

A partir de la siguiente definición:

**Graph** = **Array**(n,LinkedList())

Donde **Graph** es una representación de un grafo **simple** mediante listas de adyacencia resolver los siguientes ejercicios

## Ejercicio 1

Implementar la función crear grafo que dada una lista de vértices y una lista de aristas cree un grafo con la representación por Lista de Adyacencia.

**def createGraph(List, List)**

**Descripción:** Implementa la operación crear grafo

**Entrada:** LinkedList con la lista de vértices y LinkedList con la lista de aristas donde por cada par de elementos representa una conexión entre dos vértices.

**Salida:** retorna el nuevo grafo

```
def createGraphx2(LV, LA): # representa la arista(v,w) en la lista de ady de v y w
    grafo = [None]*len(LV)

    for i in range(0,len(LV)):
        for j in range(0,len(LA)):
            if LA[j][0] == LV[i]:
                insertInOrder(grafo, i, LA[j][1])
            elif LA[j][1] == LV[i]:
                insertInOrder(grafo, i, LA[j][0])

    #caso en que si hay algun vertice que no esta conectado con nadie(None) LO REPRESENTO CON -1
    for i in range(0,len(LV)):
        if grafo[i] == None:
            insertInOrder(grafo, i, -1)

    #printDic(grafo)
    return grafo
```

## Ejercicio 2

Implementar la función que responde a la siguiente especificación.

**def existPath(Grafo, v1, v2):**

**Descripción:** Implementa la operación existe camino que busca si existe un camino entre los vértices v1 y v2

**Entrada:** Grafo con la representación de Lista de Adyacencia, v1 y v2 vértices en el grafo.

**Salida:** retorna True si existe camino entre v1 y v2, False en caso contrario.

```
3 def existPath(grafo, v1, v2):
4     dfs = convertToDFSTree(grafo,v1)
5     #busco en key = 0 porque esa es la posicion en el slot en donde voy a encontrar el arbol con raiz v1
6     path = searchGrafo(dfs,0,v2)
7     return path
8
```

### Ejercicio 3

Implementar la función que responde a la siguiente especificación.

**def isConnected(Grafo):**

**Descripción:** Implementa la operación es conexo

**Entrada:** Grafo con la representación de Lista de Adyacencia.

**Salida:** retorna True si existe camino entre todo par de vértices, False en caso contrario.

```
66 def isConnected(grafo):
67     dfs = convertToDFSTree(grafo,1)
68     #printDic(dfs)
69     long = len(dfs)
70     cant = 0
71     conexo = True
72     #si mi hash DFS tiene mas de una lista en los slot, quiere decir que hay mas de un arbol y entonces no es conexo
73     for i in range(0,long):
74         if dfs[i] != None:
75             cant += 1
76             if cant > 1:
77                 conexo = False
78                 break
79     return conexo
80
81
```

### Ejercicio 4

Implementar la función que responde a la siguiente especificación.

**def isTree(Grafo):**

**Descripción:** Implementa la operación es árbol

**Entrada:** Grafo con la representación de Lista de Adyacencia.

**Salida:** retorna True si el grafo es un árbol.

```
def isTree(grafo):
    ciclo = convertToBFSTree_CICLO(grafo, 1)
    if length(ciclo) == 0:
        return True
    else:
        return False
```

### Ejercicio 5

Implementar la función que responde a la siguiente especificación.

**def isComplete(Grafo):**

**Descripción:** Implementa la operación es completo

**Entrada:** Grafo con la representación de Lista de Adyacencia.

**Salida:** retorna True si el grafo es completo.

**Nota:** Tener en cuenta que un grafo es completo cuando existe una arista entre todo par de vértices.

```
165     #(considerando que el grafo es simple)
166     def isCompleto(grafo):
167         cantVertices = len(grafo)-1
168         for i in range(0,cantVertices):
169             if length(grafo[i]) != cantVertices:
170                 return False
171             break
172         return True
173
```

## Ejercicio 6

Implementar una función que dado un grafo devuelva una lista de aristas que si se eliminan el grafo se convierte en un árbol. Respetar la siguiente especificación.

**def convertTree(Grafo)**

**Descripción:** Implementa la operación es convertir a árbol

**Entrada:** Grafo con la representación de Lista de Adyacencia.

**Salida:** LinkedList de las aristas que se pueden eliminar y el grafo resultante se convierte en un árbol.

```
181
182     def convertTree(grafo):
183         lista = convertToBFSTree_CICLO(grafo, 0)
184         return lista
185
```

Con bfs AL ÚLTIMO

## Parte 2

### Ejercicio 7

Implementar la función que responde a la siguiente especificación.

**def countConnections(Grafo):**

**Descripción:** Implementa la operación cantidad de componentes conexas

**Entrada:** Grafo con la representación de Lista de Adyacencia.

**Salida:** retorna el número de componentes conexas que componen el grafo.

Distintos conjuntos conexas en un mismo grafo

```
194
195 def countConnections(grafo):
196     dfs = convertToDFSTree(grafo,1)
197     #printDic(dfs)
198     long = len(dfs)
199     cant = 0
200     conexo = True
201     #si mi hash DFS tiene mas de una lista en los slot, quiere decir que hay mas de un arbol y entonces no es conexo
202     for i in range(0,long):
203         if dfs[i] != None:
204             cant += 1
205     return cant
206
207
```

## Ejercicio 8

Implementar la función que responde a la siguiente especificación.

**def convertToBFSTree(Grafo, v):**

**Descripción:** Convierte un grafo en un árbol BFS

**Entrada:** Grafo con la representación de Lista de Adyacencia, **v** vértice que representa la raíz del árbol

**Salida:** Devuelve una Lista de Adyacencia con la representación BFS del grafo recibido usando **v** como raíz.

```
216
217 def convertToBFSTree(grafo, v):
218     if isConnected(grafo) == True:
219         ciclo = False
220         long = len(grafo)+1
221         #nuevo diccionario para guardar los vertices con su color, distancia y padre
222         vertices = [None]*(long)
223         #key = i, color vértice = w, distancia = None, padre = None
224         #en una hash, en la posicion del numero del vertice, añado a la lista los datos anteriores
225         for i in range (0,long):
226             value = False
227             insertInOrder(vertices, i, value) #inserto arco de retroceso (ciclo)
228             value = None
229             insertInOrder(vertices, i, value) #inserto padre
230             value = None
231             insertInOrder(vertices, i, value) #inserto distancia
232             value = "w"
233             insertInOrder(vertices, i, value) #inserto color
234
235         #al vertice v le doy color = grey, distancia = 0 y padre = None ya esta predefinido antes
236         vertices[v].head.value= "g"
237         vertices[v].head.nextNode.value= 0
238
239         #contador de niveles en el arbol
240         j = -1
241
242         #creo lista BFS donde voy a ir "armando" el arbol y Q donde voy a encolar y desencolar los vertices
243
244         BFS = [None]*long
245         Q = LinkedList()
246
247         #encolo el primer vertice a Q
248         enqueue(Q,v)
249
```

```
249
250     while Q.head != None:
251         j += 1
252         u = dequeue(Q)
253         #voy a recorrer la lista de adyacencia del vertice u en la hash
254         currentGrafo = grafo[u].head
255         long = length(grafo[u])
256
257         for i in range(0,long):
258             key = currentGrafo.value
259             currentVertices = vertices[key].head
260             if currentVertices.value == "w":
261                 currentVertices.value = "g" #color
262                 currentVertices.nextNode.value = (vertices[u].head.nextNode.value + 1) #distancia
263                 currentVertices.nextNode.nextNode.value = u #padre
264                 enqueue(Q, key)
265                 insertInOrderBFS(BFS, j, u, key)
266             elif currentVertices.value == "g":
267                 currentVertices.nextNode.nextNode.nextNode.value = True #hay ciclo (arco de retroceso)
268                 ciclo = True
269                 ----
270             currentGrafo = currentGrafo.nextNode
271
272         vertices[u].head.value = "b" #termino de visitar todos los nodos adyacentes a u
273     return BFS
274
275 else: return None
276
```

## Ejercicio 9

Implementar la función que responde a la siguiente especificación.

**def convertToDFSTree(Grafo, v):**

**Descripción:** Convierte un grafo en un árbol DFS

**Entrada:** Grafo con la representación de Lista de Adyacencia, v vértice que representa la raíz del árbol

**Salida:** Devuelve una Lista de Adyacencia con la representación DFS del grafo recibido usando v como raíz.

```
287
288 def convertToDFSTree(grafo, u):
289     long = len(grafo)
290     #nuevo diccionario para guardar los vertices con su color, distancia y padre
291     vertices = [None]*(long)
292     arcosRetroceso = [None]*(long)
293     arcoAvance = [None]*(long)
294     arcoCruce = [None]*(long)
295     arcosRetroceso_T_o_F = False
296     #key = i, color vértice = w, distancia = None, padre = None
297     #en una hash, en la posición del número del vértice, añado a la lista los datos anteriores
298
299     time = 0
300     j = -1
301
302     for i in range(0, long):
303
304         value = None
305         insertInOrder(vertices, i, value) #inserto time final NEXTNODE.NEXTNODE.NEXTNODE
306
307         value = None
308         insertInOrder(vertices, i, value) #inserto padre NEXTNODE.NEXTNODE
309
310         value = time
311         insertInOrder(vertices, i, value) #inserto time NEXTNODE
312
313         value = "white"
314         insertInOrder(vertices, i, value) #inserto color HEAD
315
316     DFS = [None]*(len(grafo)+1)
317     for i in range(0, long):
318         if vertices[i].head.value == "white":
319
320             if i != 0: #si es igual a 0 es el caso de el primer vertice = RAIZ
321                 u = vertices[i].head.key
322                 j += 1
323                 DFS = convertToDFSTree(grafo, u, vertices, i, time, DFS, arcosRetroceso, arcosRetroceso_T_o_F, arcoAvance, arcoCruce)
```

```

327 def convertToDFSTreeR(grafo,u,vertices,j,time,DFS,arcosRetroceso,arcosRetroceso_T_o_F,arcoAvance,arcoCruce):
328
329     time += 1
330     vertices[u].head.value = "grey"
331     vertices[u].head.nextNode.value = time
332
333     long = length(grafo[u])
334
335     if grafo[u].head.value != -1:
336         currentGrafo = grafo[u].head
337         currentVertices = vertices[u].head
338
339         for i in range(0,long):
340             key = currentGrafo.value
341
342             if vertices[key].head.value == "white":
343                 vertices[key].head.nextNode.nextNode.value = u
344                 insertInOrderBFS(DFS, j, u, key)
345                 convertToDFSTreeR(grafo,key,vertices,j,time,DFS,arcosRetroceso,arcosRetroceso_T_o_F,arcoAvance,arcoCruce)
346             #ARCO RETROCESO
347             elif vertices[key].head.value == "grey":
348                 arcosRetroceso_T_o_F = True
349                 insertInOrder(arcosRetroceso, key, u)
350                 insertInOrder(arcosRetroceso, u, key)
351             #ARCO AVANCE O CRUCE
352             elif vertices[key].head.value == "black":
353                 #si una arista de avance o cruce conecta dos componentes conexos quiere decir que existe una ruta entre ellos que NO pasa
354                 #por la raíz del arbol DFS
355
356                 #Son aristas (u,v) que no son parte del árbol y conectan u a un descendiente v (vértice sucesor).
357                 if vertices[u].head.nextNode.value < vertices[key].head.nextNode.value:
358                     insertInOrder(arcoAvance, u, key)
359                 else:
360                     #Pueden ir entre vértices dentro de un mismo árbol (siempre que v no sea ancestro de u), o entre distintos árboles DFS.
361                     vertices[key].head.nextNode.nextNode.value = u
362                     insertInOrderBFS(DFS, j, u, key)
363                     convertToDFSTreeR(grafo,key,vertices,j,time,DFS,arcosRetroceso,arcosRetroceso_T_o_F,arcoAvance,arcoCruce)
364             #ARCO RETROCESO
365             elif vertices[key].head.value == "grey":
366                 arcosRetroceso_T_o_F = True
367                 insertInOrder(arcosRetroceso, key, u)
368                 insertInOrder(arcosRetroceso, u, key)
369             #ARCO AVANCE O CRUCE
370             elif vertices[key].head.value == "black":
371                 #si una arista de avance o cruce conecta dos componentes conexos quiere decir que existe una ruta entre ellos que NO pasa
372                 #por la raíz del arbol DFS
373
374                 #Son aristas (u,v) que no son parte del árbol y conectan u a un descendiente v (vértice sucesor).
375                 if vertices[u].head.nextNode.value < vertices[key].head.nextNode.value:
376                     insertInOrder(arcoAvance, u, key)
377                 else:
378                     #Pueden ir entre vértices dentro de un mismo árbol (siempre que v no sea ancestro de u), o entre distintos árboles DFS.
379                     insertInOrder(arcoCruce, u, key)
380
381             currentGrafo = currentGrafo.nextNode
382
383         currentVertices.value = "black"
384         time += 1
385         currentVertices.nextNode.nextNode.nextNode.value = time
386
387     else:
388         #caso en que un vertice no esta conectado con ningun otro vertice
389         key = u
390         insertInOrderBFS(DFS, j, u, None)
391
392     return DFS

```

## Ejercicio 10

Implementar la función que responde a la siguiente especificación.

**def bestRoad(Grafo, v1, v2):**

**Descripción:** Encuentra el camino más corto, en caso de existir, entre dos vértices.

**Entrada:** Grafo con la representación de Lista de Adyacencia, **v1** y **v2** vértices del grafo.

**Salida:** retorna la lista de vértices que representan el camino más corto entre **v1** y **v2**. La lista resultante contiene al inicio a **v1** y al final a **v2**. En caso de que no exista camino se retorna la lista vacía.

Con bfs

```
490         enqueue(Q, key)
491         insertInOrderBFS(BFS, j, u, key)
492     elif currentVertices.value == "g":
493         currentVertices.nextNode.nextNode.nextNode.value = True #hay ciclo (arco de retroceso)
494         ciclo = True
495         -----
496         currentGrafo= currentGrafo.nextNode
497
498     vertices[u].head.value = "b" #termino de visitar todos los nodos adyacentes a u
499     return BFS
500
501
502 def bestRoad(grafo,s,v):
503     vertices = BFS_vertices(grafo,s)
504     bestRoad_R(s,v,vertices)
505
506 def bestRoad_R(s,v,vertices):
507     if v == s:
508         print(s)
509         return
510     elif vertices[v].head.nextNode.nextNode.value == None:
511         return print(None)
512     else:
513         bestRoad_R(s,vertices[v].head.nextNode.nextNode.value,vertices)
514         print(v)
515
516
```

## Ejercicio 11 (Opcional)

Implementar la función que responde a la siguiente especificación.

**def isBipartite(Grafo):**

**Descripción:** Implementa la operación es bipartito

**Entrada:** Grafo con la representación de Lista de Adyacencia.

**Salida:** retorna True si el grafo es bipartito.

NOTA: Un grafo es **bipartito** si no tiene ciclos de longitud impar.

## Ejercicio 12

Demuestre que si el grafo G es un árbol y se le agrega una arista nueva entre cualquier par de vértices se forma exactamente un ciclo y deja de ser un árbol.

## Ejercicio 13

Demuestre que si la arista (u,v) no pertenece al árbol BFS, entonces los niveles de u y v difieren a lo sumo en 1.



### Ejercicio 12 TP GRAFOS

Demuestre que si el grafo  $G$  es un árbol, y se le agrega una arista nueva entre  $u$  y  $v$  par de vértices se forma exactamente un ciclo y deja de ser un árbol.

Si un grafo  $G$  es un árbol con  $n$  vértices (o nodos), entonces por propiedad tiene  $n-1$  aristas. Si se agrega una nueva arista donde sea, la cantidad de aristas será igual a  $n$ , por lo que la propiedad dejará de cumplirse y no será más un árbol debido a que se formará un ciclo.

Ejercicio 13: Demuestre que si la arista  $(u,v)$  no pertenece al árbol BFS, entonces los niveles de  $u$  y  $v$  difieren a lo sumo en uno.

Supongamos que  $(u,v)$  no pertenece al BFS. Esto significa que  $u$  no fue descubierto cuando se exploró el vértice  $v$ , o viceversa. Hay dos posibilidades:

- 1)  $u$  se descubrió después de que  $v$  fue descubierto.
- 2)  $v$  " " " " "  $u$  " " "

Caso 1:  $u$  debe estar en el mismo nivel o en un nivel superior que  $v$ , ya que, si  $u$  estuviera en un nivel más bajo que  $v$ , entonces  $(u,v)$  hubiera sido agregada al BFS. Pero como hemos supuesto que  $(u,v)$  NO pertenece al BFS, entonces  $u$  debe estar al mismo nivel que  $v$  o a un nivel superior.

Caso 2:  $v$  debe estar en el mismo nivel o en un nivel superior que  $u$ . El razonamiento es similar al anterior.

Por lo tanto, en cualquiera de los dos casos, los niveles de  $u$  y  $v$  difieren a lo sumo en uno.

## Parte 3

### Ejercicio 14

Implementar la función que responde a la siguiente especificación.

**def PRIM(Grafo):**

**Descripción:** Implementa el algoritmo de PRIM

**Entrada:** Grafo con la representación de Matriz de Adyacencia.

**Salida:** retorna el árbol abarcador de costo mínimo



```
559 def PRIM(g):
560     arista = buscoAristas(g) #aristas del grafo de menor a mayor costo
561
562     long = len(g)
563     inicial = [None]*long
564     for i in range(0,len(g)): #guardo los vertices en un array
565         inicial[i] = i
566
567     final = LinkedList()
568     AACM = LinkedList()
569
570     while len(inicial) != length(final):
571         if length(final) == 0:
572             #primera vez: saco la arista de menor costo y agrego a lista final y elimino de lista inicial los vertices
573             u = dequeue_priority(arista)
574             add(final,u[0])
575             add(final,u[1])
576             inicial[u[0]] = -1
577             inicial[u[1]] = -1
578             nueva_arista = u
579         else:
580             #BUSCO PROXIMA ARISTA DE MENOR COSTO QUE TENGA COMO VERTICE ALGUN VERTICE DE LA LISTA FINAL
581             nueva_arista = busco_proxima_arista(inicial,final,arista)
582             if nueva_arista != None:
583                 #LA ARISTA QUE OBTUVE LA ELIMINO DE LA LISTA "ARISTA"
584                 delete(arista,nueva_arista)
585             else:
586                 return AACM
587             break
588         add(AACM,nueva_arista)
589     return AACM
590
591
```

## Ejercicio 15

Implementar la función que responde a la siguiente especificación.

**def KRUSKAL(Grafo):**

**Descripción:** Implementa el algoritmo de KRUSKAL

**Entrada:** Grafo con la representación de Matriz de Adyacencia.

**Salida:** retorna el árbol abarcador de costo mínimo

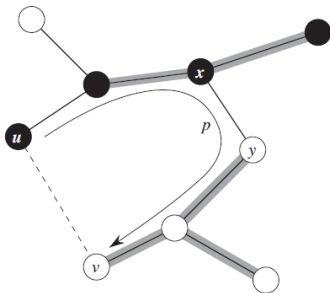
```
658 def KRUSKAL(g):
659     #ordeno aristas por costo (menor a mayor)
660     arista = buscoAristas(g)
661     aacm = LinkedList()
662     long = len(g)
663
664     #PRIMERO: armo los arboles por separado
665     |   #(inicializo vertices para armar bosque)
666     vertices = [None]*long
667     inicializarVertices(vertices,long)
668     bosque(arista,aacm,vertices)
669
670     #en el array "union" voy a ir guardando los vertices que están unidos para evitar formar ciclos
671     union = [None]*long
672
673     current = arista.head
674     #para detener el while: para que sea un arbol aristas = v-1 (v = cant vertices)
675     cant_aristas = 0
676     #SEGUNDO: uno los arboles con las aristas de menor costo
677     while current != None and cant_aristas < long-1:
678         if cant_aristas == 0:
679             #primeros arboles que uno:
680             union[current.value[0]] = current.value[0]
681             union[current.value[1]] = current.value[1]
682             searchPareja(union,aacm,current.value)
683         else:
684             if union[current.value[0]] != None and union[current.value[1]] == None:
685                 add(aacm,current.value)
686                 union[current.value[1]] = current.value[1]
687             elif union[current.value[0]] == None and union[current.value[1]] != None:
688                 add(aacm,current.value)
689                 union[current.value[0]] = current.value[0]
690             current = current.nextNode
691     return aacm
692
693
```

## Ejercicio 16

Demostrar que si la arista  $(u,v)$  de costo mínimo tiene un nodo en  $U$  y otro en  $V - U$ , entonces la arista  $(u,v)$  pertenece a un árbol abarcador de costo mínimo.

Sean:

- $G(V, E)$ : grafo dado.
- $A$ : subconjunto de  $E$  que está incluido en el AACM.
- $U$ : componente conexa de  $G$  en la que ninguna arista de  $A$  la conecta con  $V$ .
- $(u, v)$ : arista que conecta  $U$  con  $V$ .
- $T$  un AACM que incluye a  $A$  y no contiene a la arista  $(u, v)$ , y
- $T'$  un AACM que incluye a  $A$  y sí contiene a la arista  $(u, v)$ .



La arista  $(u, v)$  forma un ciclo con las aristas del camino  $p$ , como se muestra en la imagen. Como  $u$  y  $v$  están en conjuntos distintos ( $U$  y  $V$  respectivamente), al menos una arista de  $T$  se encuentra en el camino  $p$  y además une  $U$  con  $V$ .

Ahora como sabemos que  $(u,v)$  es la arista de costo mínimo que une  $U$  con  $V$ , el peso de  $(u,v)$  es menor que el de  $(x,y)$ . Por lo tanto, para formar el AACM debemos incluir  $(u,v)$ .

## Parte 4

### Ejercicio 17

Sea  $e$  la arista de mayor costo de algún ciclo de  $G(V, A)$ . Demuestre que existe un árbol abarcador de costo mínimo  $AACM(V, A - e)$  que también lo es de  $G$ .

Podemos separar este ciclo del grafo  $G$  en dos componentes conexas, dejando vértices del ciclo en una componente y otros vértices en la otra. Sabemos que  $e$  no va a ser la arista de menor costo que conecte ambas componentes conexas, ya que al ser parte de un ciclo, habrán otras aristas de menor costo que la reemplacen. Por lo tanto,  $e$  no pertenece a ningún árbol abarcador de costo mínimo.

### Ejercicio 18

Demuestre que si unimos dos **AACM** por un arco (arista) de costo mínimo el resultado es un nuevo **AACM**. (Base del funcionamiento del algoritmo de **Kruskal**)

Esto se demuestra por el teorema del ejercicio 16, como la arista  $(u,v)$  de costo mínimo tiene un extremo en un AACM y otro extremo en el otro AACM, entonces pertenece a un AACM nuevo que se forma juntando estos dos.

### Ejercicio 19

Explique qué modificaciones habría que hacer en el algoritmo de Prim sobre el grafo no dirigido y conexo  $G(V, A)$ , o sobre la función de costo  $c(v1, v2) \rightarrow \mathbb{R}$  para lograr:

1. Obtener un árbol de recubrimiento de costo máximo.

En lugar de buscar la arista de menor peso que conecta los vértices visitados con los no visitados en cada iteración, adaptamos con una función que nos devuelve la arista de mayor peso.

## 2. Obtener un árbol de recubrimiento cualquiera.

En lugar de buscar la arista de menor peso que conecta los vértices visitados con los no visitados en cada iteración, utilizo una función que me devuelva la primer arista que conecte ambos conjuntos.

## 3. Dado un conjunto de aristas $E \in A$ , que no forman un ciclo, encontrar el árbol de recubrimiento mínimo $G^c(V, A^c)$ tal que $E \in A^c$ .

Podemos modificar la función de costo del grafo, asignándole costo 0 a todas las aristas de  $E$  y números mayores a 0 para las demás aristas.

## Ejercicio 20

Sea  $G\langle V, A \rangle$  un grafo conexo, no dirigido y ponderado, donde todas las aristas tienen el mismo costo. Suponiendo que  $G$  está implementado usando matriz de adyacencia, haga en pseudocódigo un algoritmo  $O(V^2)$  que devuelva una matriz  $M$  de  $V \times V$  donde:  $M[u, v] = 1$  si  $(u, v) \in A$  y  $(u, v)$  estará obligatoriamente en todo árbol abarcador de costo mínimo de  $G$ , y cero en caso contrario.

## Parte 5

### Ejercicio 21

Implementar el Algoritmo de Dijkstra que responde a la siguiente especificación

**def shortestPath(Grafo, s, v):**

**Descripción:** Implementa el algoritmo de Dijkstra

**Entrada:** Grafo con la representación de Matriz de Adyacencia, vértice de inicio  $s$  y destino  $v$ .

**Salida:** retorna la lista de los vértices que conforman el camino iniciando por  $s$  y terminando en  $v$ . Devolver NONE en caso que no exista camino entre  $s$  y  $v$ .

```
832
833 def shortestPath(grafo, s, v):
834     vertice = initRelax(grafo,s) #distancia
835     verticeP = initRelax2(grafo,s) #padre
836     verticeAux = vertice
837     visitado = [None]*len(grafo)
838     Q = minQueue(vertice)
839
840
841     while length(Q) > 0:
842         u = dequeue(Q)
843         for i in range(0,len(grafo)):
844             if grafo[u][i] != 0:
845                 if visitado[i] == None:
846                     relax(grafo,vertice,u,i,verticeP)
847             visitado[u] = u
848             verticeAux[u] = None
849             Q = minQueue(verticeAux)
850
851     return camino(verticeP,s,v)
852
```

## Ejercicio 22 (Opcional)

Sea  $G = \langle V, A \rangle$  un grafo dirigido y ponderado con la función de costos  $C: A \rightarrow R$  de forma tal que  $C(v, w) > 0$  para todo arco  $\langle v, w \rangle \in A$ . Se define el costo  $C(p)$  de todo camino  $p = \langle v_0, v_1, \dots, v_k \rangle$  como  $C(v_0, v_1) * C(v_1, v_2) * \dots * C(v_{k-1}, v_k)$ .

- Demuestre que si  $p = \langle v_0, v_1, \dots, v_k \rangle$  es el camino de menor costo con respecto a  $C$  en ir de  $v_0$  hacia  $v_k$ , entonces  $\langle v_i, v_{i+1}, \dots, v_j \rangle$  es el camino de menor costo (también con respecto a  $C$ ) en ir de  $v_i$  a  $v_j$  para todo  $0 \leq i < j \leq k$ .
- ¿Bajo qué condición o condiciones se puede afirmar que con respecto a  $C$  existe camino de costo mínimo entre dos vértices  $a, b \in V$ ? Justifique su respuesta.
- Demuestre que, usando la función de costos  $C$  tal y como la dan, no se puede aplicar el algoritmo de Dijkstra para hallar los costos de los caminos de costo mínimo desde un vértice de origen  $s$  hacia el resto.
- Plantee un algoritmo, lo más eficiente en tiempo que usted pueda, que determine los costos de los caminos de costo mínimo desde un vértice de origen  $s$  hacia el resto usando la función de costos  $C$ .
- Suponiendo que  $C(v, w) > 1$  para todo  $\langle v, w \rangle \in A$ , proponga una función de costos  $C': A \rightarrow R$  y además la forma de calcular el costo  $C'(p)$  de todo camino  $p = \langle v_0, v_1, \dots, v_k \rangle$  de forma tal que: aplicando el algoritmo de Dijkstra usando  $C'$ , se puedan obtener los costos (con respecto a la función original  $C$ ) de los caminos de costo mínimo desde un vértice de origen  $s$  hacia el resto. Justifique su respuesta.

A tener en cuenta:

- Usen lápiz y papel primero
- No se puede utilizar otra Biblioteca más allá de `algo1.py` y las bibliotecas desarrolladas durante Algoritmos y Estructuras de Datos I.