



ELISA AEROSPACE
OPTION ISEC

Optimisation non-linéaire, calcul des variations et commande optimale

Auteur

Paul MALISANI

Année 2024 - 2025

Avant-propos

Le contenu de ce cours est largement inspiré par cinq principales sources. Toutefois, il va sans dire que les éventuelles erreurs contenues dans ce polycopié sont le fait de l'auteur seul.

- Le livre de A. Ruszczynski, *Nonlinear Optimization* [1]. Ce livre couvre en profondeur, et avec pédagogie, la théorie de l'optimisation non linéaire pour des problèmes dont les données sont dérivables ou non.
- Le livre de F. Bonnans et A. Shapiro, *Perturbation Analysis of Optimization Problems* [2] notamment pour la partie portant sur la théorie de la dualité Lagrangienne.
- Le livre de F. Clarke, *Functional Analysis, Calculus of Variations and Optimal Control* [3] pour la partie portant sur le calcul des variations.
- Le livre de J. Peypouquet, *Convex Optimization in Normed Spaces : Theory, Methods and Examples*, [4] pour la théorie sur la dualité Lagrangienne et le calcul des variations.
- Le cours de F. Bonnans de l'université Paris-Saclay [5]. Cette référence couvre l'essentiel de la théorie du contrôle optimal d'équations différentielles ordinaires. Ce cours, difficile d'accès, présente la théorie du contrôle optimal par une approche d'analyse fonctionnelle. A ma connaissance, il n'existe pas d'autre monographie présentant une approche analyse fonctionnelle du contrôle optimal sans passer par des outils d'analyse non-lisse. Une lecture approfondie de cette référence est fortement conseillée pour quiconque souhaite approfondir ses connaissances en contrôle optimal.¹

1. Cette lecture nécessite des bases en théorie de l'intégration et de l'analyse fonctionnelle. Pour la théorie de la mesure et de l'intégration, je conseille vivement la lecture de [6, Ch. I, IV, V, VI] qui, malgré les années, reste un modèle de pédagogie. Pour une introduction à l'analyse fonctionnelle, [7] est une référence incontournable.

Table des matières

| | |
|--|-----------|
| Avant-propos | 3 |
| 1 Quelques notions d'analyse convexe | 7 |
| 1.1 Ensembles convexes | 8 |
| 1.2 Fonctions convexes | 10 |
| 1.3 Théorèmes de projection et de séparation | 12 |
| 1.3.1 Théorèmes de projection | 12 |
| 1.3.2 Théorèmes de séparation | 13 |
| 1.4 Cônes | 14 |
| 2 Conditions nécessaires d'optimalité (C.N.O.) | 23 |
| 2.1 Problèmes d'optimisation sans contraintes | 24 |
| 2.2 Méthodes de résolution | 25 |
| 2.2.1 Algorithme du gradient à pas constant | 25 |
| 2.2.2 Algorithme du gradient avec test des deux pentes | 26 |
| 2.2.3 Algorithme de Newton | 29 |
| 2.3 Optimisation sous contraintes | 31 |
| 2.3.1 C.N.O. abstraites d'optimalité | 31 |
| 2.3.2 Qualifications des contraintes | 33 |
| 2.3.3 C.N.O. des problèmes avec contraintes égalités | 34 |
| 2.3.4 C.N.O. des problèmes avec contraintes inégalités | 35 |
| 2.3.5 C.N.O. des problèmes avec contraintes mixtes : conditions de KKT | 38 |
| 3 Introduction à la dualité Lagrangienne | 41 |
| 3.1 Motivations | 42 |
| 3.2 Lagrangien, problème primal, problème dual et point-selle | 43 |
| 3.3 Point-selle et théorème minimax | 45 |
| 4 Méthodes numériques de résolution de problèmes sous contraintes | 49 |
| 4.1 Algorithme de résolution de systèmes d'équations non linéaires | 50 |
| 4.2 Problèmes avec contraintes égalités seules | 50 |
| 4.3 Problèmes avec contraintes mixtes égalités-inégalités | 51 |
| 4.3.1 Algorithme d'Uzawa | 51 |
| 4.3.2 Méthodes de points intérieurs et méthodes primales-duales | 51 |
| 5 Calcul des variations | 57 |
| 5.1 Notations, résultats et définitions préliminaires | 58 |
| 5.2 Exemple introductif | 59 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 5.3 | Présentation du problème | 60 |
| 5.4 | Conditions nécessaires d'extrémalité | 61 |
| 5.5 | Retour au problème de la chaîne pesante | 64 |
| 6 | Commande optimale | 65 |
| 6.1 | Présentation du problème | 66 |
| 6.2 | Approche intuitive du contrôle optimal | 66 |
| 6.3 | Principe du minimum de Pontryagin | 69 |
| 6.3.1 | Enoncé du principe du minimum | 69 |
| 7 | Commande optimale sous contraintes | 71 |
| 7.1 | Présentation du problème | 72 |
| 7.2 | Méthodes de points-intérieurs en contrôle optimal | 73 |
| 8 | Contrôle optimal en pratique | 79 |
| 8.1 | Écriture des Équations Différentielles-Algébriques (DAEs) | 80 |
| 8.2 | Exemple : L'oscillateur de Van der Pol | 81 |
| 8.2.1 | Présentation du problème | 81 |
| 8.2.2 | Ecriture des DAEs | 82 |

Chapitre 1

Quelques notions d'analyse convexe

Contents

| | | |
|------------|---|-----------|
| 1.1 | Ensembles convexes | 8 |
| 1.2 | Fonctions convexes | 10 |
| 1.3 | Théorèmes de projection et de séparation | 12 |
| 1.3.1 | Théorèmes de projection | 12 |
| 1.3.2 | Théorèmes de séparation | 13 |
| 1.4 | Cônes | 14 |

1.1 Ensembles convexes

Définition 1: Ensemble convexe

Un ensemble $E \subseteq \mathbb{R}^n$ est dit *convexe* si $\forall x_1, x_2 \in E$ on a

$$\{\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 : \lambda \in [0, 1]\} \subseteq E \quad (1.1)$$

Lemme 1: Intersection d'ensemble convexe

Soit I un ensemble d'index arbitraire. Si les ensembles $E_i \subseteq \mathbb{R}^n, i \in I$, sont convexes alors l'ensemble $E = \cap_i E_i$ est convexe.

DÉMONSTRATION. Soit $x_1, x_2 \in E$, alors ils appartiennent à chaque ensemble E_i . Comme ces ensembles sont convexes, la droite joignant x_1 et x_2 est incluse dans chacun des ensembles E_i , elle est donc incluse dans E ce qui montre que E est convexe. \square

Définition 2: Opérations algébriques sur les ensembles convexes

De la même façon que les vecteurs de \mathbb{R}^n , les ensembles peuvent être soumis à des opérations algébriques. Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble, et $c \in \mathbb{R}$, on peut multiplier E par c pour obtenir

$$cE := \{cx : x \in E\} \quad (1.2)$$

et faire une addition entre deux ensembles, nommée somme de Minkowski. Soient $E, F \subset \mathbb{R}^n$, la somme $E + F$ est définie comme suit

$$E + F := \{x + y : x \in E, y \in F\} \quad (1.3)$$

Lemme 2: Stabilité des ensembles convexes

Soient $E, F \subset \mathbb{R}^n$ deux ensembles convexes et soient $c, d \in \mathbb{R}$, alors l'ensemble $G := cE + dF$ est convexe

DÉMONSTRATION. Soit $g^1 \in G$, alors $g^1 = cx^1 + dy^1$ avec $x^1 \in E$ et $y^1 \in F$. De même $g^2 \in G$ s'écrit également $g^2 = cx^2 + dy^2$ avec $x^2 \in E$ et $y^2 \in F$. Alors pour tout $\lambda \in [0, 1]$, on a

$$\lambda g^1 + (1 - \lambda)g^2 := c(\lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2) + d(\lambda y^1 + (1 - \lambda)y^2) \in G$$

\square

Définition 3: Combinaison convexe

Un point $y \in \mathbb{R}^n$ est une *combinaison convexe* de points x^1, \dots, x^m s'il existe $\alpha_1 \geq 0, \dots, \alpha_m \geq 0$ tels que

$$y = \sum_{i=1}^m \alpha_i x^i$$

et

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$$

Définition 4: Enveloppe convexe

L'enveloppe convexe d'un ensemble E , notée $\text{conv}(E)$, est l'intersection de tous les ensembles convexes contenant E .

La relation entre l'enveloppe convexe d'un ensemble et l'ensemble des combinaisons convexes est l'objet du résultat suivant

Lemme 3

L'ensemble $\text{conv}(E)$ est l'ensemble de toutes les combinaisons convexes de point de E

DÉMONSTRATION. Tout d'abord, montrons que l'ensemble F des combinaisons convexes d'éléments de E est lui-même convexe. Soient $f^1, f^2 \in F$, on a

$$f^1 = \sum_{i=1}^m \alpha_i x^i \tag{1.4}$$

$$f^2 = \sum_{i=1}^l \beta_i y^i \tag{1.5}$$

avec $x^1, \dots, x^m, y^1, \dots, y^l \in E$ avec $\sum_i \alpha_i = \sum_i \beta_i = 1$. alors, pour tout $\lambda \in (0, 1)$, on a

$$\lambda f^1 + (1 - \lambda) f^2 = \sum_{i=1}^m \lambda \alpha_i x^i + \sum_{i=1}^l (1 - \lambda) \beta_i y^i$$

qui est une combinaison convexe des variables $x^1, \dots, x^m, y^1, \dots, y^l$ ce qui montre que F est convexe. Nous allons désormais démontrer le lemme. Par définition $E \subset F$. Ainsi, F est un ensemble convexe qui contient E ce qui implique $\text{conv}(E) \subset F$. De plus, tout $f \in F$ est une combinaison convexe d'éléments de E , alors f appartient à tous les ensembles convexes contenant E , c'est-à-dire $F \subset \text{conv}(E)$ ce qui conclut la preuve. \square

1.2 Fonctions convexes

Définition 5: Domaine et épigraphe d'une fonction

Soit $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ on définit le domaine de f comme suit

$$\text{dom}(f) := \{x : f(x) < +\infty\} \quad (1.6)$$

et son épigraphe comme suit

$$\text{epi}(f) := \{(x, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : v \geq f(x)\} \quad (1.7)$$

Un exemple d'épigraphe d'une fonction f est illustré sur la Figure 1.1

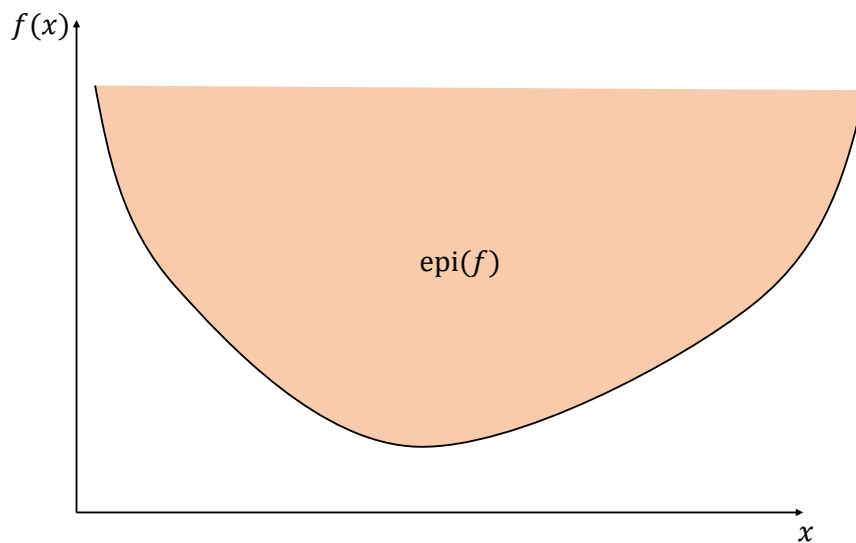


FIGURE 1.1 – Epigraphe d'une fonction f

Définition 6: Fonction convexe

Une fonction f est dite *convexe* si $\text{epi}(f)$ est un ensemble convexe.

Définition 7: Fonction concave

Une fonction f est dite *concave* si $-f$ est convexe.

Lemme 4

Une fonction $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ est convexe si et seulement si pour tout $\lambda \in [0, 1]$, on a

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \quad (1.8)$$

DÉMONSTRATION. Tout d'abord, on définit $y_1 := (x_1, f(x_1)) \in \text{epi}(f)$ et $y_2 := (x_2, f(x_2)) \in \text{epi}(f)$. Supposons que f est convexe, on a alors pour tout $\lambda \in [0, 1]$, $\lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2 \in \text{epi}(f)$.

$\text{epi}(f)$, c'est-à-dire

$$\lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \geq f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \quad (1.9)$$

Maintenant, supposons que f satisfait (1.8), alors pour tout $\lambda \in [0, 1]$, on a

$$\lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2 = (\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2, \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)) \in \text{epi}(f) \quad (1.10)$$

ce qui conclut la preuve. \square

Lemme 5

Si $f_i, i \in I$, est une famille quelconque de fonctions convexes, alors

$$f(x) = \sup_{i \in I} f_i(x) \quad (1.11)$$

est convexe.

DÉMONSTRATION. Pour prouver ce résultat, nous allons tout d'abord montrer que $\text{epi}(f) = \cap_i \text{epi}(f_i)$. Tout d'abord, montrons que $\text{epi}(f) \subseteq \cap_i \text{epi}(f_i)$. Pour tout $i \in I$ et pour tout x , on a, par définition de f , $f(x) \geq f_i(x)$. Par conséquent, pour tout i , pour tout x , on a $(x, f(x)) \in \text{epi}(f_i)$, ce qui implique $\text{epi}(f) \subseteq \cap_i \text{epi}(f_i)$.

Désormais, montrons que $\cap_i \text{epi}(f_i) \subseteq \text{epi}(f)$ par contraposition. Soit $(x, y) \notin \text{epi}(f)$. Alors, $y < f(x) = \sup_i f_i(x)$. Ainsi, il existe i_x tel que $(x, y) \notin \text{epi}(f_{i_x})$. Par conséquent $(x, y) \notin \cap_i \text{epi}(f_i)$, et on a $\cap_i \text{epi}(f_i) \subseteq \text{epi}(f)$. Ainsi, on a $\text{epi}(f) = \cap_i \text{epi}(f_i)$ et le résultat suit en utilisant le lemme 1. \square

Proposition 1: Stricte convexité et unicité des minimiseurs

Soit f une fonction strictement convexe, c'est-à-dire telle que l'inégalité (1.8) est stricte, définie sur un ensemble convexe et bornée inférieurement. Alors, tout minimum local \bar{x} est un minimum global et l'ensemble des minimiseurs est réduit à un unique point.

DÉMONSTRATION. Tout d'abord, montrons que \bar{x} est un minimum global. Soit $y \in \mathbb{R}^n$ et $y_\lambda = \lambda y + (1 - \lambda)\bar{x}$ avec $\lambda \in [0, 1]$. Pour $\lambda > 0$ suffisamment petit, y_λ est dans le voisinage de \bar{x} , minimum local de f . On a alors $f(y_\lambda) \geq f(\bar{x})$. Par convexité, on a

$$f(\bar{x}) \leq f(y_\lambda) \leq \lambda f(y) + (1 - \lambda)f(\bar{x}) \Leftrightarrow f(\bar{x}) \leq f(y)$$

Ce qui montre que \bar{x} est un optimum global. L'unicité de la solution se démontre par l'absurde. Soit $x_1 \neq \bar{x}$ tel que $f(x_1) = f(\bar{x})$. D'après la stricte convexité, on a pour tout $\lambda \in]0, 1[$

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)\bar{x}) < \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(\bar{x}) = f(\bar{x})$$

ce qui est impossible et conclut la preuve. \square

1.3 Théorèmes de projection et de séparation

1.3.1 Théorèmes de projection

Dans la caractérisation des conditions d'optimalité d'un problème d'optimisation, il est souvent nécessaire de pouvoir caractériser le point d'un ensemble convexe E le plus proche d'un autre point n'appartenant pas à cet ensemble. On appelle cette opération la projection sur l'ensemble E .

Définition 8: Projection sur un ensemble fermé

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble fermé, on définit la projection de x sur E , notée Π_E , comme suit

$$\Pi_E(x) := \left\{ y \in E : \|y - x\| = \inf_{v \in E} \|v - x\| \right\} \quad (1.12)$$

L'opérateur de projection sur un ensemble E possède d'intéressantes propriétés dès lors que E est convexe.

Théorème 1: Projection sur des convexes fermés

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble convexe, fermé et non vide. Alors

- i) $\forall x \in \mathbb{R}^n, \exists ! y \in E$ tel que $y = \Pi_E(x)$
- ii) $\forall x \in \mathbb{R}^n$, on a

$$y = \Pi_E(x) \Leftrightarrow \langle v - y, x - y \rangle \leq 0, \quad \forall v \in E \quad (1.13)$$

C'est-à-dire si et seulement si le vecteur $x - y$ forme un angle obtus avec tous les vecteurs $v - y$ où $v \in E$.

DÉMONSTRATION. Tout d'abord, on note

$$g_x(w) := \|x - w\|^2$$

Preuve de i) : Soit $w_0 \in E$. Minimiser g_x sur l'ensemble E est équivalent à minimiser g_x sur le sous-ensemble $A_0 = \{v \in E : \|x - v\| \leq \|x - w_0\|\}$. Cet ensemble A_0 est l'intersection d'un ensemble fermé et d'un ensemble compact, c'est donc un ensemble compact. Alors, le problème de minimisation admet une solution ce qui prouve l'existence de $z := \Pi_E(x)$. Pour prouver l'unicité, il suffit de montrer que la fonction g_x est strictement convexe et utiliser la proposition 1. Pour tout $v \neq w \in E$ pour tout $\lambda \in]0, 1[$, on note

$$\begin{aligned} \Gamma_x(v, w) &:= g_x(\lambda v + (1 - \lambda)w) - \lambda g_x(v) - (1 - \lambda)g_x(w) = \\ &\quad \|x - \lambda v - (1 - \lambda)w\|^2 - \lambda \|x - v\|^2 - (1 - \lambda) \|x - w\|^2 \end{aligned}$$

et on a

$$\begin{aligned}
\Gamma_x(v, w) &= \|\lambda(x - v) + (1 - \lambda)(x - w)\|^2 - \lambda\|x - v\|^2 - (1 - \lambda)\|x - w\|^2 \\
&= \lambda^2\|x - v\|^2 + 2\lambda(1 - \lambda)\langle x - v, x - w \rangle + (1 - \lambda)^2\|x - w\|^2 \\
&\quad - \lambda\|x - v\|^2 - (1 - \lambda)\|x - w\|^2 \\
&= \lambda(1 - \lambda)(-\|x - v\|^2 + 2\langle x - v, x - w \rangle - \|x - w\|^2) \\
&= -\lambda(1 - \lambda)\|v - w\|^2 \\
&< 0
\end{aligned}$$

Ce qui prouve la stricte convexité de g_x , donc l'unicité de $\Pi_E(x)$ et conclut la preuve de i).

Preuve de ii) : Tout d'abord prouvons le sens direct (\Rightarrow) par contraposition. Supposons qu'il existe $v \in E$ tel que $\langle v - y, x - y \rangle = \rho > 0$. On définit $z_\varepsilon := y + \varepsilon(v - y)$ et on a

$$g_x(z_\varepsilon) = g_x(y) + 2\varepsilon\langle y - x, v - y \rangle + \varepsilon^2\|y - v\|^2 = g_x(y) - 2\rho\varepsilon + \varepsilon^2\|v - y\|^2$$

Pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, par convexité on a $z_\varepsilon \in E$ et $g_x(z_\varepsilon) < g_x(y)$ ce qui implique $y \neq \Pi_E(x)$ et prouve l'implication

$$y = \Pi_E(x) \Rightarrow \langle x - y, v - y \rangle \leq 0, \forall v \in E \quad (1.14)$$

Montrons désormais l'implication réciproque et supposons qu'il existe $y \in E$ tel que pour tout $v \in E$ on a $\langle x - y, v - y \rangle \leq 0$. Alors, en particulier on a

$$\langle x - y, \Pi_E(x) - y \rangle \leq 0 \quad (1.15)$$

Par ailleurs, en utilisant (1.14), on a

$$\langle x - \Pi_E(x), v - \Pi_E(x) \rangle \leq 0 \quad \forall v \in E$$

en particulier, comme $y \in E$, on a

$$\langle x - \Pi_E(x), y - \Pi_E(x) \rangle \leq 0 \quad (1.16)$$

En sommant (1.15) et (1.16), on obtient

$$\langle y - \Pi_E(x), y - x + x - \Pi_E(x) \rangle = \langle y - \Pi_E(x), y - \Pi_E(x) \rangle = \|y - \Pi_E(x)\|^2 \leq 0$$

ce qui n'est vrai que si $y = \Pi_E(x)$.

□

1.3.2 Théorèmes de séparation

Comme nous le verrons plus tard, les théorèmes de séparation jouent un rôle fondamental dans l'analyse convexe. Ces théorèmes permettent de donner des conditions suffisantes sur des ensembles convexes pour qu'ils puissent être séparés, c'est-à-dire qu'on peut tracer des droites qui *séparent* les deux ensembles.

Théorème 2: Séparation d'un convexe fermé et d'un point

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un convexe fermé et $x \notin E$. Alors, il existe $y_x \in \mathbb{R}^n$ non nul et $\varepsilon_x > 0$ tels que

$$\langle y_x, v \rangle \leq \langle y_x, x \rangle - \varepsilon_x \quad \forall v \in E$$

DÉMONSTRATION. D'après le théorème de projection 1, on a

$$\langle x - \Pi_E(x), v - \Pi_E(x) \rangle \leq 0, \quad \forall v \in E$$

et donc

$$\begin{aligned} \langle x - \Pi_E(x), v \rangle &\leq \langle x - \Pi_E(x), \Pi_E(x) \rangle \\ &= \langle x - \Pi_E(x), x \rangle + \langle x - \Pi_E(x), \Pi_E(x) - x \rangle \\ &= \langle x - \Pi_E(x), x \rangle - \|x - \Pi_E(x)\|^2 \end{aligned}$$

En notant $y_x := x - \Pi_E(x)$ et $\varepsilon_x = \|x - \Pi_E(x)\|^2$ on obtient

$$\langle y_x, v \rangle \leq \langle y_x, x \rangle - \varepsilon_x, \quad \forall v \in E$$

et la preuve est établie. \square

1.4 Cônes

Parmi les ensembles convexes, les cônes jouent un rôle important dans la théorie de l'optimisation.

Définition 9: Cône

Un ensemble $K \subset \mathbb{R}^n$ est un *cône* si pour tout $x \in K$ et pour tout $\alpha > 0$, on a $\alpha x \in K$. Un *cône convexe* est, comme son nom l'indique, un cône qui est convexe.

Un exemple simple de cône convexe dans \mathbb{R}^n est l'orthant non-négatif

$$\mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0, i = 1, \dots, n\}$$

Lemme 6

Soit K un cône convexe. Si $x^1, \dots, x^m \in K$ et si $\alpha_1, \dots, \alpha_m \geq 0$ alors

$$\alpha_1 x^1 + \dots + \alpha_m x^m \in K$$

DÉMONSTRATION. Par convexité de K

$$y = \frac{\sum_{i=1}^m \alpha_i x^i}{\sum_{i=1}^m \alpha_i} \in K$$

Par ailleurs, comme K est un cône, on peut multiplier y par $\sum_i \alpha_i$ et rester dans K . \square

Désormais, nous allons définir plusieurs types de cônes utiles pour la théorie de l'optimisation

Définition 10: Cône généré par un ensemble convexe

Soit E un ensemble convexe, alors l'ensemble on appelle cône généré par E l'ensemble

$$\text{cone}(E) := \{\alpha x : x \in E, \alpha \geq 0\} \quad (1.17)$$

Un exemple de cône généré par un ensemble E est illustré sur la Figure 1.2.

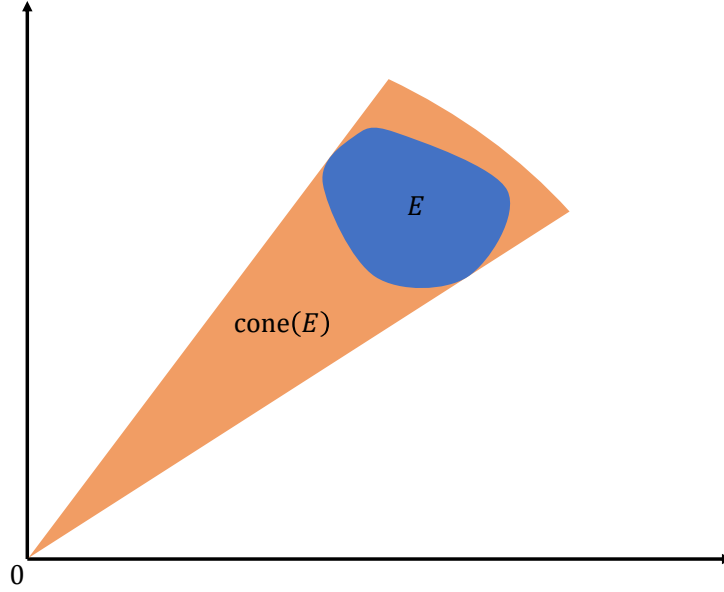


FIGURE 1.2 – Cône généré par un ensemble E , noté $\text{cone}(E)$

Lemme 7

Soit E un ensemble convexe, l'ensemble $\text{cone}(E)$ est un cône convexe

DÉMONSTRATION. Tout d'abord, montrons que l'ensemble $\text{cone}(E)$ est bien un cône. Soit $\beta \geq 0$ et $d \in \text{cone}(E)$, alors $\exists x \in E$ et $\alpha \geq 0$ tel que $d = \alpha x$. On a alors $\beta d = (\beta\alpha)x \in \text{cone}(E)$. Montrons désormais que cet ensemble est convexe. Soit $\lambda \in [0, 1]$ prenons

$$d^1 := \gamma_1 x^1, x^1 \in E \quad (1.18)$$

$$d^2 := \gamma_2 x^2, x^2 \in E \quad (1.19)$$

$$d := \lambda d^1 + (1 - \lambda) d^2 \quad (1.20)$$

Si $\gamma_1 = 0$ ou $\gamma_2 = 0$, alors $d \in \text{cone}(E)$ de façon évidente. Désormais, regardons le cas $\gamma_1 > 0$ et $\gamma_2 > 0$. On a alors

$$d = \lambda \gamma_1 x^1 + (1 - \lambda) \gamma_2 x^2 = (\lambda \gamma_1 + (1 - \lambda) \gamma_2) \frac{\lambda \gamma_1 x^1 + (1 - \lambda) \gamma_2 x^2}{\lambda \gamma_1 + (1 - \lambda) \gamma_2}$$

La fraction dans l'équation ci-dessus est une combinaison convexe d'éléments de E et donc appartient à E et le coefficient qui la multiplie est un nombre positif, ce qui prouve que $d \in \text{cone}(E)$ et conclut la preuve. \square

Définition 11: Cône des directions admissibles

Soit E un ensemble convexe et $x \in E$, on appelle cône des directions admissibles l'ensemble

$$K_E(x) := \text{cone}(E - x) \quad (1.21)$$

Un exemple de cône des directions admissibles est illustré sur la Figure 1.3.

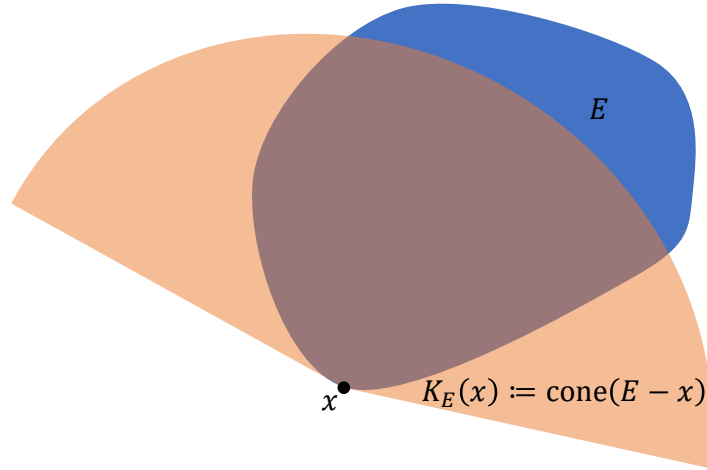


FIGURE 1.3 – Cône des directions admissibles d'un ensemble E au point x .

Définition 12: Cône polaire

Soit K un cône de \mathbb{R}^n , l'ensemble

$$K^\circ := \{y \in \mathbb{R}^n : \langle y, x \rangle \leq 0, \forall x \in K\} \quad (1.22)$$

est appelé le cône polaire de K . Un exemple de cône polaire est illustré sur la Figure 1.4.

Le cône polaire d'un cône K correspond à l'ensemble des directions qui forment un angle *obtus* avec tous les vecteurs de K .

Proposition 2: Propriété des cônes polaires

Pour tout cône convexe $K \subset \mathbb{R}^n$ on a

- i) Le cône polaire K° est convexe et fermé
- ii) $K^\circ = (\overline{K})^\circ$
- iii) Si $y \in \mathbb{R}^n$ est tel que $\langle y, x \rangle \leq M < +\infty$ pour tout $x \in K$, alors $y \in K^\circ$
- iv) Si K est fermé, alors $K^{\circ\circ} = K$
- v) Si $K_1 \in \mathbb{R}^p$ et $K_2 \in \mathbb{R}^q$ sont deux cônes convexes fermés, alors l'ensemble $K := K_1 \times K_2 \in \mathbb{R}^{p+q}$ est un cône convexe fermé et on a $K^\circ = K_1^\circ \times K_2^\circ$

DÉMONSTRATION. **Preuve de i) :** Soit $y^1, y^2 \in K^\circ$ et $\lambda \in [0, 1]$, on définit $y = \lambda y^1 +$

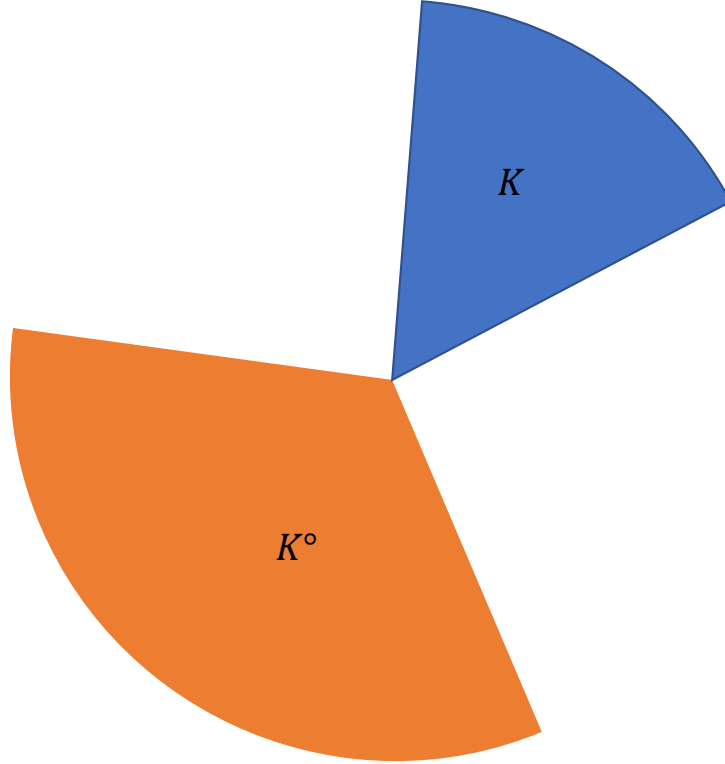


FIGURE 1.4 – Cône polaire K° du cône K .

$(1 - \lambda)y^2$. Pour tout $x \in K$, on a

$$\langle y, x \rangle = \lambda \langle y^1, x \rangle + (1 - \lambda) \langle y^2, x \rangle \leq 0$$

Ce qui prouve la convexité de K° . Soit z un point d'accumulation d'une suite $(y^k)_k$ de points de K° , pour tout $x \in K$, on a

$$\langle z, x \rangle = \lim_{k \rightarrow +\infty} \langle y^k, x \rangle \leq 0$$

Ce qui prouve la fermeture et prouve i).

Preuve de ii) : Tout d'abord, comme $K \subset \overline{K}$, on a $\overline{K}^\circ \subset K^\circ$. Désormais, montrons l'inclusion inverse. Soit x un point d'accumulation d'une suite $(x^k)_k$ de points de K , i.e. $x \in \overline{K}$ et soit $y \in K^\circ$, on a

$$\langle y, x \rangle = \lim_{k \rightarrow +\infty} \langle y, x^k \rangle \leq 0$$

Ainsi $y \in \overline{K}^\circ$, et donc $K^\circ \subset \overline{K}^\circ$. Ceci prouve ii).

Preuve de iii) : Désormais, prouvons iii) par contraposition. Soit $y \notin K^\circ$, alors $\exists x \in K$ tel que $\langle y, x \rangle = \varepsilon > 0$. Alors, comme K est un cône, $\alpha x \in K$, pour tout $\alpha > 0$, on a $\langle y, \alpha x \rangle = \varepsilon \alpha$ qui n'est pas bornée supérieurement quand $\alpha \rightarrow +\infty$. Ce qui conclut la preuve.

Preuve de iv) : Si $x \in K$, alors $\langle x, y \rangle \leq 0$, pour tout $y \in K^\circ$, par définition $x \in K^{\circ\circ}$ et $K \subset K^{\circ\circ}$. Montrons l'inclusion inverse par contradiction. Supposons qu'il existe

$x \in K^{\circ\circ} \setminus K$. Alors d'après le théorème de séparation 2, il existe $y_x \in \mathbb{R}^n$ et $\varepsilon_x > 0$ tels que

$$\langle y_x, z \rangle \leq \langle y_x, x \rangle - \varepsilon_x, \quad \forall z \in K \quad (1.23)$$

Ce qui signifie que $\{\langle y_x, z \rangle : z \in K\}$ est borné supérieurement et d'après la propriété iii), $y_x \in K^\circ$. Par ailleurs, comme $x \in K^{\circ\circ}$, $\langle y_x, x \rangle \leq 0$. En prenant $z = 0$ dans (1.23) on obtient alors

$$0 < \varepsilon_x \leq \langle y_x, x \rangle \leq 0$$

ce qui contredit l'hypothèse de départ et prouve que $K^{\circ\circ} \subset K$ et conclut la preuve.

Preuve de v) : Le fait que K est un cône convexe fermé est une conséquence directe de sa définition.

Maintenant, montrons que $[K_1 \times K_2]^\circ \subset K_1^\circ \times K_2^\circ$ par contraposition. Soit $y = (y_1, y_2) \notin K_1^\circ \times K_2^\circ$. Sans perte de généralité, on suppose $y_1 \notin K_1^\circ$. Ainsi, il existe $x_1 \in K_1$ tel que $\langle y_1, x_1 \rangle > 0$. De plus, comme K_2 est un cône fermé, on a $0 \in K_2$. On obtient alors

$$\langle y, (x_1, 0) \rangle = \langle y_1, x_1 \rangle > 0$$

et donc $y \notin [K_1 \times K_2]^\circ$, par conséquent, $[K_1 \times K_2]^\circ \subset K_1^\circ \times K_2^\circ$.

Montrons l'inclusion inverse par contradiction. Supposons qu'il existe $x \in [K_1 \times K_2]^\circ \setminus K_1^\circ \times K_2^\circ$. Alors, d'après le théorème de séparation, $\exists y_x \in \mathbb{R}^n$ et $\varepsilon_x > 0$ tels que

$$\langle y_x, v \rangle \leq \langle y_x, x \rangle - \varepsilon_x, \quad \forall v \in K_1^\circ \times K_2^\circ \quad (1.24)$$

Alors, $\langle y_x, v \rangle$ est borné supérieurement. D'après iii), on a $y_x \in [K_1^\circ \times K_2^\circ]^\circ$. Or, on a déjà montré que $[K_1 \times K_2]^\circ \subset K_1^\circ \times K_2^\circ$ ce qui implique $[K_1^\circ \times K_2^\circ]^\circ \subset [K_1 \times K_2]^{\circ\circ}$ et donc $y_x \in [K_1 \times K_2]^{\circ\circ}$ et, par conséquent, $\langle y_x, x \rangle \leq 0$. En injectant dans (1.24), on a

$$\langle y_x, v \rangle \leq -\varepsilon_x < 0, \quad \forall v \in K_1^\circ \times K_2^\circ$$

En prenant $v = 0$, on a $0 \leq -\varepsilon_x < 0$, une contradiction qui conclut la preuve. \square

Lemme 8: Lemme de Farkas

Soit $C \in \mathbb{R}^m$ un cône convexe fermé et A une matrice de taille $(m \times n)$. Alors l'ensemble

$$K := \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \in C\} \quad (1.25)$$

est un cône convexe fermé satisfaisant

$$K^\circ := \{A^\top \lambda : \lambda \in C^\circ\} \quad (1.26)$$

DÉMONSTRATION. Par construction K est un cône convexe fermé. Maintenant, montrons que $\{A^\top \lambda : \lambda \in C^\circ\} \subset K^\circ$. Soit $\lambda \in C^\circ$ et $x \in K$, alors $Ax \in C$ et on a

$$\langle x, A^\top \lambda \rangle = \langle Ax, \lambda \rangle \leq 0$$

Par conséquent

$$\{A^\top \lambda : \lambda \in C^\circ\} \subset K^\circ$$

L'inclusion inverse se prouve par contradiction. On suppose qu'il existe $z \in K^\circ \setminus \{A^\top \lambda : \lambda \in C^\circ\}$. Alors, on peut séparer z et l'ensemble en question. Ainsi, il existe $y_z \in \mathbb{R}^n$ et $\varepsilon_z > 0$ tels que

$$\langle y_z, A^\top \lambda \rangle \leq \langle y_z, z \rangle - \varepsilon_z, \quad \forall \lambda \in C^\circ \quad (1.27)$$

Alors $\langle y_z, A^\top \lambda \rangle = \langle Ay_z, \lambda \rangle$ est borné supérieurement pour tout $\lambda \in C^\circ$. En utilisant le point iii) de la proposition 2, on a $Ay_z \in C^{\circ\circ}$. Comme C est un convexe fermé, on a $Ay_z \in C$ et donc, par définition, $y_z \in K$. Alors, comme on a choisit $z \in K^\circ$, on a $\langle y_z, z \rangle \leq 0$. Mais, en prenant $\lambda = 0$ dans (1.27), on obtient $0 < \varepsilon \leq \langle y_z, z \rangle \leq 0$ ce qui contredit l'hypothèse de départ et prouve le résultat. \square

Définition 13: Cône normal

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$, un ensemble convexe fermé, on appelle cône normal de E au point $x \in E$ l'ensemble

$$N_E(x) := [\text{cone}(E - x)]^\circ = [K_E(x)]^\circ \quad (1.28)$$

Un exemple de cône normal est illustré sur la Figure 1.5.

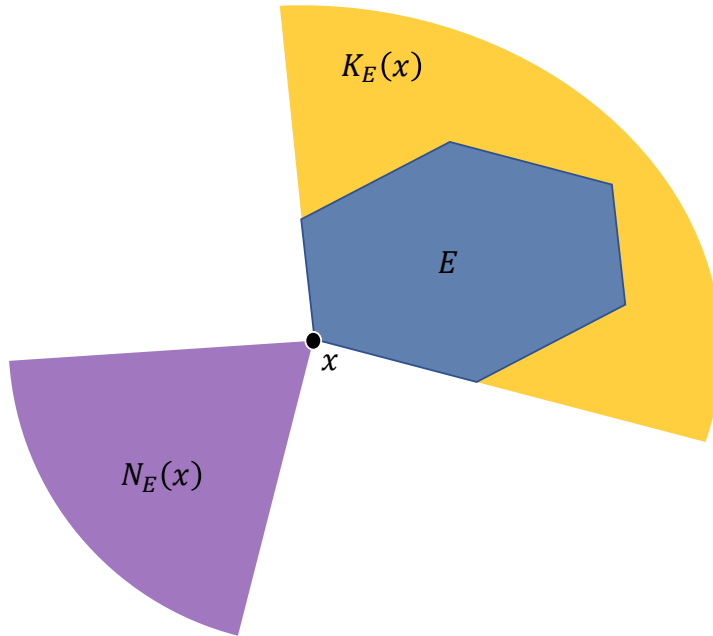


FIGURE 1.5 – Cône normal $N_E(x)$ à l'ensemble E au point x .

Maintenant, pour un point x situé dans un ensemble convexe E , on cherche à savoir dans quelles directions on peut déplacer le point x de façon à rester dans l'ensemble E . Le concept clef de cette analyse est celui de directions tangentes.

Définition 14: Direction tangente et cône tangent

Une direction d est dite *tangente* à l'ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$ au point $x \in E$ si il existe une suite $x^k \in E$ convergeant vers x et une suite de scalaires positifs $\tau_k > 0$ convergeant vers 0 telles que

$$d = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{x^k - x}{\tau_k} \quad (1.29)$$

Par ailleurs, l'ensemble des directions tangentes pour E au point x est l'ensemble

$$T_E(x) := \{d \in \mathbb{R}^n \text{ satisfaisant (1.29)}\} \quad (1.30)$$

Lemme 9

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ et $x \in E$, l'ensemble $T_E(x)$ des directions tangentes de E au point x est un cône fermé.

DÉMONSTRATION. Soit $d \in T_E(x)$, pour tout $\beta > 0$ on a

$$\beta d = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{x^k - x}{\tau_k / \beta}$$

Les suites $(x^k)_k$ et $(\tau_k/\beta)_k$ satisfont les conditions de la définition 14, ainsi $\beta d \in T_E(x)$, ce qui prouve que $T_E(x)$ est un cône. Montrons désormais qu'il est fermé. Soit $(d^j)_j$ une suite de directions tangentes convergeant vers $d \in T_E(x)$. Pour chaque d^j , on note $(x^{j,k})_k$ et $(\tau_{j,k})_k$ les suites satisfaisant les conditions de la définition 14. Alors, pour chaque j , il existe un indice $k(j)$ tel que

$$\begin{aligned} \left\| \frac{x^{j,k(j)} - x}{\tau_{j,k(j)}} - d^j \right\| &\leq \|d^j - d\| \\ \left\| \frac{x^{j,k(j)} - x}{\tau_{j,k(j)}} - d + d - d^j \right\| &\leq \|d^j - d\| \end{aligned}$$

En utilisant le fait que $\|a + b\| \geq \|a\| - \|b\|$, on a

$$\begin{aligned} \left\| \frac{x^{j,k(j)} - x}{\tau_{j,k(j)}} - d \right\| - \|d - d^j\| &\leq \|d^j - d\| \\ \left\| \frac{x^{j,k(j)} - x}{\tau_{j,k(j)}} - d \right\| &\leq 2 \|d^j - d\| \end{aligned}$$

On obtient alors

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \left\| \frac{x^{j,k(j)} - x}{\tau_{j,k(j)}} - d \right\| = 0$$

Ainsi, les suites $(x^{j,k(j)})_j$ et $(\tau_{j,k(j)})_j$ satisfont les conditions de la définition 14, ce qui prouve que $d \in T_E(x)$ et donc que cet ensemble est fermé. \square

En toute généralité, le cône des directions tangentes n'est pas convexe. Or, l'absence de convexité complique l'analyse de conditions d'optimalité de problèmes d'optimisation. Toutefois, il existe d'importants cas dans lesquels ces cônes sont convexes et permettent de déduire des conditions d'optimalité. Le résultat suivant donne un de ces cas

Lemme 10

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble convexe et soit $x \in E$ alors

$$T_E(x) = \overline{K_E(x)} \quad (1.31)$$

où $\overline{K_E(x)}$ est la fermeture du cône des directions admissibles au point x tel que décrit dans la définition 11.

DÉMONSTRATION. Soit $d \in K_E(x)$, alors il existe $v \in E$ et $\alpha \geq 0$ tels que $d := \alpha(v - x)$. Soit $(\tau_k)_k$ une suite de paramètres positifs convergeant vers 0. On a

$$y^k := x + \tau_k d = x + \tau_k \alpha(v - x) = (1 - \alpha\tau_k)x + \tau_k \alpha v$$

Ainsi, il existe K tel que pour tout $k \geq K$, on a $\alpha\tau_k \leq 1$. Ainsi, pour tout $k \geq K$, $y^k \in E$ comme combinaison convexe d'éléments de E . On a alors

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left\| \frac{y^k - x}{\tau_k} \right\| = \left\| \frac{\tau_k d}{\tau_k} \right\| = d$$

Ainsi, les suites $(\tau_k)_k$ et $(y^k)_k$ satisfont les conditions de la définition 14 ce qui prouve que $d \in T_E(x)$. De plus, comme $T_E(x)$ est fermé, on a $\overline{K_E(x)} \subset T_E(x)$.

Désormais, montrons l'inclusion inverse par contradiction. Supposons qu'il existe $d \in T_E(x) \setminus \overline{K_E(x)}$. Un tel point étant une direction tangente, il existe deux suites $(x^k)_k \in E$ et $(\tau^k)_k$ telles que

$$d = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{x^k - x}{\tau_k}$$

Par définition, pour tout k , on a $(x^k - x)/\tau_k \in K_E(x)$. En utilisant le théorème de séparation, il existe $y_d \in \mathbb{R}^n$ et $\varepsilon_d > 0$ satisfaisant

$$\langle y_d, (x^k - x)/\tau_k - d \rangle \leq -\varepsilon_d, \quad \forall k$$

En passant à la limite, on obtient $0 \leq -\varepsilon_d$, une contradiction, Ce qui prouve que $T_E(x) \subseteq \overline{K_E(x)}$ et conclut la preuve. \square

Chapitre 2

Conditions nécessaires d'optimalité (C.N.O.)

Contents

| | | |
|------------|--|-----------|
| 2.1 | Problèmes d'optimisation sans contraintes | 24 |
| 2.2 | Méthodes de résolution | 25 |
| 2.2.1 | Algorithme du gradient à pas constant | 25 |
| 2.2.2 | Algorithme du gradient avec test des deux pentes | 26 |
| 2.2.3 | Algorithme de Newton | 29 |
| 2.3 | Optimisation sous contraintes | 31 |
| 2.3.1 | C.N.O. abstraites d'optimalité | 31 |
| 2.3.2 | Qualifications des contraintes | 33 |
| 2.3.3 | C.N.O. des problèmes avec contraintes égalités | 34 |
| 2.3.4 | C.N.O. des problèmes avec contraintes inégalités | 35 |
| 2.3.5 | C.N.O. des problèmes avec contraintes mixtes : conditions de KKT | 38 |

2.1 Problèmes d'optimisation sans contraintes

Problème 1: Problème d'optimisation sans contraintes

Un problème d'optimisation non linéaire sans contraintes consiste à résoudre le problème suivant

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \quad (2.1)$$

avec $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ une fonction au moins 2 fois différentiable et convexe.

Les conditions d'optimalité d'un tel problème d'optimisation sont généralement connus par les lecteurs et lectrices de ce cours. Il s'agit des points pour lesquels la dérivée de f , notée ∇f s'annule et la dérivée seconde, aussi appelée Hessienne et notée $\nabla^2 f$ est définie non négative. Ce résultat, bien connu, est donné dans la proposition suivante.

Proposition 3: Conditions nécessaires d'optimalité

Soit \bar{x} un minimum local de f , c'est-à-dire tel que :

$$\exists \varepsilon > 0, \text{ tel que } \forall x \text{ tel que } \|x - \bar{x}\| < \varepsilon \text{ on a } f(x) \geq f(\bar{x}) \quad (2.2)$$

Alors, le gradient de f s'annule en \bar{x}

$$\mathbb{R}^n \ni \nabla f(\bar{x}) := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} f(\bar{x}) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} f(\bar{x}) \end{pmatrix} = 0 \quad (2.3)$$

et la Hessienne de f en \bar{x} est définie non négative

$$\nabla^2 f(\bar{x}) := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} f(\bar{x}) & \cdots & \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_n} f(\bar{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_1} f(\bar{x}) & \cdots & \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} f(\bar{x}) \end{pmatrix} \geq 0 \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (2.4)$$

C'est-à-dire telle que les valeurs propres de la matrice $\nabla^2 f(\bar{x})$ sont toutes non négatives, ou de façon équivalente que $y^\top \nabla^2 f(\bar{x}) y \geq 0, \forall y \in \mathbb{R}^n$.

DÉMONSTRATION. La preuve de cette proposition se fait par contraposée. Premier cas, on considère \bar{x} tel que $\nabla f(\bar{x}) \neq 0$. Dans ce cas, par continuité de f

$$\exists \delta > 0 \text{ t.q. } f(\bar{x} - \delta \nabla f(\bar{x})) = f(\bar{x}) - \delta \|\nabla f(\bar{x})\|^2 + o(\delta \|\nabla f(\bar{x})\|) < f(\bar{x})$$

Alors, \bar{x} n'est pas un minimum local de f . Deuxième cas, on considère $\nabla f(\bar{x}) = 0$ et que $\nabla^2 f(\bar{x})$ a au moins une valeur propre négative, notée $\lambda_1 < 0$ et un vecteur propre associé $v_1 \in \mathbb{R}^n$. On a alors

$$f(\bar{x} + \delta v_1) = f(\bar{x}) + \delta^2 v_1^\top \nabla^2 f(\bar{x}) v_1 + o(\delta^2 \|v_1\|^2) = f(\bar{x}) + \delta^2 \lambda_1 \|v_1\|^2 + o(\delta^2 \|v_1\|^2) < f(\bar{x})$$

ce qui conclut la preuve. \square

2.2 Méthodes de résolution

2.2.1 Algorithme du gradient à pas constant

On suppose que l'on peut calculer la valeur de la fonction $f(x)$ mais aussi de sa dérivée $\nabla f(x)$. Partant d'une valeur initiale x^0 , on va mettre à jour une estimation x^k de l'optimum suivant la formule

$$x^{k+1} = x^k - \rho \nabla f(x^k) \quad (2.5)$$

où on appelle $\rho \in \mathbb{R}$ le *pas* de la méthode du gradient. Cette méthode est une méthode de descente, car chaque itération se fait dans le sens opposé au gradient, c'est-à-dire, dans une direction qui devrait faire décroître le coût. On constate qu'une règle simple de pas constant produit souvent une bonne décroissance au début des itérations suivi d'une relative stagnation des valeurs de la fonction coût. L'algorithme correspondant est alors :

Algorithm 1 Algorithme du gradient à pas constant

```

1: A partir de  $x^0 \in \mathbb{R}^n$ , de  $\rho > 0$  et de  $\text{tol} > 0$  on itère
2: Reussite  $\leftarrow \perp$ 
3: while  $\neg \text{Reussite}$  do
4:    $x^{k+1} \leftarrow x^k - \rho \nabla f(x^k)$ 
5:   Reussite  $\leftarrow \|\nabla f(x^{k+1})\| < \text{tol}$ 
6:    $k \leftarrow k + 1$ 
7: end while
8: return  $x^k$ 

```

Avant de nous intéresser à la convergence d'un tel algorithme, nous allons d'abord énoncer un résultat technique très utile dans la suite.

Lemme 11

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable, dont le gradient est Lipshitz de constante M , c'est-à-dire satisfaisant

$$\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\| \leq M \|x - y\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n \quad (2.6)$$

et soit d^k une direction de descente, par exemple $d^k := -\nabla f(x^k)$, alors chaque itération de l'algorithme 1 satisfait

$$f(x^{k+1}) = f(x^k + \rho d^k) \leq f(x^k) + \rho \nabla f(x^k)^\top d^k + \rho^2 M \|d^k\|^2 \quad (2.7)$$

DÉMONSTRATION. Tout d'abord, on a

$$f(x^{k+1}) - f(x^k) = f(x^k + \rho d^k) - f(x^k) = \int_0^1 \nabla f(x^k + s \rho d^k)^\top \rho d^k ds \quad (2.8)$$

D'après le théorème de la moyenne, $\exists \theta \in [0, 1]$ tel que

$$f(x^{k+1}) = f(x^k) + \rho \nabla f(x^k + \theta \rho d^k)^\top d^k \quad (2.9)$$

$$= f(x^k) + \rho \nabla f(x^k)^\top d^k + \rho (\nabla f(x^k + \theta \rho d^k) - \nabla f(x^k))^\top d^k \quad (2.10)$$

$$\leq f(x^k) + \rho \nabla f(x^k)^\top d^k + \rho \|\nabla f(x^k + \theta \rho d^k) - \nabla f(x^k)\| \cdot \|d^k\| \quad (2.11)$$

En utilisant l'hypothèse de Lipschitz continuité du gradient, on a

$$f(x^{k+1}) \leq f(x^k) + \rho \nabla f(x^k)^\top d^k + \theta \rho^2 M \|d^k\|^2 \quad (2.12)$$

$$\leq f(x^k) + \rho \nabla f(x^k)^\top d^k + \rho^2 M \|d^k\|^2 \quad (2.13)$$

ce qui conclut la preuve. \square

Théorème 3

Soit $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ une fonction différentiable, bornée inférieurement, i.e. $\inf f > -\infty$ et dont le gradient est uniformément Lipschitz de constante M . Si le pas de gradient ρ dans l'algorithme 1 satisfait

$$0 < \rho < \frac{1}{M} \quad (2.14)$$

alors quelque soit x^0 la suite $(x^k)_k$ générée par l'algorithme 1 satisfait la condition

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \nabla f(x^k) = 0 \quad (2.15)$$

et tout point d'accumulation \bar{x} de la suite $(x^k)_k$ satisfait

$$\nabla f(\bar{x}) = 0 \quad (2.16)$$

DÉMONSTRATION. Par hypothèse, $\rho(1 - \rho M) > 0$ et donc, d'après le lemme 11, on a $f(x^{k+1}) \leq f(x^k)$ pour tout k . Ainsi, la suite $(f(x^k))_k$ est décroissante et bornée inférieurement, elle converge donc vers un point limite

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} [f(x^k) - f(x^{k+1})] = 0 \quad (2.17)$$

En combinant (2.7) et (2.17) avec $d^k = -\nabla f(x^k)$ on obtient

$$0 = \lim_{k \rightarrow +\infty} [f(x^k) - f(x^{k+1})] \geq \lim_{k \rightarrow +\infty} \rho(1 - \rho M) \|\nabla f(x^k)\|^2 \geq 0 \quad (2.18)$$

ce qui prouve (2.15). Par ailleurs, pour tout point d'accumulation \bar{x} , il existe une sous-suite $(x^{k_n})_n$ convergeant vers \bar{x} et on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\nabla f(x^{k_n}) - \nabla f(\bar{x})\| \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} M \|x^{k_n} - \bar{x}\| = 0 \quad (2.19)$$

\square

2.2.2 Algorithme du gradient avec test des deux pentes

Le principal désavantage de l'algorithme de gradient à pas constant est qu'il nécessite de connaître la constante de Lipschitz du gradient de la fonction à minimiser. Pour surmonter cette difficulté, une méthode simple pour résoudre ce problème est d'utiliser des méthodes de descente avec test des deux pentes. Ces méthodes reposent sur un choix *adaptatif* de la suite de paramètres $(\rho^k)_k$ satisfaisant les règles de Goldstein énoncées ci-après.

Définition 15: Règles de Goldstein

On dit que le pas ρ^k d'un algorithme de descente satisfait les conditions de Goldstein si pour une direction de descente d^k , on a

$$f(x^k) + \alpha_1 \rho^k \nabla f(x^k)^\top d^k \leq f(x^k + \rho^k d^k) \leq f(x^k) + \alpha_2 \rho^k \nabla f(x^k)^\top d^k \quad (2.20)$$

où les paramètres α_1, α_2 satisfont

$$1 > \alpha_1 > \alpha_2 > 0 \quad (2.21)$$

En pratique, un bon choix de ces constantes consiste à prendre $\alpha_1 = 0.9$ et $\alpha_2 = 0.1$.

A chaque itération, l'algorithme du gradient avec test des deux pentes consiste à choisir $d^k := -\nabla f(x^k)$ et à calculer un pas de gradient ρ^k satisfaisant les règles de Goldstein (2.20) par une méthode de recherche linéaire.

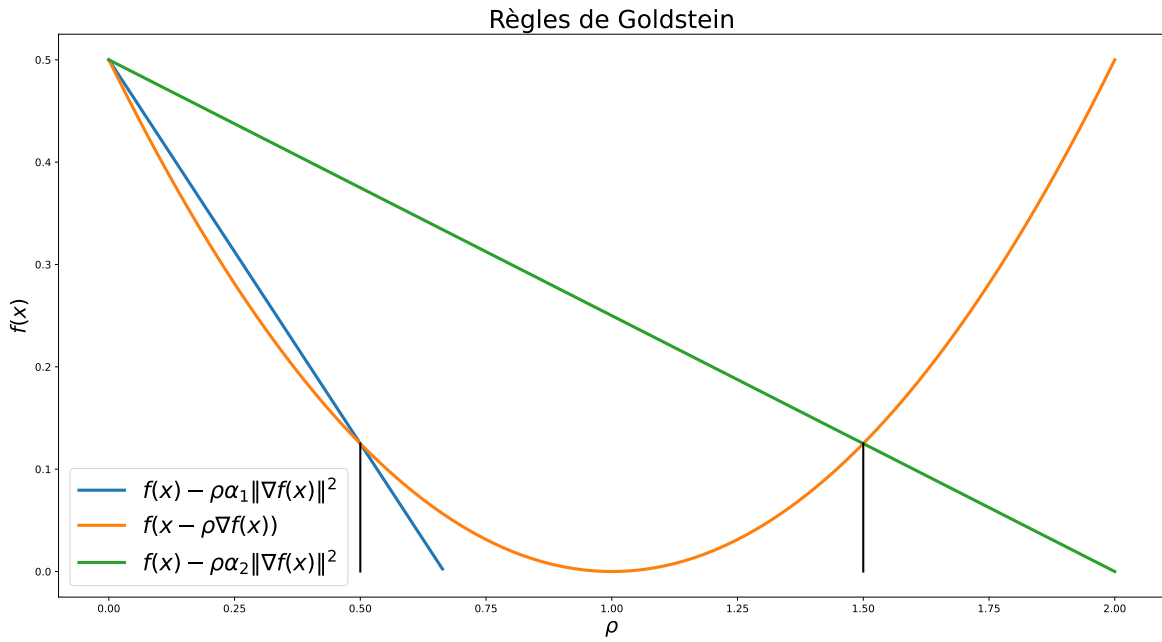


FIGURE 2.1 – Illustration des règles de Goldstein pour $f(x) := \frac{x^2}{2}$ au point $x = 1$ avec $\alpha_1 = 0.75$ et $\alpha_2 = 0.25$.

L'algorithme en pseudo-code est décrit dans les algorithmes 2 et 3.

Désormais, montrons que la méthode des deux pentes converge vers un point stationnaire de f .

Algorithm 2 Algorithme du gradient à test des deux pentes

```
1: A partir de  $x^0 \in \mathbb{R}^n$ , choisir  $\rho^+ > 0$  suffisamment grand et  $\text{tol} > 0$  et avec  $0 < \alpha_2 < \alpha_1 < 1$  on itère
2: Reussite  $\leftarrow \perp$ 
3: while  $\neg \text{Reussite}$  do
4:    $\rho^k \leftarrow \text{goldstein}(f, x^k, -\nabla f(x^k), \alpha_1, \alpha_2, \rho^+, \rho^-)$ 
5:    $x^{k+1} \leftarrow x^k - \rho^k \nabla f(x^k)$ 
6:   Reussite  $\leftarrow \|\nabla f(x^{k+1})\| < \text{tol}$ 
7:    $k \leftarrow k + 1$ 
8: end while
9: return  $x^k$ 
```

Algorithm 3 $\text{goldstein}(f, x^k, d^k, \alpha_1, \alpha_2, \rho^+, \rho^-)$

```
1: Reussite  $\leftarrow \perp$ 
2: while  $\neg \text{Reussite}$  do
3:    $\rho \leftarrow \frac{1}{2}(\rho^+ + \rho^-)$ 
4:    $\text{rhs}_{\text{bool}} \leftarrow f(x^k + \rho d^k) \leq f(x^k) + \alpha_2 \rho \nabla f(x^k)^\top d^k$ 
5:    $\text{lhs}_{\text{bool}} \leftarrow f(x^k) + \alpha_1 \rho \nabla f(x^k)^\top d^k \leq f(x^k + \rho d^k)$ 
6:   if  $\text{rhs}_{\text{bool}} \wedge \text{lhs}_{\text{bool}}$  then
7:     Reussite  $\leftarrow \top$ 
8:   else
9:     if  $\neg \text{rhs}_{\text{bool}}$  then
10:       $\rho^+ \leftarrow \rho$ 
11:     else
12:       $\rho^- \leftarrow \rho$ 
13:     end if
14:   end if
15: end while
16: return  $\rho$ 
```

Théorème 4

Soit $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ une fonction différentiable, bornée inférieurement dont le gradient est Lipschitz de constante M . Si, de plus, l'ensemble X_0 défini comme suit

$$X_0 := \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq f(x^0)\} \quad (2.22)$$

est borné, alors la séquence $(x^k)_k$ générée par l'algorithme 2 est bornée et tout point d'accumulation de cette suite \bar{x} satisfait $\nabla f(\bar{x}) = 0$.

DÉMONSTRATION. Tout d'abord, l'inégalité de droite de (2.20) implique $f(x^{k+1}) \leq f(x^k)$ pour tout k . La fonction f étant bornée inférieurement, la suite $(f(x^k))_k$ converge. De plus, l'inégalité de droite de (2.20) implique

$$\rho^k \|\nabla f(x^k)\|^2 \leq \frac{f(x^k) - f(x^{k+1})}{\alpha_2} \quad (2.23)$$

et donc

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \rho^k \|\nabla f(x^k)\|^2 = 0 \quad (2.24)$$

Maintenant, intéressons nous à l'inégalité de gauche de (2.20). En combinant (2.7) avec $d^k = -\nabla f(x^k)$ et l'inégalité de gauche de (2.20) on obtient

$$f(x^k) - \alpha_1 \rho^k \|\nabla f(x^k)\|^2 \leq f(x^k) - \rho^k (1 - \rho^k M) \|\nabla f(x^k)\|^2 \quad (2.25)$$

$$(\alpha_1 - 1 + \rho^k M) \|\nabla f(x^k)\|^2 \geq 0 \quad (2.26)$$

Cette dernière inégalité est vraie si au moins l'une des deux conditions suivantes sont satisfaites

$$\nabla f(x^k) = 0 \quad (2.27a)$$

$$\rho^k \geq \frac{1 - \alpha_1}{M} > 0 \quad (2.27b)$$

En combinant (2.24) et (2.27) on obtient

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \nabla f(x^k) = 0 \quad (2.28)$$

De plus, pour tout point d'accumulation \bar{x} , il existe une sous-suite $(x^{k_n})_n$ convergeant vers \bar{x} et on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\nabla f(x^{k_n}) - \nabla f(\bar{x})\| \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} M \|x^{k_n} - \bar{x}\| = 0 \quad (2.29)$$

ce qui conclut la preuve. □

2.2.3 Algorithme de Newton

Désormais, on suppose f deux fois différentiable et on suppose que l'on sait calculer $f(x)$, $\nabla f(x)$ et $\nabla^2 f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Pour tout x dans le voisinage de x^k , on peut approximer la fonction f par son développement au second ordre comme suit :

$$f(x) = f(x^k) + \nabla f(x^k)^\top (x - x^k) + \frac{1}{2} (x - x^k)^\top \nabla^2 f(x^k) (x - x^k) + o(\|x - x^k\|^2)$$

Si $\nabla^2 f(x^k) > 0$ alors f est strictement convexe et son minimum est atteint en un point \bar{x} tel que $\nabla f(\bar{x}) = 0$, c'est-à-dire

$$\nabla f(x^k) + \nabla^2 f(x^k)(\bar{x} - x^k) + o(\|\bar{x} - x^k\|^2) = 0$$

Si le développement à l'ordre 2 est exact, on obtient

$$\bar{x} = x^k - [\nabla^2 f(x^k)]^{-1} \nabla f(x^k)$$

L'algorithme de Newton, consiste donc à approximer f à chaque itération par son développement à l'ordre 2 et à utiliser les direction de descente successives $d^k := -[\nabla^2 f(x^k)]^{-1} \nabla f(x^k)$ et à utiliser le test des deux pentes pour assurer la convergence.

Théorème 5

Soit $f \in C^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ dont la Hessienne est définie positive sur l'ensemble $X_0 := \{x : f(x) \leq f(x^0)\}$ supposé borné. Alors l'algorithme 4 génère une suite de points $(x^k)_k$ telle que

$$\limsup_{k \rightarrow +\infty} \frac{\|x^{k+1} - \bar{x}\|}{\|x^k - \bar{x}\|} = 0 \quad (2.30)$$

où \bar{x} est le minimum de f . Si, de plus, la Hessienne est L -Lipschitz sur X_0 , alors pour tout k

$$\|x^{k+1} - \bar{x}\| \leq \frac{L}{2m} \|x^k - \bar{x}\|^2 \quad (2.31)$$

où m est la plus petite valeur propre de la Hessienne sur X_0

DÉMONSTRATION. La preuve de ce résultat peut-être trouvée dans [1, Th. 5.13, pp. 236].
□

Algorithm 4 Algorithme de Newton

```

1: A partir de  $x^0 \in \mathbb{R}^n$ , de  $\alpha_1 > 1/2 > \alpha_2$  et de  $\text{tol} > 0$  on itère
2: Reussite  $\leftarrow \perp$ 
3: while  $\neg \text{Reussite}$  do
4:    $d^k \leftarrow -[\nabla^2 f(x^k)]^{-1} \nabla f(x^k)$ 
5:   if  $\rho^k = 1$  satisfait le test des deux pentes then
6:      $x^{k+1} \leftarrow x^k + d^k$ 
7:   else
8:      $\rho^k \leftarrow \text{goldstein}(f, x^k, d^k, \alpha_1, \alpha_2, \rho^+, \rho^-)$ 
9:      $x^{k+1} \leftarrow x^k + \rho^k d^k$ 
10:  end if
11:  Reussite  $\leftarrow \|\nabla f(x^{k+1})\| < \text{tol}$ 
12:   $k \leftarrow k + 1$ 
13: end while
14: return  $x^k$ 

```

2.3 Optimisation sous contraintes

2.3.1 C.N.O. abstraites d'optimalité

Problème 2: Problème d'optimisation abstrait

Un problème d'optimisation sous-contraintes peut s'écrire de la manière générale suivante

$$\min_{x \in E} f(x) \quad (2.32)$$

avec $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ une fonction différentiable.

Dans ce problème abstrait, nous avons pris soin de ne pas caractériser l'ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$ précisément. En pratique, cet ensemble peut être défini au moyens d'équation, par exemple $E = \{x \in \mathbb{R}^n : c(x) = 0\}$ avec $c : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^p$. Ce cas sera traité en section 2.3.3. Cet ensemble peut également être défini par des inégalités du type $E = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \leq 0\}$ avec $g : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^p$ ou encore par un mélange des deux, $E = \{x \in \mathbb{R}^n : c(x) = 0, g(x) \leq 0\}$. Ce cas sera traité en section 2.3.5.

Cependant, quelque soit l'ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$, il est possible d'écrire des conditions nécessaires d'optimalité. Sans caractérisation précise de l'ensemble E , ces conditions seront formulées de façon abstraites mais correspondent en fait à une intuition géométrique relativement simple

Si un point $\bar{x} \in E$ est un minimum local de f aucun petit déplacement autour de \bar{x} qui reste dans E ne permet de faire diminuer f .

Cette intuition géométrique se traduit mathématiquement sous la forme suivante

Théorème 6: Conditions d'optimalité abstraites

Soit \bar{x} un minimum local du problème 2. On note $T_E(\bar{x})$ le cône tangent à E en \bar{x} (voir définition 14). On a alors

$$-\nabla f(\bar{x}) \in [T_E(\bar{x})]^\circ \quad (2.33)$$

Réciproquement, si la fonction f est convexe, que E est convexe et qu'un point \bar{x} satisfait (2.33), alors \bar{x} est un minimum global du problème 2.

DÉMONSTRATION. Supposons tout d'abord que (2.33) n'est pas vraie. Alors, par définition du cône polaire (voir définition 12), il existe $d \in T_E(\bar{x})$ tel que

$$\langle -\nabla f(\bar{x}), d \rangle > 0 \quad (2.34)$$

Par ailleurs, d étant une direction tangente, il existe deux suites $E \ni x^k \rightarrow \bar{x}$ et $\tau_k \rightarrow 0$ telle que

$$d = \lim_{k \rightarrow +\infty} (x^k - \bar{x})/\tau_k \quad (2.35)$$

Comme f est dérivable on a

$$f(x^k) - f(\bar{x}) = \langle \nabla f(\bar{x}), x^k - \bar{x} \rangle + r(\|x^k - \bar{x}\|)$$

avec $r(\|x^k - \bar{x}\|)/\|x^k - \bar{x}\| \rightarrow 0$. Divisons les deux côtés de l'équation par τ_k

$$\frac{f(x^k) - f(\bar{x})}{\tau_k} = \left\langle \nabla f(\bar{x}), \frac{x^k - \bar{x}}{\tau_k} \right\rangle + \frac{r(\|x^k - \bar{x}\|)}{\tau_k} \quad (2.36)$$

$$= \langle \nabla f(\bar{x}), d \rangle + \left\langle \nabla f(\bar{x}), \frac{x^k - \bar{x}}{\tau_k} - d \right\rangle + \frac{r(\|x^k - \bar{x}\|)}{\tau_k} \quad (2.37)$$

Par ailleurs l'inégalité stricte dans (2.34) entraîne $\|d\| \neq 0$, et on a

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} r(\|x^k - \bar{x}\|)/\tau_k = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{r(\|x^k - \bar{x}\|)}{\|x^k - \bar{x}\|} \frac{\|x^k - \bar{x}\|}{\tau_k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} r(\|x^k - \bar{x}\|) \frac{\|d\|}{\|x^k - \bar{x}\|} = 0$$

Ainsi, en passant à la limite dans (2.37) et en utilisant (2.34) on obtient

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{f(x^k) - f(\bar{x})}{\tau_k} = \langle \nabla f(\bar{x}), d \rangle < 0 \quad (2.38)$$

Par ailleurs, tous les points $x^k \in E$ et \bar{x} est un minimum local. Par définition, il existe $K > 0$ tel que $f(x^k) \geq f(\bar{x})$, pour tout $k > K$. On a alors

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{f(x^k) - f(\bar{x})}{\tau_k} \geq 0$$

ce qui contredit (2.38) et prouve (2.33).

Supposons désormais que f est convexe, que E est convexe et soit $\bar{x} \in E$ tel que (2.33) est satisfaite. Par définition, toute direction de la forme $d := y - \bar{x}$, $y \in E$ satisfait $d \in K_E(\bar{x}) = \text{cone}(E - \bar{x})$. Comme E est convexe et d'après le lemme 10, on a $d \in T_E(\bar{x})$. Alors la condition (2.33) implique

$$\langle \nabla f(\bar{x}), y - \bar{x} \rangle \geq 0, \forall y \in E \quad (2.39)$$

Par convexité de f et pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$, on a

$$\begin{aligned} f(\bar{x} + \varepsilon(y - \bar{x})) &\leq \varepsilon f(y) + (1 - \varepsilon)f(\bar{x}) \\ f(\bar{x} + \varepsilon(y - \bar{x})) - f(\bar{x}) &\leq \varepsilon(f(y) - f(\bar{x})) \\ \frac{f(\bar{x} + \varepsilon(y - \bar{x})) - f(\bar{x})}{\varepsilon} &\leq f(y) - f(\bar{x}) \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x} + \varepsilon(y - \bar{x})) - f(\bar{x})}{\varepsilon} &\leq f(y) - f(\bar{x}) \\ \langle \nabla f(\bar{x}), y - \bar{x} \rangle &\leq f(y) - f(\bar{x}) \end{aligned}$$

En utilisant (2.39), on obtient $f(y) \geq f(\bar{x}) + \langle \nabla f(\bar{x}), y - \bar{x} \rangle \geq f(\bar{x})$ ce qui prouve l'optimalité globale de \bar{x} et conclut la preuve. \square

2.3.2 Qualifications des contraintes

Une fois les conditions d'optimalité abstraites du théorème 6 obtenues, la principale difficulté à lever consiste à décrire au moyen d'équations l'ensemble $[T_E(\bar{x})]^\circ$. Une telle description de cet ensemble n'est pas toujours possible et dépend fortement des données du problème considéré. Dans ce cours, nous allons nous intéresser à une représentation de l'ensemble E au travers d'un ensemble d'équations et d'inéquations, c'est-à-dire

$$E := \{x \in \mathbb{R}^n : c(x) = 0, g(x) \leq 0\} \quad (2.40)$$

avec $c : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^p$ et $g : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^q$. Cet ensemble de contraintes peut être exprimé de façon compacte sous la forme

$$E := \{x \in \mathbb{R}^n : h(x) \in F\} \quad (2.41)$$

avec $h : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^{p+q}$ tel que

$$h_i(x) := \begin{cases} c_i(x) & i = 1, \dots, p \\ g_{i-p}(x) & i = p+1, \dots, p+q \end{cases} \quad (2.42)$$

et F est un ensemble convexe fermé défini par

$$F := \{0\}^p \times \mathbb{R}_-^q \quad (2.43)$$

Définition 16: Qualification des contraintes au sens de Mangasarian-Fromovitz

On dit que les contraintes c, g de l'équation (2.40) sont qualifiées au sens de Mangasarian-Fromovitz en $x^0 \in E$ s'il existe un point $x_{\text{MF}} \in \mathbb{R}^n$ satisfaisant

$$\langle \nabla c_i(x^0), x_{\text{MF}} - x^0 \rangle = 0, \quad i = 1, \dots, p \quad (2.44)$$

$$\langle \nabla g_i(x^0), x_{\text{MF}} - x^0 \rangle < 0, \quad i \in I(x^0) := \{i = p+1, \dots, p+q : g_i(x^0) = 0\} \quad (2.45)$$

et si les gradients $\nabla c_i(x^0)$, $i = 1, \dots, p$ sont linéairement indépendants.

L'intérêt du concept de qualification des contraintes est qu'il permet de caractériser le cône des directions tangentes $T_E(\cdot)$ en fonction des contraintes h_i , $i = 1, \dots, p+q$ définies en (2.42).

Théorème 7

Si les contraintes définies en (2.42)-(2.43) sont qualifiées au sens de Mangasarian-Fromovitz (voir définition 16) alors

$$T_E(x^0) = \left\{ d \in \mathbb{R}^n : \frac{\partial h}{\partial x}(x^0)d \in T_F(h(x^0)) \right\} \quad (2.46)$$

DÉMONSTRATION. La preuve de ce théorème dépasse le cadre de ce cours et nécessite de passer par des notions avancées de régularité de métrique. Toutefois, les lecteurs et lectrices intéressé-e-s peuvent se référer à [1, Lemme 3.16, pp.105]. \square

Le théorème 7 permet de représenter $T_E(x^0)$ via une condition d'appartenance d'un vecteur au cône tangent d'un ensemble convexe. Or, d'après le lemme 10 ce cône est égal au cône des directions admissibles $\overline{K}_F(x^0) := \overline{\text{cone}(F - x^0)}$ qui est bien plus facile à caractériser.

2.3.3 C.N.O. des problèmes avec contraintes égalités

Dans un premier, temps, nous allons nous intéresser à un problème d'optimisation avec contraintes égalités.

Problème 3: Problème avec contraintes égalités

On cherche à résoudre le problème suivant

$$\min_{x \in E} f(x) \quad (2.47)$$

où $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ une fonction différentiable et convexe et où l'ensemble E est décrit comme suit

$$E := \{x \in \mathbb{R}^n : c(x) = 0\} \quad (2.48)$$

où $c : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^p$.

Dans le théorème 6, nous avons montré que tout minimum local $\bar{x} \in E$ de f satisfait

$$-\nabla f(\bar{x}) \in [T_E(\bar{x})]^\circ \quad (2.49)$$

Désormais, nous allons voir comment calculer une solution de ce problème d'optimisation quand l'ensemble E est celui défini dans le problème 3. Tout d'abord, et pour pouvoir plus facilement caractériser $T_E(\bar{x})$, nous allons faire l'hypothèse suivante

Hypothèse 1: Qualification des contraintes

Les contraintes $c : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^p$ du problème 3 satisfont les conditions de qualification de Mangasarian-Fromovitz (voir définition 16) pour tout point \bar{x} satisfaisant (2.49).

Grâce à cette hypothèse, nous pouvons désormais donner les conditions d'optimalité du problème 3

Théorème 8: Conditions d'optimalité avec contraintes égalité

Soit \bar{x} un minimum local de f sous la contrainte $c(x) = 0$ satisfaisant l'hypothèse 1. Alors, il existe $\bar{\mu} \in \mathbb{R}^p$ tel que

$$\nabla f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^p \bar{\mu}_i \nabla c_i(\bar{x}) = 0 \quad (2.50)$$

$$c(\bar{x}) = 0 \quad (2.51)$$

DÉMONSTRATION. La preuve de ce résultat est en 2 étapes.

1. La première étape consiste à utiliser les conditions de qualifications de Mangasarian-Fromovitz pour caractériser explicitement l'ensemble $T_E(\bar{x})$.

2. La deuxième étape consiste à calculer $[T_E(\bar{x})]^\circ$ le cône polaire de $T_E(\bar{x})$.

Étape 1 : Calcul de $T_E(\bar{x})$ En utilisant l'hypothèse de qualification des contraintes et le théorème 7, on a

$$T_E(\bar{x}) = \left\{ d \in \mathbb{R}^n : \frac{\partial c}{\partial x}(\bar{x})d \in T_{\{0\}}(c(\bar{x})) \right\} \quad (2.52)$$

Par ailleurs, l'ensemble $\{0\}$ étant trivialement convexe, on peut utiliser le lemme 10 et on a

$$T_{\{0\}}(c(\bar{x})) = \overline{K_{\{0\}}(c(\bar{x}))} = \overline{\{\alpha(d - c(\bar{x})) : \alpha \geq 0, d \in \{0\}\}} = \{0\} \quad (2.53)$$

En rassemblant (2.52) et (2.53) on a alors

$$T_E(\bar{x}) = \left\{ d \in \mathbb{R}^n : \frac{\partial c}{\partial x}(\bar{x})d \in \{0\} \right\} \quad (2.54)$$

Étape 2 : Calcul de $[T_E(\bar{x})]^\circ$ Désormais, il nous faut calculer le cône polaire de $T_E(\bar{x})$, c'est-à-dire le cône polaire d'un ensemble de points dont l'image par une application linéaire (ici $\frac{\partial c}{\partial x}(\bar{x})$) est dans un cône convexe fermé (ici $\{0\}$). Or, nous avons montré dans le lemme de Farkas 8, qu'on peut facilement exprimer ce cône polaire en fonction du cône polaire de l'ensemble image de l'application linéaire et on a

$$[T_E(\bar{x})]^\circ = \left\{ \left[\frac{\partial c}{\partial x}(\bar{x}) \right]^\top \mu : \mu \in \{0\}^\circ \right\} = \left\{ \left[\frac{\partial c}{\partial x}(\bar{x}) \right]^\top \mu : \mu \in \mathbb{R}^p \right\} \quad (2.55)$$

Ainsi, il existe $\bar{\mu} \in \mathbb{R}^p$ tel que

$$\nabla f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^p \bar{\mu}_i \nabla c_i(\bar{x}) = 0 \quad (2.56)$$

et comme $c(\bar{x}) = 0$ on a bien démontré le résultat attendu. □

Remarque 1: Condition géométrique d'optimalité

Dans la preuve du théorème 8, nous avons en fait montré que tout \bar{x} minimum local de f sous les contraintes $c(\bar{x}) = 0$ est tel que les variations admissibles au point \bar{x} sont les directions $d \in \text{Ker} \left(\frac{\partial c}{\partial x}(\bar{x}) \right)$ et que la variation au premier ordre du coût dans chacune de ces directions est positive, i.e.

$$f(\bar{x} + \varepsilon d) = f(\bar{x}) + \varepsilon \langle \nabla f(\bar{x}), d \rangle + o(\varepsilon \|d\|) \geq f(\bar{x}), \quad \forall d \in \text{Ker} \left(\frac{\partial c}{\partial x}(\bar{x}) \right)$$

avec $c(\bar{x} + \varepsilon d) = c(\bar{x}) + \varepsilon \frac{\partial c}{\partial x}(\bar{x})d = 0$.

2.3.4 C.N.O. des problèmes avec contraintes inégalités

2.3.4.1 Caractérisation des minima locaux

Désormais, nous allons nous intéresser à un problème d'optimisation avec contraintes inégalités.

Problème 4: Problème avec contraintes inégalités

On cherche à résoudre le problème suivant

$$\min_{x \in E} f(x) \quad (2.57)$$

où $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ une fonction différentiable et convexe et où l'ensemble E est décrit comme suit

$$E := \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \leq 0\} \quad (2.58)$$

où $g : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^p$.

Dans le théorème 6, nous avons montré que tout minimum local $\bar{x} \in E$ de f satisfait

$$-\nabla f(\bar{x}) \in [T_E(\bar{x})]^\circ \quad (2.59)$$

Désormais, nous allons voir comment calculer une solution de ce problème d'optimisation quand l'ensemble E est celui défini dans le problème 4. Tout d'abord, et pour pouvoir plus facilement caractériser $T_E(\bar{x})$, nous allons faire l'hypothèse suivante

Hypothèse 2: Qualification des contraintes

Les contraintes $g : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^p$ du problème 4 satisfont les conditions de qualification de Mangasarian-Fromovitz (voir définition 16) pour tout point \bar{x} satisfaisant (2.59).

Grâce à cette hypothèse, nous pouvons désormais donner les conditions d'optimalité du problème 4

Théorème 9: Conditions d'optimalité avec contraintes inégalités

Soit \bar{x} un minimum local de f sous la contrainte $g(x) \leq 0$ satisfaisant l'hypothèse 2. Alors, Il existe $\bar{\lambda} \in (\mathbb{R}_+)^p$ tel que

$$\nabla f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^p \bar{\lambda}_i \nabla g_i(\bar{x}) = 0 \in \mathbb{R}^n \quad (2.60a)$$

$$\bar{\lambda}_i g_i(\bar{x}) = 0, \quad i = 1, \dots, p \quad (2.60b)$$

DÉMONSTRATION. Tout d'abord, on note $F := (\mathbb{R}_-)^p$, ainsi la contrainte $g(x) \leq 0$ peut se reformuler

$$g(x) \in F$$

Etape 1 : Calcul de $T_E(\bar{x})$ L'hypothèse de qualification des contraintes (voir définition 16) et le théorème 7, permettent de décrire l'ensemble des directions tangentes $T_E(\bar{x})$ comme suit

$$T_E(\bar{x}) = \left\{ d \in \mathbb{R}^n : \frac{\partial g}{\partial x}(\bar{x})d \in T_F(g(\bar{x})) \right\}$$

L'ensemble F est un ensemble convexe, en utilisant le lemme 10, on obtient

$$T_F(g(\bar{x})) = \overline{K_F(g(\bar{x}))} = \overline{\{\alpha(d - g(\bar{x})) : \alpha \geq 0, d \in F\}} \quad (2.61)$$

Tout d'abord, notons $I_0(\bar{x})$ l'ensemble des contraintes actives défini comme suit

$$I_0(\bar{x}) := \{i \in 1, \dots, p : g_i(\bar{x}) = 0\} \quad (2.62)$$

Sans perte de généralité, on pose $I_0(\bar{x}) := \{1, \dots, p_0\}$ Soit $i \in I_0(\bar{x})$, on a

$$\{\alpha(d_i - g_i(\bar{x})) : d_i \leq 0 ; \alpha \geq 0\} = \mathbb{R}_- \quad (2.63)$$

En revanche, si $i \notin I_0(\bar{x})$, c'est-à-dire s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $g_i(\bar{x}) = -\varepsilon$ on a

$$\begin{cases} \{\alpha(d_i - g_i(\bar{x})) : \alpha \geq 0 ; d_i \leq -\varepsilon\} = \mathbb{R}_- \\ \{\alpha(d_i - g_i(\bar{x})) : \alpha \geq 0 ; d_i \in]-\varepsilon, 0]\} = \mathbb{R}_+ \end{cases} \quad (2.64)$$

Soit

$$\{\alpha(d_i - g_i(\bar{x})) : \alpha \geq 0 ; d_i \leq 0\} = \mathbb{R} ; \forall i \notin I_0(\bar{x}) \quad (2.65)$$

On a alors

$$T_F(g(\bar{x})) = (\mathbb{R}_-)^{p_0} \times \mathbb{R}^{p-p_0} \quad (2.66)$$

Ce qui permet de caractériser $T_E(\bar{x})$ comme suit

$$T_E(\bar{x}) := \left\{ d \in \mathbb{R}^n : \frac{\partial g}{\partial x}(\bar{x})d \in (\mathbb{R}_-)^{p_0} \times \mathbb{R}^{p-p_0} \right\} \quad (2.67)$$

Finalement, cette égalité semble assez naturelle puisqu'elle assure que les directions de déplacement autorisées sont les déplacements tels que $g_i(\bar{x} + \varepsilon d) \leq 0$ si $g_i(\bar{x}) = 0$ et si $g_i(\bar{x}) < 0$, alors $g_i(\bar{x} + \varepsilon d)$ peut varier dans n'importe quel sens.

Etape 2 : Calcul de $[T_E(\bar{x})]^\circ$: Désormais, il nous faut calculer le cône polaire de $T_E(\bar{x})$, c'est-à-dire le cône polaire d'un ensemble de point dont l'image par une application linéaire (ici $\frac{\partial g}{\partial x}(\bar{x})$) est dans un cône convexe fermé (ici $(\mathbb{R}_-)^{p_0} \times \mathbb{R}^{p-p_0}$). Or, en utilisant le lemme de Farkas 8, on peut facilement exprimer ce cône polaire en fonction du cône polaire de l'ensemble image de l'application linéaire et on a

$$[T_E(\bar{x})]^\circ = \left\{ \left[\frac{\partial g}{\partial x}(\bar{x}) \right]^\top \lambda : \lambda \in [(\mathbb{R}_-)^{p_0} \times \mathbb{R}^{p-p_0}]^\circ \right\} \quad (2.68)$$

Etape 3 : Finalement il suffit désormais de calculer $[(\mathbb{R}_-)^{p_0} \times \mathbb{R}^{p-p_0}]^\circ$. Tout d'abord, un calcul direct donne

$$[(\mathbb{R}_-)^{p_0}]^\circ = (\mathbb{R}_+)^{p_0} \quad (2.69)$$

$$[\mathbb{R}^{p-p_0}]^\circ = \{0\}^{p-p_0} \quad (2.70)$$

Alors, en utilisant le point v) de la proposition 2 on obtient

$$[(\mathbb{R}_-)^{p_0} \times \mathbb{R}^{p-p_0}]^\circ = (\mathbb{R}_+)^{p_0} \times \{0\}^{p-p_0}$$

Par conséquent, il existe $\bar{\lambda} \in (\mathbb{R}_+)^p$ tel que

$$\nabla f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^p \bar{\lambda} \nabla g_i(\bar{x}) = 0 \quad (2.71)$$

$$\bar{\lambda} g_i(\bar{x}) = 0, \quad i = 1, \dots, p \quad (2.72)$$

ce qu'il fallait démontrer.

□

Remarque 2: Conditions géométriques d'optimalité

Dans la preuve du théorème 9, nous avons en fait montré que tout \bar{x} minimum local de f sous les contraintes $g(\bar{x}) \leq 0$ on a

$$-\nabla f(\bar{x}) \in \text{cone}(\{\nabla g_i(\bar{x}) : i \in I_0(\bar{x})\})$$

où $I_0(\bar{x})$ est l'ensemble des contraintes actives défini dans l'équation (2.62). C'est-à-dire que toute direction de descente forme un angle obtus avec les directions qui permettent de rester dans l'ensemble admissible. Ainsi, il n'existe aucune direction qui permet de faire diminuer le coût tout en restant dans les contraintes.

2.3.5 C.N.O. des problèmes avec contraintes mixtes : conditions de KKT

Désormais, nous allons nous intéresser à un problème d'optimisation mélangeant contraintes égalités et inégalités, c'est ce que l'on appelle un problème à contraintes mixtes.

Problème 5: Problème d'optimisation avec contraintes mixtes

$$\min_{x \in E} f(x) \quad (2.73)$$

où $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ une fonction différentiable et convexe et où l'ensemble E est décrit comme suit

$$E := \{x \in \mathbb{R}^n : c(x) = 0, \quad g(x) \leq 0\} \quad (2.74)$$

où $c : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^p$ et $g : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^q$

Désormais, nous allons rassembler les résultats obtenus pour les problèmes avec contraintes égalités et ceux avec contraintes inégalités dans un seul résultat commun

Théorème 10: Conditions d'optimalité de Karush-Kuhn-Tucker

Soit \bar{x} un minimum local du problème 5 satisfaisant l'hypothèse 2. Alors, Il existe $\bar{\mu} \in \mathbb{R}^p$ $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}_+^q$ tels que

$$\nabla f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^p \bar{\mu}_i \nabla c_i(\bar{x}) + \sum_{i=1}^q \bar{\lambda}_i \nabla g_i(\bar{x}) = 0 \in \mathbb{R}^n \quad (2.75a)$$

$$c(\bar{x}) = 0 \in \mathbb{R}^p \quad (2.75b)$$

$$\bar{\lambda}_i g_i(\bar{x}) = 0, \quad i = 1, \dots, q \quad (2.75c)$$

DÉMONSTRATION. Les étapes intermédiaires de calcul de cette preuve ne sont pas détaillées car elles reprennent entièrement et sans modification les preuves des théorèmes 8 et 9. Dans la suite, on note $h(x) := (c(x), g(x)) \in \mathbb{R}^{p+q}$ et on note $F := \{0\}^p \times \mathbb{R}_-^q$. Ainsi, on obtient

$$E := \{x \in \mathbb{R}^n : h(x) \in F\}$$

Comme F est un cône convexe fermé, d'après l'hypothèse de qualification des contraintes

(voir définition 16) et le théorème 7, on a

$$T_E(\bar{x}) := \left\{ d \in \mathbb{R}^n : \frac{\partial h}{\partial x}(\bar{x})d \in T_F(\bar{x}) \right\}$$

Comme F est un convexe fermé, en utilisant le lemme 10, on a

$$T_F(\bar{x}) = K_F(\bar{x}) = 0^p \times \mathbb{R}_-^{q_0} \times \mathbb{R}^{q-q_0}$$

où q_0 est le nombre de contraintes inégalités actives. En utilisant le point v) de la proposition 2 et le lemme de Farkas 8, on obtient alors

$$[T_E(\bar{x})]^\circ = \left\{ \left[\frac{\partial h}{\partial x}(\bar{x}) \right]^\top \eta : \eta \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}_+^{q_0} \times \{0\}^{q-q_0} \right\}$$

Alors il existe $\bar{\eta} \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}_+^{q_0} \times \{0\}^{q-q_0}$, tel que

$$\nabla f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^p \bar{\eta}_i \nabla c_i(\bar{x}) + \sum_{i=1}^q \bar{\eta}_{p+i} \nabla g_i(\bar{x}) = 0 \in \mathbb{R}^n \quad (2.76)$$

$$c(\bar{x}) = 0 \in \mathbb{R}^p \quad (2.77)$$

$$\bar{\eta}_{p+i} g_i(\bar{x}) = 0, \quad i = 1, \dots, q \quad (2.78)$$

En notant $\bar{\eta} = (\bar{\mu}, \bar{\lambda}) \in \mathbb{R}^p \times (\mathbb{R}_+^{q_0} \times \{0\}^{q-q_0})$, on obtient le résultat voulu. \square

Remarque 3: Résolution d'un problème d'optimisation sous-contraintes

Les méthodes numériques utilisées pour résoudre le problème 5 consistent à trouver $(\bar{x}, \bar{\mu}, \bar{\lambda}) \in \mathbb{R}^{n+p+q}$ solution du système de $n + p + q$ équations non-linéaires (2.75). Résoudre ce problème est numériquement difficile, principalement pour deux raisons

- i) La première raison est que la variable $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}_+^q$. Cette contrainte sur $\bar{\lambda}$ est compliquée à prendre en compte directement.
- ii) La seconde raison est due aux conditions de complémentarité (2.75c). Ces contraintes sont difficiles à résoudre numériquement car elles peuvent conduire à des singularités numériques dans la jacobienne des conditions KKT.

Nous allons voir dans la prochaine partie comment surmonter ce problème.

Chapitre 3

Introduction à la dualité Lagrangienne

Contents

| | | |
|-----|---|----|
| 3.1 | Motivations | 42 |
| 3.2 | Lagrangien, problème primal, problème dual et point-selle . . | 43 |
| 3.3 | Point-selle et théorème minimax | 45 |

3.1 Motivations

Dans cette partie, nous nous intéressons encore à la résolution d'un problème avec contraintes mixtes égalités-inégalités tel que décrit au problème 5. Comme nous l'avons vu en remarque 3, résoudre numériquement les équations des conditions nécessaires d'optimalité d'un problème sous contraintes (2.75) est difficile, notamment à cause des conditions de complémentarité (2.75c). Pour surmonter cette difficulté, une idée pertinente est de considérer la fonction suivante

$$\phi(x) := \sup_{(\mu, \lambda) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}_+^q} \langle \mu, c(x) \rangle + \langle \lambda, g(x) \rangle \quad (3.1)$$

En notant $E = \{x \in \mathbb{R}^n : c(x) = 0, g(x) \leq 0\}$, on observe directement que

$$\phi(x) = \begin{cases} +\infty & \forall x \notin E \\ 0 & \forall x \in E \end{cases} \quad (3.2)$$

Désormais, en notant $P(x) := f(x) + \phi(x)$, on a

$$P(x) = \begin{cases} +\infty & \forall x \notin E \\ f(x) & \forall x \in E \end{cases} \quad (3.3)$$

Ainsi, on voit que minimiser P sans contraintes est équivalent à résoudre le problème qui nous intéresse. En notant $L(x, \mu, \lambda) := f(x) + \langle \mu, c(x) \rangle + \langle \lambda, g(x) \rangle$, on a

$$P(x) = \sup_{(\mu, \lambda) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}_+^q} L(x, \mu, \lambda) \quad (3.4)$$

Résoudre notre problème initial revient donc à résoudre

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \sup_{(\mu, \lambda) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}_+^q} L(x, \mu, \lambda) \quad (3.5)$$

Prenons désormais un exemple et cherchons à résoudre le problème suivant

$$\min_{x \leq 0} \left[f(x) := \frac{1}{2}(x-1)^2 \right] \quad (3.6)$$

Ce problème est donc équivalent à

$$\min_{x \in \mathbb{R}} \sup_{\lambda \in \mathbb{R}_+} \left[L(x, \lambda) := \frac{1}{2}(x-1)^2 + \lambda x \right] \quad (3.7)$$

Ce problème reste difficile à résoudre car la valeur optimale de λ dépend très non-linéairement de celle de x . En revanche, en inversant minimisation et maximisation, les choses semblent différentes. En effet, commencer par minimiser par rapport à x consiste à résoudre un problème d'optimisation sans contraintes, c'est-à-dire à trouver un point \bar{x} tel que $\frac{\partial L}{\partial x}(\bar{x}, \lambda) = 0$. Dans notre exemple le seul minimum est $\bar{x} = 1 - \lambda$. Maintenant, passons à la maximisation de $L(\bar{x}, \lambda)$ par rapport à $\lambda \geq 0$

$$\sup_{\lambda \in \mathbb{R}_+} L(\bar{x}, \lambda) = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}_+} \frac{1}{2}\lambda^2 + \lambda(1 - \lambda) \quad (3.8)$$

$$= \sup_{\lambda \in \mathbb{R}_+} -\frac{\lambda^2}{2} + \lambda \quad (3.9)$$

En notant $\bar{\lambda}$ la solution (3.9) on a $\bar{\lambda} = 1$ et donc $\bar{x} = 1 - \bar{\lambda} = 0$ qui est bien la solution recherchée.

A travers cet exemple, nous avons illustré qu'il est souvent plus simple de résoudre $\sup_{\lambda} \min_x L(x, \lambda)$ que le problème original $\min_x \sup_{\lambda} L(x, \lambda)$. La question qui se pose désormais est de savoir à quelles conditions on a

$$\min_x \sup_{\lambda} L(x, \lambda) = \max_{\lambda} \inf_x L(x, \lambda)$$

et lorsque cette égalité est vraie, est-ce que la solution trouvée est bien celle que l'on cherche. La théorie de la dualité Lagrangienne permet de répondre à cette question.

3.2 Lagrangien, problème primal, problème dual et point-selle

Dans cette partie, on s'intéresse à la résolution du problème suivant

Problème 6: Problème d'optimisation sous contraintes

On cherche à résoudre le problème suivant

$$\min_{x \in E} f(x) \quad (3.10)$$

où $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ une fonction différentiable et où l'ensemble E est décrit comme suit

$$E := \{x \in \mathbb{R}^n : c(x) = 0, g(x) \leq 0\} \quad (3.11)$$

où $c : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^p$ et $g : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^q$ sont elles aussi différentiables.

Définition 17: Lagrangien

On appelle Lagrangien du problème 6, la fonction $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}_+^q \mapsto \mathbb{R}$ définie comme suit

$$L(x, \mu, \lambda) := f(x) + \langle c(x), \mu \rangle + \langle g(x), \lambda \rangle \quad (3.12)$$

A partir de ce Lagrangien on définit les fonctions primale et duale comme suit

Définition 18: Fonction primale et fonction duale

On définit la fonction primale P associée au Lagrangien (3.12) comme suit

$$P(x) := \sup_{(\mu, \lambda) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}_+^q} L(x, \mu, \lambda) \quad (3.13)$$

et la fonction duale D comme suit

$$D(\mu, \lambda) := \inf_{x \in \mathbb{R}^n} L(x, \mu, \lambda) \quad (3.14)$$

Et on peut désormais définir le problème primal et le problème dual comme suit

Définition 19: Problème primal et problème dual

On définit le problème primal associé à la fonction primale P définie en (3.13) comme suit

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} P(x) \quad (\mathcal{P})$$

et le problème dual associé à la fonction duale D définie en (3.14) comme suit

$$\max_{(\mu, \lambda) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}_+^q} D(\mu, \lambda) \quad (\mathcal{D})$$

Par ailleurs, on note

$$\text{val}(\mathcal{P}) := \min_{x \in \mathbb{R}^n} P(x) \quad (3.15)$$

$$\text{val}(\mathcal{D}) := \max_{(\mu, \lambda) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}_+^q} D(\mu, \lambda) \quad (3.16)$$

et on note les ensembles des solutions des problèmes primal et dual comme suit

$$\text{sol}(\mathcal{P}) := \arg \min_{x \in \mathbb{R}^n} P(x) \quad (3.17)$$

$$\text{sol}(\mathcal{D}) := \arg \max_{(\mu, \lambda) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}_+^q} D(\mu, \lambda) \quad (3.18)$$

Dans l'exemple introductif en 3.1, nous avons vu, d'une part, que le problème que l'on cherche à résoudre est le problème primal (\mathcal{P}) mais qu'il est difficile à résoudre et d'autre part que le problème dual (\mathcal{D}) est, lui, plus simple à résoudre en général. Les cas pour lesquels ces deux problèmes sont équivalents, c'est-à-dire quand $\text{val}(\mathcal{P}) = \text{val}(\mathcal{D})$, sont reliés aux notions de saut de dualité et de point-selle détaillées ci-après

Définition 20: Saut de dualité

On appelle *saut de dualité* la quantité

$$\text{val}(\mathcal{P}) - \text{val}(\mathcal{D})$$

quand celle-ci est bien définie, c'est-à-dire quand $\text{val}(\mathcal{P})$ et $\text{val}(\mathcal{D})$ ne valent pas tous les deux soit $+\infty$ soit $-\infty$.

Définition 21: Point-selle

On appelle PS l'ensemble des points-selles du Lagrangien (3.12) l'ensemble suivant

$$\begin{aligned} \text{PS} := \{(\bar{x}, \bar{\mu}, \bar{\lambda}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}_+^q : \\ L(\bar{x}, \mu, \lambda) \leq L(\bar{x}, \bar{\mu}, \bar{\lambda}) \leq L(x, \bar{\mu}, \bar{\lambda}), \\ \forall (x, \mu, \lambda) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}_+^q\} \end{aligned} \quad (3.19)$$

3.3 Point-selle et théorème minimax

Proposition 4: Positivité du saut de dualité

Le saut de dualité (voir définition 20), quand il est défini, est non négatif

$$\text{val}(\mathcal{P}) - \text{val}(\mathcal{D}) \geq 0 \quad (3.20)$$

DÉMONSTRATION. D'après la définition 20, si le saut de dualité est bien défini, on a

- i) Si $\text{val}(\mathcal{P}) = +\infty$ et $\text{val}(\mathcal{D}) < +\infty$. Dans ce cas (3.20) est trivialement satisfaite.
- ii) Si $\text{val}(\mathcal{P}) < +\infty$ et $\text{val}(\mathcal{D}) = -\infty$. Là encore (3.20) est trivialement satisfaite.

Il reste alors à étudier le cas où $\text{val}(\mathcal{P})$ et $\text{val}(\mathcal{D})$ sont deux valeurs finies. Dans ce cas, on a pour tout $(x, \mu, \lambda) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}_+^q$

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^n} L(x, \mu, \lambda) \leq L(x, \mu, \lambda) \quad (3.21)$$

$$\max_{(\mu, \lambda) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}_+^q} \inf_{x \in \mathbb{R}^n} L(x, \mu, \lambda) \leq \sup_{(\mu, \lambda) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}_+^q} L(x, \mu, \lambda) \quad (3.22)$$

$$\text{val}(\mathcal{D}) = \max_{(\mu, \lambda) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}_+^q} \inf_{x \in \mathbb{R}^n} L(x, \mu, \lambda) \leq \min_{x \in \mathbb{R}^n} \sup_{(\mu, \lambda) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}_+^q} L(x, \mu, \lambda) = \text{val}(\mathcal{P}) \quad (3.23)$$

□

Désormais, nous allons nous intéresser au lien entre point-selle et saut de dualité

Théorème 11: Théorème Mini-Max

L'ensemble des points-selles PS est non vide si et seulement si les trois conditions suivantes sont satisfaites

$$\text{val}(\mathcal{D}) = \text{val}(\mathcal{P}) \quad (3.24a)$$

$$\text{sol}(\mathcal{P}) \neq \emptyset \quad (3.24b)$$

$$\text{sol}(\mathcal{D}) \neq \emptyset \quad (3.24c)$$

Dans ce cas $\text{PS} = \text{sol}(\mathcal{P}) \times \text{sol}(\mathcal{D})$

DÉMONSTRATION. Soit $(\bar{x}, \bar{\mu}, \bar{\lambda}) \in \text{PS}$ un point-selle du Lagrangien. On a alors

$$\sup_{(\mu, \lambda) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}_+^q} L(\bar{x}, \mu, \lambda) \leq L(\bar{x}, \bar{\mu}, \bar{\lambda}) \leq \inf_{x \in \mathbb{R}^n} L(x, \bar{\mu}, \bar{\lambda})$$

Par conséquent

$$\text{val}(\mathcal{P}) \leq \sup_{(\mu, \lambda) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}_+^q} L(\bar{x}, \mu, \lambda) \leq L(\bar{x}, \bar{\mu}, \bar{\lambda}) \leq \inf_{x \in \mathbb{R}^n} L(x, \bar{\mu}, \bar{\lambda}) \leq \text{val}(\mathcal{D})$$

En utilisant la proposition 4, on obtient $\text{val}(\mathcal{P}) = \text{val}(\mathcal{D})$ ce qui prouve (3.24a). Par conséquent $\bar{x} \in \text{sol}(\mathcal{P})$ et $(\bar{\mu}, \bar{\lambda}) \in \text{sol}(\mathcal{D})$ ce qui prouve (3.24b), (3.24c) et que $\text{PS} \subset$

$\text{sol}(\mathcal{P}) \times \text{sol}(\mathcal{D})$. Montrons maintenant la réciproque et supposons que (3.24) sont satisfaites. Comme $\bar{x} \in \text{sol}(\mathcal{P})$ et $(\bar{\mu}, \bar{\lambda}) \in \text{sol}(\mathcal{D})$, on a

$$\begin{aligned} \text{val}(\mathcal{D}) = D(\bar{\mu}, \bar{\lambda}) &= \inf_{x \in \mathbb{R}^n} L(x, \bar{\mu}, \bar{\lambda}) \\ &\leq L(\bar{x}, \bar{\mu}, \bar{\lambda}) \leq \\ &\sup_{(\mu, \lambda) \in \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}_+^q} L(\bar{x}, \mu, \lambda) = P(\bar{x}) = \text{val}(\mathcal{P}) \end{aligned} \quad (3.25)$$

En utilisant le fait que $\text{val}(\mathcal{D}) = \text{val}(\mathcal{P})$, on obtient

$$\begin{aligned} L(\bar{x}, \bar{\mu}, \bar{\lambda}) &= \inf_{x \in \mathbb{R}^n} L(x, \bar{\mu}, \bar{\lambda}) \leq L(x, \bar{\mu}, \bar{\lambda}) \\ L(\bar{x}, \bar{\mu}, \bar{\lambda}) &= \sup_{(\mu, \lambda) \in \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}_+^q} L(\bar{x}, \mu, \lambda) \geq L(\bar{x}, \mu, \lambda) \end{aligned}$$

ce qui entraîne

$$L(\bar{x}, \mu, \lambda) \leq L(\bar{x}, \bar{\mu}, \bar{\lambda}) \leq L(x, \bar{\mu}, \bar{\lambda})$$

et prouve que $(\bar{x}, \bar{\mu}, \bar{\lambda})$ est un point-selle et, par conséquent, que $\text{PS} = \text{sol}(\mathcal{P}) \times \text{sol}(\mathcal{D})$. \square

Ce théorème montre l'équivalence entre point-selle et solutions primale et duale permet de calculer la solution primale, celle qui nous intéresse, en passant par la résolution du problème dual.

Théorème 12: Calcul de la solution primale par résolution du problème dual

Supposons que le problème 6 a un point-selle. Si $(\hat{\mu}, \hat{\lambda}) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}_+^q$ est tel que $|D(\hat{\mu}, \hat{\lambda})| < +\infty$, alors tout point $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ satisfaisant les conditions suivantes

- i) $L(\bar{x}, \hat{\mu}, \hat{\lambda}) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} L(x, \hat{\mu}, \hat{\lambda})$
 - ii) $c(\bar{x}) = 0$ et $g(\bar{x}) \leq 0$
 - iii) $\hat{\lambda}_i g_i(\bar{x}) = 0, i = 1, \dots, q$
- est solution du problème 6.

DÉMONSTRATION. Par définition de la fonction duale D , la condition i) implique

$$L(\bar{x}, \hat{\mu}, \hat{\lambda}) = D(\hat{\mu}, \hat{\lambda}) \neq \pm\infty \quad (3.26)$$

Par ailleurs, la conditions ii) implique

$$P(\bar{x}) = \sup_{(\mu, \lambda) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}_+^q} f(\bar{x}) + \langle c(\bar{x}), \mu \rangle + \langle g(\bar{x}), \lambda \rangle = f(\bar{x}) \quad (3.27)$$

Enfin, les condition ii) et iii) impliquent

$$L(\bar{x}, \hat{\mu}, \hat{\lambda}) = f(\bar{x}) \quad (3.28)$$

En rassemblant (3.26), (3.27) et (3.28), on obtient

$$L(\bar{x}, \mu, \lambda) \leq P(\bar{x}) = L(\bar{x}, \hat{\mu}, \hat{\lambda}) = D(\hat{\mu}, \hat{\lambda}) \leq L(x, \hat{\mu}, \hat{\lambda}) \quad (3.29)$$

Ce qui prouve que $(\bar{x}, \hat{\mu}, \hat{\lambda})$ est un point-selle du Lagrangien. En utilisant le théorème 11, on obtient que \bar{x} est solution du problème primal, c'est-à-dire du problème 6, ce qu'il fallait démontrer. Par ailleurs, le point $(\hat{\mu}, \hat{\lambda})$ est une solution du problème dual. \square

Finalement, nous pouvons relier les point-selles et les points satisfaisant les conditions KKT décrites dans le théorème 10. Pour ce faire, nous allons d'abord démontrer une intéressante propriété de la fonction duale D .

Lemme 12

La fonction duale $D(\mu, \lambda)$ donnée en (3.14) est concave.

DÉMONSTRATION. Comme le Lagrangien est une fonction affine de (μ, λ) , la fonction duale est l'infimum d'une famille de fonctions affine indexée par $x \in \mathbb{R}^n$. De façon équivalente, $-D(\cdot)$ est un supremum d'une famille de fonctions affines et on conclut en utilisant le lemme 5. \square

Théorème 13

Si le Lagrangien du problème 6 est convexe par rapport à x , alors tout triplet $(\bar{x}, \bar{\mu}, \bar{\lambda}) \in \text{PS}$ satisfait les conditions KKT du théorème 10.

DÉMONSTRATION. Soit $(\bar{x}, \bar{\mu}, \bar{\lambda}) \in \text{PS}$. D'après le théorème 11, on a $\bar{x} \in \text{sol}(\mathcal{P})$ et $(\bar{\mu}, \bar{\lambda}) \in \text{sol}(\mathcal{D})$. Alors, d'après le théorème 6 et la convexité de $L(\cdot, \bar{\mu}, \bar{\lambda})$, on a

$$-\frac{\partial L}{\partial x}(\bar{x}, \bar{\mu}, \bar{\lambda}) \in [T_{\mathbb{R}^n}(\bar{x})]^\circ = \{0\} \quad (3.30)$$

Soit

$$\nabla f(\bar{x}) + \left[\frac{\partial c}{\partial x}(\bar{x}) \right]^\top \bar{\mu} + \left[\frac{\partial g}{\partial x}(\bar{x}) \right]^\top \bar{\lambda} = 0 \quad (3.31)$$

Par ailleurs, d'après la concavité de $L(\bar{x}, \cdot, \cdot)$, et en utilisant encore le théorème 6, on a

$$\begin{pmatrix} c(\bar{x}) \\ g(\bar{x}) \end{pmatrix} \in [T_{\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}_+^q}(\bar{\mu}, \bar{\lambda})]^\circ \quad (3.32)$$

Sans pertes de généralité, on note $i = 1, \dots, q_0$ les coordonnées positives de $\bar{\lambda}$. Alors on a

$$T_{\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}_+^q}(\bar{\mu}, \bar{\lambda}) = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{q_0} \times \mathbb{R}_+^{q-q_0} \quad (3.33)$$

ce qui implique

$$\begin{pmatrix} c(\bar{x}) \\ g(\bar{x}) \end{pmatrix} \in \{0\}^p \times \{0\}^{q_0} \times \mathbb{R}_-^{q-q_0} \quad (3.34)$$

qui est équivalent à

$$c(\bar{x}) = 0 \quad (3.35)$$

$$\bar{\lambda}_i g_i(\bar{x}) = 0, \quad i = 1, \dots, q \quad (3.36)$$

En regroupant (3.31), (3.35) et (3.36), on a bien que $(\bar{x}, \bar{\mu}, \bar{\lambda})$ satisfait les conditions de KKT. \square

Chapitre 4

Méthodes numériques de résolution de problèmes sous contraintes

Contents

| | | |
|-------|---|----|
| 4.1 | Algorithme de résolution de systèmes d'équations non linéaires | 50 |
| 4.2 | Problèmes avec contraintes égalités seules | 50 |
| 4.3 | Problèmes avec contraintes mixtes égalités-inégalités | 51 |
| 4.3.1 | Algorithme d'Uzawa | 51 |
| 4.3.2 | Méthodes de points intérieurs et méthodes primales-duales . . . | 51 |

4.1 Algorithme de résolution de systèmes d'équations non linéaires

Dans cette section, nous allons décrire un algorithme de résolution d'un système d'équations non linéaires. Le problème consiste à trouver $y = (y_1, \dots, y_n)^\top \in \mathbb{R}^n$ satisfaisant

$$F(\bar{y}) = \begin{pmatrix} F_1(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n) \\ \vdots \\ F_n(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n) \end{pmatrix} = 0 \quad (4.1)$$

avec $F \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$. On note $DF(y)$ la Jacobienne de F au point y définie comme suit

$$DF(y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(y) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_n}(y) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial y_1}(y) & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial y_n}(y) \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

L'algorithme 5 permet de résoudre ce type de problèmes. Les lecteurs intéressés peuvent se référer à [8, Ch. 14., pp.215] pour une preuve de convergence.

Algorithm 5 Algorithme de Newton-Raphson

- 1: A partir de $y^0 \in \mathbb{R}^n$, de $\rho > 0$ et de $\text{tol} > 0$ on itère
 - 2: Reussite $\leftarrow \perp$
 - 3: **while** $\neg \text{Reussite}$ **do**
 - 4: $y^{k+1} \leftarrow y^k - \rho [DF(y^k)]^{-1} F(y^k)$
 - 5: Reussite $\leftarrow \|F(y^{k+1})\| \leq \text{tol}$
 - 6: $k \leftarrow k + 1$
 - 7: **end while**
 - 8: **return** y^k
-

4.2 Problèmes avec contraintes égalités seules

Dans cette section nous nous intéressons à la résolution numérique d'un problème d'optimisations avec contraintes égalités tel que formulé dans le problème 3. Dans ce cas, les nécessaires d'optimalité du théorème 8 consistent à trouver les variables $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ et $\bar{\mu} \in \mathbb{R}^p$ solution du système d'équations non linéaires suivant

$$\begin{aligned} \nabla f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^p \bar{\mu}_i \nabla c_i(\bar{x}) &= 0 \\ c(\bar{x}) &= 0 \end{aligned}$$

Pour résoudre ce problème, on peut utiliser l'algorithme 5 avec $y = (x, \mu) \in \mathbb{R}^{n+p}$ et $F : \mathbb{R}^{n+p} \mapsto \mathbb{R}^{n+p}$ définie comme suit

$$F(x, \mu) := \begin{pmatrix} \nabla f(x) + \sum_{i=1}^p \mu_i \nabla c_i(x) \\ c(x) \end{pmatrix}$$

4.3 Problèmes avec contraintes mixtes égalités-inégalités

4.3.1 Algorithme d'Uzawa

L'algorithme d'Uzawa 6 consiste à résoudre le problème dual (\mathcal{D}) en utilisant un algorithme du gradient à pas constant. L'évaluation de la fonction duale consiste à résoudre un problème de minimisation sans contraintes en $x \in \mathbb{R}^n$. Cette étape de minimisation peut être effectuée par une méthode de Newton telle que décrite dans l'algorithme 4.

Algorithm 6 Algorithme d'Uzawa

```

1: A partir de  $x^0 \in \mathbb{R}^n$ , de  $(\mu^0, \lambda^0) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}_+^q$ , de  $\alpha > 0$  et de  $\text{tol} > 0$  on itère
2: Reussite  $\leftarrow \perp$ 
3: while  $\neg \text{Reussite}$  do
4:    $x^{k+1} \leftarrow \arg \min_{s \in \mathbb{R}^n} L(s, \mu^k, \lambda^k)$ 
5:    $\mu^{k+1} \leftarrow \mu^k + \alpha c(x^{k+1})$ 
6:    $\lambda^{k+1} \leftarrow \Pi_{\mathbb{R}_+^q}(\lambda^k + \alpha g(x^{k+1}))$ 
7:   Reussite  $\leftarrow \max \{ |\langle \lambda^{k+1}, g(x^{k+1}) \rangle|, |g(x^{k+1})|, |\langle c(x^{k+1}), \mu^{k+1} \rangle|, \|c(x^{k+1})\| \} \leq \text{tol}$ 
8:    $k \leftarrow k + 1$ 
9: end while
10: return  $x^k, \mu^k, \lambda^k$ 

```

Finalement, l'algorithme d'Uzawa consiste presque à résoudre le problème dual par un algorithme du gradient à pas constant.

4.3.2 Méthodes de points intérieurs et méthodes primales-duales

4.3.2.1 Description de la méthode

Une des méthodes les plus efficaces de résolution de problèmes d'optimisation sous contraintes est la méthode dite des *points intérieurs* consistant à résoudre itérativement une suite de problèmes d'optimisation modifiés dont la solution converge vers la solution du problème original. Cette modification du problème d'optimisation consiste à rajouter une pénalisation prenant en compte les contraintes au coût que l'on cherche à minimiser de la façon suivante :

$$f_\varepsilon(x) := f(x) - \varepsilon \sum_{i=1}^q \log(-g_i(x)) := f(x) + \varepsilon \sum_{i=1}^q \psi \circ g_i(x) \quad (4.3)$$

L'algorithme de points intérieurs consiste à résoudre ce problème sans contraintes inégalités pour des valeurs de $\varepsilon \downarrow 0$, et pour chaque valeur de ε_k , on initialisera le problème d'optimisation avec la solution optimale $\bar{x}_{\varepsilon_{k-1}}$ obtenue pour ε_{k-1} . Dans la suite, on utilisera le Lagrangien pénalisé suivant

Définition 22: Lagrangien pénalisé

On appelle Lagrangien pénalisé la fonction $L_\varepsilon : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \mapsto \mathbb{R}$ la fonction suivante

$$L_\varepsilon(x, \mu) := f_\varepsilon(x) + \langle c(x), \mu \rangle \quad (4.4)$$

Dans la suite, on notera PS_ε l'ensemble des points-selles de (4.4).

L'algorithme de résolution par points intérieurs est décrit dans 7

Algorithm 7 Algorithme de points intérieurs

```

1: A partir de  $(x^0, \mu^0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$  tel que  $g(x_0) < 0$  on fixe  $\varepsilon_0 = 1$ ,  $\alpha \in ]0, 1[$ ,  $\text{tol} > 0$  à
   choisir et on itère
2: Reussite  $\leftarrow \perp$ 
3: while  $\neg \text{Reussite}$  do
4:    $\varepsilon_k \leftarrow \alpha^k$ 
5:    $(x(\varepsilon_k), \mu(\varepsilon_k)) \in \text{PS}_\varepsilon$ 
6:   Reussite  $\leftarrow \varepsilon_k < \text{tol}$ 
7:    $k \leftarrow k + 1$ 
8: end while
9: return  $x(\varepsilon_k)$ 

```

4.3.2.2 Lien entre fonction de pénalisation et variable duale.

Pour montrer la convergence des méthodes de points-intérieurs, il faut montrer que la suite de solutions du problème pénalisé $(x(\varepsilon_k), \mu(\varepsilon_k))$ converge vers un point-selle du Lagrangien du problème sous contraintes. Mais, la méthode de points-intérieurs ne repose pas sur le calcul des multiplicateurs de Lagrange des contraintes inégalités, multiplicateurs nécessaires pour vérifier que le point obtenu est un point-selle. Cependant, il existe un lien fort entre la fonction de pénalisation et les multiplicateurs de Lagrange. Pour s'en convaincre, regardons le gradient par rapport à x du Lagrangien d'un problème d'optimisation sous contraintes :

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x, \mu, \lambda) = \nabla f(x) + \left[\frac{\partial c}{\partial x}(x) \right]^\top \mu + \sum_{i=1}^q \lambda_i \nabla g_i(x) \quad (4.5)$$

Or, si l'on regarde le gradient par rapport à x du Lagrangien pénalisé, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_\varepsilon}{\partial x}(x, \mu) &= \nabla f(x) + \left[\frac{\partial c}{\partial x}(x) \right]^\top \mu + \varepsilon \sum_{i=1}^q \psi' \circ g_i(x) \nabla g_i(x) \\ &= \nabla f(x) + \left[\frac{\partial c}{\partial x}(x) \right]^\top \mu - \sum_{i=1}^q \frac{\varepsilon}{g_i(x)} \nabla g_i(x) \end{aligned} \quad (4.6)$$

La structure des équations (4.5) et (4.6) est similaire, en effet, le membre de droite de l'équation est composé du gradient du coût et du produit d'un réel non négatif avec le gradient des contraintes. Dans le premier cas ce réel non négatif est le multiplicateur de Lagrange, et dans le deuxième cas, c'est la dérivée de la pénalisation. En fait, l'intuition consistant à identifier la dérivée de la pénalisation à la variable duale est en fait correcte et c'est ce que nous allons montrer. Tout d'abord, nous avons besoin du résultat suivant

Lemme 13

Soit X_f l'ensemble des points faisables du problème pénalisé défini comme suit

$$X_f := \{x \in \mathbb{R}^n : c(x) = 0, g_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, q\} \quad (4.7)$$

Si X_f est borné et si les contraintes c, g satisfont les conditions de qualification de Mangasarian-Fromovitz 16 alors le problème pénalisé a une solution notée \bar{x}_ε .

DÉMONSTRATION. Par définition de la qualification des contraintes, $\exists x_{\text{MF}} \in X_f$ tel que $g(x_{\text{MF}}) < 0$. Soit $\beta := f_\varepsilon(x_{\text{MF}})$, alors l'ensemble S_ε^β définit comme suit

$$S_\varepsilon^\beta := \{x \in X_f : f_\varepsilon(x) \leq \beta\} \quad (4.8)$$

est compact. En effet, cet ensemble est borné car c'est un sous-ensemble de X_f qui est borné. De plus, pour toute suite $(x_n)_n \in S_\varepsilon^\beta$ convergent vers \bar{x}_ε on a

$$-\varepsilon \sum_{i=1}^q \log(-g_i(x_n)) \leq \beta - f(x_n) \quad (4.9)$$

Comme $(x_n)_n$ est bornée et f continue, il existe une constante G telle que $f(x_n) \geq G$ pour tout n . on a

$$-\varepsilon \sum_{i=1}^q \log(-g_i(x_n)) \leq \beta - G \quad (4.10)$$

Par ailleurs, en notant $M_i := \inf\{g_i(x), x \in X_f\}$ et d'après (4.10), on a

$$\varepsilon \log(-g_i(x_n)) \leq \beta - G + \varepsilon \sum_{j \neq i} \log(-M_j) \quad (4.11)$$

Ainsi, $\exists \sigma(\varepsilon) > 0$ tel que $g_i(x_n) \leq -\sigma(\varepsilon)$, pour tout n et pour tout i ce qui prouve que $g_i(\bar{x}) \leq -\sigma(\varepsilon)$. La fonction f_ε étant continue, $\bar{x} \in S_\varepsilon^\beta$, ce qui montre que S_ε^β est fermé et donc compact. Ainsi, résoudre le problème pénalisé sur X_f ou sur S_ε^β est équivalent, ce dernier étant compact, le problème a une solution. \square

Maintenant que l'existence de solutions optimales pour le problème pénalisé est démontrée, nous allons énoncer un autre résultat technique fondamental des méthodes de points intérieurs.

Lemme 14

Soit $(\varepsilon_n)_n$ une suite de paramètres positifs convergents vers 0 et soit $(\bar{x}_{\varepsilon_n})_n$ une suite de solutions optimales locales du problème pénalisé. Si les contraintes c, g satisfont les conditions de qualification de Mangasarian-Fromovitz 16 en \bar{x}^{ε_n} , alors,

$$\exists \alpha > 0, \forall \varepsilon_n > 0, \max_i g_i(\bar{x}_{\varepsilon_n}) \leq -\alpha \varepsilon_n \quad (4.12)$$

DÉMONSTRATION. Sans perte de généralité, on suppose qu'il n'y a qu'une contrainte inégalité, i.e. $g : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$. Nous allons démontrer le résultat par contraposition. Ainsi, on suppose que pour tout $\alpha > 0$, il existe $\varepsilon_n \in]0, \varepsilon_0]$ tel que $g(\bar{x}^{\varepsilon_n}) > -\alpha \varepsilon_n \geq -\alpha \varepsilon_0$. Si les contraintes sont qualifiées en \bar{x}^{ε_n} , il existe x_{MF} tel que pour tout $\lambda > 0$ suffisamment petit

$$c(x_\lambda) := c(\bar{x}^{\varepsilon_n} + \lambda(x_{\text{MF}} - \bar{x}^{\varepsilon_n})) = c(\bar{x}^{\varepsilon_n}) = 0 \quad (4.13)$$

$$g(x_\lambda) := g(\bar{x}^{\varepsilon_n} + \lambda(x_{\text{MF}} - \bar{x}^{\varepsilon_n})) = g(\bar{x}^{\varepsilon_n}) - \lambda \langle \nabla g(\bar{x}^{\varepsilon_n}), x_{\text{MF}} - \bar{x}^{\varepsilon_n} \rangle + o(\lambda) \quad (4.14)$$

$$:= g(\bar{x}^{\varepsilon_n}) - \lambda \delta + o(\lambda) \quad (4.15)$$

Alors $x_\lambda \in X_f$. Comme X_f est borné, f est Lipshitz sur cet ensemble, et on note L_f sa constante de Lipshitz.

$$\begin{aligned} f_\varepsilon(x_\lambda) - f_\varepsilon(\bar{x}^{\varepsilon_n}) &\leq L_f \|x_\lambda - \bar{x}^{\varepsilon_n}\| - \varepsilon_n [\log(-g(x_\lambda)) - \log(-g(\bar{x}^{\varepsilon_n}))] \\ &\leq L_f \|x_\lambda - \bar{x}^{\varepsilon_n}\| + \varepsilon_n \log\left(\frac{g(\bar{x}^{\varepsilon_n})}{g(x_\lambda)}\right) \\ &\leq L_f \|x_\lambda - \bar{x}^{\varepsilon_n}\| + \varepsilon_n \log\left(\frac{\alpha\varepsilon_0}{\lambda\delta}\right) \end{aligned}$$

On peut alors choisir $\lambda = 2\alpha\varepsilon_0/\delta$ et on a

$$f_\varepsilon(x_\lambda) - f_\varepsilon(\bar{x}^{\varepsilon_n}) \leq 2L_f\alpha\varepsilon_0 \|x_{\text{MF}} - \bar{x}^{\varepsilon_n}\| / \delta - \varepsilon_n \log(2)$$

Alors pour α suffisamment petit, on a

$$f(x_\lambda) < f(\bar{x}^{\varepsilon_n})$$

ce qui conclut la preuve. \square

Théorème 14

Soit $(\varepsilon_n)_n$ une suite de paramètres positifs convergents vers 0 et soit $(\bar{x}_{\varepsilon_n}, \bar{\mu}_{\varepsilon_n})_n$ une suite de solutions optimales locales de (4.3) et de multiplicateurs de Lagrange des contraintes égalités, alors, pour tout point d'accumulation $(\bar{x}, \bar{\mu})$ de la suite $(\bar{x}_{\varepsilon_n}, \bar{\mu}_{\varepsilon_n})_n$, il existe $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}_+^q$ tel que

$$\nabla f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^p \bar{\mu}_i \nabla c_i(\bar{x}) + \sum_{i=1}^q \bar{\lambda}_i \nabla g_i(\bar{x}) = 0 \quad (4.16)$$

$$c(\bar{x}) = 0 \quad (4.17)$$

$$\bar{\lambda}_i g_i(\bar{x}) = 0, \quad i = 1, \dots, q \quad (4.18)$$

et il existe une sous suite $(\bar{x}_{\varepsilon_{n_k}})_k$ telle que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \bar{x}_{\varepsilon_{n_k}} = \bar{x} \quad (4.19a)$$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \bar{\mu}_{\varepsilon_{n_k}} = \bar{\mu} \quad (4.19b)$$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} f(\bar{x}_{\varepsilon_{n_k}}) = f(\bar{x}) \quad (4.19c)$$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} c(\bar{x}_{\varepsilon_{n_k}}) = c(\bar{x}) \quad (4.19d)$$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} -\frac{\varepsilon_{n_k}}{g_i(\bar{x}_{\varepsilon_{n_k}})} = \bar{\lambda}_i \quad (4.19e)$$

DÉMONSTRATION. Par définition, si $(\bar{x}, \bar{\mu})$ est un point d'accumulation de la suite $(\bar{x}_{\varepsilon_n}, \bar{\mu}_{\varepsilon_n})_n$ alors il existe une sous suite convergente vers $(\bar{x}, \bar{\mu})$, ce qui prouve (4.19a) et (4.19b), la continuité de f et de c prouve (4.19c) et (4.19d). D'après le lemme 14, la suite $(-\varepsilon_n/g_i(\bar{x}_{\varepsilon_n}))_n$ est uniformément bornée et contient donc une sous-suite convergent vers $\bar{\lambda} \geq 0$ et on a

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} -\frac{\varepsilon_{n_k}}{g_i(\bar{x}_{\varepsilon_{n_k}})} g_i(\bar{x}_{\varepsilon_{n_k}}) = \lim_{k \rightarrow +\infty} -\varepsilon_{n_k} = 0 = \bar{\lambda}_i g_i(\bar{x}) \quad (4.20)$$

ce qui prouve (4.18) et (4.19e). Par définition, \bar{x}_{ε_n} est solution d'un problème d'optimisation sans contraintes et satisfait

$$\nabla f(\bar{x}_{\varepsilon_n}) + \sum_{i=1}^p \bar{\mu}_{\varepsilon_n, i} \nabla c_i(\bar{x}_{\varepsilon_n}) - \varepsilon_n \sum_i \frac{1}{g_i(\bar{x}_{\varepsilon_n})} \nabla g_i(\bar{x}_{\varepsilon_n}) = 0 \quad (4.21)$$

La preuve de (4.16) est une conséquence de la continuité de ∇f , ∇c et ∇g et de (4.19a), (4.19d) et (4.19e) ce qui conclut la preuve. \square

4.3.2.3 Implémentation primale-duale

Les méthodes d'optimisation primales-duales consistent à calculer *en même temps* la variable primale x et les variables duales (μ, λ) du problème d'optimisation sous contraintes. En règle générale, on écrit le problème d'optimisation 6 en utilisant une variables d'écart notée s (slack en anglais) comme suit

$$\min_{(x, s) \in \mathbb{R}^{n+q}} f(x) \quad (4.22a)$$

$$c(x) = 0 \quad (4.22b)$$

$$g(x) + s = 0 \quad (4.22c)$$

$$-s \leq 0 \quad (4.22d)$$

Ainsi, le Lagrangien du problème s'écrit comme suit

$$L^\varepsilon(x, s, \lambda) := f(x) + \langle c(x), \mu \rangle + \langle g(x) + s, \bar{\lambda} \rangle - \varepsilon \sum_{i=1}^q \log(s_i) \quad (4.23)$$

et les points stationnaires $(\bar{x}^\varepsilon, \bar{s}^\varepsilon, \bar{\mu}^\varepsilon, \bar{\lambda}^\varepsilon)$ sont solutions de

$$\nabla f(\bar{x}^\varepsilon) + \left[\frac{\partial c}{\partial x}(\bar{x}^\varepsilon) \right]^\top \bar{\mu}^\varepsilon + \left[\frac{\partial g}{\partial x}(\bar{x}^\varepsilon) \right]^\top \bar{\lambda}^\varepsilon = 0 \quad (4.24a)$$

$$c(\bar{x}^\varepsilon) = 0 \quad (4.24b)$$

$$g(\bar{x}^\varepsilon) + \bar{s}^\varepsilon = 0 \quad (4.24c)$$

$$\bar{\lambda}_i^\varepsilon \bar{s}_i^\varepsilon - \varepsilon = 0, \quad i = 1, \dots, q \quad (4.24d)$$

Pour chaque valeur de ε , on peut trouver un point stationnaire en utilisant l'algorithme 5.

Algorithm 8 Méthodes primale-duale en optimisation sous contraintes

- 1: A partir de $x_0, s_0, \mu_0, \lambda_0 \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^q \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}_+^q$, on fixe $\varepsilon_0 = 1$, $\alpha \in]0, 1[$, $\text{tol} > 0$ à choisir et on itère
 - 2: Reussite $\leftarrow \perp$
 - 3: **while** $\neg \text{Reussite}$ **do**
 - 4: $\varepsilon_k \leftarrow \alpha^k$
 - 5: $(\bar{x}^{\varepsilon_k}, \bar{s}^{\varepsilon_k}, \bar{\mu}^{\varepsilon_k}, \bar{\lambda}^{\varepsilon_k}) \leftarrow$ solution de (4.24)
 - 6: Reussite $\leftarrow \varepsilon_k < \text{tol}$
 - 7: $k \leftarrow k + 1$
 - 8: **end while**
 - 9: **return** $(\bar{x}^{\varepsilon_k}, \bar{s}^{\varepsilon_k}, \bar{\mu}^{\varepsilon_k}, \bar{\lambda}^{\varepsilon_k})$
-

Chapitre 5

Calcul des variations

Contents

| | | |
|-----|---|----|
| 5.1 | Notations, résultats et définitions préliminaires | 58 |
| 5.2 | Exemple introductif | 59 |
| 5.3 | Présentation du problème | 60 |
| 5.4 | Conditions nécessaires d'extrémalité | 61 |
| 5.5 | Retour au problème de la chaîne pesante | 64 |

5.1 Notations, résultats et définitions préliminaires

Dans ce chapitre, nous utiliserons de façon récurrente les notations suivantes

- $x : [0, T] \mapsto \mathbb{R}^n$: fonction du temps vectorielle représentant l'état du système
- $u : [0, T] \mapsto \mathbb{R}^m$: fonction du temps vectorielle représentant la commande du système
- $p : [0, T] \mapsto \mathbb{R}^n$: fonction du temps vectorielle représentant l'état adjoint du système.
- $x_t := x(t)$: Valeur de la fonction du temps x à l'instant t
- $f'_{x_i}(x_1, \dots, x_n) := \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n)$
- $f'(x_1, \dots, x_n) := \nabla f(x_1, \dots, x_n)$

Définition 23: Espace L^p

On définit l'espace $L^p(A; B)$, avec $1 \leq p < +\infty$ comme l'espace des fonctions $f : A \mapsto B$ satisfaisant la propriété suivante

$$\|f\|_{L^p} := \left(\int_A |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty \quad (5.1)$$

et, pour $p = +\infty$, on définit la norme correspondante comme suit

$$\|f\|_{L^\infty} := \sup_{t \in A} |f(t)| < +\infty \quad (5.2)$$

Ces définitions peuvent paraître caricaturales aux mathématiciens. Pour introduire rigoureusement ces concepts, il est nécessaire de passer par la théorie de la mesure [6]. Pour les personnes intéressées, une présentation exhaustive des espaces L^p peut être trouvée dans [6, Ch. V, VI, VII].

Définition 24: Dérivée faible

Soit $\mathcal{D}(A; B)$ l'ensemble des fonctions $C^\infty(A; B)$ nulles partout en dehors de A et soit $x \in L^1(A; B)$, on dit que la fonction $z \in L^1(A; B)$ est une dérivée faible de x si elle satisfait

$$\int_A x(t)^\top \dot{\varphi}(t) dt + \int_A z(t)^\top \varphi(t) dt = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(A; B) \quad (5.3)$$

Définition 25: Espace $W^{1,p}$

On note $W^{1,p}(A; B)$, l'ensemble des fonctions $x \in L^p(A; B)$ dont la dérivée faible, notée z , est dans $L^p(A; B)$

$$W^{1,p}(A; B) := \{x \in L^p(A; B); z \in L^p(A; B)\} \quad (5.4)$$

Par ailleurs, on peut également définir les opérations de dérivation dans les espaces de fonctions.

Définition 26: Dérivée directionnelle et dérivée de Gâteaux dans les espaces fonctionnels

Soient X, Y deux espaces de Banach [3, Ch.5, p.75-104] et $f : X \mapsto Y$, on appelle dérivée directionnelle au point x dans la direction h , notée $Df(x; h)$ la limite suivante, quand elle existe

$$Df(x; h) := \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{f(x + \lambda h) - f(x)}{\lambda} \quad (5.5)$$

Si $Df(x; h)$ existe dans toutes les directions $h \in X$ et qu'il existe une application linéaire bornée notée $A_x : X \mapsto Y$ telle que

$$Df(x; h) = A_x(h) = \langle A_x, h \rangle, \quad \forall h \in X \quad (5.6)$$

on dit que f est Gâteaux-différentiable en x et A_x est sa dérivée de Gâteaux. De plus, si f est Gâteaux-différentiable, on a

$$Df(x; h) = \langle A_x, h \rangle = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{d}{d\lambda} f(x + \lambda h); \quad \forall h \in X \quad (5.7)$$

Définition 27: Suite dense

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeur dans un ensemble A . On dit que la suite est dense dans A si pour tout $y \in A$ et pour tout ensemble ouvert $V \ni y$ tel que $V \subseteq A$, on a

$$V \cap \{x_n, n \in \mathbb{N}\} \neq \emptyset \quad (5.8)$$

5.2 Exemple introductif

Désormais, nous allons nous intéresser au problème de la forme d'une chaîne pesante de longueur L reliant les points $A := (t_a, x_a)$ et $B := (t_b, x_b)$ avec $t_b > t_a$, comme indiqué en Figure 5.1. La forme d'une telle chaîne au repos minimise son énergie potentielle de pesanteur. En faisant l'hypothèse que la chaîne est une masse linéique constante et en notant $x : [t_a, t_b] \mapsto \mathbb{R}$ la position verticale de la chaîne en fonction de l'abscisse t . On cherche alors à trouver le minimum de la fonctionnelle suivante

$$\min_x \int_{t_a}^{t_b} \rho g x(t) dl(x(t), t) \quad (5.9)$$

avec

$$\int_{t_a}^{t_b} dl(x(t), t) = L$$

En notant $f : [t_a, t_b] \mapsto \mathbb{R}^2$ la courbe représentant le graphe de la chaîne défini comme suit

$$f(t) := \begin{pmatrix} x(t) \\ t \end{pmatrix} \quad (5.10)$$

on a, pour tout $\phi \in C^0([t_a, t_b])$,

$$\int_{t_a}^{t_b} \phi(t) dl(x(t), t) := \int_{t_a}^{t_b} \phi(t) \|f'(t)\| dt \quad (5.11)$$

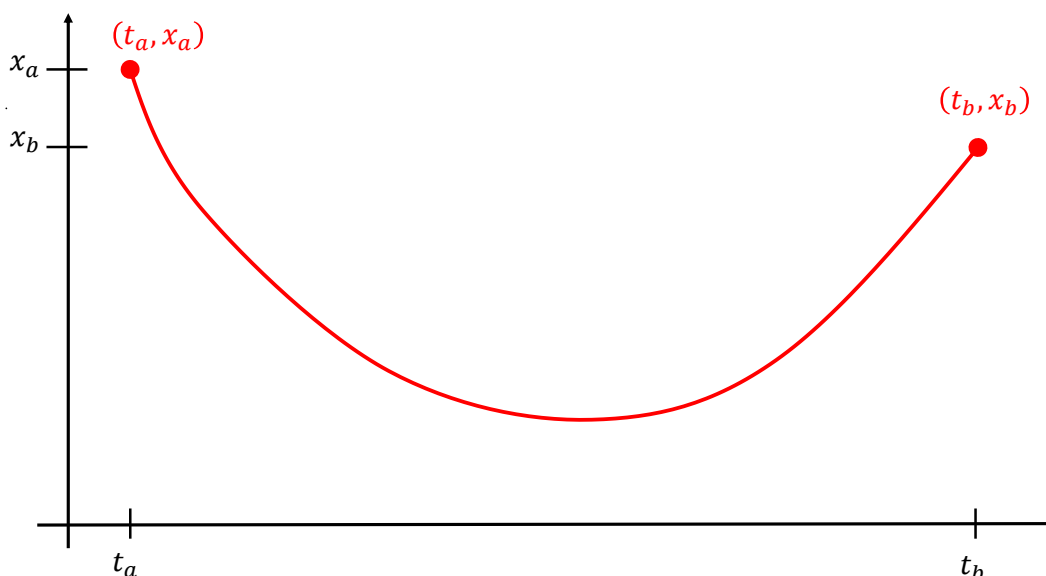


FIGURE 5.1 – Forme d'un chaîne pesante au repos

En combinant les équations (5.9), (5.10) and (5.11), on obtient alors le problème suivant

$$\min_{x \in C^1([t_a, t_b])} \left[\int_{t_a}^{t_b} \rho g x(t) \sqrt{1 + \dot{x}(t)^2} dt := \int_{t_a}^{t_b} \ell(x(t), \dot{x}(t)) dt \right] \quad (5.12)$$

Les méthodes résolution de ce problème de minimisation, par rapport à une fonction, de l'intégrale d'une quantité dépendant de cette fonction et de sa dérivée repose sur *le calcul des variations*. Il s'agit de méthodes de résolution d'un problème d'optimisation consistant à minimiser la valeur d'une "fonction de fonction" par rapport à son argument, c'est-à-dire une fonction. En général, on appelle fonctionnelle une fonction ayant pour ensemble de définition un espace fonctionnel et \mathbb{R} comme espace image.

Définition 28: Fonctionnelle

Soit X un espace vectoriel normé. On appelle fonctionnelle une application de X dans \mathbb{R}

5.3 Présentation du problème

Dans cette partie, nous nous intéressons à la résolution du problème suivant

Problème 7: Problème de calcul des variations

Le problème que l'on cherche à résoudre est le suivant

$$\min_{x \in X} J(x) := \int_0^T \ell(x_t, \dot{x}_t, t) dt \in \mathbb{R} \quad (5.13)$$

où ℓ est une fonction lisse et où X est défini comme suit

$$X = \{x \in C^2([0, T]; \mathbb{R}^n) : x(0) = a, x(T) = b\} \quad (5.14)$$

De plus, on munit cette ensemble de la norme $\|\cdot\|_X$ définie comme suit

$$\|x\|_X := \|x\|_{L^\infty} + \|\dot{x}\|_{L^\infty} \quad (5.15)$$

Définition 29: Minimum local

On dit que \bar{x} est un minimum local de J si

$$\exists \varepsilon > 0 \text{ t.q. } J(\bar{x}) \leq J(x), \forall x \in X \text{ t.q. } \|x - \bar{x}\|_X < \varepsilon$$

Définition 30: Variation admissible

On dit que h est une variation admissible au point $x \in X$ si $(x + h) \in X$

5.4 Conditions nécessaires d'extrémalité

Dans cette partie, nous allons déterminer des conditions nécessaires d'optimalité du problème 7. Nous allons donc déterminer des conditions sur $x \in X$ satisfaites par tout optimum local de notre problème.

Lemme 15: duBois-Reymond

Soient $\alpha, \beta \in C^0([0, T]; \mathbb{R})$ telles que, pour tout $h \in C^1([0, T]; \mathbb{R})$ avec $h(0) = h(T) = 0$, on a

$$\int_0^T \alpha(t)h(t) + \beta(t)\dot{h}(t)dt = 0 \quad (5.16)$$

Alors β est différentiable et satisfait

$$\dot{\beta} = \alpha \quad (5.17)$$

DÉMONSTRATION. Tout d'abord, intéressons nous au cas où $\alpha \equiv 0$ et prouvons que β est constante. La preuve se fait par contraposition. Supposons alors que β n'est pas constante. et définissons

$$B := \frac{1}{T} \int_0^T \beta(t)dt$$

Par hypothèse β n'est pas constante et $\exists I \subset [0, T]$ tel que $\beta(t) \neq B$ pour tout $t \in I$. Désormais, nous allons montrer qu'il existe $h \in C^1([0, T]; \mathbb{R})$ tel que $\int \beta \dot{h} dt \neq 0$. Pour ce

faire, on définit h comme suit

$$h(t) := \int_0^t (\beta(s) - B) ds$$

Comme h est continûment différentiable et que $h(0) = h(T) = 0$, par hypothèse on a

$$\begin{aligned} \int_0^T \beta(t) \dot{h}(t) dt &= \int_0^T \beta(t) (\beta(t) - B) dt \\ &= \int_0^T (\beta(t) - B)^2 dt + B \int_0^T (\beta(t) - B) dt \\ &= \int_0^T (\beta(t) - B)^2 dt + 0 \\ &> 0 \text{ (par continuité de } \beta) \end{aligned}$$

Ce qui prouve que $\beta \equiv B$. Maintenant, regardons le cas général et définissons

$$A(t) := \int_0^t \alpha(s) ds$$

On a alors, par intégration par partie

$$0 = \int_0^T [\alpha(t)h(t) + \beta(t)\dot{h}(t)] dt = \int_0^T [\beta(t) - A(t)] \dot{h}(t) dt$$

Comme nous venons de le démontrer, cela signifie que $\beta - A$ est constante ou, de manière équivalente, que β est une primitive de α , soit

$$\dot{\beta} = \alpha$$

ce qui conclut la preuve. □

Le lemme de duBois-Reymond a un corollaire utile

Corollaire 1

Soit $\alpha \in C^0([0, T]; \mathbb{R})$ telle que, pour tout $h \in C^1([0, T]; \mathbb{R})$ avec $h(0) = h(T) = 0$, on a

$$\int_0^T \alpha(t)h(t)dt = 0 \tag{5.18}$$

Alors $\alpha \equiv 0$

DÉMONSTRATION. Il suffit de prendre $\beta \equiv 0$ dans le lemme 15. □

Théorème 15: Equation d'Euler-Lagrange

Toute solution locale \bar{x} du problème (5.13) est solution de l'équation aux dérivées partielles suivante

$$\ell'_x(\bar{x}_t, \dot{\bar{x}}_t, t) - \frac{d}{dt} \ell'_x(\bar{x}_t, \dot{\bar{x}}_t, t) = 0 \tag{5.19}$$

Cette équation est aussi appelée équation d'Euler-Lagrange.

DÉMONSTRATION. Tout d'abord, introduisons la fonction $g_h : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ suivante

$$g_h(\lambda) := J(\bar{x} + \lambda h) \quad (5.20)$$

Alors, $\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0$, tel que pour tout $|\lambda| \leq r$ et pour toute variation admissible h , on a $\|\lambda h\|_X < \varepsilon$. Par définition de \bar{x} , on a

$$g_h(\lambda) = J(\bar{x} + \lambda h) \geq J(\bar{x}) = g_h(0) \quad (5.21)$$

Alors, g_h atteint son minimum en 0, de plus, d'après les hypothèses de régularité de ℓ , la fonction g_h est dérivable. On a alors

$$g'_h(0) = 0 \quad (5.22)$$

Maintenant calculons la dérivée de g_h

$$g'_h(\lambda) = \frac{d}{d\lambda} \int_0^T \ell(\bar{x}_t + \lambda h_t, \dot{\bar{x}}_t + \lambda \dot{h}_t, t) dt \quad (5.23)$$

$$= \int_0^T \frac{d}{d\lambda} \ell(\bar{x}_t + \lambda h_t, \dot{\bar{x}}_t + \lambda \dot{h}_t, t) dt \quad (5.24)$$

$$= \int_0^T \ell'_x(\bar{x}_t + \lambda h_t, \dot{\bar{x}}_t + \lambda \dot{h}_t, t) h_t + \ell'_x(\bar{x}_t + \lambda h_t, \dot{\bar{x}}_t + \lambda \dot{h}_t, t) \dot{h}_t dt \quad (5.25)$$

Alors, en utilisant le lemme 15 on obtient directement

$$\frac{d}{dt} \ell'_x(\bar{x}_t, \dot{\bar{x}}_t, t) = \ell'_x(\bar{x}_t, \dot{\bar{x}}_t, t) \quad (5.26)$$

ce qui conclut la preuve. \square

Dans de nombreux cas pratiques, le Lagrangien ne dépend pas explicitement de t . On peut alors utiliser la proposition suivante.

Proposition 5

Lorsque ℓ ne dépend pas explicitement de t , toute solution \bar{x} de l'équation d'Euler-Lagrange (5.19) est solution de :

$$\ell(\bar{x}_t, \dot{\bar{x}}_t) - \dot{\bar{x}}_t \ell'_x(\bar{x}_t, \dot{\bar{x}}_t) = \text{constante} \quad (5.27)$$

DÉMONSTRATION. L'équation (5.27) est équivalente à

$$0 = \frac{d}{dt} (\ell(\bar{x}_t, \dot{\bar{x}}_t) - \dot{\bar{x}}_t \ell'_x(\bar{x}_t, \dot{\bar{x}}_t)) = \dot{\bar{x}}_t \left(\ell'_x(\bar{x}_t, \dot{\bar{x}}_t) - \frac{d}{dt} \ell'_x(\bar{x}_t, \dot{\bar{x}}_t) \right)$$

On conclut la preuve en utilisant (5.19). \square

5.5 Retour au problème de la chaîne pesante

Le problème du calcul de la forme d'une chaîne pesante est décrit dans l'équation (5.12). D'après la Proposition 5, il existe une constante C telle que

$$\rho g x(t) \sqrt{1 + \dot{x}(t)^2} - \dot{x}(t) \rho g x(t) \frac{\dot{x}(t)}{\sqrt{1 + \dot{x}(t)^2}} = C$$

soit

$$\rho g x(t) = C \sqrt{1 + \dot{x}(t)^2} \Leftrightarrow \rho^2 g^2 x(t)^2 = C^2 (1 + \dot{x}(t)^2) \quad (5.28)$$

En posant $x(t) := \frac{C}{\rho g} \cosh(t \rho g / C)$ on a

$$\begin{aligned} C^2 \cosh(t \rho g / C)^2 - C^2 (1 + \sinh(t \rho g / C)^2) = \\ C^2 (\cosh(t \rho g / C)^2 - \sinh(t \rho g / C)^2 - 1) = 0 \end{aligned} \quad (5.29)$$

La forme optimale de la chaîne pesante est donc un cosinus hyperbolique, aussi appelé fonction chaînette!

Chapitre 6

Commande optimale

Contents

| | | |
|-------|--|----|
| 6.1 | Présentation du problème | 66 |
| 6.2 | Approche intuitive du contrôle optimal | 66 |
| 6.3 | Principe du minimum de Pontryagin | 69 |
| 6.3.1 | Enoncé du principe du minimum | 69 |

6.1 Présentation du problème

Un problème de contrôle optimal peut-être présenté depuis deux points de vue. Le premier point de vue est plutôt celui de *l'automatique*. Dans ce cas, il s'agit de piloter un système dynamique au travers d'une commande dans le but de minimiser un critère de fonctionnement. Ce critère se décompose comme la somme d'un terme qui dépend seulement du point d'arrivée et d'un terme qui dépend de la totalité de la trajectoire pour arriver au point final. Les outils mathématiques utilisés sont plutôt ceux de la géométrie différentielle. Les lecteurs intéressés pourront se référer à [9, 10]. L'autre point de vue est plutôt celui de *l'optimisation*. De ce point de vue, il s'agit d'un problème d'optimisation sous contraintes dans un espace fonctionnel. Les lecteurs intéressés par cette approche pourront se référer à [3, 5, 11]. C'est ce deuxième point de vue qui est adopté dans la suite de ce cours.

Problème 8: Problème de commande optimale

Un problème de contrôle optimal consiste à minimiser la fonctionnelle suivante :

$$\min_{(x,u) \in X \times U} J(x,u) := \int_0^T \ell(x_t, u_t) dt + \varphi(x_T) \quad (6.1)$$

sous les contraintes

$$\dot{x}_t = f(x_t, u_t) \quad (6.2a)$$

$$x_0 = x^0 \quad (6.2b)$$

$$\kappa(x_T) \leq 0 \quad (6.2c)$$

avec $\kappa : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^{n_\kappa}$ et où les espaces X et U sont les espaces normés suivants

$$X := W^{1,\infty}([0, T]; \mathbb{R}^n)$$

$$U := L^\infty([0, T]; U_{\text{ad}})$$

où $U_{\text{ad}} \subset \mathbb{R}^m$ est un ensemble fermé borné.

Pour résoudre ce problème, on suppose que la dynamique (6.2a) satisfait une propriété de Lipschitz-continuité énoncée ci-après.

Hypothèse 3: Lipschitz continuité

La dynamique $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^n$ de l'équation (6.2a) est globalement Lipschitz, i.e., $\exists K < +\infty$ tel que $\forall x_1, x_2, u_1, u_2$, on a

$$\|f(x_1, u_1) - f(x_2, u_2)\| \leq K (\|x_1 - x_2\| + \|u_1 - u_2\|) \quad (6.3)$$

6.2 Approche intuitive du contrôle optimal

Désormais, nous allons adopter une approche de dualité Lagrangienne pour avoir une première idée de la caractérisation des solutions optimales du problème de contrôle optimal. Ainsi, on définit le Lagrangien du problème de contrôle optimal comme suit

Définition 31: Lagrangien du problème de contrôle optimal

Le Lagrangien de notre problème s'écrit de la manière suivante

$$C^1 \times C^0 \times C^0 \times \mathbb{R}_+^{n_\kappa} \ni (x, u, p, \theta) \mapsto L(x, u, p, \theta) := J(x, u) + \int_0^T p_t^\top (f(x_t, u_t) - \dot{x}_t) dt + \theta^\top \kappa(x_T) \quad (6.4)$$

On notera que par rapport au problème 8, on impose que $x \in C^1$ au lieu de $W^{1,\infty}$ et que $u \in C^0$ au lieu de L^∞ . Nous allons donc, dans un premier temps, résoudre un problème plus régulier, et donc moins général.

Pour la suite du problème, nous allons introduire une fonction très utile en contrôle optimal : le pré-Hamiltonien.

Définition 32: pré-Hamiltonien

On appelle pré-Hamiltonien du problème de contrôle optimal 8 la fonction $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ définie comme suit

$$H(x_t, u_t, p_t) = \ell(x_t, u_t) + p_t^\top f(x_t, u_t) \quad (6.5)$$

Comme dans l'optimisation en dimension finie, le problème que l'on cherche à résoudre est le problème primal

$$\min_{(x,u) \in X \times U} \sup_{(p,\theta) \in X \times \mathbb{R}_+^{n_\kappa}} L(x, u, p, \theta) \quad (6.6)$$

Mais, là encore, nous allons nous intéresser au problème dual

$$\sup_{(p,\theta) \in X \times \mathbb{R}_+^{n_\kappa}} \min_{(x,u) \in X \times U} L(x, u, p, \theta) \quad (6.7)$$

Proposition 6: Solution du problème dual

Soit $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{p}, \bar{\theta})$ une solution du problème dual (6.7), alors ce point est solution du problème au deux bouts suivants

$$\dot{\bar{x}}_t = f(\bar{x}_t, \bar{u}_t) \quad (6.8a)$$

$$\bar{x}(0) = x^0 \quad (6.8b)$$

$$\dot{\bar{p}}_t = -H'_x(\bar{x}_t, \bar{u}_t, \bar{p}_t) \quad (6.8c)$$

$$\bar{p}_T = \varphi'(\bar{x}_T) + \kappa'(\bar{x}_T)^\top \bar{\theta} \quad (6.8d)$$

$$0 = \bar{\theta}^\top \kappa(x_T) \quad (6.8e)$$

$$H(\bar{x}_t, \bar{u}_t, \bar{p}_t) = \inf_{v \in U_{ad}} H(\bar{x}_t, v, \bar{p}_t) \quad (6.8f)$$

DÉMONSTRATION. Tout d'abord, la minimisation en x est une minimisation sans contraintes. Alors, la condition nécessaire d'optimalité en x s'écrit

$$DL(\bar{x}, \bar{u}, \bar{p}; \bar{\theta}; z, 0, 0, 0) = 0, \forall z \in X \quad (6.9)$$

Calculons désormais $DL(\bar{x}, \bar{u}, \bar{p}, \bar{\theta}; z, 0, 0, 0)$

$$DL(\bar{x}, \bar{u}, \bar{p}, \bar{\theta}; z, 0, 0, 0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{d}{d\varepsilon} L(\bar{x} + \varepsilon z, \bar{u}, \bar{p}, \bar{\theta}) \quad (6.10)$$

$$DL(\bar{x}, \bar{u}, \bar{p}, \bar{\theta}; z, 0, 0, 0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_0^T \frac{d}{d\varepsilon} [\ell(\bar{x}_t + \varepsilon z_t, \bar{u}_t) + \bar{p}_t^\top (f(\bar{x}_t + \varepsilon z_t, \bar{u}_t) - \dot{\bar{x}}_t - \varepsilon \dot{z}_t)] dt + \frac{d}{d\varepsilon} (\varphi(\bar{x}_T + \varepsilon z_T) + \bar{\theta}^\top \kappa(\bar{x}_T + \varepsilon z_T)) \right] \quad (6.11)$$

$$= \int_0^T (\ell'_x(\bar{x}_t, \bar{u}_t) + f'_x(\bar{x}_t, \bar{u}_t)^\top \bar{p}_t)^\top z_t - \bar{p}_t^\top \dot{z}_t dt + (\varphi'(\bar{x}_T)^\top + \kappa'(\bar{x}_T)^\top \bar{\theta})^\top z_T \quad (6.12)$$

$$= \int_0^T (\ell'_x(\bar{x}_t, \bar{u}_t) + f'_x(\bar{x}_t, \bar{u}_t)^\top \bar{p}_t + \dot{\bar{p}}_t)^\top z_t dt - [\bar{p}_t^\top z_t]_0^T + (\varphi'(\bar{x}_T)^\top + \kappa'(\bar{x}_T)^\top \bar{\theta})^\top z_T \quad (6.13)$$

$$= \int_0^T (H'_x(\bar{x}_t, \bar{u}_t, \bar{p}_t) + \dot{\bar{p}}_t)^\top z_t dt + \bar{p}_0^\top z_0 + (\varphi'(\bar{x}_T) + \kappa'(\bar{x}_T)^\top \bar{\theta} - \bar{p}_T)^\top z_T \quad (6.14)$$

Tout d'abord, $z_0 = 0$, par ailleurs, $DL(\bar{x}, \bar{u}, \bar{p}, \bar{\theta}; z, 0, 0, 0) = 0$ doit être vrai pour tout $z \in C^0$, en particulier pour tout z tel que $z_0 = z_T = 0$, alors en utilisant le corollaire 1, on a nécessairement $\dot{\bar{p}}_t = -H'_x(\bar{x}_t, \bar{u}_t, \bar{p}_t)$, par ailleurs, si $z_T \neq 0$, on a en plus $\bar{p}_T = \varphi'(\bar{x}_T) + \kappa'(\bar{x}_T)^\top \bar{\theta}$. En rassemblant ces deux égalités on obtient

$$DL(\bar{x}, \bar{u}, \bar{p}, \bar{\theta}; z, 0, 0, 0) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \dot{\bar{p}}_t &= -H'_x(\bar{x}_t, \bar{u}_t, \bar{p}_t) \\ \bar{p}_T &= \varphi'(\bar{x}_T) + \kappa'(\bar{x}_T)^\top \bar{\theta} \end{cases} \quad (6.15)$$

Ce qui prouve (6.8c) et (6.8d).

Désormais, nous allons minimiser le Lagrangien par rapport à u . A ce stade les choses se compliquent car à chaque instant $u(t) \in U_{ad}$, un ensemble fermé borné. Il y a donc des contraintes sur la commande et la condition nécessaire d'optimalité n'est pas une condition du type $DL = 0$. Toutefois, on a

$$L(\bar{x}, \bar{u}, \bar{p}, \bar{\theta}) - L(\bar{x}, u, \bar{p}, \bar{\theta}) \leq 0 \quad (6.16)$$

$$\int_0^T (H(\bar{x}_t, \bar{u}_t, \bar{p}_t) - H(\bar{x}_t, u_t, \bar{p}_t) + \bar{p}_t^\top \dot{\bar{x}}_t - \bar{p}_t^\top \dot{x}_t) dt + \varphi(\bar{x}_T) - \varphi(x_T) + \bar{\theta}^\top \kappa(\bar{x}_T) - \bar{\theta}^\top \kappa(x_T) \leq 0 \quad (6.17)$$

$$\int_0^T H(\bar{x}_t, \bar{u}_t, \bar{p}_t) - H(\bar{x}_t, u_t, \bar{p}_t) dt \leq 0 \quad (6.18)$$

Cette dernière condition peut se réécrire

$$H(\bar{x}_t, \bar{u}_t, \bar{p}_t) = \inf_{v \in U_{ad}} H(\bar{x}_t, v, \bar{p}_t) \quad (6.19)$$

bien qu'intuitif, le passage de (6.18) à (6.19) n'est en réalité pas immédiat et la preuve est faite dans [5].

Désormais, maximisons le Lagrangien par rapport à p . La maximisation se faisant sans contraintes, la condition nécessaire d'optimalité s'écrit

$$DL(\bar{x}, \bar{u}, \bar{p}, \bar{\theta}; 0; 0, q, 0) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{d}{d\varepsilon} L(\bar{x}, \bar{u}, \bar{p} + \varepsilon q, \bar{\theta}) = \int_0^T q_t^\top (f(\bar{x}_t, \bar{u}_t) - \dot{\bar{x}}_t) dt \quad \forall q \in C^0$$

Ce qui redonne la contrainte

$$\dot{\bar{x}}_t = f(\bar{x}_t, \bar{u}_t) \quad (6.20)$$

et prouve (6.8a). Désormais, la condition de maximisation en $\bar{\mu}$ s'écrit

$$L(\bar{x}, \bar{u}, \bar{p}, \theta) - L(\bar{x}, u, \bar{p}, \bar{\theta}) \leq 0 \quad (6.21)$$

$$(\theta - \bar{\theta})^\top \kappa(\bar{x}_T) \leq 0 \quad (6.22)$$

En posant $\theta = 0 \in \mathbb{R}_+^{n_\kappa}$ et $\theta = 2\bar{\theta} \in \mathbb{R}_+^{n_\kappa}$ dans (6.22), on obtient $\bar{\theta}^\top \kappa(\bar{x}_T) = 0$ ce qui prouve (6.8e) et conclut la preuve. \square

A ce stade, nous ne pouvons pas conclure sur l'optimalité de la solution du problème dual. En effet, cela nécessiterait des propriétés de convexité en (x, u) qui n'ont pas de raison d'être satisfaites dans le cas général. Néanmoins, nous allons voir dans la prochaine section que tout minimum local du problème de contrôle optimal satisfait les conditions d'optimalité du problème dual (6.8).

6.3 Principe du minimum de Pontryagin

6.3.1 Énoncé du principe du minimum

Désormais, nous allons donner des conditions nécessaires d'optimalité connues sous le nom de principe du minimum de Pontryagin. Ce résultat montre que les solutions du problème dual présentées en proposition 6 sont en fait des conditions nécessaires d'optimalité locale.

Théorème 16: Principe du minimum de Pontryagin

Soit $(\bar{x}, \bar{u}) \in X \times U$ une solution du problème 8, alors $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{p}, \bar{\theta})$ est une extrémale de Pontryagin, c'est-à-dire une solution de

$$\dot{\bar{x}}_t = f(\bar{x}_t, \bar{u}_t) \quad (6.23a)$$

$$\bar{x}(0) = x^0 \quad (6.23b)$$

$$\dot{\bar{p}}_t = -H'_x(\bar{x}_t, \bar{u}_t, \bar{p}_t) \quad (6.23c)$$

$$\bar{p}_T = \varphi'(\bar{x}_T) + \kappa(\bar{x}_T)^\top \bar{\theta} \quad (6.23d)$$

$$0 = \bar{\theta}^\top \kappa(\bar{x}_T) \quad (6.23e)$$

$$H(\bar{x}_t, \bar{u}_t, \bar{p}_t) = \inf_{u \in U_{\text{ad}}} H(\bar{x}_t, u, \bar{p}_t), \quad \forall t \in [0, T] \quad (6.23f)$$

où H est le pré-Hamiltonien du problème présenté dans la définition 32.

DÉMONSTRATION. La preuve de ce résultat dépasse le cadre de ce cours, la preuve complète est donnée dans [5]. \square

Chapitre 7

Commande optimale sous contraintes

Contents

| | | |
|-----|---|----|
| 7.1 | Présentation du problème | 72 |
| 7.2 | Méthodes de points-intérieurs en contrôle optimal | 73 |

7.1 Présentation du problème

Dans cette partie, nous allons nous intéresser au problème de commande optimale suivant

Problème 9: Problème de commande optimale sous contraintes

On cherche à résoudre

$$\min_{(u,x) \in \mathbf{U} \times \mathbf{X}} J(x, u) := \varphi(x_T) + \int_0^T \ell(x_t, u_t) dt \quad (7.1a)$$

$$\dot{x}_t = f(x_t, u_t) \quad (7.1b)$$

$$0 \geq g(x_t), \quad \forall t \quad (7.1c)$$

$$0 \geq c(x_t, u_t), \quad \text{p.p.} \quad (7.1d)$$

$$0 = h(x_0, x_T) \quad (7.1e)$$

$$0 \geq \kappa(x_T) \quad (7.1f)$$

$$\mathbf{U} := L^\infty([0, T]; \mathbb{R}^m) \quad (7.1g)$$

$$\mathbf{X} := W^{1,\infty}([0, T]; \mathbb{R}^n) \quad (7.1h)$$

Où les fonctions $\ell : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^n$, $g : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^{n_g}$, $c : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^{n_c}$, $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^{n_h}$ et $\kappa : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^{n_\kappa}$ sont au moins deux fois différentiables.

La nouveauté par rapport au problème 8 est l'introduction de contraintes d'état pures (7.1c), de contraintes mixtes-état commande (7.1d) et de contraintes initiales-finales (7.1e). Désormais, nous sommes prêts à définir un point stationnaire d'un tel problème de contrôle optimal

Définition 33: Point stationnaire

On appelle point stationnaire de (7.1) toute trajectoire (\bar{x}, \bar{u}) et ses multiplicateurs associés $(\bar{p}, \bar{\mu}, \bar{\nu}, \bar{\lambda}, \bar{\theta}) \in \text{BV}([0, T]; \mathbb{R})^n \times \text{BV}([0, T])^{n_g} \times L^\infty([0, T]; \mathbb{R}_+^{n_c}) \times \mathbb{R}^{n_h} \times \mathbb{R}^{n_\kappa}$ solution de

$$\dot{\bar{x}}_t = f(\bar{x}_t, \bar{u}_t) \quad (7.2a)$$

$$-d\bar{p}_t = \left[H'_x(\bar{x}_t, \bar{u}_t, \bar{p}_t) + \sum_{i=1}^{n_c} c'_{i,x}(\bar{x}_t, \bar{u}_t) \bar{\nu}_{i,t} \right] dt + \sum_{i=1}^{n_g} g'_i(\bar{x}_t) d\bar{\mu}_{i,t} \quad (7.2b)$$

$$0 = H'_u(\bar{x}_t, \bar{u}_t, \bar{p}_t) + \sum_{i=1}^{n_c} c'_{i,u}(\bar{x}_t, \bar{u}_t) \bar{\nu}_{i,t} \quad (7.2c)$$

$$0 = h(\bar{x}_0, \bar{x}_T) \quad (7.2d)$$

$$0 \geq \kappa(\bar{x}_T) \quad (7.2e)$$

$$0 = \bar{p}_0 + h'_{x_0}(\bar{x}_0, \bar{x}_T)^\top \bar{\lambda} \quad (7.2f)$$

$$0 = \bar{p}_T - \varphi'(\bar{x}_T) - h'_{x_T}(\bar{x}_0, \bar{x}_T)^\top \bar{\lambda} - \kappa'(\bar{x}_T)^\top \bar{\theta} \quad (7.2g)$$

$$0 = \bar{\theta}^\top \kappa(\bar{x}_T) \quad (7.2h)$$

$$0 = \int_0^T g_i(\bar{x}_t) d\bar{\mu}_{i,t}, \quad i = 1, \dots, n_g \quad (7.2i)$$

$$0 = \int_0^T c_i(\bar{x}_t, \bar{u}_t) \bar{\nu}_{i,t} dt, \quad i = 1, \dots, n_c \quad (7.2j)$$

$$0 \leq d\bar{\mu}_{i,t}(t), \quad i = 1, \dots, n_g \quad (7.2k)$$

$$0 \leq \bar{\nu}_{i,t}, \quad i = 1, \dots, n_c \quad (7.2l)$$

$$0 = \bar{\mu}_{i,T}, \quad i = 1, \dots, n_g \quad (7.2m)$$

$$0 \geq \theta_i, \quad i = 1, \dots, n_\kappa \quad (7.2n)$$

Le principe du minimum de Pontryagin pour les problèmes avec contraintes d'état est donné dans le résultat suivant

Théorème 17

Toute solution (\bar{x}, \bar{u}) du problème (7.1) est un point stationnaire de ce problème.

La preuve de ce résultat dépasse le cadre de ce cours. Les lecteurs et lectrices intéressés pourront, par exemple, se référer à [5, 11-13] pour des versions différentes de ce résultat.

7.2 Méthodes de points-intérieurs en contrôle optimal

Pour résoudre le problème (7.1), on peut utiliser une méthode de points-intérieurs basées sur des pénalités logarithmiques définies comme suit

Définition 34: Pénalité logarithmique

La pénalité logarithmique notée $\psi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ est définie comme suit

$$\psi(x) := \begin{cases} -\log(-x) & \forall x < 0 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (7.3)$$

Les méthodes de points-intérieurs en contrôle optimal, à l'instar des méthodes en dimension finie, consistent à *ajouter* des pénalités logarithmiques au coût initial et à relaxer les contraintes inégalités. Ainsi, le problème de contrôle optimal pénalisé s'écrit comme suit

$$\min_{(x,u) \in X \times U} J_\varepsilon(x, u) := J(x, u) + \varepsilon \int_0^T \left[\sum_{i=1}^{n_g} \psi \circ g_i(x(t)) + \sum_{i=1}^{n_c} \psi \circ c_i(x(t), u(t)) \right] dt \quad (7.4a)$$

$$+ \varepsilon \sum_{i=1}^{n_\kappa} \psi \circ \kappa_i(x(T))$$

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \quad (7.4b)$$

$$0 = h(x(0), x(T)) \quad (7.4c)$$

Le pré-Hamiltonien de ce problème pénalisé est défini comme suit.

Définition 35: Pré-Hamiltonien pénalisé

Le pré-Hamiltonien du problème pénalisé $H^\psi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ du problème (7.4) est défini comme suit

$$H^\psi(x, u, p, \varepsilon) := H(x, u, p) + \varepsilon \left(\sum_{i=1}^{n_g} \psi \circ g_i(x) + \sum_{i=1}^{n_c} \psi \circ c_i(x, u) \right) \quad (7.5)$$

Une fois les contraintes inégalités relaxées les solutions optimales du problème pénalisé sont des points stationnaires de problème de contrôle optimal.

Définition 36: Point stationnaire pénalisé

La trajectoire $(\bar{x}^\varepsilon, \bar{u}^\varepsilon)$ et les multiplicateurs associés $(\bar{p}^\varepsilon, \bar{\lambda}^\varepsilon) \in W^{1,1}([0, T]; \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^{n_h}$, est un point stationnaire du problème (7.4) si elle est solution de

$$\dot{\bar{x}}_t^\varepsilon = f(\bar{x}_t^\varepsilon, \bar{u}_t^\varepsilon) \quad (7.6a)$$

$$\dot{\bar{p}}_t^\varepsilon = -H_x^{\psi'}(\bar{x}_t^\varepsilon, \bar{u}_t^\varepsilon, \bar{p}_t^\varepsilon, \varepsilon) \quad (7.6b)$$

$$0 = H_u^{\psi'}(\bar{x}_t^\varepsilon, \bar{u}_t^\varepsilon, \bar{p}_t^\varepsilon, \varepsilon) \quad (7.6c)$$

$$0 = h(\bar{x}_0^\varepsilon, \bar{x}_T^\varepsilon) \quad (7.6d)$$

$$0 = \bar{p}_0^\varepsilon + h'_{x_0}(\bar{x}_0^\varepsilon, \bar{x}_T^\varepsilon)^\top \bar{\lambda}^\varepsilon \quad (7.6e)$$

$$0 = \bar{p}_T^\varepsilon - \varphi'(\bar{x}_T^\varepsilon) - h'_{x_T}(\bar{x}_0^\varepsilon, \bar{x}_T^\varepsilon)^\top \bar{\lambda}^\varepsilon - \varepsilon \sum_{i=1}^{n_\kappa} \psi' \circ \kappa_i(\bar{x}_T^\varepsilon) \kappa'_i(\bar{x}_T^\varepsilon) \quad (7.6f)$$

Le principal résultat de convergence des méthodes de points-intérieurs en contrôle optimal est donné ci-après. La preuve de ce résultat dépasse le cadre de ce cours. Les lecteurs intéressés pourront se référer à [14, 15] pour la preuve de ce résultat.

Théorème 18: Points intérieurs en commande optimale

Soit (ε_n) une suite de paramètres positifs satisfaisant $\varepsilon_n \rightarrow 0$. La suite associée de points stationnaires pénalisés $(\bar{x}_{\varepsilon_n}, \bar{u}_{\varepsilon_n}, \bar{p}_{\varepsilon_n}, \bar{\lambda}_{\varepsilon_n})_n$ comme défini par la définition 36 contient une sous-suite convergent vers $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{p}, \bar{\mu}, \bar{\nu}, \bar{\lambda}, \bar{\theta})$ point stationnaire du problème (7.1) comme défini en définition 33. La convergence est comme suit

$$\|\bar{u}^{\varepsilon_{n_k}} - \bar{u}\|_{L^1} \rightarrow 0 \quad (7.7a)$$

$$\|\bar{x}^{\varepsilon_{n_k}} - \bar{x}\|_{L^\infty} \rightarrow 0 \quad (7.7b)$$

$$\|\bar{p}^{\varepsilon_{n_k}} - \bar{p}\|_{L^1} \rightarrow 0 \quad (7.7c)$$

$$\|\bar{\lambda}_{\varepsilon_{n_k}} - \bar{\lambda}\| \rightarrow 0 \quad (7.7d)$$

$$\|\varepsilon_{n_k} \psi' \circ \kappa(\bar{x}^{\varepsilon_{n_k}}(T)) - \bar{\theta}\| \rightarrow 0 \quad (7.7e)$$

$$\|\varepsilon_{n_k} \psi' \circ c(\bar{x}^{\varepsilon_{n_k}}, \bar{u}^{\varepsilon_{n_k}}) - \bar{\nu}\|_{L^1} \rightarrow 0 \quad (7.7f)$$

$$\int_0^T \phi(t) (\varepsilon_{n_k} \psi' \circ g(\bar{x}_t^{\varepsilon_{n_k}}) dt - d\bar{\mu}_t) \rightarrow 0, \forall \phi \in C^0 \quad (7.7g)$$

Par ailleurs, les méthodes de résolution primales-duales présentées en section 4.3.2.3 peuvent elles-aussi être adaptées au cadre des méthodes de points intérieurs en contrôle optimal. C'est l'objet du théorème suivant dont la preuve se trouve aussi dans [15].

Théorème 19: Méthodes primales-duales en commande optimale

Soit (ε_n) une suite de paramètres positifs satisfaisant $\varepsilon_n \rightarrow 0$ et soit

$$(\bar{x}^{\varepsilon_n}, \bar{u}^{\varepsilon_n}, \bar{p}^{\varepsilon_n}, \bar{\mu}^{\varepsilon_n}, \bar{\nu}^{\varepsilon_n}, \bar{\lambda}^{\varepsilon_n}, \bar{\theta}^{\varepsilon_n})_n \in W^{1,\infty}([0, T]; \mathbb{R}^n) \times U \times W^{1,1}([0, T]; \mathbb{R}^n) \times L^1([0, T]; \mathbb{R}_+^{n_g}) \times L^\infty([0, T]; \mathbb{R}_+^{n_c}) \times \mathbb{R}^{n_h} \times \mathbb{R}_+^{n_\kappa} \quad (7.8)$$

une solution du problème primal-dual suivant

$$\dot{x}_t^{\varepsilon_n} = f(\bar{x}_t^{\varepsilon_n}, \bar{u}_t^{\varepsilon_n}) \quad (7.9a)$$

$$\dot{p}_t^{\varepsilon_n} = -H'_x(\bar{x}_t^{\varepsilon_n}, \bar{u}_t^{\varepsilon_n}, \bar{p}_t^{\varepsilon_n}) - \sum_{i=1}^{n_g} g'_i(\bar{x}_t^{\varepsilon_n}) \bar{\mu}_{i,t}^{\varepsilon_n} - \sum_{i=1}^{n_c} c'_{i,x}(\bar{x}_t^{\varepsilon_n}, \bar{u}_t^{\varepsilon_n}) \bar{\nu}_{i,t}^{\varepsilon_n} \quad (7.9b)$$

$$0 = H'_u(\bar{x}_t^{\varepsilon_n}, \bar{u}_t^{\varepsilon_n}, \bar{p}_t^{\varepsilon_n}) + \sum_{i=1}^{n_c} c'_{i,u}(\bar{x}_t^{\varepsilon_n}, \bar{u}_t^{\varepsilon_n}) \bar{\nu}_{i,t}^{\varepsilon_n} \quad (7.9c)$$

$$0 = \bar{\mu}_{i,t}^{\varepsilon_n} - g_i(\bar{x}_t^{\varepsilon_n}) - \sqrt{(\bar{\mu}_{i,t}^{\varepsilon_n})^2 + g_i(\bar{x}_t^{\varepsilon_n})^2 + 2\varepsilon_n} \quad (7.9d)$$

$$0 = \bar{\nu}_{i,t}^{\varepsilon_n} - c_i(\bar{x}_t^{\varepsilon_n}, \bar{u}_t^{\varepsilon_n}) - \sqrt{(\bar{\nu}_{i,t}^{\varepsilon_n})^2 + c_i(\bar{x}_t^{\varepsilon_n}, \bar{u}_t^{\varepsilon_n})^2 + 2\varepsilon_n} \quad (7.9e)$$

$$0 = h(\bar{x}_0^{\varepsilon_n}, \bar{x}_T^{\varepsilon_n}) \quad (7.9f)$$

$$0 = \bar{p}_0^{\varepsilon_n} + h'_{x_0}(\bar{x}_0^{\varepsilon_n}, \bar{x}_T^{\varepsilon_n})^\top \cdot \bar{\lambda}^{\varepsilon_n} \quad (7.9g)$$

$$0 = \bar{p}_T^{\varepsilon_n} - \varphi'(\bar{x}_T^{\varepsilon_n}) - h'_{x_T}(\bar{x}_T^{\varepsilon_n}, \bar{x}_T^{\varepsilon_n})^\top \cdot \bar{\lambda}^{\varepsilon_n} - \kappa'(\bar{x}_T^{\varepsilon_n})^\top \bar{\theta}^{\varepsilon_n} \quad (7.9h)$$

$$0 = \bar{\theta}_i^{\varepsilon_n} - \kappa_i(\bar{x}_T^{\varepsilon_n}) - \sqrt{(\bar{\theta}_i^{\varepsilon_n})^2 + \kappa_i(\bar{x}_T^{\varepsilon_n})^2 + 2\varepsilon_n} \quad (7.9i)$$

Alors $(\bar{x}^{\varepsilon_n}, \bar{u}^{\varepsilon_n}, \bar{p}^{\varepsilon_n}, \bar{\mu}^{\varepsilon_n}, \bar{\nu}^{\varepsilon_n}, \bar{\lambda}^{\varepsilon_n}, \bar{\theta}^{\varepsilon_n})_n$ contient une sous-suite qui converge vers un point stationnaire du problème original (7.1) noté $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{p}, \bar{\mu}, \bar{\nu}, \bar{\lambda}, \bar{\theta})$ comme suit

$$\|\bar{u}^{\varepsilon_{n_k}} - \bar{u}\|_{L^1} \rightarrow 0 \quad (7.10a)$$

$$\|\bar{x}^{\varepsilon_{n_k}} - \bar{x}\|_{L^\infty} \rightarrow 0 \quad (7.10b)$$

$$\|\bar{\lambda}^{\varepsilon_{n_k}} - \bar{\lambda}\| \rightarrow 0 \quad (7.10c)$$

$$\|\bar{\theta}^{\varepsilon_{n_k}} - \bar{\theta}\| \rightarrow 0 \quad (7.10d)$$

$$\|\bar{p}^{\varepsilon_{n_k}} - \bar{p}\|_{L^1} \rightarrow 0 \quad (7.10e)$$

$$\|\bar{\nu}^{\varepsilon_n} - \bar{\nu}\|_{L^1} \rightarrow 0 \quad (7.10f)$$

$$\int_0^T \phi(t) (\bar{\mu}_t^{\varepsilon_n} dt - d\bar{\mu}_t) \rightarrow 0, \quad \forall \phi \in C^0 \quad (7.10g)$$

Finalement, en utilisant le théorème 19, nous sommes désormais en mesure d'écrire un algorithme primal-dual en contrôle optimal. Pour alléger l'écriture de l'algorithme, on note $S_{PD}(\varepsilon) := (\bar{x}^\varepsilon, \bar{u}^\varepsilon, \bar{p}^\varepsilon, \bar{\lambda}^{g,\varepsilon}, \bar{\lambda}^{c,\varepsilon}, \bar{\lambda}^\varepsilon, \bar{\theta}^\varepsilon)$ toute solution de (7.9), L'algorithme de résolution primal-dual est décrit dans l'algorithme 9.

Algorithm 9 Algorithme primal-dual en commande optimale

1: Définir $\varepsilon_0 > 0$, $\alpha \in (0, 1)$, $\text{tol} = o(1)$, $k = 0$
2: **while** $\varepsilon_k > \text{tol}$ **do**
3: $S_{PD}(\varepsilon_{k+1}) \leftarrow$ solution de (7.9) initialisé avec $S_{PD}(\varepsilon_k)$
4: $\varepsilon_{k+1} \leftarrow \alpha \varepsilon_k$
5: $k \leftarrow k + 1$
6: **end while**
7: **return** $S_{PD}(\varepsilon_k)$

Chapitre 8

Contrôle optimal en pratique

Contents

| | | |
|------------|--|-----------|
| 8.1 | Écriture des Équations Différentielles-Algébriques (DAEs) . . | 80 |
| 8.2 | Exemple : L'oscillateur de Van der Pol | 81 |
| 8.2.1 | Présentation du problème | 81 |
| 8.2.2 | Ecriture des DAEs | 82 |

8.1 Écriture des Équations Différentielles-Algébriques (DAEs)

Dans cette section, nous détaillons la *recette* générale pour résoudre un problème de commande optimale sous contraintes tel que défini dans le problème 9 en utilisant les méthodes primales-duales présentées en section 7.2. La résolution d'un tel problème passe par l'écriture de DAEs (Differential Algebraic Equations) avec conditions aux deux bouts et à leur résolution numérique à partir d'outils dédiés. Nous décrivons ci-dessous la démarche générale en six étapes permettant d'écrire les DAEs à résoudre pour calculer une solution optimale du problème 9.

Étape 1 Écriture de l'Hamiltonien augmenté $H^a(x, u, p, \mu, \nu)$

$$\begin{aligned} H^a(x, u, p, \mu, \nu) &:= \ell(x, u) + p^\top f(x, u) + \mu^\top g(x) + \nu^\top c(x, u) \\ &= \ell(x, u) + \sum_{i=1}^n p_i f_i(x, u) + \sum_{i=1}^{n_g} \mu_i g_i(x) + \sum_{i=1}^{n_c} \nu_i c_i(x, u) \end{aligned} \quad (8.1)$$

Étape 2 Écriture des équations différentielles

$$\begin{aligned} \dot{x}_t &= f(x_t, u_t) \rightarrow n \text{ eq. diff.} \\ \dot{p}_t &= -\frac{\partial}{\partial x} H^a(x_t, u_t, p_t, \mu_t, \nu_t) \\ &= -\frac{\partial \ell}{\partial x}(x_t, u_t) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_t, u_t)^\top p_t - \frac{\partial g}{\partial x}(x_t, u_t)^\top \mu_t - \frac{\partial c}{\partial x}(x_t, u_t)^\top \nu_t \\ &= -\frac{\partial \ell}{\partial x}(x_t, u_t) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x}(x_t, u_t) p_{i,t} - \sum_{i=1}^{n_g} \frac{\partial g_i}{\partial x}(x_t) \mu_{i,t} - \sum_{i=1}^{n_c} \frac{\partial c_i}{\partial x}(x_t, u_t) \nu_{i,t} \rightarrow n \text{ eq. diff.} \end{aligned}$$

Étape 3 Écriture des équations algébriques de stationnarité en u

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial H^a}{\partial u}(x_t, u_t, p_t, \mu_t, \nu_t) \\ &= \frac{\partial \ell}{\partial u}(x_t, u_t) + \frac{\partial f}{\partial u}(x_t, u_t)^\top p_t + \frac{\partial c}{\partial u}(x_t, u_t)^\top \nu_t \\ &= \frac{\partial \ell}{\partial u}(x_t, u_t) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial u}(x_t, u_t) p_{i,t} + \sum_{i=1}^{n_c} \frac{\partial c_i}{\partial u}(x_t, u_t) \nu_{i,t} \rightarrow m \text{ eq. alg.} \end{aligned}$$

Étape 4 Écriture des conditions de complémentarité

$$\begin{aligned} 0 &= \mu_t - g(x_t) - \sqrt{(\mu_t)^2 + g(x_t)^2 + 2\varepsilon} \rightarrow n_g \text{ eq. alg.} \\ 0 &= \nu_t - c(x_t, u_t) - \sqrt{(\nu_t)^2 + c(x_t, u_t)^2 + 2\varepsilon} \rightarrow n_c \text{ eq. alg.} \end{aligned}$$

Étape 5 Écriture des conditions initiales et finales

$$\left. \begin{aligned} h(x_0, x_T) &= 0 \\ p_0 + \frac{\partial h}{\partial x_0}(x_0, x_T)^\top \lambda &= 0 \\ p_T - \nabla \varphi(x_T) - \frac{\partial h}{\partial x_T}(x_0, x_T)^\top \lambda - \frac{\partial \kappa}{\partial x_T}(x_T)^\top \theta &= 0 \\ \theta - \kappa(x_T) - \sqrt{\theta^2 + \kappa(x_T)^2 + 2\varepsilon} &= 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow 2n + n_\kappa \text{ eq.}$$

Étape 6 Écriture des DAEs qui consistent à rassembler les équations différentielles, les conditions aux limites et les équations algébriques. Les équations différentielles sont donc

$$\dot{x}_t = f(x_t, u_t) \quad (8.2)$$

$$\dot{p}_t = -\frac{\partial \ell}{\partial x}(x_t, u_t) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x}(x_t, u_t) p_{i,t} - \sum_{i=1}^{n_g} \frac{\partial g_i}{\partial x}(x_t) \mu_{i,t} - \sum_{i=1}^{n_c} \frac{\partial c_i}{\partial x}(x_t, u_t) \nu_{i,t} \quad (8.3)$$

les conditions aux limites sont

$$0 = h(x_0, x_T) \quad (8.4)$$

$$0 = p_0 + \frac{\partial h}{\partial x_0}(x_0, x_T)^\top \lambda \quad (8.5)$$

$$0 = p_T - \nabla \varphi(x_T) - \frac{\partial h}{\partial x_T}(x_0, x_T)^\top \lambda - \frac{\partial \kappa}{\partial x_T}(x_T)^\top \theta \quad (8.6)$$

$$0 = \theta - \kappa(x_T) - \sqrt{\theta^2 + \kappa(x_T)^2 + 2\varepsilon} \quad (8.7)$$

et les équations algébriques sont

$$0 = \frac{\partial \ell}{\partial u}(x_t, u_t) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial u}(x_t, u_t) p_{i,t} + \sum_{i=1}^{n_c} \frac{\partial c_i}{\partial u}(x_t, u_t) \nu_{i,t}$$

$$0 = \mu_t - g(x_t) - \sqrt{(\mu_t)^2 + g(x_t)^2 + 2\varepsilon}$$

$$0 = \nu_t - c(x_t, u_t) - \sqrt{(\nu_t)^2 + c(x_t, u_t)^2 + 2\varepsilon}$$

8.2 Exemple : L'oscillateur de Van der Pol

8.2.1 Présentation du problème

Nous allons aborder la résolution numérique d'un problème de commande optimale sous contraintes au travers d'un célèbre exemple : le problème de Robbins. Ce problème est le suivant

$$\min_{x \in W^{1,\infty}, u \in L^\infty} J(x, u) = \int_0^4 x_1(t)^2 + x_2(t)^2 + u(t)^2 dt \quad (8.8)$$

avec la dynamique du système suivant

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \quad (8.9)$$

$$\dot{x}_2(t) = -x_1(t) + x_2(t)(1 - x_1(t)^2) + u(t) \quad (8.10)$$

les conditions aux bords suivantes

$$x_1(0) = 1 \quad (8.11)$$

$$x_2(0) = 1 \quad (8.12)$$

$$x_1(4)^2 + x_2(4)^2 = 0.04 \quad (8.13)$$

et les contraintes suivantes

$$-0.4 - x_2(t) \leq 0 \quad (8.14)$$

$$u(t) - 1 \leq 0 \quad (8.15)$$

$$-u(t) \leq 0 \quad (8.16)$$

8.2.2 Ecriture des DAEs

Etape 1 Pour former l'Hamiltonien augmenté, identifions les différents termes du problème

$$\begin{aligned} x &:= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ \ell(x, u) &:= x_1^2 + x_2^2 + u^2 \\ f(x, u) &:= \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 + x_2(1 - x_1^2) + u \end{pmatrix} \\ g(x) &:= -0.4 - x_2 \\ c(x, u) &:= \begin{pmatrix} u - 1 \\ -u \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Alors, l'Hamiltonien augmenté défini dans l'équation (8.1) s'écrit

$$\begin{aligned} H^a(x, u, p, \mu, \nu) &:= x_1^2 + x_2^2 + u^2 + p_1 x_2 + p_2 (-x_1 + x_2(1 - x_1^2) + u) \\ &\quad + \mu(-0.4 - x_1) + \nu_1(u - 1) - \nu_2 u \end{aligned}$$

Etape 2 Calculons les équations dynamiques de l'état adjoint

$$\dot{p}_1(t) = -\frac{\partial H^a}{\partial x_1} = -2x_1(t) + p_2(t)(1 + 2x_2(t)x_1(t)) \quad (8.17)$$

$$\dot{p}_2(t) = -\frac{\partial H^a}{\partial x_2} = -2x_2(t) - p_1(t) - p_2(t)(1 - x_1(t)^2) + \mu(t) \quad (8.18)$$

Etape 3 Calculons les équations de stationnarité en u

$$0 = \frac{\partial H^a}{\partial u} = 2u(t) + p_2(t) + \nu_1(t) - \nu_2(t) \quad (8.19)$$

Etape 4 Calculons les conditions de complémentarité

$$0 = \mu(t) + 0.4 + x_2(t) - \sqrt{\mu(t)^2 + (0.4 + x_2(t))^2 + 2\varepsilon} \quad (8.20)$$

$$0 = \nu_1(t) - u(t) + 1 - \sqrt{\nu_1(t)^2 + (u(t) - 1)^2 + 2\varepsilon} \quad (8.21)$$

$$0 = \nu_2(t) + u(t) - \sqrt{\nu_2(t)^2 + u(t)^2 + 2\varepsilon} \quad (8.22)$$

Etape 5 Calculons les conditions aux bords. Cette partie est la plus délicate car c'est la moins systématique. Tout d'abord, identifions la fonction h des conditions aux bords définies dans l'équation (7.1e). On a

$$h(x(0), x(4)) := \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_1(4)^2 + x_2(4)^2 - 0.04 \end{pmatrix}$$

On a alors

$$\frac{\partial h}{\partial x(0)}(x(0), x(4)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; \quad \frac{\partial h}{\partial x(4)}(x(0), x(4)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 2x_1(4) & 2x_2(4) \end{pmatrix}$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}^3$, la condition (7.9g) s'écrit

$$p(0) = \begin{pmatrix} p_1(0) \\ p_2(0) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Comme λ est complètement libre, cela implique que $p(0)$ est également libre, il n'y a donc pas de conditions initiales sur p . Par ailleurs, la condition (7.9h) s'écrit

$$\begin{pmatrix} p_1(4) \\ p_2(4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2x_1(4) \\ 0 & 0 & 2x_2(4) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = 2\lambda_3 \begin{pmatrix} x_1(4) \\ x_2(4) \end{pmatrix}$$

Soit

$$\begin{cases} 2\lambda_3 = \frac{p_1(4)}{x_1(4)} \\ p_2(4) = \frac{p_1(4)x_2(4)}{x_1(4)} \end{cases} \Rightarrow p_2(4)x_1(4) - p_1(4)x_2(4) = 0 \quad (8.23)$$

Finalement, les quatre conditions aux limites correspondant aux quatres équations différentielles sont

$$0 = x_1(0) - 1 \quad (8.24)$$

$$0 = x_2(0) - 1 \quad (8.25)$$

$$0 = x_1(4)^2 + x_2(4)^2 - 0.04 \quad (8.26)$$

$$0 = p_2(4)x_1(4) - p_1(4)x_2(4) \quad (8.27)$$

Etape 6 Nous pouvons maintenant écrire le système d'équations différentielles et algébriques avec conditions aux deux bords à résoudre. Les équations différentielles à résoudre sont les suivantes

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \quad (8.28)$$

$$\dot{x}_2(t) = -x_1(t) + x_2(t)(1 - x_1(t)^2) + u(t) \quad (8.29)$$

$$\dot{p}_1(t) = -2x_1(t) + p_2(t)(1 + 2x_2(t)x_1(t)) \quad (8.30)$$

$$\dot{p}_2(t) = -2x_2(t) - p_1(t) - p_2(t)(1 - x_1(t)^2) + \mu(t) \quad (8.31)$$

Les conditions aux bords de ces équations différentielles sont

$$0 = x_1(0) - 1 \quad (8.32)$$

$$0 = x_2(0) - 1 \quad (8.33)$$

$$0 = x_1(4)^2 + x_2(4)^2 - 0.04 \quad (8.34)$$

$$0 = p_2(4)x_1(4) - p_1(4)x_2(4) \quad (8.35)$$

Les équations algébriques du problème rassemblent les conditions de stationnarité en u de l'Etape 3 et les conditions de complémentarité de l'Etape 4 :

$$0 = 2u(t) + p_2(t) + \nu_1(t) - \nu_2(t) \quad (8.36)$$

$$0 = \mu(t) + 0.4 + x_2(t) - \sqrt{\mu(t)^2 + (0.4 + x_2(t))^2 + 2\varepsilon} \quad (8.37)$$

$$0 = \nu_1(t) - u(t) + 1 - \sqrt{\nu_1(t)^2 + (u(t) - 1)^2 + 2\varepsilon} \quad (8.38)$$

$$0 = \nu_2(t) + u(t) - \sqrt{\nu_2(t)^2 + u(t)^2 + 2\varepsilon} \quad (8.39)$$

Bibliographie

- [1] A.P. RUSZCZYŃSKI. *Nonlinear optimization*. Princeton University Press, 2006 (pages [3](#), [30](#), [33](#)).
- [2] J.F. BONNANS et A. SHAPIRO. *Perturbation analysis of optimization problems*. Springer, 2000 (page [3](#)).
- [3] F. CLARKE. *Functional analysis, calculus of variations and optimal control*. Springer, 2013 (pages [3](#), [59](#), [66](#)).
- [4] J. PEYPOUQUET. *Convex Optimization in Normed Spaces. Theory, Methods and Examples*. Springer, 2015 (page [3](#)).
- [5] J.F. BONNANS. *Course on optimal control of O.D.E.s : Part I : The Pontryagin approach*. Disponible [ici](#). 2021 (pages [3](#), [66](#), [68](#), [69](#), [73](#)).
- [6] A. KOLMOGOROV et S. FOMIN. *Éléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle*. Ellipses, 1998 (pages [3](#), [58](#)).
- [7] H. BRÉZIS. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Springer, 2010 (page [3](#)).
- [8] J.F. BONNANS, J.C. GILBERT, C. LEMARÉCHAL et C. SAGASTIZÁBAL. *Numerical optimization. Theoretical and practical aspects*. 2nd edition. Springer, 2006 (page [50](#)).
- [9] A. AGRACHEV et Y. SACHKOV. *Control theory from the geometric viewpoint*. Springer, 2004 (page [66](#)).
- [10] E. TRÉLAT. *Contrôle optimal : théorie et applications*. Disponible [ici](#). Vuibert, 2006 (page [66](#)).
- [11] R. VINTER. *Optimal control*. Birkhäuser Boston, 2010 (pages [66](#), [73](#)).
- [12] R.F. HARTL, S.P. SETHI, R.G. VICKSON. « A Survey of the maximum principles for optimal control problems with state constraints ». In : *SIAM Review* 37.2 (1995), p. 181-218 (page [73](#)).
- [13] A.E. BRYSON et Y.C. HO. *Applied optimal control*. Ginn et Company, 1969 (page [73](#)).
- [14] P. MALISANI. « Interior point methods in optimal control problems of affine systems : Convergence results and solving algorithms ». In : *SIAM Journal on Control and Optimization* 61.6 (2023) (page [75](#)).
- [15] P. MALISANI. « Interior Point Methods in Optimal Control ». In : *ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations* 30.59 (2024). DOI : [10.1051/cocv/2024049](#) (page [75](#)).