Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»

КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

ОТЧЕТ

к лабораторной работе №2

По курсу: «Моделирование»

Тема: ***«Марковские цепи»***

Студентка ИУ7-75Б
Чеклин П.Д

Преподаватель
Рудаков И.В.

Москва, 2020 г.

Оглавление

Теоретическая часть

Случайный процесс, протекающий в системе S, называется марковским, если он обладает следующим свойством: для каждого момента времени $t0$ вероятность любого состояния системы в будущем (при $t > t0$) зависит только от ее состояния в настоящем (при $t = t0$) и не зависит от того, когда и каким образом система пришла в это состояние. Вероятностью i-го состояния называется вероятность $pi(t)$ того, что в момент t система будет находиться в состоянии Si. Для любого момента t сумма вероятностей всех состояний равна единице.

Для решения поставленной задачи, необходимо составить систему уравнений Колмогорова по следующим принципам: в левой части каждого из уравнений стоит производная вероятности i-го состояния; в правой части — сумма произведений вероятностей всех состояний (из которых идут стрелки в данное состояние), умноженная на интенсивности соответствующих потоков событий, минус суммарная интенсивность всех потоков, выводящих систему из данного состояния, умноженная на вероятность данного (i-го состояния).

Пример

Система имеет 3 состояния с матрицей интенсивностей, описанной в табл. 1.

Таблица 1 – матрица интенсивностей

0	λ_{01}	λ_{02}
λ_{10}	0	λ_{12}
λ_{20}	λ_{21}	0

$$\begin{cases} p_0' = -\left(\lambda_{01} + \lambda_{02}\right)p_0 + \lambda_{10}p_1 + \lambda_{20}p_2 \\ p_1' = -\left(\lambda_{10} + \lambda_{12}\right)p_1 + \lambda_{01}p_0 + \lambda_{21}p_2 \\ p_2' = -\left(\lambda_{20} + \lambda_{21}\right)p_2 + \lambda_{02}p_0 + \lambda_{12}p_1 \end{cases}$$

(1)

Для получения предельных вероятностей, то есть вероятностей в стационарном режиме работы при $t \to \infty$, необходимо приравнять левые части уравнений к нулю. Таким образом получается система линейных уравнений. Для решения полученной системы необходимо добавить условие нормировки ($p0 + p1 + p2 = 1$).

После того, как предельные вероятности будут найдены, необходимо найти время. Для этого необходимо с интервалом Δt находить каждую вероятность в момент времени $\Delta t + t$. Когда найденная вероятность будет равна соответствующей финальной с точностью до заданной погрешности, тогда можно завершить вычисления. На каждом шаге необходимо вычислять приращения для каждой вероятности (как функции):

$$dp_0 = \frac{-\left(\lambda_{01} + \lambda_{02}\right)p_0 + \lambda_{10}p_1 + \lambda_{20}p_2}{\Delta t}.$$

Начальные значения для dp задаются. Можно взять, например, $\frac{1}{n}$, где n – количество состояний системы.

Результаты

Пример 1

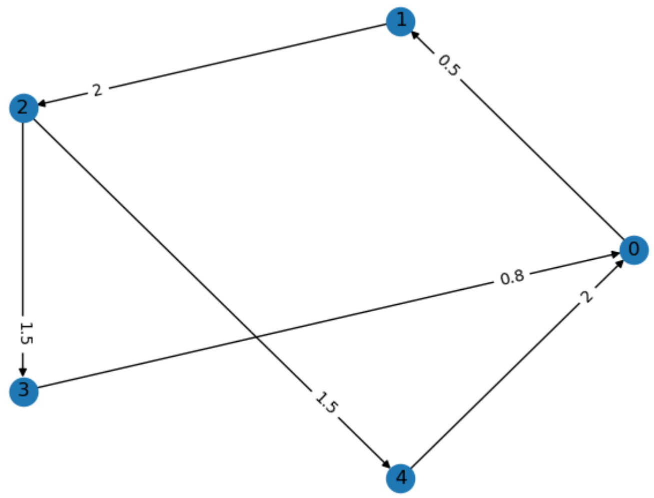

Рис 1 – граф связей и интенсивностей системы примера 1

Предельные вероятности:

p0	p1	p2	p3	p4
0.53933	0.13483	0.08989	0.16854	0.06742

Время стабилизации:

t0	t1	t2	t3	t4
1.935	2.67	0.896	3.707	1.603

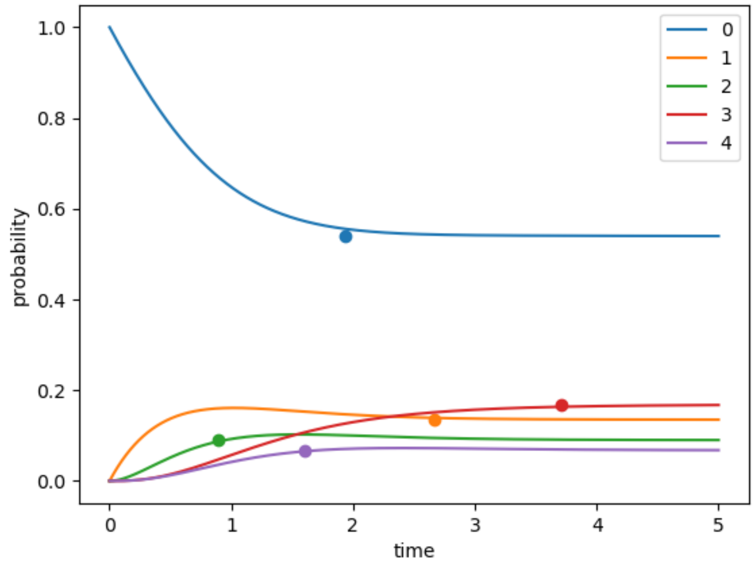

Рис 2 – графики вероятностей состояний как функции времени

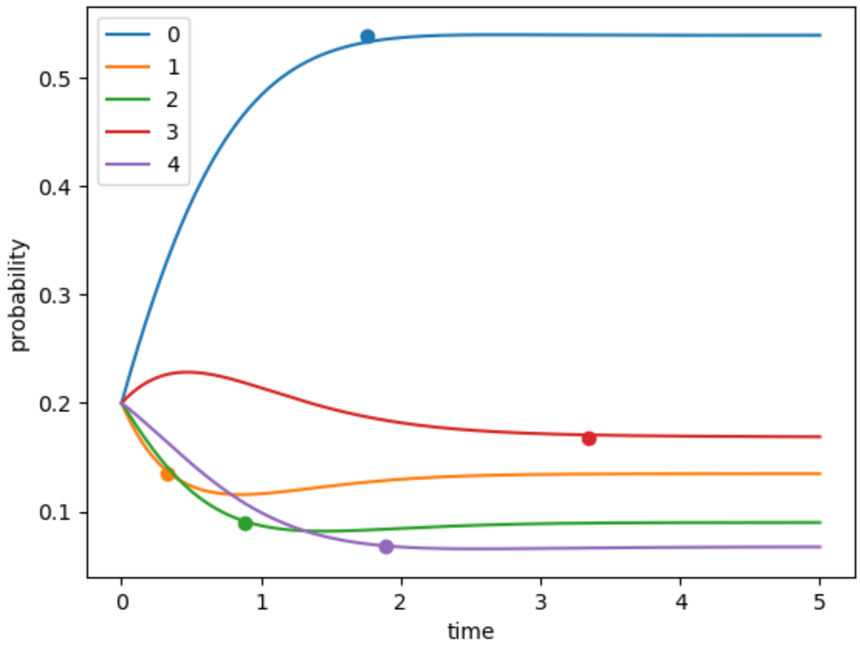

Рис 3 – графики вероятностей состояний как функции времени, при начальных условиях = 1/5

Пример 2

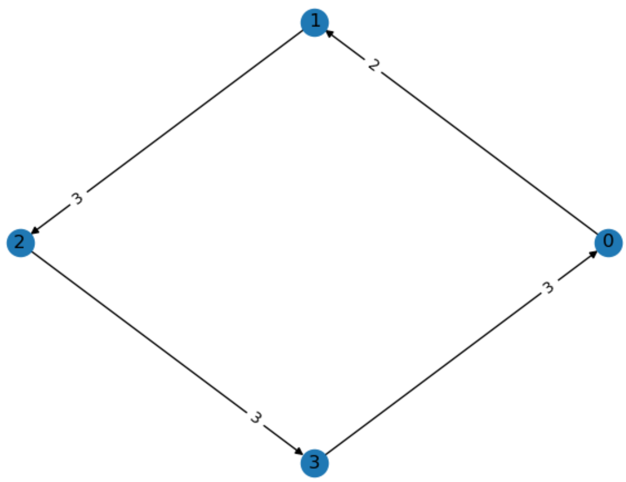

Рис 4 – граф связей и интенсивностей системы примера 2

Предельные вероятности:

p0	p1	p2	p3
0.33333	0.22222	0.22222	0.22222

Время стабилизации:

t0	t1	t2	t3
1.855	1.235	1.79	1.179

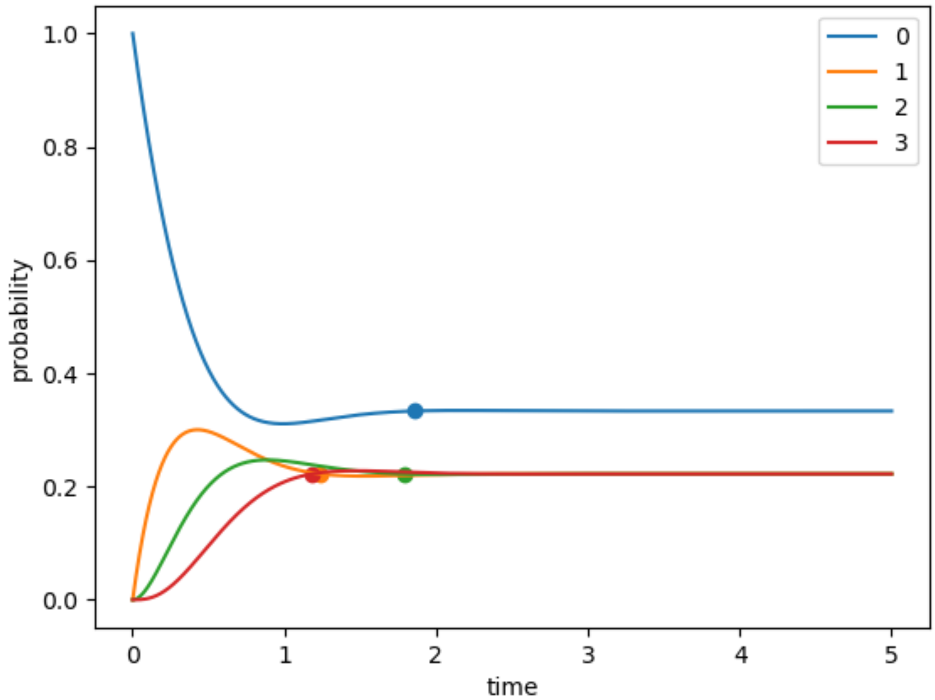

Рис 5 – графики вероятностей состояний как функции времени

Пример 3: случайное заполнение

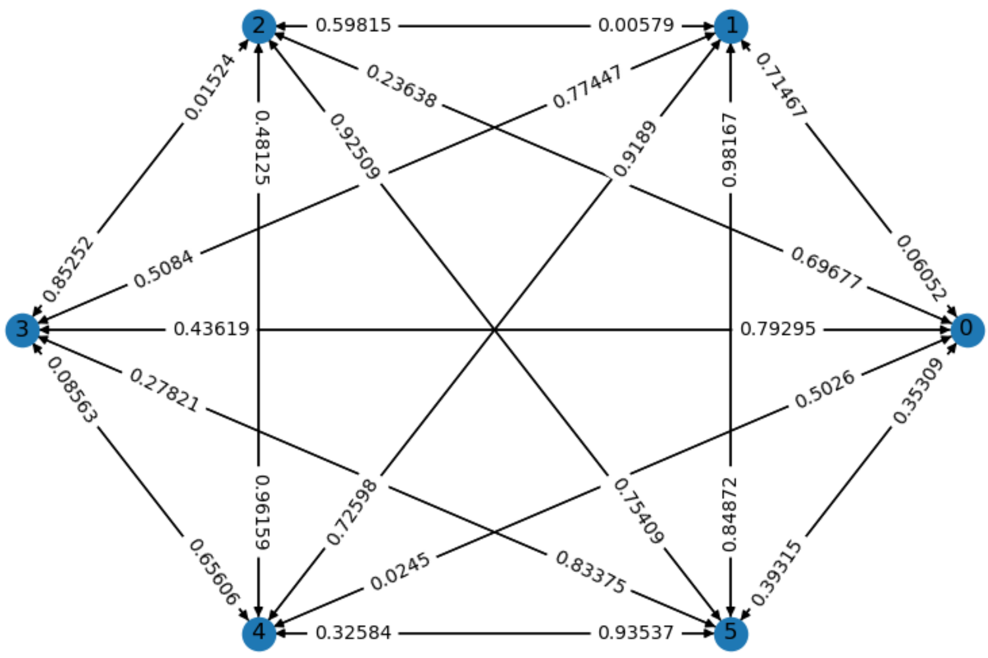

Рис 6 – граф связей и интенсивностей системы примера 3

Предельные вероятности:

p0	p1	p2	p3	p4	p5
0.19123	0.20632	0.13148	0.12037	0.1459	0.20471

Время стабилизации:

t0	t1	t2	t3	t4	t5
0.643	1.056	0.644	1.141	1.074	0.867

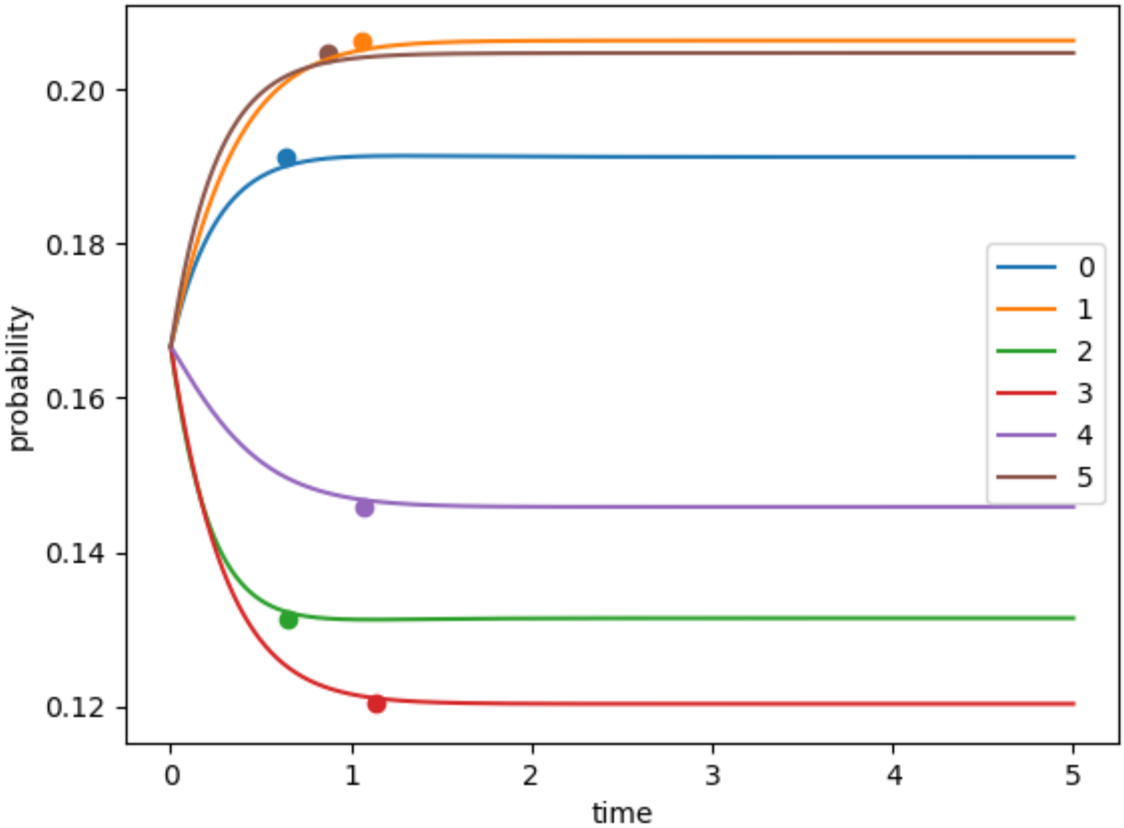

Рис 7 – графики вероятностей состояний как функции времени, при начальных условиях = 1/6