
***TEORIA DE
CONTROLE***
UMA ABORDAGEM DE APLICAÇÃO

Nelson Luis Cappelli
Claudio Kiyoshi Umezu

PREFÁCIO

Os sistemas de controle estão cada vez mais presentes nos equipamentos e máquinas modernas, já fazem parte de nosso cotidiano a ponto de nos beneficiarmos sem ao menos percebermos sua presença (atuação).

Os cursos de engenharia têm, em suas matrizes de curriculares, disciplinas nas áreas de modelagem matemática de sistemas dinâmicos, teoria de controle, automação e outras que buscam formar recursos humanos qualificados para atuarem no projeto e desenvolvimento de sistemas de controle de equipamentos e processos em geral.

No entanto, na maioria das vezes, os estudantes têm dificuldade em assimilar os conteúdos face à aridez – para a maioria dos alunos – da matéria e à maneira com que são abordados os assuntos, em muitos casos apenas de forma teórica, sem a fixação prática dos conhecimentos.

Procurando corrigir as deficiências no aprendizado e fixação dos conhecimentos adquiridos, este livro adota a via prática, utilizando bancadas experimentais com as quais os alunos podem entender melhor a aplicação dos conhecimentos teóricos.

Este texto não tem a mínima pretensão de substituir as obras clássicas sobre os assuntos abordados, mas sim, procura auxiliar os estudantes de graduação em engenharia, bem como nas primeiras fases do estudo no âmbito da pós-graduação, a entender um pouco melhor os problemas relacionados com o projeto e a implementação dos sistemas de controle. Na verdade, não dispensa de forma alguma as publicações de renome na área.

O Capítulo 1 apresenta, resumidamente, uma base conceitual onde são abordados o ciclo de projeto, a modelagem e a identificação de sistemas dinâmicos, a análise do comportamento dos sistemas dinâmicos no domínio do tempo e da frequência, os controladores liga-desliga e PID e alguns métodos de sintonia. Neste capítulo, buscou-se apenas uma síntese dos conhecimentos necessários para o início dos estudos na área dos sistemas de controle, necessitando ser complementado com consultas a outras publicações técnicas.

O Capítulo 2 trata do projeto e implantação de um sistema de controle de nível. Neste capítulo, o sistema estudado é de primeira ordem com atraso muito pequeno em relação à constante de tempo. O sistema foi modelado matematicamente e suas constantes foram obtidas experimentalmente. Em seguida, a função de transferência é ajustada para o ponto de operação e validada. São projetados e analisados os controladores tipo P, PI e PID, implementados, por meio de um CLP, o controlador PI e validada sua operação.

O Capítulo 3 trata do projeto e implementação de um sistema de controle térmico. Neste capítulo, o sistema estudado também é de primeira ordem, porém, com atraso. O modelo matemático do sistema foi obtido via experimental e o atraso foi considerado na função de transferência. Em seguida, foi simulada a resposta do sistema com um controlador liga-desliga. Para isto utilizou-se o Simulink. Um controlador PID foi projetado e implementado, por meio de um controlador dedicado, e a resposta experimental comparada à obtida na simulação.

O Capítulo 4 trata do projeto e implementação de um sistema de controle de motores elétricos. Neste capítulo, o sistema estudado é de segunda ordem com atraso. O sistema foi modelado matematicamente e suas constantes foram obtidas experimentalmente. O atraso foi considerado e a função de transferência foi ajustada e validada experimentalmente. Um controlador PI foi projetado e implementado por meio do aplicativo LabVIEW e de uma placa de aquisição de dados e controle. A resposta experimental foi comparada com a obtida na simulação.

No Capítulo 5 estão apresentadas tabelas com as principais transformadas de Laplace e algumas bibliografias recomendadas.

Teoria de controle se aprende, projetando, implantando e avaliando sistemas de controle.

Finalmente, todas as bancadas experimentais foram fabricada pela **T&S Equipamentos Eletrônicos** a qual expressamos nossos agradecimentos pelo apoio técnico.

Nelson Luis Cappelli
Claudio Kiyoshi Umezu

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 - BASE CONCEITUAL	2
1.1 – INTRODUÇÃO	2
1.2 – CICLO DE PROJETO.....	2
1.3 - MODELAGEM MATEMÁTICA	5
1.4 – TEMPO MORTO E ATRASO	10
1.5 – FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA	13
1.6 – VALIDAÇÃO DA FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA	14
1.7 – SINAIS DE TESTE	15
1.7.1 - Entrada do tipo degrau.....	16
1.7.2 - Entrada do tipo rampa.....	18
1.7.3 - Entrada do tipo parábola	20
1.8 – DIAGRAMA DE BLOCOS	21
1.9 – IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS DINÂMICOS.....	25
1.10 – ANÁLISE DE COMPORTAMENTO NO DOMÍNIO DO TEMPO	28
1.10.1 - Estabilidade.....	28
1.10.2 - Comportamento dos sistemas de ordem zero, de primeira e de segunda ordem.	30
1.10.3 – Especificações de desempenho no domínio do tempo.....	34
1.11 - ANÁLISE DE COMPORTAMENTO NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA.....	38
1.11.1 – Especificações no domínio da frequência.....	39
1.11.2 – Índices de desempenho no domínio da frequência.....	41
1.11.3 – Estabilidade no domínio da frequência	47
1.11.4 - Análise	47
1.12 – CONTROLADOR LIGA-DESLIGA.....	50
1.13 – CONTROLADORES PID	54
1.13.1 - Ações de controle.....	54
1.13.2 - Etapas do projeto.....	55
1.13.3 - Formas de implementação do controlador PID.....	57
1.13.4 - Conversões	60
1.14 – SINTONIA DE CONTROLADORES PID E ÍNDICES DE DESEMPENHO	61
1.14.1 – Método de Ziegler e Nichols – primeiro método.....	62
1.14.2 – Método de Ziegler e Nichols – segundo método	65
1.14.3 – Método de Aström e Hägglund (Método dos Relés).....	68
1.14.4 – Método de Cohen e Coon (CC).....	69
1.14.5 – Método de Chien, Hroenes e Reswick (CHR)	70
1.15.6 – Método da integral do erro.....	72
1.15.7 – Comparação entre alguns métodos.....	74
CAPÍTULO 2 - PROJETO DE SISTEMA DE CONTROLE DE NÍVEL	79
2.1 - INTRODUÇÃO.....	79
2.2 – DESCRIÇÃO DA BANCADA DE NÍVEL.....	79
2.3 – MODELAGEM MATEMÁTICA	81
2.4 – FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA.....	86
2.4.1 - Obtenção dos parâmetros R e C.....	86
2.4.2 – Função de transferência numérica	90
2.5 - VALIDAÇÃO.....	91
2.5.1 – Experimentação	91
2.5.2 – Simulação.....	93
2.5.3 - Comparação	94
2.5.4 – Ajuste da função de transferência.....	95

2.6 - IDENTIFICAÇÃO	98
2.7 – ANÁLISE DO COMPORTAMENTO NO DOMÍNIO DO TEMPO	101
2.7.1 - Estabilidade.....	101
2.7.2 – Características de desempenho no domínio do tempo.....	103
2.8 - ANÁLISE DO COMPORTAMENTO NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA	104
2.9 – CONTROLADORES PID	105
2.9.1 - Controlador tipo P.....	106
2.9.2 – Controlador tipo PI.....	109
2.9.3 – Controlador PID.....	110
2.10 – IMPLEMENTAÇÃO PRÁTICA DO CONTROLADOR	111
CAPÍTULO 3 - PROJETO DE SISTEMA DE CONTROLE TÉRMICO.....	114
3.1 - INTRODUÇÃO.....	114
3.2 – DESCRIÇÃO DA BANCADA TÉRMICA	114
3.3 – MODELAGEM MATEMÁTICA	117
3.4 – FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA.....	118
3.5 – CONTROLADOR LIGA-DESLIGA.....	121
3.6 – CONTROLADOR PID.....	123
3.7 – COMPORTAMENTO EM MALHA FECHADA	124
3.8 – IMPLEMENTAÇÃO PRÁTICA DO CONTROLADOR	126
CAPÍTULO 4 - PROJETO DE SISTEMA DE CONTROLE DE MOTORES	130
4.1 - INTRODUÇÃO.....	130
4.2 – DESCRIÇÃO DA BANCADA DE MOTORES.....	130
4.3 – MODELAGEM MATEMÁTICA	134
4.3.1 - Obtenção dos parâmetros da função de transferência	139
4.4 – VALIDAÇÃO DA FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA	145
Experimentação	145
Função de transferência sem atraso.....	146
Validação.....	148
Função de transferência com atraso.	151
4.5 – CONTROLADOR PI.....	154
4.6 – IMPLEMENTAÇÃO DO SISTEMA DE CONTROLE	158
CAPÍTULO 5 - APÊNDICES.....	160
5.1 - TRANSFORMADA DE LAPLACE.....	160
5.2 - BIBLIOGRAFIA	166

Capítulo 1

Base Conceitual

Capítulo 1 - Base Conceitual

1.1 – Introdução

Neste primeiro capítulo serão abordados, de forma introdutória, os principais tópicos a serem recordados ou estudados com mais profundidade na bibliografia técnica correspondente.

1.2 – Ciclo de Projeto

O projeto dos controladores envolve várias etapas. Estas etapas dependem se o projeto do controlador está sendo realizado em conjunto com o projeto de um novo sistema a ser controlado, ou seja, a um sistema ainda não existente, ou se está sendo realizado para ser implementado ou alterado em um sistema já existente.

No caso de projeto de um controlador a ser aplicado em um sistema ainda não construído (Figura 1.1), o projeto deve ser feito de forma integrada ao projeto do próprio sistema a ser controlado. Parte-se da definição das características do sistema e de como deve ser seu comportamento dinâmico, em seguida projeta-se o sistema de controle de maneira integrada ao projeto do sistema a ser controlado. O próximo passo é a realização de simulações computacionais cujos resultados, se positivos, permitem a construção do sistema com o controlador incorporado. No caso de os resultados não serem adequados, deve-se retornar à fase de projeto. Construído o sistema, executam-se testes experimentais. Caso o resultado destes testes não seja adequado, faz-se um re-projeto, realizam-se as alterações necessárias de componentes e retorna-se à fase de simulações computacionais. Caso o resultado for

adequado, realizam-se testes experimentais até se obter o ajuste fino dos parâmetros do controlador.

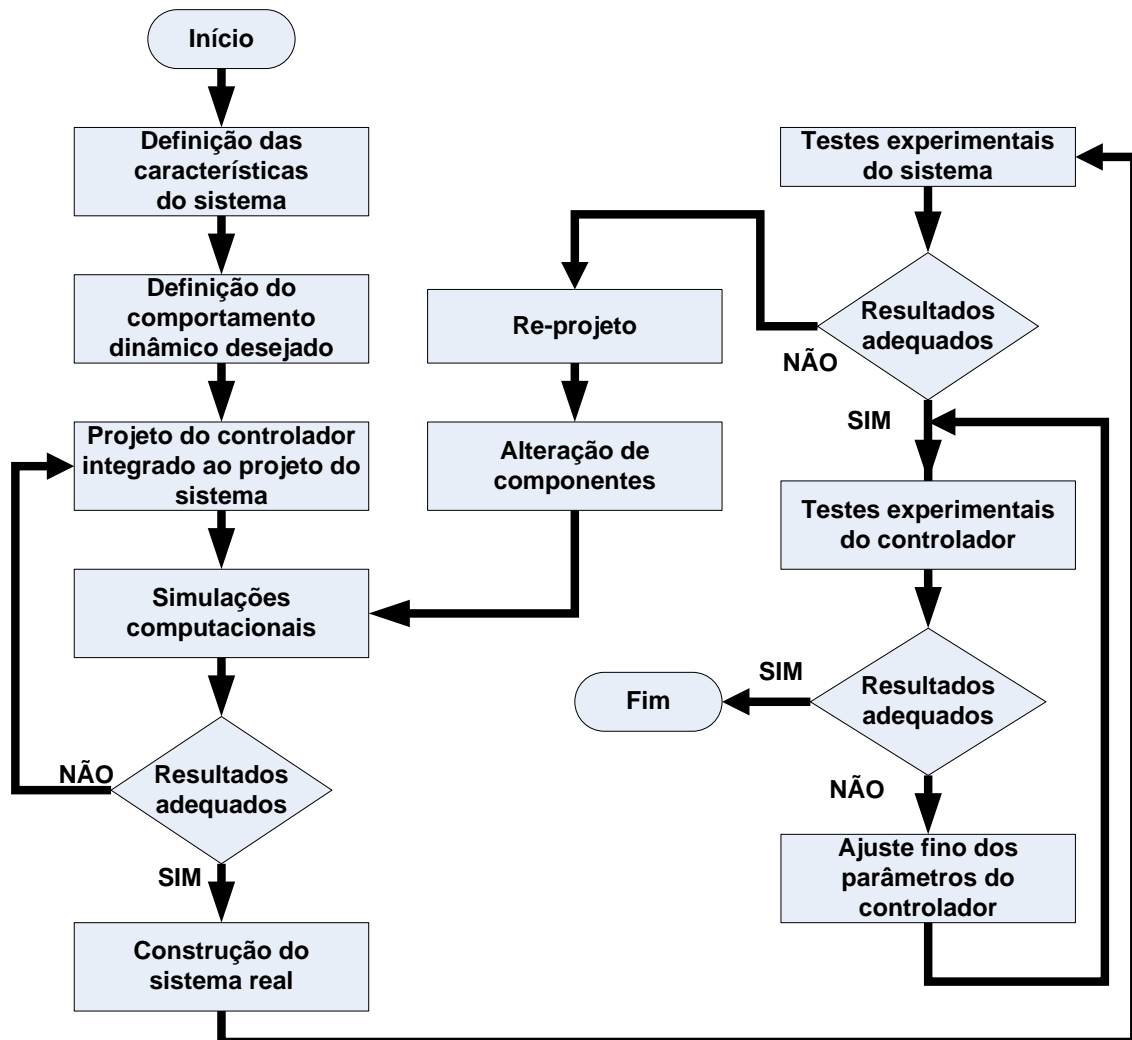


Figura 1.1 – Fases do projeto de um controlador para um novo sistema

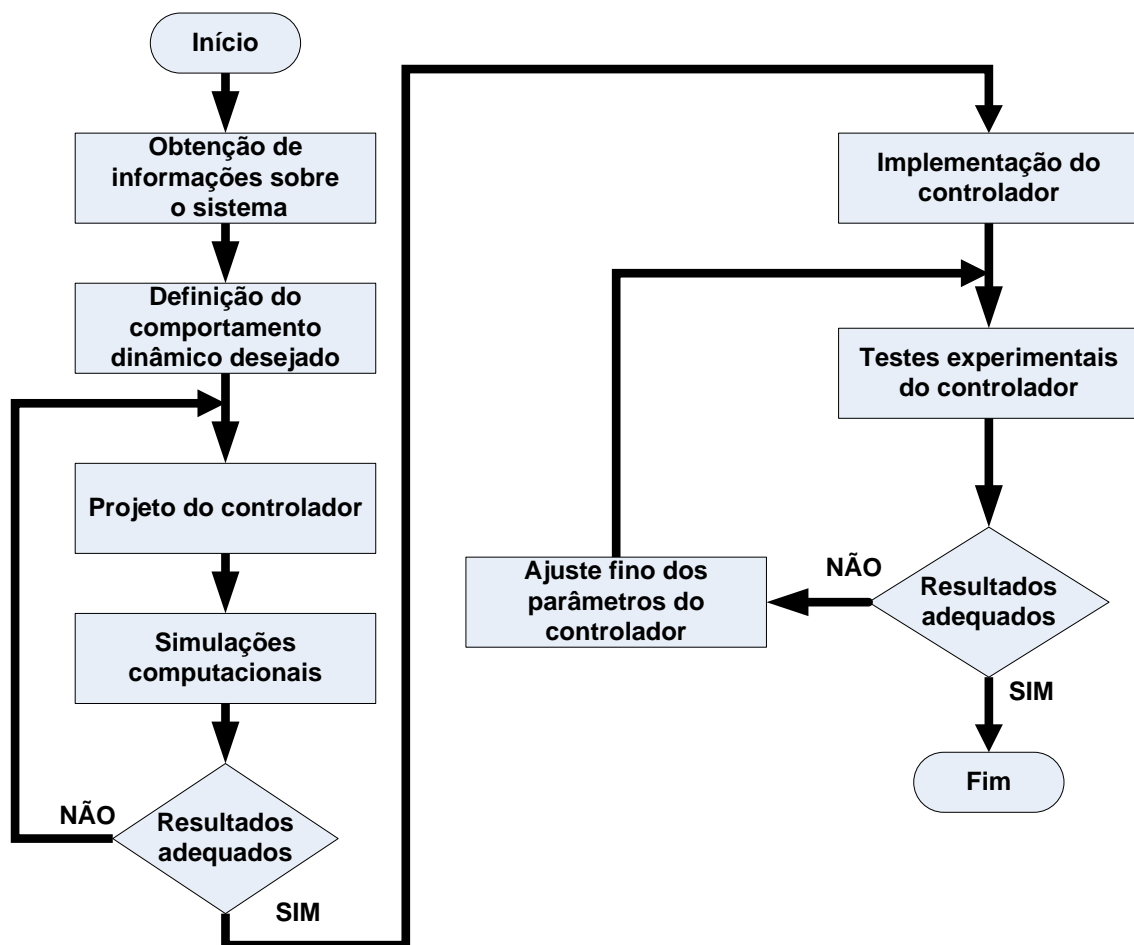


Figura 1.2 – Fases do projeto de um controlador para um sistema já existente

No caso da introdução de um sistema de controle em um sistema já existente, ou mesmo do seu re-projeto, pode-se eliminar algumas etapas do trabalho em relação ao caso anterior. Os conhecimentos sobre o sistema podem ser obtidos por meio teórico, experimental ou por ambos os meios. Especificado o comportamento dinâmico desejado, projeta-se o controlador para atender as especificações e realizam-se simulações computacionais antes de sua introdução no sistema real. Já com o sistema operando em malha fechada, realizam-se testes experimentais com o propósito do ajuste dos parâmetros do controlador.

As fases apresentadas para os dois casos de projeto podem ser alteradas de acordo com as necessidades especiais de cada situação.

Uma abordagem prática da aplicação de cada uma das fases de projeto, principalmente do segundo caso, será apresentada por meio do desenvolvimento dos projetos constantes nos Capítulos 2, 3 e 4.

1.3 - Modelagem matemática

Um sistema pode ser entendido como uma combinação de componentes ou unidades funcionais, atuando juntos para desempenhar um determinado objetivo.

Muitos sistemas físicos envolvem vários tipos de componentes, tais como: mecânicos, elétricos, pneumáticos e hidráulicos e até mesmo aqueles que não se referem diretamente à área de engenharia, como sistemas econômicos e biológicos. Na verdade, o conceito de sistema não se limita aos fenômenos físicos, mas pode ser estendido a fenômenos dinâmicos abstratos, como os encontrados na economia, transporte, crescimento populacional, biológico, etc.

O sucesso do projeto de um sistema de controle baseia-se, entre outras coisas, no conhecimento do sistema dinâmico no qual deverá atuar. Este conhecimento poderá ser obtido por meio de um equacionamento matemático ou por meio da experimentação (Figura 1.3).

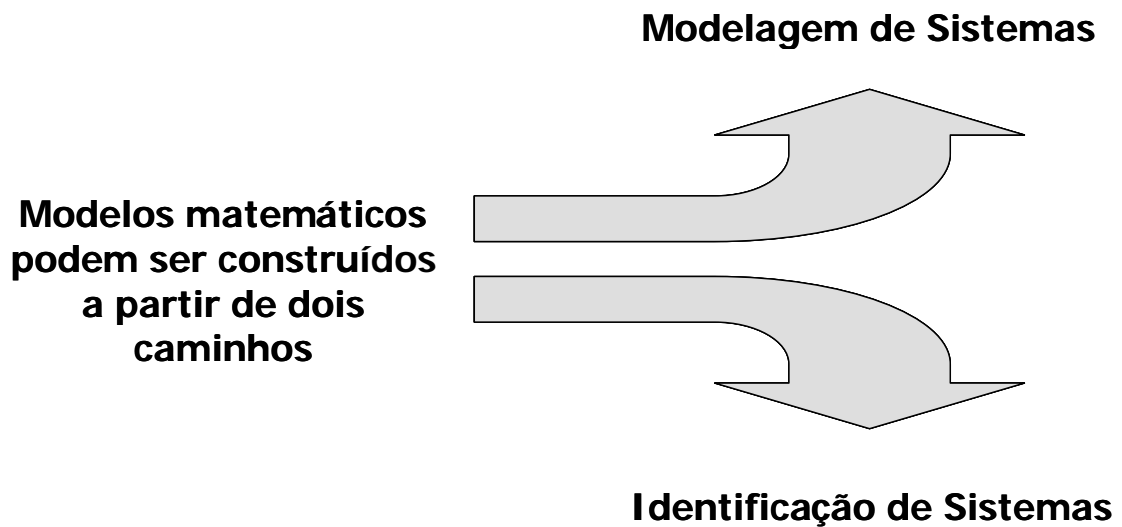


Figura 1.3 - Formas de obtenção do modelo matemático de um sistema dinâmico

Os modelos que descrevam as relações entre as variáveis do sistema em termos de expressões matemáticas são chamados de modelos matemáticos ou analíticos.

A ação de construir modelos matemáticos que descrevam seu comportamento e as interações entre as variáveis de interesse denomina-se modelagem. A modelagem de sistemas será aqui abordada, enquanto as técnicas relativas à identificação de sistemas serão abordadas no item 1.9 – Identificação de sistemas dinâmicos.

Os modelos matemáticos são úteis na análise e controle de processos pelos seguintes motivos:

- Melhor entendimento do processo – modelos de processos podem ser analisados ou usados em simulações no computador para investigar o comportamento do processo sem o custo e os perigos de operar o processo real. A simulação do comportamento dos sistemas dinâmicos pode ser necessária quando não é factível realizar experimentos dinâmicos na planta, ou mesmo antes que ela seja construída.
- Treinamento dos operadores – os operadores podem ser treinados para operar um processo complexo e lidar com situações de emergência usando um simulador de processo, baseado em seu modelo matemático.

- Estabelecimento de estratégias de controle – um modelo de processo permite avaliar diferentes estratégias de controle, por exemplo, na seleção das variáveis a serem medidas e nas variáveis a serem manipuladas.
- Escolha de ajustes do controlador – um modelo dinâmico do processo pode ser usado para obter os apropriados ajustes do controlador, por meio de simulação em computador ou análise direta do modelo dinâmico.
- Desenho da lei de controle – técnicas de controle moderno muitas vezes incorporam um modelo na lei de controle. Tais técnicas são denominadas controle baseado em modelos.
- Otimização das condições de operação do processo – em muitas plantas de processos há necessidade de ajustar periodicamente as condições de operação, de modo a, por exemplo, maximizar o lucro ou minimizar os custos.

Os modelos podem se apresentar de várias formas e podem ser escritos com diversos graus de formalismo matemático. A utilização a que se destina o modelo é que determinará o grau do formalismo requerido para torná-lo útil. Em geral, na obtenção de um modelo matemático deve-se estabelecer uma conciliação entre a simplicidade do modelo e a precisão dos resultados obtidos para análise. Na obtenção de um modelo matemático relativamente simplificado, descrito por uma equação diferencial ordinária e convertido em uma função de transferência, com frequência torna-se necessário ignorar certas propriedades físicas inerentes ao sistema, em particular algumas não-linearidades e distribuição dos parâmetros que podem estar presentes no sistema físico. Se os efeitos destas propriedades ignoradas forem pequenos na resposta do modelo, pode-se obter boa aproximação entre os resultados da simulação do comportamento utilizando-se o modelo matemático e os resultados do estudo experimental do sistema físico real.

Os modelos matemáticos podem ser classificados, de forma simplificada, de acordo com a Figura 1.4.

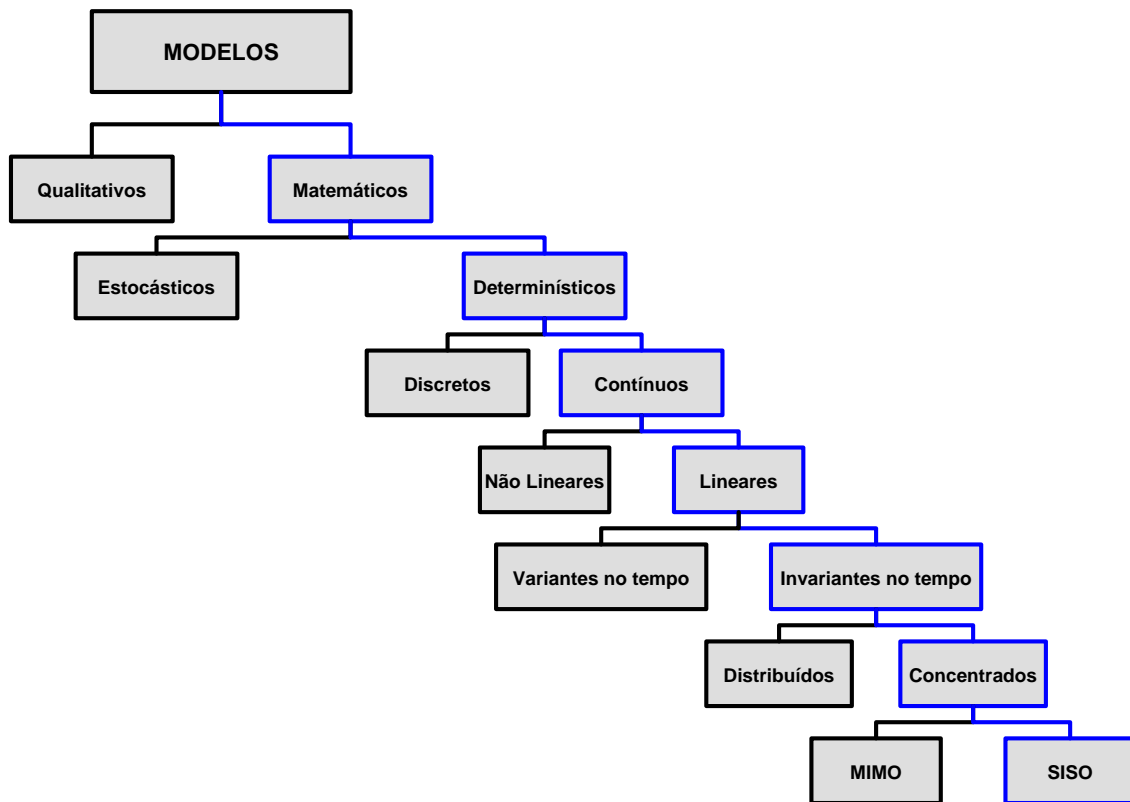


Figura 1.4 – Classificação dos modelos matemáticos

Os modelos matemáticos podem ser classificados como **determinísticos** ou **estocásticos**. Os sistemas que possuem modelos determinísticos são aqueles que a resposta a uma entrada é previsível e repetível, caso contrário é estocástico.

Os modelos matemáticos determinísticos podem ser do tipo **contínuo** ou **discreto**. Os modelos contínuos no tempo são aqueles que descrevem sistemas cujas variáveis são funções contínuas no tempo. Os modelos discretos no tempo descrevem sistemas que possuem uma ou mais variáveis que são conhecidas somente em instantes discretos de tempo.

Os modelos matemáticos **lineares** descrevem sistemas nos quais o princípio da superposição e da homogeneidade se aplicam. Os sistemas para os quais estes princípios não se aplicam são ditos **não lineares**. A maioria dos sistemas físicos são não lineares. Contudo, se a faixa de variação das variáveis do sistema não for muito grande, então o modelo do sistema pode ser linearizado dentro de uma relativamente pequena faixa de variação.

Sistemas cuja resposta é independente do tempo no qual a excitação é aplicada são descritos por modelos matemáticos classificados como **invariantes no tempo**, ou a coeficientes constantes. Já um modelo matemático **variante no tempo** é aquele em que um ou mais de seus parâmetros variam com o tempo. Um exemplo clássico de um modelo variante no tempo é aquele que descreve o sistema de controle de um veículo espacial, onde a massa diminui com o tempo devido ao consumo de combustível durante o voo.

Os sistemas que podem ser descritos por equações diferenciais ordinárias possuem modelos com **parâmetros concentrados**, enquanto aqueles que podem ser descritos por equações diferenciais parciais possuem modelos com **parâmetros distribuídos**.

Um sistema pode ter uma única entrada e uma única saída (*Single-Input and Single-Output* - SISO) ou múltiplas entradas e múltiplas saídas (*Multiple Inputs and Multiple Outputs* – MIMO). Um exemplo de sistema SISO é o controle de posição, onde há um comando de entrada (posição desejada) e uma saída controlada (posição de saída). Um exemplo de sistema MIMO é o controle de processo que tem duas entradas (pressão de entrada e temperatura de entrada) e duas saídas (pressão de saída e temperatura de saída).

Neste livro será dada ênfase aos sistemas determinísticos com os seguintes atributos: contínuo, linear, invariante no tempo, de parâmetros concentrados, forçado ou não e de uma entrada e uma saída. Tais sistemas podem ser descritos por funções de transferência no domínio de Laplace e estudados pela Teoria Clássica de Controle.

A modelagem matemática, em si, dos diversos sistemas físicos pode ser obtida nas referências listadas no Apêndice.

Ciclo para modelagem de sistemas dinâmicos

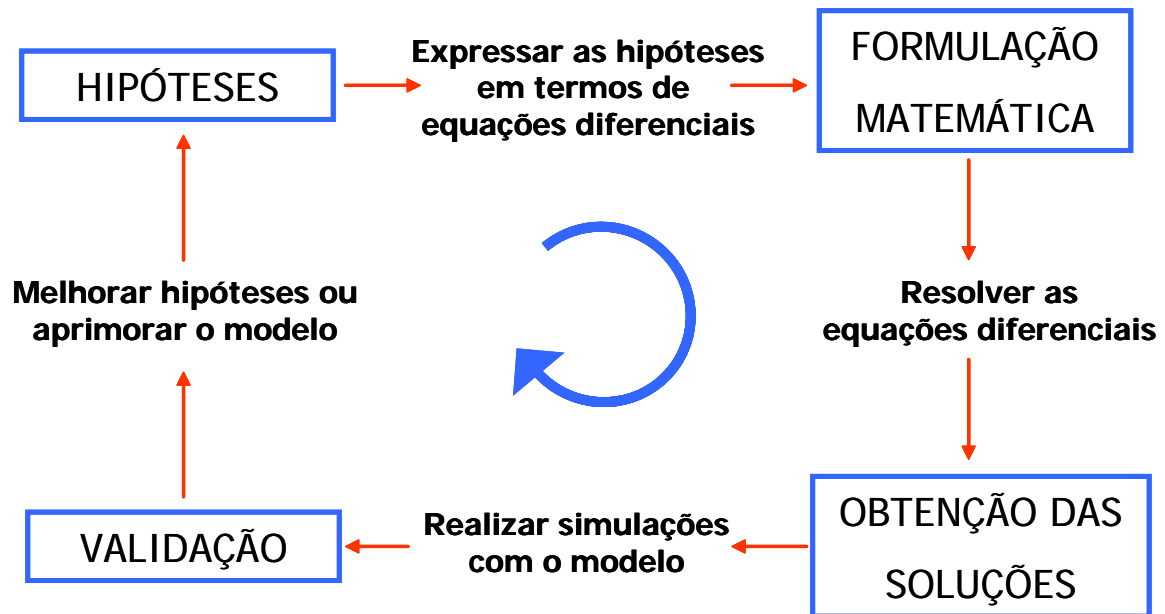


Figura 1.5 - Ciclo para a modelagem de sistemas dinâmicos

As etapas necessárias para a obtenção de um modelo matemático, baseado em equações diferenciais, estão apresentadas por meio do ciclo mostrado na Figura 1.5. O primeiro passo a ser dado é o estabelecimento das hipóteses básicas do funcionamento do sistema dinâmico, do comportamento de seus componentes e das interações entre suas variáveis. Estas hipóteses devem ser expressas na forma de equações diferenciais para a obtenção da formulação matemática pretendida. Antes de se decidir pela utilização do modelo matemático obtido deve-se validá-lo. Para tanto, realizam-se simulações com o modelo e comparam-se os resultados simulados com os resultados obtidos por meio de experimentação no sistema físico real, nas mesmas condições da simulação. Caso as diferenças obtidas não sejam aceitáveis, deve-se melhorar as hipóteses iniciais, aprimorar o modelo e testá-lo novamente, até que os resultados sejam satisfatórios.

1.4 – Tempo Morto e Atraso

Geralmente, na modelagem de sistemas dinâmicos, assume-se que, quando ocorre uma alteração em uma das variáveis de entrada (perturbações e variável de entrada), seu efeito é instantaneamente observado na variável de saída.

Na realidade, quando uma variável de entrada de um sistema varia, há um intervalo de tempo (curto ou longo) durante o qual nenhum efeito é observado na saída do sistema (Figura 1.6). Esse intervalo de tempo é chamado de tempo morto (t_{morto}).

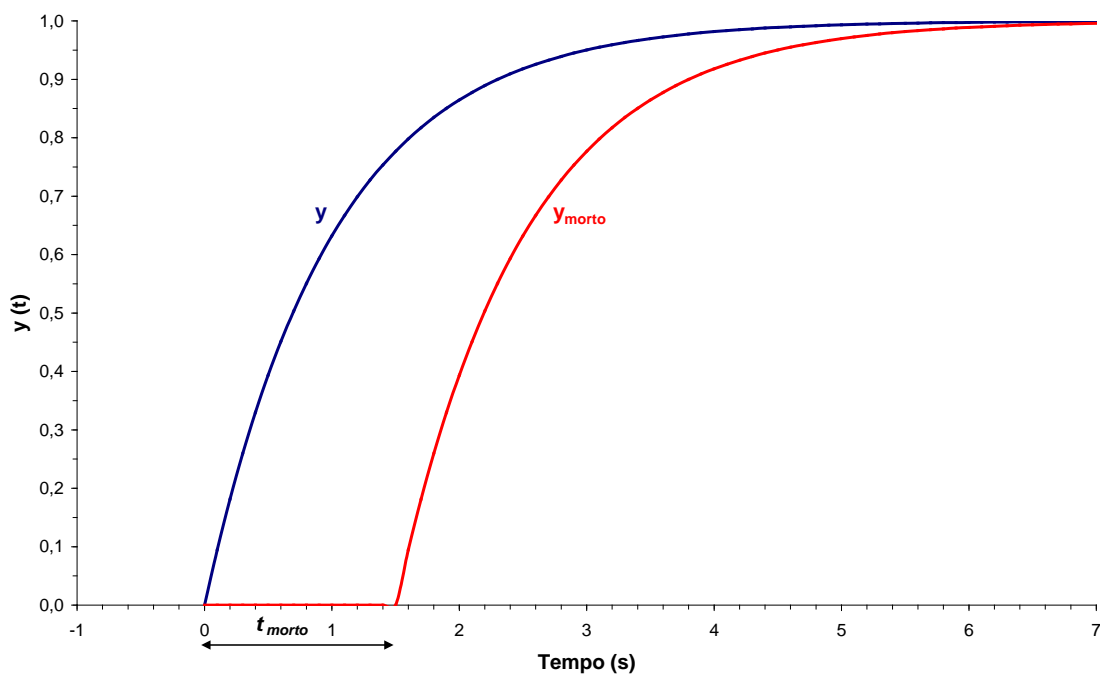


Figura 1.6 – Tempo morto

O tempo morto é descrito matematicamente pela Equação 1.1 e tem sua função de transferência representada pela Equação 1.2.

$$T_{saída}(t) = T_{entrada}(t - t_{morto}) \quad \text{Equação 1.1}$$

$$\frac{T_{saída}(s)}{T_{entrada}(s)} = e^{-t_{morto} s} \quad \text{Equação 1.2}$$

O tempo morto pode ser introduzido na função de transferência se utilizando o MATLAB com o comando $g=tf(num,den,'InputDelay',tempoMorto)$, ou com o bloco “Transport Delay” no Simulink.

Quando uma variável de entrada de um sistema varia e há um intervalo de tempo durante o qual apenas um pequeno efeito é observado na saída do sistema (Figura 1.7), esse intervalo de tempo é chamado de atraso (t_{atraso}).

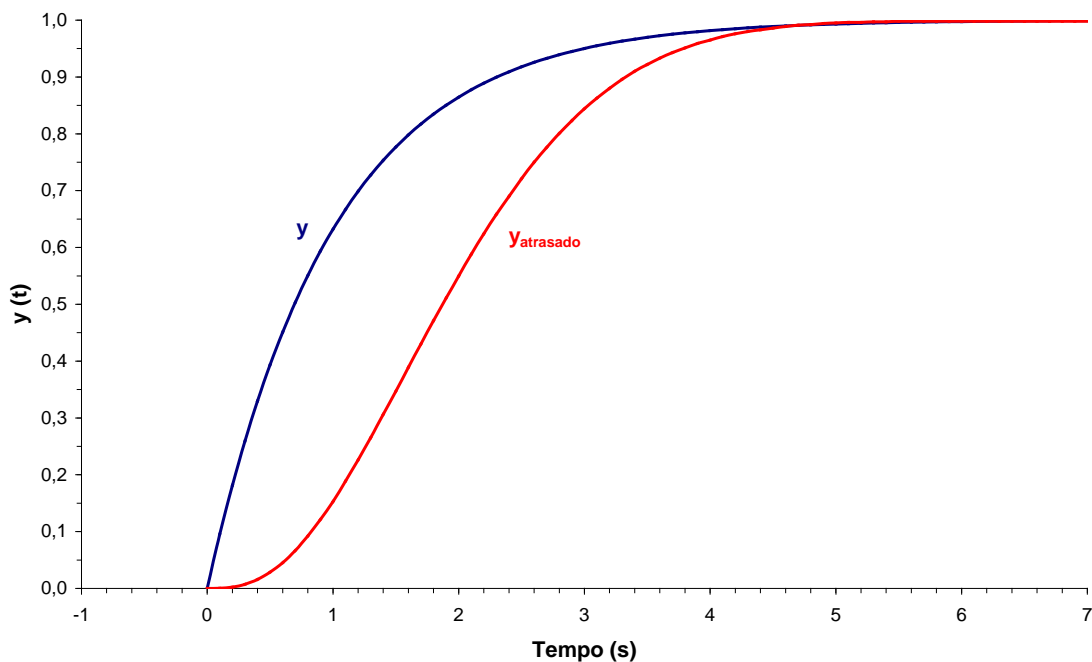


Figura 1.7 – Atraso entre a entrada e a saída

O atraso pode ser introduzido na função de transferência do sistema, por meio do MATLAB, se utilizando a função de transferência da Equação 1.3, proposta por Maclaurin, ou a função de transferência da Equação 1.4, proposta por Padé. No Simulink pode-se utilizar o bloco “Variable Time Delay”.

$$e^{-t_a s} \cong \frac{1}{t_a^2 s^2 / 2 + t_a s + 1}$$

Equação 1.3

$$e^{-t_a s} \cong \frac{1 - t_a s / 2}{1 + t_a s / 2}$$

Equação 1.4

1.5 – Função de transferência

A função de transferência é uma expressão matemática que relaciona a saída e a entrada de um sistema linear, invariante no tempo, em termos dos parâmetros do sistema. A função de transferência é uma propriedade inerente ao próprio sistema e inclui as unidades necessárias para relacionar a entrada com a saída, porém não fornece informações quanto à estrutura física do mesmo. Assim, sistemas físicos diferentes podem ter funções de transferência idênticas.

A função de transferência de um sistema linear invariante no tempo é definida como sendo a relação entre a Transformada de Laplace da saída $Y(s)$ - função resposta - e a transformada de Laplace da entrada $U(s)$ - função excitação -, considerando-se todas as condições iniciais nulas.

A Figura 1.8 mostra um diagrama de blocos onde está identificada a função de transferência $G(s)$ de um sistema qualquer.

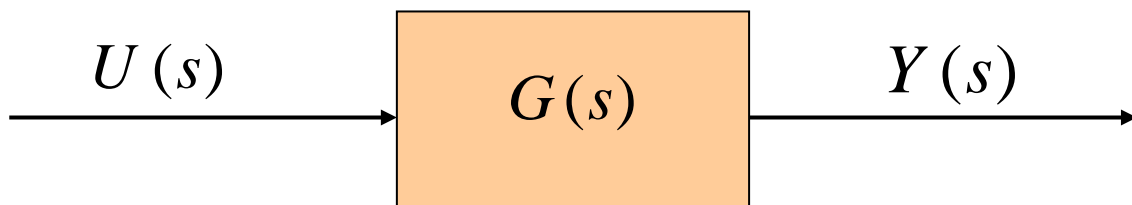


Figura 1.8 - Diagrama de bloco de uma função de transferência

A função de transferência é representada pela Equação 1.5.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

Equação 1.5

Algumas das propriedades da função de transferência são:

- A função de transferência é definida somente para sistemas lineares invariantes no tempo. A função de transferência não é definida para sistemas não-lineares;
- A função de transferência entre uma variável de entrada e uma de saída é definida como a Transformada de Laplace da resposta ao impulso. Alternativamente, a função de transferência entre um par de variáveis de entrada e saída é a relação entre a Transformada de Laplace da saída e a Transformada de Laplace da entrada;
- Todas as condições iniciais são selecionadas em zero;
- A função de transferência é independente da entrada do sistema;
- A função de transferência de sistemas contínuos é expressa somente em função da variável complexa s , não é função de uma variável real, temporal, ou qualquer outra variável que seja usada como variável independente.

1.6 – Validação da função de transferência

O processo de obtenção do modelo matemático, tanto pela via teórica, quanto pela experimental, nunca é perfeito. Geralmente são feitas simplificações ou são cometidos erros experimentais que conduzem a modelos que não descrevem adequadamente o comportamento do sistema dinâmico.

Neste sentido, as funções de transferência devem ser validadas para que possam ser utilizadas na simulação ou no projeto dos sistemas de controle.

Para validar uma função de transferência deve-se obter, experimentalmente, a resposta do sistema, face a condições controladas de teste e a uma excitação bem conhecida, simular sua resposta por meio da função de transferência, sob as mesmas condições experimentais e, posteriormente, confrontar os resultados obtidos.

Caso seja necessário, podem-se fazer alguns ajustes na função de transferência para que esta represente adequadamente o comportamento do sistema dinâmico.

1.7 – Sinais de teste

Na prática, o sinal de entrada (ou excitação) de um sistema de controle não é inicialmente conhecido, mas é de caráter aleatório e a entrada instantânea não pode ser expressa analiticamente. Apenas em alguns casos especiais se conhece inicialmente o sinal de entrada e se pode expressá-lo analiticamente ou por curvas.

Na análise e projeto de sistemas de controle, deve-se ter uma base para comparar o desempenho de vários sistemas de controle. Esta base pode ser estabelecida especificando-se sinais de teste particulares de entrada e comparando-se as respostas de vários sistemas a estes sinais de entrada.

O uso de sinais de teste pode ser justificado pela correlação existente entre a resposta de um sistema em face de um sinal de entrada de teste típico e a resposta do sistema aos sinais de entrada reais. Um sistema de controle cujo projeto foi baseado em sinais de teste normalmente possui desempenho satisfatório para as excitações reais.

Os sinais de teste habitualmente usados são funções aperiódicas tais como: degrau; rampa; parábola; impulso, ou periódicas tais como as senoidais. Com estes sinais de teste, tanto as análises matemáticas como as experimentais dos sistemas de controle podem ser realizadas com facilidade, pois estes sinais são funções simples do tempo.

A determinação de qual ou quais destes sinais de teste devem ser usados para analisar as características do sistema depende da forma da excitação a que o sistema estará sujeito mais freqüentemente durante operação normal. Se o sistema de controle estiver sujeito a uma excitação que varia gradativamente com o tempo, então uma função rampa pode ser um bom

sinal de teste; já para um sistema sujeito a uma excitação do tipo choque, uma função impulso pode ser a mais adequada.

1.7.1 - Entrada do tipo degrau

Uma entrada do tipo degrau é expressa no domínio de Laplace pela Equação 1.6 e, no domínio do tempo, pela Figura 1.9.

$$R(s) = \frac{R}{s} \quad \text{Equação 1.6}$$

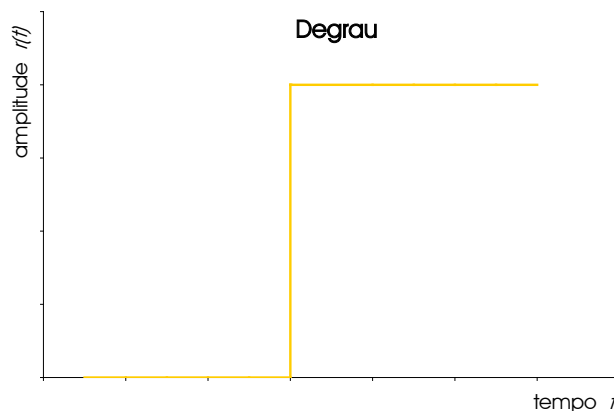


Figura 1.9 - Sinal de teste do tipo degrau

$$G(s) = \frac{5}{s^2 + 2s + 5} \quad \text{Equação 1.7}$$

Dado o sistema representado pela Equação 1.7, o MATLAB pode ser utilizado para simular sua resposta, frente a uma excitação do tipo degrau, executando-se os seguintes comandos:

```
>> % Entrada do sistema  
>> num=[5];  
>> den=[1 2 5];
```

```
>> g=tf(num,den)
```

Transfer function:

$$\frac{5}{s^2 + 2s + 5}$$

```
>> % Confeção do degrau unitário  
>> t=0:0.1:6;  
>> degrau=ones(61,1);  
>> plot(t,degrau,'r')  
>> hold on  
>> % Simulação frente ao degrau unitário  
>> step(g,t)
```

A simulação da resposta do sistema frente a uma excitação do tipo degrau unitário está apresentada na Figura 1.10.

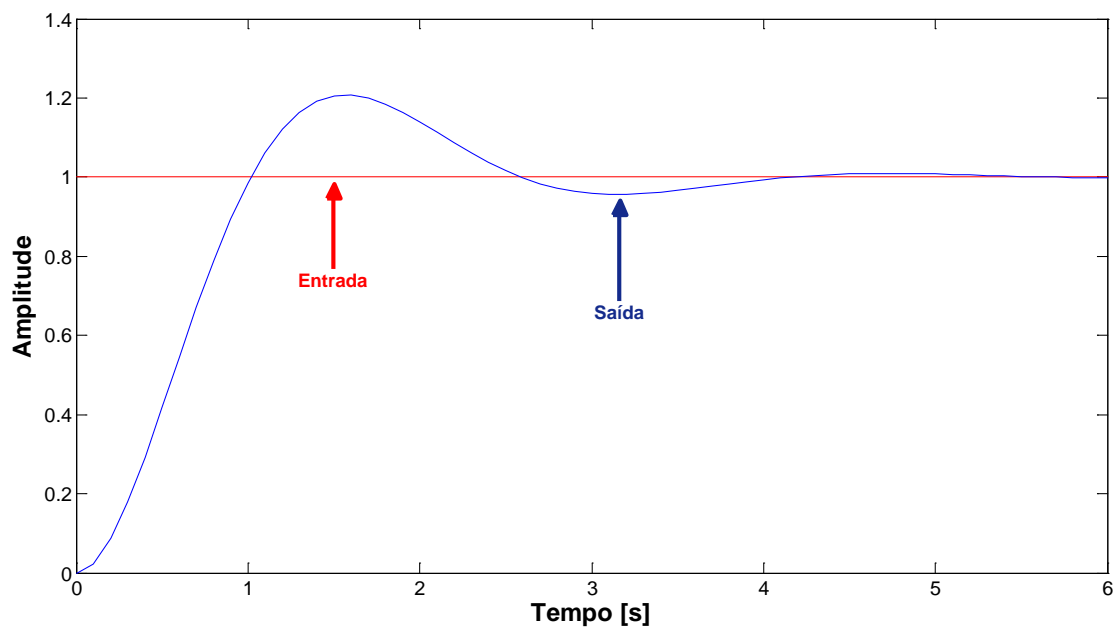


Figura 1.10 – Simulação do sistema da Equação 1.7 frente a um degrau unitário

1.7.2 - Entrada do tipo rampa

Uma entrada do tipo rampa é expressa no domínio de Laplace pela Equação 1.8 e, no domínio do tempo, pela Figura 1.11.

$$R(s) = \frac{R}{s^2}$$

Equação 1.8

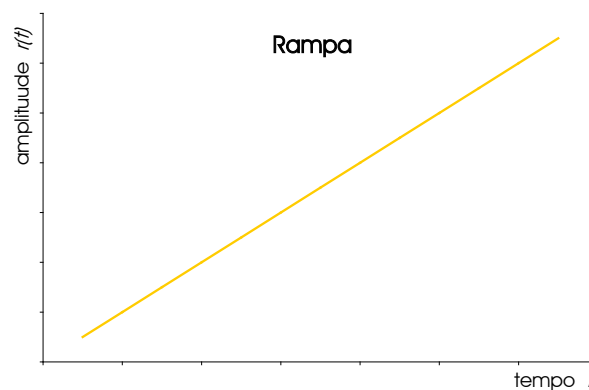


Figura 1.11 - Sinal de teste do tipo rampa

O sistema representado pela Equação 1.7 pode ser simulado no MATLAB, frente a uma excitação do tipo rampa, fazendo-se:

```
>> % Entrada do sistema  
>> num=[5];  
>> den=[1 2 5];  
>> g=tf(num,den)
```

Transfer function:

```
5  
-----  
s^2 + 2 s + 5
```

```
>> % Confeção da rampa unitária
```



```
>> t=0:0.1:6;  
>> k=1;  
>> rampa=k.*t;  
>> plot(t,rampa,'r')  
>> hold on
```

Ou, alternativamente:

```
>> degrau=tf([1],[1 0]);  
>> rampa=step(degrau,t);  
>> plot(t,rampa,'r')  
>> hold on
```

```
>> % Simulação frente à Rampa Unitária  
>> y=lsim(g,rampa,t);  
>> plot(t,y)
```

A simulação da resposta do sistema frente a uma excitação do tipo rampa unitária está apresentada na Figura 1.12.

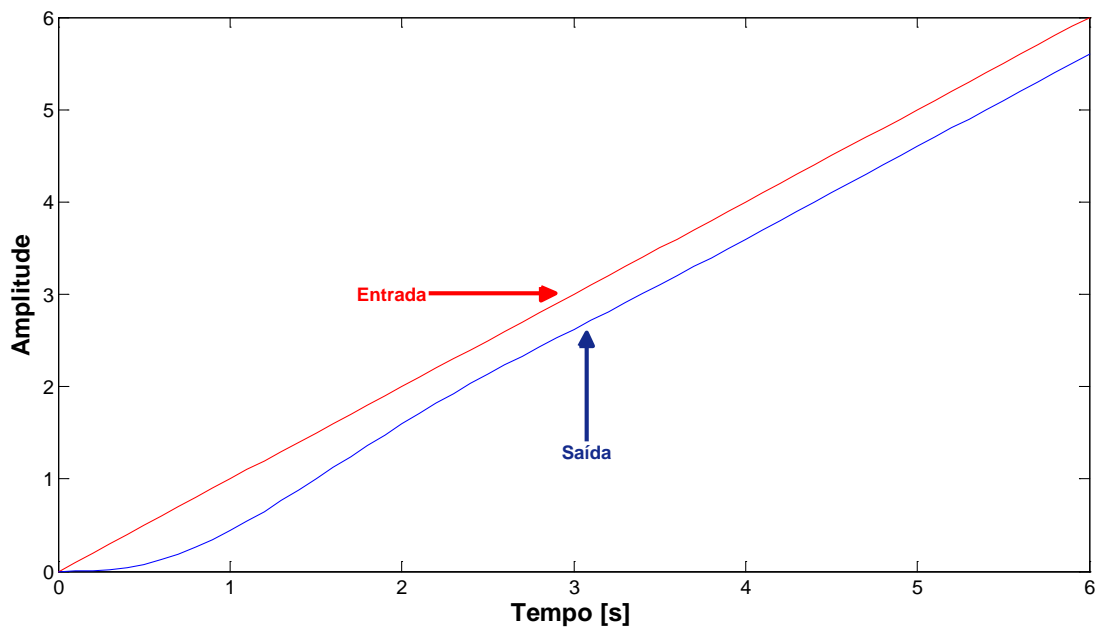


Figura 1.12 - Simulação do sistema da Equação 1.7 frente a uma rampa unitária

1.7.3 - Entrada do tipo parábola

Uma entrada do tipo parábola é expressa no domínio de Laplace pela Equação 1.9 e, no domínio do tempo, pela Figura 1.13.

$$R(s) = \frac{R}{s^3}$$

Equação 1.9

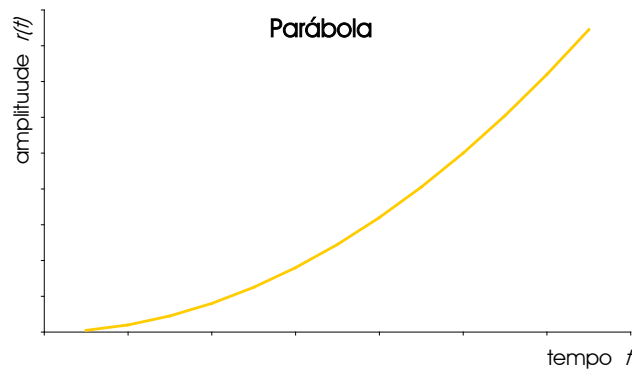


Figura 1.13 - Sinal de teste do tipo parábola

O sistema representado pela Equação 1.7 pode ser simulado no MATLAB, frente a uma excitação do tipo parábola, fazendo-se:

```
>> % Entrada do sistema  
>> num=[5];  
>> den=[1 2 5];  
>> g=tf(num,den);  
>>  
>> % Confeção da Parábola Unitária  
>> t=0:0.1:10;  
>> rampa=tf([1],[1 0 0]);
```

```
>> parabola=step(rampa,t);  
>> plot(t,parabola,'r')  
>> hold on  
  
>> % Simulação frente à Parábola Unitária  
>> y=lsim(g,parabola,t);  
>> plot(t,y)
```

A simulação da resposta do sistema frente a uma excitação do tipo parábola unitária está apresentada na Figura 1.14.

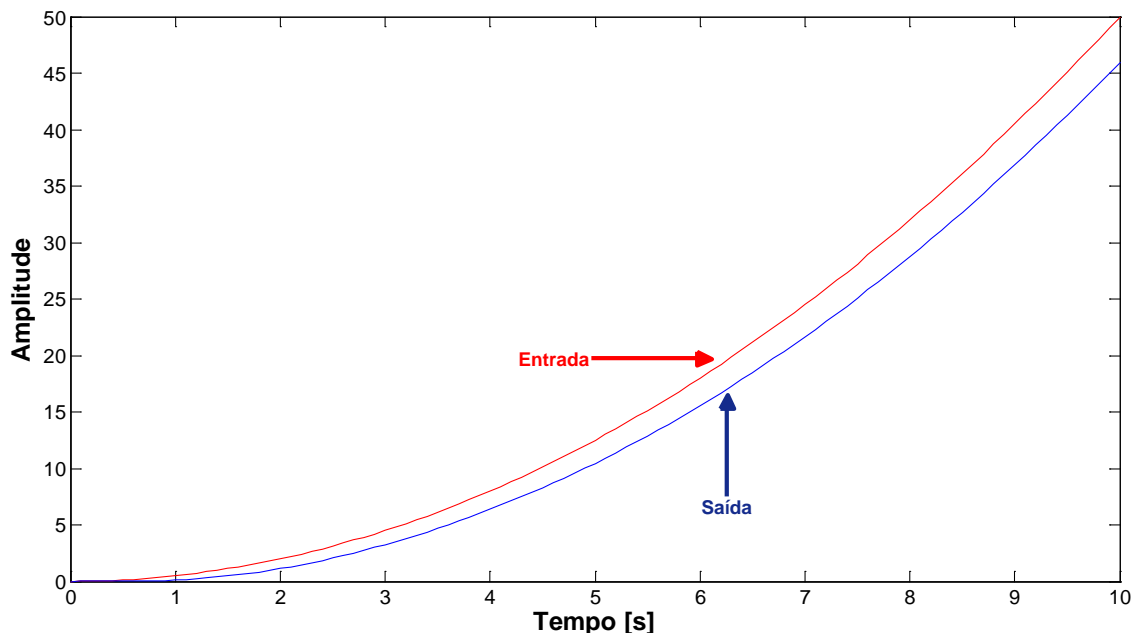


Figura 1.14 - Simulação do sistema da Equação 1.7 frente a uma parábola unitária

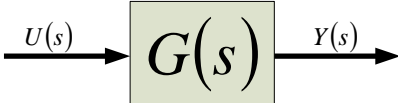
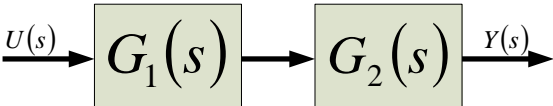
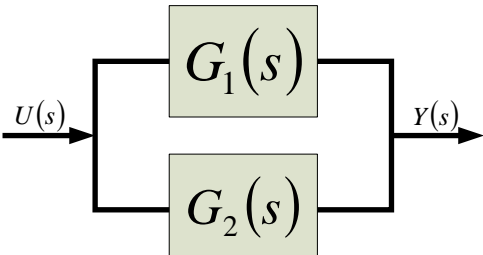
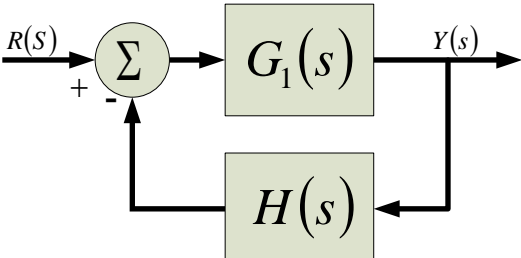
1.8 – Diagrama de blocos

Normalmente os sistemas de controle são representados graficamente por blocos funcionais, sendo que cada um representa um elemento do sistema. São interligados por setas que definem o fluxo de sinal em uma única direção.

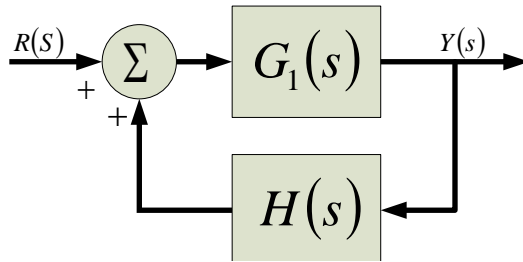
A utilização do diagrama de blocos facilita a representação e o entendimento do sistema físico. Contém informações sobre o comportamento dinâmico do sistema, no entanto não oferece nenhuma informação quanto sua construção física, portanto, um mesmo diagrama de blocos pode representar distintos sistemas físicos.

A Tabela 1.1 mostra as principais operações com blocos e suas respectivas funções de transferência.

Tabela 1.1 – Diagramas de blocos e suas respectivas funções de transferências

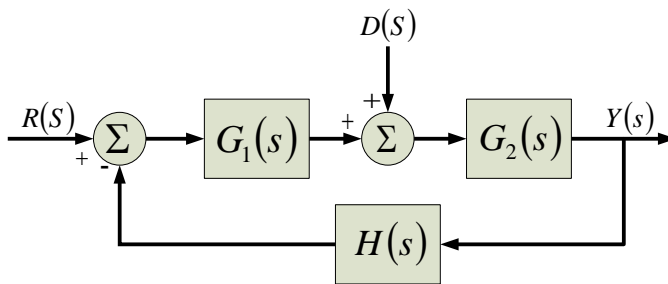
Operações com Blocos	Função de Transferência
<p>1 – Bloco único</p> 	$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$
<p>2 – Blocos em série</p> 	$G(s) = G_1(s)G_2(s)$
<p>3 – Blocos em paralelo</p> 	$G(s) = G_1(s) + G_2(s)$
<p>4 – Sistema em malha fechada com realimentação negativa.</p> 	$G(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)H(s)}$

5 – Sistema em malha fechada com realimentação positiva.



$$G(s) = \frac{G_1(s)}{1 - G_1(s)H(s)}$$

6 – Sistema com distúrbio de carga e de referência.



- Apenas devido ao distúrbio:

$$G(s) = \frac{Y_D(s)}{D(s)} = \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

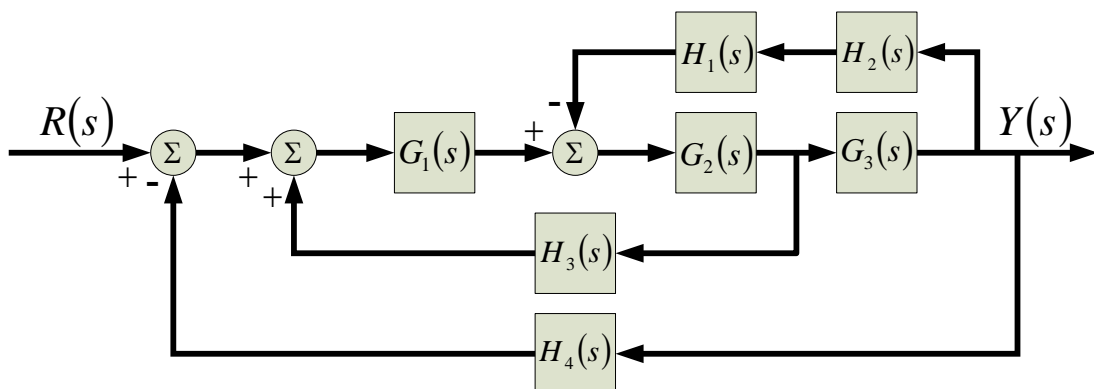
- Apenas devido à referência:

$$G(s) = \frac{Y_R(s)}{R(s)} = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

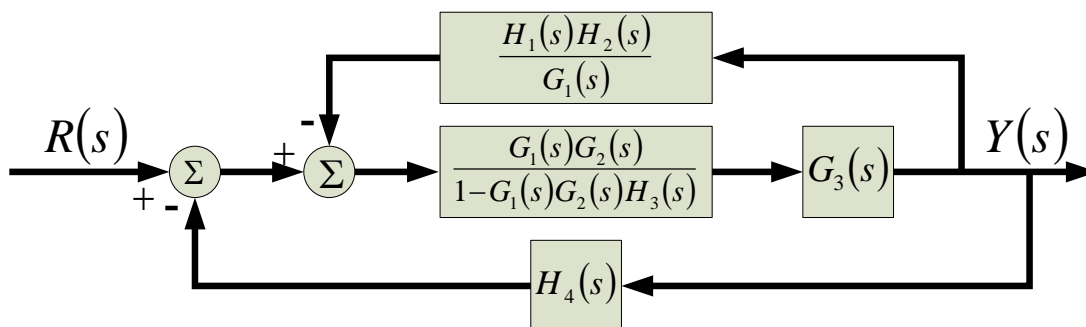
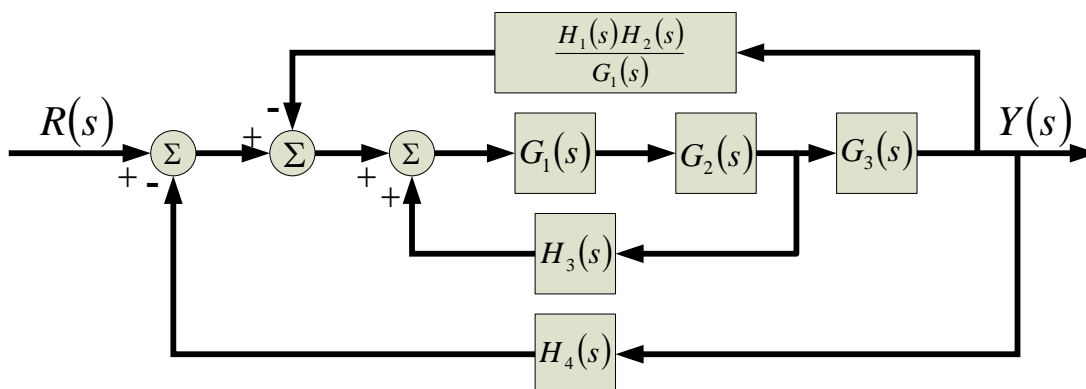
No caso 6 da Tabela 1.1 têm-se um sistema com duas entradas e uma única saída. Sendo lineares as relações, seus efeitos podem ser somados.

Os diagramas de blocos podem ser facilmente implementados no Simulink para cálculos e simulações, no entanto, se a janela de comandos do MATLAB for utilizada, deve-se fazer simplificações agrupando-se blocos. Para tanto, pode-se usar comandos tais como: *series*, *parallel*, *feedback*, *connect*, etc.

A Figura 1.15 mostra os cálculos e as etapas para simplificação de um diagrama de blocos.

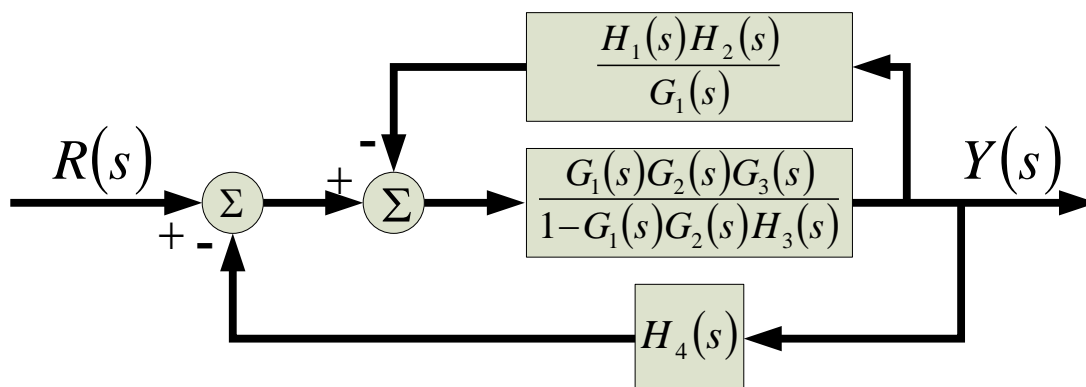


a) Diagrama de blocos a ser simplificado

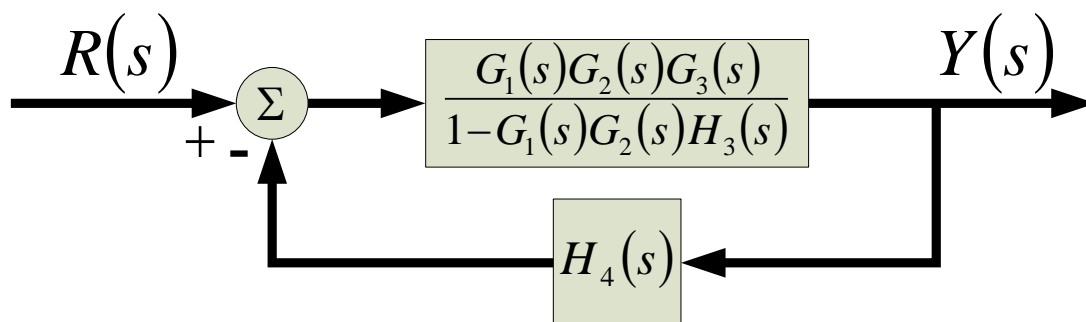


b) Primeira etapa

c) Segunda etapa



d) Terceira etapa

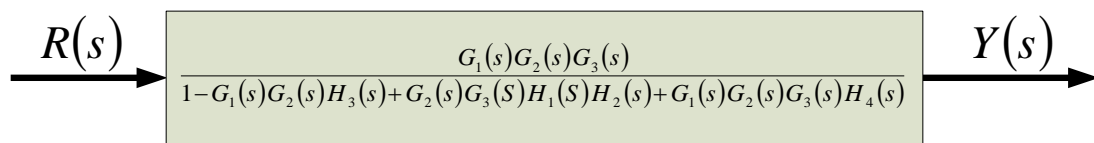


e) Quarta etapa

f) Quinta etapa

Figura 1.15 – Etapas de simplificação de um diagrama de blocos

1.9 – Identificação de sistemas dinâmicos



O processo de obtenção de um modelo matemático, pela via experimental, para descrever um sistema dinâmico, denomina-se Identificação de Sistemas. A identificação de sistemas trata de problemas de construção de modelos matemáticos baseados em dados observados do comportamento dinâmico destes sistemas.

A seqüência de procedimentos necessários para a identificação de um sistema está apresentada na Figura 1.16. A seqüência inicia-se pelo levantamento de dados sobre o sistema a ser identificado, passa pela elaboração do projeto experimental e, finalmente, resulta na obtenção e tratamento dos dados. Com os conhecimentos do sistema e um banco de dados, onde estão correlacionadas a excitação e a respectiva resposta do sistema, define-se a estrutura adequada para o modelo matemático. Em seguida, inicia-se o processo de validação do modelo, onde é confrontada a resposta simulada com a resposta real do sistema. Caso o modelo não represente adequadamente a resposta do sistema dinâmico, podem-se ajustar os parâmetros do modelo escolhido. Se ainda não for obtido sucesso, deve-se escolher outra estrutura para o modelo e refazer o processo.

As estruturas de modelos utilizadas para identificação são bastante variadas. Neste livro serão utilizadas estruturas de modelos determinísticos, conforme mencionado no item 1.3 - Modelagem matemática, de até segunda ordem.

Maiores detalhes sobre as técnicas de identificação de sistemas podem ser obtida nas referências mencionadas no Anexo.

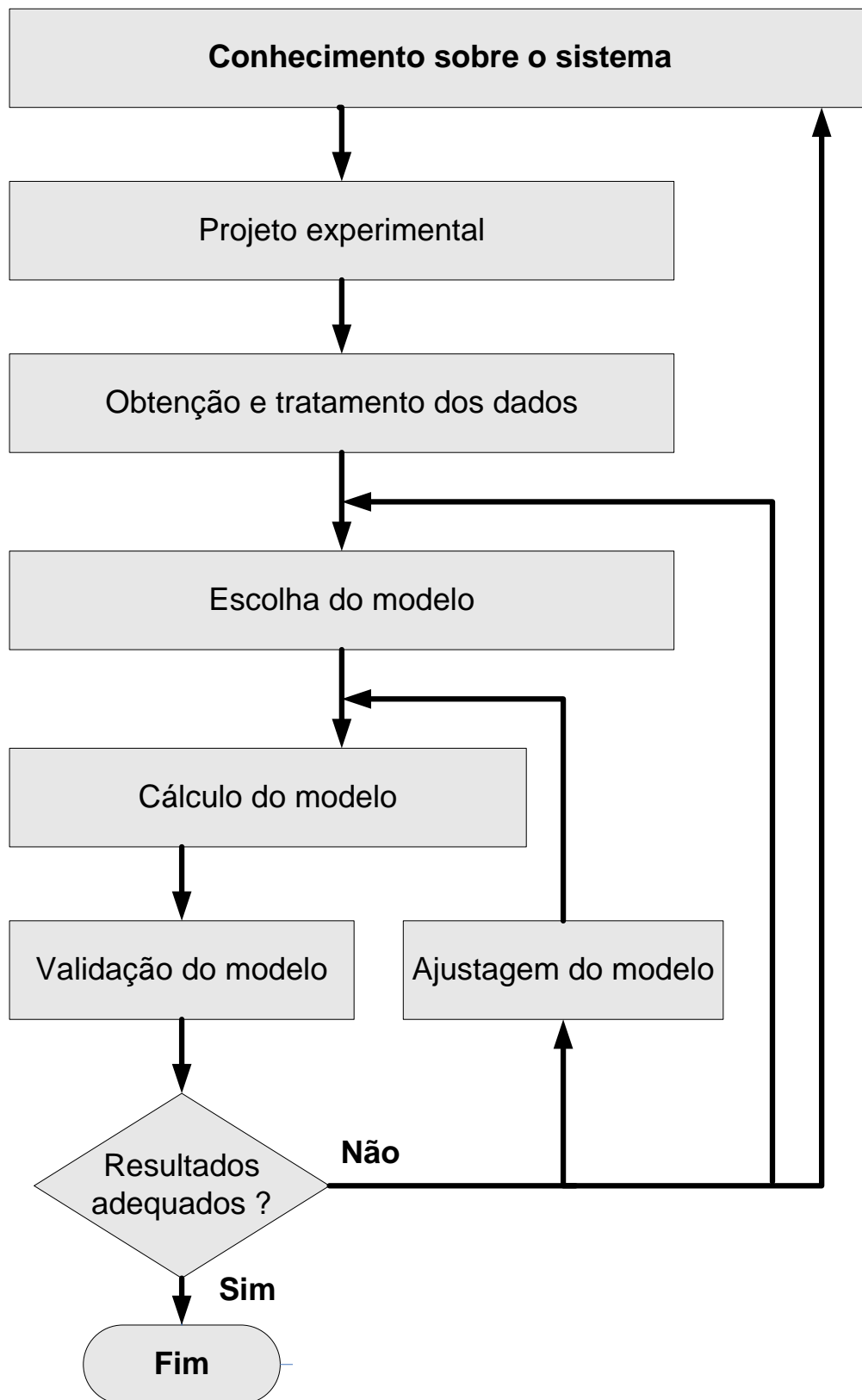


Figura 1.16 - Ciclo de identificação de sistemas dinâmicos

1.10 – Análise de comportamento no domínio do tempo

1.10.1 - Estabilidade

A estabilidade de um sistema linear em malha fechada pode ser determinada pela localização dos pólos em malha fechada no Plano-s (Figura 1.17). Se quaisquer destes pólos está no semiplano direito do Plano-s, então, para tempos crescentes, vão resultar no modo dominante e a resposta transitória aumenta monotonicamente ou oscila com amplitude crescente. Isto representa um sistema instável. Para tal sistema, tão logo a fonte de energia seja ligada, a saída poderá crescer com o tempo. Se não existir saturação no sistema ou algum obstáculo ou limitador mecânico, o sistema pode vir a sofrer danos e parar de funcionar, já que a resposta de um sistema físico real não pode aumentar indefinidamente.

Caso todos os pólos de malha fechada estejam no semiplano esquerdo do Plano-s, qualquer resposta transitória alcança o equilíbrio, representando, portanto, um sistema estável. A Figura 1.17 mostra as regiões estáveis e instáveis do Plano-s.

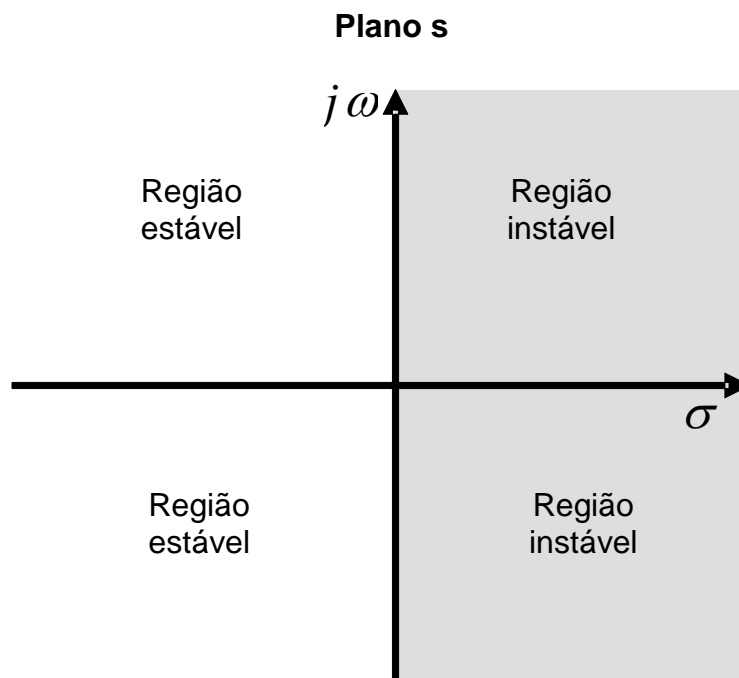


Figura 1.17 - Regiões estáveis e instáveis do Plano-s

Para o propósito de análise e projeto pode-se classificar a estabilidade dos sistemas como estabilidade absoluta e estabilidade relativa. A estabilidade absoluta refere-se à condição de se o sistema é estável ou instável. Sendo o sistema estável, é de interesse conhecer quanto o sistema é estável, sendo o seu grau de estabilidade uma medida de sua estabilidade relativa.

O fato de um sistema linear ser estável ou instável é uma característica do sistema em si e não depende da entrada do sistema. Os pólos da entrada, ou função excitadora, não afetam a propriedade de estabilidade do sistema, mas contribuem para os termos da resposta estacionária na solução. Portanto, o problema da estabilidade absoluta pode ser resolvido não posicionando pólos de malha fechada no semiplano direito do Plano- s , incluindo-se o eixo $j\omega$.

Pólos de malha fechada no eixo $j\omega$ resultam em oscilações com amplitudes constantes no tempo. Em casos práticos, onde o ruído se faz presente, a amplitude das oscilações pode crescer com uma taxa determinada pela intensidade do ruído. Portanto, num sistema de controle não se deve ter pólos de malha fechada no eixo $j\omega$.

O mero fato de todos os pólos de malha fechada estarem no semiplano esquerdo do Plano- s não garante características satisfatória para a resposta transitória. Se houver pólos de malha fechada complexos conjugados dominantes perto do eixo $j\omega$, a resposta transitória pode apresentar oscilações excessivas ou ser muito lenta. Portanto, para garantir uma resposta transitória rápida e ainda bem amortecida, é necessário que os pólos de malha fechada dos sistemas se localizem em regiões particulares do plano complexo.

A característica básica da resposta transitória de um sistema em malha fechada é determinada a partir dos pólos de malha fechada. Portanto, em problemas de análise, é importante localizar os pólos em malha fechada no Plano- s . No projeto de sistemas em malha fechada, deseja-se ajustar os pólos e zeros em malha aberta de modo a colocar os pólos e zeros em malha fechada nas posições desejadas no Plano- s .

Como já foi visto, o principal método para a determinação da estabilidade de um sistema é a determinação das raízes da equação característica e a verificação de seus posicionamentos no

Plano-s. Contudo, no projeto, quando há parâmetros desconhecidos, métodos tais como: Critério de Routh-Hurwitz, Critério de Nyquist e o Diagrama de Bode são úteis para a determinação da estabilidade de sistemas lineares contínuos, sem necessitar a determinação das raízes da equação característica.

1.10.2 - Comportamento dos sistemas de ordem zero, de primeira e de segunda ordem.

A relação entre a entrada e a saída de um sistema pode ser representada de uma forma genérica e simplificada pela Equação 1.10:

$$a_n \frac{d^n q_o}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} q_o}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dq_o}{dt} + a_0 q_o = b_m \frac{d^m q_i}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} q_i}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dq_i}{dt} + b_0 q_i$$

Equação 1.10

Onde: q_o = valor de saída

q_i = valor de entrada

t = tempo

a_s e b_s = constantes do sistema físico

Sistemas de Ordem Zero

Ocorre quando todas as constantes a_s e b_s da Equação 1.10 de ordem maior que a_0 , b_0 são iguais a zero. A equação diferencial pode ser representada pela equação algébrica simples:

$$a_0 q_o = b_0 q_i$$

Equação 1.11

ou, na forma de função de transferência,

$$Q(s) = \frac{Q_o(s)}{Q_i(s)} = \frac{b_0}{a_0}$$

Equação 1.12

Como se pode notar os sistemas de ordem zero possuem apenas um ganho estático, não apresentando nenhum comportamento dinâmico (Equação 1.12).

Sistemas de Primeira ordem

Ocorre quando todas as constantes a_s e b_s da Equação 1.10, exceto a_0 , a_1 e b_0 , são iguais a zero. Neste caso, a equação diferencial que descreve o funcionamento do sistema pode ser rescrita como:

$$a_1 \frac{dq_o}{dt} + a_0 q_o = b_0 q_i$$

Equação 1.13

ou, na forma de função de transferência,

$$Q(s) = \frac{K}{\tau s + 1}$$

Equação 1.14

Na Equação 1.14, K representa o valor em regime permanente e τ a constante de tempo do sistema.

A Figura 1.18 mostra a resposta de um sistema de primeira ordem, frente a uma excitação do tipo degrau unitário, em função de sua constante de tempo. O sistema pode ser considerado estabilizado quando sua resposta alcança 98,2 % do seu valor de regime, o que acontece transcorrido quatro vezes sua constante de tempo (4τ).

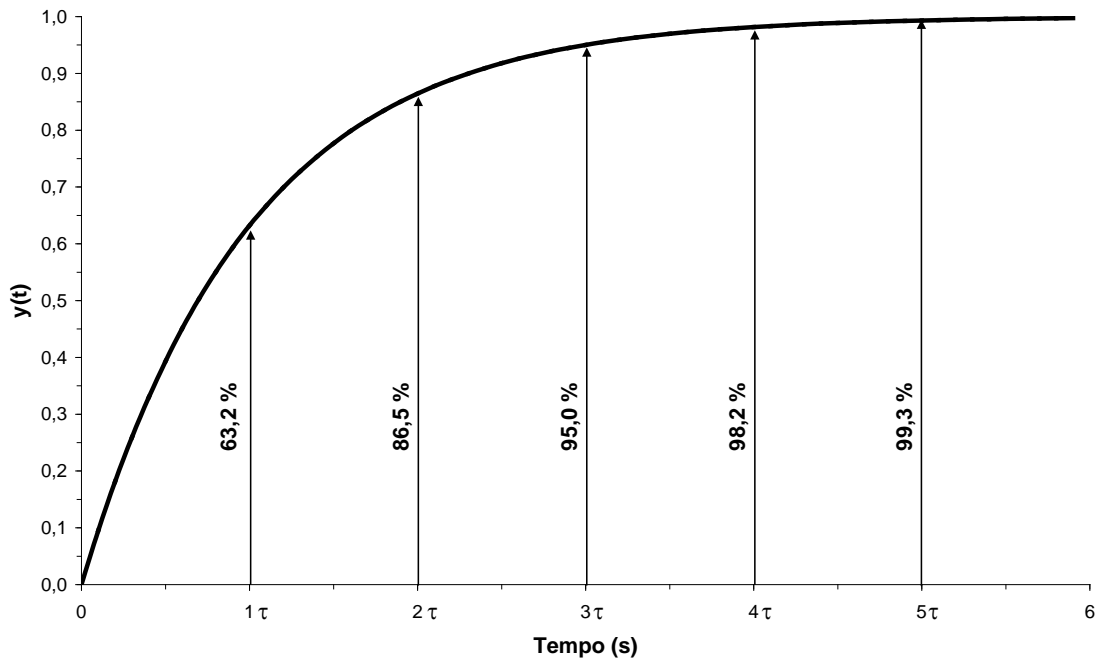


Figura 1.18 – Resposta a um degrau unitário de um sistema de primeira ordem

Sistemas de Segunda ordem

Ocorre quando todas as constantes a_s e b_s da Equação 1.10, exceto a_0 , a_1 , a_2 e b_0 , são iguais a zero. Neste caso, a equação diferencial que descreve o funcionamento do sistema pode ser reescrita como:

$$a_2 \frac{d^2 q_o}{dt^2} + a_1 \frac{dq_o}{dt} + a_0 q_o = b_0 q_i \quad \text{Equação 1.15}$$

Nos sistemas de segunda ordem, tem-se a sensibilidade estática calculada por $K = \frac{b_0}{a_0}$; a

frequência natural não amortecida calculada por $\omega_n = \sqrt{\frac{a_0}{a_2}}$ e o fator de amortecimento

calculado por $\xi = \frac{a_1}{2\sqrt{a_0 a_2}}$.

Na forma de função de transferência, a Equação 1.15 pode, então, ser representada pela Equação 1.16.

$$Q(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

Equação 1.16

A constante de tempo de um sistema de segunda ordem é calculada por $T = \frac{1}{\xi \omega_n}$.

A Figura 1.19 apresenta a resposta de um sistema de segunda ordem em face de uma excitação do tipo degrau unitário, em função de seu fator de amortecimento.

Os sistemas de segunda ordem são ditos sobreamortecidos se o fator de amortecimento for maior do que um, criticamente amortecido, se o fator de amortecimento for igual a um e subamortecido se o fator de amortecimento for menor do que um. No caso em que o fator de amortecimento é nulo, o sistema é considerado marginalmente estável.

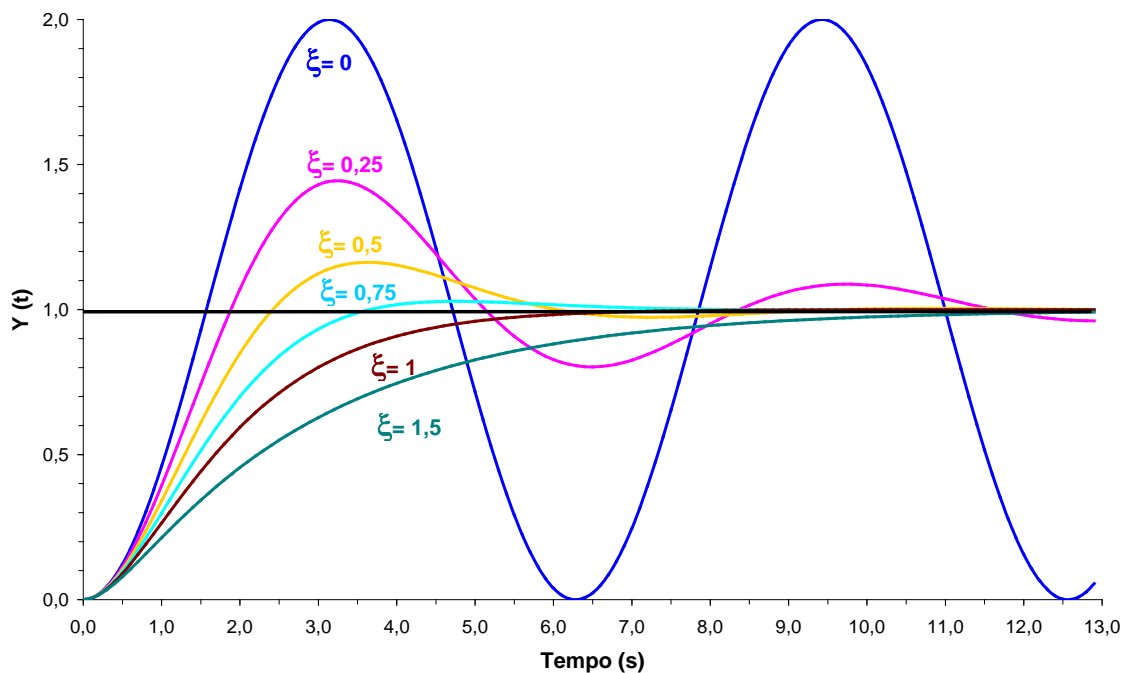


Figura 1.19 – Resposta a um degrau unitário de um sistema de segunda ordem em função do fator de amortecimento

1.10.3 – Especificações de desempenho no domínio do tempo

Em muitos casos práticos, as características de desempenho desejadas dos controladores são especificadas em termos e grandezas no domínio do tempo. Sistemas com armazenamento de energia não podem responder instantaneamente e terão respostas transitórias sempre que sujeitos a entradas ou perturbações.

Freqüentemente, as características de desempenho de um sistema de controle são especificadas em termos da resposta transitória para uma entrada degrau unitário, pois esta entrada é fácil de gerar e é suficientemente severa. (Se a resposta a uma entrada em degrau é conhecida, é matematicamente possível computar a resposta para qualquer entrada.)

A resposta transitória de um sistema para uma entrada degrau unitário depende das condições iniciais. Para conveniência na comparação de respostas transitórias de vários sistemas, costuma-se usar a condição inicial padrão de que o sistema está inicialmente em repouso com a saída e todas suas derivadas nulas. Desta forma, as características de resposta podem ser facilmente comparadas.

A resposta transitória de um sistema de controle na prática geralmente apresenta oscilações amortecidas antes de alcançar o estado ou regime estacionário. Ao especificar as características de resposta transitória de um sistema de controle para uma entrada degrau unitário, é comum se especificar o seguinte:

- tempo de atraso, t_d (*delay time*)
- tempo de subida, t_r (*rise time*)
- instante do pico, t_p (*peak time*)
- sobre-sinal máximo, M_p (*maximum overshoot*)

- tempo de acomodação, t_s (*settling time*)

Estas especificações são a seguir definidas e mostradas graficamente na Figura 1.20.

Tempo de atraso, t_d (*delay time*): tempo de atraso é o tempo necessário para a resposta alcançar pela primeira vez a metade do valor final.

Tempo de subida, t_r (*rise time*): tempo de subida é o tempo necessário para a resposta passar de 10% a 90%, 5% a 95%, ou 0% a 100% do seu valor final. Para sistemas de segunda ordem subamortecidos, usa-se normalmente o tempo de subida de 0% a 100%. Para sistemas sobreamortecidos, normalmente se usa o tempo de subida de 10% a 90%.

Instante do pico, t_p (*peak time*): instante do pico é o tempo necessário para a resposta alcançar o primeiro pico do sobre-sinal.

Sobre-sinal máximo (percentual), M_p (*maximum overshoot*): sobre-sinal máximo é o máximo valor de pico da curva de resposta medido a partir do valor unitário. Se o valor final de regime estacionário da resposta difere da unidade, então comumente se usa o máximo sobre-sinal percentual. É definido pela Equação 1.17

$$M_p[\%] = 100 \cdot \frac{y(t_p) - y(\infty)}{y(\infty)} \quad \text{Equação 1.17}$$

O valor do sobre-sinal máximo (percentual) indica diretamente a estabilidade relativa do sistema.

Tempo de acomodação, t_s (*settling time*): o tempo de acomodação é o tempo necessário para a curva de resposta alcançar e permanecer dentro de uma faixa em torno do valor final, faixa esta de magnitude especificada por uma porcentagem absoluta do valor final (normalmente 5% ou 2%). O tempo de acomodação está relacionado com a maior constante de tempo do

sistema de controle. A escolha de que porcentagem usar no critério de erro pode ser feita a partir dos objetivos do projeto de sistema em questão.

As especificações no domínio do tempo são bastante importantes, visto que a maioria dos sistemas de controle são sistemas de domínio do tempo; isto é, eles devem apresentar respostas temporais aceitáveis. Isto significa que o sistema de controle deve ser modificado até que a resposta transitória seja satisfatória. Note que especificando os valores de t_d , t_r , t_p , M_p e t_s a forma da curva de resposta está virtualmente determinada. Isto pode ser visto claramente na Figura 1.20.

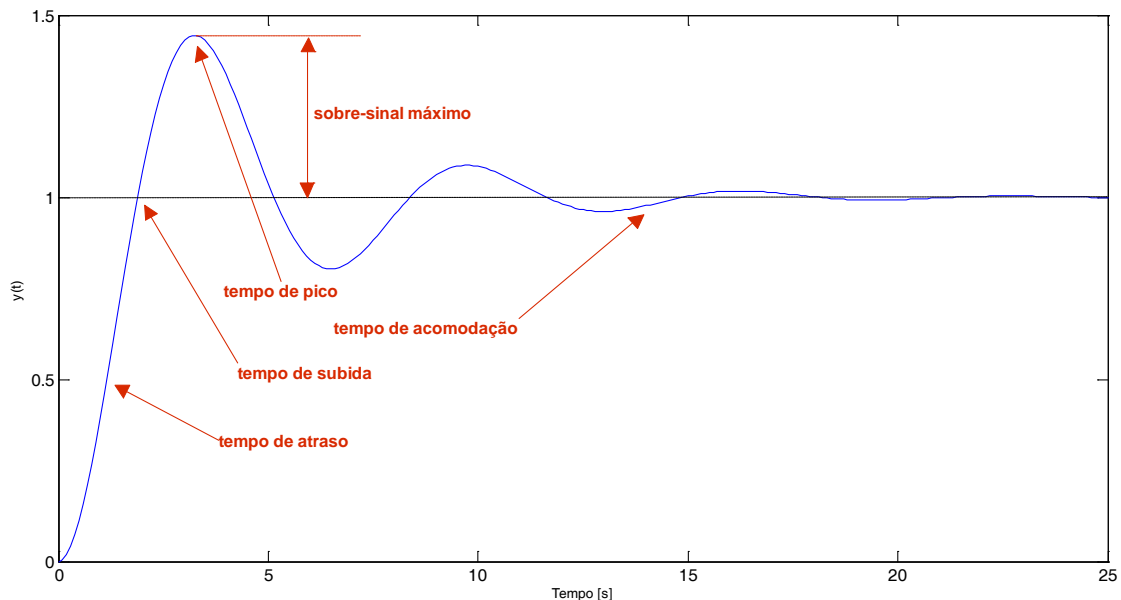


Figura 1.20 – Especificações no domínio do tempo de um sistema de segunda ordem subamortecido

No caso de sistemas de segunda ordem, as especificações podem ser calculadas a partir do fator de amortecimento e da frequência natural não amortecida, conforme as equações apresentadas a seguir.

$$M_p [\%] = 100 \cdot e^{-\frac{\pi \zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

Equação 1.18

$$t_d \cong \frac{1+0.7\xi}{\omega_n} \quad \text{ou} \quad t_d \cong \frac{1.1+0.125\xi+0.469\xi^2}{\omega_n} \quad p/ \quad 0 < \xi < 1 \quad \text{Equação 1.19}$$

$$t_r = \frac{0.8+2.5\xi}{\omega_n} \quad \text{ou} \quad t_r = \frac{1-0.4167\xi+2.917\xi^2}{\omega_n} \quad p/ \quad 0 < \xi < 1 \quad \text{Equação 1.20}$$

$$t_s \cong \frac{3.2}{\xi \omega_n} \quad p/ \quad 0 < \xi < 0.69 \quad e \quad t_s = \frac{4.5\xi}{\omega_n} \quad p/ \quad \xi > 0.69 \quad \text{Equação 1.21}$$

Observa-se que no caso dos sistemas de segunda ordem, o controlador pode ser projetado a partir da especificação do sobre-sinal máximo permitido. Assim, define-se o fator de amortecimento, que associado a uma das especificações no domínio do tempo, fornece o valor necessário da frequência natural não amortecida, fixando, desta forma, o posicionamento dos pólos no Plano “s” (Figura 1.21), necessário para que o sistema apresente a curva de resposta desejada.

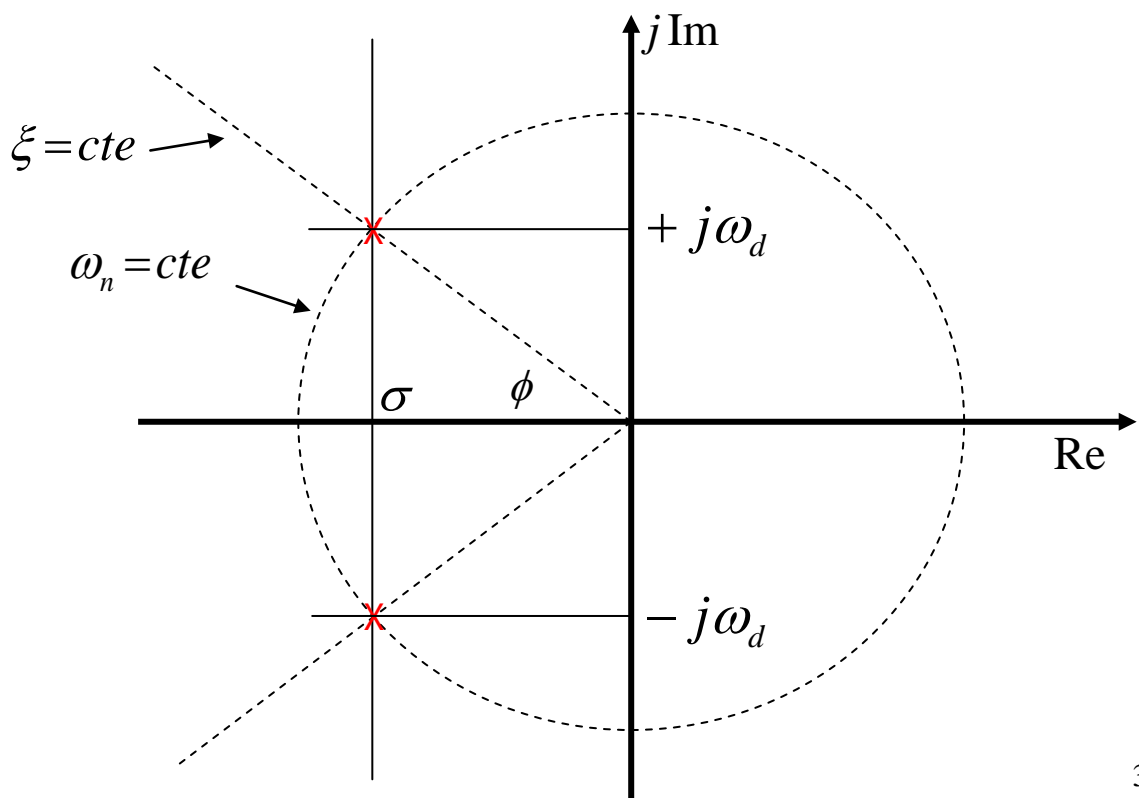


Figura 1.21 – Mapa de pólos de um sistema de segunda ordem em função do fator de amortecimento e da frequência natural não amortecida

1.11 - Análise de comportamento no domínio da frequência

A análise do comportamento de um sistema de controle é mais intuitiva se realizada no domínio do tempo. No entanto, a análise no domínio da frequência possui certas vantagens, principalmente por poder ser realizada sem o modelo matemático do sistema, mas somente a partir da resposta experimental, por não ser limitada a sistemas de baixa ordem e por ser mais conveniente para a determinação da sensibilidade ao ruído e à variação de parâmetros do sistema.

A resposta em frequência de um determinado sistema é a representação da resposta, em regime permanente, do sistema sujeito a uma excitação senoidal num espectro de frequência. Nesta condição, a resposta característica de um sistema linear é também senoidal com a mesma frequência de excitação, porém, com magnitude e fase diferentes. Ou seja, a resposta em frequência mostra as diferenças de magnitudes e fases entre a entrada e a saída senoidal.

Pode ser determinada por diversos métodos (Diagrama de Bode, Diagrama de Nyquist e Carta de Nichols). No MATLAB os respectivos comandos são: “*bode*”, “*nyquist*” e “*nichols*”. Qualquer um dos métodos apresenta as mesmas informações; a diferença está apenas na maneira como ela é apresentada. Neste livro será dada ênfase no Diagrama de Bode.

Para um determinado sistema, por exemplo o representado pela Equação 1.22, obtém-se o Diagrama de Bode (Figura 1.22) fazendo:

```
>> % Função de transferência do sistema
>> G=tf([5],[1 5 5 5]);
>> % Diagrama de Bode
>> bode(G)
```

>> grid on

$$G(s) = \frac{5}{s^3 + 5s^2 + 5s + 5}$$

Equação 1.22

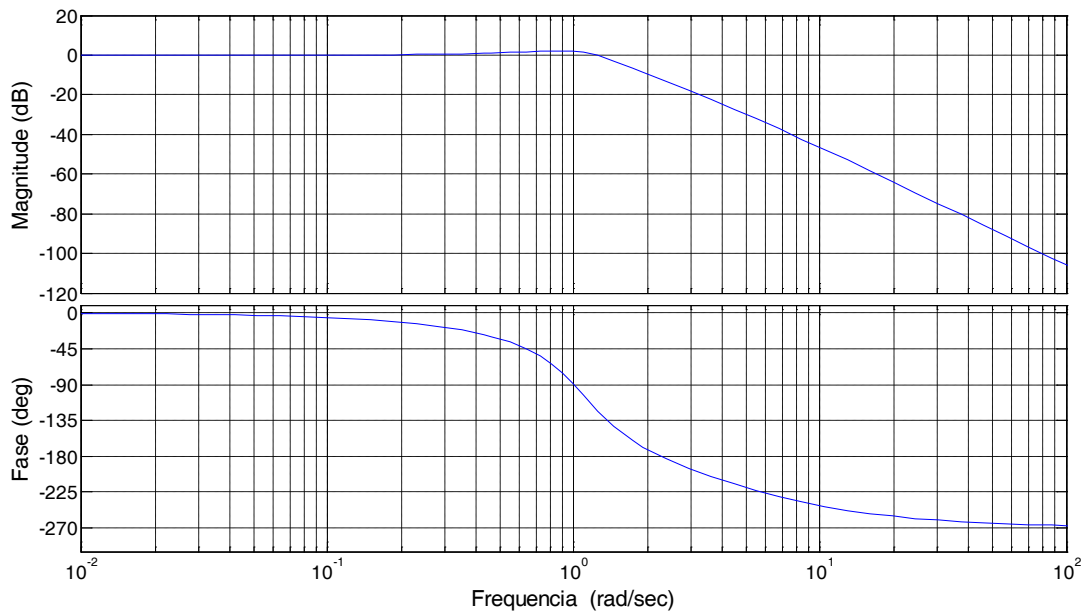


Figura 1.22 – Diagrama de Bode do sistema $G(s) = \frac{5}{s^3 + 5s^2 + 5s + 5}$

1.11.1 – Especificações no domínio da frequência

As especificações de desempenho de um sistema no domínio da frequência são dadas em termos de: pico de ressonância (M_r); frequência de ressonância (ω_r); largura de faixa (BW) e taxa de corte.

Pico de ressonância (M_r)

O pico de ressonância M_r é o máximo valor da curva de magnitude versus frequência.

Em geral a magnitude de M_r fornece indicação da estabilidade relativa do sistema em malha fechada. Normalmente um valor grande de M_r corresponde a um valor grande do sobre-sinal máximo (M_p) de uma resposta a um degrau.

O pico de ressonância do sistema representado pela Equação 1.22 é $M_r=2,18[dB]$ e ocorre a $\omega_r=0,88\left[rad/s\right]$ (-).

Frequência de ressonância (ω_r)

A frequência de ressonância (ω_r) é a frequência na qual ocorre o pico de ressonância M_r .

Largura de faixa (BW)

A largura de faixa (BW) é a frequência para a qual a magnitude cai a 70,7% (3 dB) de seu valor de frequência zero.

Geralmente a BW de um sistema de controle fornece indicação da resposta transiente do sistema no domínio do tempo.

Um valor grande de BW corresponde a um tempo de subida (t_r) mais rápido, já que sinais de frequência mais elevadas passam mais facilmente pelo sistema (e vice-versa).

A BW também indica a característica de filtragem de ruído e a robustez do sistema.

A largura de faixa do sistema representado pela Equação 1.22 é $BW=1,46\left[rad/s\right]$ (-).

Taxa de corte

A taxa de corte da resposta em frequência é definida pelo decaimento da curva magnitude versus frequência para frequências acima da BW . Denota a habilidade de um sistema distinguir entre sinais e ruídos.

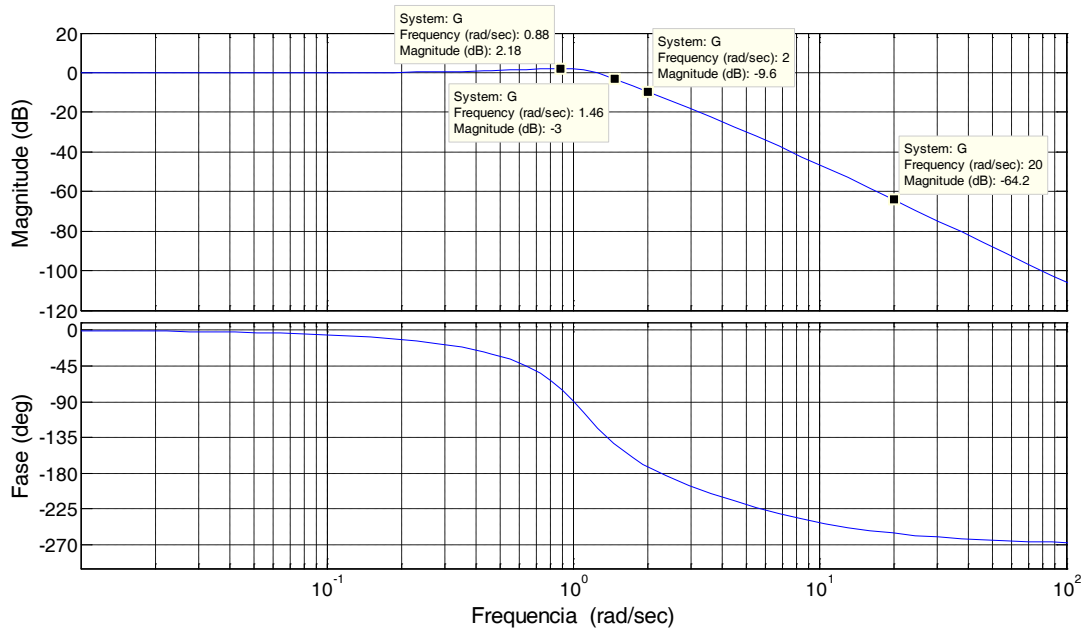


Figura 1.23 - Especificações no domínio da frequência do sistema da Equação 1.22

A taxa de corte do sistema representado pela Equação 1.22 pode ser obtida pela $-$. O sistema apresenta uma magnitude de $-9,6[dB]$ a uma frequência de $2[rad/s]$ e, uma década acima, apresenta magnitude de $-64,2[dB]$, ou seja, tem uma taxa de corte de $54,5[dB/década]$.

1.11.2 – Índices de desempenho no domínio da frequência

Os índices de desempenho de um sistema em malha fechada no domínio da frequência são: margem de ganho (MG); frequência de cruzamento de ganho (ω_g); margem de fase (ΦM) e frequência de cruzamento de fase (ω_c) e estão apresentados graficamente no Diagrama de Bode da Figura 1.24.

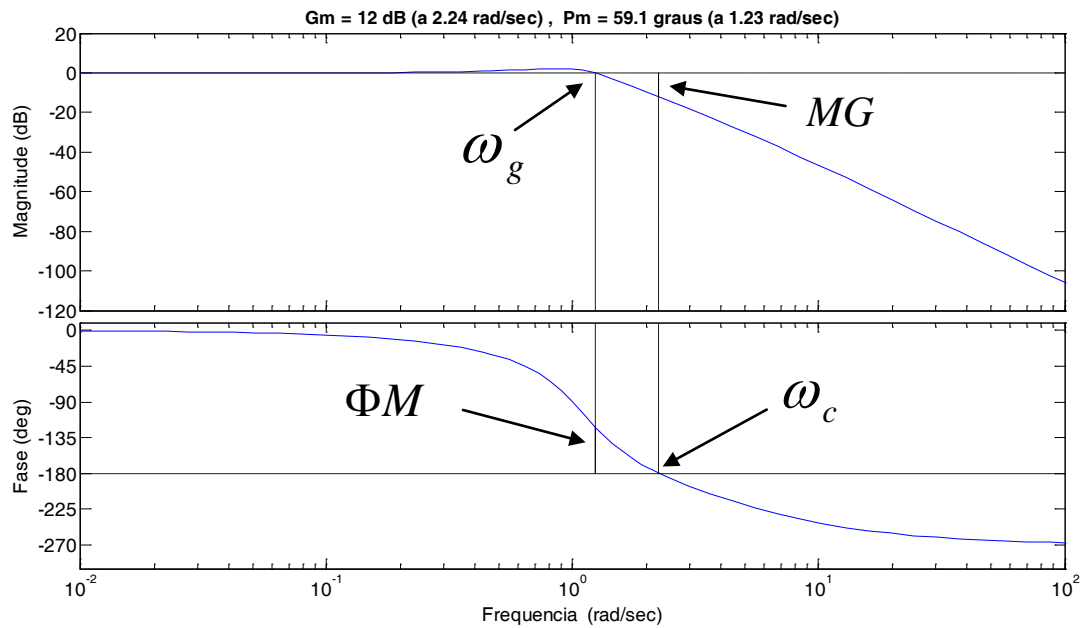


Figura 1.24 – Diagrama de Bode, obtido pelo comando “margin” do MATLAB, indicando os índices de desempenho do sistema

Margem de Ganho (MG)

Considerando-se o sistema em malha fechada com um ganho K no caminho avante da função de transferência, de acordo com o diagrama de blocos da Figura 1.25, define-se margem de ganho como sendo a alteração necessária no ganho para levar o sistema à instabilidade.

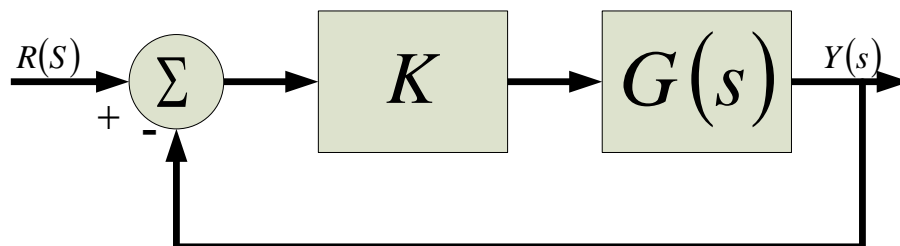


Figura 1.25 - Sistema em malha fechada com um ganho K no caminho avante da função de transferência

A margem de ganho pode ser determinada diretamente no diagrama de Bode apresentado na Figura 1.22, ou, de maneira mais conveniente, utilizando o comando “margin” do MATLAB (Figura 1.24).

Sistemas com maior margem de ganho podem suportar maiores mudanças em seus parâmetros antes de se tornarem instáveis em malha fechada.

A margem de ganho do sistema representado pela Equação 1.22 é $MG=12[dB]$.

Frequência de cruzamento de ganho (ω_g)

A frequência de cruzamento de ganho ω_g é definida como sendo a frequência na qual a magnitude é unitária (ou 0 dB).

A frequência de cruzamento de ganho do sistema representado pela Equação 1.22 é $\omega_g=1,23[rad/s]$.

Margem de fase (ΦM)

Margem de fase é a quantia da fase, em graus, que pode ser adicionada na frequência de cruzamento de ganho ω_g antes que o sistema em malha fechada alcance a instabilidade.

A margem de fase mede a tolerância do sistema a um atraso temporal. Se houver um atraso maior que $180/\omega_c$ na malha (onde ω_c é a frequência na qual o deslocamento de fase é 180°), o sistema se tornará instável em malha fechada.

O tempo de atraso pode ser entendido como um bloco extra no caminho avanço do diagrama de bloco que adiciona fase ao sistema, mas não tem efeito no ganho. Ou seja, o tempo de atraso pode ser representado como um bloco com magnitude 1 e fase $\omega \cdot t[rad/s]$.

A Margem de fase do sistema representado pela Equação 1.22 é $\Phi M = 59,1$ graus.

Observa-se que, quando se faz mudanças no ganho, não é necessário refazer o Diagrama de Bode a fim de encontrar a nova margem de fase, já que adicionando ganho, tem-se somente alteração na curva de magnitude do diagrama. Isto é equivalente a mudar apenas o eixo y na curva de magnitude. Neste caso, obter a nova margem de fase é simplesmente uma questão de encontrar a nova frequência de cruzamento de ganho e ler na curva de fase a nova margem de fase.

Aplicando-se um ganho de 100, ou 40 [dB] ($20\log_{10} 100$), na Equação 1.22,

```
>> margin(100*G)
```

obtém-se o Diagrama de Bode da Figura 1.26 que mostra um sistema instável, com margem de fase de -54,9 graus.

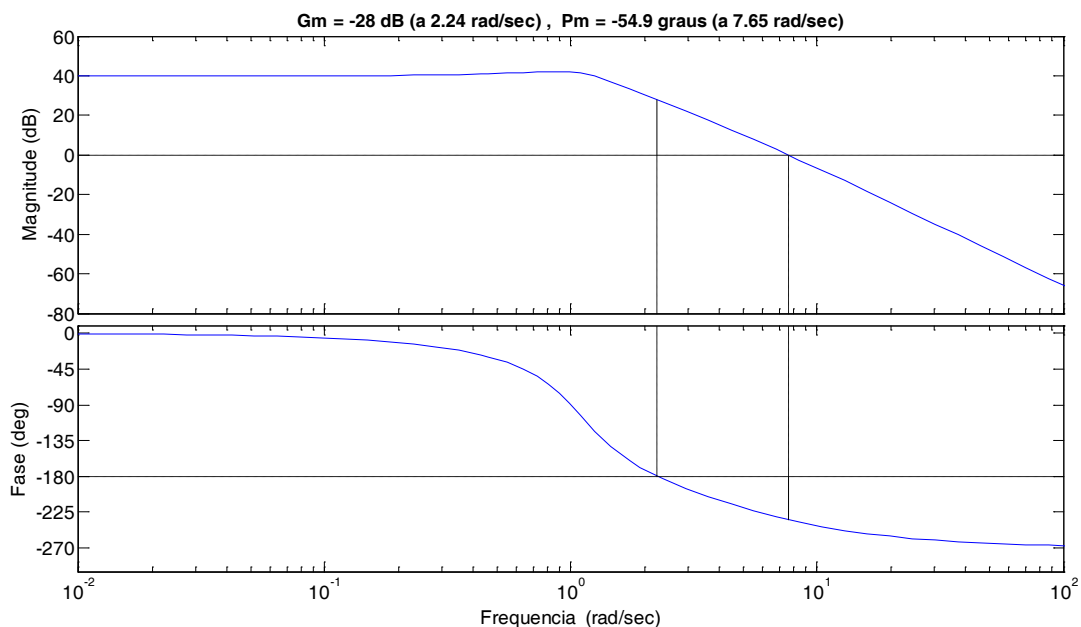


Figura 1.26 – Diagrama de Bode do sistema da Equação 1.22 com ganho de 100

A mesma informação pode ser obtida sem a necessidade da confecção de um novo diagrama de Bode do sistema acrescido do ganho estático. Basta marcar o ganho desejado e obter a margem de fase seguindo o desenho mostrado na Figura 1.27.

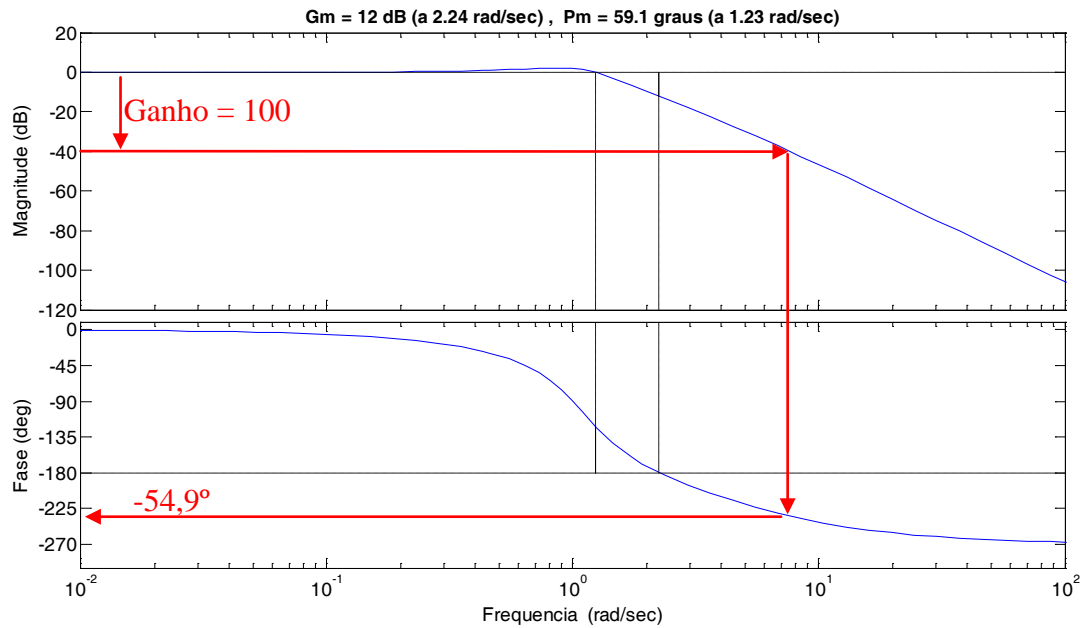


Figura 1.27 – Método para determinação da margem de fase a partir de uma alteração qualquer no ganho do sistema

Observa-se que o ganho aplicado (40 [dB], superior à margem de ganho ($MG=12$ [dB])), levou o sistema à instabilidade.

Frequência de cruzamento de fase (ω_c)

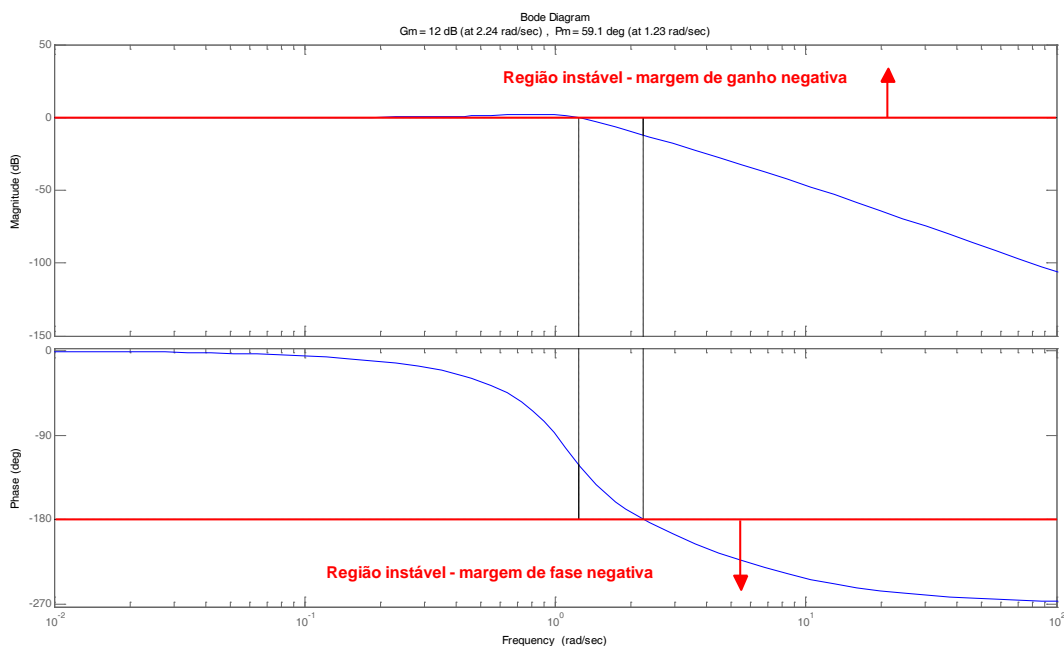
A frequência de cruzamento de fase ω_c é definida como a frequência na qual a magnitude da curva de fase é igual a -180° .

A frequência de cruzamento de fase do sistema representado pela Equação 1.22 é $\omega_c = 2,24 \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$.

1.11.3 – Estabilidade no domínio da frequência

No domínio da frequência analisa-se a estabilidade absoluta do sistema fazendo-se o Diagrama de Bode e determinando-se sua margem de fase e sua margem de ganho (Figura 1.28), caso uma delas seja negativa o sistema será instável.

A instabilidade também notada no caso em que a frequência de cruzamento de fase for maior



do que a frequência de cruzamento de ganho, para ganho unitário.

Figura 1.28 – Regiões de instabilidade no Diagrama de Bode

1.11.4 - Análise

Um melhor entendimento da resposta do sistema representado pela Equação 1.22 pode ser obtido analisando-se o Diagrama de Bode da Figura 1.22.

Nota-se que para baixas frequências não há praticamente alteração na magnitude da resposta em regime do sistema, apenas uma ligeira defasagem. A partir de 0,2 [rad/s] a magnitude da

resposta passa a aumentar até seu máximo, correspondente à frequência do pico de ressonância, acompanhada de um atraso de fase significativo. A magnitude da resposta é maior do que a da excitação até o ponto onde ocorre a frequência de cruzamento de ganho, a partir do qual, tem seu valor atenuado fortemente. Isto ocorre até a frequência de cruzamento de fase, a partir da qual o sistema se desestabiliza.

A Figura 1.29 mostra que para a frequência de excitação $\omega=0,1\left[\frac{rad}{s}\right]$ o sistema responde em regime permanente praticamente sem alteração de amplitude e fase. Excitado com $\omega_r=0,884\left[\frac{rad}{s}\right]$, correspondente a seu pico de ressonância, responde com um ganho de 2,18 [dB], ou ganho = $1,28 \left(\text{ganho}=10^{\frac{2,18[dB]}{20}} \right)$ e um atraso de 73,8 graus, ou 1,457 [s]. Para $\omega=1,1\left[\frac{rad}{s}\right]$ ocorre um ganho de 1,3 [dB] (1,16) e atraso de 104 graus (1,815 [s]), já para $\omega=2\left[\frac{rad}{s}\right]$, portanto acima da frequência de cruzamento de ganho, ocorre uma atenuação = -9,66 [dB] (0,33) e atraso de 172 graus (3,002 [s]), se aproximando da instabilidade.

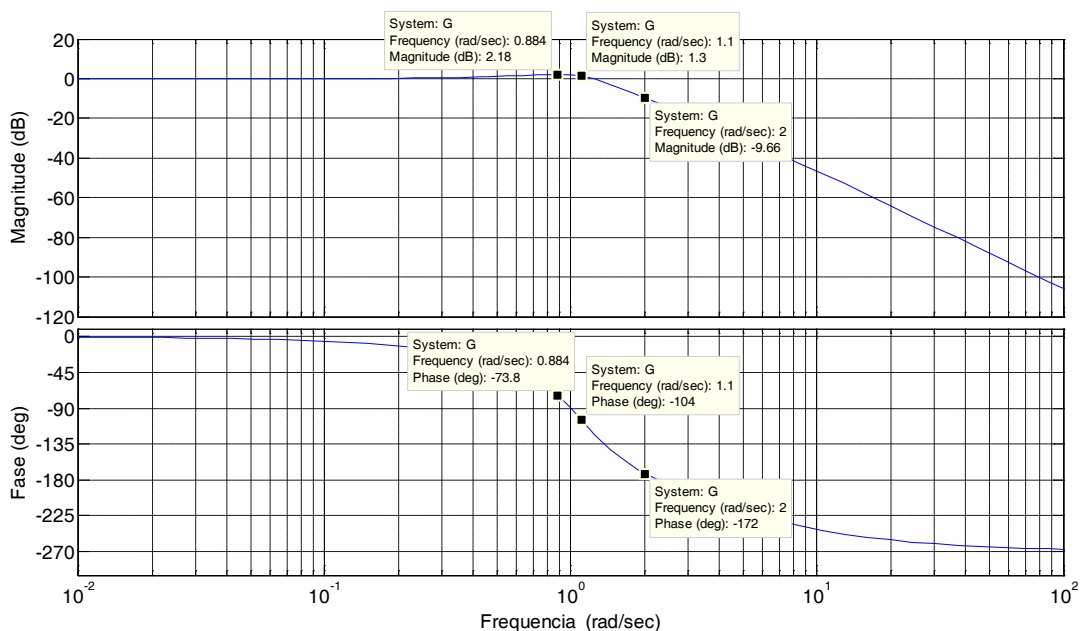


Figura 1.29 – Resposta do sistema em regime para diferentes frequências

Uma visualização da resposta em regime no domínio do tempo pode ser obtida fazendo-se:

```
para  $\omega=0,1\left[\frac{rad}{s}\right]$ ;  
>> % Função de transferência do sistema  
>> G=tf([5],[1 5 5 5]);  
>> % Sinal de excitação  
>> w=0.1;  
>> t=0:0.1:100;  
>> u=sin(w*t);  
>> % Resposta do sistema  
>> y=lsim(G,u,t);  
>> % Comparação entre a entrada e a saída  
>> subplot(221)  
>> plot(t,y,'b',t,u,'r')
```

```
para  $\omega=0,884\left[\frac{rad}{s}\right]$ ;  
>> w=0.884;  
>> u=sin(w*t);  
>> y=lsim(G,u,t);  
>> subplot(222)  
>> plot(t,y,'b',t,u,'r')  
>> axis([50,60,-1.5,1.5])
```

```
para  $\omega=1,1\left[\frac{rad}{s}\right]$ ;  
>> w=1.1;  
>> u=sin(w*t);  
>> y=lsim(G,u,t);  
>> subplot(223)  
>> plot(t,y,'b',t,u,'r')  
>> axis([50,60,-1.5,1.5])
```

```
para  $\omega=2\left[\frac{rad}{s}\right]$ ;
>> w=2;
>> u=sin(w*t);
>> y=lsim(G,u,t);
>> subplot(224)
>> plot(t,y,'b',t,u,'r')
>> axis([50,60,-1.5,1.5])
```

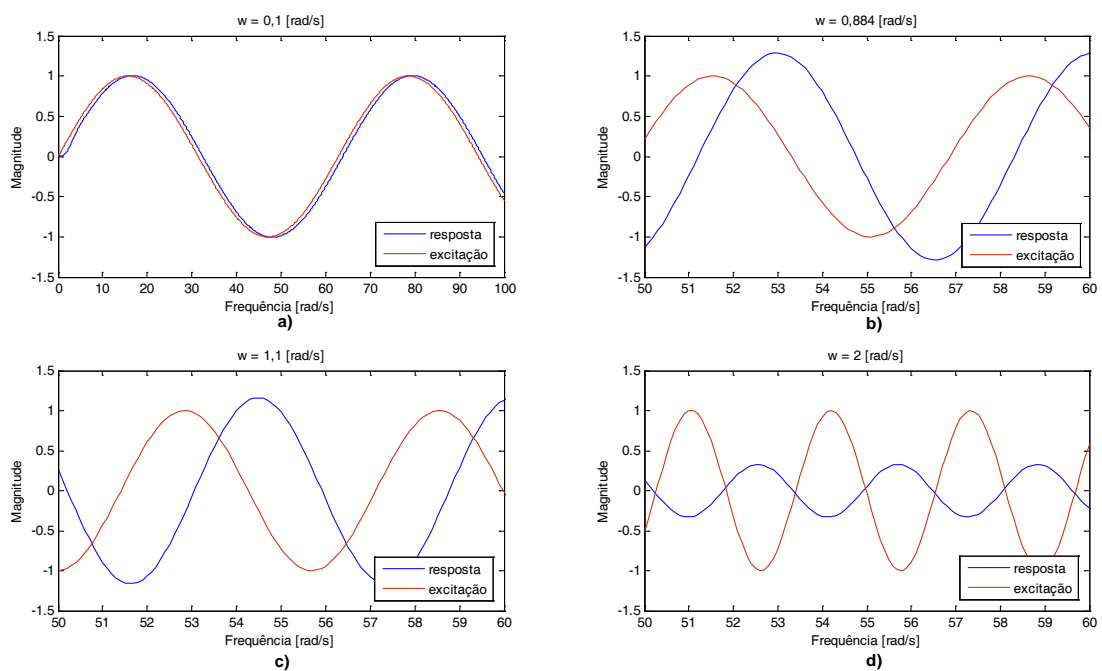


Figura 1.30 – Resposta em magnitude e fase do sistema da Equação 1.22. a) Frequência de excitação $\omega=0,1\left[\frac{rad}{s}\right]$. b) Frequência de excitação $\omega=0,884\left[\frac{rad}{s}\right]$. c) Frequência de excitação $\omega=1,1\left[\frac{rad}{s}\right]$. d) Frequência de excitação $\omega=2\left[\frac{rad}{s}\right]$

1.12 – Controlador liga-desliga

Os controladores de ação liga-desliga são considerados os mais simples e econômicos. No entanto, sua aplicação limita-se a sistemas onde uma elevada precisão não é necessária, nem tão pouco, um bom desempenho dinâmico.

O controlador liga-desliga é modelado por um relé (Figura 1.31). O sinal de controle $u(t)$ pode assumir dois valores, de acordo com o erro positivo ou negativo (Equação 1.23).

$$u(t) = \begin{cases} U_1 & \text{se } e(t) > 0 \\ U_2 & \text{se } e(t) < 0 \end{cases} \quad \text{Equação 1.23}$$

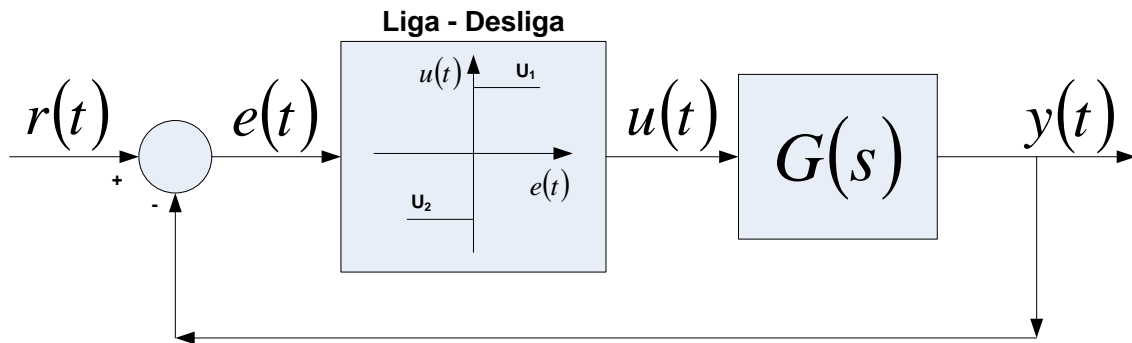


Figura 1.31 – Configuração do controlador liga-desliga

Na biblioteca do Simulink o bloco correspondente a ação liga-desliga pura (fazendo-se $E_1 = E_2 = 0$) pode ser encontrado com o nome de *Relay* dentro do agrupamento *Discontinuities*.

O controlador liga-desliga se implementado como um comparador, ou mesmo com um relé físico, pode apresentar comportamento espúrio quando o erro estiver próximo à zero, principalmente na presença de ruídos no sinal de erro.

Para evitar este tipo de comportamento utiliza-se o efeito de histerese, conforme a Figura 1.32.

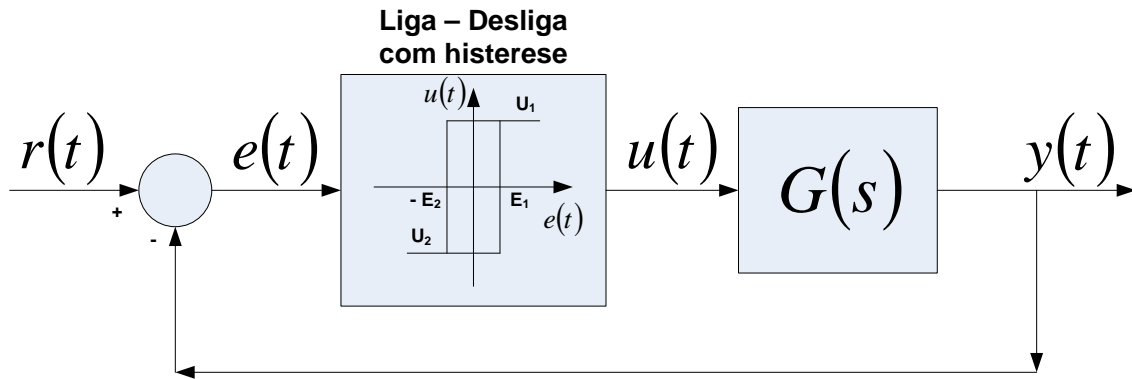


Figura 1.32 – Controlador liga-desliga com o efeito de histerese

Na biblioteca do Simulink, o bloco correspondente a ação liga-desliga com histerese (Figura 1.32) também pode ser encontrado com o nome de *Relay*.

Neste caso o comportamento do controlador passa a ser:

- Se $u(t)=U_1$, $e(t)$ tem que descer abaixo de $-E_2$ para que haja o chaveamento para U_2 .
- Se $u(t)=U_2$, $e(t)$ tem que subir acima de E_1 para que haja o chaveamento para U_1 .

Para melhor entendimento a Figura 1.33 mostra a simulação de um processo qualquer em malha fechada com um controlador liga-desliga.

A Figura 1.34 apresenta as curvas de $r(t)$, $e(t)$, $u(t)$ e $y(t)$, resultadas da simulação do sistema com o controle liga-desliga com histerese. Nota-se que, em regime permanente, a saída do sistema apresenta uma oscilação em torno do valor de referência, o que evidencia a baixa precisão deste tipo de controlador.

A amplitude e a frequência da oscilação são funções do intervalo de erro admitido $[E_1, E_2]$. O estabelecimento deste intervalo deve ser feito considerando-se a precisão requerida, os níveis de ruídos e a vida útil dos componentes.

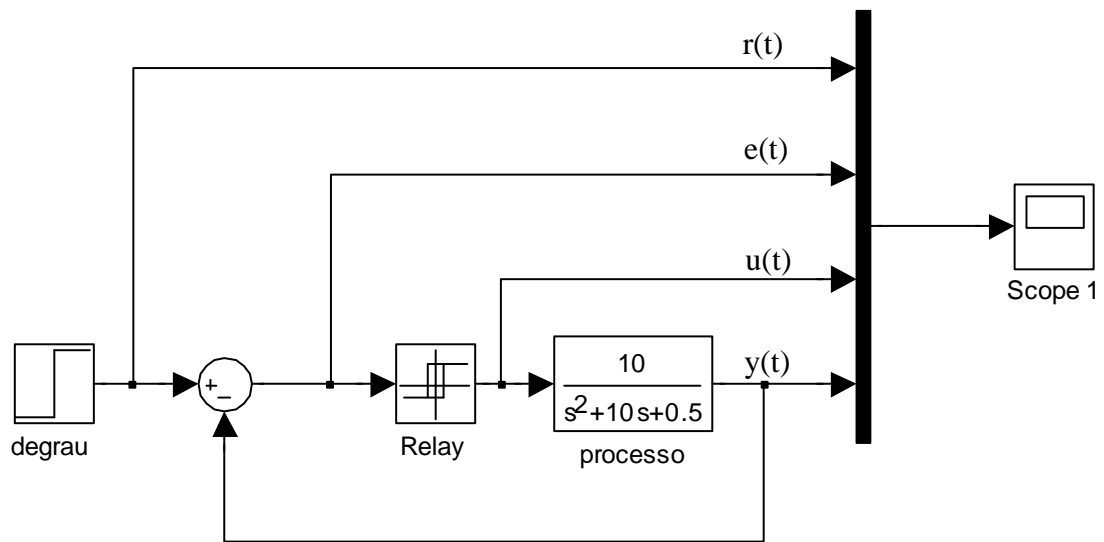


Figura 1.33 – Simulação de um processo qualquer com controlador liga-desliga

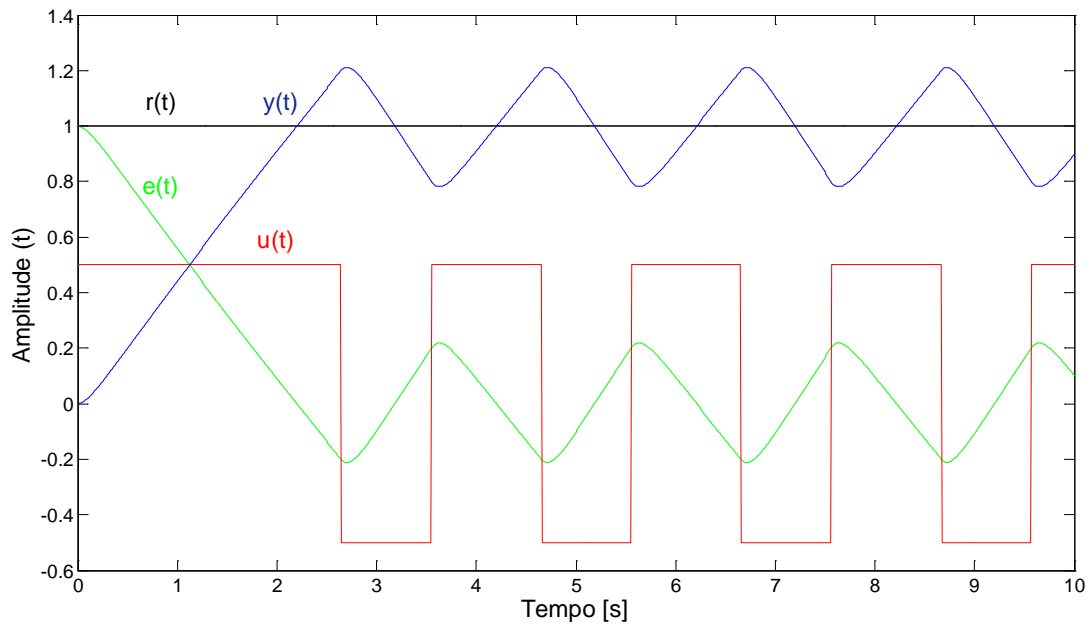


Figura 1.34 – Resultado da simulação do sistema da Figura 1.33

1.13 – Controladores PID

A estratégia de controle seguramente mais utilizada é a PID. Está presente em equipamentos utilizados em praticamente todas as áreas da atividade humana. Esta preferência se dá principalmente devido à simplicidade no ajuste de seus parâmetros e pelo fato de seu algoritmo estar presente em praticamente todos os equipamentos de controle disponíveis na indústria.

O controlador PID opera ciclicamente, calculando o erro entre a variável controlada e o valor desejado e, em função deste desvio, baseado nas ações de controle projetadas, o controlador gera um sinal de controle que atua no sistema sob controle.

1.13.1 - Ações de controle

As ações de controle utilizadas nos controladores PID são do tipo proporcional (P), integral (I) e derivativa (D) sendo que podem ser utilizadas de forma separada ou em conjunto de acordo com os seguintes controladores:

- Controlador Proporcional (P);
- Controlador Proporcional e Integral (PI);
- Controlador Proporcional e Derivativo (PD) e,
- Controlador Proporcional, Integral e Derivativo (PID).

O controlador P utiliza apenas a ação proporcional, o PI utiliza as ações proporcional e integral, o PD as ações proporcional e derivativa e, finalmente, o controlador PID utiliza as três ações de controle. Dentre estes controladores o PD é o menos utilizado, sendo os controladores P, PI e PID os mais comumente encontrados.

No escolha do controlador deve-se optar pelo controlador mais simples que atenda as exigências de desempenho especificadas no projeto.

1.13.2 - Etapas do projeto

O projeto de controladores envolve basicamente três etapas:

- Especificação do comportamento desejado para o sistema dinâmico a ser controlado;
- Determinação de como o controlador (compensador) deve ser acoplado ao sistema a ser controlado, e,
- Cálculo dos parâmetros do controlador para que o objetivo do projeto seja alcançado.

Especificação do comportamento dinâmico

As especificações do projeto são definidas de acordo com a resposta dinâmica necessária para o sistema e podem ser estabelecidas no domínio do tempo (item 1.10) ou no domínio da frequência (item 1.11). O projeto no domínio do tempo é mais facilmente realizado para sistemas dinâmicos de até segunda ordem ou a sistemas que de ordem superior que possam ser simplificados para segunda ordem, enquanto que projetos no domínio da frequência não apresentam esta limitação. Apesar disto, neste livro serão tratados apenas projetos no domínio do tempo.

Posição do controlador na malha

O controlador pode ser introduzido na malha de controle de diversas maneiras. As duas configurações mais utilizadas para a implementação do controlador são a compensação em série (ou cascata) e a compensação em realimentação. Neste livro será utilizada a compensação em série.

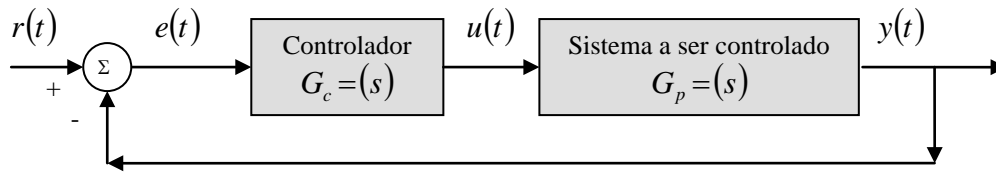


Figura 1.35 – Configuração em série do controlador com o sistema controlado.

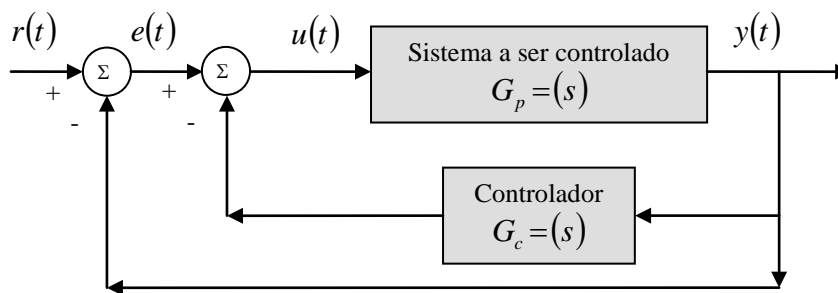


Figura 1.36 - Configuração em realimentação do controlador com o sistema controlado.

O cálculo dos parâmetros do controlador pode ser realizado posicionando-se os pólos e os zeros do sistema em malha fechada, ou por meio de um método de sintonia (item 1.14).

Determinação dos parâmetros dos controladores

Os controladores PID podem ser projetados no domínio do tempo, determinado-se seus parâmetros de forma a localizar os pólos do sistema em malha fechada nas posições que conduzam ao comportamento desejado do sistema.

Isto pode ser feito facilmente a partir das especificações do tempo de acomodação e do ganho estático desejado para os sistemas de primeira ordem (Equação 1.14).

No caso de sistemas de segunda ordem, a especificação do sobre-sinal máximo conduz a determinação do fator de amortecimento necessário (Equação 1.18) que, aliado a uma das

especificações de tempo de atraso (Equação 1.19), de subida (Equação 1.20) ou de acomodação (Equação 1.21), conduz à determinação da frequência natural não amortecida, definindo-se, desta forma, a função de transferência em malha fechada do sistema (Equação 1.16) e o respectivo posicionamento dos pólos no Plano s . Conhecendo-se a função de transferência que descreve o comportamento do sistema de segunda ordem em malha aberta pode-se chegar aos parâmetros do controlador PID.

Para os sistemas de ordem superior ou com atraso, uma boa prática para a determinação dos parâmetros do controlador PID é adotar as seguintes etapas:

- obter a resposta do sistema em malha aberta e definir o que deve ser melhorado;
- adicionar uma ação proporcional para melhorar o tempo de subida;
- adicionar uma ação integral para eliminar o erro em regime;
- adicionar uma ação derivativa para melhorar o sobre-sinal máximo;
- ajustar cada um das ações de controle até que se obtenha a resposta geral desejada.

Deve-se ter em mente que pode não ser necessário implementar todas as três ações de controles (proporcional, integral e derivativa) para se obter a resposta desejada do sistema.

1.13.3 - Formas de implementação do controlador PID

O controlador do PID pode ser implementado de diversas formas, dependendo da opção do fabricante do equipamento de controle. As formas mais utilizadas de implementação que serão aqui abordadas são a do tipo *paralelo alternativo* e *paralelo clássico*.

O controlador PID paralelo alternativo é implementado de acordo com o diagrama de blocos da Figura 1.37 e é descrito matematicamente conforme a Equação 1.24.

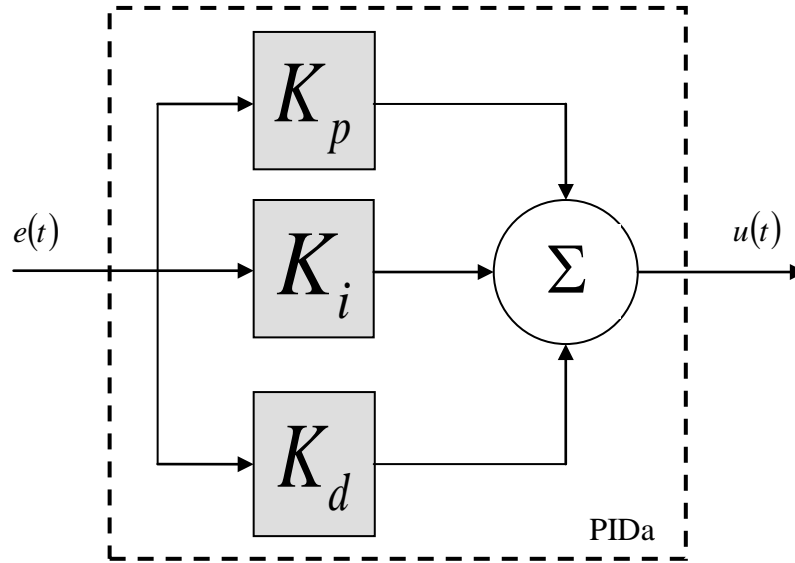


Figura 1.37 – Algoritmo PID paralelo alternativo

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int e(t) dt + K_d \frac{de}{dt}(t) + u_0 \quad \text{Equação 1.24}$$

Na Equação 1.24, o termo $e(t)$ representa o erro, ou desvio, entre a variável controlada e o valor desejado, o termo $u(t)$ representa o sinal de atuação (u_0 = valor inicial) e os termos K_p , K_i e K_d respectivamente os ganhos proporcional, integral e derivativo do controlador PID.

A função de transferência do controlador pode ser obtida aplicando-se a transformada de Laplace na Equação 1.24 (Equação 1.25).

$$G_{PIDa} = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s \quad \text{Equação 1.25}$$

Colocando-se numa forma mais adequada tem-se a Equação 1.26.

$$G_{PIDa} = \frac{K_d s^2 + K_p s + K_i}{s} \quad \text{Equação 1.26}$$

O controlador PID paralelo clássico é implementado de acordo com o diagrama de blocos da Figura 1.38 e é descrito matematicamente conforme a Equação 1.27.

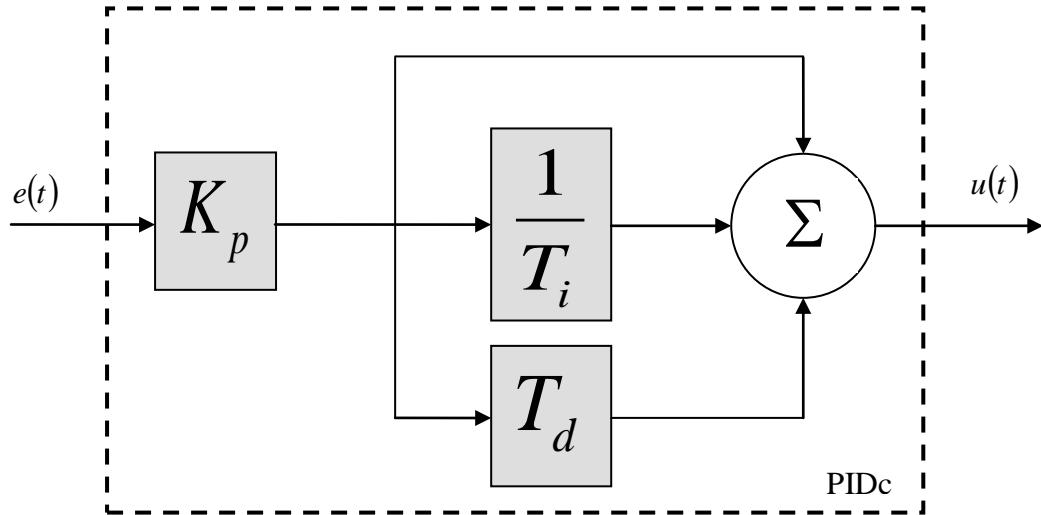


Figura 1.38 - Algoritmo PID paralelo clássico

$$u(t) = K_p e(t) + \frac{K_p}{T_i} \int e(t) dt + K_p T_d \frac{de}{dt}(t) + u_0 \quad \text{Equação 1.27}$$

Na implementação do controlador PID com o algoritmo paralelo clássico, nota-se que o ganho K_p influencia os demais ganhos.

A função de transferência do controlador pode ser obtida aplicando-se a Transformada de Laplace na Equação 1.27 (Equação 1.28).

$$G(s)_{PIDc} = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) \quad \text{Equação 1.28}$$

Colocando-se numa forma mais adequada tem-se a Equação 1.29.

$$G(s)_{PIDc} = \frac{K_p T_d s^2 + K_p s + \frac{K_p}{T_i}}{s}$$

Equação 1.29

Em ambas as formas de implementação, nota-se que a função de transferência do controlador PID possui a ordem do numerador superior à do denominador, indicando que sua implementação física não pode ser realizável, portanto, não pode ser utilizada em controladores analógicos (pneumáticos ou eletrônicos), mas sim apenas em controladores digitais. No passado os controladores PID analógicos possuíam algoritmos do tipo *série* ou *iterativo* que não serão abordados neste livro.

Qualquer uma das formas de implementação do algoritmo do controlador PID pode ser reduzida simplesmente eliminando-se as respectivas ações de controle para se obter os controladores P, PD e PI.

Tabela 1.2 – Funções de transferência dos controladores P, PI e PID

Controlador Algoritmo	P	PI	PID
Paralelo Clássico	$G_{PIDa} = K_p$	$G_{PIDa} = \frac{K_p s + K_i}{s}$	$G_{PIDa} = \frac{K_d s^2 + K_p s + K_i}{s}$
Paralelo Alternativo	$G_{PIDc} = K_p$	$G_{PIDc} = \frac{K_p s + \frac{K_p}{T_i}}{s}$	$G(s)_{PIDc} = \frac{K_p T_d s^2 + K_p s + \frac{K_p}{T_i}}{s}$

1.13.4 - Conversões

A conversão entre o algoritmo paralelo alternativo e o paralelo clássico pode ser feita comparando-se os coeficientes do polinômio do numerador da Equação 1.26 com os da Equação 1.29.

Desta forma, a relação entre as constantes do controlador PID, calculadas por meio dos dois algoritmos, fica sendo as apresentadas na Equação 1.30.

$$\begin{cases} K_p = K_p \\ K_d = K_p T_d \\ K_i = K_p / T_i \end{cases} \quad \text{Equação 1.30}$$

1.14 – Sintonia de controladores PID e Índices de Desempenho

Sintonizar um controlador PID significa encontrar os valores numéricos para as constantes do controlador de forma a regular o sistema para operar no valor desejado para a variável controlada, com estabilidade e desempenho satisfatório.

Via de regra, busca-se os seguintes critérios de desempenho no processo de sintonia dos controladores PID:

- O menor sobre-sinal possível;
- Razão de declínio igual a um valor determinado;
- O menor tempo de subida possível;
- O menor tempo de acomodação possível;
- Mínima energia ou atuação na variável manipulada, e,
- Utilização de um índice de desempenho para avaliar a qualidade do controle.

Os métodos disponíveis para sintonia de controladores são diversos. Baseiam-se em estudos de oscilações permanentes do sistema em malha fechada, em curvas de resposta do processo

em malha aberta e no desempenho ótimo em malha fechada. Aqui estão apresentados os principais métodos de sintonia, sendo que a todo o momento novos métodos e suas variações são reportados nas publicações especializadas.

Neste capítulo será utilizado o termo controlador PID de forma genérica, podendo ou não estar completo com todas as ações de controle.

1.14.1 – Método de Ziegler e Nichols – primeiro método

Este método foi proposto por Ziegler e Nichols para sintonia de controladores PID. Pode ser utilizado quando se dispõe da função de transferência do processo a ser controlado, ou mesmo, quando não se tem o processo modelado matematicamente.

Quando não se dispõe da função de transferência do processo, esta pode ser obtida experimentalmente por meio da curva de resposta. Este procedimento é conhecido por *Identificação do Sistema*.

Quando se dispõe da função de transferência do processo, pode-se simular sua resposta frente a um sinal de teste conhecido - normalmente um sinal do tipo degrau (ver item 1.7.1) - e obter a curva de resposta sem a atuação de nenhuma ação de controle, ou seja, em malha aberta.

No procedimento de identificação, a curva de resposta do processo pode ser obtida excitando-se o sistema com um sinal de teste conhecido e, ao mesmo tempo, medindo-se sua resposta como mostra esquematicamente a Figura 1.39.

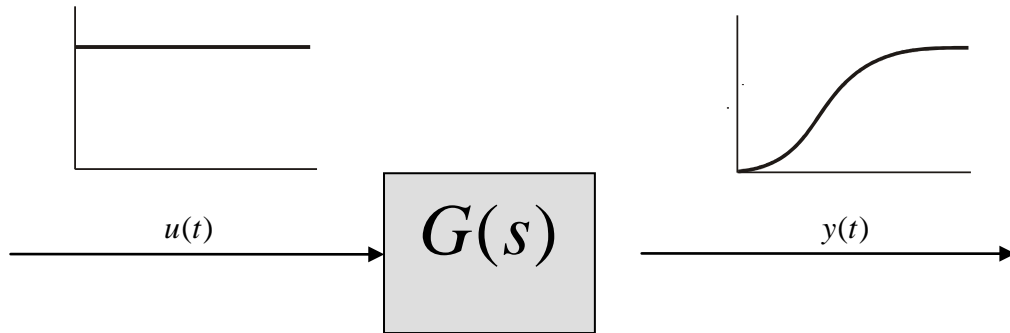


Figura 1.39 - Esquema experimental para a obtenção da curva de resposta do sistema em malha aberta

Este método se aplica apenas a sistemas que exibam curva de resposta no formato de “S”, ou seja, a sistemas que envolvam integrador(es) ou pólos conjugados complexos dominantes e busca obter 25% de sobre-sinal máximo na resposta ao degrau. Presta-se bem para sistemas em que o tempo morto não é muito significativo, ou seja, para fatores de incontrolabilidade menores que 0,3 ($FI = t_m / \tau < 0,3$).

A curva tipo “S” pode ser caracterizada por duas constantes: tempo de atraso t_m e constante de tempo τ . O tempo de atraso e a constante de tempo são determinados desenhando-se uma linha tangente no ponto de inflexão da curva tipo “S” (ponto de máxima inclinação) e determinando-se a intersecção da linha tangente com o eixo do tempo e a linha $y(t)=K$, como mostra a Figura 1.40.

A função de transferência pode ser então aproximada para um sistema de primeira ordem com atraso de transporte, por meio da .

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K e^{-t_m s}}{\tau s + 1}$$

Equação 1.31

Ziegler e Nichols sugeriram que um conjunto de valores para o ganho proporcional K_p , para o tempo integral T_i e para o tempo derivativo T_d , de acordo com as fórmulas mostradas na Tabela 1.3.

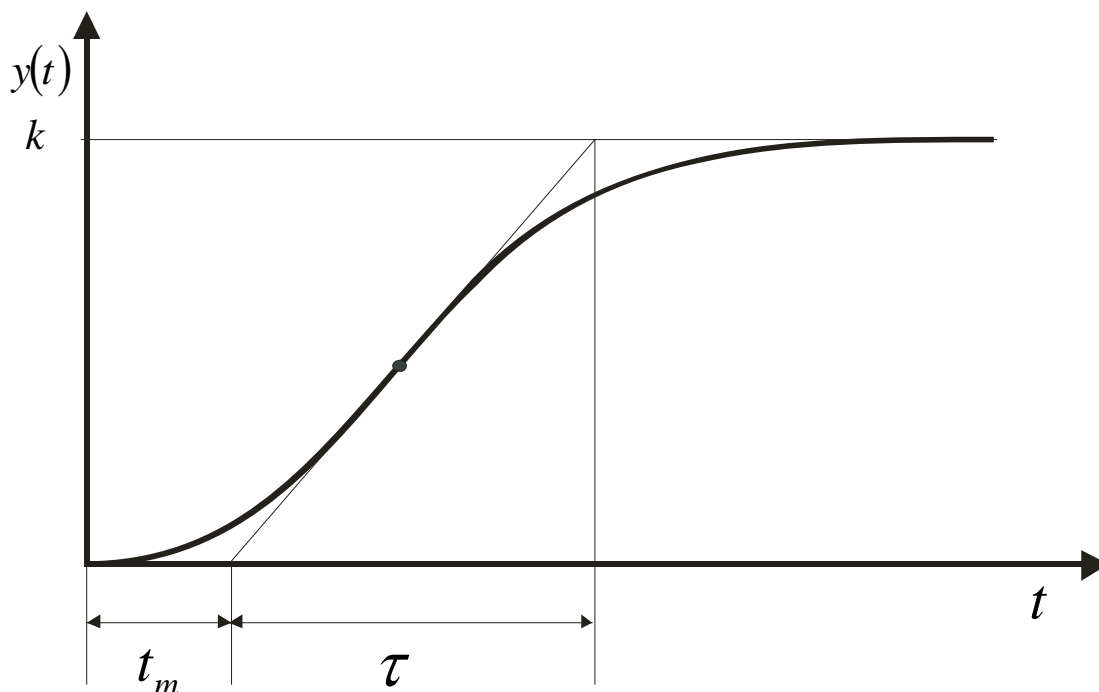


Figura 1.40 – Determinação do tempo morto e da constante de tempo do sistema

Tabela 1.3 – Parâmetros do controlador PID sugeridas por Ziegler e Nichols para sistemas que podem ser ajustados pelo método com malha aberta

Controlador	K_p	T_i	T_d
P	$\frac{\tau}{K t_m}$	--	--
PI	$0.9 \frac{\tau}{K t_m}$	$\frac{t_m}{0.3}$	--
PID	$1.2 \frac{\tau}{K t_m}$	$2 t_m$	$0,5 t_m$

As constantes da Tabela 1.3 são válidas para a implementação do controlador PID do tipo paralelo clássico, de acordo com o diagrama de blocos da Figura 1.38.

1.14.2 – Método de Ziegler e Nichols – segundo método

O segundo método de Ziegler e Nichols presta-se para sistemas inicialmente estáveis que podem vir a se desestabilizar à medida que o ganho proporcional aumenta.

Foi desenvolvido para sistemas de primeira ordem com tempo morto, descritos pela , obterem em malha fechada uma resposta à excitação do tipo degrau com razão de declínio de $1/4$.

Para sua aplicação aumenta-se o ganho proporcional até se obter uma resposta oscilatória com amplitude e período constantes. Isto ocorre quando os pólos conjugados do sistema em malha fechada situam-se no eixo imaginário (parte imaginária nula), Figura 1.41.

O ganho proporcional correspondente a esta situação é denominado ganho crítico (K_{cr}) e o respectivo período de oscilação apresentado pela resposta do sistema é denominado período crítico (P_{cr}), Figura 1.42.

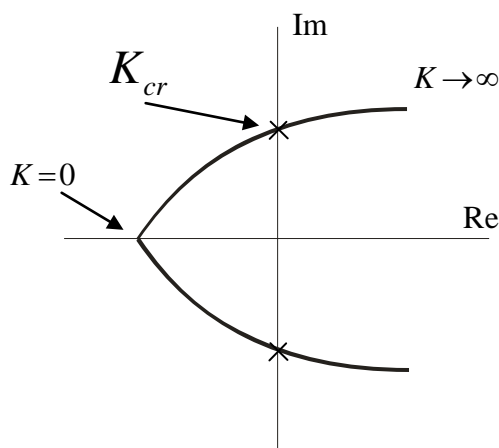


Figura 1.41 – Plano “s” indicando a localização das raízes do sistema em malha fechada e o ganho crítico

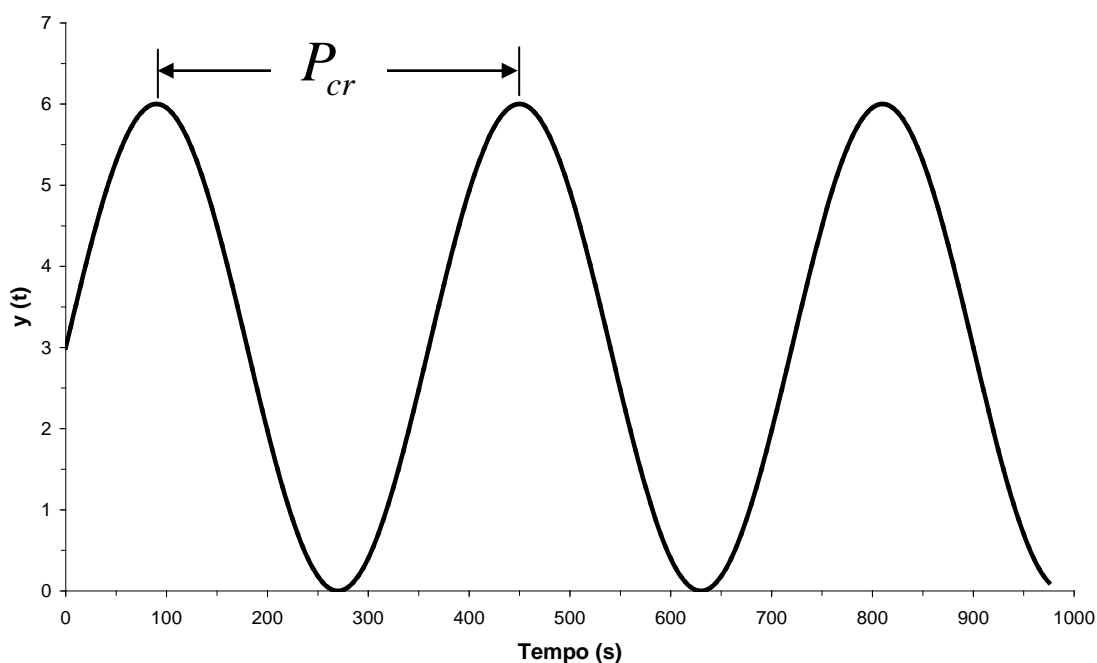


Figura 1.42 – Resposta do sistema correspondente ao ganho crítico

Com a função de transferência do sistema em malha aberta e o comando “*rlocus*” do MATLAB, pode-se obter facilmente K_{cr} . Ainda utilizando-se o MATLAB, implementa-se o ganho crítico, fecha-se a malha e obtém-se P_{cr} . Desta forma, as constantes do controlador PID são determinadas pela Tabela 1.4 e a função de transferência do controlador PID é obtida por meio da .

Tabela 1.4 - Parâmetros do controlador PID sugeridas por Ziegler e Nichols para sistemas que apresentam ganho crítico

Controlador	K_p	T_i	T_d
P	$0,5 K_{cr}$	--	--
PI	$0,45 K_{cr}$	$P_{cr}/1,2$	--
PID	$0,6 K_{cr}$	$P_{cr}/2$	$P_{cr}/8$

Quando a função de transferência não está disponível, é necessário ir aumentando o ganho durante a operação do sistema real, até se conseguir a resposta oscilatória crítica.

Esta, no entanto, não é uma boa prática já que o sistema real fica na iminência da desestabilização.

Pode-se, alternativamente, a partir da identificação do sistema de primeira ordem com atraso de transporte (τ), conforme o procedimento experimental apresentado na Figura 1.40, obter os parâmetros do modelo (K , τ e t_m) e, posteriormente, as constantes do controlador PID (K_p , T_i e T_d) por meio da Tabela 1.5.

Tabela 1.5 - Parâmetros do controlador PID (Ziegler e Nichols) para sistemas com ganho crítico e período crítico estimados

Controlador	K_p	T_i	T_d
P	$\frac{\tau}{K t_m}$	--	--
PI	$\frac{0,9 \tau}{K t_m}$	$3,33 t_m$	--
PID	$\frac{1,2 \tau}{K t_m}$	$2 t_m$	$0,5 t_m$

Os métodos de sintonia propostos por Ziegler e Nichols prestam-se apenas como referência inicial. Os controladores projetados não garantem nem um desempenho específico, nem a estabilidade, portanto, devem ser utilizados cuidadosamente.

1.14.3 – Método de Aström e Hägglund (Método dos Relés)

O presente método tem por objetivo promover oscilações limitadas e controladas no processo com a finalidade de, a partir do comportamento obtido, estimar sua resposta em frequência.

Para tanto, introduz-se um relé antes do processo (Figura 1.43), obtém-se o período de oscilação e a amplitude provocados pelo relé e estima-se o ganho crítico (Equação 1.32) e o período crítico (Equação 1.33).

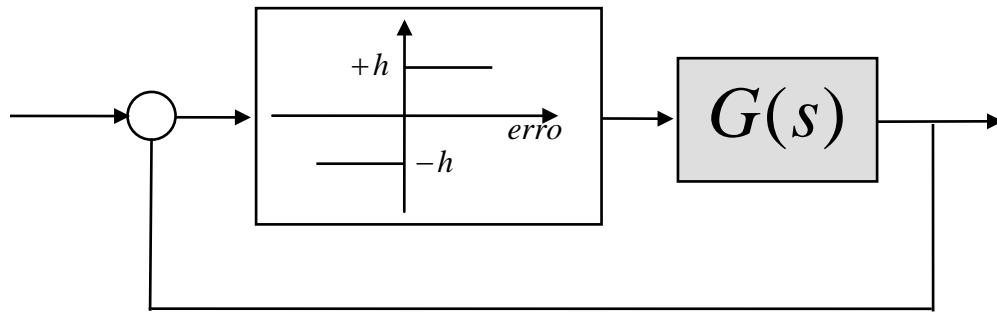


Figura 1.43 – Implementação do relé em malha fechada

$$K_{cr} = \frac{4 h}{a \pi} \quad \text{Equação 1.32}$$

$$P_{cr} \cong P \quad \text{Equação 1.33}$$

As constantes do controlador PID são determinadas pela Tabela 1.4 e a função de transferência do controlador PID é obtida por meio da Equação 1.28.

Utilizando-se a sintonia de Ziegler e Nichols, devido a incertezas de 5 a 20 % na dinâmica estimada do processo, sugere-se aplicar um fator de folga $f=2,5$, de acordo com a Equação 1.34 e a Equação 1.35.

$$K_p = \frac{K_p^{Z\&N}}{0,5 f} \quad \text{Equação 1.34}$$

$$T_i = T_i^{Z\&N} \cdot f \quad \text{Equação 1.35}$$

Nos sistemas de controle PID já instalados, pode-se simular o relé limitando-se a saída do controlador no valor $\pm h$ em torno do ponto de operação (h menor do que 10 % do valor de estabilização), aumentando-se o ganho proporcional ao máximo e eliminando-se o termo integral e o derivativo.

1.14.4 – Método de Cohen e Coon (CC)

O método de Cohen e Coon, a exemplo do de Ziegler e Nichols, também busca uma razão de decaimento de $\frac{1}{4}$, ou seja, máximo sobre-sinal de 25 %.

Este método também se baseia nos sistemas que tenham a dinâmica descrita pela e controladores implementados de acordo com a Equação 1.28, no entanto, foi desenvolvido para sistemas com tempos mortos mais elevados, ou seja, para fatores de incontrolabilidade maiores do que 0,3 ($FI = \frac{t_m}{\tau} > 0,3$).

A Tabela 1.6 apresenta os valores das constantes do controlador PID sugeridas por Cohen e Coon.

Tabela 1.6 - Parâmetros do controlador PID sugeridas por Cohen e Coon para sistemas que podem ser ajustados pelo método com malha aberta

Controlador	K_p	T_i	T_d
P	$\left(1,03 + 0,35 \left(\frac{t_m}{\tau}\right)\right) \frac{\tau}{K t_m}$	--	--
PI	$\left(0,9 + 0,083 \left(\frac{t_m}{\tau}\right)\right) \frac{\tau}{K t_m}$	$\frac{\left(0,9 + 0,083 \left(\frac{t_m}{\tau}\right)\right)}{\left(1,27 + 0,6 \left(\frac{t_m}{\tau}\right)\right)} \cdot t_m$	--
PID	$\left(1,35 + 0,25 \left(\frac{t_m}{\tau}\right)\right) \frac{\tau}{K t_m}$	$\frac{\left(1,35 + 0,25 \left(\frac{t_m}{\tau}\right)\right)}{\left(0,54 + 0,33 \left(\frac{t_m}{\tau}\right)\right)} \cdot t_m$	$\frac{0,5 t_m}{\left(1,35 + 0,25 \left(\frac{t_m}{\tau}\right)\right)}$

Para a aplicação prática deste método, sugere-se inicialmente diminuir o ganho proporcional, aumentar o tempo integral e diminuir o derivativo, obtidos utilizando-se a Tabela 1.6 e, posteriormente, agir de forma oposta até obter o comportamento desejado.

1.14.5 – Método de Chien, Hroenes e Reswick (CHR)

Este método foi desenvolvido para atender dois critérios de desempenho – a resposta mais rápida possível sem sobre-sinal e a resposta mais rápida possível com sobre-sinal de 20%.

Na prática, não é necessária, para a maioria dos processos, uma resposta muito rápida e oscilatória, portanto, aqui será analisado apenas o critério da resposta mais rápida possível sem sobre-sinal.

Com este critério de desempenho, obtém-se um ganho proporcional menor para o controlador e, como consequência, tem-se um sistema mais robusto, ou seja, com maior estabilidade relativa, podendo absorver mais variações na dinâmica do processo devido às não-linearidades, desgastes dos componentes, etc.

O presente método presta-se a problemas tanto do tipo *servo*, quanto do tipo *regulatório*. Problemas do tipo servo são aqueles que sofrem mudanças no valor de referência (*setpoint*), enquanto que problemas do tipo regulatório são aqueles que sofrem perturbação de carga com o valor de referência constante.

Considerando-se os sistemas que podem ser descritos pela e controladores implementados de acordo com a Equação 1.28, o método propõe os valores das constantes do controlador PID para um problema servo, apresentados na Tabela 1.7 e, para um problema regulatório, na Tabela 1.8, ambos para o critério de desempenho da resposta mais rápida possível sem sobre-sinal.

Tabela 1.7 - Parâmetros do controlador PID sugeridas por CHR para um problema servo com critério de desempenho da resposta mais rápida possível sem sobre-sinal

Controlador	K_p	T_i	T_d
P	$\frac{0,3 \tau}{K t_m}$	--	--
PI	$\frac{0,35 \tau}{K t_m}$	$1,16 \tau$	--
PID	$\frac{0,6 \tau}{K t_m}$	τ	$0,5 t_m$

Tabela 1.8 - Parâmetros do controlador PID sugeridas por CHR para um problema regulatório com critério de desempenho da resposta mais rápida possível sem sobre-sinal

Controlador	K_p	T_i	T_d
P	$\frac{0,3 \tau}{K t_m}$	--	--
PI	$\frac{0,6 \tau}{K t_m}$	$4 t_m$	--
PID	$\frac{0,95 \tau}{K t_m}$	$2,375 t_m$	$0,421 t_m$

1.15.6 – Método da integral do erro

Este método utiliza como critério de desempenho a integral de uma função do erro, dentro de um espaço de tempo suficiente para eliminar o erro em regime permanente.

As duas formas mais utilizadas na prática são: o IAE (Integral do valor absoluto do erro entre a variável e o valor de referência - $\int |e(t)|.dt$) e o ITAE (Integral do produto do tempo pelo valor absoluto do erro entre a variável e o valor de referência - $\int t.|e(t)|.dt$).

O método se baseia, a exemplo dos anteriores, nos sistemas que tenham a dinâmica descrita pela e controladores implementados de acordo com a .

Nos casos de sistemas com fatores de incontrolabilidade entre 0 e 1 ($0 < \frac{t_m}{\tau} < 1$), cujo objetivo principal do controlador é rejeitar perturbações de carga (problema regulatório), o método propõe o cálculo das constantes do controlador PID (K_p , T_i e T_d) por meio, respectivamente, da Equação 1.36, da Equação 1.37 e da Equação 1.38.

$$K_p = \frac{1}{K} \left(a \left(\frac{t_m}{\tau} \right)^b \right) \quad \text{Equação 1.36}$$

$$T_i = \frac{\tau}{\left(c \left(\frac{t_m}{\tau} \right)^d \right)} \quad \text{Equação 1.37}$$

$$T_d = \tau \left(e \left(\frac{t_m}{\tau} \right)^f \right) \quad \text{Equação 1.38}$$

As constantes a, b, c, d, e e f , para os controladores PI e PID, de acordo com o IAE ou o ITAE, são obtidas na Tabela 1.9.

Tabela 1.9 – Constantes para cálculo da sintonia do controlador PID pelo método da integral do erro para problemas regulatórios

Controlador	Critério	a	b	c	d	e	f
PI	IAE	0,984	-0,986	0,608	-0,707	--	--
PI	ITAE	0,859	-0,977	0,674	-0,680	--	--
PID	IAE	1,435	-0,921	0,878	-0,749	0,482	1,137
PID	ITAE	1,357	-0,947	0,842	-0,738	0,381	0,995

Nos casos onde o objetivo principal do controlador é rejeitar perturbações no valor de referência (problema servo), as constantes do controlador PID são calculadas por meio da Equação 1.39, da Equação 1.40, Equação 1.41 e da Tabela 1.10.

$$K_p = \frac{1}{K} \left(A \left(\frac{t_m}{\tau} \right)^B \right) \quad \text{Equação 1.39}$$

$$T_i = \frac{\tau}{\left(C + D \left(\frac{t_m}{\tau} \right) \right)} \quad \text{Equação 1.40}$$

$$T_d = \tau \left(E \left(\frac{t_m}{\tau} \right)^F \right) \quad \text{Equação 1.41}$$

Tabela 1.10 – Constantes para cálculo da sintonia do controlador PID pelo método da integral do erro para problemas do tipo servo

Controlador	Critério	A	B	C	D	E	F
PI	IAE	0,758	-0,861	1,020	-0,323	--	--
PI	ITAE	0,586	-0,916	1,030	-0,165	--	--
PID	IAE	1,086	-0,869	0,740	-0,130	0,348	0,914
PID	ITAE	0,965	-0,850	0,796	-0,147	0,308	0,929

1.15.7 – Comparação entre alguns métodos

Com cada um dos métodos de sintonia obtêm-se valores distintos para as constantes do controlador PID. Alguns métodos são mais adequados para sistemas com fatores de incontrolabilidades ($FI = \frac{t_m}{\tau}$) maiores ou menores.

A escolha de um deles deve se basear na resposta que se deseja obter quando o sistema dinâmico sofre algum tipo de distúrbio. Esta escolha pode ser realizada simulando-se e analisando-se o desempenho dos controladores obtidos por cada um dos métodos face ao comportamento desejado do sistema dinâmico.

Para ilustrar este procedimento foram calculadas as constantes propostas pelos métodos de Z&N, CC, CHR e ITAE para o sistema apresentado na com $FI=0,2$ e $FI=2$.

Primeiro caso ($FI=0,2$): $k=0,5$, $t_m=2$ e $\tau=10$.

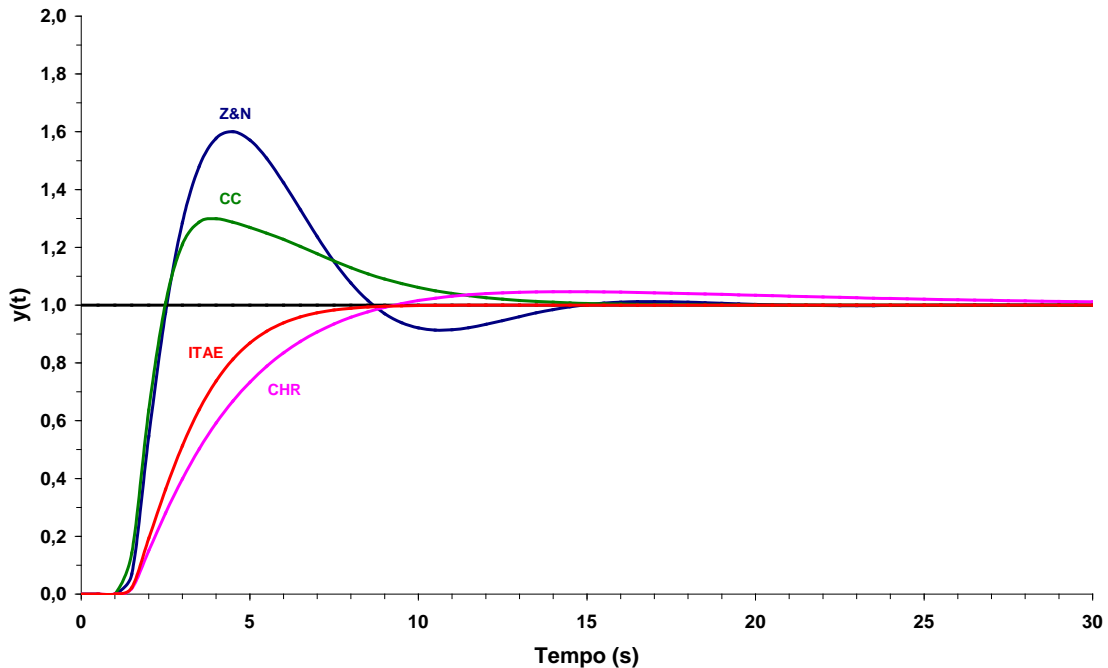


Figura 1.44 – Respostas dos sistemas descritos no primeiro caso utilizando-se PID sintonizados por diferentes métodos

Analisando-se a Figura 1.44 nota-se que neste caso, apesar do $FI=0,2$ ser pequeno, a sintonia realizada pelo método de Z&N apresentou uma resposta inicialmente bastante agressiva, com comportamento oscilatório e com sobre-sinal muito elevado. A sintonia realizada por CC também apresentou sobre-sinal elevado e tempo de acomodação semelhante ao obtido por Z&N, já a sintonia obtida pelo método CHR apresentou sobre-sinal baixo, no entanto, tempo de acomodação muito elevado.

A escolha definitiva do conjunto de parâmetros a ser escolhido para o controlador PID depende da resposta desejada para o sistema dinâmico controlado, no entanto, neste caso, os parâmetros obtidos pelo método ITAE parecem ser adequados.

Apesar de serem razoáveis os parâmetros do PID obtidos pelo método ITAE, eles podem ser ligeiramente alterados para se obter um ajuste mais fino na resposta. Isto pode ser feito antes, ou mesmo depois, de sua implementação.

Segundo caso ($FI=2$): $k=5$, $t_m=20$ e $\tau=10$.

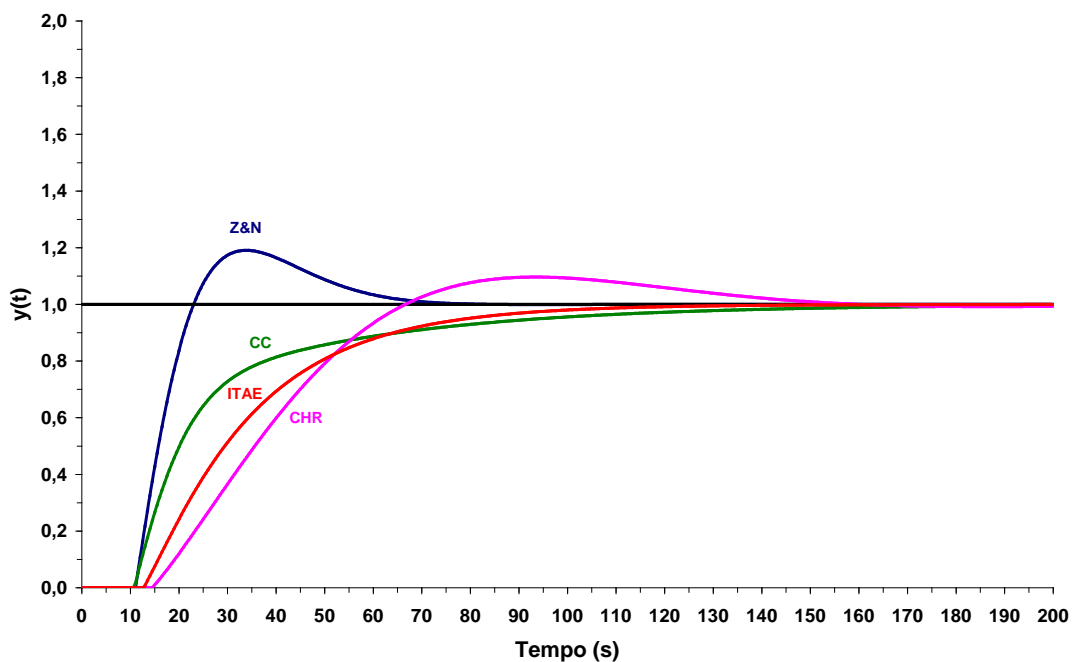


Figura 1.45 - Respostas dos sistemas descritos no segundo caso utilizando-se PID sintonizados por diferentes métodos

Uma análise comparativa semelhante a anterior pode aqui ser realizada.

Neste caso, se sobre-sinais da ordem de 20% forem aceitos na resposta do sistema dinâmico controlado, o método de Z&N parece ser o adequado, já que apresenta tempo de acomodação reduzido em relação às sintonias obtidas pelos demais métodos.

Os métodos de sintonia científicos, de base teórica, são tidos, na maioria das vezes, como superiores aos métodos de tentativa e erro. Eles são importantes e são resultados da busca de ferramentas mais adequadas a cada caso.

No entanto, o conhecimento heurístico sobre o sistema a ser controlado não pode ser relegado a um segundo plano.

Os métodos cartesianos e determinísticos são muito bem vindos, porém a sintonia é um ajuste de sensibilidade e, como tal, uma análise heurística é essencial para se lograr o melhor desempenho do controlador e a segurança operacional.

Na verdade, a sintonia de controladores é uma arte que envolve, em boa parte, métodos científicos, mas também, o conhecimento e a sensibilidade do profissional que a executa.

Capítulo 2

Projeto de Sistema de Controle de Nível

Capítulo 2 - Projeto de Sistema de Controle de Nível

2.1 - Introdução

Neste capítulo serão abordadas todas as etapas da análise e do projeto de um sistema de controle de nível. Serão abordados temas relativos à modelagem matemática e à identificação do sistema de nível, simulação de seu comportamento e técnicas de projeto de controladores.

A referida abordagem será realizada sob o enfoque da aplicação prática e, para tanto, será utilizada uma Bancada de Nível onde será realizada toda a experimentação e a implementação necessária. Serão, ainda, intensamente utilizados softwares tais como: MATLAB, Simulink, Excel, LabVIEW, dentre outros.

2.2 – Descrição da Bancada de Nível

A planta de controle de nível fabricada pela **T&S Equipamentos Eletrônicos** é um equipamento construído em madeira (MDF) e acrílico. É composta basicamente de dois reservatórios em desnível, uma eletroválvula, uma válvula manual, uma moto-bomba com ajuste eletrônico de vazão e um sensor de pressão. Sua principal aplicação é facilitar o estudo de técnicas experimentais de modelagem e controle de sistemas dinâmicos em cursos de Engenharia que ministram disciplinas da área de Sistemas de Controle e/ou Controle de Processos Industriais. Pode ser utilizada para práticas de Modelagem, Identificação e Simulação Computacional em MATLAB ou Simulink e em Projeto de Sistemas de Controle de Nível *On-Off*, P, PI e PID. A implementação do controle poderá ser analógica e/ou digital utilizando-se *hardwares* dedicados opcionais (CLP, módulos de controle) além de *softwares* (LabVIEW, etc.).

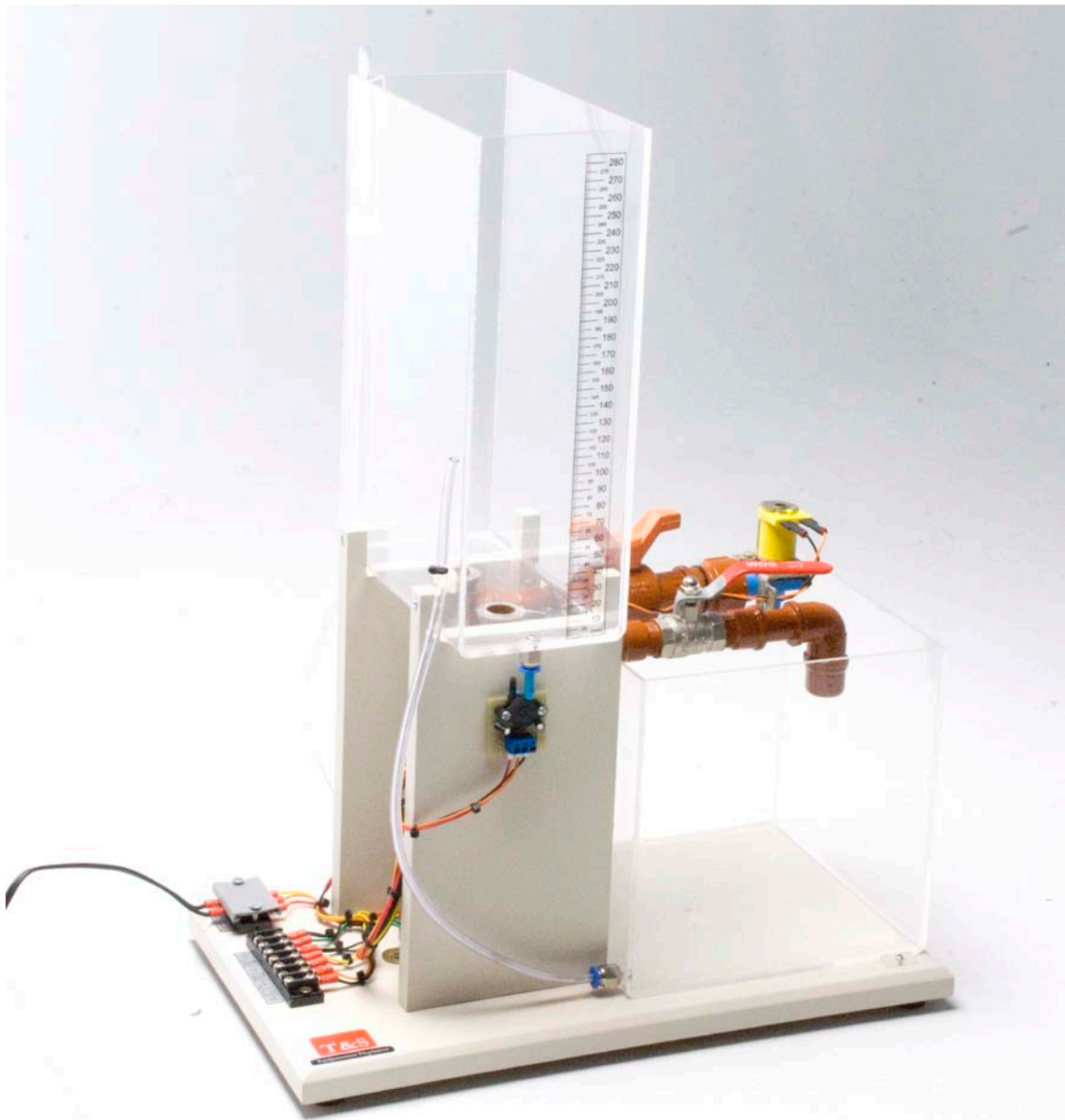


Figura 2.1 – Bancada experimental para controle de nível

Especificações:

- Tensão de alimentação: 127 ou 220 Vac;
- Dois reservatórios graduados em desnível, sendo o reservatório superior com 3 litros e o reservatório inferior com 4 litros e provido de quebra onda;

- Moto-bomba, com o ajuste de vazão feito eletronicamente através de variador PWM por meio de potenciômetro ou sinal de referência de 0 a 5 Vdc;
- Um sensor de pressão, para medir o nível do reservatório superior;
- Uma válvula solenóide, para aplicação de distúrbios no sistema (controle contínuo) ou como atuador para controle Liga-Desliga;
- Uma válvula manual, para aplicar perturbações no sistema;
- Cabo de força de 3 metros;
- Fusível de proteção.

Identificação dos terminais

A Figura 2.2 mostra a barra de terminais de conexão utilizada na bancada de nível.

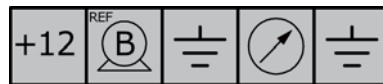


Figura 2.2 - Barra de terminais frontal (da esquerda para direita)

- Fonte +12Vdc, 250 mA;
- Sinal de entrada de referência de potência da moto-bomba (0 a 5 Vdc);
- Terra;
- Sinal de saída de pressão/nível;
- Terra.

2.3 – Modelagem Matemática

O conceito da modelagem matemática de um sistema dinâmico e as etapas a serem realizadas para sua obtenção estão apresentados no Capítulo 1. Recomenda-se a leitura do Capítulo 1 caso o leitor não tenha domínio sobre a obtenção dos modelos matemáticos ou deseje apenas recordar-se dos procedimentos necessários.

Equacionamento da bancada de nível

O equacionamento da bancada de nível depende do tipo de fluxo de líquido, se laminar ou turbulento. O número adimensional de Reynolds Equação 2.1 define o regime de escoamento.

$$\text{Re} = \frac{\rho v D}{\mu} \quad \text{Equação 2.1}$$

Onde: ρ = massa específica do fluído

v = velocidade média do fluído

D = diâmetro para o fluxo no tubo

μ = viscosidade dinâmica do fluído

Se o número de Reynolds for menor que 2000 ($\text{Re} < 2000$), então o fluxo será laminar e o sistema poderá ser descrito por equações diferenciais lineares.

Se o número de Reynolds estiver entre 3000 e 4000 ($3000 < \text{Re} < 4000$), então o fluxo será turbulento e o sistema será descrito por equações diferenciais não lineares. Entretanto, podem ser linearizados em uma região limitada.

Seja o sistema mostrado esquematicamente na Figura 2.3:

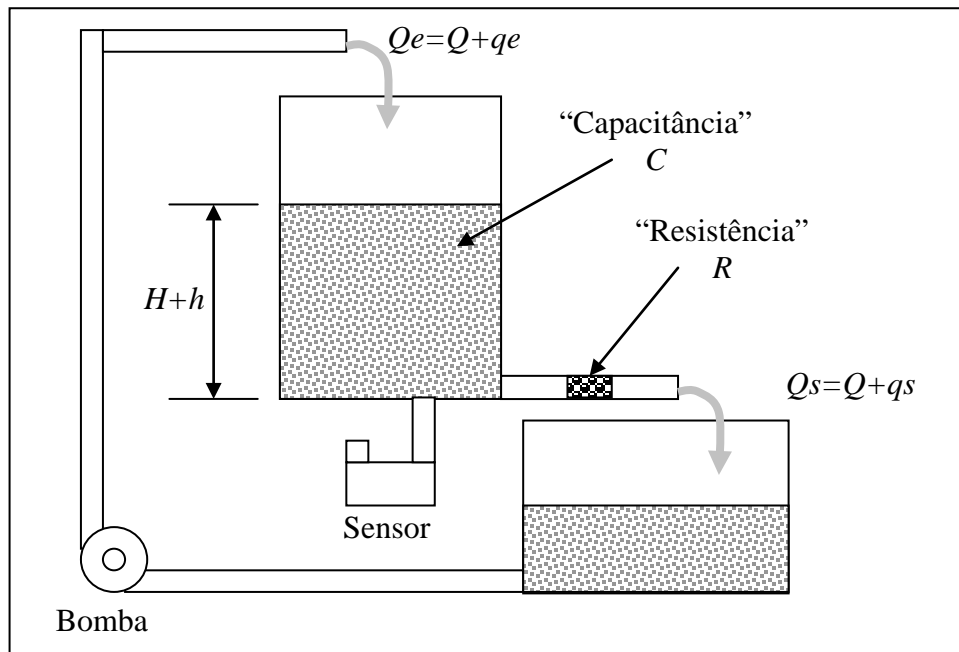


Figura 2.3 - Desenho esquemático da bancada de nível

Onde:

- Q = vazão volumétrica em regime permanente (antes de ocorrer alguma variação), $[\text{cm}^3/\text{s}]$
- Q_e = vazão de entrada $[\text{cm}^3/\text{s}]$
- Q_s = vazão de saída $[\text{cm}^3/\text{s}]$
- q_e = pequeno desvio na vazão de entrada em relação ao seu valor de regime permanente $[\text{cm}^3/\text{s}]$
- q_s = pequeno desvio na vazão de saída em relação ao seu valor de regime permanente $[\text{cm}^3/\text{s}]$
- H = altura do nível em regime permanente (antes de ocorrer alguma variação), $[\text{cm}]$
- h = pequeno desvio de nível a partir de seu valor de regime permanente $[\text{cm}]$

Definição de resistência R

Define-se como resistência R a relação entre a variação na diferença de nível e a variação na vazão em volume (Equação 2.2).

$$R = \frac{\text{Variação na diferença de nível [cm]}}{\text{Variação na vazão em volume [cm}^3/\text{s]}} \quad \text{Equação 2.2}$$

Para o fluxo laminar

$$Q_s = K \cdot H$$

$$R_L = \frac{dH}{dQ_s} = \frac{H}{Q_s} \quad \text{Equação 2.3}$$

Para o fluxo turbulento

$$Q_s = K \cdot \sqrt{H}$$

$$R_T = \frac{dH}{dQ_s}$$

$$dQ_s = \frac{K}{2\sqrt{H}} \cdot dH$$

$$\frac{dH}{dQ_s} = \frac{2H}{K} = \frac{2\sqrt{H}\sqrt{H}}{Q_s} = \frac{2H}{Q_s}$$

$$R_T = \frac{2H}{Q_s} \quad \text{Equação 2.4}$$

R_T pode ser considerado constante se as variações de altura de nível e da taxa de escoamento forem pequenas.

$$Q_s = \frac{2H}{R_T} \quad \text{Equação 2.5}$$

Em muitos casos práticos, o coeficiente K , que depende do coeficiente de fluxo e da área de restrição, não é conhecido. Então R_T deve ser obtido experimentalmente.

Definição de capacitância C

Define-se como capacitância C a relação entre a variação na quantidade de líquido armazenado e a variação da altura do líquido (Equação 2.6).

$$C = \frac{\text{Variação na quantidade de líquido armazenado [cm}^3\text{]}}{\text{Variação da altura do nível [cm]}} \quad \text{Equação 2.6}$$

A capacitância do reservatório é igual à sua seção transversal. Se esta for constante, a capacitância será constante para qualquer altura do nível.

Sendo o regime linear ou linearizado, considerando-se que o fluxo de entrada menos o de saída, durante um pequeno intervalo de tempo dt , é igual à quantidade adicional armazenada no reservatório, tem-se que:

$$C dh = (q_e - q_s) dt$$

Pela definição de resistência,

$$q_s = \frac{h}{R}$$

A equação diferencial para o sistema para um valor constante de R torna-se:

$$RC \frac{dh}{dt} + h = R q_e \quad \text{Equação 2.7}$$

2.4 – Função de Transferência

O conceito da função de transferência está apresentado no Capítulo 1. Recomenda-se a leitura do item 1.5 – Função de transferência, caso o leitor não tenha domínio sobre a obtenção da função de transferência ou deseje apenas recordar-se dos procedimentos necessários.

Tomando-se a Transformada de Laplace da equação diferencial ordinária (Equação 2.7) e considerando-se as condições iniciais nulas, tem-se:

$$(RCs + 1)H(s) = RQ_e(s)$$

Tendo-se como distúrbio a vazão de saída, o nível como sendo a variável a ser controlada e a vazão de entrada como sendo a variável de atuação, a Função de Transferência do sistema pode ser escrita como:

$$\frac{H(s)}{Q_e(s)} = \frac{R}{RCs + 1} \quad \text{Equação 2.8}$$

Se a vazão de saída for admitida como sendo a variável a ser controlada, a Função de Transferência poderá ser escrita como:

$$\frac{Q_s(s)}{Q_e(s)} = \frac{1}{RCs + 1} \quad \text{Equação 2.9}$$

2.4.1 - Obtenção dos parâmetros R e C

A capacitância C pode ser facilmente obtida por cálculo utilizando-se a definição anteriormente apresentada, já que o reservatório da bancada de nível possui seção constante com dimensões $a = 20$ cm e $b = 10$ cm, ou seja, $C = 200$ cm².

A resistência R pode ser determinada experimentalmente construindo-se a curva do nível em função da variação do escoamento livre e obtendo-se sua inclinação no ponto de operação.

Como, no presente sistema, o nível do reservatório é determinado por meio de um sensor de pressão, este deve ser inicialmente calibrado, realizando-se um procedimento experimental para o levantamento da curva de altura da coluna de água (H) em função da tensão de saída do sensor de pressão e processando-se os dados em uma planilha eletrônica, por exemplo, em uma planilha Excel. Realizando-se o experimento, obteve-se a curva apresentada na Figura 2.4 e a correspondente equação de calibração (Equação 2.10).

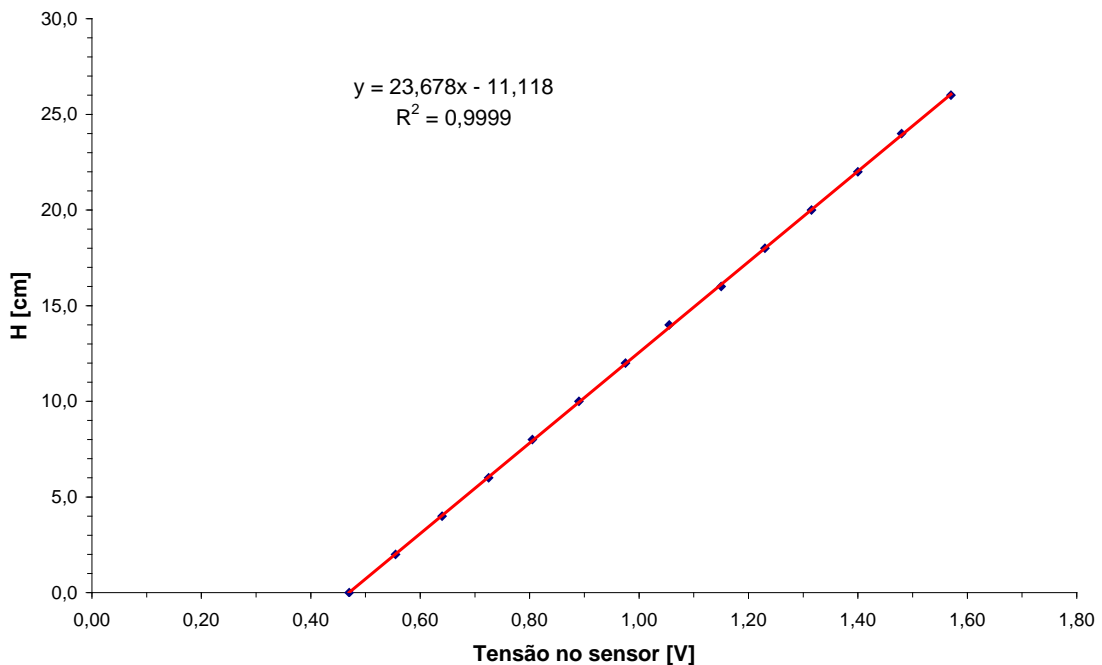


Figura 2.4 - Curva de calibração do sensor de nível

A equação de calibração obtida para o sensor de nível foi:

$$H [cm] = 23,68V [volts] - 11,12 [volts] \quad \text{Equação 2.10}$$

Com o sensor de nível calibrado, pode-se, com mais facilidade, levantar experimentalmente a curva do escoamento livre do reservatório ($H \times Q_s$). Para tanto, inicialmente obtém-se a

equação da curva do nível em função do tempo ($H \times t$) e, em seguida deriva-se em relação ao tempo para se obter a vazão Q_s .

Realizando-se os procedimentos experimentais, obteve-se a curva ($H \times t$) mostrada na Figura 2.5 e a Equação 2.11.

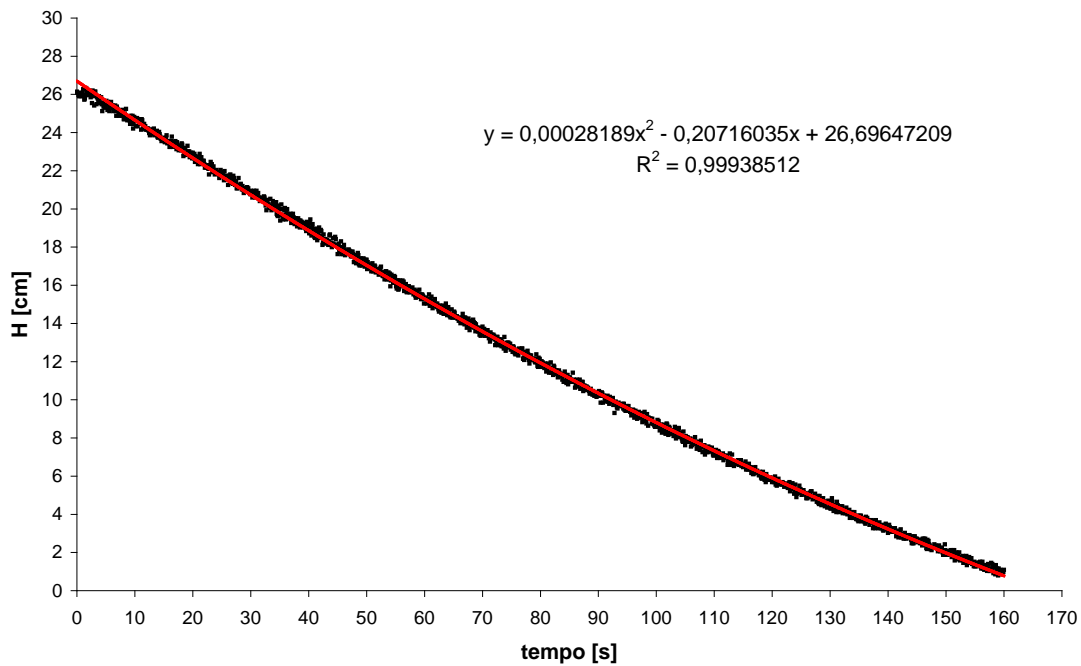


Figura 2.5 - Curva de nível H em função do tempo para o escoamento livre

$$H [cm] = 2,8189 \times 10^{-4} t^2 [s] - 0,20716 t [s] + 26,69647 \quad \text{Equação 2.11}$$

Derivando-se a Equação 2.11 em relação ao tempo obtém-se a Equação 2.12 com a qual constrói-se a curva de vazão Q_s apresentada na Figura 2.6 e sua respectiva equação (Equação 2.13).

$$Q_s \left[\frac{cm^3}{s} \right] = \frac{dH}{dt} = 2,8189 \times 10^{-4} t [s] - 0,20716 \quad \text{Equação 2.12}$$

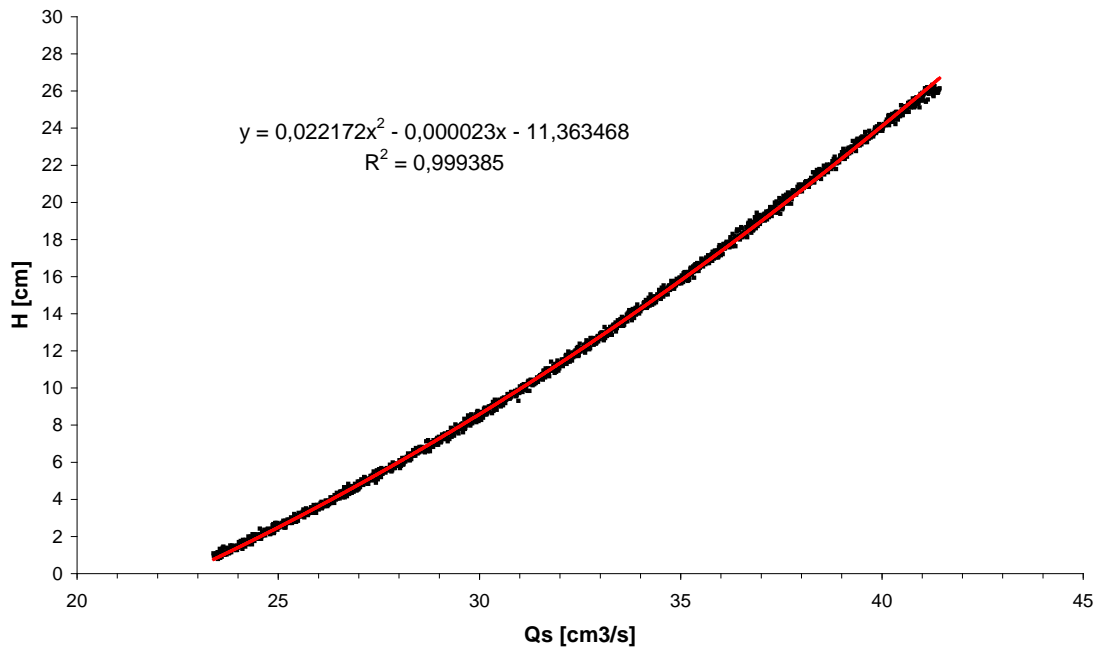


Figura 2.6 - Curva de nível H em função da vazão Q_s

$$H[cm] = 2,2172 \times 10^{-2} Q_s^2 \left[\frac{cm^3}{s} \right] + 2,3 \times 10^{-5} Q_s \left[\frac{cm^3}{s} \right] - 11,3 \quad \text{Equação 2.13}$$

A resistência R , para o fluxo turbulento, é obtida por $R_T = \frac{dH}{dQ_s}$, ou seja:

$$R_T \left[\frac{s}{cm^2} \right] = \frac{dH[cm]}{dQ_s \left[\frac{cm^3}{s} \right]} = 4,4344 \times 10^{-2} Q_s \left[\frac{cm^3}{s} \right] + 2,3 \times 10^{-5} \quad \text{Equação 2.14}$$

Calculando-se R_T , por meio da Equação 2.14, em função de Q_s , para cada valor de H experimental, obtém-se a curva de $R_T \times H$ apresentada na Figura 2.7. Nota-se que R varia em função de H , já que a curva não é linear (Figura 2.7 e Equação 2.15).

Necessita-se, portanto, admitir que o controlador permita que o sistema opere desviando-se apenas um pouco em relação ao seu ponto de operação e que, neste caso, pode ser linearizado em torno de um determinado nível de operação (“set point” de operação).

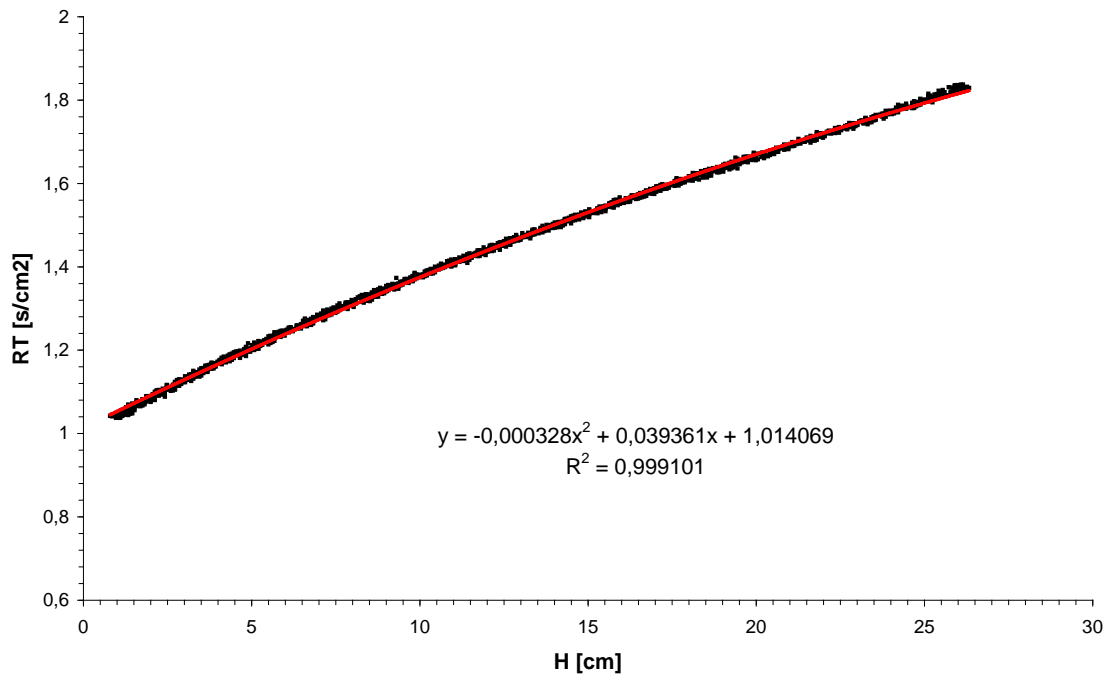


Figura 2.7 - Resistência R em função do nível H

$$R_T \left[\frac{s}{cm^2} \right] = -3,28 \times 10^{-4} H^2 [cm] + 3,936 \times 10^{-2} H [cm] + 1,01 \quad \text{Equação 2.15}$$

Aplicando-se um degrau de $Q_e = 3 \left[\frac{cm^3}{s} \right]$ a partir de um nível de equilíbrio ($Q_s = Q_e$) correspondente a $H_1 = 12,3 [cm]$, obtém-se um novo equilíbrio em $H_2 = 17,0 [cm]$. Admitindo-se o ponto de operação no nível médio $H = 14,7 [cm]$ e calculando-se a resistência R_T por meio da Equação 2.15, tem-se $R_T = 1,52 \left[\frac{s}{cm^2} \right]$.

2.4.2 – Função de transferência numérica

Substituindo-se os valores calculados de C e R_T na Equação 2.8, tem-se calculada a função de transferência apresentada pela Equação 2.16.

$$\frac{H(s)}{Q_e(s)} = \frac{1,52}{304,092s + 1} \quad \text{Equação 2.16}$$

2.5 - Validação

Para que a Equação 2.16 possa ser utilizada na simulação do comportamento do sistema e no projeto do controlador, é necessário se ter a certeza que ela realmente representa o sistema físico em questão.

2.5.1 – Experimentação

Uma forma de se validar a função de transferência é realizar uma experimentação com o sistema real, sob condições controladas, e comparar os resultados experimentais obtidos com os resultados simulados por meio da função de transferência, sob as mesmas condições experimentais. Para que isso seja realizado, deve-se previamente calibrar o atuador.

A calibração do atuador é realizada aplicando-se um nível de tensão na moto-bomba e medindo-se a vazão Q_e correspondente. A Figura 2.8 apresenta a curva de calibração do atuador e a equação ajustada está apresentada na Equação 2.17.

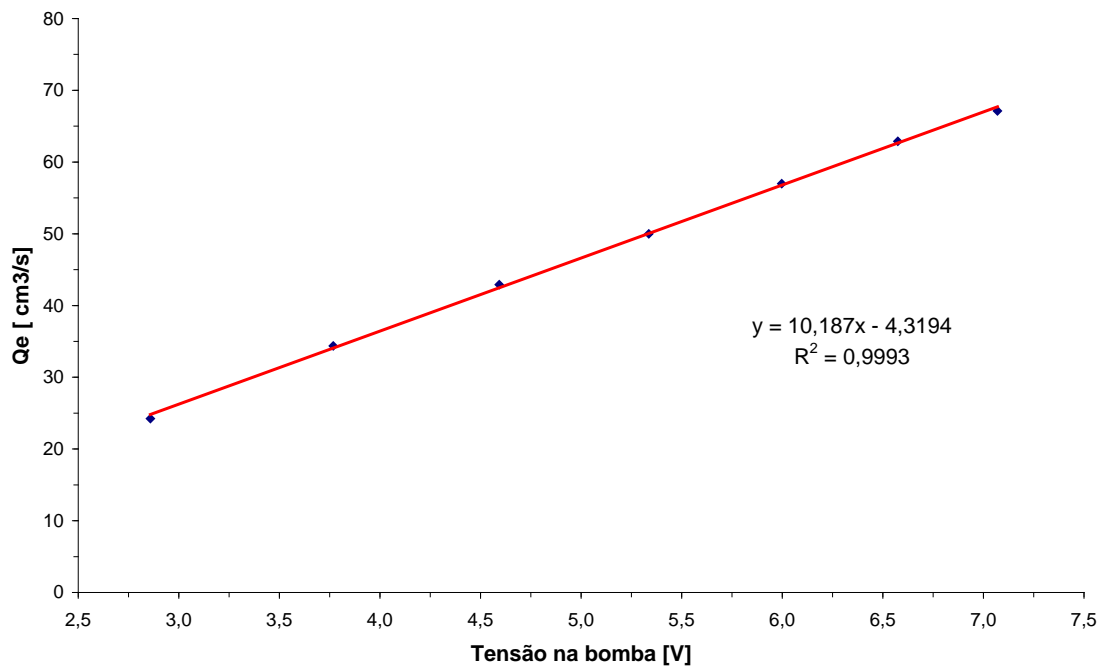


Figura 2.8 - Calibração do atuador

$$Q_e \left[\frac{\text{cm}^3}{\text{s}} \right] = 10,187T[V] - 4,3194$$

Equação 2.17

Para validar a função de transferência, com o sistema em regime no nível $H_1 = 12,3[\text{cm}]$, insere-se uma excitação do tipo degrau de $3 \left[\frac{\text{cm}^3}{\text{s}} \right]$ na vazão de entrada Q_e e observa-se (registra-se) o comportamento da altura do nível H em função do tempo.

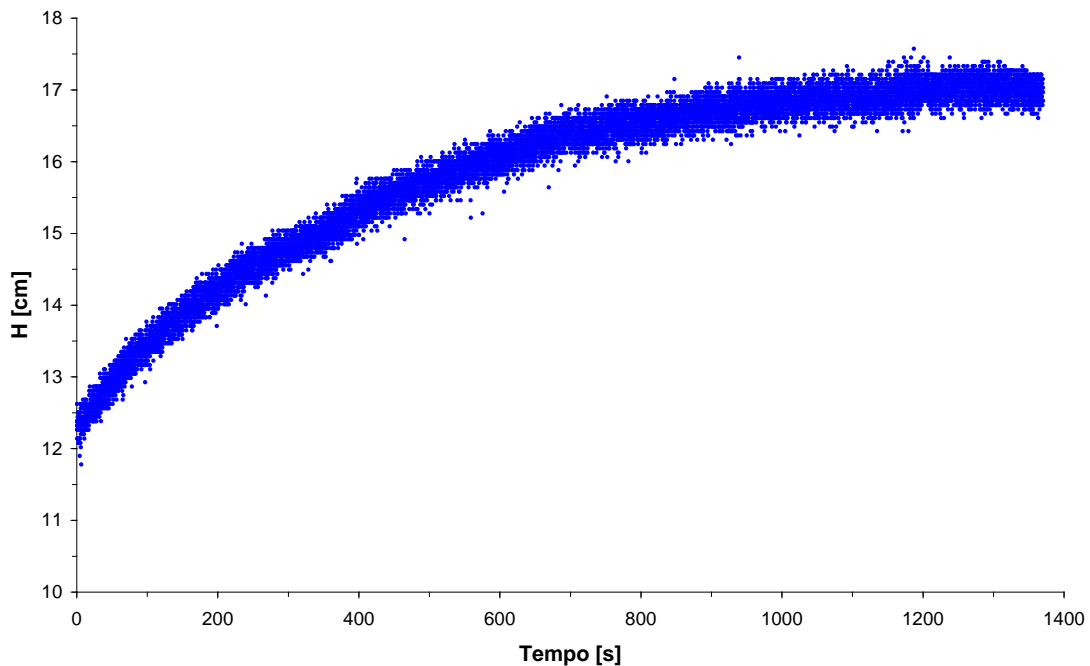


Figura 2.9 - Resposta do sistema em face de uma excitação do tipo degrau de magnitude de $Q_e = 3 \left[\frac{cm^3}{s} \right]$ a partir do equilíbrio em $H_1 = 12,3 [cm]$

Com este teste, pode-se observar que o sistema sofreu uma variação de nível $h = 4,7 [cm]$ correspondente a uma variação de $Q_e = 3 \left[\frac{cm^3}{s} \right]$ a partir do equilíbrio em $H_1 = 12,3 [cm]$.

2.5.2 – Simulação

A função de transferência (Equação 2.16) pode ser facilmente simulada utilizando-se o MATLAB de acordo com o seguinte procedimento:

```
>> % Introdução das constantes C e R
>> C=200;
>> R=1.52;
>> Qe=3;
>> % Função de transferência
>> gma=tf([R],[R*C 1])
```

Transfer function:

1.52

304 s + 1

```
>> % Definição do tempo de simulação
```

```
>> t=0:0.1:1370.29;
```

```
>> % Simulação
```

```
>> step(Qe*gma,t)
```

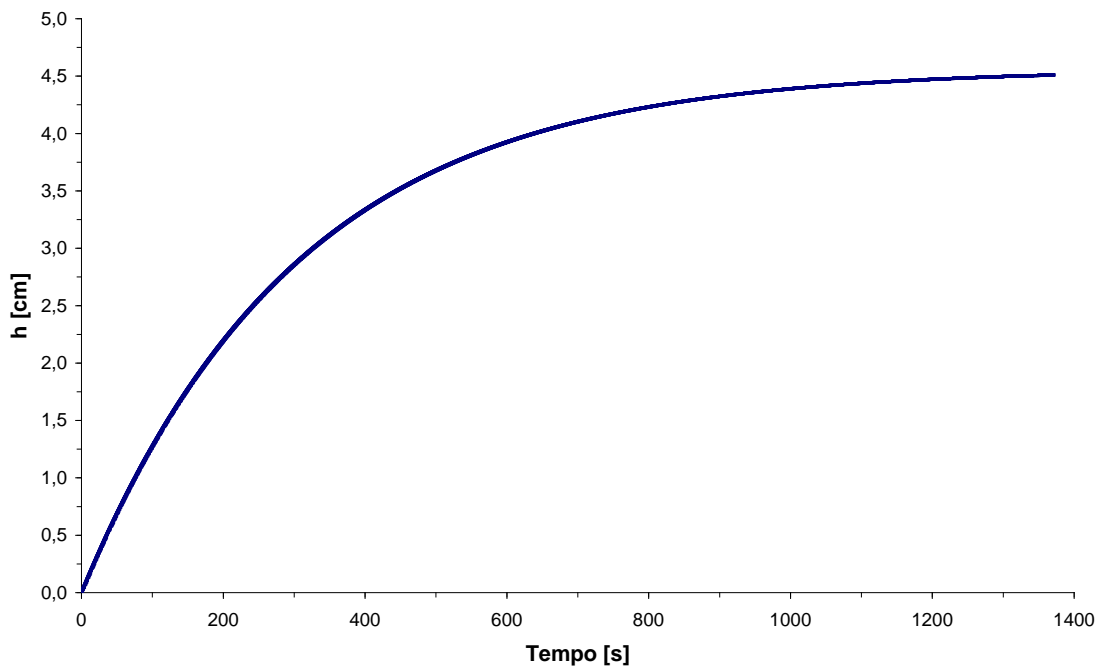


Figura 2.10 - Simulação do comportamento face a uma excitação do tipo degrau de magnitude $Q_e = 3 \left[\frac{cm^3}{s} \right]$ utilizando-se a função de transferência calculada

2.5.3 - Comparação

A comparação entre o resultado obtido experimentalmente e o simulado pode ser feita graficamente utilizando-se o MATLAB. Para tanto, subtrai-se H_1 dos resultados experimentais para trazer os dados às condições iniciais nula.

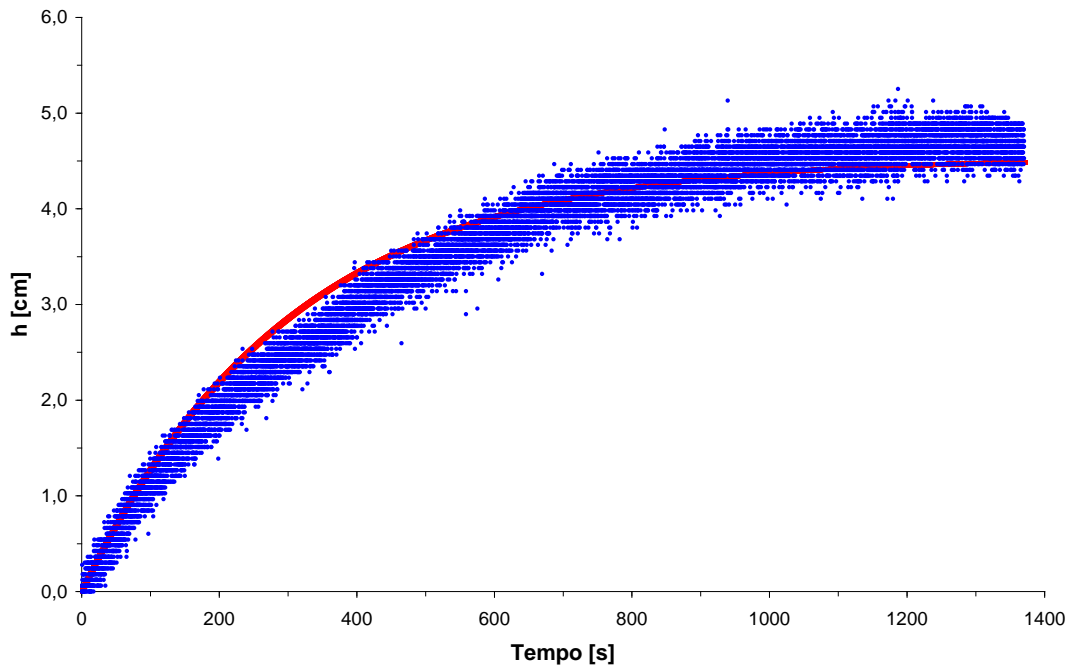


Figura 2.11 - Comparação entre os resultados experimentais e simulados

Analisando-se a Figura 2.11, nota-se um erro entre o valor simulado em regime e o valor real. Nota-se, ainda, que a função de transferência não representa adequadamente o comportamento do sistema no regime transitório.

Para corrigir esta deficiência pode-se ajustar os parâmetros da função de transferência para que esta represente melhor o comportamento do sistema físico em torno do ponto de operação.

2.5.4 – Ajuste da função de transferência

A função de transferência deve ser corrigida para minimizar os erros simulados tanto para o valor em regime, quanto para os valores no regime transitório.

Regime de equilíbrio

Estudando melhor a Figura 2.11, nota-se que o erro entre o valor de equilíbrio experimental e o simulado é de aproximadamente 0,2 cm. Este erro relaciona-se ao ganho estático da função de transferência. Observando-se a função de transferência conclui-se que o ganho estático de 1,52 deve ser aumentado para eliminar o erro em regime.

```
>> % correção do ganho estático
```

```
>> k=4.8/4.5
```

```
k =
```

```
1.0667
```

```
>> % Função de transferência ajustada para o ganho estático
```

```
>> gmar=tf([k*R],[R*C 1])
```

```
Transfer function:
```

```
1.621
```

```
-----
```

```
380 s + 1
```

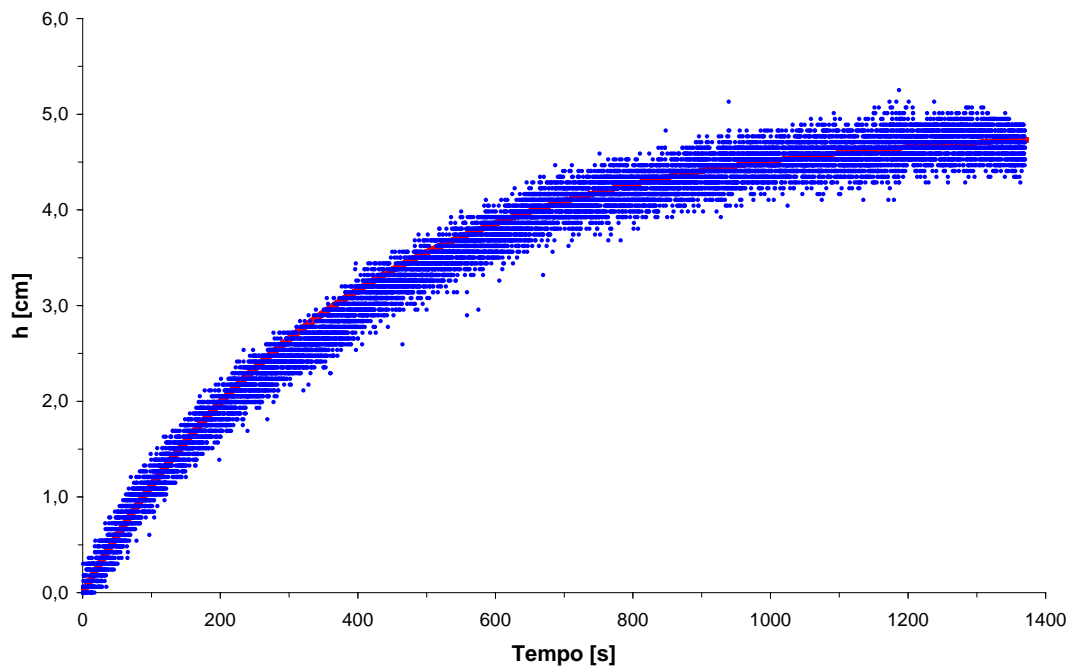


Figura 2.12 - Função de transferência ajustada para o regime de equilíbrio

Regime transitório

O erro obtido na simulação no regime transitório refere-se principalmente à constante de tempo RC , que parece ser um pouco pequena. Aumentando-se a constante de tempo para 420 s e calculando-se a função de transferência totalmente corrigida chega-se à Equação 2.18 e ao resultado apresentado na Figura 2.13.

```
>> gmac=tf([1.621],[420 1])
```

Transfer function:

```
1.621
-----
420 s + 1
```

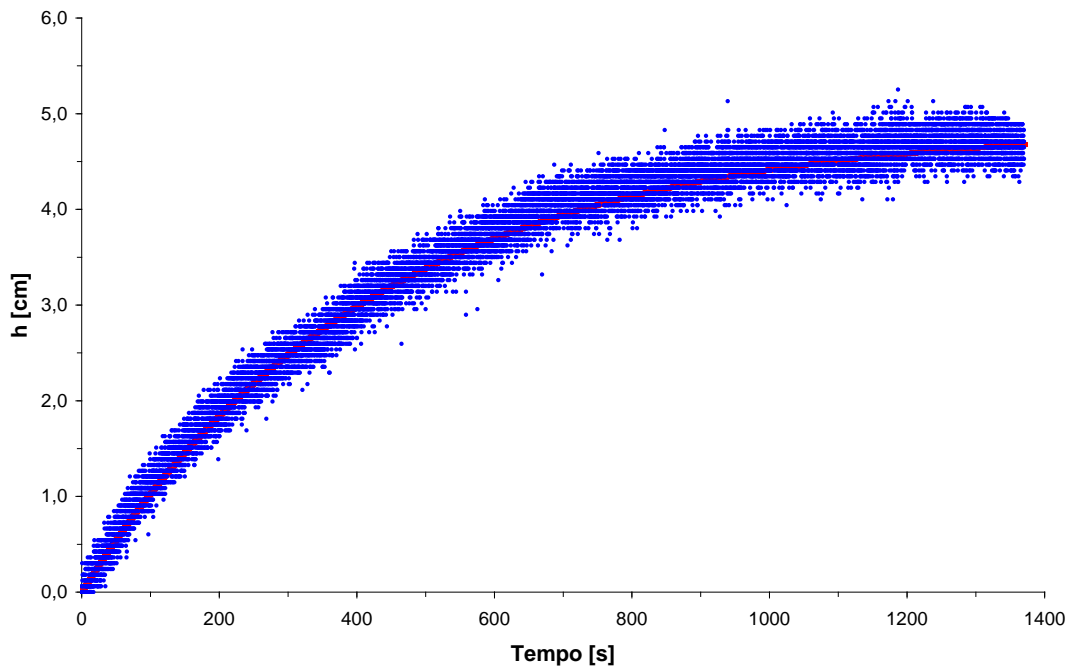


Figura 2.13 - Função de transferência totalmente corrigida

$$G_{ma}(s) = \frac{H(s)}{Q_e(s)} = \frac{1,621}{420s + 1} \quad \text{Equação 2.18}$$

A função de transferência representada pela Equação 2.18 descreve razoavelmente bem o comportamento do sistema e pode ser usada para os propósitos de simulação e projeto.

2.6 - Identificação

As técnicas para identificação de sistemas dinâmicos de primeira e segunda ordem estão apresentadas no Capítulo 1, item 1.9 – Identificação de sistemas dinâmicos.

Para identificação da função de transferência do sistema de nível ora estudado, deve-se submetê-lo, sem a ação de nenhum tipo de controle, a uma excitação conhecida (entrada do tipo degrau) e registrar sua resposta no tempo.

Este procedimento já foi realizado no item 2.5.1 – Experimentação para um degrau de $Q_e = 3 \left[\text{cm}^3 / \text{s} \right]$ e o resultado está apresentado na Figura 2.9. Observando-se a curva de resposta percebe-se que o sistema responde sem atraso e aproximadamente como um sistema de primeira ordem (Capítulo 1, item Sistemas de Primeira ordem). A escolha do modelo recairá, portanto, no sistema de primeira ordem, de acordo com a Equação 2.19.

$$G_{\text{Ima}}(s) = \frac{H(s)}{Q_e(s)} = \frac{K}{\tau s + 1} \quad \text{Equação 2.19}$$

As constantes do modelo podem ser obtidas utilizando-se os dados experimentais reduzidos para as condições iniciais nulas, de acordo com a Figura 2.14.

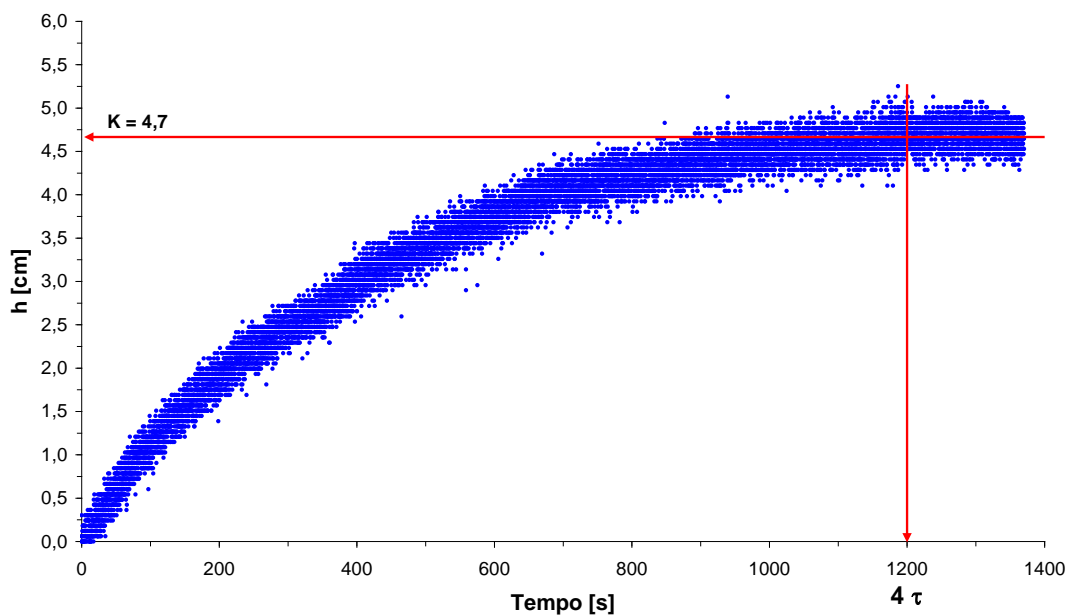


Figura 2.14 - Determinação gráfica das constantes do modelo

```
>> % Resultado experimental  
>> load degrau.txt  
>> t=0:0.1:1370.29;
```

```
>> t=t';  
>> plot(t,degrau2)  
>> hold on  
>> % Constantes do modelo  
>> K=4.7;  
>> T=1200/4;  
>> % Correção para o degrau experimental  
>> Qe=3;  
>> % Montagem da função de transferência  
>> gima=tf([K/Qe],[T 1])
```

Transfer function:

1.567

300 s + 1

```
>> % Simulação da função de transferência  
>> y=step(Qe*gima,t);
```

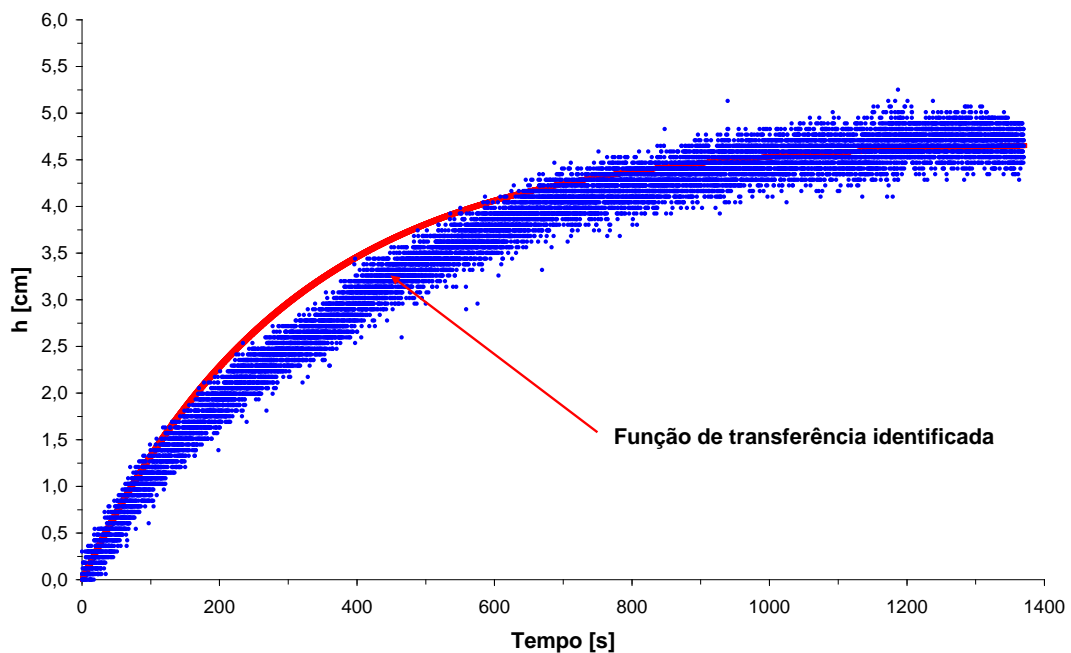


Figura 2.15 - Simulação da função de transferência identificada

$$g_{ima}(s) = \frac{H(s)}{Q_e(s)} = \frac{1,567}{300s+1} \quad \text{Equação 2.20}$$

A função de transferência identificada (Equação 2.20) apresenta uma diferença em relação à função de transferência corrigida (Equação 2.18) no que se refere ao ganho estático e à dinâmica do transitório. No entanto, pode ser ligeiramente alterada com a finalidade de melhor descrever o comportamento do sistema dinâmico, a exemplo do que foi feito com a função de transferência obtida analiticamente.

2.7 – Análise do comportamento no domínio do tempo

A análise inicial do comportamento do sistema trata de sua estabilidade absoluta e de sua estabilidade relativa. Maiores detalhes sobre a estabilidade dos sistemas dinâmicos podem ser obtidos no Capítulo 1, item 1.10.1 - Estabilidade.

Posteriormente à verificação da estabilidade do sistema, analisa-se seu comportamento em termos de seus parâmetros de desempenho, conforme o item 1.10.3 – Especificações de desempenho no domínio do tempo.

2.7.1 - Estabilidade

Para a análise da estabilidade será utilizada a função de transferência da Equação 2.18, como a representativa do sistema dinâmico.

O sistema apresenta um pólo ($-\frac{1}{420}$) situado no semiplano esquerdo do plano complexo denotando ser estável.

Utilizando-se o MATLAB, calcula-se a localização das raízes do sistema em malha fechada, para ganhos variando de zero a infinito.

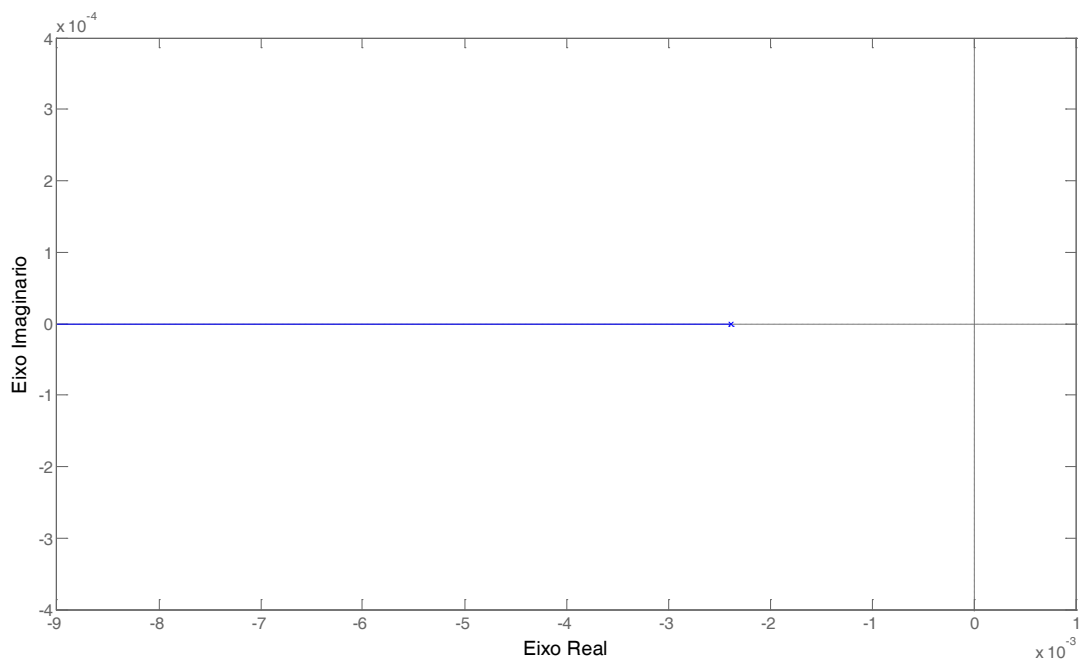
```
>> % Função de transferência  
>> gma=tf([1.621],[420 1])
```

Transfer function:

1.621

420 s + 1

```
>> % Localização das raízes
```



```
>> rlocus(gma)
```

Figura 2.16 - Localização das raízes

Pela Figura 2.16, nota-se que a localização das raízes se inicia em $-\frac{1}{420}$, para o sistema em malha aberta - ganho nulo, e se dirige para $-\infty$, apresentando, portanto, uma estabilidade relativa infinita, ou seja, o sistema em malha aberta nunca será instável.

2.7.2 – Características de desempenho no domínio do tempo

As características de desempenho no domínio do tempo são obtidas excitando-se o sistema com um sinal do tipo degrau.

```
>> % Função de transferência  
>> gma=tf([1.621],[420 1]);  
>> % Degrau unitário  
>> step(gma)
```

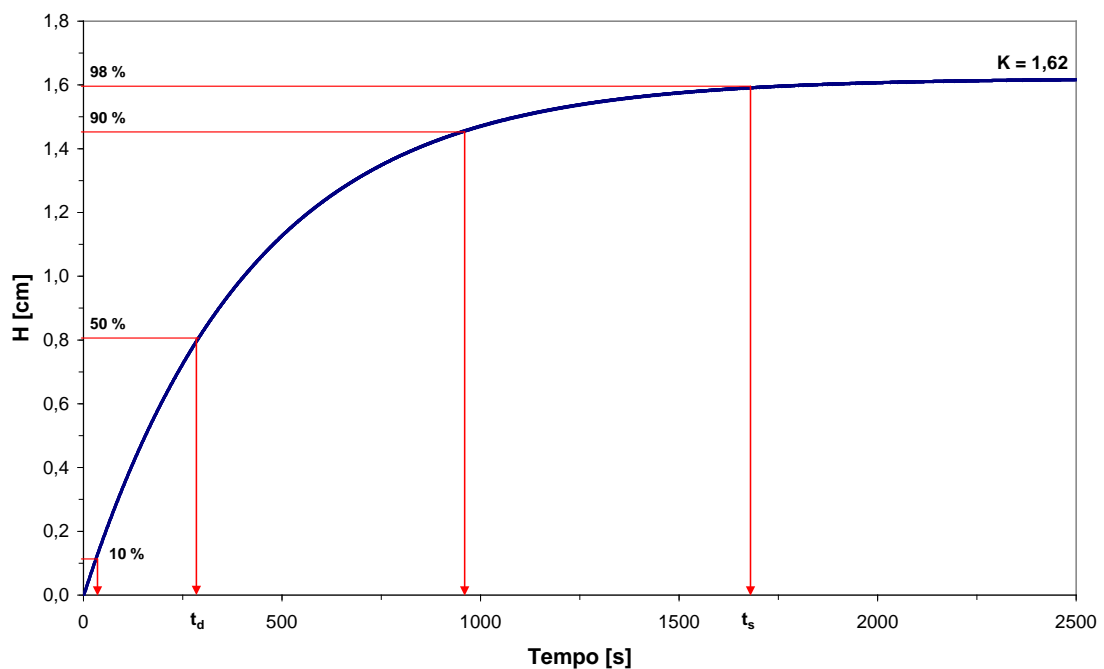


Figura 2.17 – Resposta simulada do sistema da Equação 2.18 frente a um degrau unitário

Por meio da Figura 2.17, se obtém as características de desempenho do sistema no domínio do tempo abaixo relacionadas.

- valor em regime permanente - $K=1,62[cm]$;
- constante de tempo - $\tau=420[s]$;

- tempo de atraso - $t_d = 291[s]$;
- tempo de subida - $t_r = 912[s]$;
- instante do pico - $t_p =$ ausente ;
- sobre-sinal máximo - $M_p =$ ausente ;
- tempo de acomodação - $t_s = 1680[s]$.

2.8 - Análise do comportamento no domínio da frequência

Apesar de o sistema de controle de nível, na maioria dos casos, não ser solicitado com excitações cíclicas, procede-se a seguir uma análise no domínio da frequência com a finalidade de um melhor entendimento de seu comportamento, bem como, a de exercício do método.

O comportamento do sistema no domínio da frequência pode ser determinado por meio de seu Diagrama de Bode. Considerando-se o sistema representado pela Equação 2.18 e utilizando-se o MATLAB, tem-se:

```
>> % Função de transferência do sistema  
>> gma=tf([1.621],[420 1])
```

Transfer function:

```
1.621  
-----  
420 s + 1  
>> %Diagrama de Bode  
>> margin(gma)  
>> grid on
```

Com este procedimento obtém-se o diagrama apresentado na Figura 2.18.

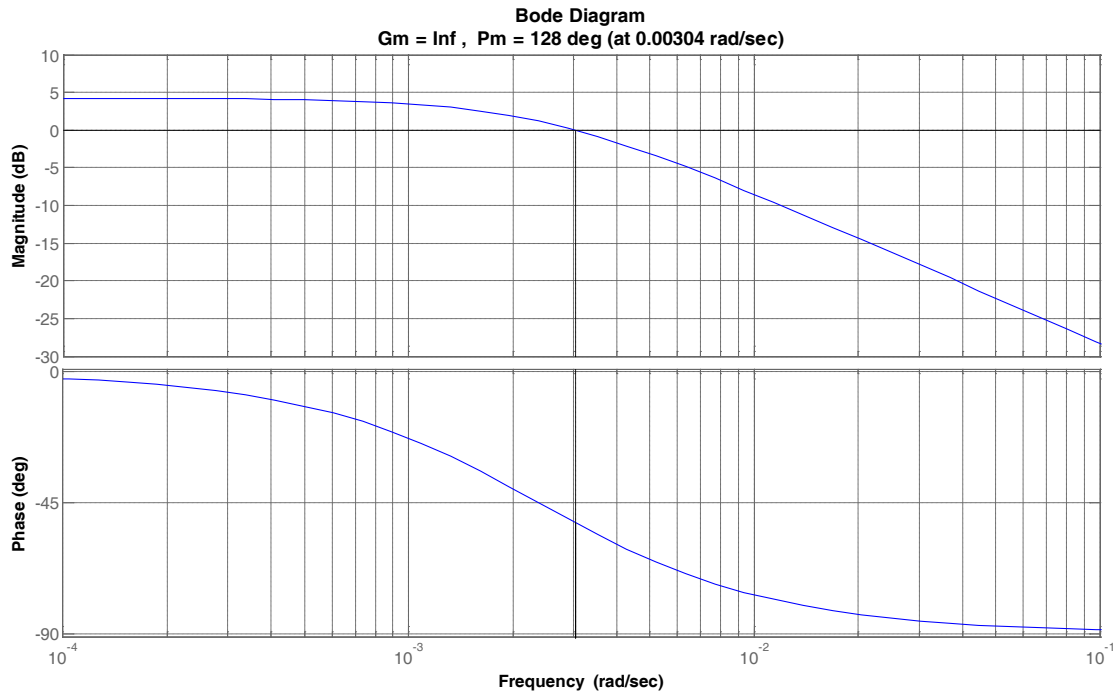


Figura 2.18 – Diagrama de Bode do sistema representado pela Equação 2.18

Analisando-se a Figura 2.18, nota-se que o sistema apresenta as seguintes características:

- Pico de ressonância - M_r = ausente ;
- Frequência de ressonância - ω_r = ausente ;
- Largura de faixa - $BW = 0,0049 \left[\text{rad/s} \right]$
- Taxa de corte - $TC = 19,15 \left[\text{dB/década} \right]$;
- Margem de ganho - $MG = \infty$;
- Frequência de cruzamento de ganho - $\omega_g = \infty$;
- Margem de fase - $\Phi M = 128 \left[\text{graus} \right]$;
- Frequência de cruzamento de fase - $\omega_c = 0,00304 \left[\text{rad/s} \right]$.

2.9 – Controladores PID

O método de projeto aqui desenvolvido não é único, segue as recomendações do item 1.13.2. Desta forma, cada projetista pode obter controladores distintos, porém, com desempenhos semelhantes.

Os métodos de sintonia, tais como os de Ziegler-Nichols, neste caso ficam prejudicados, já que o sistema apresenta tempo morto insignificante frente à sua constante de tempo.

2.9.1 - Controlador tipo P

O controlador do tipo P pode ser projetado introduzindo-se uma ação proporcional em série com a função de transferência de malha aberta e, posteriormente, fechando-se a malha de acordo com a Figura 2.19.

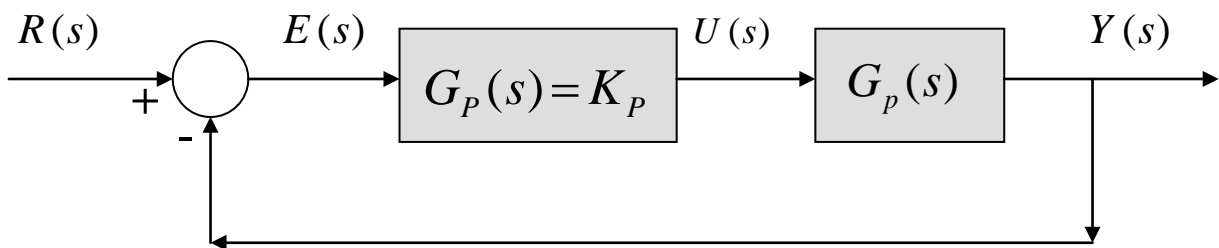


Figura 2.19 - Diagrama de blocos de um sistema de controle proporcional

Observe que na Figura 2.19 as dinâmicas do sensor e do atuador foram desprezadas.

A introdução do controlador proporcional tem a função principal de melhorar o tempo de subida da resposta, no entanto, seu valor não deve ser indiscriminadamente aumentado, pois pode vir a desestabilizar o sistema ou ser impossível sua implementação real.

No presente caso, o ganho proporcional está limitado à saturação do atuador. Ganhos proporcionais elevados, apesar de diminuírem o erro em regime, fazem com que os ruídos presentes sejam amplificados.

Em face da não linearidade do sistema, calculou-se a função de transferência em torno de um ponto de operação, sendo a região próxima a este ponto considerada linear.

A não linearidade do sistema e a saturação do atuador dificultam o projeto do ganho proporcional por meio do MATLAB, portanto, foi utilizado o diagrama do Simulink apresentado na Figura 2.20.

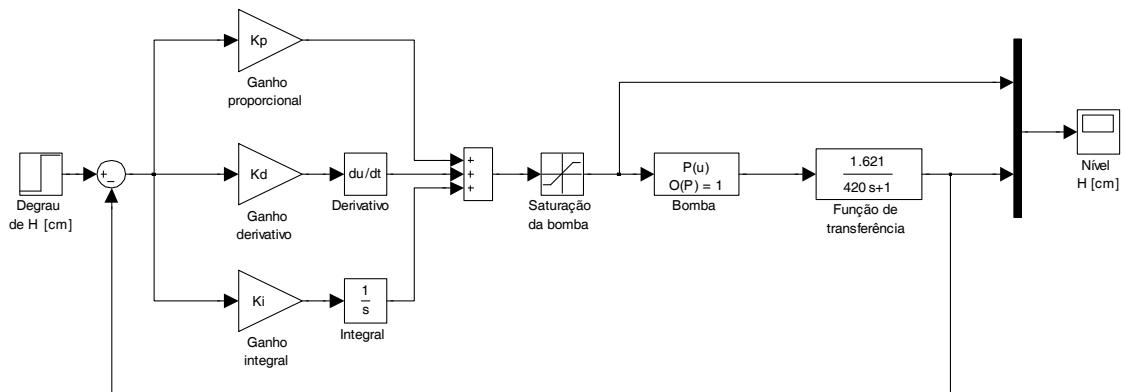


Figura 2.20 – Diagrama do Simulink utilizado para projeto do controlador do sistema de nível

Inicialmente, os ganhos derivativo e integral foram selecionados como sendo nulos e os ganhos proporcionais estudados variaram entre 0,5 e 2. Os resultados estão apresentados na Figura 2.21.

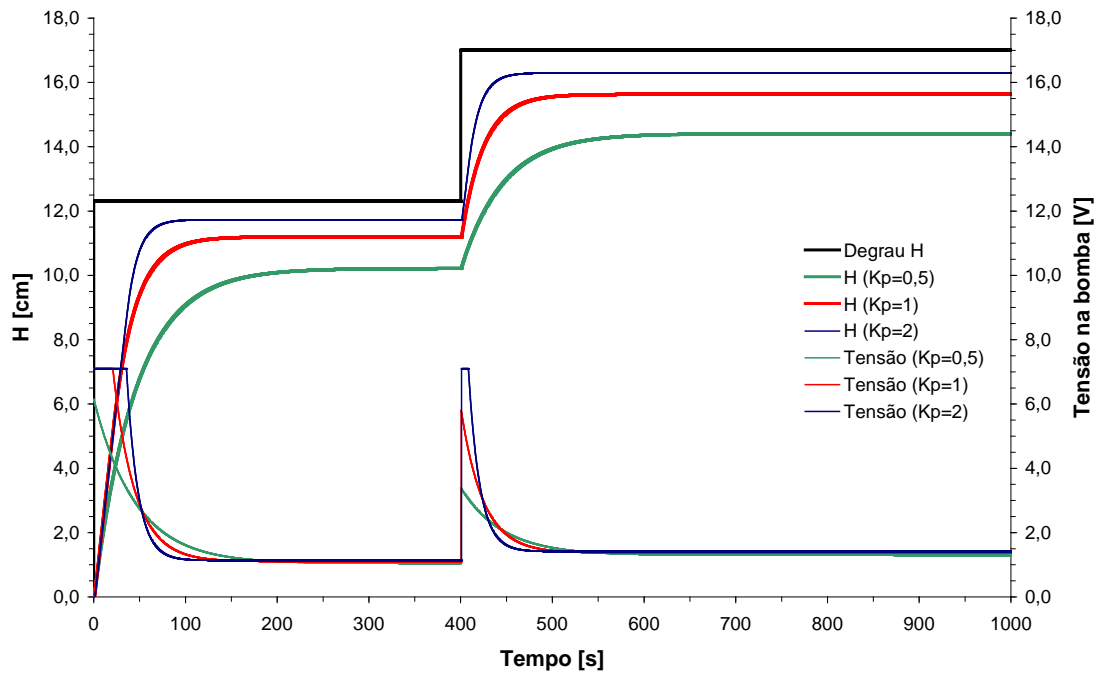


Figura 2.21 – Simulação para ganhos proporcionais variando entre 0,5 e 2

O degrau simulado foi de $h = 4,7[cm]$ a partir de $H_1 = 12,3[cm]$ até $H_2 = 17,0[cm]$, sendo este último o novo nível a ser mantido pelo sistema de controle. Nos primeiros 400 segundos a simulação eleva o nível do reservatório até próximo a H_1 , após o que é aplicado o degrau sob estudo. O valor desejado de H_1 não é alcançado já que o controlador ainda não está devidamente projetado.

Nota-se que, na simulação para o ganho $K_p = 2$, aparece um pequeno período em que há saturação na tensão de alimentação da bomba. Na prática isto realmente pode ocorrer, no entanto, nesta fase do projeto será evitado. Escolhe-se, portanto, o ganho proporcional $K_p = 1$.

Nota-se pelo resultado da simulação, apresentado na Figura 2.21, que a introdução de um ganho proporcional favorece a resposta do sistema diminuindo o tempo de estabilização e reduzindo o erro em regime, no entanto, sem eliminá-lo.

2.9.2 – Controlador tipo PI

Um projeto mais apurado, considerando-se a saturação do atuador e o nível de líquido no reservatório, pode ser realizado introduzindo-se um ganho integral suficiente para eliminar o erro em regime. A Figura 2.22 mostra um diagrama de blocos de um sistema de controle PI.

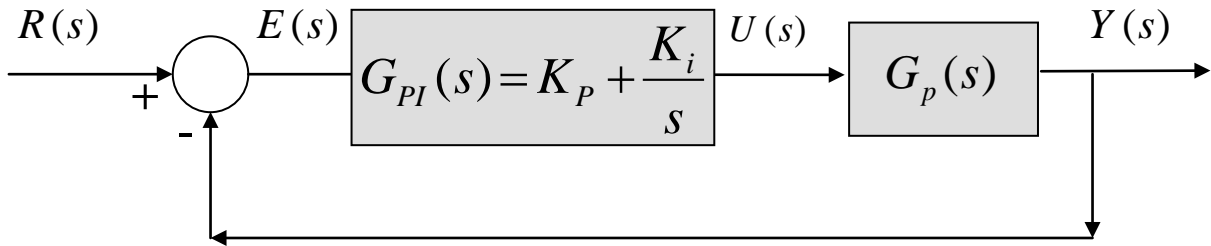


Figura 2.22 - Diagrama de blocos de um sistema de controle proporcional - integral

Mantendo-se o ganho proporcional já definido e introduzindo-se ganhos integrais entre 0,005 e 0,02 obtém-se os resultados apresentados na Figura 2.23.

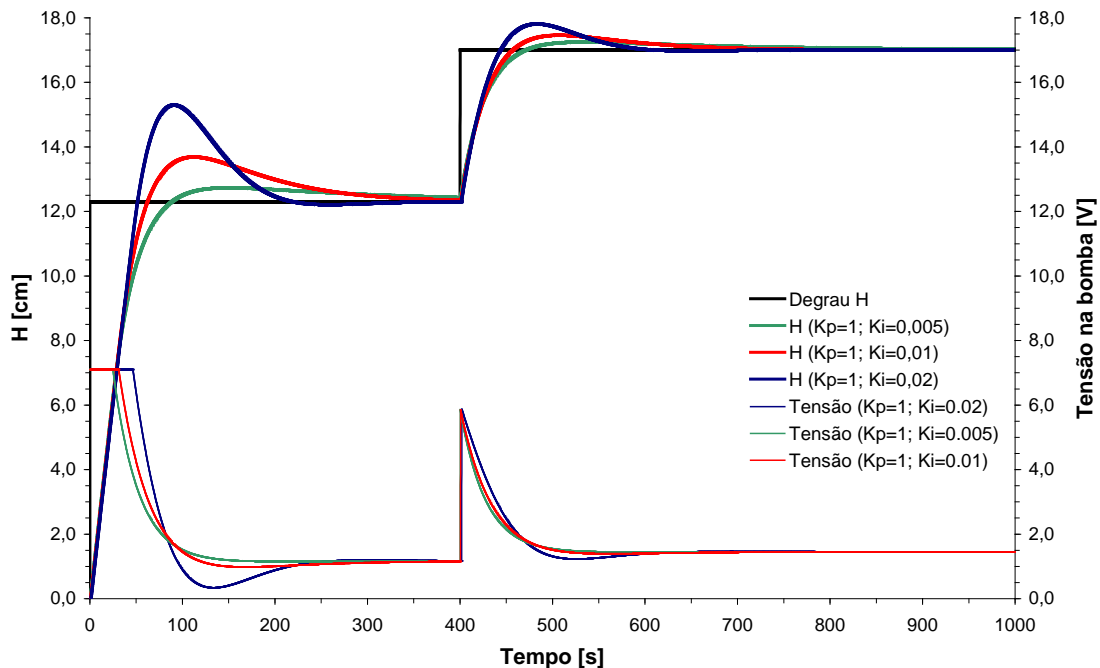


Figura 2.23 – Resultado da simulação do controlador PI para $K_p = 1$ e K_i variando entre 0,005 e 0,02

Nota-se, pela Figura 2.23, que a introdução do ganho integral eliminou o erro em regime, porém, torna o sobre-sinal maior à medida que aumenta.

Para não deixar o sistema com sobre-sinal elevado nem tão pouco com o tempo de acomodação muito grande, uma solução de compromisso pode ser $K_p = 1$ e $K_i = 0,01$.

2.9.3 – Controlador PID

Para tentar melhorar o tempo de resposta do sistema, pode-se introduzir no controlador PI uma ação derivativa, tornando-o um controlador PID conforme a Figura 2.24.

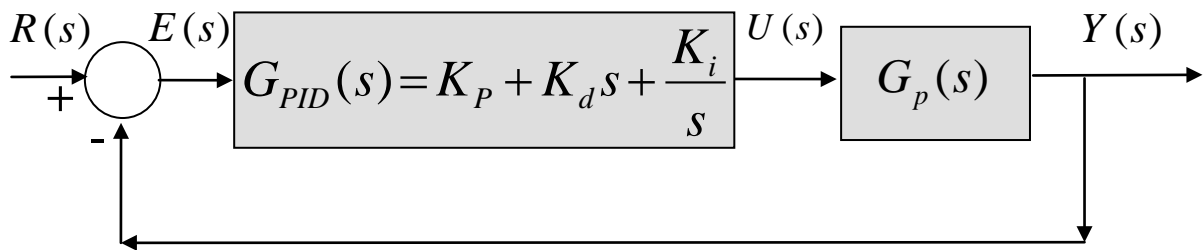


Figura 2.24 – Diagrama de blocos de um sistema de controle proporcional – integral - derivativo

O resultado da simulação apresentado na Figura 2.25 mostra que a introdução de um ganho derivativo na faixa de 1 a 20 não tem efeito na melhora da resposta do sistema e que ganhos derivativos mais elevados pioram o tempo de estabilização.

Neste caso, portanto, a introdução de uma ação derivativa é desnecessária e o controlador deve possuir apenas a ação proporcional - integral.

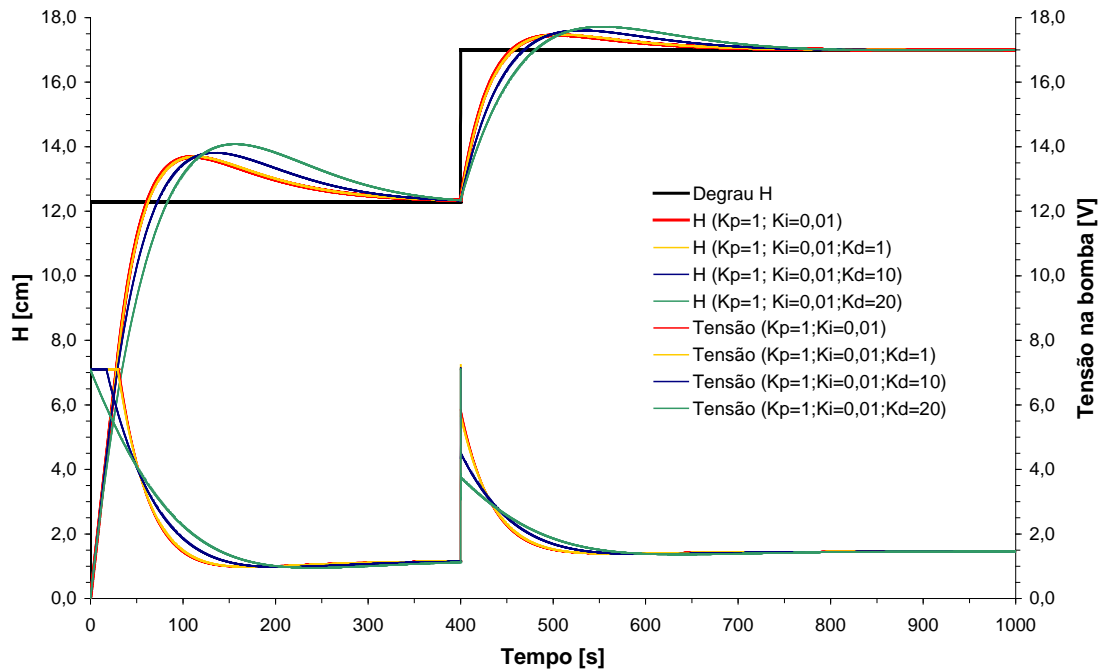


Figura 2.25 – Resultado da simulação do controlador PID para $K_p = 1$; $K_i = 0,01$ e K_d variando entre 1 e 20

Desprezando-se a ação derivativa, a função de transferência do controlador fica sendo a apresentada na Equação 2.21.

$$G_{PI}(s) = \frac{s + 0,01}{s} \quad \text{Equação 2.21}$$

Utilizando-se o controlador PI projetado, tem-se a função de transferência do sistema em malha fechada, de acordo com a Figura 2.22, representada pela Equação 2.22.

$$G_{mf}(s) = \frac{1,621s + 0,01621}{420s^2 + 2,621s + 0,01621} \quad \text{Equação 2.22}$$

2.10 – Implementação Prática do Controlador

O controlador projetado, de acordo com a Figura 2.22 e com a Equação 2.21, foi implementado na bancada de nível por meio de um CLP marca HI-Tecnologia, modelo ZAP500, onde foram utilizados ganhos equivalentes a $K_p = 1$ e $K_i = 0,01$.

As mesmas condições de teste foram impostas ao modelo teórico e ao sistema físico real, ou seja, uma variação no valor de referência de $H_1 = 12,3[cm]$ para $H_2 = 17,0[cm]$ (degrau de $h = 4,7[cm]$) correspondente a uma variação de $Q_e = 3[cm^3/s]$.

A comparação entre a resposta do modelo teórico e a resposta do sistema físico real pode ser observada na Figura 2.26.

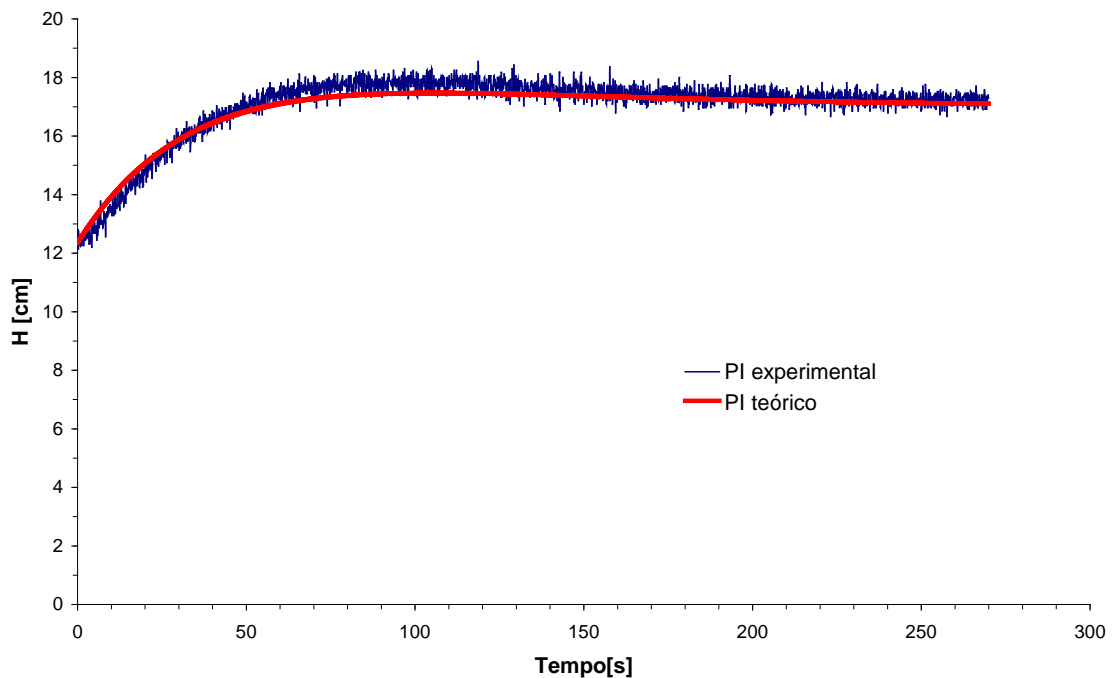


Figura 2.26 – Comparação entre os resultados teórico e experimental do controlador PI

Nota-se uma boa concordância entre as respostas teórica e experimental, o que comprova o sucesso do projeto do controlador PI para as condições operacionais impostas.

Capítulo 3

Projeto de Sistema de Controle Térmico

Capítulo 3 - Projeto de Sistema de Controle Térmico

3.1 - Introdução

Este capítulo trata do projeto e implantação de um sistema de controle em uma planta didática para secagem de produtos.

Será utilizado o Kit TSPT05, fabricado pela T&S Equipamentos Eletrônicos, cujo princípio de funcionamento é basicamente um soprador de velocidade ajustável que gera um fluxo de ar que após passar por uma resistência elétrica é direcionado para a gaveta de produtos (por exemplo, grãos) localizada dentro da estufa de secagem. Esta última possui um design tal que permite uma melhor dispersão do fluxo de ar a fim de atingir toda gaveta de secagem.

A principal aplicação deste Kit é facilitar o estudo de técnicas experimentais de modelagem, identificação, simulação e projeto de sistema de controle, matérias constantes nos em cursos de engenharia que ministram disciplinas da área de sistemas de controle e/ou controle de processos.

3.2 – Descrição da Bancada Térmica

Serão apresentados a seguir os elementos que compõem o Kit TSPT05, sua interligação e características técnicas.



Figura 3.1 – Bancada térmica - Kit TSPT05

Dados técnicos

- Tensão de alimentação: 127 ou 220 Vac;
- Estufa com as extremidades piramidais (coifa), construída em acrílico transparente, com gaveta para a secagem de produtos;
- Soprador com o ajuste de vazão feito eletronicamente via variador PWM, através de potenciômetro ou sinal de referência de 0 a 5Vdc;
- Sensor de umidade para efetuar leituras na coifa superior da estufa;
- Sensores de temperatura, um logo após a saída do soprador para fazer o controle de temperatura e outro na saída da coifa junto ao sensor de umidade;

- Resistência elétrica para aquecer o ar proveniente do soprador;
- Controlador de temperatura, marca NOVUS, modelo N1100, com retransmissão do sinal de entrada em 4 a 20mA, saída RS485 para ajustes de parâmetros e um contato de alarme do tipo SPDT;
- Chave geral com desarme de sobrecorrente.

Identificação dos terminais

A Figura 3.2 mostra a barra de terminais de conexão utilizada na bancada térmica.

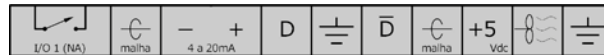


Figura 3.2 – Barra 1 de terminais frontal (da esquerda para direita).

- Contato de alarme NA SPDT;
- Malha (Não aterrada);
- Sinal de temperatura da saída do soprador, 4 a 20mA;
- Comunicação RS485 (D+);
- Comunicação RS485 (aterramento);
- Comunicação RS485 (D-);
- Malha (Não aterrada);
- Fonte +5Vdc, 250mA;
- Sinal de referência de velocidade do soprador;
- Terra.

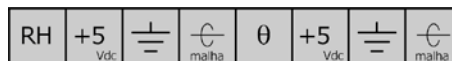


Figura 3.3 - Barra 2 de terminais frontal (da esquerda para direita).

- Sinal de umidade;
- Fonte +5Vdc, 250mA;
- Terra;

- Malha (Não aterrada);
- Sinal de temperatura na saída da estufa;
- Fonte +5Vdc, 250mA;
- Terra;
- Malha (Não aterrada).

3.3 – Modelagem Matemática

O processo escolhido para a obtenção do modelo matemático representativo do sistema térmico foi o via experimental (Identificação de Sistema). Desta forma, submeteu-se o sistema a uma excitação do tipo degrau de 30% da potência disponível, registrou-se a resposta da temperatura ao longo do tempo até a estabilização e calculou-se a diferença entre a temperatura medida e a inicial. A curva de resposta experimental obtida está apresentada na Figura 3.4.

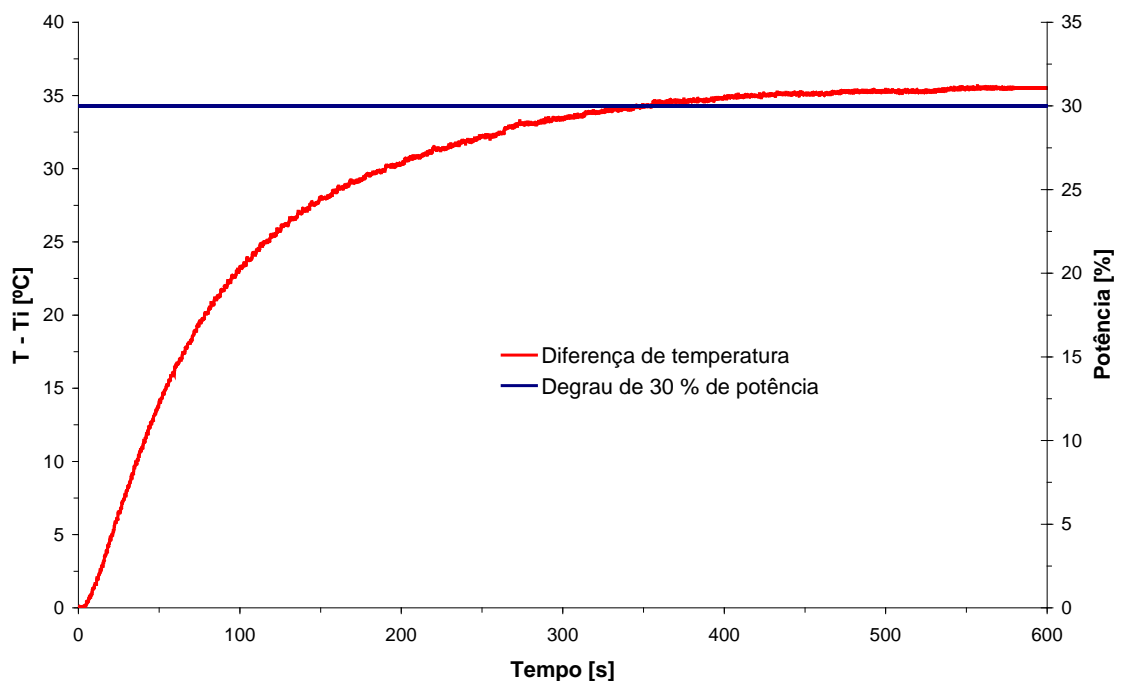


Figura 3.4 - Curva experimental da resposta a um degrau de 30% de potência

Com a finalidade de se ter uma padronização para os cálculos, reduziu-se a curva de resposta a um degrau unitário de potência, em termos percentuais e obteve-se a Figura 3.5.

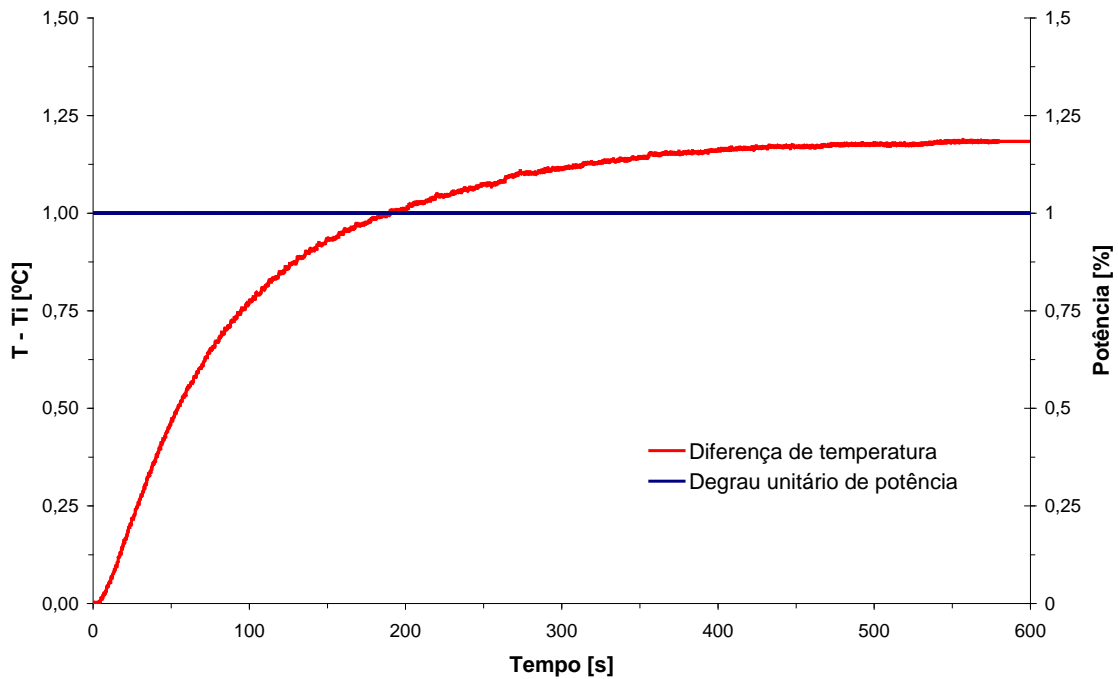


Figura 3.5 - Curva experimental da resposta a um degrau unitário de potência

A curva da Figura 3.5 será utilizada para a identificação da função de transferência.

3.4 – Função de Transferência

Observando-se a Figura 3.5, nota-se que a curva da resposta experimental a um degrau sugere o comportamento de primeira ordem (Equação 1.14) com um pequeno atraso. O sistema fica, então, representado pela Equação 3.1.

$$G(s) = \frac{K}{\tau s + 1} \cdot e^{-t_a s} \quad \text{Equação 3.1}$$

Ainda na Figura 3.5, observa-se que o sistema possui aproximadamente uma constante de tempo $\tau = 100[s]$ e um ganho estático, também aproximado, de $K = 1,183[^\circ C]$. A Equação 3.2

apresenta a função de transferência do sistema, entre a variação da temperatura na saída e a aplicação de uma entrada de potência, sem a representação do atraso.

$$G(s) = \frac{\Delta T(s)}{P(s)} = \frac{1,183}{100s+1} \quad \text{Equação 3.2}$$

No entanto, o sistema apresenta um atraso de aproximadamente 8 segundos ($t_a = 8[s]$), que deve ser considerado. Para tanto, pode-se utilizar a aproximação de MacLaurin (Equação 1.3). Desta forma, o atraso fica representado pela Equação 3.3.

$$A(s) = e^{-t_a s} = \frac{1}{32s^2 + 8s + 1} \quad \text{Equação 3.3}$$

Introduzindo-se o atraso na função de transferência, tem-se a Equação 3.4, cuja resposta simulada frente a um degrau unitário de potência, está apresentada na Figura 3.6.

```
>> Ta=8;  
>> A=tf([1],[(Ta^2)/2 Ta 1]);  
>> G=tf([1.183],[100 1]);  
>> Ga=series(A,G)  
>> t=0:0.2:600;  
>> step(Ga,t)
```

$$G_a(s) = \frac{1,183}{3200s^3 + 832s^2 + 108s + 1} \quad \text{Equação 3.4}$$

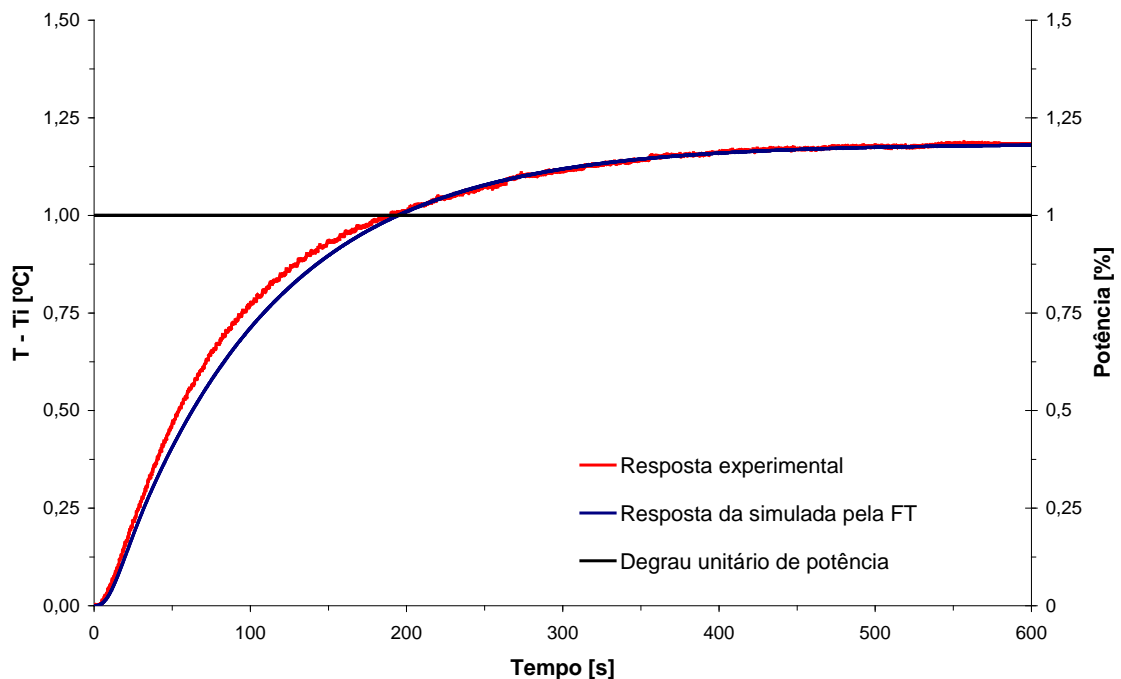


Figura 3.6 – Validação da função de transferência

Os pólos da função de transferência do sistema sem o controlador (malha aberta) podem ser calculados pelo MATLAB fazendo-se:

```
>> % Determinação dos polos em malha aberta  
>> Ga=tf([1.183],[3200 832 108 1]);  
>> pole(Ga)  
  
-0.1250 + 0.1250i  
-0.1250 - 0.1250i  
-0.0100
```

O resultado mostra que o sistema em malha aberta possui um pólo real negativo e um par de pólos complexos com a parte real negativa, denotando ser um sistema estável.

O comando *rlocus* do MATLAB calcula e apresenta graficamente o lugar geométrico das raízes, de um sistema linear de uma entrada e uma saída, para um ganho estático variando de zero até infinito em uma malha de realimentação negativa.

>> % Lugar geométrico das raízes

>> rlocus(Ga)

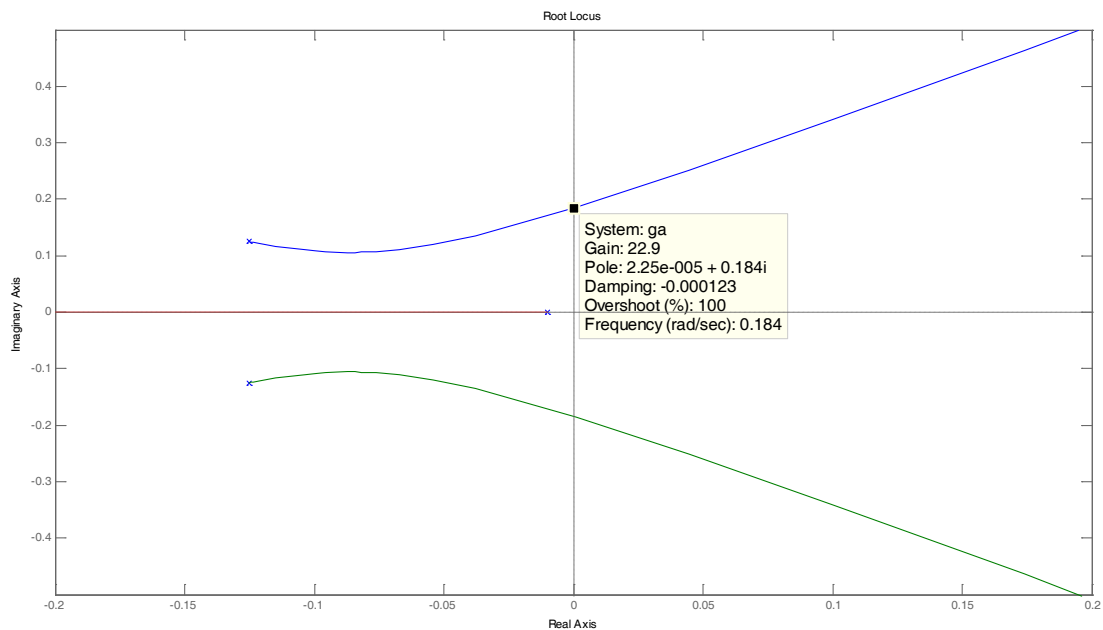


Figura 3.7 – Lugar geométrico das raízes da Equação 3.4

O ganho crítico, ganho acima do qual o sistema se desestabiliza, pode ser determinado diretamente da Figura 3.7. No presente caso foi $K_{cr} = 22,9$.

A introdução da aproximação de MacLaurin, para a representação do atraso na função de transferência do sistema, eleva a função de transferência de primeira para terceira ordem. O lugar geométrico das raízes mostra que o atraso contribui com a desestabilização do sistema caso seja utilizado um ganho elevado, no presente caso acima de $K_p = 22,9$.

3.5 – Controlador liga-desliga

O controlador liga-desliga (ou *on-off*), por sua simplicidade, é bastante utilizado em sistemas térmicos. No presente caso, um controlador liga-desliga foi projetado de acordo com a Figura 1.32 e simulado em Simulink por meio do diagrama apresentado na Figura 3.8.

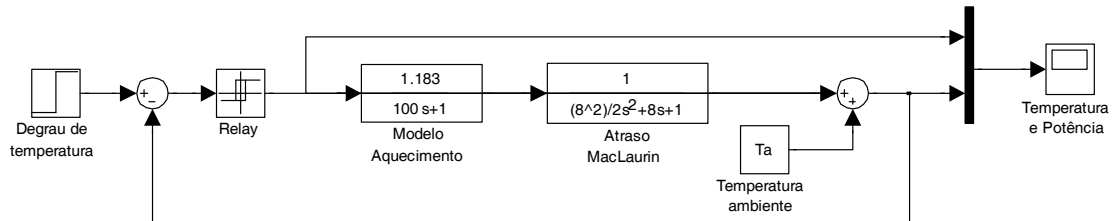


Figura 3.8 – Diagrama para simulação do controlador liga-desliga utilizando-se o Simulink

Para o projeto foi selecionado o valor de referência em 60 [°C], para o sistema inicialmente em equilíbrio com a temperatura ambiente de 26,2 [°C]. O tempo de atraso foi o mesmo identificado anteriormente, ou seja, $t_a = 8[s]$.

O resultado da simulação, bem como, da experimentação sob as mesmas condições no sistema físico real estão apresentados na Figura 3.9.

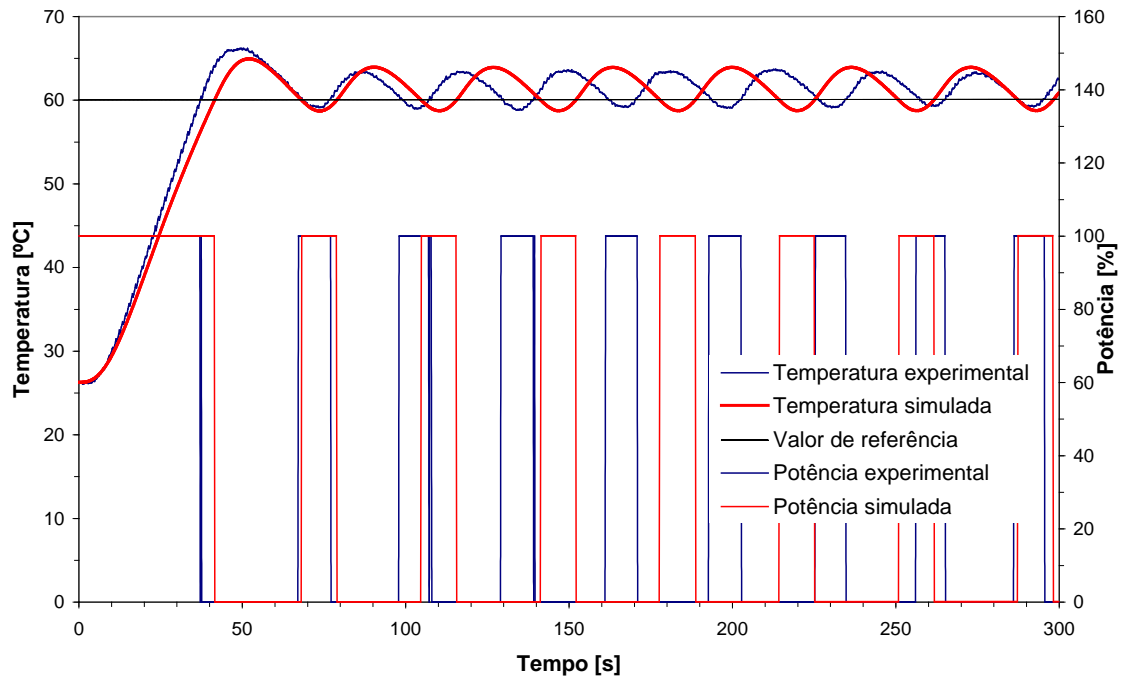


Figura 3.9 – Resultados teórico e experimental do sistema de controle liga-desliga

A diferença entre os resultados teórico e experimental dá-se principalmente devido a simplificações no modelo utilizado, a não linearidades presentes no sistema e não consideradas na análise e ao fato de que o aquecimento é forçado e o resfriamento é natural, fazendo com que as dinâmicas de aquecimento e resfriamento sejam distintas.

No entanto, o modelo utilizado para o controlador liga-desliga pode caracterizar, de forma razoável, a resposta em regime permanente do sistema físico real.

O controlador liga-desliga tem por característica manter a variável controlada flutuando em torno de um valor de equilíbrio e, via de regra, não elimina o erro em regime permanente. No entanto, é largamente utilizado nos sistemas que admitem estas características, como é o caso da maioria dos sistemas térmicos.

3.6 – Controlador PID

O controlador PID será implementado em série com o sistema a ser controlado, de acordo com a Figura 1.35. A forma de implantação será a paralela clássica (Figura 1.38). A função de transferência do controlador PID será, portanto, a apresentada na Equação 1.29.

Adotando o roteiro prático para projeto apresentado no Item 1.14.2, obtiveram-se os seguintes parâmetros para o controlador PID: $K_p = 7,5$; $T_i = 100$ e $T_d = 1$. Comparando-se o ganho projetado com o ganho crítico, observa-se que o sistema controlado ficou com uma margem de estabilidade bastante adequada.

A função de transferência do controlador PID projetado ficou sendo a apresentada pela Equação 3.5.

$$G_{PID}(s) = \frac{7,5s^2 + 7,5s + 0,075}{s} \quad \text{Equação 3.5}$$

3.7 – Comportamento em malha fechada

O comportamento do sistema em malha fechada pode ser simulado introduzindo-se o controlador em série com a função de transferência do sistema (Figura 1.35), fechando-se a malha e, posteriormente, submetendo a função de transferência de malha fechada do sistema a uma excitação, por exemplo, do tipo degrau. Para tanto, pode-se montar um diagrama para simulação no Simulink ou utilizar a janela de comandos do MATLAB.

Pelo MATLAB obtém-se a função de transferência em malha fechada fazendo-se:

```
>> % Função de transferência do controlador
>> Kp=7.5;
>> Ti=100;
>> Td=1;
>> Gpid=tf([Kp*Td Kp Kp/Ti],[1 0]);
>>
```

```
>> % Função de transferência do sistema com atraso  
>> Ga=tf([1.183],[3200 832 108 1]);  
>>  
>> % Função de transferência em malha fechada  
>> gmf=feedback(Gpid*ga,1);
```

$$G_{mf}(s) = \frac{8,873s^2 + 8,873s + 0,08872}{3200s^4 + 832s^3 + 116,9s^2 + 9,873s + 0,08872}$$

Equação 3.6

A resposta simulada do sistema controlado frente a um degrau unitário no valor de referência de temperatura pode ser obtida por:

```
>> % Simulação em malha fechada frente a um degrau unitário  
>> t=0:0.2:200;  
>> step(gmf,t)
```

O resultado da simulação está apresentado na Figura 3.10.

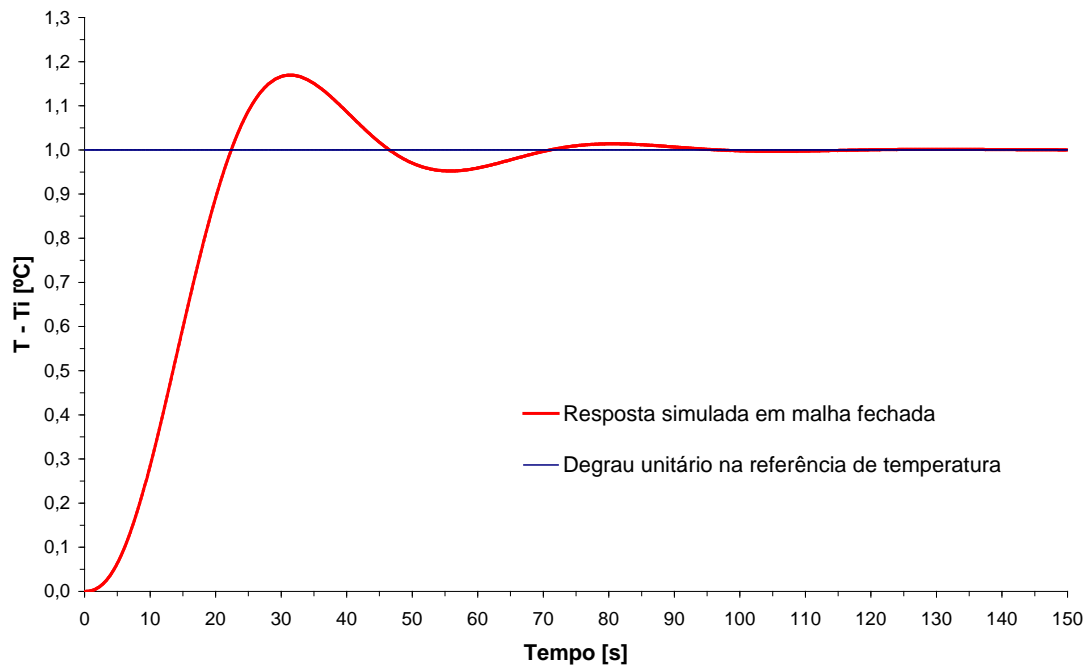


Figura 3.10 – Resposta simulada do sistema frente a uma excitação unitária no valor de referência de temperatura

O sistema de controle projetado, apesar de apresentar um sobre-sinal máximo de 17 %, possui um tempo de acomodação mais rápido do que o de malha aberta.

A simulação do desempenho do sistema de controle também pode ser realizada por meio do diagrama do Simulink, apresentado na Figura 3.11.

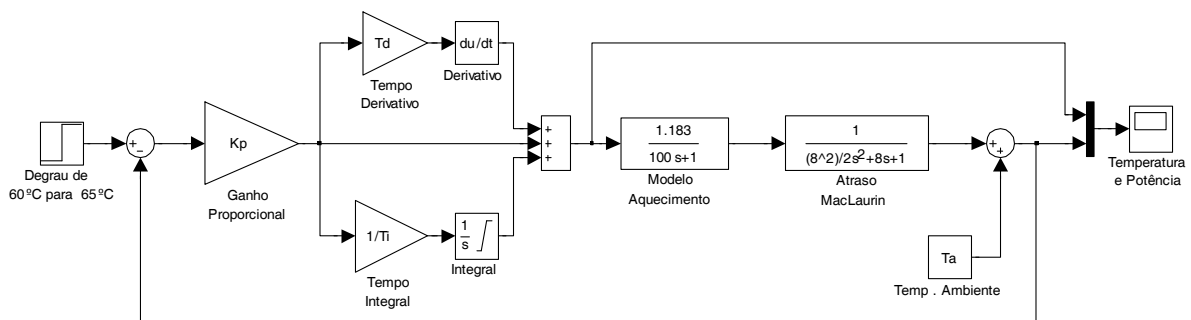


Figura 3.11 – Diagrama do Simulink para simulação do sistema de controle em malha fechada

A simulação da Figura 3.11 não leva em conta possíveis saturações na ação integral e na variável de atuação (potência), além da dinâmica dos circuitos eletrônicos envolvidos.

3.8 – Implementação Prática do Controlador

O sistema de controle foi implementado na bancada térmica, utilizando-se o controlador marca Novus, modelo N1100. Os parâmetros implementados no controlador correspondente ao PID projetado foram:

- Banda proporcional, $P_b = 1,8[\%]$;
- Taxa da ação integral, $I_r = 0,6 \left[\frac{\text{repetições}}{\text{min}} \right]$;

- Ação derivativa, $d_i=1$ e,
- Tempo de ciclo do PWM, $C_t=2[s]$.

A banda proporcional P_b em função do ganho proporcional K_p , para o conjunto sensor de temperatura tipo PT-100 e o controlador utilizado, foi obtida pelo cálculo $P_b[\%]=\frac{10000}{730 \cdot K_p}$.

A taxa da ação integral I_r em função do tempo integral T_i foi obtida pelo cálculo $I_r\left[\frac{\text{repetições}}{\text{min}}\right]=\frac{60}{T_i}$.

A ação derivativa d_i corresponde diretamente ao tempo derivativo T_d .

O tempo de ciclo do PWM pode ser selecionado em até $C_t=100[s]$. Neste caso foi selecionado $C_t=2[s]$, rápido o suficiente para o efeito de sua ciclagem não afetar a resposta dinâmica do sistema.

A validação do sistema de controle projetado foi realizada experimentalmente sujeitando-se o sistema a uma alteração, na forma de um degrau de 5 °C, no valor de referência a partir do regime operacional de 60 °C.

Para a aquisição e registro da resposta dinâmica foi utilizada uma placa de conversão A/D, marca National Instruments, modelo USB-6009 e desenvolvido um programa em LabVIEW.

A comparação entre a resposta dinâmica simulada e a experimental está apresentada na Figura 3.12.

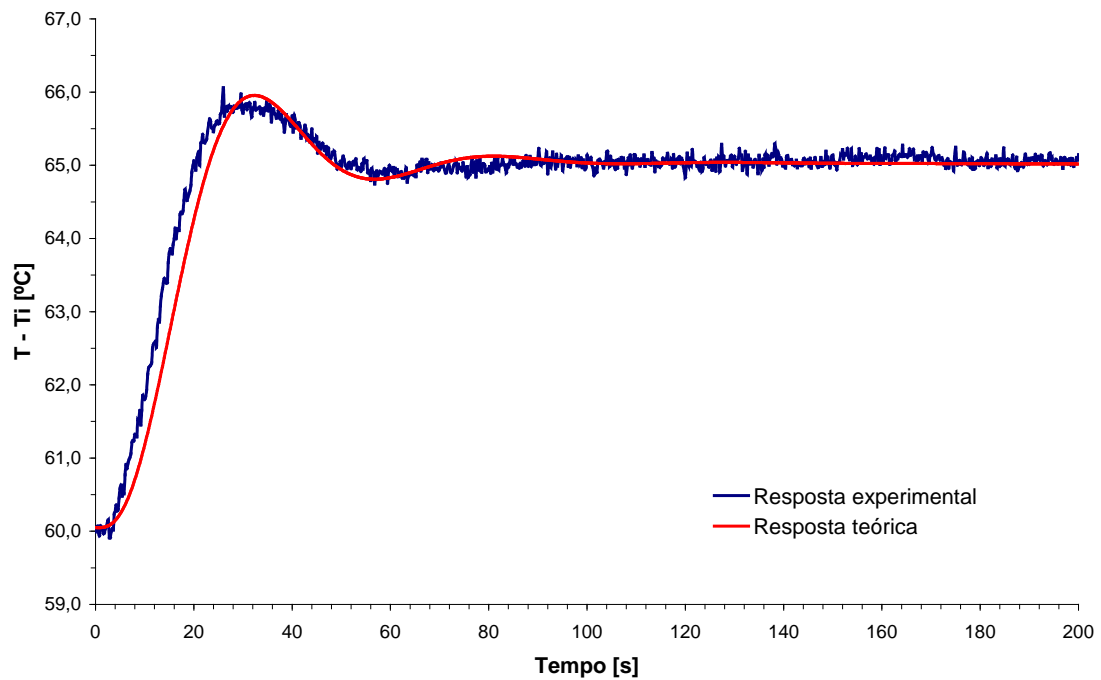


Figura 3.12 – Resposta experimental e simulada para um degrau na temperatura de referência de 60 [°C] para 65 [°C]

Nota-se que as curvas das respostas teórica e experimental, apresentadas na Figura 3.12, são bastante próximas, o que valida o projeto do controlador PID.

Capítulo 4

Projeto de Sistema de Controle de Motores

Capítulo 4 - Projeto de Sistema de Controle de Motores

4.1 - Introdução

O desenvolvimento deste Capítulo será baseado no conjunto didático fabricado pela T&S Equipamentos Eletrônicos, modelo DVC24. O Kit DVC24 é um equipamento versátil para práticas de laboratório na área de Modelagem e Sistemas de Controle. Consiste basicamente de dois motores CC acoplados mecanicamente, sendo um de tração e o outro de carga; um disco inercial (volante) para experimentos de dinâmica e modelagem e um *encoder* incremental com saída em quadratura para medida da velocidade. Pode ser utilizado para estudos teóricos e experimentais de modelagem e simulação dinâmica do sistema, utilizando o software MATLAB/Simulink. Estratégias de controle analógico e/ou digital podem ser implementadas utilizando softwares como, por exemplo, o LabView ou por hardware dedicado.

4.2 – Descrição da Bancada de Motores

Serão apresentados a seguir os elementos que compõe o Kit DVC25, sua interligação e características técnicas.

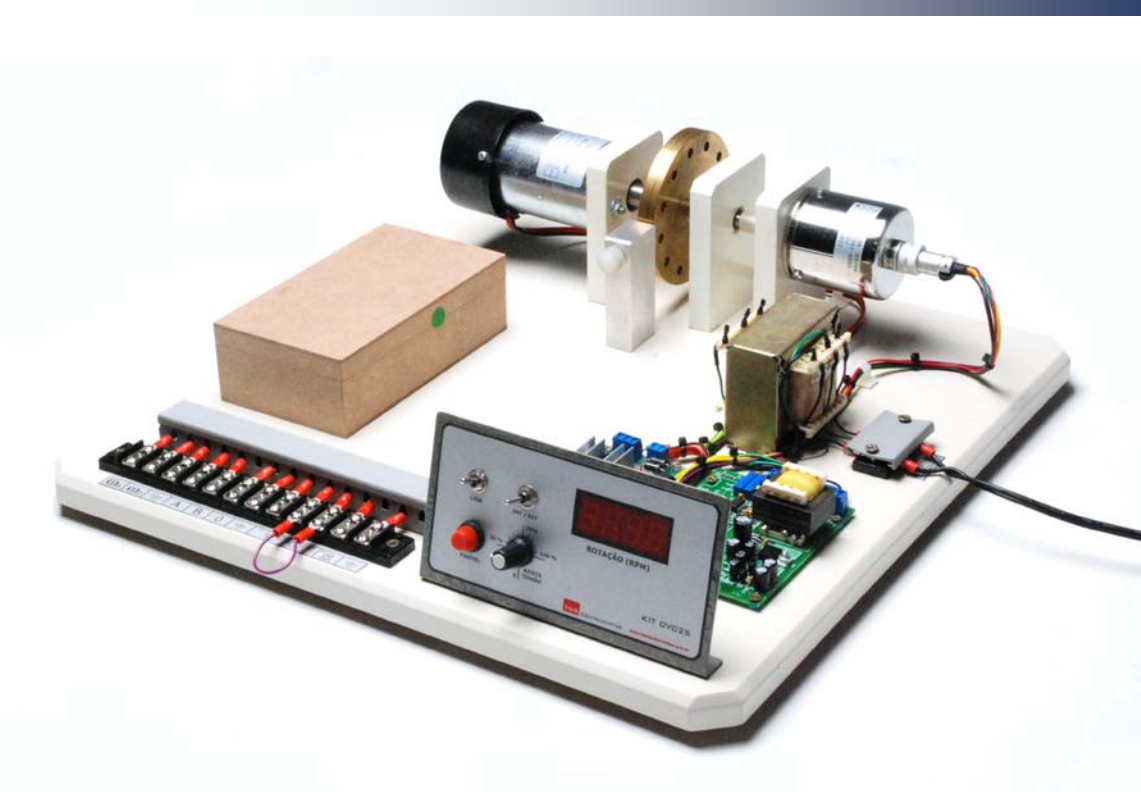


Figura 4.1 – Bancada didática de motores - Kit DVC25

Motores e carga inercial

É utilizada uma máquina de corrente contínua, de imã permanente com escovas, mais comumente conhecidas por motores, cujas características nominais são:

- Tensão nominal 24Vdc;
- Corrente nominal 2A;
- Velocidade nominal, em vazio, 2200 rpm.

A carga inercial é formada por um disco de latão ao qual podem ser adicionados parafusos para variação do momento polar de inércia.

Driver

O *driver* de acionamento é um conversor chaveado de um quadrante, operando com modulação PWM em alta frequência e sinal de controle analógico.

- Tensão de controle: 0 – 5Vdc @ 2mA;
- Tensão de saída: 0 a 24 Vdc;
- Corrente de saída: até 3A.

Encoder e tacômetro

O sensor de posição e velocidade utilizado é um encoder de 600 (ppr) pulsos por revolução. O *encoder* é acoplado a um tacômetro que indica a velocidade do motor em rpm (revoluções por minuto) e opera também como transmissor, apresentando duas saídas que podem ser utilizadas para registro e/ou controle.

- Saída digital direta do *encoder* A, B e O, sendo A e B em quadratura e O um pulso de zero;
- Saída analógica de 0 a 5 Vdc que equivale de 0 a 2500 rpm com taxa de atualização de 100 ms e,
- Saída digital modulada em largura de pulso PWM de 0 a 100%.

Identificação de Terminais (da esquerda para direita)

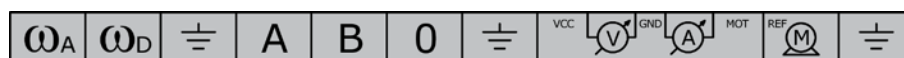


Figura 4.2 - Barra de terminais frontal

- Saída Analógica de velocidade (0 a 5 Vdc);
- Saída Digital (PWM) de velocidade (0 a 5 Vdc);
- Terra;
- Saída do *encoder* (600 ppr, sentido 1);
- Saída do *encoder* (600 ppr, sentido 2);
- Saída do *encoder* (1ppr);
- Terminais para leitura de corrente e de tensão do motor;

- Entrada de referência de velocidade do motor;
- Terra.

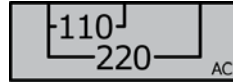


Figura 4.3 – Terminais para seleção da tensão de alimentação

- Seleção de Tensão 110 / 220Vac.

Painel de comando

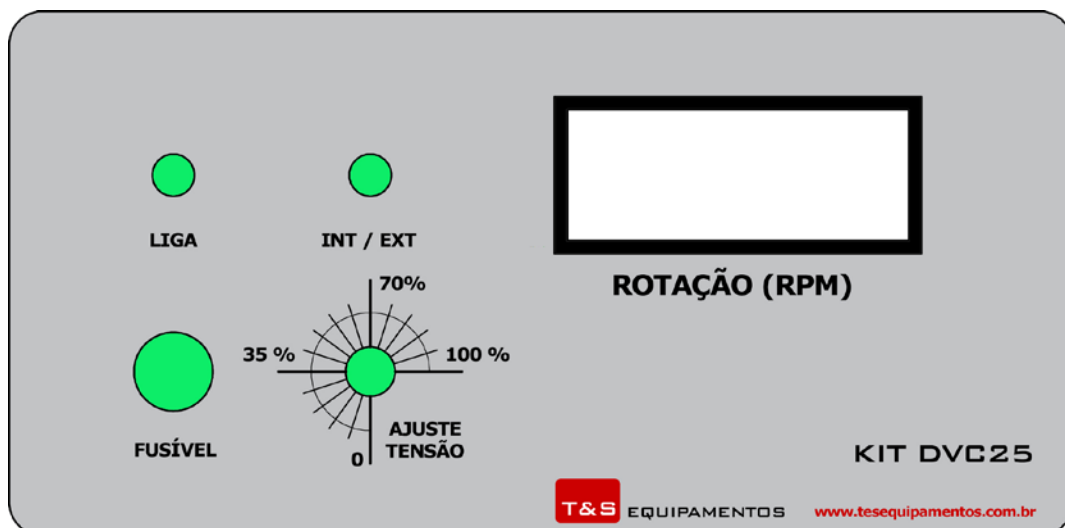


Figura 4.4 – Painel de operação

- Chave liga / desliga do conjunto;
- Fusível de proteção;
- Chave de referência Interna / Externa:
 - Interna – *driver* recebe sinal do potenciômetro do painel frontal;
 - Externa – *driver* recebe sinal do borne 11 (Referência analógica externa);

Obs: Zero e fundo de escala ajustáveis por *trimpots* localizados na placa *driver*.

- Potenciômetro de ajuste da tensão no motor;
- Indicador de velocidade.

4.3 – Modelagem Matemática

O diagrama abaixo representa um motor de corrente contínua de ímã permanente.

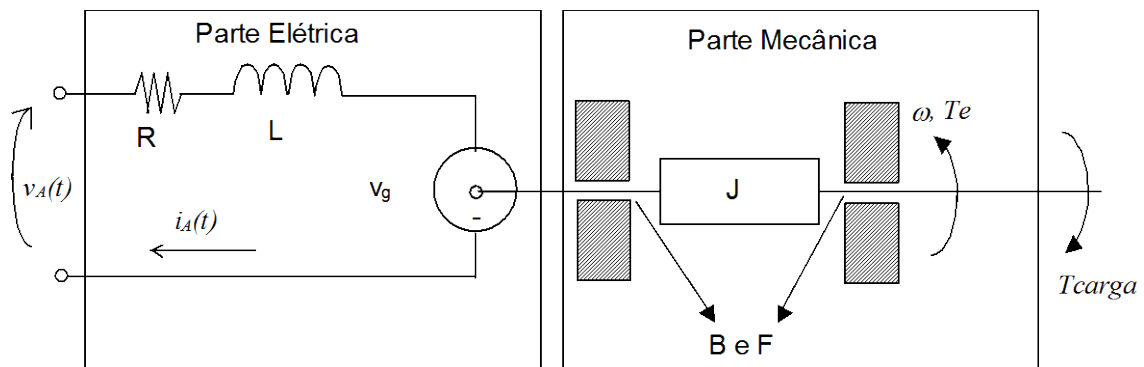


Figura 4.5 - Diagrama esquemático do motor CC

As equações diferenciais que representam o motor de corrente contínua são:

Parte elétrica

Nos motores elétricos de corrente contínua, controlados por armadura, a velocidade é controlada pela tensão de armadura. Neste caso, a equação diferencial que descreve o circuito é a Equação 1.6.

$$v_A = R \cdot i_A + L \cdot \frac{di_A}{dt} + v_g$$

Equação 4.1

onde

v_A = tensão aplicada no circuito da armadura [V].

R = resistência de armadura [Ω].

i_A = corrente de armadura [A].

L = indutância $[H]$.

t = tempo $[s]$.

v_g = força contra-eletromotriz gerada $[V]$, dada pela Equação 4.2.

$$v_g = K_E \cdot \omega$$

Equação 4.2

onde

K_E = constante da força contra-eletromotriz $\left[\frac{V \cdot s}{rad} \right]$. Representa a proporcionalidade entre a tensão v_g e a velocidade no eixo do motor $\omega \left[\frac{rad}{s} \right]$.

Parte mecânica

A corrente de armadura produz um torque no eixo, utilizado para vencer a inércia e o atrito viscoso, portanto, pode-se escrever a Equação 4.3.

$$\psi_e = J \cdot \frac{d\omega}{dt} + B \cdot \omega + F$$

Equação 4.3

onde

ψ_e = torque mecânico gerado pelo motor $[Nm]$, proporcional à corrente de armadura.

J = momento de inércia combinado da armadura do motor e da carga $[Kg \cdot m^2]$.

B = atrito viscoso do motor $\left[\frac{N \cdot m \cdot s}{rad} \right]$.

ω = velocidade no eixo do motor $[rad/s]$.

F = atrito seco $[N \cdot m]$.

Acoplamento

A corrente de campo, no motor de corrente contínua, é mantida constante. Neste caso, o fluxo também é constante e o torque torna-se diretamente proporcional à corrente de armadura (Equação 4.4).

$$\psi_e = K_T \cdot i_A \quad \text{Equação 4.4}$$

onde

K_T = constante de torque. Representa a proporcionalidade entre a corrente de armadura e o torque produzido pelo motor.

Re-arranjando as equações diferenciais tem-se:

$$v_A = R \cdot i_A + L \cdot \frac{di_A}{dt} + K_E \cdot \omega \quad \text{Equação 4.5}$$

$$K_T \cdot i_A = J \cdot \frac{d\omega}{dt} + B \cdot \omega + F \quad \text{Equação 4.6}$$

Para um modelo mais preciso, ver FITZGERALD, 2006.

4.4 - Função de transferência

Obtido o modelo matemático que representa o conjunto motor + carga, pode-se determinar a função de transferência do sistema aplicando-se a Transformada de Laplace na Equação 4.5 e na Equação 4.6, para as condições iniciais nulas, obtendo-se, desta forma, a Equação 4.7 e a Equação 4.8.

$$V_A(s) = R \cdot I_A(s) + L \cdot s \cdot I_A(s) + K_E \cdot \Omega(s) \quad \text{Equação 4.7}$$

$$T_e(s) = K_T \cdot I_A(s) = J \cdot s \cdot \Omega(s) + B \cdot \Omega(s) + F \quad \text{Equação 4.8}$$

Acrescentando na Equação 4.8 o torque T_{ext} que uma carga externa absorve do motor, tem-se:

$$T_e(s) - T_{ext}(s) - F = K_T \cdot I_A(s) - T_{ext}(s) - F = J \cdot s \cdot \Omega(s) + B \cdot \Omega(s) \quad \text{Equação 4.9}$$

Após algumas passagens algébricas determina-se como a velocidade ω depende da tensão aplicada V_A e do torque de carga T_{ext} :

$$\begin{aligned} \Omega(s) = & \frac{K_T}{(L \cdot s + R) \cdot (J \cdot s + B) + K_E \cdot K_T} \cdot V_A(s) + \dots \\ & - \frac{(L \cdot s + R)}{(L \cdot s + R) \cdot (J \cdot s + B) + K_E \cdot K_T} \cdot (T_{ext}(s) + F) \end{aligned} \quad \text{Equação 4.10}$$

Colocando o denominador na forma polinomial decrescente em s, tem-se:

$$\begin{aligned} \Omega(s) = & \frac{K_T}{LJ s^2 + (JR + LB)s + (RB + K_E K_T)} \cdot V_A(s) + \dots \\ & - \frac{(L \cdot s + R)}{LJ s^2 + (JR + LB)s + (RB + K_E K_T)} \cdot (T_{ext}(s) + F) \end{aligned} \quad \text{Equação 4.11}$$

fazendo-se:

$$G_1 = \frac{K_T}{LJ s^2 + (JR + LB)s + (RB + K_E K_T)}$$

e

$$G_2 = - \frac{(L \cdot s + R)}{LJ s^2 + (JR + LB)s + (RB + K_E K_T)}$$

tem-se:

$$\Omega(s) = G_1(s) \cdot V_A(s) + G_2(s) \cdot T_{ext}(s) + G_2(s) \cdot F$$

Equação 4.12

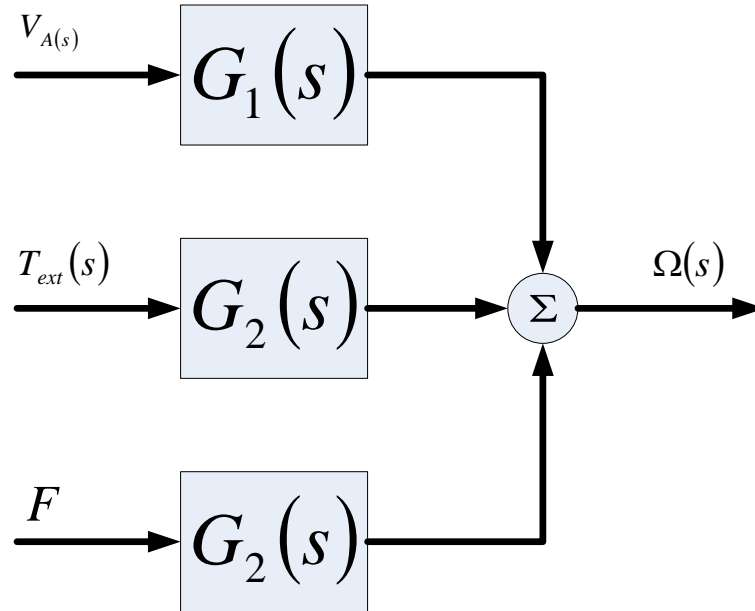


Figura 4.6 – Diagrama de blocos da Equação 4.12

A Equação 4.12 descreve um sistema com mais de uma entrada e uma única saída e, portanto, não pode ser descrito por apenas uma função de transferência, no entanto, considerando-se o sistema como sendo linear, o comportamento global pode ser estudado simulando-se e somando-se cada um dos efeitos.

Regime permanente

Para o regime permanente, a velocidade pode ser determinada através do Teorema do Valor Final, resultando em:

$$\omega_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} \omega(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \Omega(s)$$

Equação 4.13

Considerando-se a Equação 4.10, tem-se:

$$\omega_{ss} = \frac{K_T \cdot V_A - R \cdot (F + T_{ext})}{R \cdot B + K_E \cdot K_T}.$$

Equação 4.14

4.3.1 - Obtenção dos parâmetros da função de transferência

Para determinação dos parâmetros elétricos, mecânicos e eletromecânicos do modelo (R, L, K_E, K_T, B, J e F), devem-se realizar os procedimentos experimentais a seguir:

Determinação da Resistência de Armadura R

Aplicando-se uma corrente contínua e constante ($\frac{di_a}{dt}=0$) com o motor travado a velocidade será nula ($\omega=0$), desta forma a Equação 1.6, referente apenas à parte elétrica do motor, fica reduzida a:

$$v_A = R \cdot i_A$$

Equação 4.15

A resistência de armadura pode então ser facilmente determinada (considerando-se o contato das escovas com o comutador como sendo puramente ôhmico), aplicando-se uma tensão conhecida, com o motor ainda travado, e medindo-se a respectiva corrente.

No presente caso foram aplicadas tensões entre 0,5V e 3,0V e obtida uma resistência média da armadura $R=3,21 \Omega$.

Determinação da Indutância de Armadura L

A determinação da indutância da armadura pode ser realizada pelo método da resposta em frequência ou pela análise do transiente elétrico.

Por resposta em frequência:

Mantendo o rotor travado, deve-se acrescentar um resistor externo R_{ext} em série com o circuito de armadura, tal que $R_{ext} \gg R$. Assim forma-se um filtro RL passa baixa e a resistência de armadura pode ser desprezada.

Aplica-se, com um gerador de função, um sinal senoidal e com o osciloscópio, determina-se a frequência de corte do filtro.

Nesta frequência tem-se que $X_L = R_{ext}$ e a indutância pode ser determinada por:

$$X_L = 2 \cdot \pi \cdot f_{corte} \cdot L = R_{ext} \quad \text{Equação 4.16}$$

ou

$$L = \frac{R_{ext}}{2 \cdot \pi \cdot f_{corte}} \quad \text{Equação 4.17}$$

Por análise de transiente elétrico:

Mantendo-se o rotor travado, acrescenta-se um resistor externo R_{ext} em série com o circuito de armadura, tal que $R_{ext} \gg R$. Assim forma-se um circuito RL no qual a resistência de armadura pode ser desprezada.

Aplica-se, com um gerador de funções, um sinal quadrado e ajusta-se a frequência de maneira a se visualizar todo o transiente.

Com o osciloscópio, determina-se a constante de tempo $\tau = L/R_{ext}$ e calcula-se L .

Pode-se escolher qualquer frequência para a determinação da indutância. Basta conhecer a resposta em frequência do filtro RL.

No presente caso a indutância foi obtida pela resposta em frequência. Foi utilizada $R_{ext}=100\Omega$, mediu-se $f_{corte}=5590\text{ Hz}$ e obteve-se $L=2,847 \times 10^{-3}\text{ H}$.

Determinação da Constante de Força Contra Eletromotriz - K_E

Considerando corrente contínua e constante ($\frac{di_a}{dt}=0$), a equação da parte elétrica é reduzida

a $v_A = R \cdot i_A + v_g$ e como $v_g = K_E \cdot \omega$ então:

$$v_A = R \cdot i_A + K_E \cdot \omega \quad \text{Equação 4.18}$$

ou

$$v_g = v_A - R \cdot i_A = K_E \cdot \omega \quad \text{Equação 4.19}$$

Assim, o valor de K_E pode ser obtido através de regressão linear.

Para máquinas de corrente contínua de ímã permanente, a constante da força contra eletromotriz, K_E , é numericamente igual à constante de torque K_T , desde que expressas no Sistema Internacional. Assim:

$$K_T = K_E$$
$$\left[\frac{N \cdot m}{A} \right] = \left[\frac{V \cdot s}{rad} \right] \quad \text{Equação 4.20}$$

Para a determinação de K_E , foram aplicados vinte níveis de tensão entre 0 e 24 Vdc e registrado as respectivas rotações em rad.s^{-1} . O valor obtido, utilizando-se a Equação 4.19, foi

$$K_E = 9,16 \times 10^{-2} \left[\frac{\text{V} \cdot \text{s}}{\text{rad}} \right].$$

Pela Equação 4.20, $K_T = 9,16 \times 10^{-2} \left[\frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{A}} \right]$.

Determinação de B e F

Esta determinação pode ser realizada com o mesmo procedimento experimental para a determinação de K_E , acrescentando-se apenas a estimativa do torque, por meio da Equação 4.4, para cada valor observado.

Como, a cada leitura, o sistema está em regime permanente, pode-se considerar que $\frac{dw}{dt} = 0$ e a equação da parte mecânica (Equação 4.3) é reduzida a $\psi_e = B \cdot \omega + F$.

Por meio de uma regressão linear, determinam-se os valores de B e F , respectivamente os coeficientes angular e linear da reta ajustada.

O atrito seco F , pode ser entendido como sendo o atrito estático F_e , na ausência do movimento, ou como o atrito dinâmico F_d , na presença do movimento. O coeficiente determinado neste item corresponde ao atrito dinâmico.

Para determinar F_e , com o motor parado, aumenta-se cuidadosamente a tensão aplicada ao motor, observando a corrente. Quando o motor inicia o movimento, a corrente na armadura diminui. A corrente que causa o torque necessário para retirar o motor do repouso pode ser utilizada na Equação 4.21 para se calcular o atrito estático.

$$F_e = K_T \cdot I_{REPOUSO}$$

Equação 4.21

Realizando-se este procedimento, os valores obtidos são $B=1,41 \times 10^{-4} \left[\frac{N \cdot m \cdot s}{rad} \right]$ e $F_d=3,62 \times 10^{-2} [N \cdot m]$, $I_{REPOUSO}=0,61[A]$ e $F_e=5,59 \times 10^{-2} [N \cdot m]$.

Determinação de J

A determinação de J é baseada em um ensaio de resposta transiente do sistema mecânico livre.

Analizando a equação que representa a parte mecânica do motor (Equação 4.3) quando o torque elétrico ψ_e aplicado é nulo:

Resolvendo-se a equação diferencial (Equação 4.22) para a condição inicial $\omega_{inicial} = \omega(0) = \omega_0$, tem-se a resposta do modelo teórico (Equação 4.23).

$$\psi_e = J \cdot \frac{d\omega}{dt} + B \cdot \omega + F = 0$$

Equação 4.22

$$\omega(t) = \omega_0 \cdot e^{-t/\tau_m} - \frac{F}{B} \cdot \left(1 - e^{-t/\tau_m} \right)$$

Equação 4.23

Onde $\tau_m = J/B$ é a constante de tempo mecânica do motor.

O modelo prevê que o motor passa a girar em sentido inverso atingindo a velocidade final $\omega_{final} = -F/B$ rad s⁻¹. No entanto, sabe-se que o fator de atrito F não produz trabalho, portanto, o modelo não é válido para velocidades negativas.

Procedimento experimental para determinação de J

O procedimento experimental para a determinação de J deve seguir as etapas abaixo:

- Na bancada sob estudo, aplicar tensão no motor até que a velocidade angular atinja um valor em torno de 2000 rpm;
- Logo após, desconectar os cabos do motor afim de que a corrente no motor e, portanto, o torque aplicado seja nulo;
- Registrar o decaimento da velocidade angular por meio de um osciloscópio digital ou de um sistema de aquisição de dados;
- Registrar o decaimento da velocidade ω versus o tempo t e, utilizando uma planilha eletrônica ou o próprio MATLAB, sobrepor o gráfico experimental e a curva resposta do modelo teórico obtida pela Equação 4.23;
- Por meio de um método numérico ou mesmo visualmente, deve-se variar a constante de tempo τ_m até ajustar a curva teórica (Equação 4.23) aos pontos experimentais. Quando o ajuste for obtido se terá determinado o momento de inércia J .

Realizando-se este procedimento no sistema sob estudo obteve-se $J = 6 \times 10^{-4} [Kg \cdot m^2]$.

A Tabela 4.1 apresenta todos os parâmetros obtidos experimentalmente para a função de transferência.

Tabela 4.1 - Parâmetros obtidos experimentalmente para a função de transferência

R	L	K_E	K_T	B	F_d	F_e	J
-----	-----	-------	-------	-----	-------	-------	-----

$[\Omega]$	$[H]$	$\left[\frac{V \cdot s}{rad}\right]$	$\left[\frac{N \cdot m}{A}\right]$	$\left[\frac{N \cdot m \cdot s}{rad}\right]$	$[N \cdot m]$	$[N \cdot m]$	$[Kg \cdot m^2]$
3,21	$2,847 \times 10^{-3}$	$9,16 \times 10^{-2}$	$9,16 \times 10^{-2}$	$1,41 \times 10^{-4}$	$3,62 \times 10^{-2}$	$5,59 \times 10^{-2}$	6×10^{-4}

4.4 – Validação da função de transferência

A validação da função de transferência é realizada comparando-se os resultados obtidos por simulação da Equação 4.12 com os obtidos por meio de experimentação no sistema físico real.

Experimentação

Com a finalidade de se obter a curva de resposta da bancada de motores e validar a função de transferência do sistema, foi realizado um teste experimental com uma excitação do tipo degrau de 11,24 [V] na tensão de armadura do motor elétrico.

A resposta, em termos de velocidade angular do eixo do motor, foi registrada a uma taxa de aquisição de 50 pontos por segundo, para a condição de $T_{ext}=0$, e está apresentada na Figura 4.7.

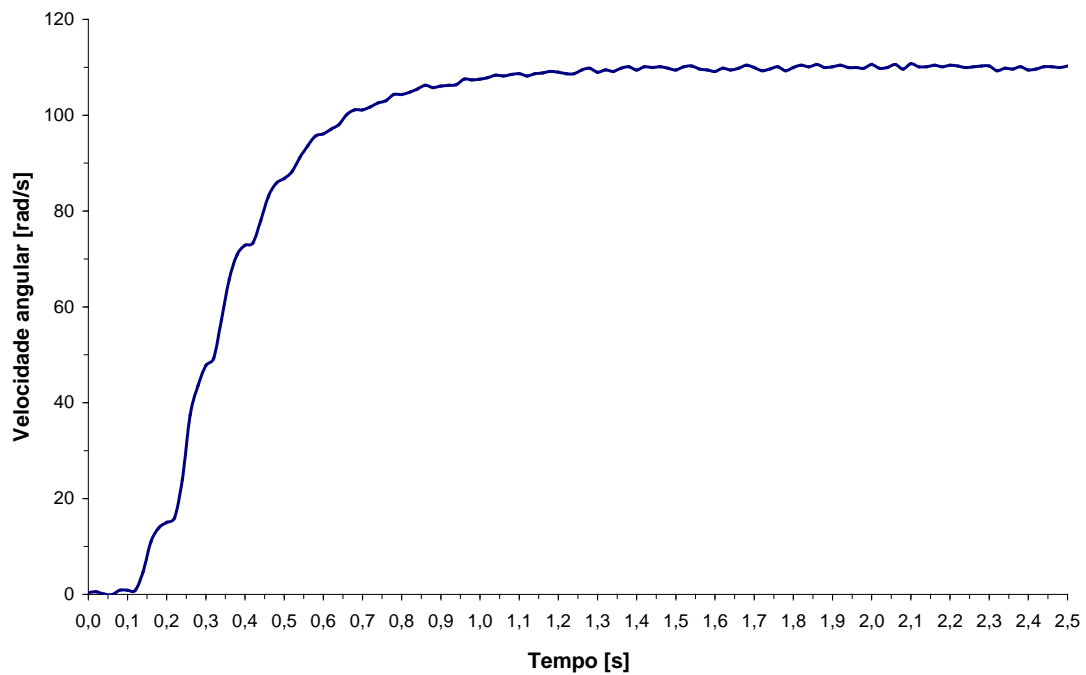


Figura 4.7 – Curva de resposta do sistema frete a um degrau de $v_A = 11,24[V]$ e $T_{ext} = 0$

Analisando-se a Figura 4.7, nota-se claramente um atraso na resposta. Este atraso não foi considerado na modelagem teórica e deve ser incorporado na função de transferência para uma melhor descrição do sistema sob estudo.

Função de transferência sem atraso.

A simulação deve ser realizada para as mesmas condições experimentais em que os dados foram obtidos.

Para a simulação, monta-se a Equação 4.12 no Simulink. Para tanto, utiliza-se parâmetros colecionados na Tabela 4.1.

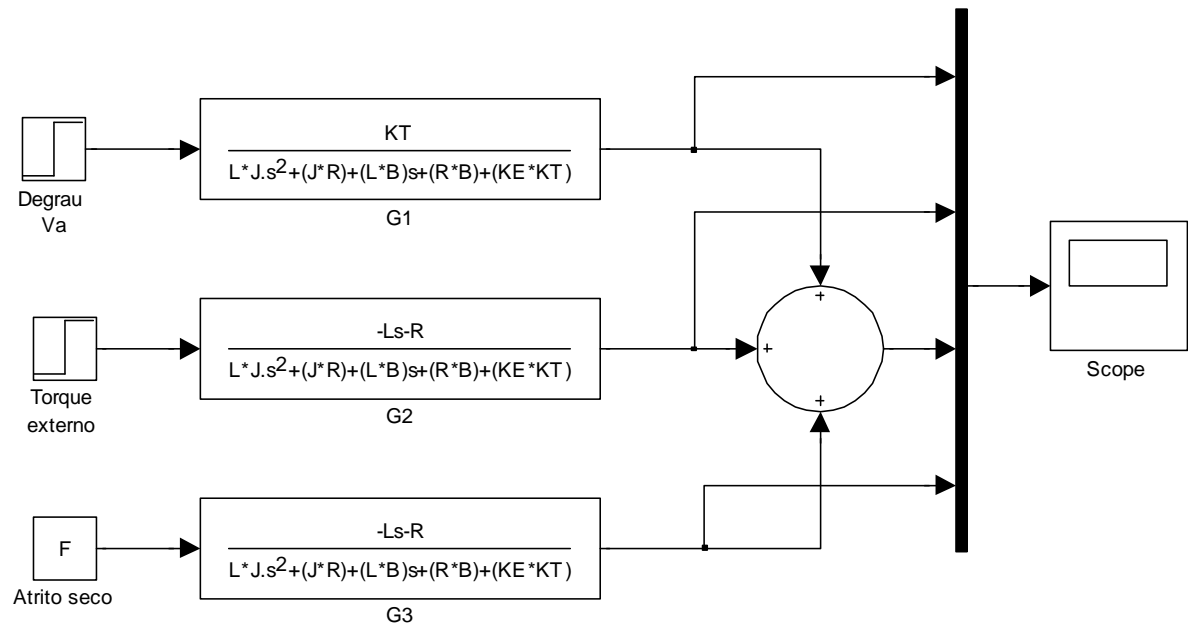


Figura 4.8 – Diagrama de simulação da função de transferência (Equação 4.12)

Com a finalidade de facilitar a introdução dos parâmetros pode-se usar janela *Command Window* do MATLAB.

```
>> R=3.21;
>> L=2.847e-3;
>> KE=9.16e-2;
>> KT=9.16e-2;
>> B=1.41e-4;
>> F=3.62e-2;
>> J=6e-4;
>> Text=0;
>> Va=11.24;
```

O diagrama da Figura 4.8 permite simular o desempenho do sistema de diversas maneiras, excitando-se uma (ou mais) de suas entradas e verificando-se o efeito individual e combinado do resultado.

Mantendo-se o torque externo (T_{ext}) nulo e o atrito seco constante (F), para uma excitação do tipo degrau de 11,24 [V] na tensão de armadura (v_A) obtém-se o resultado apresentado na Figura 4.9.

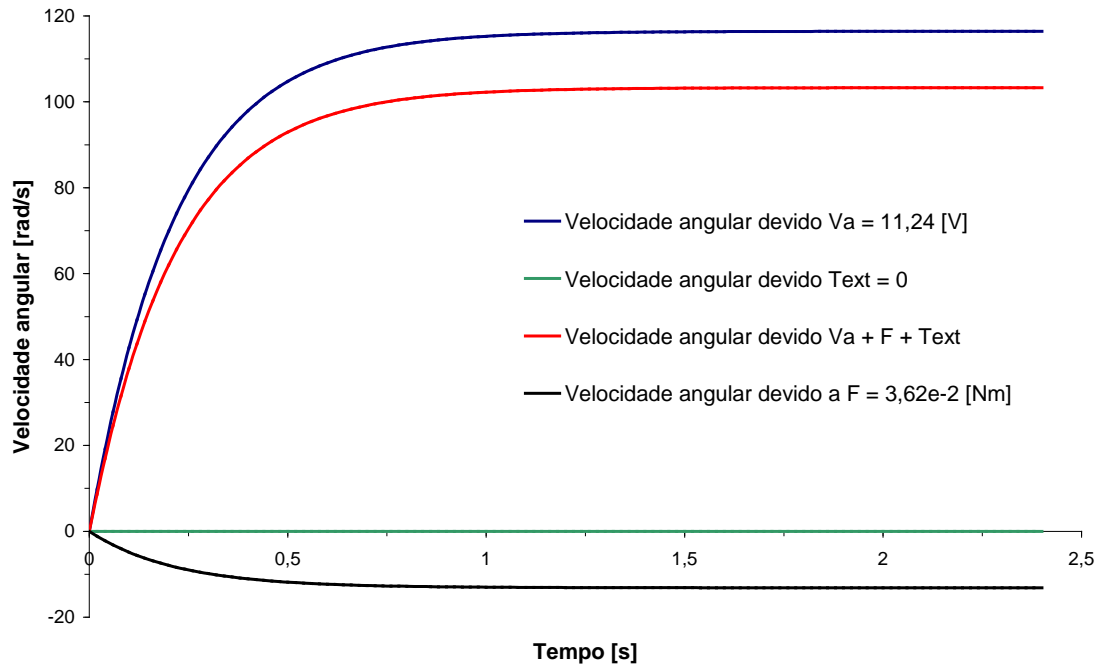


Figura 4.9 – Resultado da simulação da função de transferência para $T_{ext} = 0$ e

$F = 3,62 \times 10^{-2} [N \cdot m]$ frente a um degrau $v_A = 11,24 [V]$

Validação

A validação da função de transferência é realizada sobrepondo-se a curva de resposta do sistema, obtida experimentalmente, e a curva simulada por meio da função de transferência, sob as mesmas condições experimentais (Figura 4.10).

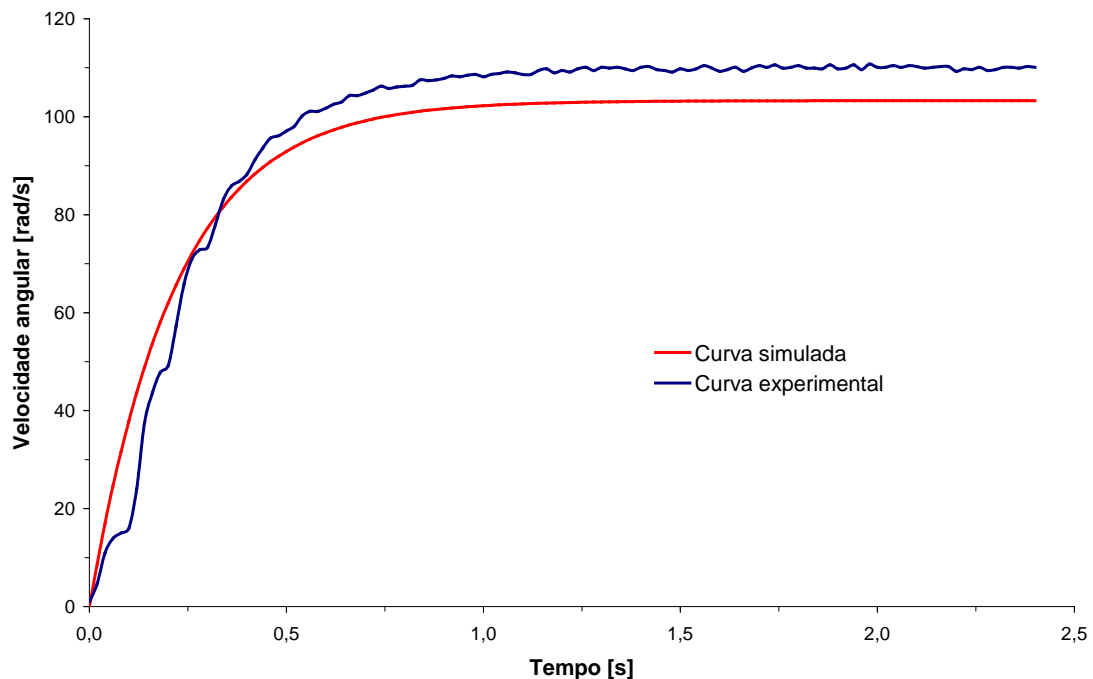


Figura 4.10 – Comparação das curvas de respostas simulada e experimental

Analisando-se a Figura 4.10 nota-se que a função de transferência teórica, com seus parâmetros obtidos experimentalmente, capturou razoavelmente bem a dinâmica do sistema, no entanto, apresenta um resultado simulado com um erro de aproximadamente 6,4 % do valor em regime. Isto provavelmente é consequência de erros experimentais e/ou de simplificações.

Sob condições adversas, este erro de simulação em regime poderia ser aceito, já que o controlador, que será projetado e implementado no sistema, deverá eliminá-lo.

Contudo, uma análise mais detalhada mostra que o erro em regime permanece constante após a estabilização. Isto aponta que uma redução no parâmetro relativo ao atrito seco poderá atenuar o problema.

Fazendo $F = 1,81 \times 10^{-2} [N \cdot m]$ e repetindo a simulação, obtém o resultado apresentado na Figura 4.11.

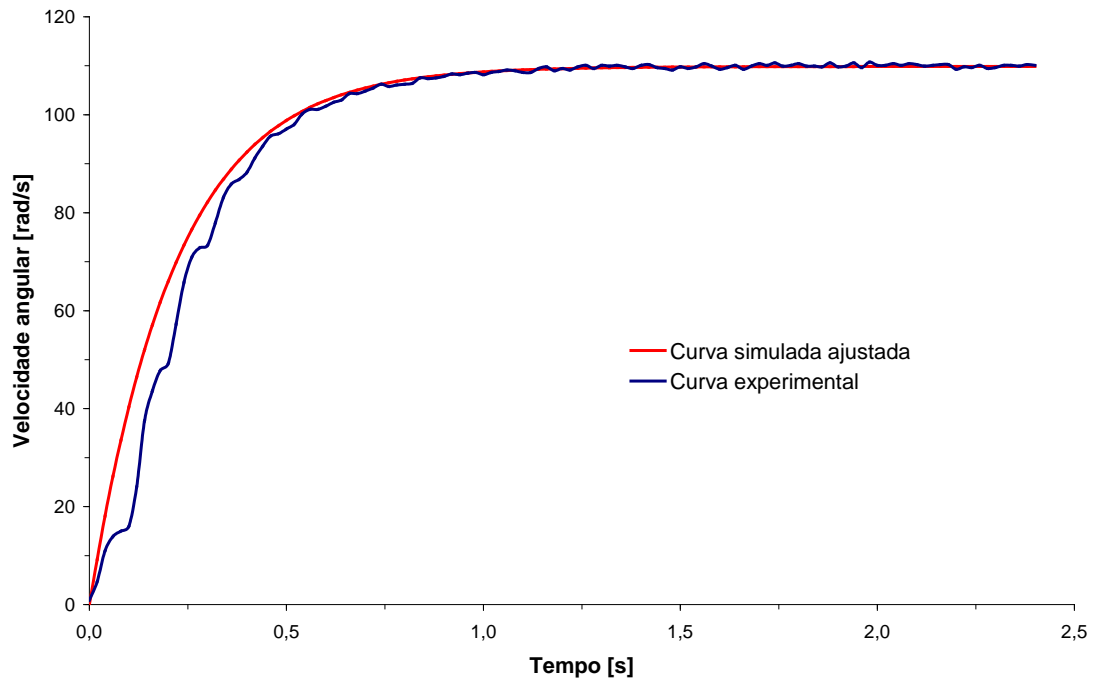


Figura 4.11 - Comparação das curvas de respostas simulada e experimental

Nota-se que o ajuste realizado na função de transferência eliminou o erro em regime e, ainda, capturou razoavelmente bem a dinâmica do sistema.

A Tabela 4.2 apresenta o novo conjunto de parâmetros para a função de transferência da bancada didática de motores com o termo de atrito ajustado.

Tabela 4.2 - Parâmetros ajustados para a função de transferência (Equação 4.12)

R	L	K_E	K_T	B	F	J
$[\Omega]$	$[H]$	$\left[\frac{V \cdot s}{rad}\right]$	$\left[\frac{N \cdot m}{A}\right]$	$\left[\frac{N \cdot m \cdot s}{rad}\right]$	$[N \cdot m]$	$[Kg \cdot m^2]$
3,21	$2,847 \times 10^{-3}$	$9,16 \times 10^{-2}$	$9,16 \times 10^{-2}$	$1,41 \times 10^{-4}$	$1,81 \times 10^{-2}$	6×10^{-4}

Rearranjando-se a Equação 4.12 para $T_{ext}=0$, tem-se a Equação 4.24 que está mostrada no diagrama da Figura 4.8.

$$G(s) = \frac{\Omega(s)}{V_A(s)} = \frac{KT - F}{JLs^2 + (JR + BL)s + (BR + KEKT - KEF)} \quad \text{Equação 4.24}$$

Substituindo-se os valores da Tabela 4.2 na Equação 4.24 tem-se, finalmente, a função de transferência em malha aberta para a condição do sistema não estar submetido a distúrbios de torque, mas apenas de tensão de armadura (Equação 4.25).

$$G(s) = \frac{\Omega(s)}{V_A(s)} = \frac{0,0735}{1,708 \times 10^{-6} s^2 + 0,001926 s + 0,007185} \quad \text{Equação 4.25}$$

Função de transferência com atraso.

O atraso pode ser introduzido na função de transferência, de acordo com o item 1.4 Fazendo-se um pequeno ajuste no parâmetro relativo ao atrito no numerador e no denominador, com a finalidade de se ajustar o ganho da função de transferência, tem-se:

```
>> Ta=0.12;
>> Fn=0.021;
>> Fd=0.0181;
>> num=[KT-Fn];
>> den=[(J*L) (J*R)+(B*L) (B*R)+(KE*KT)-(KE*Fd)];
>> Gat=tf(num,den,'InputDelay',Ta);
```

A função de transferência com o termo de atraso inserido passa a ser a apresentada na Equação 4.26.

$$G_{at}(s) = e^{-0.12s} \cdot \frac{0,0706}{1,708 \times 10^{-6} s^2 + 0,001926 s + 0,007185} \quad \text{Equação 4.26}$$

A Figura 4.12 apresenta o ajuste da função de transferência com o atraso inserido. Nota-se que a Equação 4.26 descreve razoavelmente bem o comportamento do sistema. Pode ser

usada para algumas simulações, porém, não será usada para o projeto do controlador já que não está escrita no formato clássico da função de transferência.

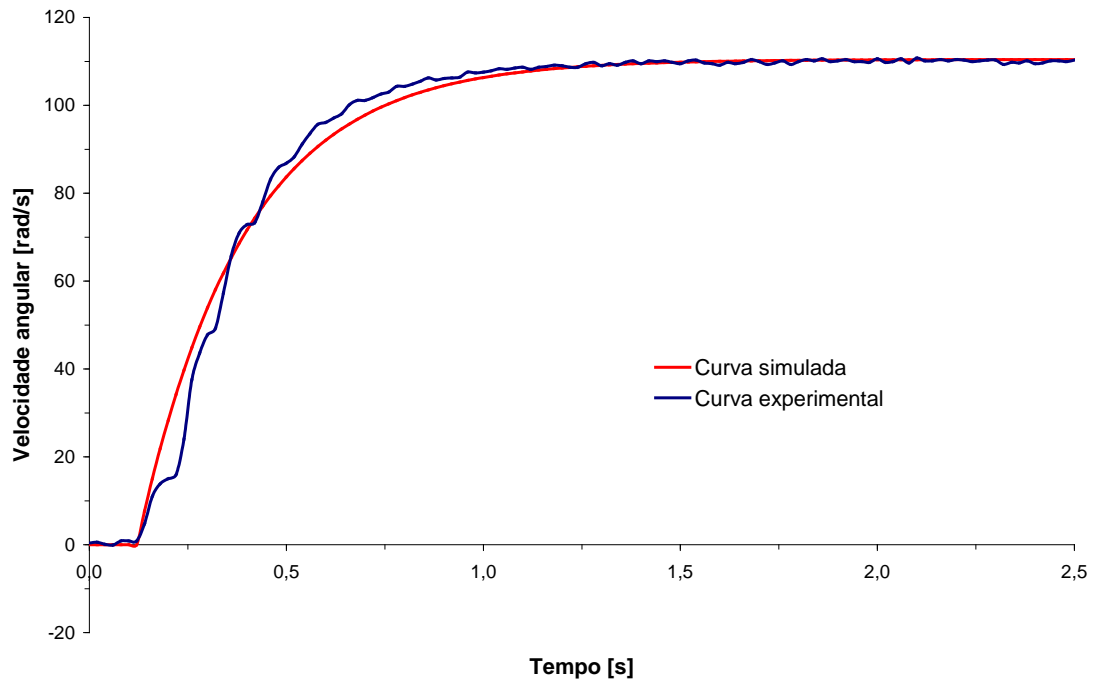


Figura 4.12 – Ajuste da função de transferência (Equação 4.26) com o atraso inserido

O atraso pode, então, ser introduzido na função de transferência em malha aberta pela aproximação de MacLaurin (Equação 1.3). Considerando-se um tempo de atraso $T_a = 0.15[s]$, obtém-se a Equação 4.27 que representa o atraso, segundo a aproximação de MacLaurin.

$$A_{ml}(s) = \frac{1}{0.01125s^2 + 0.15s + 1} \quad \text{Equação 4.27}$$

Introduzindo-se o atraso na Equação 4.25, obtém-se a Equação 4.28 .

```
>> Aml=tf([1],[0.01125 0.15 1])
>> GA=series(G,Aml)
```

$$GA(s) = \frac{0,0735}{1,922 \times 10^{-8} s^4 + 2,193 \times 10^{-5} s^3 + 3,715 \times 10^{-4} s^2 + 3,004 \times 10^{-3} s + 7,185 \times 10^{-3}} \quad \text{Equação 4.28}$$

O resultado da comparação entre a simulação e a experimentação mostra a necessidade de ajustes na aproximação do atraso. Realizando-se um ajuste manual chega-se à representação do atraso apresentada na Equação 4.29.

$$A(s) = \frac{1}{0.012 s^2 + 0.12 s + 1.045} \quad \text{Equação 4.29}$$

Introduzindo-se na Equação 4.25, tem-se a Equação 4.30.

$$GA(s) = \frac{0,0735}{2,05 \times 10^{-8} s^4 + 2,332 \times 10^{-5} s^3 + 3,192 \times 10^{-4} s^2 + 2,875 \times 10^{-3} s + 7,509 \times 10^{-3}} \quad \text{Equação 4.30}$$

A Equação 4.30 representa o sistema composto pela dinâmica do motor, massa inercial acoplada e atraso do tacômetro. A dinâmica dos demais elementos eletrônicos do sistema pode ser desprezada, já que são muito maiores e afeta pouco o desempenho da representação do sistema pela Equação 4.30.

A Figura 4.13 apresenta o ajuste da Equação 4.30 frente aos resultados experimentais obtidos com um degrau na tensão de armadura de $V_a = 11,24[V]$, equivalente a $1000[rpm]$ ou $104,72 \left[\frac{rad}{s} \right]$. Como pode ser notado, obteve-se um bom ajuste entre a equação e os dados experimentais, portanto a Equação 4.30 será utilizada para o projeto e simulação de desempenho do controlador.

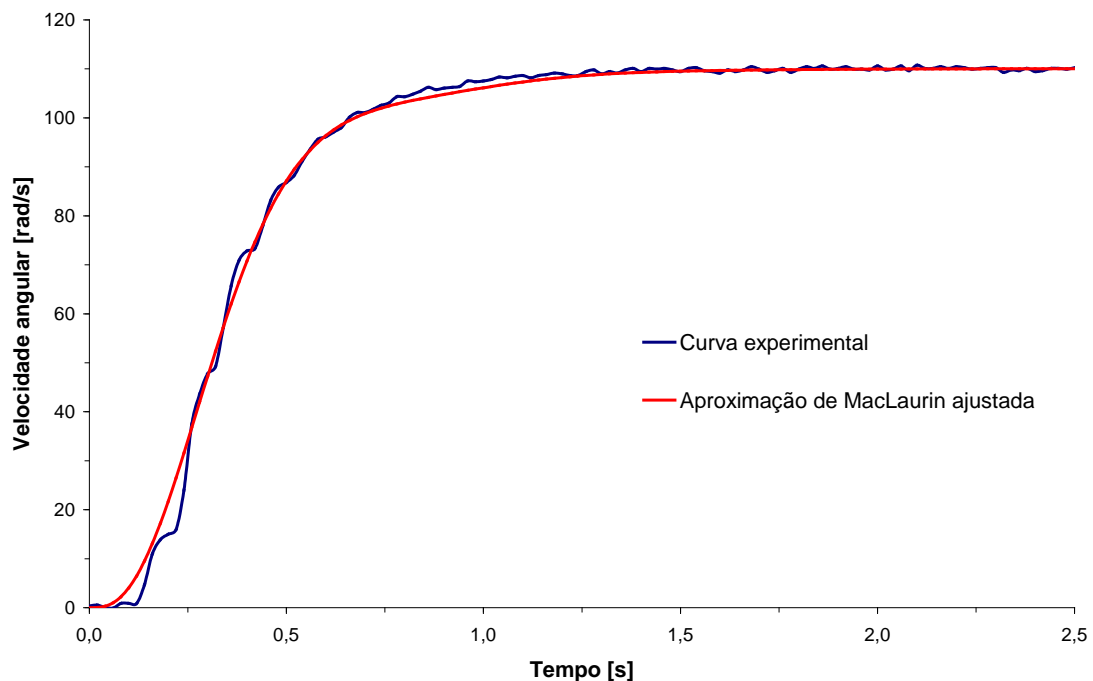


Figura 4.13 – Ajuste da Equação 4.30 aos dados experimentais

4.5 – Controlador PI

Com a função de transferência em malha aberta ajustada e validada, pode-se projetar o controlador e realizar simulações de desempenho em malha fechada.

O lugar geométrico das raízes da função de transferência mostra que o sistema se torna instável para o ganho crítico $K_{cr}=0,43$. Portanto, um controlador com ações proporcional e integral poderá ser projetado de acordo com o segundo método proposto por Ziegler e Nichols (item 1.14.2).

Para a determinação dos parâmetros do controlador, segundo o método adotado, é necessário o conhecimento do período crítico de oscilação, além do ganho crítico já determinado.

O período crítico pode ser obtido, por meio do Simulink, utilizando-se o diagrama da Figura 4.14 e o resultado apresentado na Figura 4.15.

O período crítico de oscilação determinado foi $P_{cr} = 0,565 [s]$.

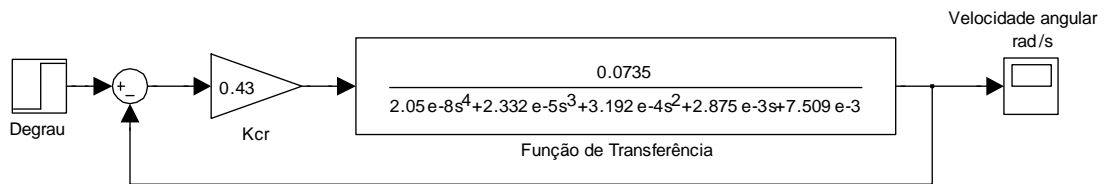


Figura 4.14 – Diagrama do Simulink para obtenção do período crítico

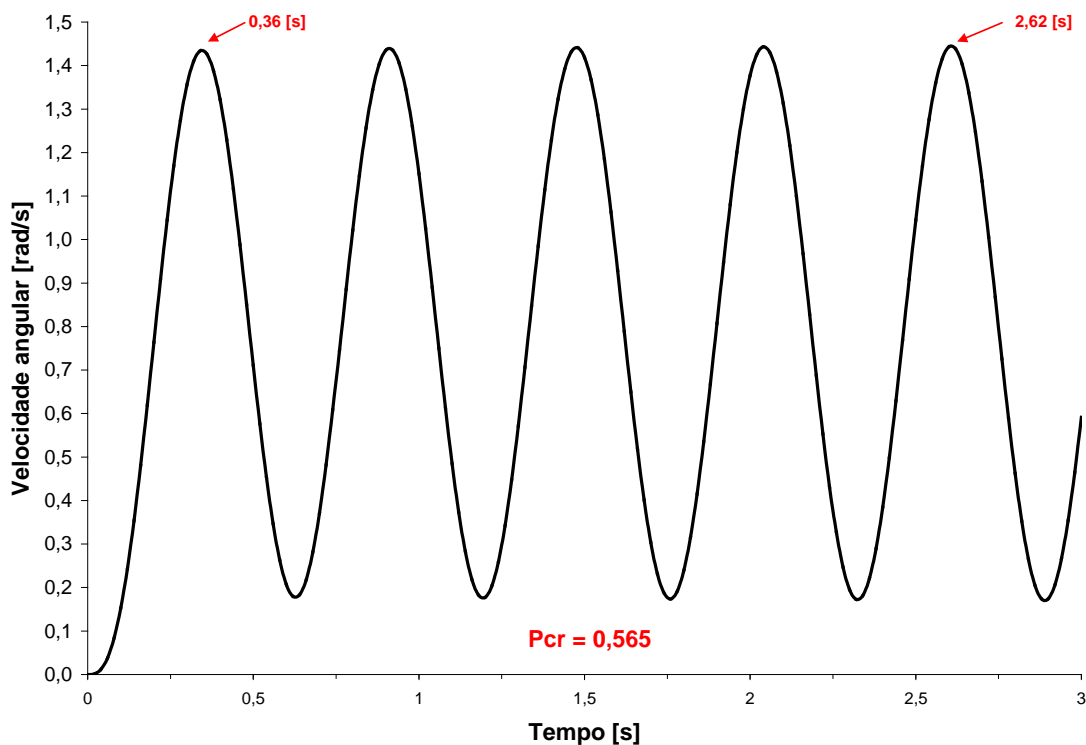


Figura 4.15 – Determinação do período crítico de oscilação

De acordo com a Tabela 1.4, os parâmetros do controlador calculados são:

$$K_p = 0,45, \quad K_{cr} = 0,45 \times 0,43 = 0,1935 \quad \text{e} \quad T_i = \frac{P_{cr}}{1,2} = \frac{0,565}{1,2} = 0,2825.$$

Considerando-se a implantação do PID na forma paralela clássica, o controlador fica representado pela Equação 4.31.

$$G_{PI}(s) = \frac{0,05466s + 0,1935}{0.2825s}$$

Equação 4.31

O desempenho do sistema controlado pode ser avaliado por meio da janela de comandos do MATLAB ou por meio do Simulink.

Comandos do MATLAB

```
>> % Equacao 1.30
>> GA=tf([0.0735],[2.05e-8 2.332e-5 3.192e-4 2.875e-3 7.509e-3]);
>> % Equacao 1.31
>> Gpi=tf([0.05466 0.1935],[0.2825 0]);
>> % Fechando a malha
>> Gb=series(Gpi,GA);
>> Gmf=feedback(Gb,1);
>> % Simulação
>> t=0:0.02:3;
>> step(Gmf,t)
```

A Figura 4.16 mostra o desempenho do controlado PI projetado pelo segundo método de Ziegler e Nichols. Nota-se uma oscilação excessiva que deve ser evitada. A correção deste problema pode ser conseguida alterando-se os parâmetros do controlador.

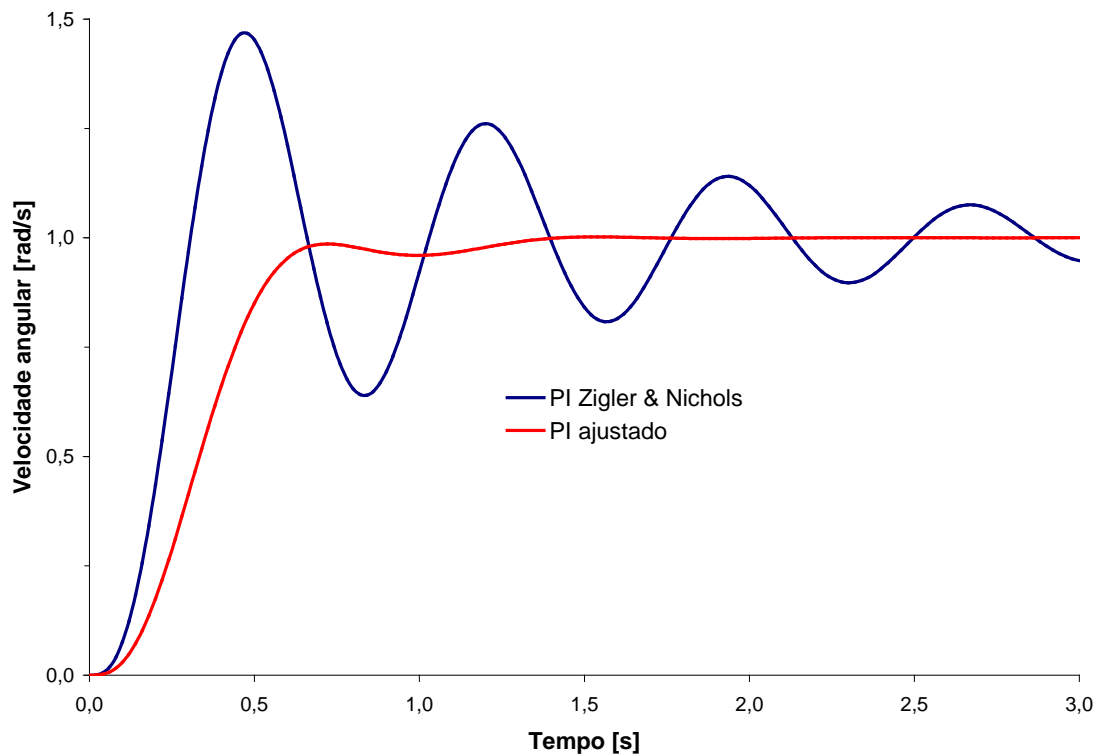


Figura 4.16 – Desempenho do controlador PI segundo Ziegler e Nichols e do controlador PI ajustado manualmente

```
>> % Ajuste dos parametros do controlador
>> Kpa=0.075;
>> Tia=0.264;
>> % Equacao 1.32
>> Gpia=tf([Kpa*Tia Kpa],[Tia 0]);
>> % Simulacao do sistema com o controlador ajustado
>> Ga=series(Gpia,GA);
>> Gmfa=feedback(Ga,1);
>> step(Gmfa,t)
```

Nota-se, pela Figura 4.16, que com controlador PI ajustado o sistema torna-se mais lento, porém, responde sem sobre-sinal.

Desta forma, o controlador adotado será o representado pela Equação 4.32

$$G_{PI}(s) = \frac{0,0198s + 0,075}{0,264s}$$

Equação 4.32

4.6 – Implementação do sistema de controle

O controlador foi implementado na bancada didática de motores utilizando-se um programa em LabVIEW e, aplicando-se um degrau de zero a $104,7198 \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$ ($1000 [\text{rpm}]$) no valor de referência, obtém-se a resposta apresentada na Figura 4.17.

```
>> % Simulação de degrau de 104.7198 [rad/s]
```

```
>> deg1000=step(104.7198*Gmfa,t);
```

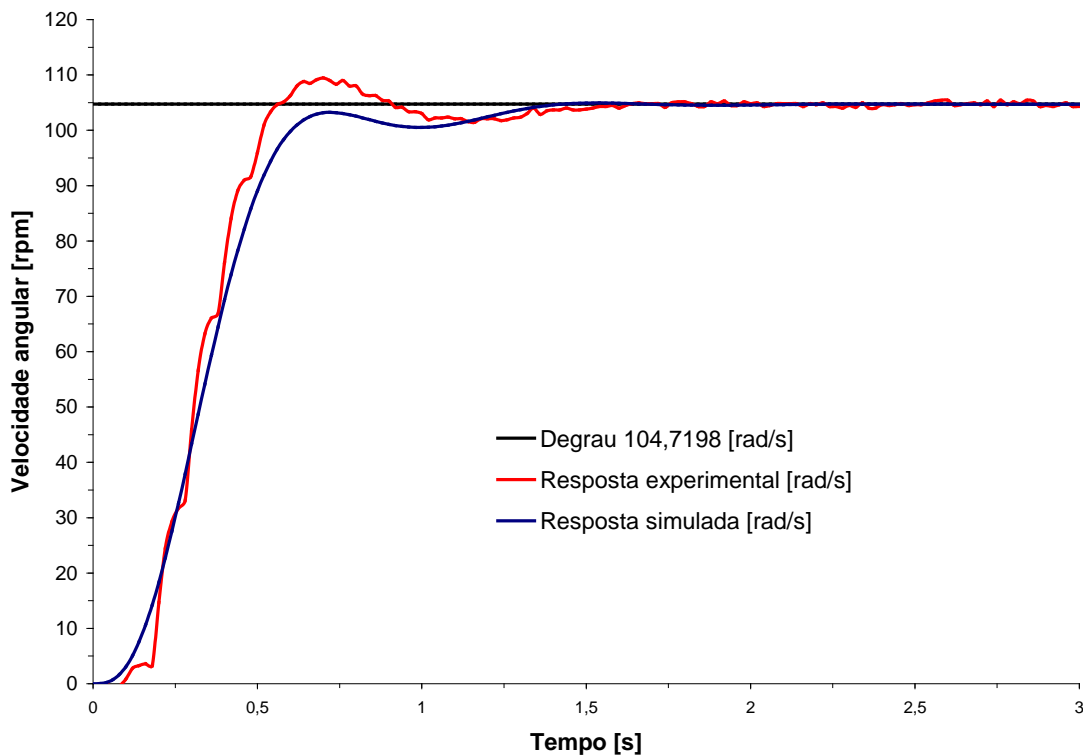


Figura 4.17 – Comparação entre a resposta experimental e a simulada

Capítulo 5

Apêndices

Capítulo 5 - Apêndices

5.1 - Transformada de Laplace

O método da Transformada de Laplace é um método operacional que pode ser usado com vantagens na resolução de equações diferenciais lineares. Através do uso da transformada de Laplace podem-se converter funções, tais como: senoidais; senoidais amortecidas e exponenciais em funções algébricas de uma variável complexa s . Operações tais como diferenciação e integração podem ser substituídas por operações algébricas no plano complexo. Com isto, uma equação diferencial linear pode ser transformada em uma equação algébrica na variável complexa s . Se as equações algébricas em s forem resolvidas para a variável dependente, então a solução da equação diferencial (Transformada de Laplace inversa da variável dependente) pode ser obtida com o uso de tabelas de transformadas ou pelo uso da técnica da expansão da fração parcial.

Neste livro será considerada somente a transformada para o domínio complexo, cuja finalidade é de se obter a função de transferência do sistema sob estudo. A transformada inversa e a simulação do comportamento do sistema no domínio do tempo serão realizadas diretamente no software MATLAB.

A Figura 5.1 mostra esquematicamente a aplicação da Transformada de Laplace.

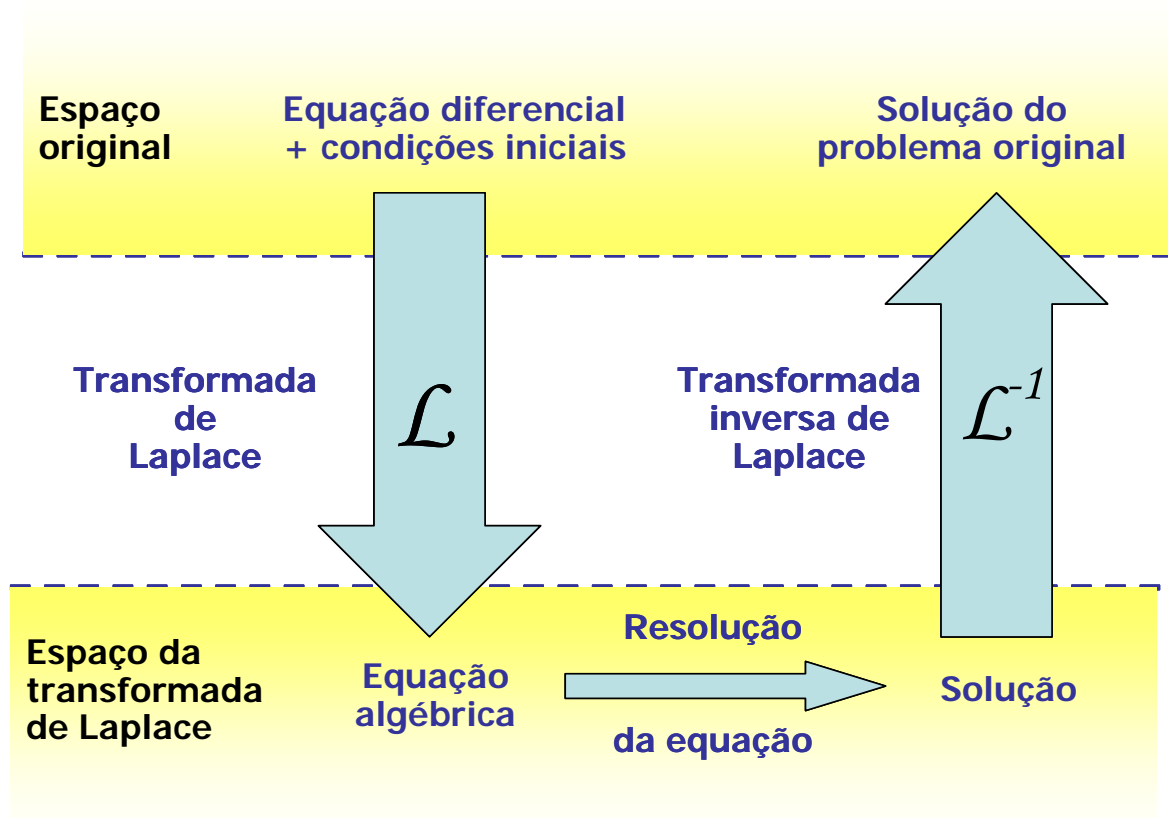


Figura 5.1 – Aplicação da transformada de Laplace.

Uma vantagem do método da Transformada de Laplace é que permite o uso de técnicas gráficas de previsão do desempenho dos sistemas, sem efetivamente resolver suas equações diferenciais. Outra vantagem é que, quando se resolvem as equações diferenciais, o componente transiente e o estacionário da solução podem ser obtidos simultaneamente.

Para a apresentação da Transformada de Laplace, define-se:

- $f(t)$ = Função do tempo t tal que $f(t)=0$ para $t<0$;
- s = Variável complexa;
- \mathcal{L} = Símbolo operacional indicando que a quantidade que ele prefixa é para ser transformada pela integral de Laplace $\int_0^{\infty} e^{-st} dt$;
- $F(s)$ = Transformada de Laplace de $f(t)$

Então a Transformada de Laplace de $f(t)$ é definida pela Equação 5.1.

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dt [f(t)] = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad \text{Equação 5.1}$$

Ao resolver equações diferenciais lineares pelo método da Transformada de Laplace, toma-se a transformada de cada termo da equação diferencial linear dada convertendo-a em uma equação algébrica em s e se obtém a expressão para a Transformada de Laplace da variável dependente através de um rearranjo da equação algébrica. As transformadas das principais funções estão apresentadas na Tabela 5.1, enquanto as principais propriedades das Transformadas de Laplace estão apresentadas na Tabela 5.2.

Tabela 5.1 - Transformada de Laplace de algumas funções

	$f(t)$	$F(s)$
1	Impulso unitário $\delta(t)$	1
2	Degrau unitário $1(t)$	$\frac{1}{s}$
3	t	$\frac{1}{s^2}$
4	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \quad (n=1,2,3,\dots)$	$\frac{1}{s^n}$
5	$t^n \quad (n=1,2,3,\dots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
6	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$

7	$t e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$
8	$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-at} \quad (n=1,2,3,\dots)$	$\frac{1}{(s+a)^n}$
9	$t^n e^{-at} \quad (n=1,2,3,\dots)$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
10	$\text{sen } \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
11	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
12	$\text{senh } \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 - \omega^2}$
13	$\cosh \omega t$	$\frac{s}{s^2 - \omega^2}$
14	$\frac{1}{a}(1 - e^{-at})$	$\frac{1}{s(s+a)}$
15	$\frac{1}{b-a}(e^{-at} - a e^{-bt})$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$
16	$\frac{1}{b-a}(b e^{-bt} - a e^{-at})$	$\frac{s}{(s+a)(s+b)}$
17	$\frac{1}{ab} \left[1 + \frac{1}{a-b} (b e^{-at} - a e^{-bt}) \right]$	$\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$
18	$\frac{1}{a^2} (1 - e^{-at} - a t e^{-at})$	$\frac{1}{s(s+a)^2}$
19	$\frac{1}{a^2} (a t - 1 + e^{-at})$	$\frac{1}{s^2(s+a)}$

20	$e^{-at} \operatorname{sen} \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$
21	$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$
22	$\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta \omega_n t} \operatorname{sen} \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t$	$\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2}$
23	$-\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta \omega_n t} \operatorname{sen} (\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t - \Phi)$ $\Phi = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$	$\frac{s}{s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2}$
24	$1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta \omega_n t} \operatorname{sen} (\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \Phi)$ $\Phi = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$	$\frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2)}$
25	$1 - \cos \omega t$	$\frac{\omega^2}{s(s^2 + \omega^2)}$
26	$\omega t - \operatorname{sen} \omega t$	$\frac{\omega^3}{s^2(s^2 + \omega^2)}$
27	$\operatorname{sen} \omega t - \omega t \cos \omega t$	$\frac{2\omega^3}{(s^2 + \omega^2)^2}$
28	$\frac{1}{2\omega} t \operatorname{sen} \omega t$	$\frac{s}{(s^2 + \omega^2)^2}$
29	$t \cos \omega t$	$\frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$
30	$\frac{1}{\omega_2^2 - \omega_1^2} (\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t) \quad (\omega_1^2 \neq \omega_2^2)$	$\frac{s}{(s^2 + \omega_1^2)(s^2 + \omega_2^2)}$

31	$\frac{1}{2\omega}(\sin \omega t + \omega t \cos \omega t)$	$\frac{s^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$
----	---	----------------------------------

Tabela 5.2 - Propriedades da Transformada de Laplace

1	$\mathcal{L}[A f(t)] = AF(s)$
2	$\mathcal{L}[f_1(t) \pm f_2(t)] = F_1(s) \pm F_2(s)$
3	$\mathcal{L}\left[\pm \frac{d}{dt} f(t)\right] = sF(s) - f(0 \pm)$
4	$\mathcal{L}\left[\pm \frac{d^2}{dt^2} f(t)\right] = s^2 F(s) - sf(0 \pm) - \dot{f}(0 \pm)$
5	$\mathcal{L}\left[\pm \frac{d^n}{dt^n} f(t)\right] = s^n F(s) - \sum_{k=1}^n s^{n-k} f^{(k-1)}(0 \pm)$ <p style="text-align: center;">onde $f^{(k-1)}(t) = \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} f(t)$</p>
6	$\mathcal{L}\left[\pm \int f(t) dt\right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{\left[\int f(t) dt\right]_{t=0 \pm}}{s}$
7	$\mathcal{L}\left[\pm \iint f(t) dt dt\right] = \frac{F(s)}{s^2} + \frac{\left[\int f(t) dt\right]_{t=0 \pm}}{s^2} + \frac{\left[\iint f(t) dt dt\right]_{t=0 \pm}}{s}$
8	$\mathcal{L}\left[\pm \int \dots \int f(t) (dt)^n\right] = \frac{F(s)}{s^n} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{s^{n-k+1}} \left[\int \dots \int f(t) (dt)^k\right]_{t=0 \pm}$
9	$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t) dt\right] = \frac{F(s)}{s}$
10	$\int_0^\infty f(t) dt = \lim_{s \rightarrow 0} F(s) \text{ se } \int_0^\infty f(t) dt \text{ existir}$

11	$\mathcal{L}[e^{-at} f(t)] = F(s+a)$
12	$\mathcal{L}[f(t-\alpha)u(t-\alpha)] = e^{-as} F(s) \quad \alpha \geq 0$
13	$\mathcal{L}[t f(t)] = -\frac{dF(s)}{ds}$
14	$\mathcal{L}[t^2 f(t)] = \frac{d^2}{ds^2} F(s)$
15	$\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s) \quad n=1,2,3,\dots$
16	$\mathcal{L}\left[\frac{1}{t} f(t)\right] = \int_s^\infty F(s) ds$
17	$\mathcal{L}\left[f\left(\frac{t}{a}\right)\right] = \alpha F(as)$

5.2 - Bibliografia

- BOLTON, W. **Engenharia de controle**. São Paulo. Makron Books. 1995. 497p.
- CAVALLO, A. SETOLA, R. VASCA, F. **Using MATLAB Simulink and Control System Toolbox – A practical Approach**. Prentice Hall. 1996.
- DOEBELIN, E.O. **Measurement Systems**. 5th Ed. McGraw-Hill. 2003.
- DORF, RICHARD C.; SILVA FILHO, BERNARDO SEVERO DA; BISHOP, ROBERT H. **Sistemas de controle modernos**. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001. 659 p.

FITZGERALD, A.E., UMANS, S.D., KINGSLEY JR., C. **Máquinas Elétricas**. 6ª Ed. Bookman. 2006.

FRANKLIN, GENE F., POWELL, J. DAVID. **Feedback Control of Dynamic Systems**. 4 ed. Upper Saddle River, N.J.: Prentice Hall, 2002, 910p.

KUO, BENJAMIN C. **Automatic Control System**. 7 ed. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall, 1995, 897p.

KWONG, WU HONG. **Introdução ao Controle de Processos Químicos com MATLAB**. 1. ed. São Carlos, SP: Editora da Universidade Federal de São Carlos, 2002, v.1 e v.2.

LJUNG, LENNART. **System Identification: Theory for the user**. 2. ed. Upper Saddle River, N.J.: Prentice Hall, 1999. 609 p.

MATSUMOTO, E. **Simulink 5 – Fundamentos**. Érica. 2003

OGATA, Katsuhiko. **System Dynamics**. 4. ed. Upper Saddle River, N.J.: Pearson / Prentice Hall, 2004. 784 p.

OGATA, Katsuhiko. **Engenharia de Controle Moderno**. 4. ed. São Paulo: Prentice-Hall, 2003. 782 p.