos símbols d'agrupació, sempre es comença simplificant des de l'interior de l'expressió, és a dir, amb una expressió que no contengui símbols d'agrupació en el seu interior.

Exemple 1.5.1-1

$$\{ 4 - 3[20 - 3 \cdot 4 - (2 + 4)] \div 2 \} \cdot 3$$

Comencem amb l'expressió $(2+4) = 6$, perquè no conté símbols d'agrupació.

Resolt el parentesi, passem al claudàtor, continuem amb $[20 - 3 \cdot 4 - 6] = 2$.

Resolt el claudàtor passem a la clau, $\{ 4 - 3 \cdot 2 \div 2 \} = 1$

Resolta la clau queda l'expressió $1 \cdot 3 = 3$

Exercici 1.5.1-1

Calcula el resultat.

a.) $40 - (4 + 6) \div 2 + 3$

b.) $4 - 3[20 - 3 \cdot 4 - (2 + 4)] \div 2$

c.) $\{ [(2 + 4) \cdot (8 - 2) - 6] \div 6 \} \cdot 5$

d.) $\{ [(2 \cdot 4) \div (8 - 4) \cdot 6] \div 6 \} - 5$

e.) $\{ [(2 \cdot 4) \div (8 - 4) \cdot 6] \cdot 6 \} \cdot (6 - 4)$

f.) $\frac{1}{2} \cdot (\frac{3}{4} + \frac{5}{4})$

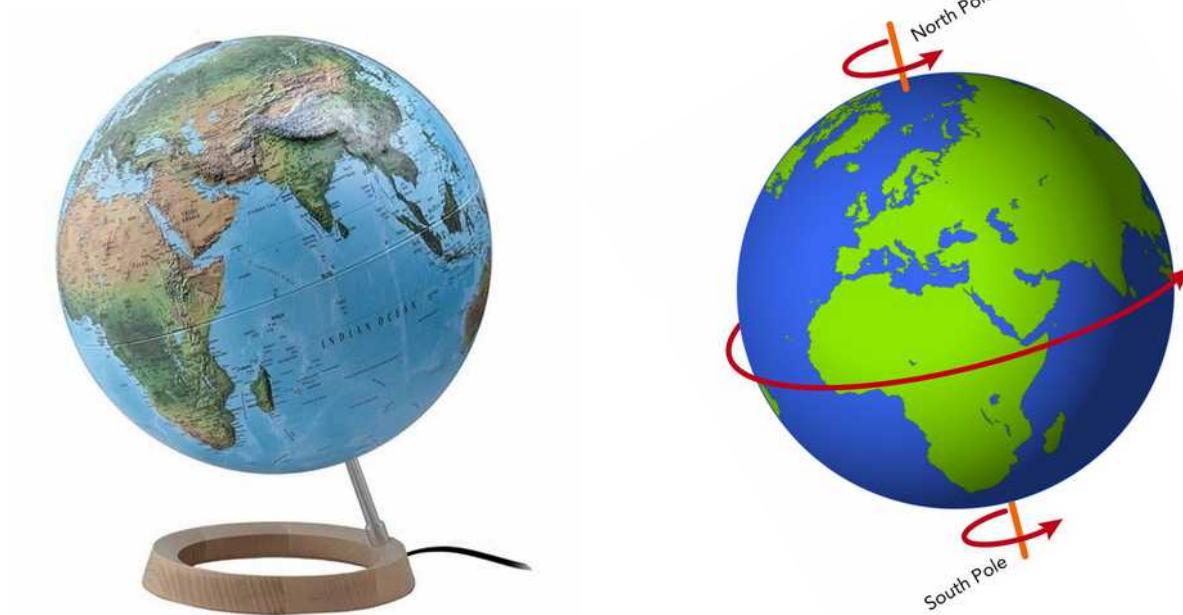
g.) $(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}) \div (\frac{5}{4} - \frac{1}{2})$

h.) $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} \div \frac{5}{4} - \frac{1}{2}$

i.) $[(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}) \div (\frac{5}{4} - \frac{1}{2}) + \frac{1}{4}] \cdot (\frac{10}{8} - \frac{5}{8})$

1.6 Com orientar-se a un planeta inclinat

El planeta terra té forma de globus.

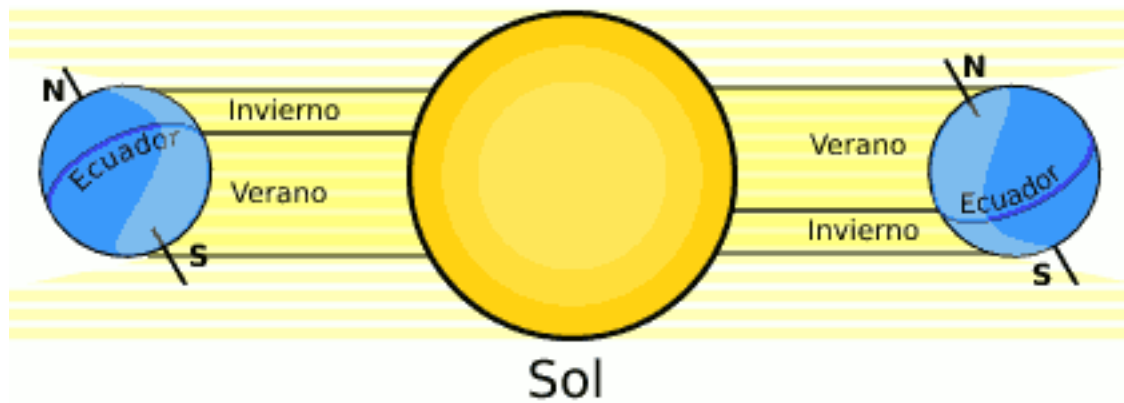


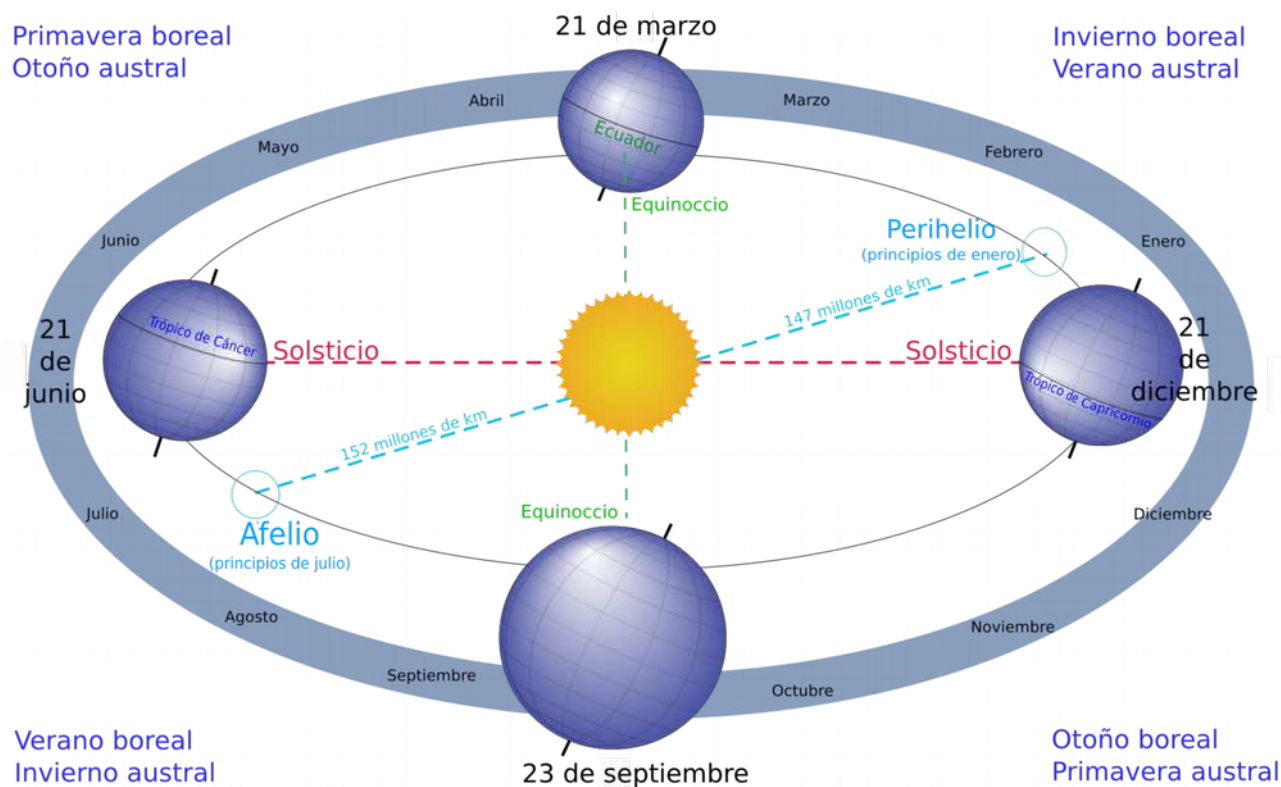
La terra gira al voltant d'un eix que passa pels pols sud i nord.

Fa una volta completa en un dia (24 h).

1.6.1 Un eix inclinat, causa de les estacions de l'any

La causa principal de les **estacions de l'any** és el fet que l'eix de rotació de la terra està inclinat respecte al seu pla orbital amb un angle d'aproximadament **23,5 graus**. Aquest eix es troba sempre inclinat de la mateixa manera. Degut a aquesta inclinació, l'hemisferi nord (boreal) i l'hemisferi sud (austral) són desigualment il·luminats pel Sol.





De File:Four season blank.svg: Horst Frank, Gothikaderivative work: El duende alegre - File:Four season blank.svg, CC BY-SA 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=16505174>

L'efecte de la inclinació de l'eix és observable en el canvi de la durada del dia i la culminació del Sol (l'altitud del Sol al migdia) durant l'any. Un angle petit de la radiació provinent del Sol durant els mesos d'hivern provoca que aquesta es reparteixi sobre una major part de superfície a la Terra, per tant, la llum rebuda és més indirecta i amb menys intensitat. A menor intensitat de llum, menys capacitat per a escalfar el sòl.

En qualsevol moment de l'any, els hemisferis nord i sud sempre experimenten estacions oposades. La causa és que una part del planeta és exposada als rajos del Sol de forma més directa que l'altra, i aquesta exposició s'alterna a mesura que la Terra gira a la seva òrbita. Cada sis mesos la situació s'inverteix.

1.6.2 Elevació del Sol respecte l'horitzó

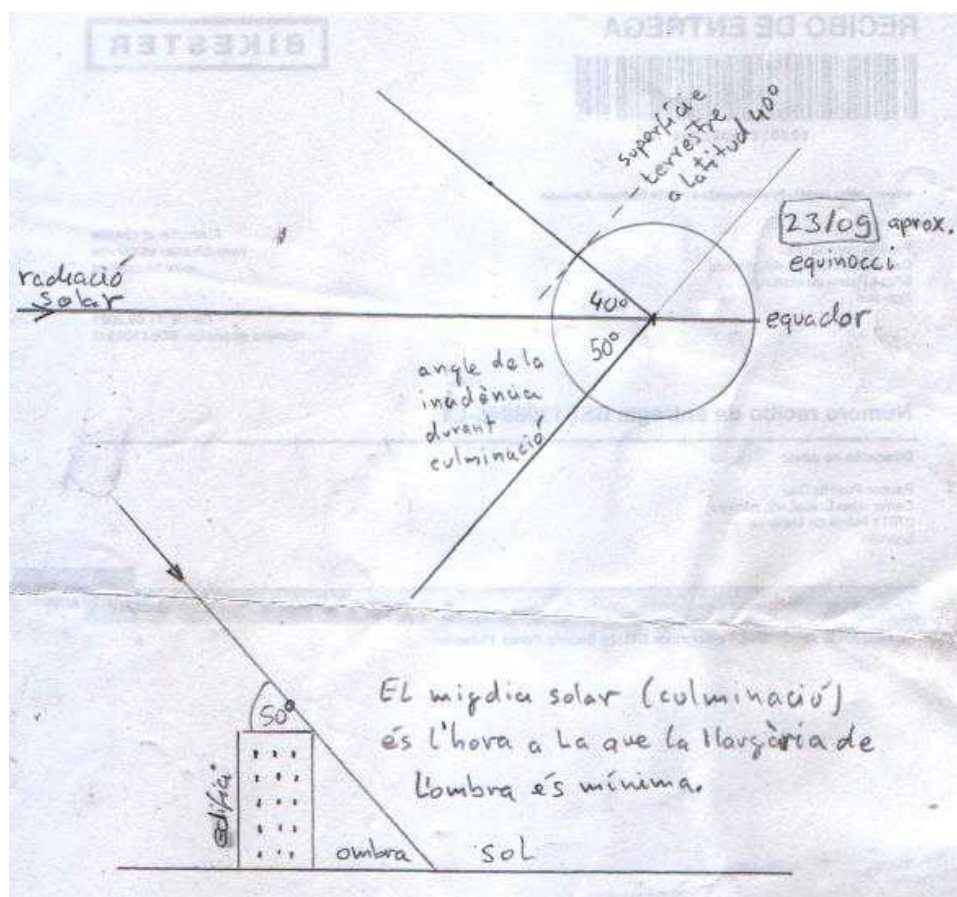
Solstici d'estiu i d'hivern

Els dos moments en què l'equador celeste té la màxima inclinació respecte el Sol són els solsticis. Durant aproximadament la meitat de l'any, l'hemisferi nord s'inclina cap al Sol, amb la màxima inclinació al solstici d'estiu (al voltant del 21 de juny). El mateix passa a l'altra meitat de la Terra, però el moment de màxima inclinació en l'hemisferi sud és al solstici d'hivern (al voltant de 21 del desembre).

Font: https://ca.wikipedia.org/wiki/Estaci%C3%B3_de_l%27any

What causes the seasons?: https://youtu.be/q4_-R1vnJyw

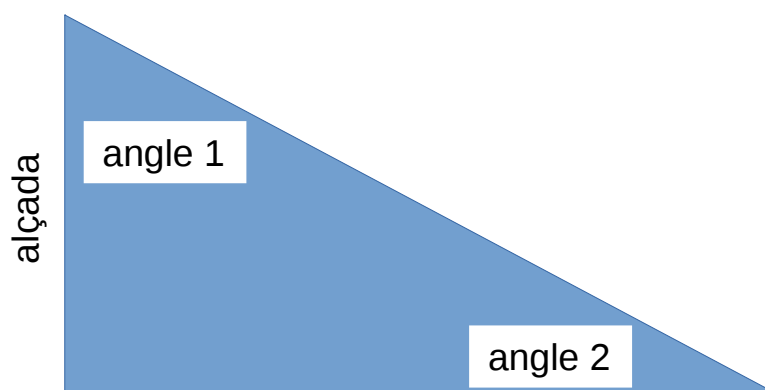
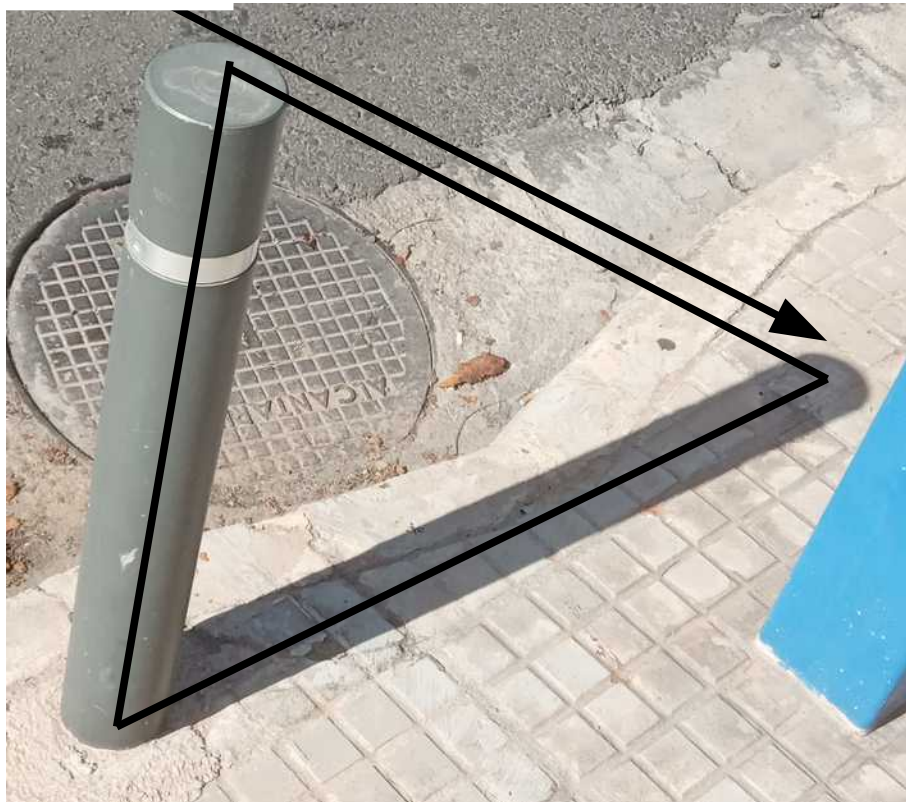
La **culminació** és la màxima altura aconseguida per un cos celeste sobre l'horitzó, durant el seu recorregut diari de est a oest.



Càlcul de l'angle d'elevació

L'ombra de qualsevol objecte vertical sobre una superfície horitzontal, fa un angle de 90° amb l'objecte.

radiació solar



Podem imaginar un triangle rectangle format per l'objecte, l'ombra i la radiació solar.

L'angle 2, és l'angle d'elevació del sol damunt l'horitzó.

De matinada, poc després de la sortida del sol, les ombres són llargues. El sol es troba a l'est (llevant). A mesura que passa el temps i s'apropa el migdia, les ombres es fan més curtes, fins arribar al moment del migdia (culminació). En aquest moment, el sol, que està en la seva posició més elevada al cel, es troba en el sud (migdia). A partir del migdia, el sol baixa, reduint l'angle d'elevació, fins que desapareix pel oest (ponent).

<https://www.edumedia-sciences.com/es/media/679-movimiento-aparente-del-sol-norte>

<https://www.youtube.com/watch?v=th79sDCAh0Q>

<https://www.youtube.com/watch?v=ivHOIcPoJl0>

Exercici 1.6.2-1

- En quin moment del dia és major, i en quin és menor, l'angle d'elevació (angle 2)?
- Si coneixem l'angle 2, com podem calcular l'angle 1?
- Quina relació hi ha entre l'angle d'elevació i la llargària de l'ombra?
- Quina relació hi ha entre $\frac{\text{alçada}}{\text{llargària ombra}}$ i l'angle d'elevació?

Exercici 1.6.2-2

- Explica què són el solstici i l'equinocci.
- En quin sentit gira la terra?
- En quin sentit és el moviment aparent del Sol?

Per calcular l'angle d'elevació del Sol, es pot utilitzar la funció arctan (atan):

$$\arctan\left(\frac{\text{alçada}}{\text{llargària ombra}}\right) = \text{angle d' elevació}$$

A	B	C
Alçada / Ombra	Elevació en radians	Elevació en graus =ATAN(A)*(180°/pi)
0,1	0,1	5,7
0,2	0,2	11,3
0,3	0,3	16,7
0,4	0,4	21,8
0,5	0,5	26,6
0,6	0,5	31,0
0,7	0,6	35,0
0,8	0,7	38,7
0,9	0,7	42,0
1	0,8	45,0
1,1	0,8	47,8
1,2	0,9	50,2
1,3	0,9	52,5
1,4	1,0	54,5
1,5	1,0	56,3
1,6	1,0	58,0
1,7	1,0	59,6
1,8	1,1	61,0
1,9	1,1	62,3
2	1,1	63,5
2,1	1,1	64,6
2,2	1,1	65,6
2,3	1,2	66,5
2,4	1,2	67,4
2,5	1,2	68,2
2,6	1,2	69,0
2,7	1,2	69,7
2,8	1,2	70,4
2,9	1,2	71,0
3	1,2	71,6

Exercici 1.6.2-3

- a) Mesurant alçada i ombra d'un objecte, calcula l'angle d'elevació del Sol a diverses hores del dia.
- b) Indica l'hora de culminació.

Data				
Hora				
Alçada				
Llargària ombra				
Alçada / Ombra				
Elevació				

Data				
Hora				
Alçada				
Llargària ombra				
Alçada / Ombra				
Elevació				

Data				
Hora				
Alçada				
Llargària ombra				
Alçada / Ombra				
Elevació				