Index

3 Ecuaciones

Igualdades y ecuaciones

Utilizamos ecuaciones cuando tratamos de averiguar una cierta cantidad, desconocida, pero de la que sabemos que cumple cierta condición.

La cantidad desconocida se llama incógnita y se representa por ***x*** (o cualquier otra letra) y la condición que cumple se escribe como una igualdad algebraica a la que llamamos **ecuación**.

Resolver una ecuación es encontrar el valor de la incógnita con la que se cumple la igualdad.

Cuando hay más de una incógnita hablamos de un sistema de ecuaciones.
Normalmente el número de ecuaciones será igual al número de incógnitas, ya que esto permite una solución única del sistema.

Ejemplo 3-1

Se reparten 40 euros entre dos personas, de manera que uno reciba 10 euros más que el otro. ¿cuánto recibe cada uno?

En primer lugar traducimos a lenguaje matemático la información de que dos personas reciben 40 euros.

Ecuación 1: $x + y = 40$ euros

x representa el importe que recibe la primera persona e ***y*** el que recibe la segunda.

A continuación traducimos la información de que uno recibe 10 euros más que otro.

Ecuación 2: x = y - 10 euros

x recibe 10 euros menos que ***y***.

Vemos que hay dos incógnitas ***x*** y ***y*** y dos ecuaciones. Se trata por tanto de un sistema de ecuaciones.

Ahora eliminamos la incógnita ***x***, insertando la ecuación 2 en 1.

y - 10 euros + y = 2y -10 euros = 40 euros

para resolver hacia ***y***, obteniendo su valor.

y = (40 euros -10 euros) / 2 = 15 euros

Insertando el valor de ***y*** = 15 euros en cualquiera de las ecuaciones 1 o 2, obtenemos x = 25 euros

3.1 Transformación de ecuaciones

Para resolver una ecuación hacia una incógnita, normalmente será necesario transformar la ecuación.

Podemos transformar una ecuación, manteniendo la igualdad, es decir, manteniendo la información que contiene, aplicando cualquier operación matemática idéntica a ambos lados de la ecuación.

Veamos unos ejemplos sencillos para las operaciones de suma, resta, multiplicación y división.

Ejemplo 3.1-1

$x - 7 = 14$

Intuimos que ***x*** deberá ser 21, pero vamos a demostrarlo. Para ello **sumamos** 7 a ambos lados de la ecuación.

$x - 7 = 14 \mid +7$

$x -7 + 7 = 14 + 7 \quad \rightarrow \quad x = 14 + 7 = 21$

Ejemplo 3.1-2

$x + 7 = 14$

Intuimos que ***x*** deberá ser 7, pero vamos a demostrarlo. Para ello **restamos** 7 a ambos lados de la ecuación.

$x + 7 = 14 \mid -7$

$x +7 - 7 = 14 - 7 \quad \rightarrow \quad x = 14 - 7 = 7$

Ejemplo 3.1-3

$x / 7 = 3$

Intuimos que ***x*** deberá ser 21, pero vamos a demostrarlo. Para ello **multiplicamos** por 7 ambos lados de la ecuación.

$x / 7 = 3 \mid \cdot 7$

$(x / 7) \cdot 7 = 3 \cdot 7$ → $x = 3 \cdot 7 = 21$

Ejemplo 3.1-4

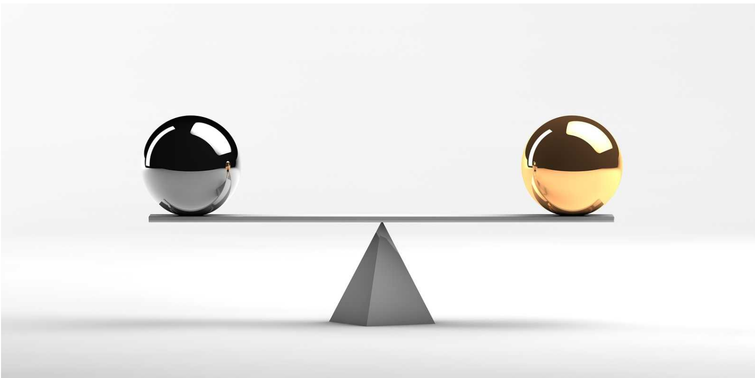
$x \cdot 7 = 49$

Intuimos que ***x*** deberá ser 7, pero vamos a demostrarlo. Para ello **dividimos** entre 7 ambos lados de la ecuación.

$x \cdot 7 = 49 \mid /7$

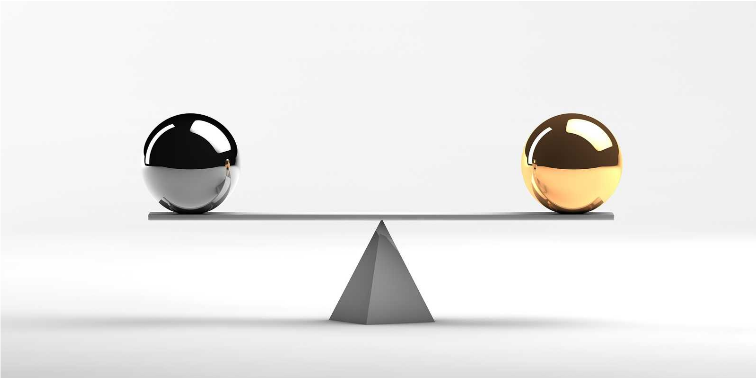
$(x \cdot 7) / 7 = 49 / 7$ → $x = 49 / 7 = 7$

Una **ecuación** es como una **blanza en equilibrio**. Para mantener el equilibrio, podemos aplicar operaciones a cada lado de la balanza, pero estás deben ser idénticas.



Ejemplo 3.1-5

2y -10 euros = 40 euros



Tenemos la siguiente ecuación 2y -10 euros = 40 euros y la queremos resolver hacia ***y***.

Aplicamos una operación de suma a ambos lados de la ecuación.

2y -10 euros = 40 euros | + 10 euros

2y -10 euros + 10 euros = 40 euros + 10 euros

2y = 50 euros

Ahora aplicamos una operación de división a ambos lados de la ecuación.

2y = 50 euros | : 2

2y : 2= 50 euros : 2

y = 25 euros

Ejemplo 3.1-6

Tenemos la siguiente ecuación $20\,\Omega = 50\frac{V}{I + 1\,A}$ y la queremos resolver hacia ***I***.

Aplicamos una operación de multiplicación a ambos lados de la ecuación.

$20\,\Omega = 50\frac{V}{I + 1\,A}$ | · (I + 1A)

$20\,\Omega \cdot (I + 1\,A) = 50\frac{V}{I + 1\,A} \cdot (I + 1\,A)$

→ $20\,\Omega \cdot (I + 1\,A) = 50\,V$ → $20\,\Omega \cdot I + 20\,\Omega \cdot 1\,A = 50\,V$

$20\,\Omega \cdot I + 20\,V = 50\,V$

Aplicamos una operación de resta a ambos lados de la ecuación.

$20\,\Omega \cdot I + 20\,V = 50\,V$ | - 20V

$20\,\Omega \cdot I + 20\,V - 20\,V = 50\,V - 20\,V$

$20\,\Omega \cdot I = 30\,V$

Y obtenemos el resultado de ***I***, *a*plicando una operación de división a ambos lados de la ecuación.

$20\,\Omega \cdot I = 30\,V$ | : 20 Ω

$\frac{20\,\Omega \cdot I}{20\,\Omega} = 30\frac{V}{20\,\Omega}$

$I = 30\frac{V}{20\,\Omega} = 1{,}5\,A$

Ejercicio 3.1-1

Resuelve las ecuaciones

a.) $3x-6+5x=2$ b.) $x+3(-6+5x)-2=7+7x-8$ c.) $\frac{7}{4}=\frac{9x}{4}-\frac{1}{8}$

d.) $\frac{1}{3}\cdot(5-x)=\frac{5x}{6}-\frac{5}{2}$ e.) $7\cdot(5+\frac{1}{x})=\frac{5}{6x}-\frac{2}{5}$ f.) $15x\cdot\frac{1}{5}=5x-\frac{2}{5}$

Ejercicio 3.1-2

a) Al sumar el triple de un número con la mitad de dicho número se obtiene 126. ¿De qué número se trata?
b) Una pluma es 3 euros más cara que un bolígrafo. Por 5 plumas y 4 bolígrafos pagamos 33,9 euros.
   ¿Cuánto cuesta la pluma y cuánto el bolígrafo?
c) Pablo es 5 años más joven que María y 5 años mayor que Federico. Entre los tres igualan la edad de su madre, 48 años. ¿Qué edad tiene cada uno?
d) Lorenzo gasta la mitad de su dinero en un videojuego, y la séptima parte en ir al cine. ¿Cuánto tenía si aún le quedan 20 euros?
e) Hallar los lados de un rectángulo de 18 cm de perímetro, si la base es $\frac{2}{7}$ de la altura.
f) Paloma, Pablo y Andrés cobran 1638 euros por un trabajo. Pablo ha trabajado el triple de días que Andrés y Palomael doble que Pablo. ¿Cómo repartirán el dinero?

3.2 Ecuaciones equivalentes

Se llaman ecuaciones equivalentes a las que tienen las mismas soluciones.

• Si se suma o resta una cantidad o expresión a cada lado (miembro) de una ecuación se obtiene otra equivalente.

• Si se multiplican o dividen los dos lados (miembros) de una ecuación por un número (o una expresión algebraica) se obtiene otra equivalente.

Ejemplo 3.2-1

Ecuación 1: 2x -5 = 7

Si **sumamos** 4 a cada lado de la ecuación obtenemos

Ecuación 2: 2x -5 + 4 = 7 + 4

Las ecuaciones 1 y 2 son equivalentes. Podemos comprobarlo obteniendo su solución.

Ecuación 1: $x=\frac{12}{2}=6$ Ecuación 2: $x=\frac{12}{2}=6$

Si **restamos**, por ejemplo 70 de cada lado de la ecuación 1, obtenemos

Ecuación 3: 2x -5 -70 = 7 – 70

La solución de la ecuación 3 es $x=\frac{12}{2}=6$, que vuelve a ser equivalente a las ecuaciones 1 y 2.

Ahora vamos a **dividir** ambos lados de la ecuación 1 entre 20, obteniendo

Ecuación 4: $\frac{2x-5}{20}=\frac{7}{20} \rightarrow \frac{2x}{20}-\frac{5}{20}=\frac{7}{20} \rightarrow 0{,}1x-0{,}25=0{,}35 \rightarrow 0{,}1x=0{,}35+0{,}25 \rightarrow 0{,}1x=0{,}6$

x = 6

Finalmente **multiplicamos** ambos lados de la ecuación 1 por 3, obteniendo

Ecuación 5: $(2x-5)\cdot 3=7\cdot 3 \rightarrow 6x-15=21 \rightarrow 6x=21+15 \rightarrow 6x=36 \rightarrow x=\frac{36}{6}=6$

Las ecuaciones 1 a 5 dan todas el mismo resultado x = 6. Por tanto, son equivalentes.

Ejercicio 3.2-1

¿Cuáles de las siguientes ecuaciones son equivalentes?

a) $3x=6$

b) $12x=18$

c) $\frac{x}{3}=\frac{6}{9}$

d) $4x+5=11$

e) $\frac{x-7}{4}=\frac{6}{16}-\frac{21}{12}$

f) $\frac{3x}{3^3}=\frac{6}{3\cdot 9}$

g) $\frac{3x}{\sqrt{2}}=\frac{6}{2^2}$

h) $\frac{\sqrt{36}\cdot x}{\sqrt{9}}=\frac{6\cdot 2}{3}$

i) $3^2 x=6^2$

j) $\sqrt{12}\cdot x=\sqrt{18}$

k) $\frac{(20-8)x}{15+3}=1$

l) $(3+1)x=6+1$

3.3 Ejercicios de repaso

Se llaman ecuaciones equivalentes a las que tienen las mismas soluciones.

Ejercicio 3.3-1

¿Es 7 solución de $(x-6)\cdot 13=13$?

Ejercicio 3.3-2

¿Son equivalentes las ecuaciones $7-6(x-13)=1$ y $7-6x+78=1$?

Ejercicio 3.3-3

La ecuación $6x^2-7x+c=0$ tiene por solución ***x*** = 8. ¿Cuál es el valor de ***c***?

Ejercicio 3.3-4

¿Son equivalentes $\frac{x}{8}-\frac{1-x}{7}=1$ y $7x-8+8x=56$?

Ejercicio 3.3-5

Resuelve la ecuación $\frac{17}{2}=(x+\frac{45}{2})\cdot\frac{1}{3}$.

Ejercicio 3.3-6

Resuelve la ecuación $\frac{3x+19}{4}=(-\frac{1}{9})\cdot(-37-x)$.

Ejercicio 3.3-7

Resuelve la ecuación $\frac{x-2}{5}-\frac{5-x}{2}=2$.

Ejercicio 3.3-8

Por 2 pantalones y 4 camisertas pagamos 86 euros. Si un pantalón cuesta 4 euros más que una camiseta, ¿cuánto cuesta una camiseta?

Ejercicio 3.3-9

La suma de tres números consecutivos es 84. Haya el menor de los tres.

Ejercicio 3.3-10

La superficie de una finca es de 158 Ha. Un olivar ocupa la mitad de superficie que un encinar, y el trigo ocupa la tercera parte que el encinar. También hay una superficie de 4 Ha dedicada a huerta. ¿Cuánto ocupa el encinar?

Fuente:
http://recursostic.educacion.es/secundaria/edad/2esomatematicas/2quincena6/index2_6.htm