

# **Curso FEG0650**

## **Automação e Controle de Processos Industriais e Agro- Industriais**

---

### **FEG 0651 - Modelagem e Identificação de Sistemas Dinâmicos**

Prof. Dr. Nelson Luis Cappelli e Prof. Dr. Angel Pontin Garcia  
e-mail: angel.garcia@feagri.unicamp.br

FEG 0651

## Capítulo 10 – Modelagem de sistemas térmicos

Os modelos dinâmicos dos sistemas térmicos envolvem o **fluxo** e o **armazenamento** de energia térmica.

## Fluxo de calor

condução

convecção

radiação

Para transferência de calor por condução ou transmissão:

$$q = K \Delta\theta$$

Onde:

$q$  = taxa de fluxo de calor [kcal/s]

$\Delta\theta$  = diferença de temperatura [ $^{\circ}\text{C}$ ]

$K$  = coeficiente [kcal/s  $^{\circ}\text{C}$ ]

condução

$$K = \frac{k A}{\Delta X}$$

convecção

$$K = H A$$

Onde:

$k$  = condutividade térmica [kcal/m s  $^{\circ}\text{C}$ ]

$A$  = área normal ao fluxo de calor [ $\text{m}^2$ ]

$\Delta X$  = espessura do condutor [m]

$H$  = coeficiente de convecção [kcal/ $\text{m}^2$  s  $^{\circ}\text{C}$ ]

## Sistemas térmicos

fluxo de calor

**Resistência:** A resistência térmica para o fluxo de calor entre duas substâncias é definida como:

$$R = \frac{\text{variação na diferença de temperatura}}{\text{variação na taxa do fluxo de calor}}$$

Como os coeficientes de condutividade térmica e convecção são constantes, a resistência térmica tanto para condução quanto para convecção é constante e expressa por:

$$R = \frac{d(\Delta\theta)}{dq} = \frac{1}{K}$$

**Capacitância:** A capacidade térmica é definida como:

$$C = \frac{\text{variação do calor armazenado}}{\text{variação na temperatura}} \quad \text{ou} \quad C = m.c$$

Onde:  $m$  = massa da substância [kg]  
 $c$  = calor específico [kcal/kg °C]

O fluxo líquido de energia térmica na substância afeta a temperatura da substância de acordo com a relação:

$$\dot{T} = \frac{1}{C} q$$

**Calor específico** – O calor específico a volume constante ( $c_v$ ) pode ser convertido na capacidade térmica considerando-se a massa da substância:

$$C = mc_v$$

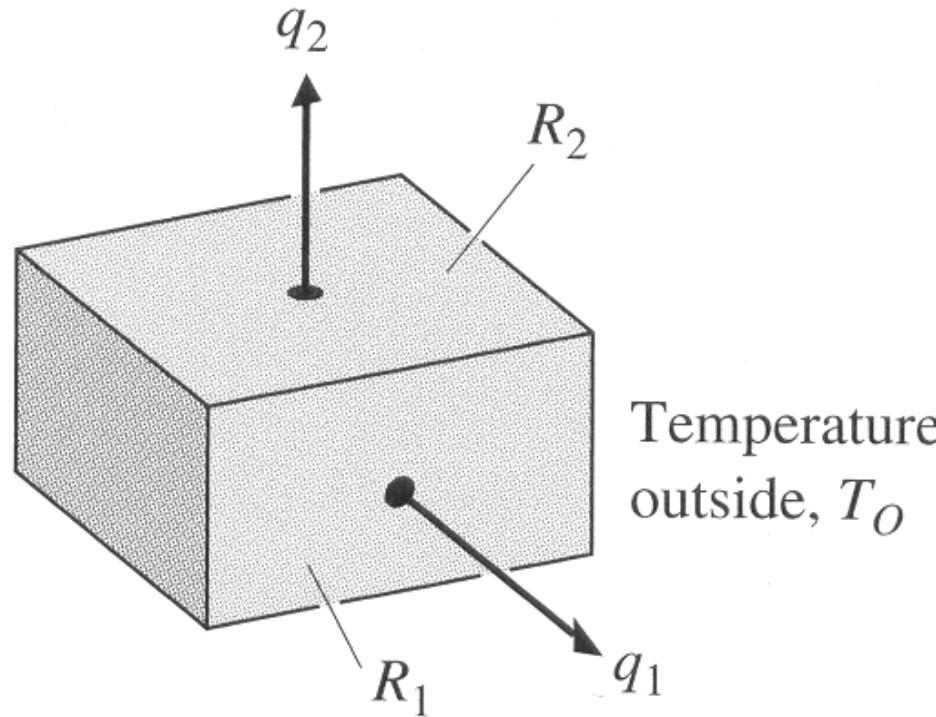
**Condutividade térmica** – A condutividade térmica  $k$  pode ser relacionada à resistência térmica por meio de:

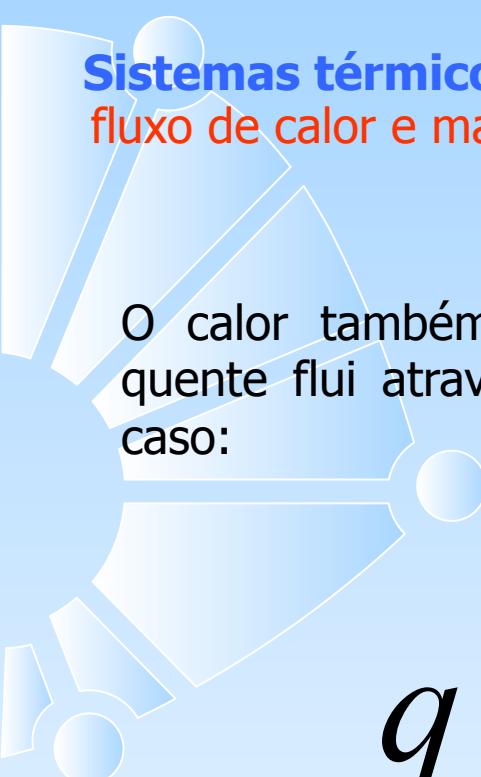
$$\frac{1}{R} = \frac{kA}{l}$$

Onde:  $A$  = área da seção transversal [ $m^2$ ]

$l$  = comprimento do caminho do fluxo de energia térmica[m]

**Exercício:** Determine a função de transferência ( $T_i(s)/T_o(s)$ ) de uma sala termicamente isolada ( $1/R=0$ ) que possui o teto e uma das paredes sem isolamento térmico, conforme mostrado na figura. Simule frente a um degrau unitário de  $T_o$ .



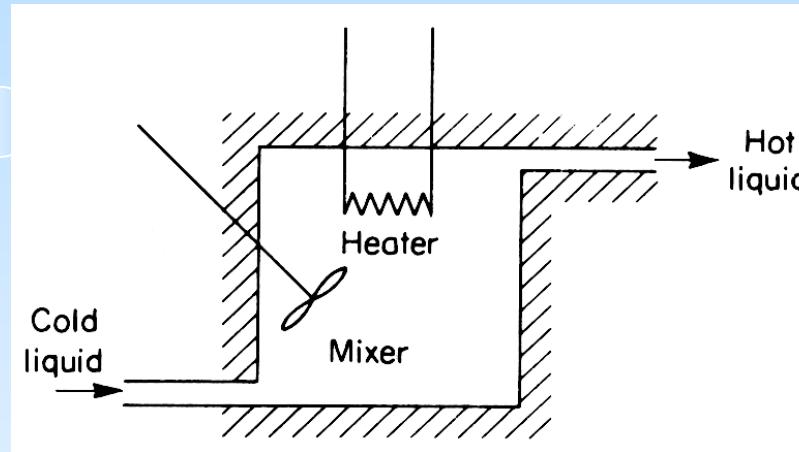


O calor também pode ser transferido quando uma massa mais quente flui através de uma massa mais fria, ou vice-versa. Neste caso:

$$q = \omega c_v (T_1 - T_2)$$

Onde  $\omega$  é a taxa do fluxo de massa de uma substância na temperatura  $T_1$  fluindo em um reservatório à temperatura  $T_2$ .

**Exercício:** Encontre a função de transferência entre a temperatura de saída e a temperatura de entrada do líquido.



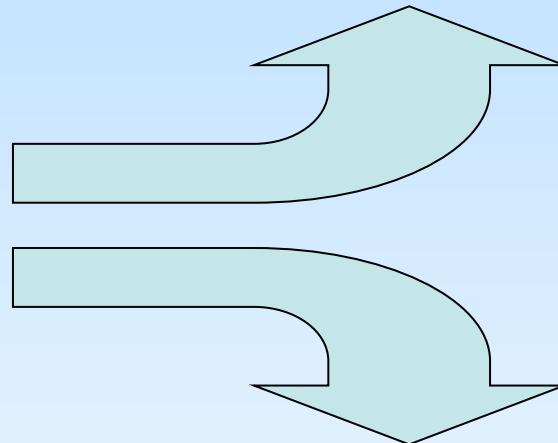
**Exercício:** Com a finalidade de implementar um sistema de controle para o sistema da figura, escreva uma Função de Transferência para controlar a temperatura de saída do líquido aquecido atuando-se na quantidade de calor fornecida pela resistência.

**Exercício:** Encontre a equação diferencial do sistema caso a temperatura de entrada do líquido e o fluxo de calor fornecido variarem, considerando-se a vazão de líquido constante.

## **Capítulo 11 – Modelagem de sistemas fluídicos**

**Fluidos**

**Incompressíveis**



**Compressíveis**



# Fluidos incompressíveis

**Fluxo de fluido incompressível**

**continuidade**

**Equilíbrio de forças**

**Resistência ao fluxo**

## Fluxo de fluido incompressível

continuidade

conservação de massa

equilíbrio de forças

2<sup>a</sup> lei de Newton

resistência ao escoamento

restrição ou  
atrito viscoso

$$1 \leq \alpha \leq 2$$

→ Reynolds

$$Re = \frac{\rho D v}{\mu}$$

$$Re > 4000$$

turbulento

$$\alpha = 2$$

$$Re < 2000$$

laminar

$$\alpha = 1$$

$$\dot{m} = \omega_{in} - \omega_{out}$$

$$F = p A$$

$$Q = \frac{1}{\rho R} (p_1 - p_2)^{\frac{1}{\alpha}}$$

FEG 0651

## Resistência ao fluxo de líquidos

Considerando-se o fluxo ao longo de uma tubulação curta, que conecta dois reservatórios, a resistência **R** ao fluxo de líquido nessa tubulação, ou restrição, é definida como a variação na diferença de nível (diferença de nível nos dois reservatórios) necessária para causar a variação unitária na taxa de escoamento, isto é:

$$R = \frac{\text{Variação na diferença de nível}}{\text{Variação na vazão em volume}}$$

Fluxo laminar →

$$Q = K \cdot H \rightarrow R_L = \frac{dH}{dQ} = \frac{H}{Q}$$

Fluxo turbulento →

$$Q = K \cdot \sqrt{H} \rightarrow R_T = \frac{dH}{dQ} = \frac{2H}{Q}$$

$R_T$  pode ser determinado pela construção do gráfico que mostra a curva do nível em função da taxa de escoamento, baseado em dados experimentais, e medindo-se a inclinação da curva no ponto de operação.

## Capacitância de reservatório

A capacidade de um reservatório é definida como a variação na quantidade de líquido armazenado necessário para causar uma mudança unitária no potencial (altura). O potencial é a grandeza que indica o nível de energia no sistema.

$$C = \frac{\text{Variação na quantidade de líquido armazenado}}{\text{Variação da altura do nível}}$$

A capacidade ( $\text{m}^3$ ) e a capacitância ( $\text{m}^2$ ) de um reservatório são diferentes. A capacitância do reservatório é igual à sua seção transversal. Se esta for constante, a capacitância será constante para qualquer altura do nível.

## Inertância

O termo inertância refere-se à mudança de potencial necessária para alterar a taxa de fluxo em uma unidade. Para que ocorra os efeitos inerciais do fluxo de líquidos em tubulações, o potencial pode ser a pressão ( $\text{N/m}^2$ ) ou a altura do nível (m) e a mudança na taxa de fluxo por segundo, pode ser a aceleração volumétrica do fluxo de líquido ( $\text{m}^3/\text{s}^2$ ).

$$I = \frac{\text{mudança na pressão}}{\text{mudança na taxa de fluxo por segundo}}$$

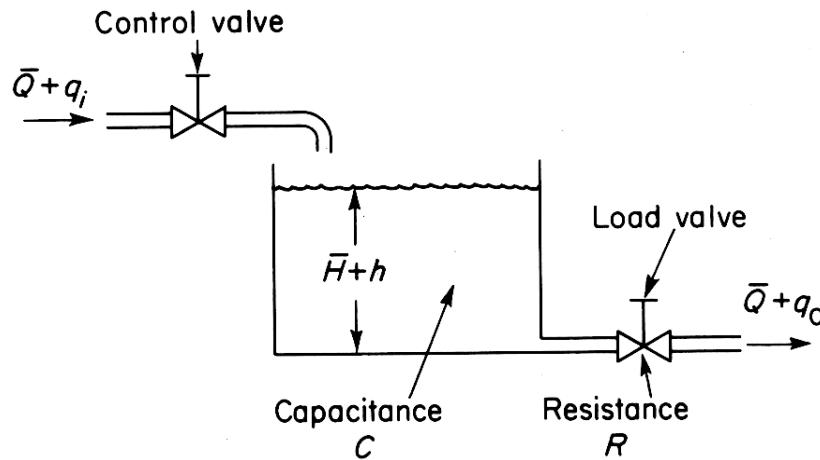
ou

$$I = \frac{\text{mudança na altura do nível}}{\text{mudança na taxa de fluxo por segundo}}$$

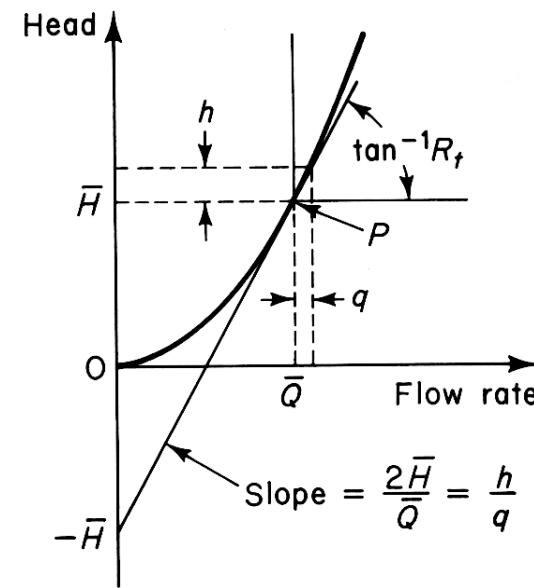


# Sistemas de Nível

**Exercício:** Determine a Função de Transferência do sistema.



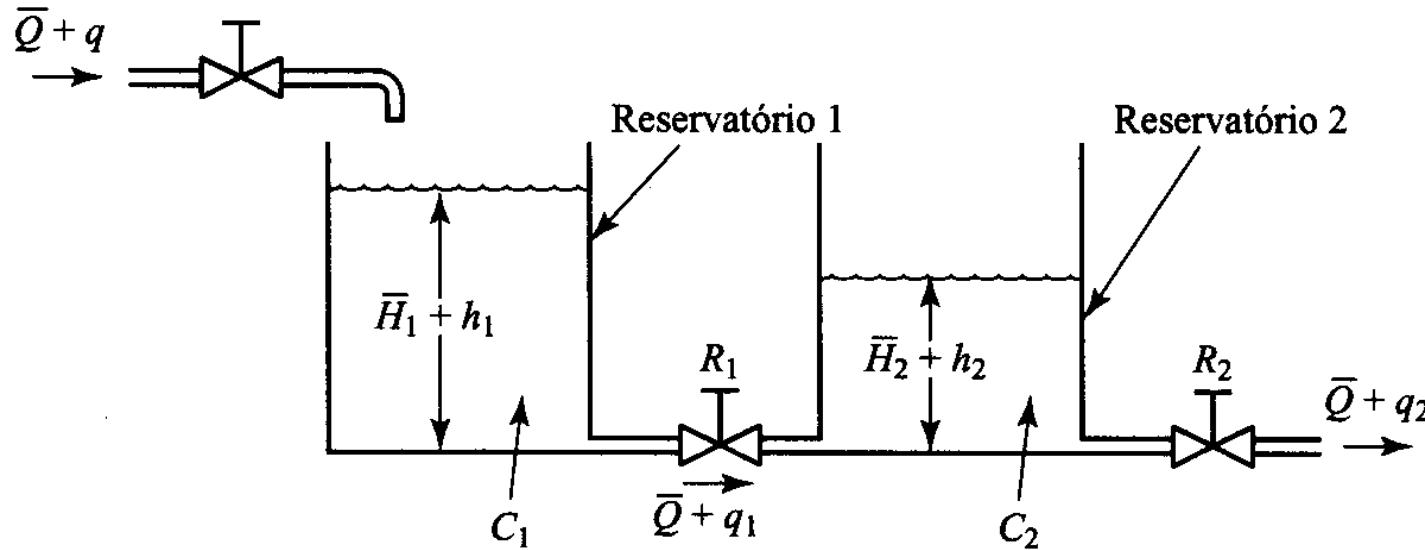
(a)



(b)

- 1) Entre a vazão de entrada e o nível do reservatório para o fluxo laminar e para o turbulento.
- 2) Entre a vazão de entrada e a vazão de saída do reservatório.

**Exercício:** Considerando o sistema de nível de líquido com interação da figura, determine a Função de Transferência entre a vazão de entrada no primeiro reservatório e a vazão de saída do segundo.

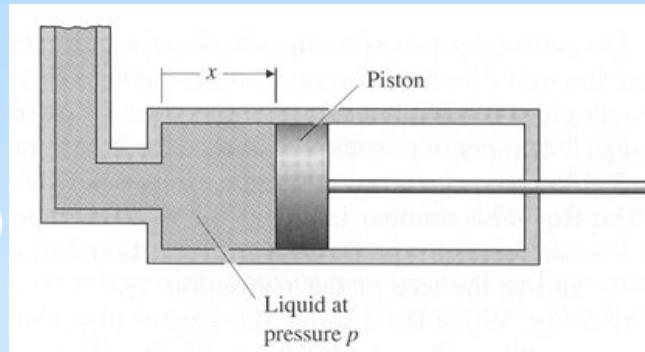




# Sistemas Hidráulicos

## Modelagem de sistemas hidráulicos

**Exercício:** Determine a equação diferencial que descreve o movimento do atuador hidráulico (pistão hidráulico), apresentado na figura.



**Solução:** A segunda lei de Newton se aplica diretamente, onde as forças são devidas à pressão do fluido, resultando em:

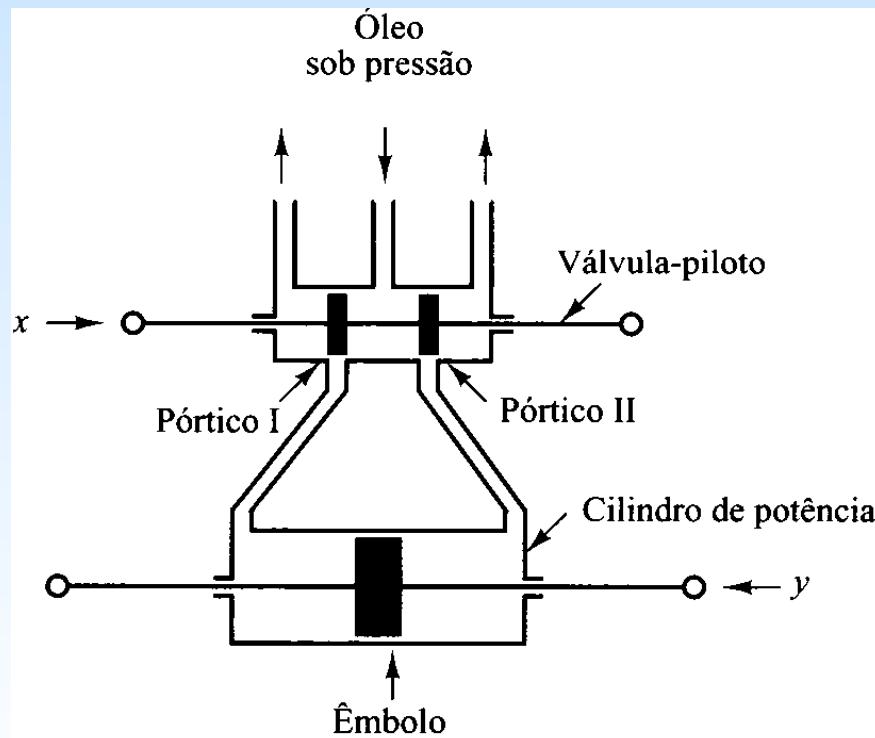
$$A p = M \ddot{x} + B \dot{x} + K x + F_{at}$$

$$A p = M \ddot{x} + B \dot{x}$$

$$G(x) = \frac{A}{Ms + B} \cdot \frac{1}{s}$$

## Controlador hidráulico integral

**Exercício:** Considerando o servomotor hidráulico mostrado na figura, determine a Função de transferência entre a posição da válvula piloto (entrada) e a posição da haste do êmbolo. Suponha que a vazão do óleo seja proporcional ao deslocamento da válvula-piloto e que as forças de inércia do êmbolo e da carga sejam desprezíveis, comparados à força hidráulica do êmbolo.





# Fluidos compressíveis

**Resistência:** A resistência ao fluxo de ar em tubulações, orifícios, válvulas ou qualquer outro dispositivo que imponha restrição ao fluxo pode ser definido como a mudança na pressão diferencial [N/m<sup>2</sup>] (existente antes e depois do dispositivo que oferece restrição ao fluxo) requerida para produzir uma mudança unitária na taxa de fluxo de massa [kg/s], ou:

$$R = \frac{\text{mudança na pressão diferencial}}{\text{mudança na taxa de fluxo de massa}} \quad \text{ou} \quad R = \frac{d(\Delta p)}{dq}$$

**Capacitância:** A capacidade de vasos pneumáticos pode ser definida como sendo a mudança da massa de ar [kg] (ou de outro gás) no vaso, necessária para impor uma mudança unitária de pressão [N/m<sup>2</sup>], ou seja:

$$C = \frac{\text{mudança na massa do gás}}{\text{mudança na pressão}} \quad \text{ou} \quad C = \frac{dm}{dp} = V \frac{d\rho}{dp}$$

## Fluidos compressíveis

A capacidade pode ser calculada por meio da lei dos gases perfeitos, para o ar tem-se:

$$pV = \frac{p}{\rho} = \frac{\bar{R}}{M} T = R_{ar} T$$

Se a mudança no estado do ar estiver entre isotérmica e adiabática, então o processo de expansão pode ser expresso como politrópico e é dado por:

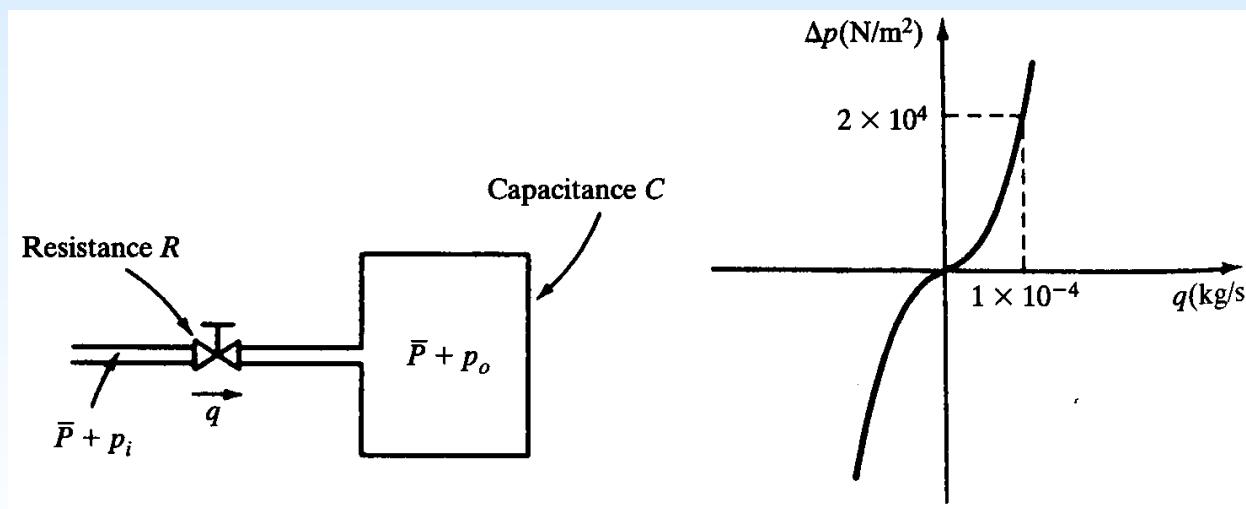
$$\frac{d\rho}{dp} = \frac{1}{n R_{ar} T}$$

A capacidade pode ser calculada por:  $C = \frac{V}{n R_{ar} T}$

Para qualquer outro gás, por:  $C = \frac{V}{n R_{gás} T}$

# Fluidos compressíveis

**Exercício:** Determine o comportamento da variação de pressão do ar ( $p_o$ ) contido no vaso do sistema mostrado na figura. Assuma que o sistema está em regime estacionário para  $t < 0$  e que a pressão nesse regime é  $\bar{P} = 5 \times 10^5 [N.m^{-2}]_{abs}$ . No instante  $t = 0$ , a pressão de entrada muda subitamente de  $\bar{P}$  para  $\bar{P} + p_i$  onde  $p_i$  é um degrau de magnitude igual a  $2 \times 10^4 [N/m^2]$ . Essa mudança na pressão de entrada causa um escoamento para dentro do vaso até que a pressão se equalize. Assuma que a taxa de fluxo inicial seja  $q(0) = 1 \times 10^{-4} [kg.s^{-1}]$ . Como o ar flui para dentro do vaso, a pressão sobe de  $\bar{P}$  para  $\bar{P} + p_o$ . Assuma, ainda, que o processo de expansão seja isotérmico ( $n = 1$ ), que a temperatura de todo o sistema seja constante e igual a  $T = 293 [K]$  e que o vaso tenha a capacidade de  $0,1 m^3$ .



## Capítulo 12 – Modelagem de sistemas elétricos

# Leis de Kirchhoff

## Lei da corrente

A soma algébrica das correntes deixando uma junção ou nó é igual à soma algébrica das correntes entrando naquele nó ou junção.

Método

**análise dos nós**

## Lei da voltagem

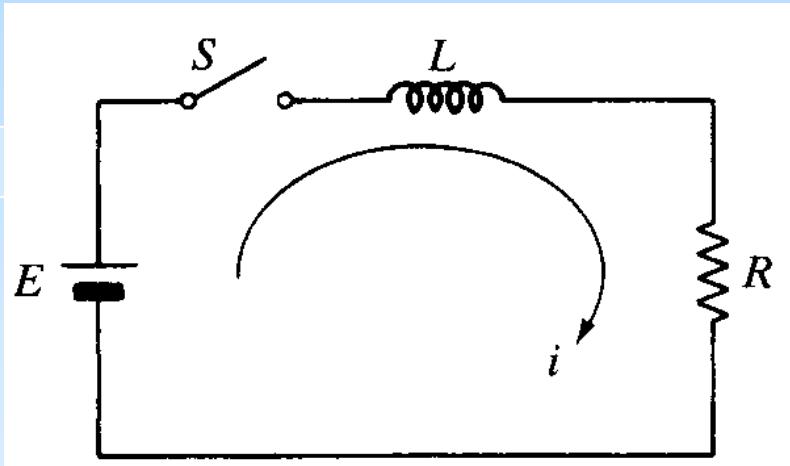
A soma algébrica de todas as tensões tomadas em torno de um caminho fechado de um circuito é igual a zero.

Método

**análise das  
malhas fechadas**

# Sistema: elétrico

## Círculo L R



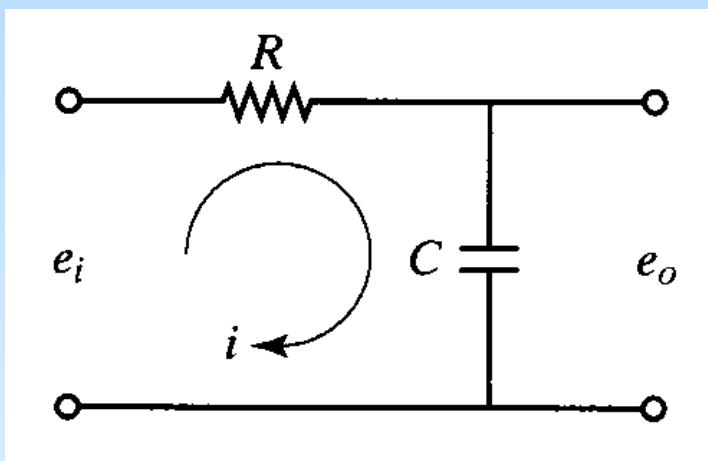
$$E - L \frac{di}{dt} - Ri = 0 \quad \text{ou} \quad L \frac{di}{dt} + Ri = E$$

$$L[sI(s) - i(0)] + RI(s) = E(s) \quad \boxed{i(0) = 0} \quad (Ls + R)I(s) = E(s)$$

$$G(s) = \frac{I(s)}{E(s)} = \frac{1}{Ls + R}$$

# Sistema: elétrico

## Círculo R C



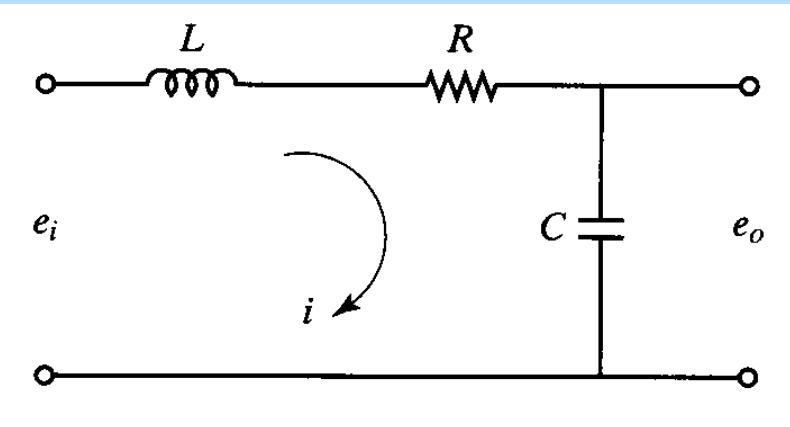
$$Ri + \frac{1}{C} \int idt = e_i \quad \text{Laplace} \rightarrow RI(s) + \frac{1}{C} \frac{1}{s} I(s) = E_i(s)$$

$$\frac{1}{C} \int idt = e_o \quad \text{Laplace} \rightarrow \frac{1}{C} \frac{1}{s} I(s) = E_o(s)$$

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{\frac{1}{C} \frac{1}{s} I(s)}{\left( R + \frac{1}{C} \frac{1}{s} \right) I(s)} = \frac{1}{RCs + 1}$$

# Sistema: elétrico

## Círculo L R C



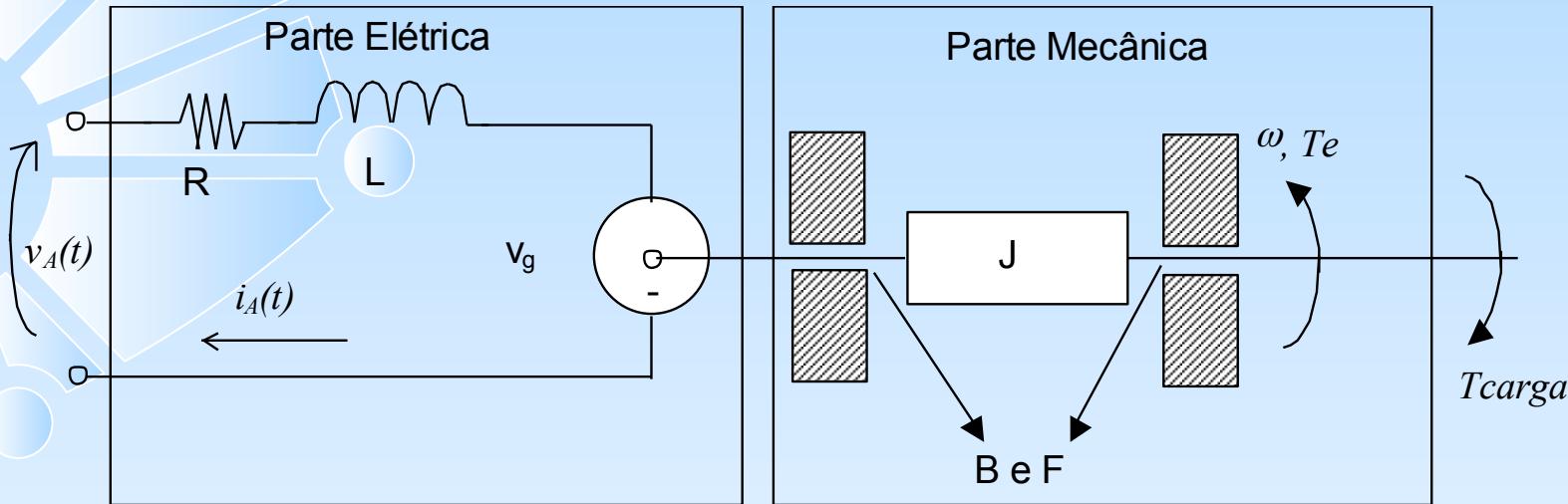
$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int idt = e_i \quad \text{Laplace} \rightarrow Ls I(s) + RI(s) + \frac{1}{C} \frac{1}{s} I(s) = E_i(s)$$

$$\frac{1}{C} \int idt = e_o \quad \text{Laplace} \rightarrow \frac{1}{C} \frac{1}{s} I(s) = E_o(s)$$

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

# Sistema: eletromecânico

## Motor de CC, controlado pela armadura



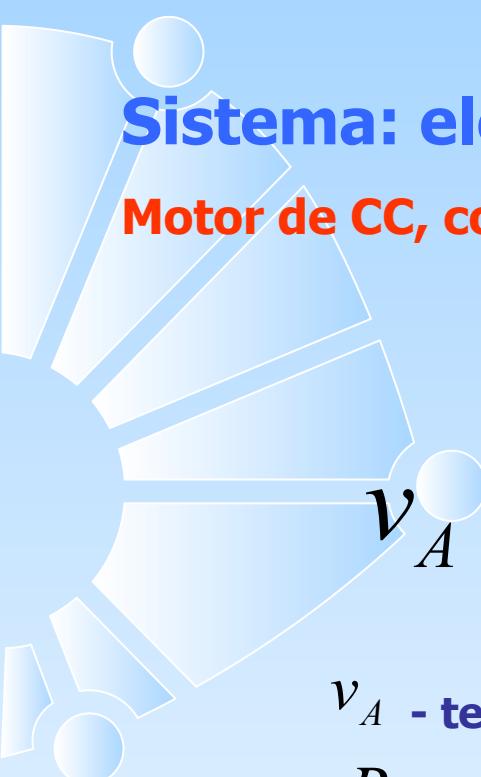
### Parte elétrica

Nos motores elétricos de corrente contínua, controlados por armadura, a velocidade é controlada pela tensão de armadura. Neste caso, a equação diferencial que descreve o circuito é:

# Sistema: eletromecânico

Motor de CC, controlado pela armadura

## Parte elétrica


$$v_A = R \cdot i_A + L \cdot \frac{di_a}{dt} + v_g$$

$v_A$  - tensão aplicada no circuito da armadura, [V]

$R$  - resistência de armadura, [ $\Omega$ ]

$i_A$  - corrente da armadura, [A]

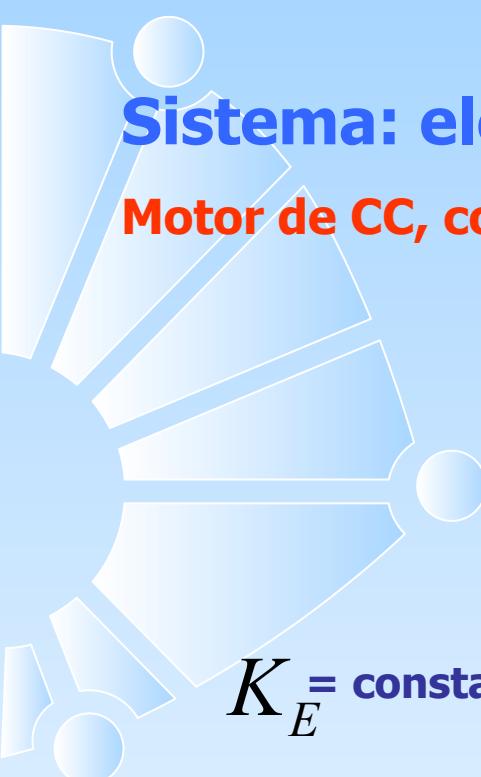
$L$  - indutância, [H]

$t$  - tempo, [s]

$v_g$  - força contra-eletromotriz gerada, [V]

# Sistema: eletromecânico

Motor de CC, controlado pela armadura



## Parte elétrica

$$v_g = K_E \cdot \omega$$

$K_E$  = constante da força contra-eletromotriz  $\left[ \frac{V \cdot s}{rad} \right]$ ,

representa a proporcionalidade entre a tensão  $v_g$

e a velocidade angular do eixo do motor  $\omega \left[ \frac{rad}{s} \right]$

# Sistema: eletromecânico

**Motor de CC, controlado pela armadura**

## Parte mecânica

$$\psi_e = J \cdot \frac{d\omega}{dt} + B \cdot \omega + F$$

$\psi_e$  - Torque mecânico proporcional à corrente de armadura,  $[Nm]$

$J$  - momento de inércia (armadura do motor + carga),  $[Kg \cdot m^2]$

$B$  - atrito viscoso do motor,  $\left[ \frac{N \cdot m \cdot s}{rad} \right]$

$\omega$  - velocidade angular no eixo do motor,  $\left[ rad/s \right]$

$F$  - atrito seco,  $[N \cdot m]$

# Sistema: eletromecânico

**Motor de CC, controlado pela armadura**

## Acoplamento

A corrente de campo, no motor de corrente contínua, é mantida constante. Neste caso, o fluxo também é constante e o torque torna-se diretamente proporcional à corrente de armadura.

$$\psi_e = K_T \cdot i_A$$

$K_T$  - constante de torque. Representa a proporcionalidade entre a corrente de armadura e o torque produzido pelo motor

# Sistema: eletromecânico

**Motor de CC, controlado pela armadura**

## Parte elétrica:

Laplace

$$v_A = R \cdot i_A + L \cdot \frac{di_a}{dt} + K_E \cdot \omega$$

$$V_A(s) = R \cdot I_A(s) + L \cdot s \cdot I_A(s) + K_E \cdot \Omega(s)$$

## Parte mecânica:

Laplace

$$K_T \cdot i_A = J \cdot \frac{d\omega}{dt} + B \cdot \omega + F$$

$$T_e(s) = K_T \cdot I_A(s) = J \cdot s \cdot \Omega(s) + B \cdot \Omega(s) + F$$

Acrescentando o torque  $T_{ext}$  que uma carga externa absorve do motor,

$$T_e(s) - T_{ext}(s) - F = K_T \cdot I_A(s) - T_{ext}(s) - F = J \cdot s \cdot \Omega(s) + B \cdot \Omega(s)$$

# Sistema: eletromecânico

**Motor de CC, controlado pela armadura**

$$\Omega(s) = \frac{K_T}{LJ s^2 + (JR + LB)s + (RB + K_E K_T)} \cdot V_A(s) + \dots$$
$$G_1(s) = -\frac{(L \cdot s + R)}{LJ s^2 + (JR + LB)s + (RB + K_E K_T)} \cdot T_{ext}(s) + \dots$$
$$G_2(s) = -\frac{(L \cdot s + R)}{LJ s^2 + (JR + LB)s + (RB + K_E K_T)} \cdot F$$

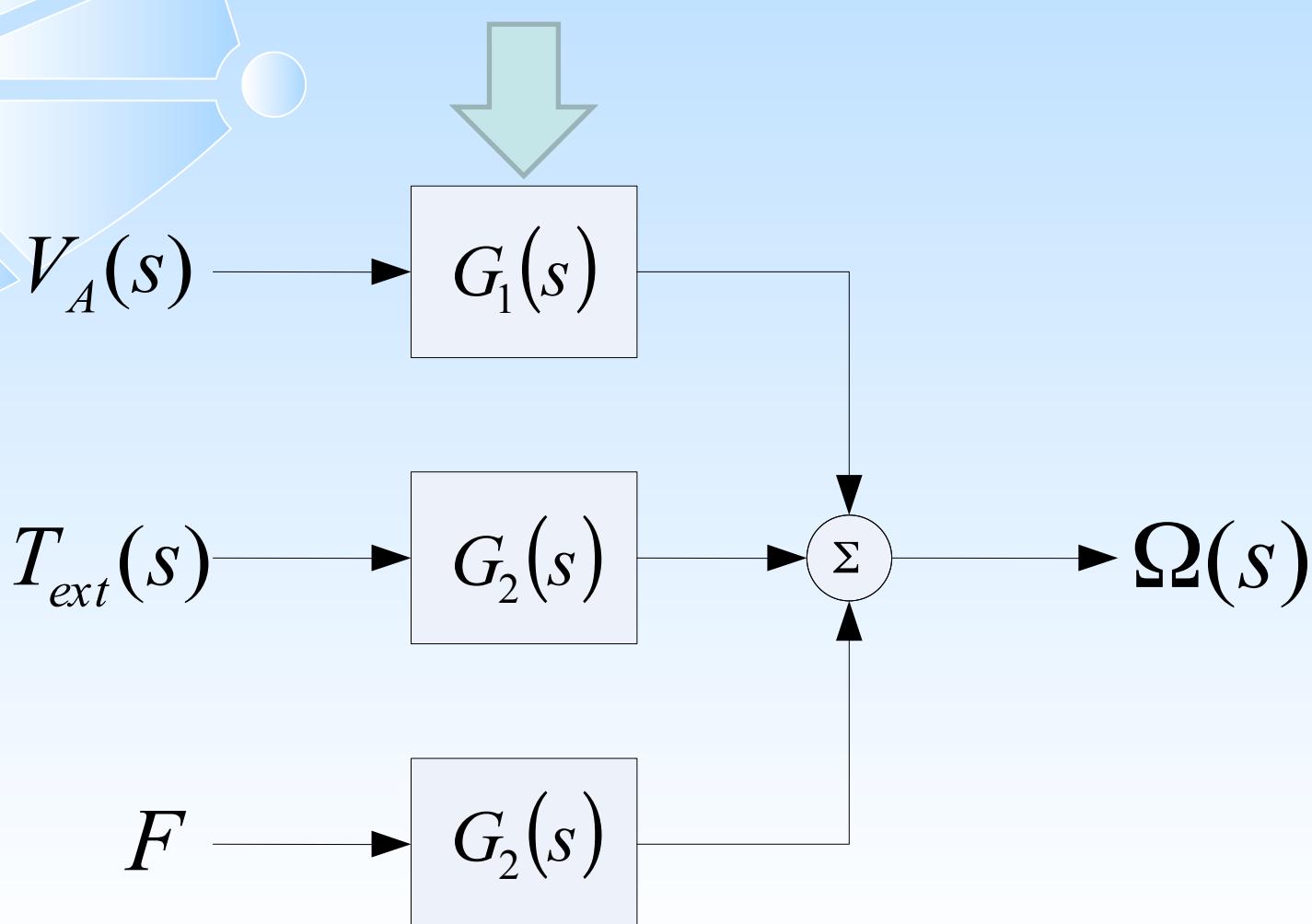


$$\Omega(s) = G_1(s) \cdot V_A(s) + G_2(s) \cdot T_{ext}(s) + G_2(s) \cdot F$$

# Sistema: eletromecânico

**Motor de CC, controlado pela armadura**

$$\Omega(s) = G_1(s) \cdot V_A(s) + G_2(s) \cdot T_{ext}(s) + G_2(s) \cdot F$$



# Sistema: eletromecânico

**Exercício:** Simule o comportamento da rotação do eixo do motor de CC, controlado pela corrente da armadura, cujos parâmetros estão apresentados na tabela abaixo, mantendo-se o torque externo ( $T_{ext}$ ) nulo e o atrito seco constante  $F = 1,81 \times 10^{-2} [N \cdot m]$  para uma excitação do tipo degrau de 10V na tensão de armadura  $v_A$ .

| $R$        | $L$                    | $K_E$                                  | $K_T$                                | $B$  | $F$                   | $J$                |
|------------|------------------------|--|--------------------------------------|--|-----------------------|--------------------|
| $[\Omega]$ | $[H]$                  | $\left[ \frac{V \cdot s}{rad} \right]$ | $\left[ \frac{N \cdot m}{A} \right]$ | $\left[ \frac{N \cdot m \cdot s}{rad} \right]$ | $[N \cdot m]$         | $[Kg \cdot m^2]$   |
| 3,21       | $2,847 \times 10^{-3}$ | $9,16 \times 10^{-2}$                  | $9,16 \times 10^{-2}$                | $1,41 \times 10^{-4}$                          | $1,81 \times 10^{-2}$ | $6 \times 10^{-4}$ |

## **Capítulo 13 – Identificação de sistemas dinâmicos**

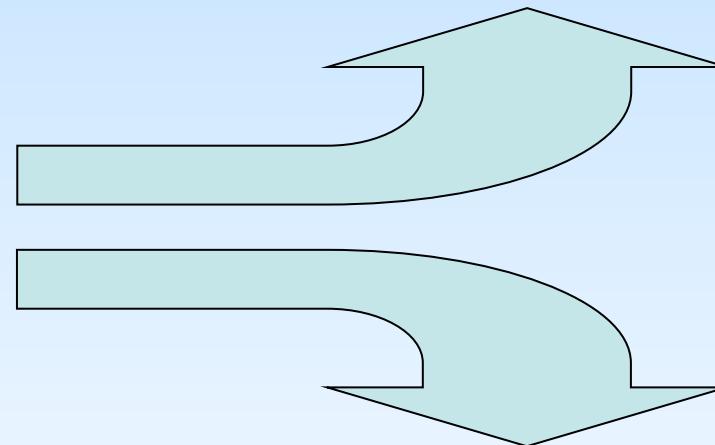
# Introdução

## Construção de modelos matemáticos

**Basicamente um modelo deve ser construído a partir de dados observados.**

**Modelos matemáticos podem ser construídos a partir de dois caminhos**

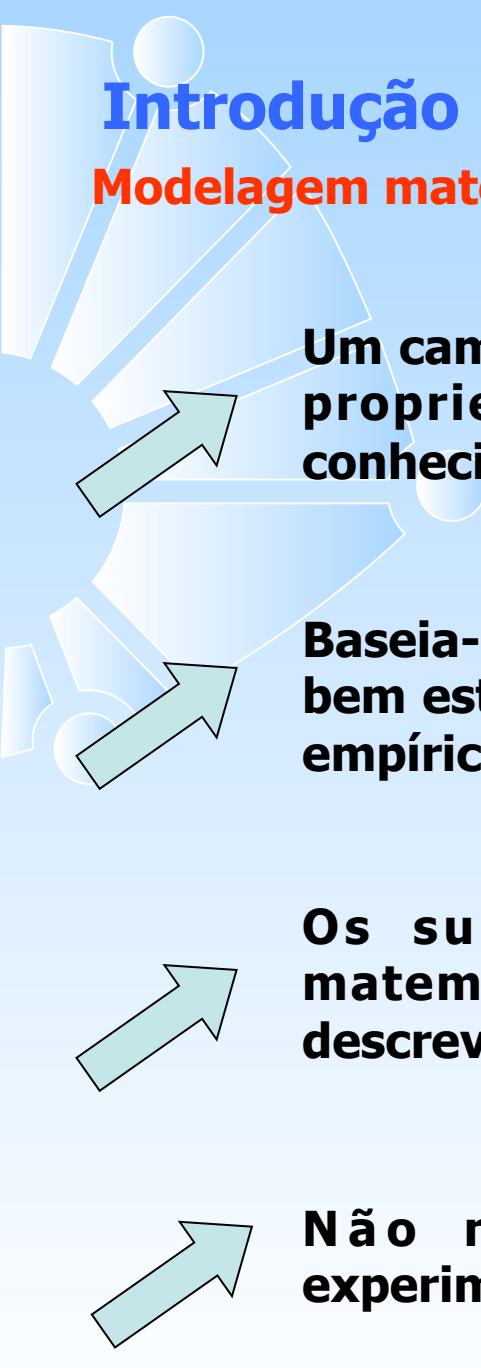
### Modelagem de Sistemas



### Identificação de Sistemas

# Introdução

## Modelagem matemática



**Um caminho é dividir o sistema em subsistemas, cujas propriedades são bem conhecidas através de conhecimentos anteriores.**

**Baseia-se em “leis da natureza” e em outras relações bem estabelecidas que tenha suas raízes em trabalhos empíricos.**

**Os subsistemas são posteriormente unidos matematicamente, obtendo-se um modelo que descreve todo o sistema.**

**Não necessariamente envolve qualquer experimentação com o sistema real.**

# Introdução

## Identificação de sistemas

**Baseado na experimentação**

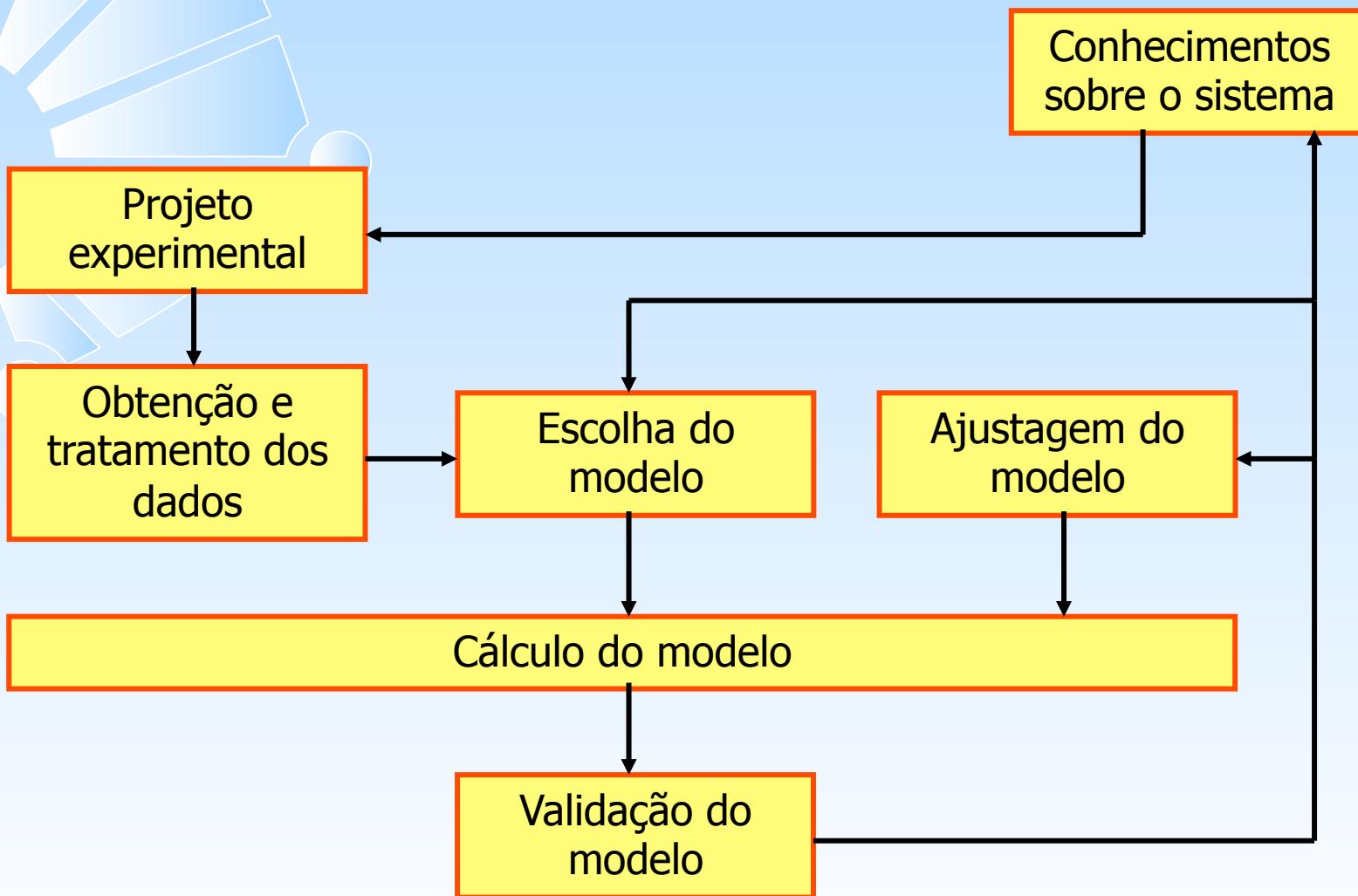
**Inicialmente os sinais de entrada e de saída do sistema são registrados.**

**Os sinais são submetidos a análises a fim de se obter o modelo matemático.**

**Necessariamente envolvem experimentações com o sistema real ou em escala.**

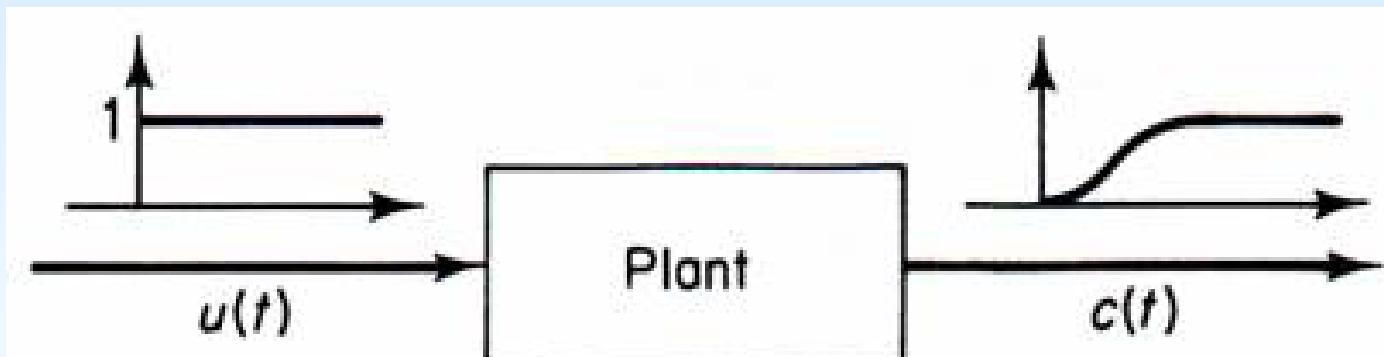
# Identificação de Sistemas

## Ciclo de Identificação de Sistemas



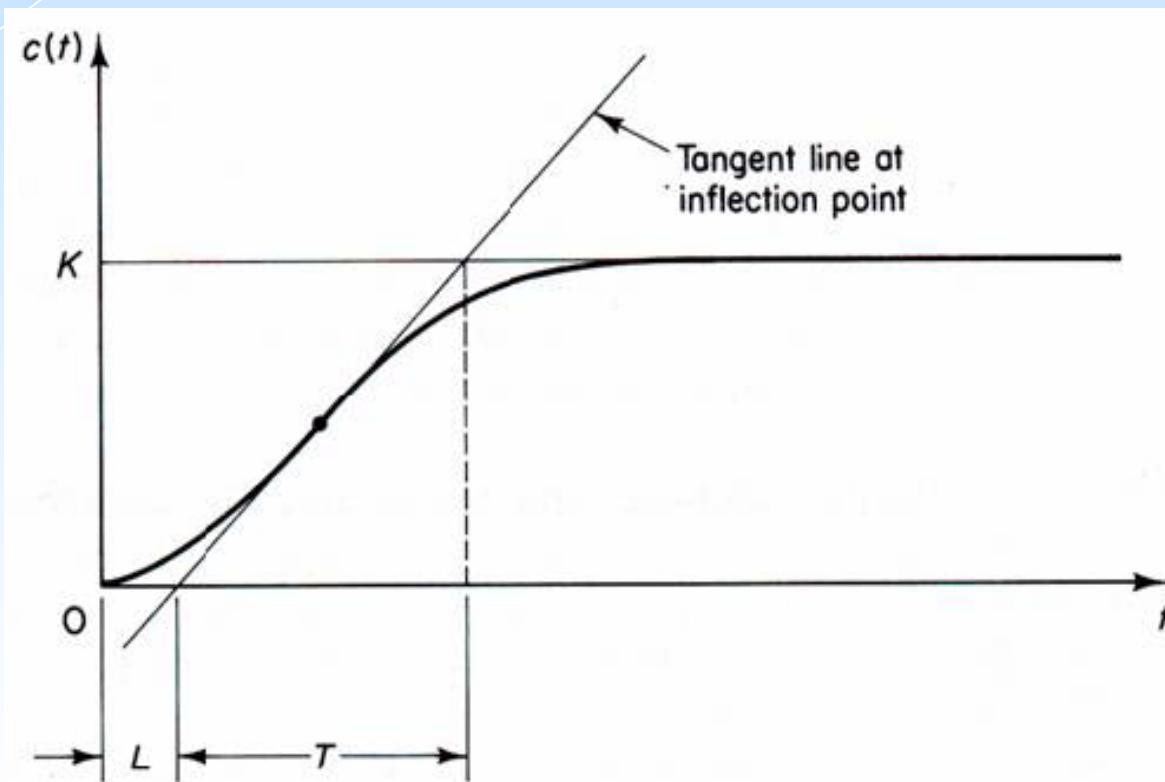
# Identificação de Sistemas

Procedimento: Submete-se o sistema, sem a ação de nenhum tipo de controle, a uma excitação conhecida (normalmente uma entrada do tipo degrau) e mede-se sua resposta no tempo, obtendo-se experimentalmente a resposta do sistema a uma entrada do tipo degrau unitário. Se a planta não envolve integrador(es) ou pólos conjugados complexos dominantes, então a curva de resposta a um degrau unitário pode parecer como uma curva do tipo "S".



# Identificação de Sistemas

A curva tipo “S” pode ser caracterizada por duas constantes, tempo de atraso L e constante de tempo T. O tempo de atraso e a constante de tempo são determinados desenhando-se uma linha tangente no ponto de inflexão da curva tipo “S” (ponto de máxima inclinação) e determinando-se a intersecção da linha tangente com o eixo do tempo e a linha  $c(t) = K$ .



# Identificação de Sistemas

A função de transferência  $Y(s)/U(s)$  pode então ser aproximada para um sistema de primeira ordem com um atraso de transporte.

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K e^{-Ls}}{Ts + 1}$$

O termo de atraso pode ser aproximado por uma série de MacLaurin (esquerda) ou Padé (direita):

$$e^{-t_d s} \approx \frac{1}{1 + t_d s + \frac{t_d^2 s^2}{2}}$$

$$e^{-t_d s} \approx \frac{1 - \frac{t_d s}{2}}{1 + \frac{t_d s}{2}}$$

# Identificação de Sistemas

## Exercício

O arquivo “temp20.txt” contém a curva de resposta de um sistema de aquecimento. O sistema tem como resposta a temperatura acima da correspondente à do ambiente no momento do experimento, frente a um degrau de 20% da potência elétrica disponível para o aquecimento. Identifique o sistema.

Obs.: Os dados foram obtidos com uma taxa de amostragem de 100 pontos por segundo.

# Identificação de Sistemas

## Sistemas de Segunda Ordem

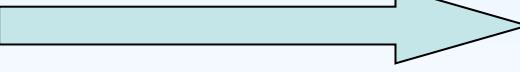
Sistemas de segunda ordem sub-amortecido também podem ser identificados por meios experimentais. Para tanto, excita-se o sistema com um sinal de entrada conhecido e registra-se a resposta. Normalmente a excitação é do tipo degrau. Neste caso, a resposta deve ter a forma da equação:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

Onde:

$$M_o [\%] = e^{-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$\xi$$

$$t_d = \frac{1 + 0,7\xi}{\omega_n} \quad p / \quad 0 < \xi < 1$$

$$\omega_n$$

# Identificação de Sistemas

## Sistemas de Segunda Ordem

### Exercício

Deseja-se obter a FT de um processo desconhecido. Para tanto, realizou-se uma experimentação aplicando-se ao processo uma entrada do tipo degrau unitário e mediu-se sua resposta em função do tempo. O resultado do experimento está apresentado no arquivo "ident2.txt".

Pede-se:

1. Identifique a planta e apresente sua Função de transferência;
2. Faça um gráfico apresentando a resposta no domínio do tempo da planta identificada;
3. Compare graficamente a resposta experimental com a obtida pela identificação. Ajuste se necessário.