Curso FEG0650 Automação e Controle de Processos Industriais e Agro-Industriais

Escola de Extensão

FEAGRI

LIC Laboratório de Instrumentação e Controle

FEG0651 - Modelagem e Identificação de Sistemas Dinâmicos

Prof. Dr. Nelson Luis Cappelli e Prof. Dr. Angel Pontin Garcia
e-mail: angel.garcia@feagri.unicamp.br

Sumário

Escola de Extensão

FEAGRI

LIC Laboratório de Instrumentação e Controle

FEG 0651

Referências bibliográficas

GARCIA, Claudio**. Modelagem e simulação de sistemas de processos industriais e de sistemas eletromecânicos**. 2. Ed. São Paulo, SP. Editora da Universidade de São Paulo, 2009, 678p.

FELÍCIO, Luiz Carlos. **Modelagem da Dinâmica de Sistemas e Estudo da Resposta.** 1 ed. São Carlos, SP. RiMa Editora, 2007. 551 p.

OGATA, Katsuhiko. **System Dynamics**. 4. ed. Upper Saddle River, N.J.: Pearson / Prentice Hall, 2004. 784 p.

OGATA, Katsuhiko. **Engenharia de Controle Moderno**. 4. ed. São Paulo: Prentice-Hall, 2003. 782 p.

DORF, Richard C.; SILVA FILHO, Bernardo Severo da; BISHOP, Robert H. **Sistemas de controle modernos**. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001. 659 p.

KWONG, Wu Hong. **Introdução ao Controle de Processos Químicos com MATLAB.** 1. ed. São Carlos, SP: Editora da Universidade Federal de São Carlos, 2002, v.1 e v.2.

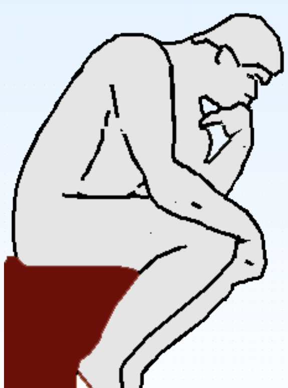
FRANKLIN, Gene F., POWELL, J. David. **Feedback Control of Dynamic Systems**. 4 ed. Upper Saddle River, N.J.: Prentice Hall, 2002, 910p.

KUO, Benjamin C. **Automatic Control System.** 7 ed. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall, 1995, 897p.

Capítulo 1 – Introdução

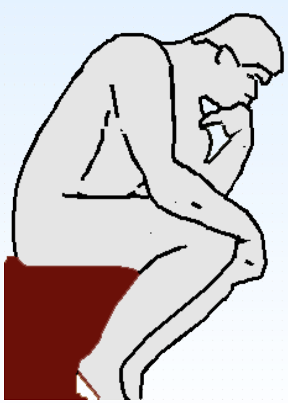
FEG 0651

Para que serve um sistema de controle ?



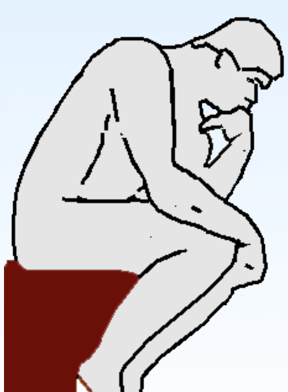
FEG 0651

Porquê alterar o comportamento de um sistema ?



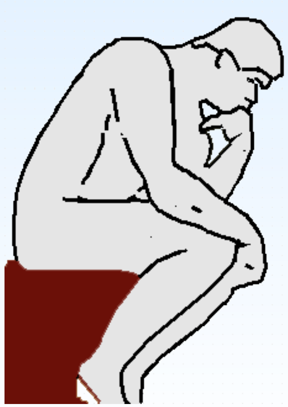
FEG 0651

Afinal, o quê é um sistema dinâmico ?



FEG 0651

E quanto à “dinâmica de sistema” ?



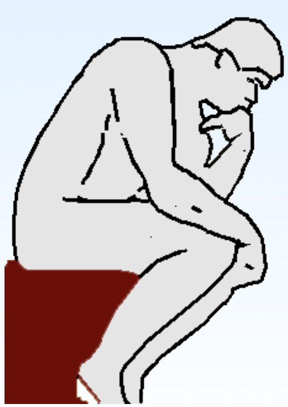
Escola de Extensão

FEAGRI

LIC
Laboratório de Instrumentação e Controle

FEG 0651

Modelagem matemática ?



FEG 0651

Ciclo para modelagem matemática

Escola de Extensão

FEAGRI

LIC
Laboratório de Instrumentação e Controle

HIPÓTESES

Expressar as hipóteses em termos de equações diferenciais

FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

Resolver as equações diferenciais

OBTENÇÃO DAS SOLUÇÕES

Realizar simulações com o modelo

VALIDAÇÃO

Melhorar hipóteses ou aprimorar o modelo

Classificação dos modelos matemáticos

Linear ou não-linear - Estritamente falando, a maioria dos sistemas físicos é não-linear por diversos motivos. Contudo, se a faixa de variação das variáveis do sistema não for muito grande, então o modelo do sistema pode ser linearizado dentro de uma relativamente pequena faixa de variação de suas variáveis. Para os sistemas lineares os princípios da superposição e da homogeneidade se aplicam. Os sistemas para os quais este princípio não se aplica são ditos não-lineares.

▪**Linear** – as variáveis dependentes e suas derivadas são elevadas apenas à primeira potência (não são permitidos produtos de variáveis dependentes).

$$\frac{d}{dt}x(t)=5x(t)$$

▪**Não-linear** – são os sistemas que devem ser descritos por variáveis dependentes ou suas derivadas elevadas a potências de ordem superiores. Sistemas que possuem produtos de variáveis dependentes e/ou de derivadas também são não-lineares.

$$\frac{d}{dt}x(t)=5x^2(t)$$

Classificação dos modelos matemáticos

Invariante no tempo ou variante no tempo - Um modelo matemático invariante no tempo (coeficientes constantes) é aquele cujos parâmetros não variam com o tempo. A resposta dos sistemas descritos por estes modelos é independente do tempo no qual a entrada é aplicada. Um modelo matemático variante no tempo é aquele em que um ou mais de seus parâmetros variam com o tempo. A resposta dos sistemas descritos por estes modelos depende do tempo no qual a entrada é aplicada.

Coeficiente constante – os coeficientes do sistema não são funções da variável independente.

$$\frac{d}{dt}x(t)=5x(t)$$

Coeficiente variável - os coeficientes do sistema são funções da variável independente.

$$\frac{d}{dt}x(t)=(9t+1)x^2(t)+5t$$

Classificação dos modelos matemáticos

Contínuo ou discreto - Modelos contínuos no tempo são aqueles que descrevem sistemas cujas variáveis são funções contínuas no tempo. Os modelos discretos no tempo descrevem sistemas que possuem uma ou mais variáveis que são conhecidas somente em instantes discretos de tempo.

Sistemas contínuos – o comportamento do sistema dinâmico é descrito por uma equação diferencial de primeira ordem.

Sistemas discretos – os eventos acontecem a intervalos de tempo discretos e a equação de equilíbrio é escrita em termos de equações de diferença discretas.

Classificação dos modelos matemáticos

Escola de Extensão

FEAGRI

LIC Laboratório de Instrumentação e Controle

Uma entrada, uma saída ou múltiplas entradas, múltiplas saídas - Um sistema pode ter uma única entrada e uma única saída. Um exemplo é o controle de posição, onde há um comando de entrada (posição desejada) e uma saída controlada (posição de saída). Os modelos que descrevem tais sistemas são chamados de uma entrada, uma saída (SISO: single-input, single-output). Alguns sistemas podem ter múltiplas entradas e múltiplas saídas (MIMO - Multiple input and multiple outputs). Um exemplo é o controle de processo que tem duas entradas (pressão de entrada e temperatura de entrada) e duas saídas (pressão de saída e temperatura de saída).

- **Sistemas SISO** - uma única equação diferencial é usada para descrever a relação entre a quantidade de entrada, u(t), e a quantidade de saída, y(t).

- **Sistemas MIMO** – são descritos por um conjunto de equações diferenciais. Em tais sistemas, as entradas e as saídas são representadas pelos respectivos vetores, u(t) e y(t).

Classificação dos modelos matemáticos

Parâmetros concentrados (Lumped) ou distribuídos - Os sistemas que podem ser descritos por equações diferenciais ordinárias possuem modelos com parâmetros concentrados, enquanto aqueles que podem ser descritos por equações diferenciais parciais possuem modelos com parâmetros distribuídos.

- **Parâmetros concentrados** – o comportamento do sistema dinâmico é descrito por equações diferenciais com o tempo como a variável independente.

$$\frac{d}{dt}x(t)=5x(t)+4t$$

- **Parâmetros distribuídos** – o comportamento do sistema dinâmico é descrito por equações diferenciais parciais com dependência do tempo e do espaço.

$$\frac{\partial}{\partial t}x(z,t)=\frac{\partial^2}{\partial z^2}x(z,t)+2x(z,t)$$

Escola de Extensão

FEAGRI

LIC Laboratório de Instrumentação e Controle

Classificação dos modelos matemáticos

Escola de Extensão

FEAGRI

LIC Laboratório de Instrumentação e Controle

Determinístico ou estocástico - Os sistemas que possuem modelos determinísticos são aqueles que a resposta a uma entrada é previsível e repetível, caso contrário é estocástico.

- **Determinístico** – o sistema é excitado por uma função que pode ser descrita explicitamente (degrau, senóide, etc).

$$\frac{d}{dt}x(t)+5x(t)=g(t)$$

- **Estocástico** – a função de excitação é aleatória e, portanto, requer-se um tratamento probabilístico.

Classificação dos modelos matemáticos

Forçados e não forçados – Os sistemas forçados são aqueles que são estimulados por uma função de excitação.

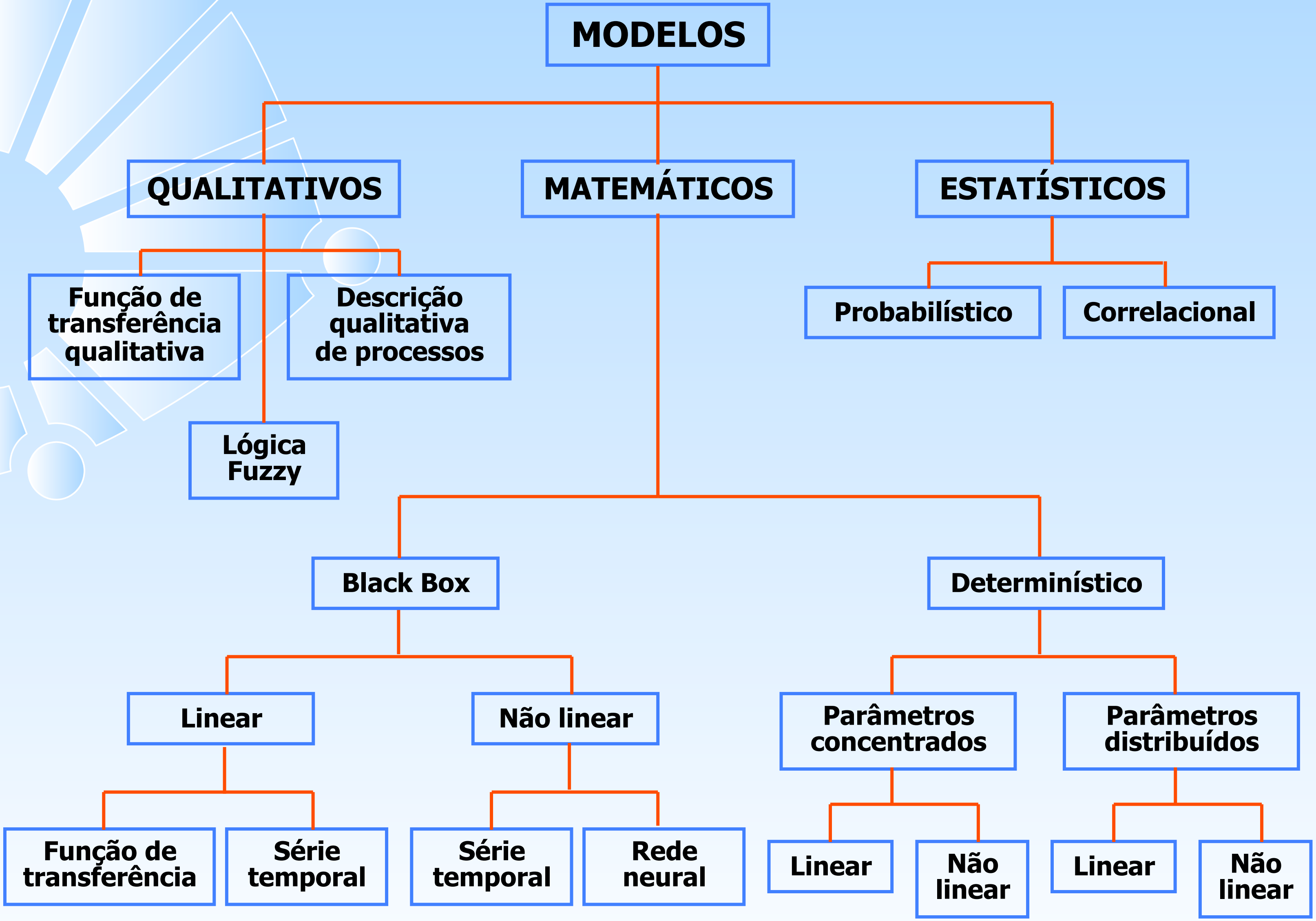
- **Forçado** – são os sistemas que contém termos não-homogêneos, isto é, termos que não contém a variável dependente.

$$\frac{d}{dt}x(t)=5x(t)+4t$$

- **Não forçados** – são os sistemas que são descritos por equações homogêneas, isto é, todos os termos contêm a variável dependente.

$$\frac{d}{dt}x(t)=5x(t)$$

Modelos matemáticos



FEG 0651

Modelos matemáticos

- **MODELOS**
  - **QUALITATIVOS**
    - Função de transferência qualitativa
    - Lógica Fuzzy
    - Descrição qualitativa de processos
  - **MATEMÁTICOS**
    - Black Box
      - Linear
        - Função de transferência
        - Série temporal
      - Não linear
        - Série temporal
        - Rede neural
    - Determinístico
      - Parâmetros concentrados
        - Linear
        - Não linear
      - Parâmetros distribuídos
        - Linear
        - Não linear
  - **ESTATÍSTICOS**
    - Probabilístico
    - Correlacional

Escola de Extensão

FEAGRI

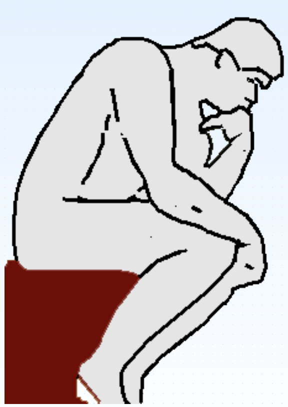
LIC Laboratório de Instrumentação e Controle

Neste curso será dada ênfase aos sistemas determinísticos com os seguintes atributos: linear, coeficiente constante, forçado ou não e com parâmetros concentrados.

Capítulo 2 – Transformada de Laplace

FEG 0651

O que é a Transformada de Laplace e para que serve ?



FEG 0651

Transformada de Laplace

Espaço original

Equação diferencial + condições iniciais

Solução do problema original

Transformada de Laplace

$\mathcal{L}$

Transformada inversa de Laplace

$\mathcal{L}^{-1}$

Espaço da transformada de Laplace

Equação algébrica

Resolução da equação

Solução

Transformada de algumas funções

$f(t)$	$F(s)$
Impulso unitário $\delta(t)$	1
Degrau unitário $1(t)$	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \quad (n=1,2,3,\ldots)$	$\frac{1}{s^n}$
$t^n \quad (n=1,2,3,\ldots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
$t\,e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$

Propriedades da Transformada de Laplace

$$\pounds\left[A\,f(t)\right]=AF(s)$$

$$\pounds\left[f_1(t)\pm f_2(t)\right]=F_1(s)\pm F_2(s)$$

$$\pounds\pm\left[\frac{d}{dt}f(t)\right]=sF(s)-f(0\pm)$$

$$\pounds\pm\left[\frac{\mathrm{d}^2}{dt^2}f(t)\right]=s^2F(s)-sf(0\pm)-\dot{f}(0\pm)$$

$$\pounds\pm\left[\frac{\mathrm{d}^{\mathrm{n}}}{dt^n}f(t)\right]=s^nF(s)-\sum_{k=1}^{n}s^{n-k}\overset{(k-1)}{f}(0\pm)$$

Exercício

Escreva a transformada de Laplace da seguinte equação diferencial:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 2y = 3t^3$$

Escola de Extensão

FEAGRI

LIC Laboratório de Instrumentação e Controle

Exercício

Escreva a transformada de Laplace da seguinte equação diferencial:

$$\frac{dy}{dt} + 2y = 5sen3t$$

Exercício

Utilize o MatLab para escrever a transformada de Laplace do exercício anterior.

Escola de Extensão
FEAGRI
LIC Laboratório de Instrumentação e Controle

Exercício

Utilize o MatLab para escrever a transformada de Laplace da equação diferencial:

$$2\frac{d^3y}{dt^3}+3\frac{dy}{dt}+y+4=0$$

Exercício

Utilize o comando **dsolve** do MatLab para escrever as transformadas de Laplace das equações diferenciais:

$$\frac{dy}{dt}+2y=5sen3t$$

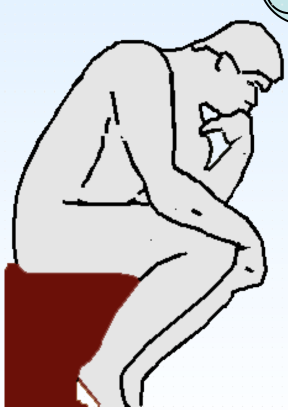
e;

$$10\frac{dy^2}{dt^2}+5\frac{dy}{dt}+3y=1$$

Capítulo 3 – Função de transferência

FEG 0651

O que é uma Função de Transferência e para que serve?



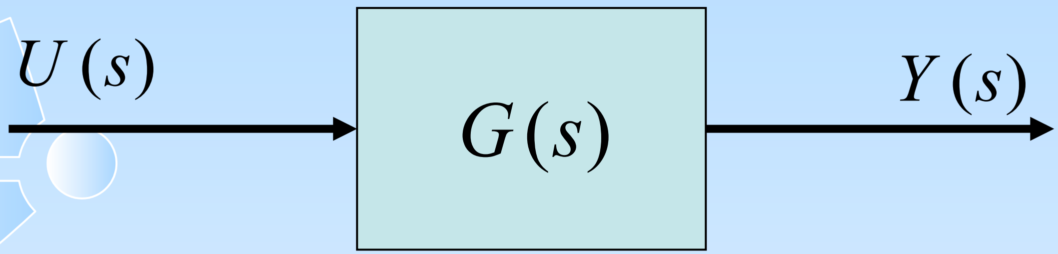
Escola de Extensão

FEAGRI

LIC Laboratório de Instrumentação e Controle

FEG 0651

Função de Transferência



$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}$$

Função de Transferência

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0\, y(t) = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} +$$

$$+ b_{m-1} \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \ldots + b_1 \frac{d\,u(t)}{dt} + b_0\, u(t)$$

Transformada de Laplace

$$\mathcal{L}$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

$$n > m$$

Escola de Extensão

FEAGRI

LIC Laboratório de Instrumentação e Controle

FEG 0651

Escola de Extensão

FEAGRI

LIC Laboratório de Instrumentação e Controle

Exercício

Utilize o MatLab para escrever a equação diferencial abaixo na forma de Funções de Transferência.

$$10\frac{d^2y(t)}{dt^2}+5\frac{dy(t)}{dt}+3y(t)=2\frac{du(t)}{dt}+5u(t)$$

Capítulo 4 – Modelagem de Sistemas Mecânicos

FEG 0651

Sistema: translacional mecânico

Procedimento:

1 – Definição de um sistema de coordenadas conveniente para a descrição do movimento do corpo.

2 – Determinação das forças que atuam no corpo.

3 – Confecção de um Diagrama de Corpo Livre.

4 – Escrever as Equações do Movimento.

Sistema: translacional mecânico

A base para a obtenção de um modelo matemático, ou a equação do movimento, de qualquer sistema mecânico é a segunda Lei de Newton.

$$\sum F = m \cdot \vec{a}$$

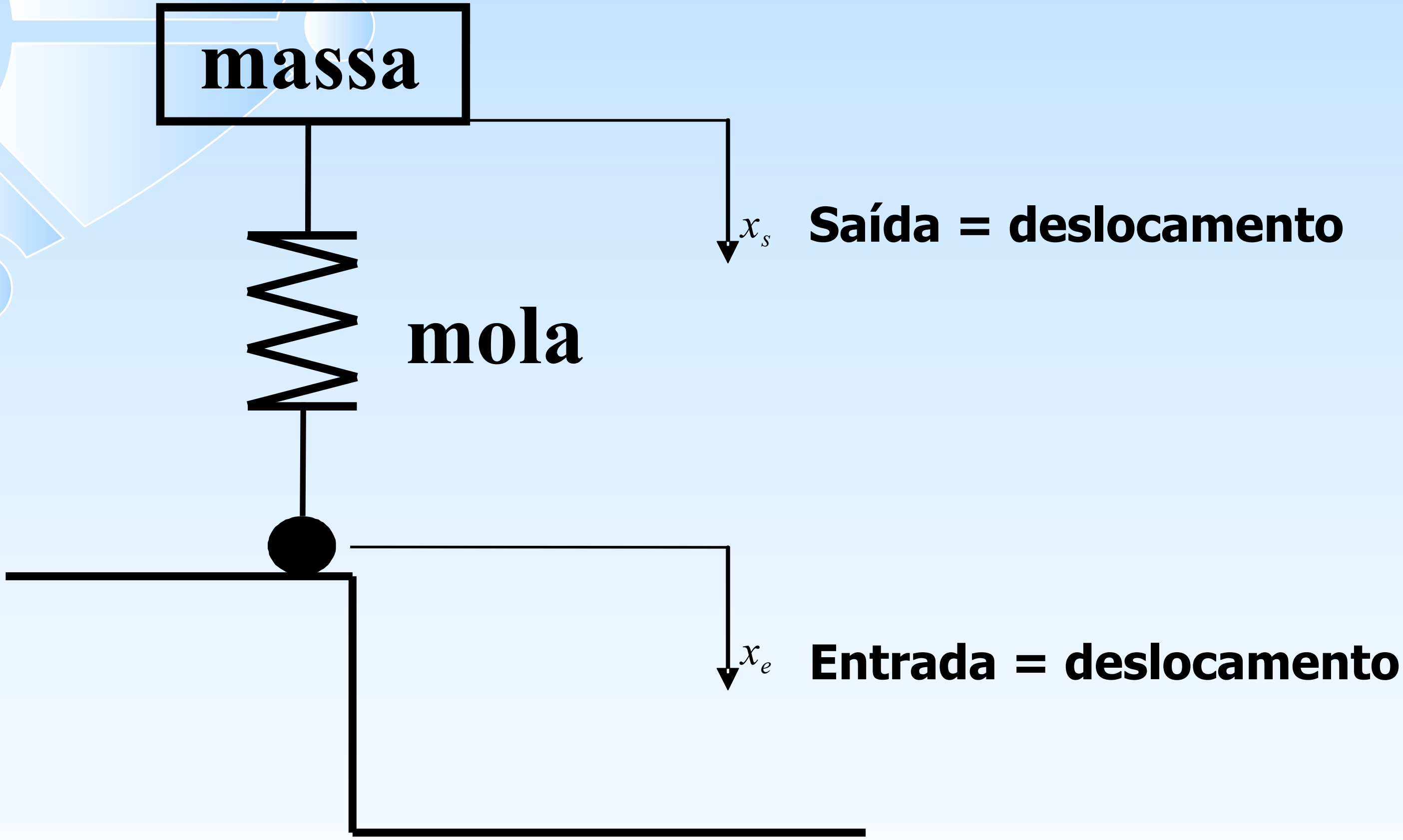
ΣF = Soma vetorial de todas as forças aplicadas ao corpo [N].

a = Vetor aceleração de cada corpo em relação a um referencial inercial [m/s].

m = massa do corpo [kg].

Exercício

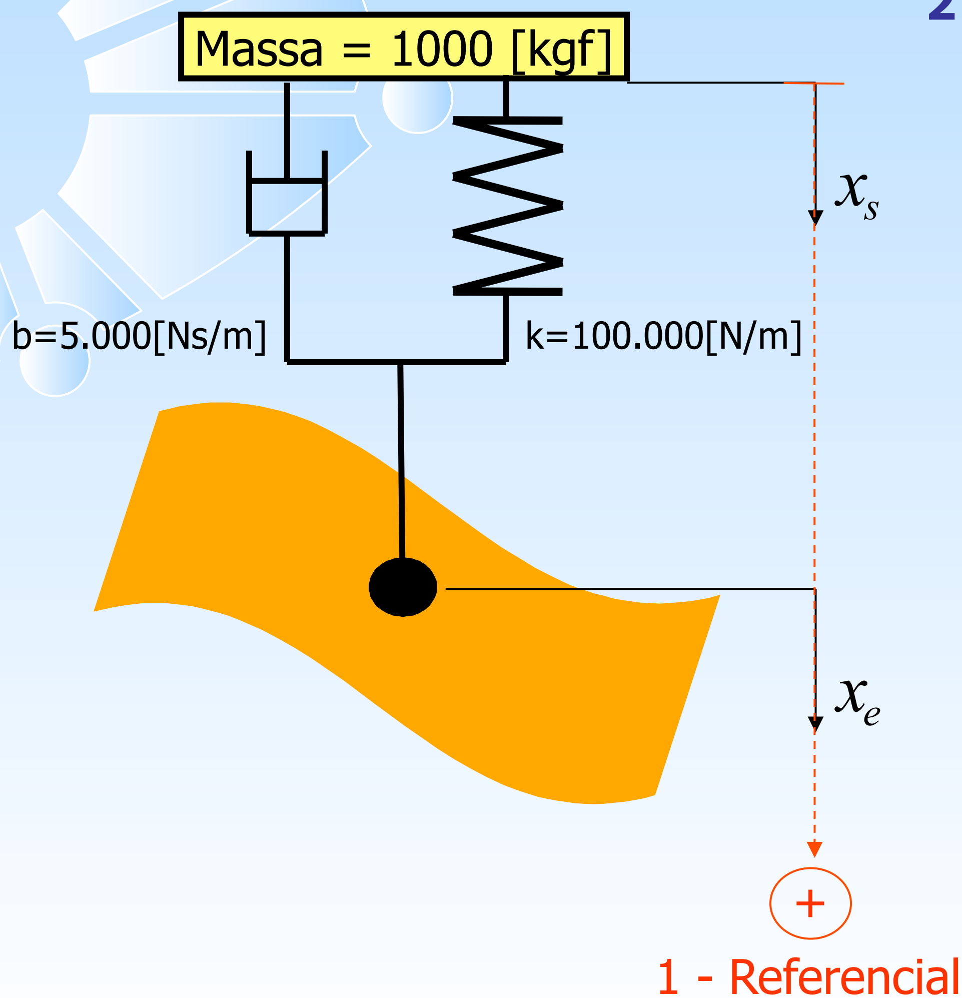
Analise o comportamento do sistema, admitindo-se que a constante da mola seja 100.000 [N/m] e a massa seja de 1.000 [kg], quando a partir de uma condição de equilíbrio, seja excitado com um degrau de deslocamento de 1 [m]. Utilize o MatLab.



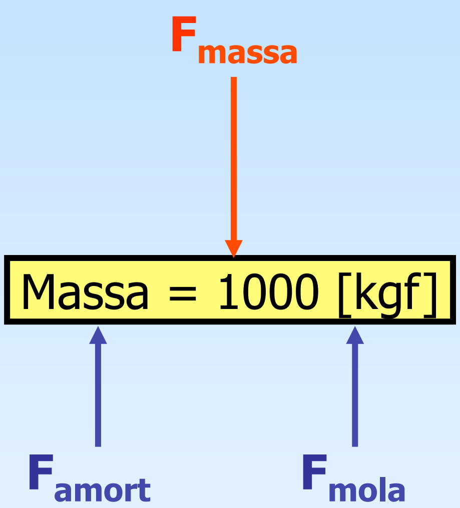
Sistema: translacional mecânico

Exercício

Escreva a Função de Transferência do sistema abaixo e simule a resposta para um degrau de 1 [m] em x_e.



2 - Diagrama de Corpo Livre



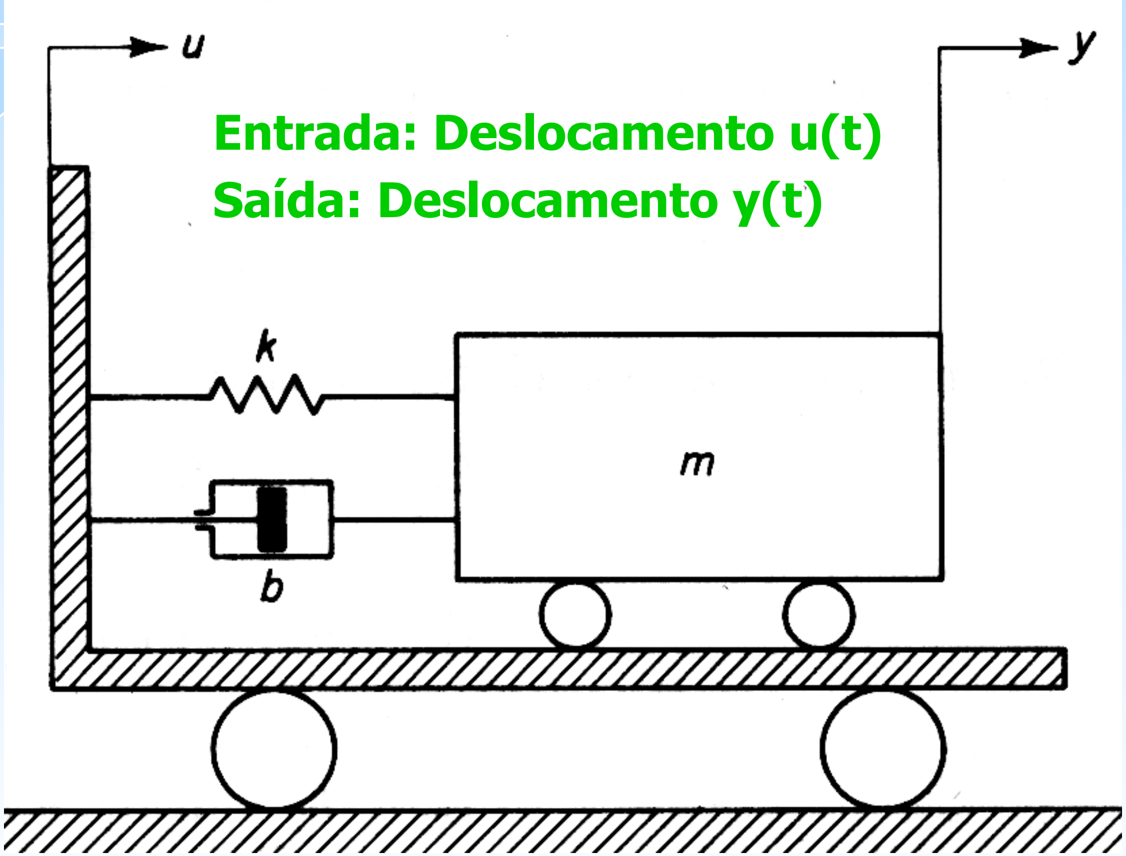
3 – Equilíbrio das forças

$$\sum F_x = 0$$

Sistema: translacional mecânico

Exercício

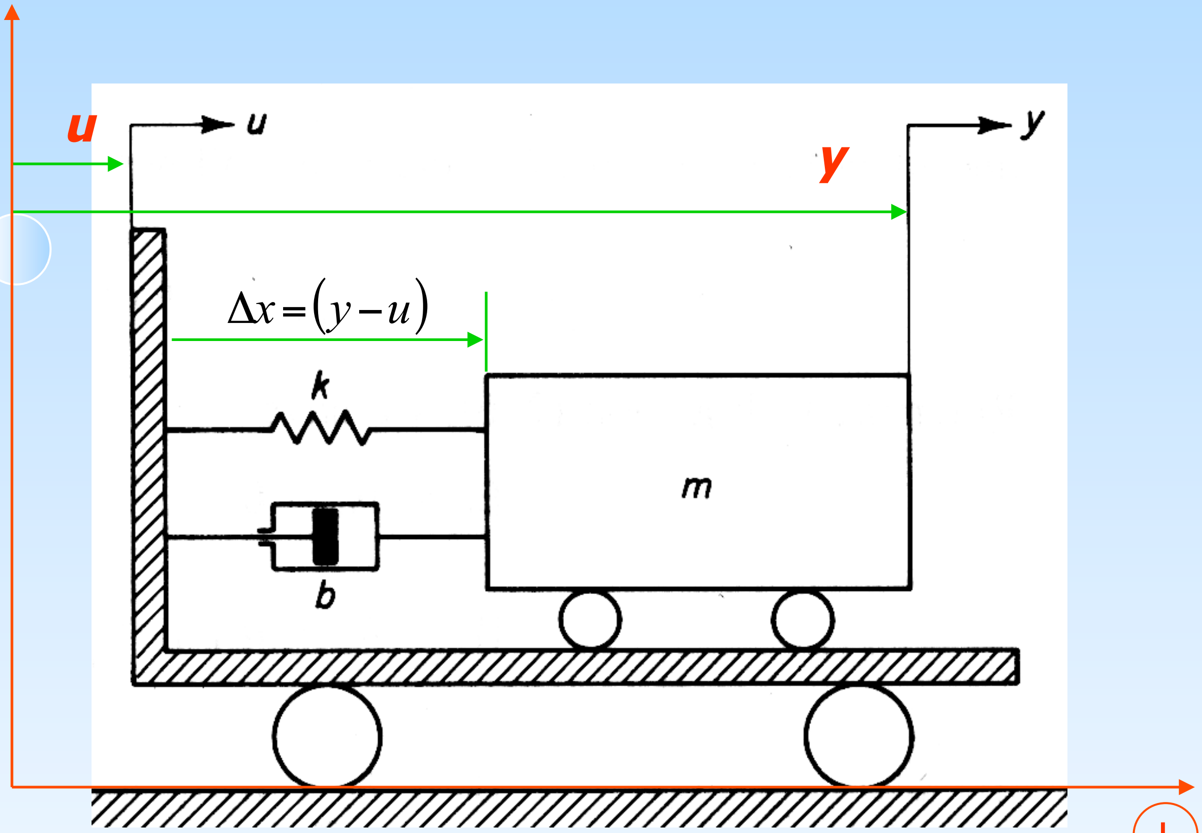
Modele o sistema e simule seu comportamento, face a uma excitação do tipo degrau unitário, sabendo-se que: m=1000[kg], b=500[N.s/m] e k=300[N/m].



Sistema: translacional mecânico

Resolução

1 – Adotar um referencial inercial.



2 – Diagrama de corpo livre

$$F_m = k.\Delta x$$

$$F_a = b.\Delta \dot{x}$$

massa

$$F_i = m.\ddot{y}$$

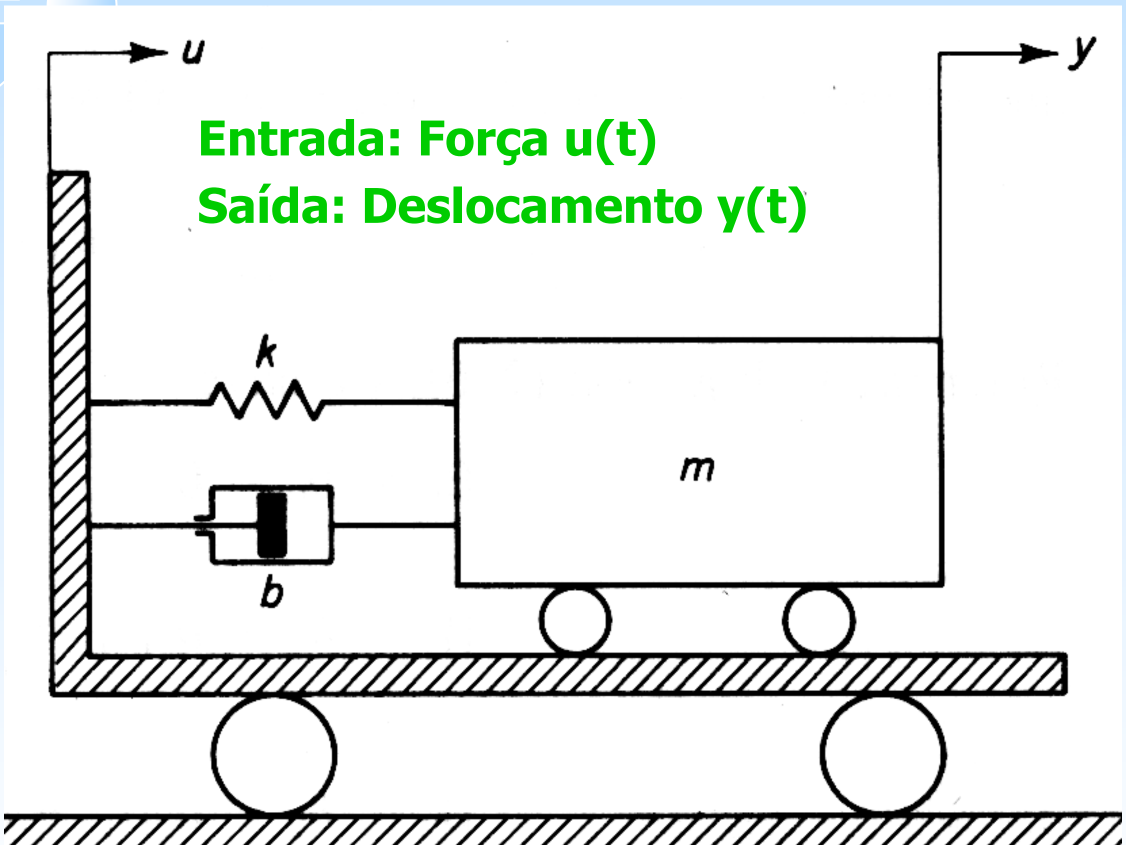
3 – Equilíbrio de forças

$$\sum F = 0$$

Sistema: translacional mecânico

Exercício

Modele o sistema e simule seu comportamento, face a uma excitação do tipo degrau unitário, sabendo-se que: m=500[kg], b=20[N.s/m] e k=2[N/m].



Escola de Extensão

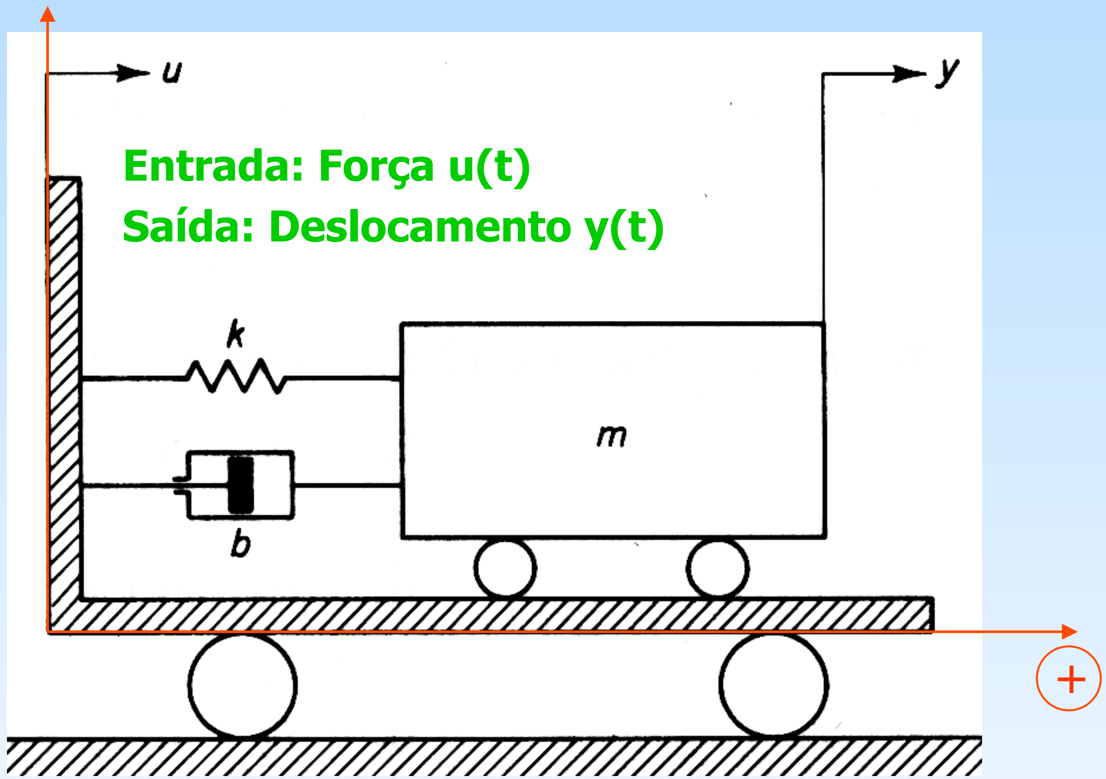
FEAGRI

LIC Laboratório de Instrumentação e Controle

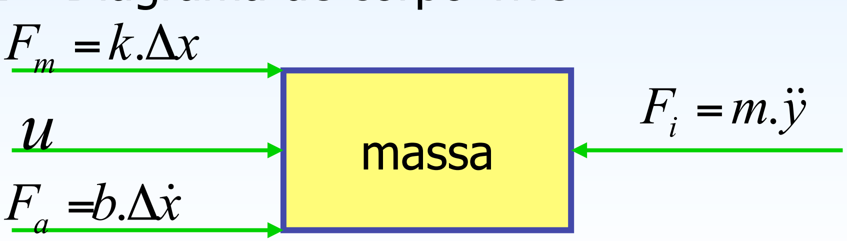
Sistema: translacional mecânico

Resolução

1 – Adotar um referencial inercial.



2 – Diagrama de corpo livre



3 – Equilíbrio de forças

$$\sum F = 0$$

Escola de Extensão

FEAGRI

LIC Laboratório de Instrumentação e Controle

FEG 0651

Sistema: rotacional mecânico

$$J\alpha = \sum T$$

T = Momento torcional externo aplicado ao sistema [N.m].

α = Aceleração angular da carga [rad/s^2].

J = Momento de inércia da carga [N.m^2].

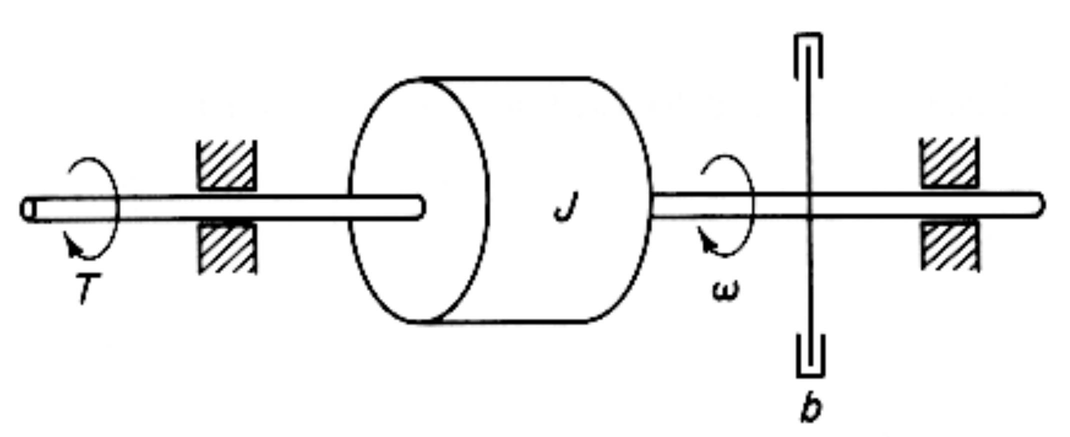
Sistema: rotacional mecânico

Exercício

Modele o sistema, simule e analise seu comportamento, face a uma excitação do tipo degrau unitário.

Dados: - Entrada: Torque [Nm]

- Saída: Velocidade angular [rad/s]
- Momento de inércia da carga = 10 [kg.m^2]
- Amortecimento viscoso = 2 [Nm/rad/s]



Perguntas suplementares:

1- Para um degrau de 10 [Nm], quanto será o aumento da velocidade angular? Por quê?

2 – No caso anterior, quanto tempo leva para estabilizar? Por quê?

3 – Dobrando-se o momento de inércia da carga, quanto tempo leva para estabizar? Por quê?

Escola de Extensão

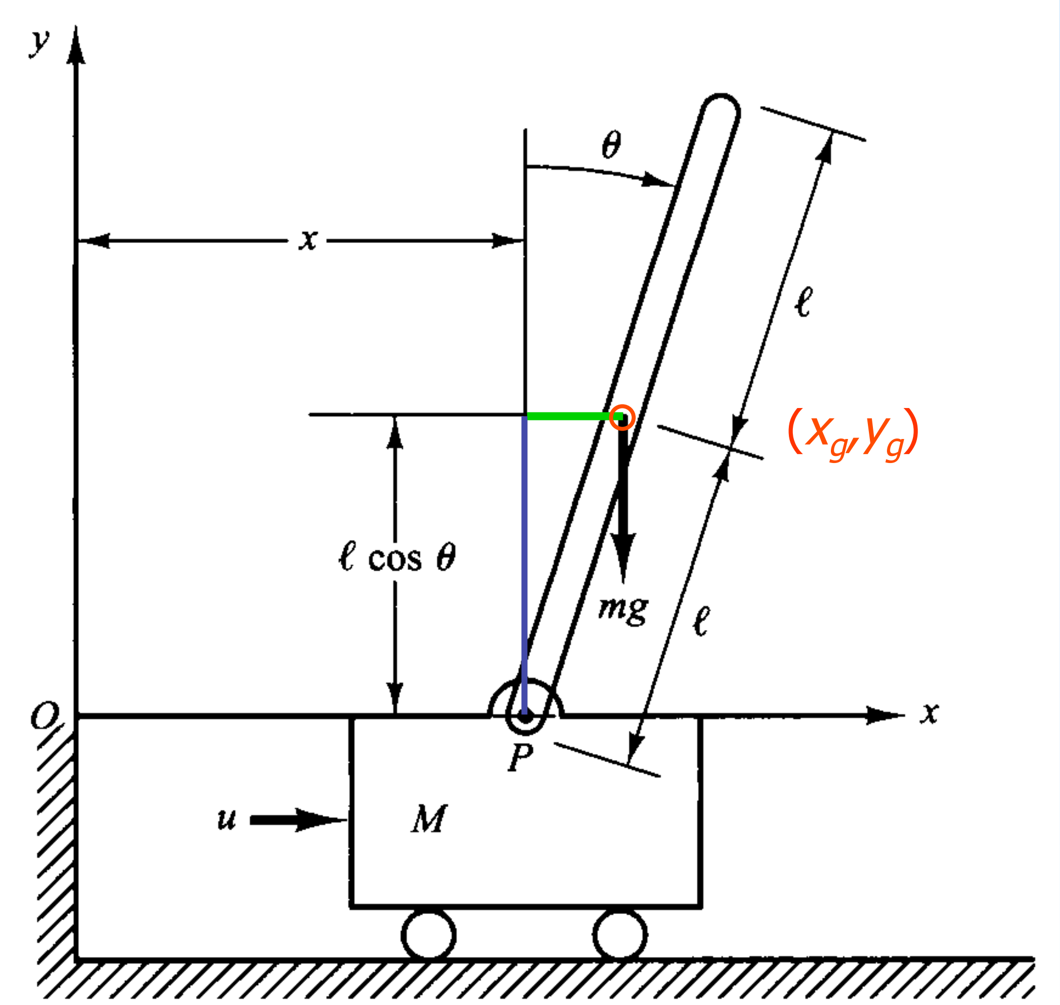
FEAGRI

LIC Laboratório de Instrumentação e Controle

Sistema: translacional + rotacional

Exercício

Obtenha um modelo matemático para o pêndulo invertido da figura abaixo que relacione a posição x com o ângulo θ.



Escola de Extensão
FEAGRI
LIC Laboratório de Instrumentação e Controle