

UNICAMP
Universidade Estadual de Campinas

Especialização em Automação e Controle de
Processos Industriais e Agroindustriais

FEG.0652
Análise e Projeto de Sistemas de Controle

Paulo Eduardo Silveira
MAR/2018

SUMÁRIO

| | |
|---|------|
| 1. Introdução | 1.4 |
| 2. Características de Sistemas de Controle | 2.5 |
| 2.1. Terminologia | 2.5 |
| 2.2. Representação | 2.5 |
| 2.3. Sistemas de Malha Aberta e de Malha Fechada | 2.6 |
| 2.3.1. Sistema de malha aberta | 2.6 |
| 2.3.2. Sistemas de malha fechada | 2.6 |
| 2.3.3. Efeitos da realimentação | 2.8 |
| 2.4. Exemplo – Motor de Corrente Contínua | 2.9 |
| 2.5. Exercício – Sistema de Controle do Nível de um Reservatório: | 2.16 |
| 2.6. Estabilidade Absoluta | 2.20 |
| 2.6.1. Critério de Estabilidade de Routh | 2.21 |
| 2.7. Erro em regime permanente | 2.24 |
| 2.7.1. Erro para entradas de posição (degrau): | 2.25 |
| 2.7.1.1. Sistemas tipo 0: | 2.26 |
| 2.7.1.2. Sistemas tipo 1: | 2.26 |
| 2.7.2. Erro para entrada de velocidade (rampa): | 2.27 |
| 2.7.2.1. Sistemas tipo 0: | 2.27 |
| 2.7.2.2. Sistemas tipo 1: | 2.27 |
| 2.7.2.3. Sistemas tipo 2 ou superior: | 2.27 |
| 3. Análise e Projeto pelo Lugar Geométrico das Raízes | 3.31 |
| 3.1. Introdução | 3.31 |
| 3.2. Construção do Lugar Geométrico das Raízes | 3.31 |
| 3.2.2. Características gerais do LGR | 3.32 |
| 3.2.3. Traçado do LGR utilizando o Matlab | 3.33 |
| 3.2.4. Análise do LGR | 3.34 |
| 3.2.5. Dominância de pólos | 3.35 |
| 3.2.6. Determinando o ganho K (escolhendo um ponto no LGR) | 3.37 |
| 3.2.7. Projeto pelo LGR | 3.37 |
| 4. Análise e Projeto pela Resposta em Freqüência | 4.42 |
| 4.1. Diagramas de Bode | 4.43 |
| 4.2. Diagrama de Nyquist | 4.47 |
| 4.2.1. Análise de Estabilidade Relativa | 4.47 |
| 4.3. Projeto pela Resposta em Freqüência | 4.51 |
| 4.3.1. Compensador por avanço de fase | 4.51 |

| | | |
|--------|---|------|
| 4.3.2. | Compensador por atraso de fase..... | 4.53 |
| 5 . | Projeto e Sintonia de Controladores | 4.55 |
| 5.1. | Controladores de três termos | 4.55 |
| 5.1.1. | Ação Proporcional | 4.57 |
| 5.1.2. | Ação Integral | 4.57 |
| 5.1.3. | Ação Derivativa | 4.58 |
| 5.2. | Controladores P, PI, PD e PID | 4.59 |
| 5.3. | Métodos de Sintonia de Controladores de Três Termos | 4.61 |
| 6 . | Sistemas de Controle Discretos | 4.68 |
| 6.1. | Classificação e representação de sinais | 4.68 |
| 6.2. | Representação de Sistemas em Tempo Discreto | 4.72 |
| 6.3. | Função de Transferência Pulsada | 4.72 |
| 6.4. | Estabilidade de Sistemas Amostrados | 4.78 |
| 6.5. | Resposta Transiente de Pólos Simples | 4.81 |
| 6.6. | Erro em Regime Permanente | 4.82 |
| 6.7. | Projeto de Compensadores Digitais | 4.83 |

1. Introdução

Sistemas de Controle é uma área da engenharia que procura desenvolver e aplicar dispositivos e tecnologias para “controlar” sistemas cujos comportamentos são muitas vezes poucos conhecidos. Por “controlar” entende-se atuar sobre um sistema tal que o mesmo produza uma resposta adequada ou apresente um comportamento próximo das especificações desejadas.

Para isto é recomendável que os sistemas a controlar, as plantas, tenham seu comportamento dinâmico conhecido e preferencialmente se disponha de um conjunto de equações matemáticas que representem seu comportamento, o modelo matemático.

Sabe-se, entretanto, estes modelos são aproximações do sistema real cujos parâmetros incluem grandes incertezas. O desafio do engenheiro de controle é atender as especificações de desempenho do sistema completo mesmo nestas situações de incerteza.

Uma das discussões mais pertinentes do ensino deste assunto refere-se ao problema chamado “*Theory/Practice Gap*”, ou o “buraco” entre a teoria e a prática.

Com o advento dos softwares CACSD – “Computer-Aided Control Systems Design” como o Matlab®, este *gap* foi reduzido e é largamente utilizado desde os cursos introdutórios de controle até aplicações profissionais avançadas de projeto e análise de sistemas de controle.

O objetivo geral desta disciplina é apresentar as principais características de sistemas de controle e aplicar métodos de projeto e análise de desempenho de controladores de processos industriais, à luz da teoria de controle clássico. São utilizadas ferramentas de simulação computacional com a finalidade de reduzir o esforço matemático necessário ao entendimento do assunto e realização de experimentos físicos de forma a reduzir o “buraco” entre a teoria e a aplicação prática.

Outras tecnologias de controle foram desenvolvidas buscando melhores desempenhos. Dentre elas podem ser citadas a Lógica *Fuzzy*, Redes Neurais e os Algoritmos Genéticos. Diversos autores afirmam que estas tecnologias não são “*model based*”, ou seja, não é fundamental a existência ou o conhecimento de um modelo matemático para aplicar estes métodos. Por outro lado, reconhecem que “saber” como o sistema se comporta facilita no processo de sintonia dos controladores. Estes tópicos não serão contemplados neste texto.

Este texto está dividido nos seguintes tópicos:

- Características de sistemas de controle – neste tópico são abordadas as características de sistemas como realimentação, estabilidade, especificações de regime permanente e perturbações.
- Análise e Projeto pelo Lugar Geométrico das Raízes (LGR) – é abordada a relação entre a localização dos polos de malha fechada e resposta transiente, o conceito de LGR e o projeto de compensadores por esta técnica.
- Análise e Projeto por Resposta em Frequência – é apresentado o conceito de resposta em frequência, os diagramas de Bode e de Nyquist, os conceitos de estabilidade relativa e projetos de compensadores por resposta em frequência.
- Projeto e Sintonia de Controladores Industriais – são apresentadas as características básicas das ações de controladores industriais de três termos (PID), seus usos, aplicações e procedimentos de sintonia.
- Sistemas de Controle Discretos – são apresentados alguns métodos de discretização e implementação de controladores “digitais”.

Todo o conteúdo apresentado é baseado na teoria clássica de Sistemas de Controle: Sistemas Lineares Invariantes no Tempo, Função de Transferência, Lugar Geométrico da Raízes e Resposta em Frequência.

2. Características de Sistemas de Controle

2.1. Terminologia

Será adotada neste texto a terminologia empregada por OGATA, 2003 no livro *Sistemas de Controle Modernos*, onde são definidos os seguintes termos:

Sistema a controlar ou planta: qualquer objeto ou sistema físico do qual se pretende controlar alguma grandeza física, por exemplo: a temperatura de um forno, a velocidade de um motor, o torque aplicado a uma carga mecânica ou o nível de um reservatório.

Variável controlada: é a grandeza física de interesse do processo a controlar (Ex. temperatura, velocidade, posição, posição angular, torque, nível).

Atuador: elemento que “atua” sobre a planta, modificando o sinal proveniente do controlador de forma a provocar uma mudança no valor da variável controlada. Por exemplo: um inversor em um motor de corrente alternada, um variador de potência aplicada a um forno ou uma válvula proporcional de controle de vazão.

Variável manipulada: é a variável proveniente do atuador e aplicada à planta. Por exemplo: a tensão em um motor DC ou a vazão de fluido em um reservatório.

Processos: são muitas as definições encontradas para processos. Neste texto processo será toda a operação a ser controlada, por exemplo, um processo químico de controle de pH compreende a planta (reator), uma bomba de solução ácida ou básica (atuador) e um sensor de pH (sensor).

Distúrbios: toda ação indesejada que cause alteração involuntária na variável controlada. Geralmente os distúrbios são de origem externa e se comportam como uma entrada no sistema.

2.2. Representação

A forma usual de representação de sistemas de controle é através dos diagramas de blocos onde os sistemas físicos e as operações matemáticas são representados por blocos funcionais denominados simplesmente de blocos.

Os sinais e variáveis são representados através de setas e indicam o sentido do sinal, como mostrado na Figura 2.1.

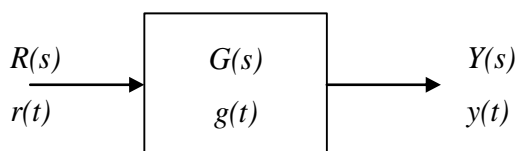


Figura 2.1 – Representação por diagrama de blocos

A saída $y(t)$, matematicamente, é obtida pela convolução entre a função que representa o sistema $g(t)$ e a função do sinal de entrada $r(t)$. Por definição:

$$y(t) = g(t) * r(t) = \int_0^t g(\tau) \cdot r(t - \tau) \cdot d\tau = \int_0^t g(t - \tau) \cdot r(\tau) \cdot d\tau$$

Aplicando Transformadas de Laplace:

$$Y(s) = L\{y(t)\} = \{g(t) * r(t)\} = G(s) \cdot R(s)$$

Este é um resultado importante pois a convolução no domínio do tempo é uma operação de multiplicação no domínio da frequência.

Nos diagramas de blocos não é considerado o efeito de carga entre os sistemas. Na Figura 2.2 é mostrado o efeito de carga no acoplamento de dois circuitos elétricos.

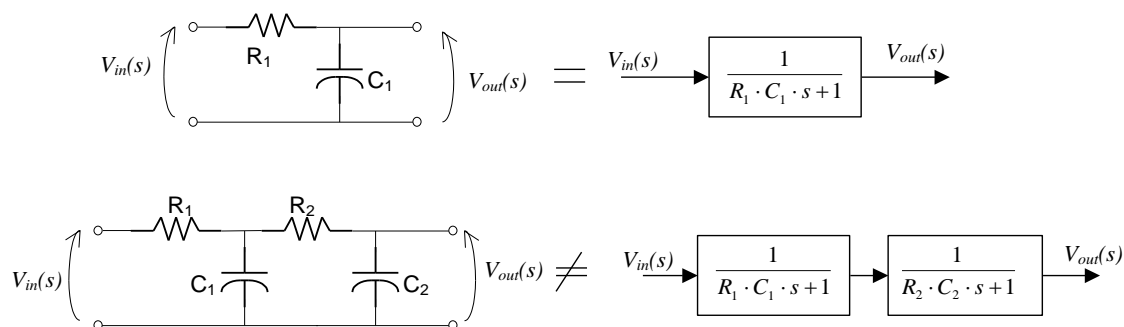


Figura 2.2 – Efeito de carga

2.3. Sistemas de Malha Aberta e de Malha Fechada

2.3.1. Sistema de malha aberta

Os sistemas de controle de malha aberta fazem uso de um dispositivo de atuação para controlar diretamente o processo sem usar qualquer mecanismo de retroação, também chamado de realimentação, com na Figura 2.3.

Na ocorrência de uma perturbação ou qualquer desvio que precise de correção visando atingir o valor desejado, será necessária a ação do operador.

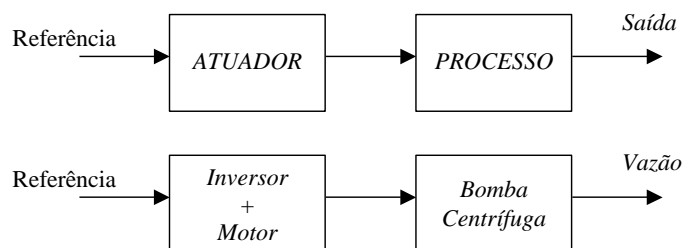


Figura 2.3 – Sistema em malha aberta

2.3.2. Sistemas de malha fechada

Os sistemas de malha fechada utilizam a medida da variável de saída (controlada) para tomar atitudes de correção através do atuador, buscando atingir o valor desejado (referência). Esta operação é realizada de forma automática sem necessidade de interferência do operador (Figura 2.4).

O controlador deve ser projetado e ajustado (sintonizado) para atender as especificações de desempenho solicitadas na definição do projeto do sistema de controle.

Dentre as especificações de desempenho, geralmente as mais utilizadas, são os requisitos:

- Resposta transitória – em muitos casos se referem à entrada de posição (*set point* ou estática) e são especificados: o tempo de subida, tempo de estabelecimento, sobre sinal máximo permitido;
- Regime permanente – define o erro em regime permanente aceitável para determinado tipo de entrada e,
- Rejeição de perturbação – define o tempo para que seja eliminado, ou reduzido, o efeito causado pela perturbação.

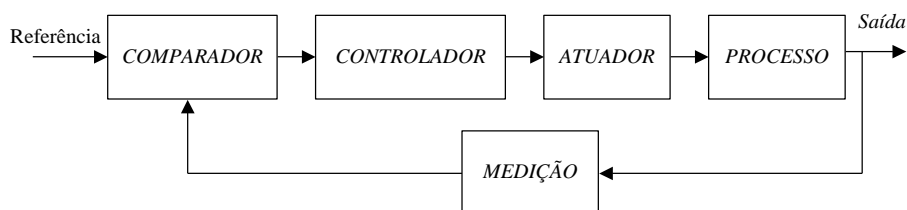


Figura 2.4 – Sistema em malha fechada

A resposta de um sistema uma entrada desejada (*set point*, por exemplo) é chamado de problema servo e a resposta a uma entrada de perturbação é chamado de problema regulador.

Ainda analisando as figuras 2.3 e 2.4 nota-se que o sistema em malha fechada é mais complexo e seu custo será maior devido aos elementos adicionados, neste caso o elemento de medição e controlador.

Um diagrama de blocos simplificado e que representa um sistema a malha fechada com realimentação negativa, sem perda de generalidade, é o mostrado na Figura 2.5.

A função de transferência $G(s)$ é chamada de ramo direto e representa os blocos: controlador, atuador e processo. Recebe o sinal de erro $E(s)$ e produz o sinal de saída $Y(s)$.

A função de transferência $H(s)$ é chamada de elo de realimentação e representa o sistema de medição, composto pelo sensor, filtros e condicionadores de sinais. Recebe o sinal de saída $Y(s)$ e produz o sinal de realimentação $B(s)$.

O bloco somador representa o comparador e efetua a diferença entre o sinal de referência $R(s)$ e o realimentação $B(s)$, produzindo o sinal de erro atuante, ou simplesmente erro, $E(s)$.

A função de transferência de malha aberta (FTMA) do sistema é definida por:

$$F.T.M.A. = \frac{B(s)}{R(s)} = G(s) \cdot H(s)$$

Analisando o diagrama de blocos, pode-se determinar a função de transferência em malha fechada (FTMF):

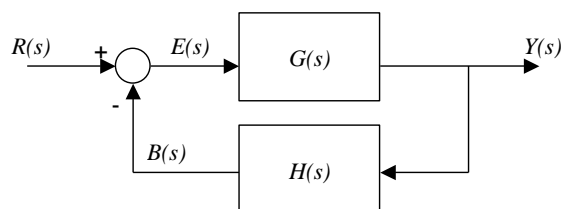


Figura 2.5 – Sistema de controle em malha fechada com realimentação negativa

$$\begin{aligned}
 Y(s) &= G(s) \cdot E(s) \\
 E(s) &= R(s) - B(s) \\
 B(s) &= H(s) \cdot Y(s) \\
 \Rightarrow E(s) &= R(s) - H(s) \cdot Y(s) \\
 \Rightarrow Y(s) &= G(s) \cdot (R(s) - H(s) \cdot Y(s)) = G(s) \cdot R(s) - G(s) \cdot H(s) \cdot Y(s) \\
 \Rightarrow Y(s) \cdot (1 + G(s) \cdot H(s)) &= G(s) \cdot R(s)
 \end{aligned}$$

E finalmente a FTMF será:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s) \cdot H(s)}$$

A equação anterior significa que todo o diagrama de blocos da FIGURA 2.5 pode ser substituído por um único bloco contendo a FTMF.

2.3.3. Efeitos da realimentação

Sensibilidade à variação dos parâmetros

Quando um sistema físico modelado matematicamente, por exemplo, por uma função de transferência, inclui inexatidão nos parâmetros e alguns parâmetros ou seus efeitos são até desprezados.

Além disso, todo sistema físico está sujeito a ter suas características alteradas por questões ambientais, de envelhecimento ou mesmo pelas condições de manutenção do sistema.

A sensibilidade de um sistema a variação dos parâmetros refere-se à mudança no comportamento do mesmo quando seus parâmetros têm seus valores alterados e esta é uma das principais vantagens de um sistema de malha fechada sobre um sistema de malha aberta.

A sensibilidade de um sistema $T(s)$ em relação a um parâmetro K qualquer é definida por:

$$S_K^T = \frac{\partial T / T}{\partial K / K} = \frac{\partial T}{\partial K} \cdot \frac{K}{T} \approx \frac{\Delta T / T}{\Delta K / K} = \frac{\Delta T}{\Delta K} \cdot \frac{K}{T}$$

A sensibilidade S deve ser minimizada para que variações no parâmetro K não causem alterações significativas no sistema $T(s)$.

Resposta Transitória

A resposta transiente de um sistema de malha fechada pode ser ajustada através dos parâmetros do controlador enquanto que em um sistema de malha aberta esta característica não apresenta grande flexibilidade de alteração.

Nos sistemas de malha aberta, o atuador permite o ajuste de algumas características da resposta transiente, mas a carga é, muitas vezes, a principal responsável pelo comportamento transitório.

Entradas de Perturbação

A entrada de perturbação (distúrbio) é uma entrada que afeta a grandeza de saída de forma indesejável e, portanto, deve ser rejeitada ou ter seu efeito reduzido a níveis aceitáveis.

Uma perturbação em um sistema de malha aberta afeta o valor da variável controlada e não ocorre nenhuma atitude do sistema de forma a corrigir esta alteração.

Já os sistemas de controle de malha fechada esta alteração da variável controlada é detectada pelo elemento de medição e o atuador, comandado pelo controlador, toma uma atitude na planta de forma a corrigir a alteração.

Desta forma, espera-se uma melhor rejeição de perturbações em sistemas de malha fechada comparado ao de malha aberta.

2.4. Exemplo – Motor de Corrente Contínua

Como exemplo para verificar estes efeitos será escolhido um sistema de controle simples de velocidade de um motor de corrente contínua de ímã permanente, como da Figura 2.6.

Os dados do motor foram obtidos em www.sem.co.uk para o motor MT30M4-38, exceto o coeficiente de atrito viscoso, B , que foi estimado.

Parâmetros do motor:

- Momento polar de inércia $J = 17 \text{ kg cm}^2 = 0,0017 \text{ kg m}^2$
- Coeficiente de atrito viscoso $B = 0,0009 \text{ Nms/rad}$
- Coeficiente de atrito seco $F = 0,15 \text{ Nm (máx)}$
- Constante de torque $K_t = 0,35 \text{ Nm/A}$
- Constante de força contra eletromotriz $K_e = 0,35 \text{ Vs/rad}$
- Indutância de armadura $L_A = 6,5 \text{ mH}$
- Resistência de armadura $R_A = 0,85 \text{ }\Omega$, exceto as escovas
- Taco gerador $K_{TACO} = 7 \text{ V/Krpm} = 0,0668 \text{ V/Rad/s} = 0,0668 \text{ Vs/rad}$

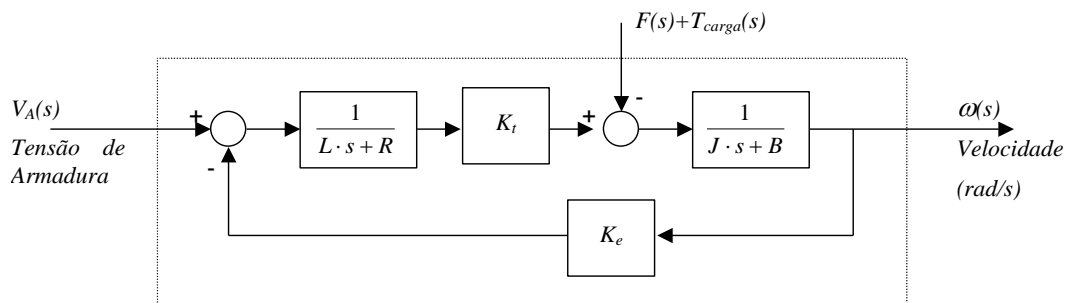


Figura 2.6 – Motor de corrente contínua a ímã permanente

A função de transferência que relaciona a velocidade $\omega(s)$ com a tensão de armadura é:

$$\frac{\omega(s)}{V_A(s)} = \frac{K_t}{(L \cdot s + R) \cdot (J \cdot s + B) + K_e \cdot K_t}$$

Analogamente a função de transferência que relaciona a velocidade $\omega(s)$ com o torque solicitado pela carga $T_{carga}(s)$ é:

$$\frac{\omega(s)}{T_{carga}(s)} = -\frac{L \cdot s + R}{(L \cdot s + R) \cdot (J \cdot s + B) + K_e \cdot K_t}$$

Assim a velocidade pode ser obtida pela soma das duas contribuições:

$$\omega(s) = \frac{1}{(L \cdot s + R) \cdot (J \cdot s + B) + K_e \cdot K_t} (K_t \cdot V_A(s) - (L \cdot s + R) \cdot T_{carga}(s))$$

Substituindo os valores dos parâmetros e considerando que a resistência de contato das escovas é de $0,15 \text{ }\Omega$ será utilizado $R_A = 1,0 \text{ }\Omega$, a equação para a velocidade angular será:

$$\omega(s) = \frac{1}{1.105e-005 \cdot s^2 + 0.001706 \cdot s + 0.1234} (0.35 \cdot V_A(s) - (6.5e-3 \cdot s + 1) \cdot T_{carga}(s))$$

Os comandos do Quadro 1 podem ser utilizados no Matlab na simulação do motor quando submetido a uma entrada degrau de 10V.

Quadro 1 – Simulação do Motor DC

Roteiro Matlab para montar a função de transferência do Motor de Corrente Contínua

Entrada dos parâmetros

```
R=1 % Incluindo a resistência das escovas
L=6.5e-3
J=.0017
B=.0009
ke=.35
kt=.35
F=.15
```

Montando a Função de transferência

Parcela da Tensão de Armadura

```
den_motor=conv([L R], [J B])+[0 0 ke*kt]
num_motor=kt
ft_tensao=tf(num_motor, den_motor)
```

Retorna:

```
Transfer function:
      0.35
-----
1.105e-005 s^2 + 0.001706 s + 0.1234
```

Parcela do torque de carga

```
ft_carga=tf([L R], den_motor)
```

Transfer function:

```
      0.0065 s + 1
-----
1.105e-005 s^2 + 0.001706 s + 0.1234
```

Determinando a resposta completa

Resposta parcial devido a tensão de armadura

```
t=0:.001:12; % definindo o vetor tempo
ytensao=step(10*ft_tensao,t);
plot(t,ytensao)
```

Resposta parcial devido ao torque

```
ycarga=step(-.15*ft_carga,t);
plot(t,ycarga)
```

Resposta completa

```
ytotal=ytensao+ycarga;
```

Montando o gráfico da resposta completa

```
plot(t,ytotal,'k--')
hold
```

Retorna: Current plot held

```
plot(t,ycarga,'k--')
plot(t,ytotal,'r')
grid
```

Determinando os valores característicos

```
[tfinal,z]=size(ytotal) % determinando o final do vetor
ytotal_ss=ytotal(tfinal) % valor de regime permanente
```

Retorna: ytotal_ss = 27.1295

```
ytotal_pico=max(ytotal) %determinando o maior valor de ytotal
```

```
overshoot= (ytotal_pico- ytotal_ss)/ ytotal_ss*100 %cálculo do sobre sinal
```

A resposta a um degrau de 10V para o sistema em malha aberta, considerando somente o efeito da tensão de armadura, é:

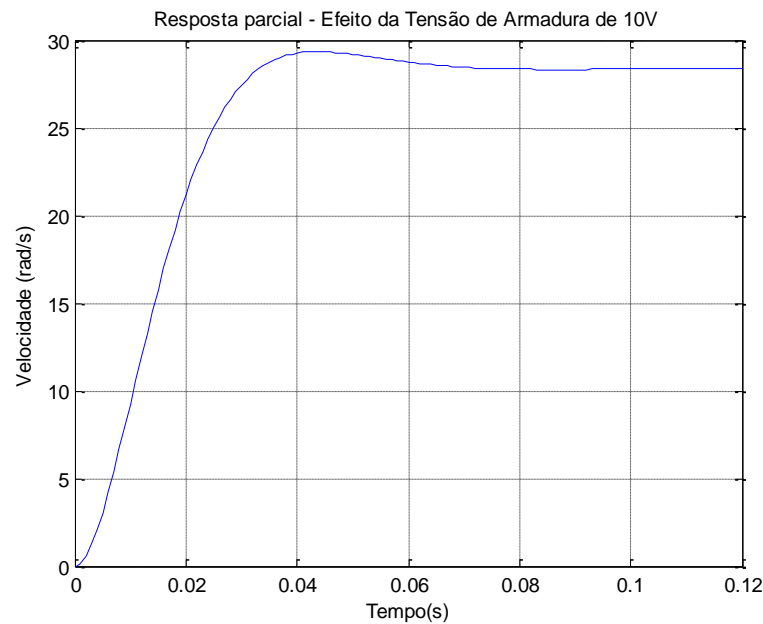


Figura 2.7 – Efeito da tensão de armadura

A seguir, na Figura 2.8 pode ser vista a resposta a uma perturbação de torque de $T_{carga} = 0,15 \text{ Nm}$, ou seja, o motor está em vazio pois $0,15 \text{ Nm}$ corresponde ao coeficiente de atrito seco F .

Deve ser notado que o atrito não é uma força conservativa e, portanto, não realiza trabalho. Como na modelagem matemática não foi prevista esta situação e o atrito F foi considerado como um torque aplicado externamente ao eixo, a simulação resultará em velocidade negativa (sentido oposto).

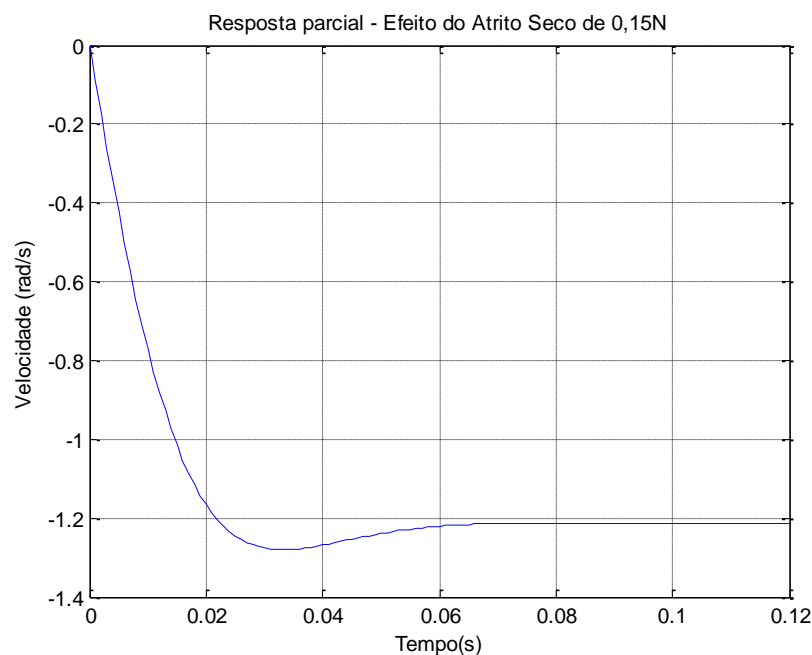


Figura 2.8 – Efeito do atrito seco no modelo

Somando as duas contribuições:

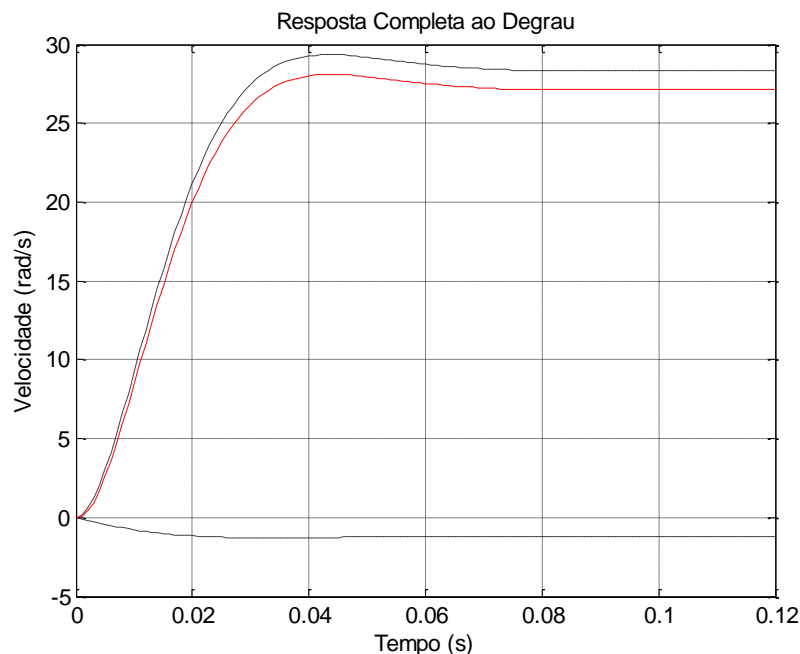


Figura 2.9 – Resposta completa

Os valores de regime permanente para a velocidade ω_{ss} são:

- Considerando somente tensão de armadura: $\omega_{ss} = 28,36 \text{ rad/s}$
- Considerando somente o atrito seco: $\omega_{ss} = -1,22 \text{ rad/s}$
- No sistema completo: $\omega_{ss} = 27,1 \text{ rad/s}$

O valor de pico da velocidade é de 28,1 rad/s

O sobre sinal para o sistema completo foi de 3,5%

Nota-se que a carga no motor tem influência na velocidade de regime permanente. Somente a parcela de atrito seco causou uma redução na velocidade de regime permanente de aproximadamente 4,5%.

Uma proposta de reduzir o efeito do torque da carga propõe-se adotar um controlador de velocidade do motor em malha fechada.

O sistema de malha fechada será mais complexo, pois será necessário incluir:

- Transdutor de velocidade (sensor);
- Amplificador/Condicionador de Sinais
- Comparador e compensador, formando o controlador
- *Driver*

No diagrama de blocos da Figura 2.10, tem-se um controlador de velocidade puramente proporcional com realimentação tacométrica. O termo puramente proporcional refere-se ao fato de que o sinal de controle é somente proporcional ao sinal de erro. Futuramente serão adotadas outras estratégias de controle mais elaboradas.

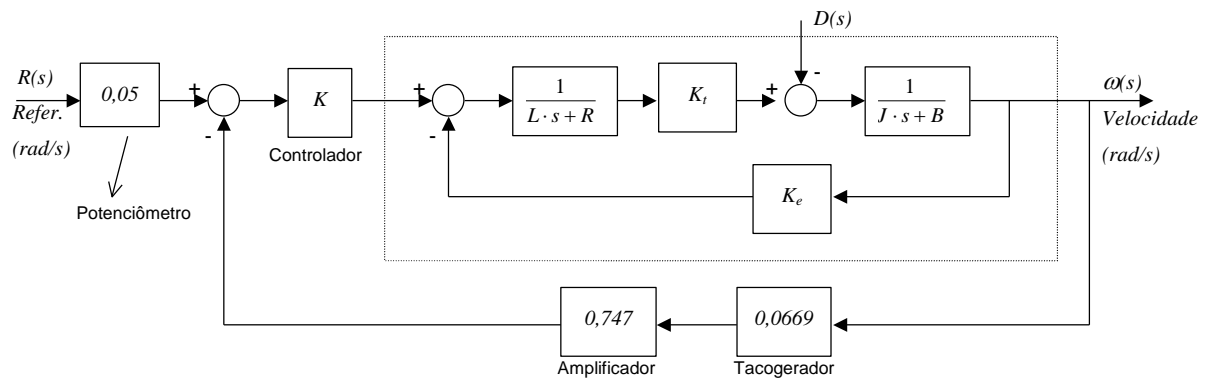


Figura 2.10 – Controle de velocidade de malha fechada

Refazendo a análise anterior considerando que o ganho do controlador adotado é $K=25$, tem-se os seguintes resultados (Figura 2.11):

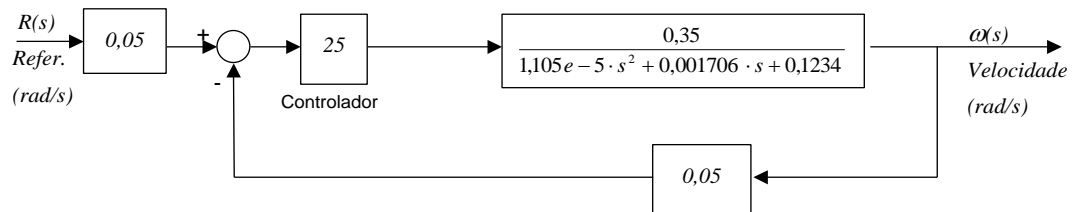


Figura 2.11 – Diagrama de blocos desconsiderando a perturbação

A função de transferência da entrada para a saída será:

$$\frac{\omega(s)}{R(s)} = 0,05 \cdot \frac{8,75}{1,1 \cdot 10^{-5} \cdot s^2 + 0,00171 \cdot s + 0,561} = \frac{0,438}{1,1 \cdot 10^{-5} \cdot s^2 + 0,00171 \cdot s + 0,561}$$

E a resposta a um degrau de 20 rad/s pode ser vista na Figura 2.12.

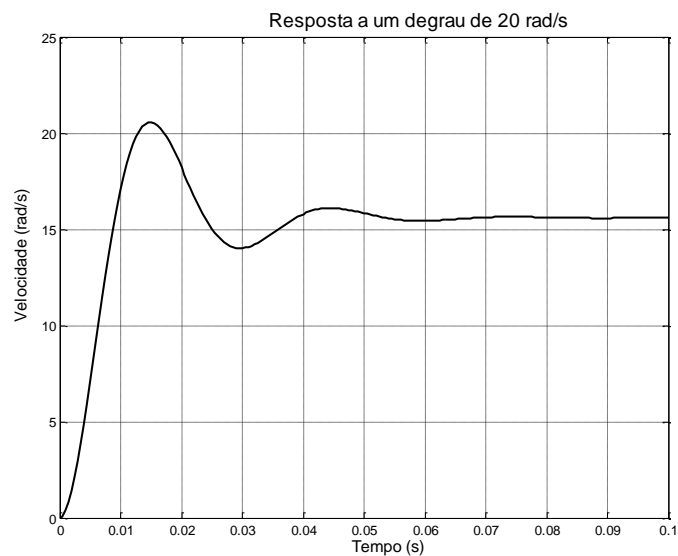
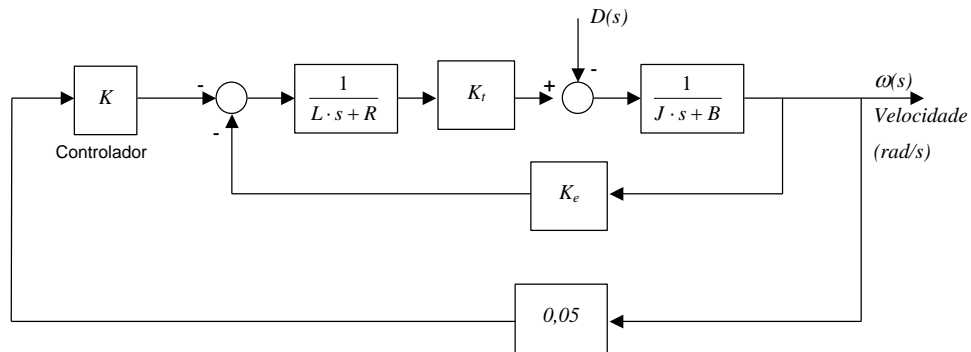


Figura 2.12 – Resposta a um degrau de 20 rad/s, desconsiderando a carga.

O diagrama de blocos para a perturbação de torque será:



Reduzindo o diagrama de blocos:

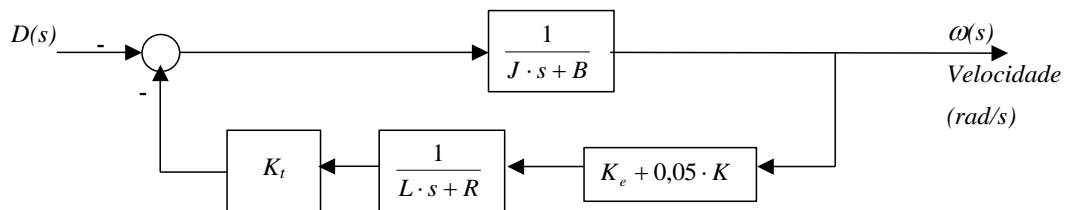


Figura 2.13 – Diagrama de blocos para a perturbação

A função de transferência da perturbação para a saída será:

$$\frac{\omega(s)}{D(s)} = -\frac{0,0065 \cdot s + 1}{1,1 \cdot 10^{-5} \cdot s^2 + 0,00171 \cdot s + 0,561}$$

A resposta ao degrau perturbação equivalente ao valor do coeficiente de atrito seco de $F=0,15 \text{ Nm}$ pode ser visualizado na Figura 2.14.

As considerações anteriores quanto ao coeficiente de atrito F permanecem válidas.

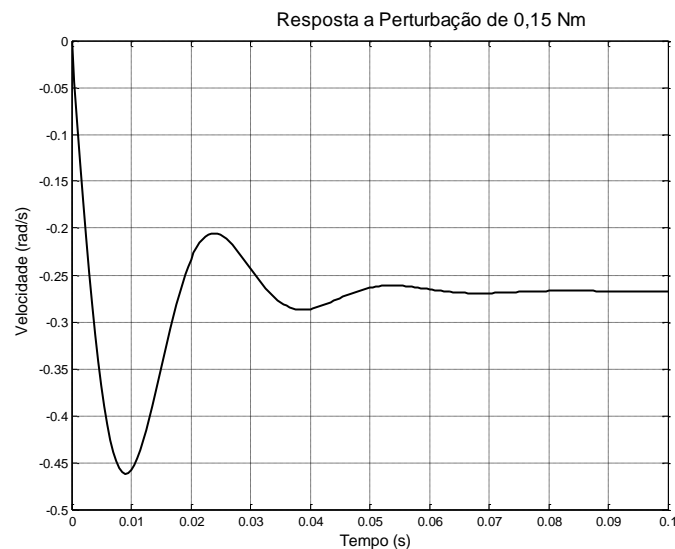


FIGURA 2.14 – Resposta à perturbação de $F=0,15 \text{ Nm}$

A resposta completa, considerando a entrada de referência de $r = 20 \text{ rad/s}$ e o coeficiente de atrito seco $F=0,15 \text{ Nm}$ é mostrada na Figura 2.15.

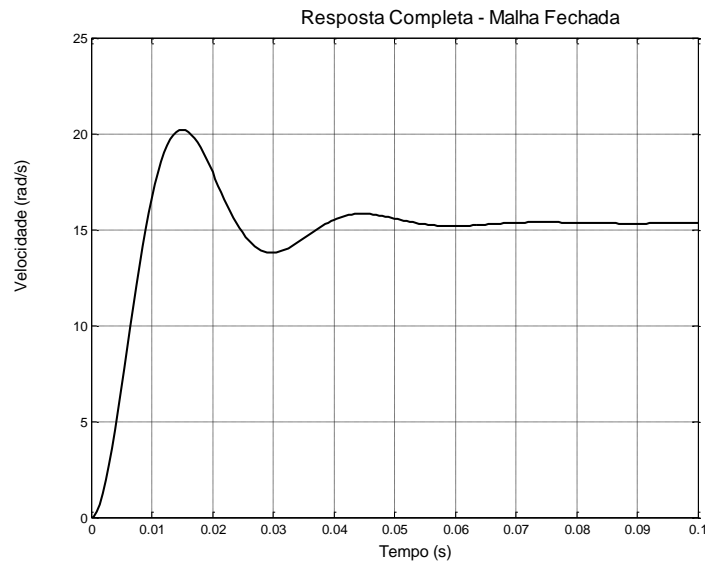


Figura 2.15 – Resposta de malha fechada completa

E os valores característicos são:

| | |
|--|---------------------------------------|
| Valor de regime permanente: | $\omega_{ss} = 15,33 \text{ rad/s}$ |
| Valor de pico da resposta: | $\omega_{pico} = 20,20 \text{ rad/s}$ |
| Sobre sinal máximo: | 31,8% |
| Valor de regime permanente da perturbação: | $\omega_{pivo} = -0,27 \text{ rad/s}$ |

Nota-se que, para este caso, a realimentação:

- Afetou a resposta transiente tornando o sistema mais rápido, porém aumentou significativamente o sobre sinal e,
- Reduziu o efeito das perturbações em regime permanente.

Note ainda que no sistema em malha aberta a entrada de referência foi um sinal de tensão (a tensão de armadura) e o sinal de saída é a velocidade do motor.

Já no sistema em malha fechada, o sinal de referência foi um valor de velocidade.

Na simulação foi considerado que o controlador apresenta ganho 25.

Pergunta-se: Qual será o efeito das respostas transiente e permanente de aumentar ou diminuir este ganho?

2.5. Exercício – Sistema de Controle do Nível de um Reservatório:

Seja o controle de nível de um pequeno reservatório, representado pelo diagrama da Figura 2.16.

Os elementos são:

- Reservatório:
 - Secção circular constante;
 - Diâmetro de 0,5m;
 - Não tem tubulação de saída.
- Motor e Bomba
 - Vazão máxima de 120 L/min com 1800 rpm;
 - Motor trifásico de 4 polos;
- Driver:
 - Inversor de frequência de 0 a 60 Hz;
 - Rampa de aceleração de 20 segundos;
 - Sinal de controle analógico de 0 a 10Vdc.
- Sensor de nível
 - Sensor de pressão com sensibilidade de 5 V/mca;

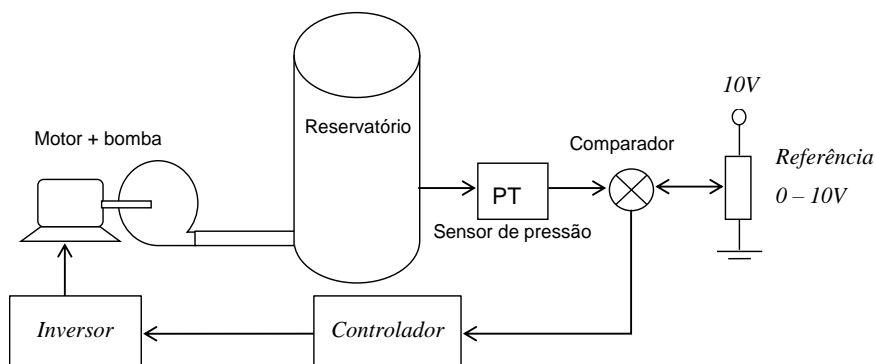


Figura 2.16 – Sistema de controle de nível de um reservatório

Pede-se:

- Obter um modelo matemático para cada um dos elementos;
- Análise do sistema de malha aberta:
 - Montar um diagrama de blocos e analisar o comportamento do sistema de malha aberta composto pelo conjunto inversor, motor, bomba e reservatório nas seguintes condições:
 - Comportamento no primeiro minuto para entrada degrau de 10V;
 - Comportamento nos primeiros 10 min.;
- Análise do sistema de malha fechada:
 - Montar um diagrama de blocos em malha fechada considerando um controlador puramente proporcional;
 - Modificar o diagrama para realimentação unitária;
 - Analisar o desempenho variando o valor do ganho K do controlador de 5 a 25;
 - Verifique se os resultados de simulação respeitam as limitações físicas do sistema e proponha uma nova faixa de valores de ganhos tal que os limites sejam respeitados.

Resolução:

Modelagem matemática:

Definindo o sistema de unidades:

- Escolha um sistema coerente de unidades e na dúvida, use o *SI*;
- Tempo: *s*;
- Vazão: m^3/s ;
- Pressão: *mca* (metros de coluna d'água) (*Não pertence ao SI)

Reservatório:

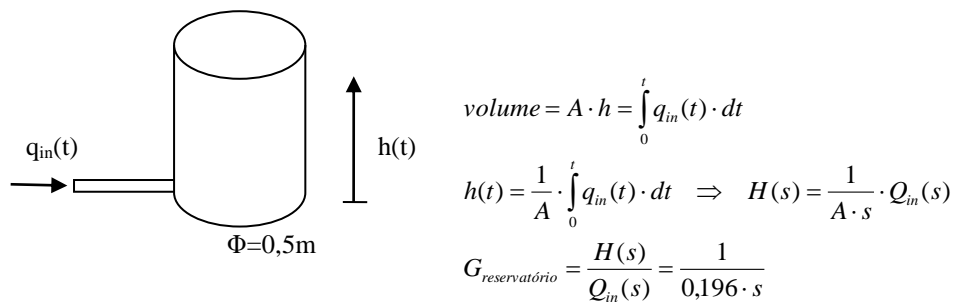


Figura 2.17 – Modelagem do reservatório

Motor e Bomba:

- Será considerado que a relação velocidade / vazão é linear na faixa de operação;
- Será considerado que o conjunto é de ordem zero (dinâmica desprezível).

$$K_{Bomba} = \frac{120 \text{ lpm}}{1800 \text{ rpm}} = 0,0667 \text{ lpm/rpm}$$

ou

$$K_{Bomba} = \frac{0,12 \text{ m}^3/\text{min}}{60 \text{ Hz}} = 0,002 \text{ m}^3/\text{min/Hz} = 3,33 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3/s/\text{Hz}$$

Driver:

- Ganho: $K_{Inversor} = \frac{60 \text{ Hz}}{10 \text{ V}} = 6 \text{ Hz/V}$
- Aproximando a rampa de aceleração por um sistema de 1ª ordem:

$$\tau \approx \frac{t_{rampa}}{4} = 5 \text{ segundos}$$

- $G_{Inversor} = \frac{6}{5 \cdot s + 1}$

Sensor:

- Ganho: $K_{Sensor} = 5 \frac{V}{mca}$
- Dinâmica desprezível

Sistema de Malha Aberta:

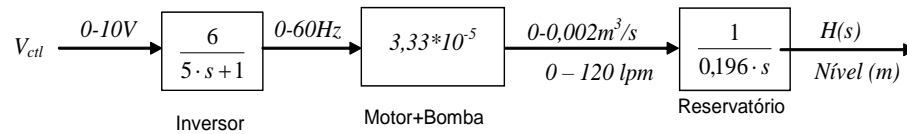


Figura 2.18 – Diagrama de Blocos de Malha Aberta

Utilizando o Matlab:

```
Inversor = tf(6,[5 1]);
Bomba = 3.33e-5;
Reserv=tf(1,[.196 0]);
Malha_aberta=Inversor*Bomba*Reserv;
[h,t]=step(10*Malha_aberta,60); % Primeiros 60 segundos
plot(t,h)
grid
xlabel('tempo(s)');
ylabel('Nível (m)');
title('Comportamento em Malha Aberta – 01 minuto');
[h,t]=step(10*Malha_aberta,600); % Primeiros 10 minutos
figure(2)
plot(t,h)
grid
xlabel('tempo(s)');
ylabel('Nível (m)');
title('Comportamento em Malha Aberta – 10 minutos');
```

Sistema de Malha Fechada

Note que no diagrama da Figura 2.19 que foi incluída uma entrada de perturbação representando um vazamento na tubulação. Entretanto nas análises será considerado somente o problema servo.

Note ainda que o sinal de referência é dado em metros, indicando que se trata de um controle de nível.

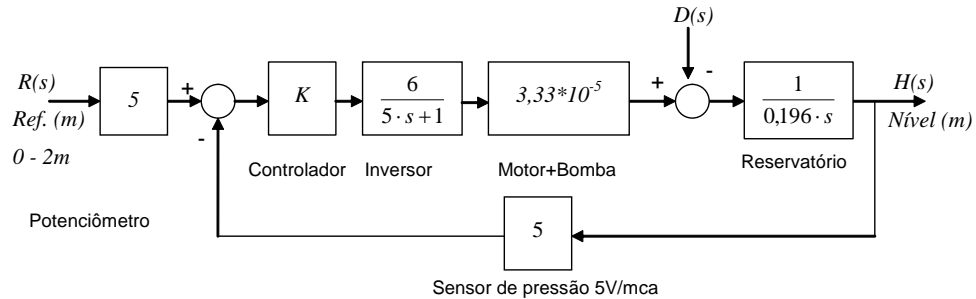


FIGURA 2.19 – Diagrama de Blocos de Controle de Nível de Reservatório

Modificando para realimentação unitária (Figura 20):

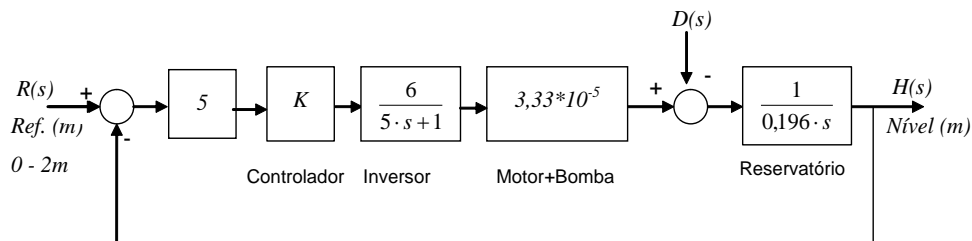


Figura 2.20 – Controle de Nível com realimentação unitária

Utilizando o MATLAB, aproveitando o código anterior:

```
ftma=5*Malha_aberta;
// Montando FTMFs para ganhos de 5, 10, 15, 20 e 25:
for m=1:5
    ftmf(m)=feedback(5*m*ftma,1)
end
step(ftmf) % Aplicando um degrau unitário
```

Para este projeto, a unidade de vazão m^3/s é muito “grande”. Refaça o exemplo utilizando a vazão em L/min . e compare os resultados.

2.6. Estabilidade Absoluta

A estabilidade absoluta é a característica mais importante de um sistema de controle e refere-se à capacidade do sistema fornecer uma saída limitada quando for excitado por uma entrada limitada. Tais sistemas são também denominados BIBO (*bounded input bounded output*).

Para sistemas lineares, a estabilidade está associada à localização dos polos de malha fechada no plano s .

Um sistema, para ser estável, deve apresentar todos os polos de malha fechada no semi plano esquerdo (SPE) do plano s , ou seja, todos os polos devem apresentar parte real negativa.

Seja um sistema genérico:

$$G(s) = \frac{1}{(s + \alpha_1) \cdot (s + \alpha_2) \dots (s + \alpha_n)} :$$

A resposta impulsiva deste sistema é composta pelos termos exponenciais dos polos do sistema e será:

$$g(t) = A_1 \cdot e^{-\alpha_1 \cdot t} + A_2 \cdot e^{-\alpha_2 \cdot t} + \dots + A_n \cdot e^{-\alpha_n \cdot t}$$

Considerando que os termos $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ são positivos, conforme o tempo tende à infinito a contribuição dos polos na resposta tendem a zero.

Caso um único polo esteja no semi plano direito (SPD) é suficiente para que um termo exponencial seja crescente e o sistema seja caracterizado como instável.

Na Figura 2.21 tem-se a resposta impulsiva de sistemas lineares onde se pode verificar o efeito da presença de polos instáveis.

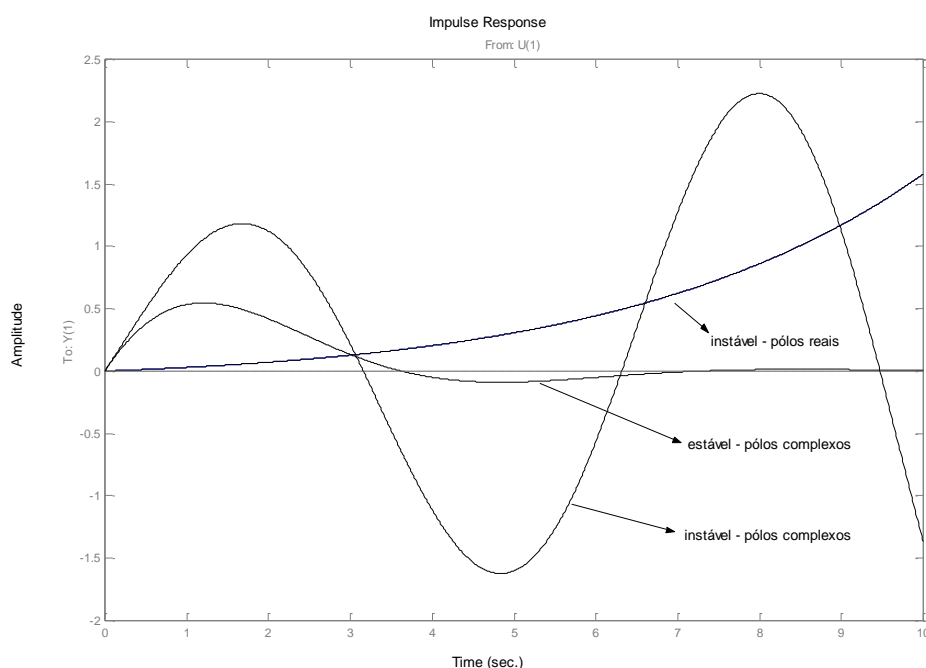


Figura 2.21 – Resposta impulsiva sistemas estáveis e instáveis

2.6.1. Critério de Estabilidade de Routh

O critério de Routh permite determinar se um sistema apresenta e quantos são os polos no SPD.

Considerando que um sistema em malha fechada seja representado por uma função de transferência na forma:

$$G(s) = \frac{b_o \cdot s^m + b_1 \cdot s^{m-1} + b_2 \cdot s^{m-2} + \dots b_m}{a_o \cdot s^n + a_1 \cdot s^{n-1} + a_2 \cdot s^{n-2} + \dots a_n} \text{ onde } a \text{ e } b \text{ são constantes e } n \geq m.$$

O procedimento para determinar a estabilidade segundo Routh é:

- Escrever o polinômio característico na forma

$$a_o \cdot s^n + a_1 \cdot s^{n-1} + a_2 \cdot s^{n-2} + \dots a_n = 0$$

- Se houver um coeficiente negativo ou zero na presença de demais coeficientes negativos, então haverá uma ou mais raízes com parte real positiva (SPD).
- Se todos os coeficientes forem negativos, multiplique-os por -1 , tornando-os todos positivos.
- Organize os coeficientes na forma

$$\begin{array}{ccccccc} s^n & a_0 & a_2 & a_4 & \dots & & \\ s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & \dots & & \\ s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & \dots & & \\ \dots & & & & & & \\ s^2 & c_1 & c_2 & & & & \\ s^1 & d_1 & & & & & \\ s^0 & e_1 & & & & & \end{array}$$

Os coeficientes b_n , c_n e etc são determinados por:

$$b_1 = -\frac{\begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix}}{a_1} = \frac{a_1 \cdot a_2 - a_0 \cdot a_3}{a_1}$$

$$b_2 = -\frac{\begin{vmatrix} a_0 & a_4 \\ a_1 & a_5 \end{vmatrix}}{a_1} = \frac{a_1 \cdot a_4 - a_0 \cdot a_5}{a_1}$$

$$b_3 = -\frac{\begin{vmatrix} a_0 & a_6 \\ a_1 & a_7 \end{vmatrix}}{a_1} = \frac{a_1 \cdot a_6 - a_0 \cdot a_7}{a_1} \dots$$

$$c_1 = -\frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{b_1} = \frac{b_1 \cdot a_3 - a_1 \cdot b_2}{b_1}$$

$$c_2 = -\frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_5 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}{b_1} = \frac{b_1 \cdot a_5 - a_1 \cdot b_3}{b_1}$$

$$c_3 = -\frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_7 \\ b_1 & b_4 \end{vmatrix}}{b_1} = \frac{b_1 \cdot a_7 - a_1 \cdot b_4}{b_1}$$

Este processo deve ser efetuado até a n -ésima linha. O critério de Routh estabelece que o número de raízes no SPD é igual ao número de trocas de sinal na primeira coluna do arranjo de Routh.

Exemplo 1: Conclua sobre a estabilidade do sistema representado pela função de transferência, de acordo com o arranjo de Routh.

$$G(s) = \frac{2 \cdot s + 1}{2 \cdot s^4 + 3 \cdot s^3 + 7 \cdot s^2 + 2 \cdot s + 1}$$

$$\begin{array}{rcl} s^4 & 2 & 7 \quad 1 \\ s^3 & 3 & 2 \\ s^2 & 5,67 & 1 \\ s^1 & 1,47 & \\ s^0 & 1 & \end{array}$$

Como não ocorreu troca de sinal, não há polos no SPD e o sistema é estável.

Utilizando o Matlab, pode-se chegar a mesma conclusão através de:

```
>> d=[2 3 7 2 1] %montando o denominador
d = 2 3 7 2 1

>> roots(d) %determinando as raízes do denom.
ans = -0.6179 + 1.6203i
      -0.6179 - 1.6203i
      -0.1321 + 0.3858i
      -0.1321 - 0.3858i
```

Como todos os polos têm parte real negativa, portanto pertencem ao SPE e o sistema é estável.

Exemplo 2: Conclua sobre a estabilidade do sistema representado pela função de transferência de malha fechada, de acordo com o arranjo de Routh.

$$G(s) = \frac{2 \cdot s + 1}{3 \cdot s^3 + s^2 + 0,1 \cdot s + 0,2}$$

$$\begin{array}{rcl} s^3 & 3 & 0,1 \\ s^2 & 1 & 0,2 \\ s^1 & -0,5 & \\ s^0 & 0,2 & \end{array}$$

Resp: dois polos no SPD

O critério de estabilidade de Routh geralmente é utilizado quando se pretende determinar se um parâmetro do sistema pode causar instabilidade, como no exemplo a seguir.

Exemplo 3: Determinação da faixa de ganhos para estabilidade

$$G(s) = \frac{2 \cdot s + K}{3 \cdot s^3 + s^2 + 0,1 \cdot s + 0,01 \cdot K} \text{ - Função de transferência de malha fechada}$$

$$\begin{array}{rcl} s^3 & 3 & 0,1 \\ s^2 & 1 & 0,01 \cdot K \\ s^1 & \frac{(1 \cdot 0,1 - 3 \cdot 0,01 \cdot K)}{1} & \\ s^0 & 0,01 \cdot K & \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{rcl} s^3 & 3 & 0,1 \\ s^2 & 1 & 0,01 \cdot K \\ s^1 & 0,1 - 0,03 \cdot K & \\ s^0 & 0,01 \cdot K & \end{array}$$

Analisando a primeira coluna, os termos devem ser todos positivos, assim:

Analisando a linha s^1 : $K < 3,3$

Analisando a linha s^0 : $K > 0$

Logo a faixa de valores para que o sistema seja estável é $0 < K < 3,3$.

Utilizando o Matlab para verificar a resposta ao degrau deste sistema para diferentes situações de K, tem-se as respostas mostradas na Figura 2.22:

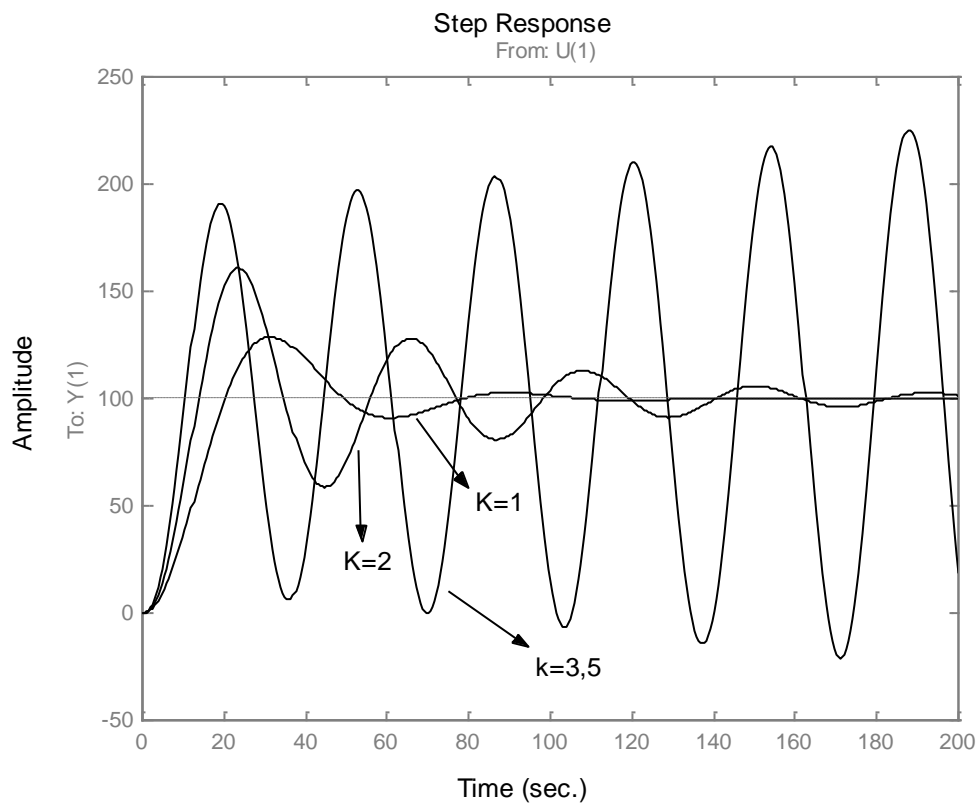
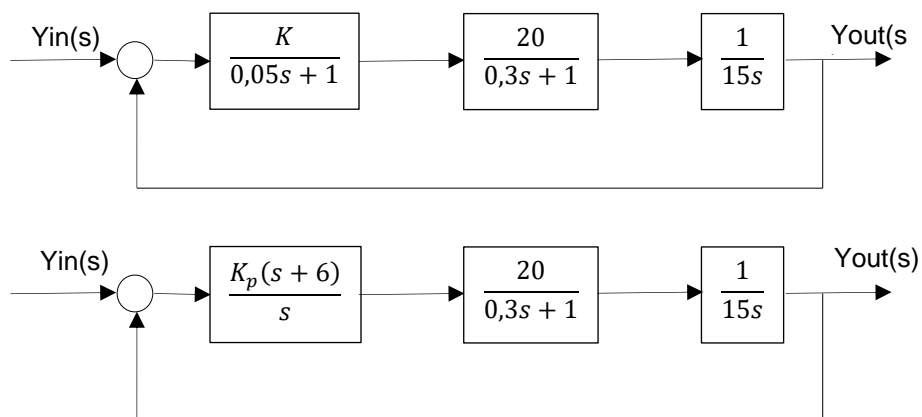


Figura 2.22 - Resposta ao degrau para diversos valores de K

Exercício 1: Determinação da faixa de ganhos K para manter a estabilidade absoluta.



2.7. Erro em regime permanente

Os erros que ocorrem em sistemas de controle podem ser atribuídos a diversos fatores como folga, atrito estático, deriva térmica e desgastes por tempo de utilização.

Os erros tratados neste tópico não estão associados a estas imperfeições nos elementos do sistema, mas sim a capacidade que os sistemas de controle apresentam de seguir determinadas entradas em regime estacionário.

Para o estudo de erro em regime permanente frequentemente são utilizados sistemas com realimentação unitária, sem que isto cause perda da generalidade. Uma vantagem deste tipo de representação é que o sinal de saída, a referência e o erro atuante estão todos na mesma unidade. Apenas a título de exemplo, o sistema da Figura 2.11 está representado na Figura 2.23 desta vez com realimentação unitária. Note que em qualquer caso da Figura 2.23 a função de transferência em malha fechada é essencialmente a mesma.

Neste texto será utilizado o sistema generalizado lembrando que para realimentação unitária basta considerar que $H(s)=1$.

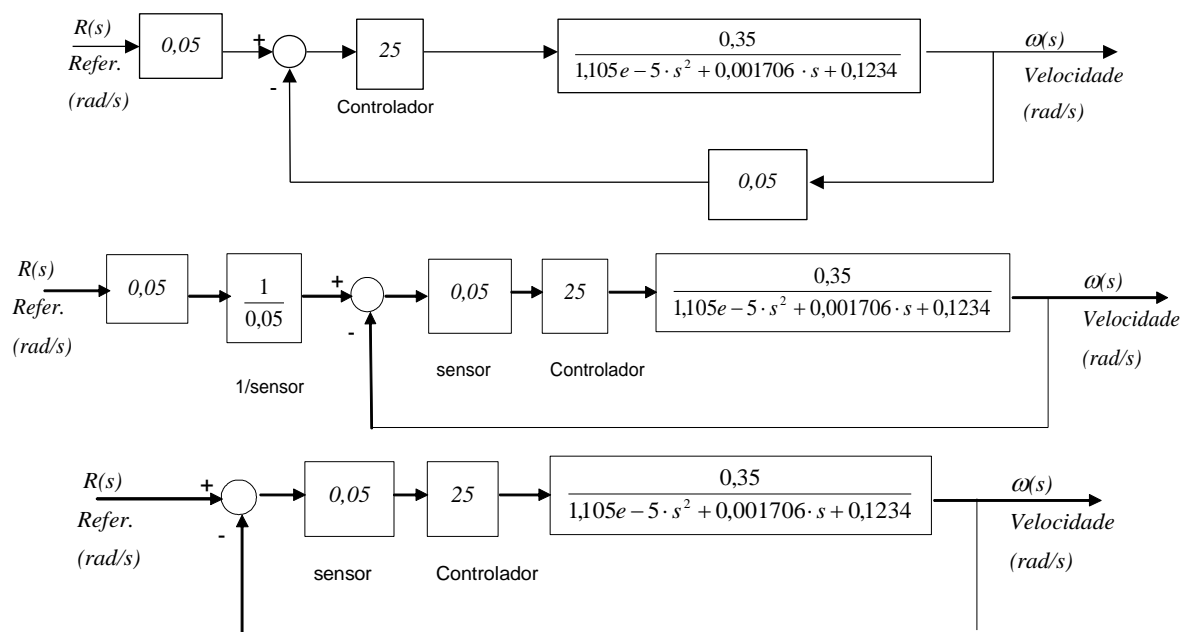


Figura 2.23 – Sistema com Realimentação Unitária

Uma das classificações para os sistemas de controle refere-se à habilidade de seguir determinadas entradas, conhecidas como entradas de teste.

As entradas de teste mais comumente aplicadas são entrada degrau (estática ou de posição), entrada rampa (velocidade) ou entrada parabólica (aceleração).

Um sistema que segue uma entrada degrau com erro em regime permanente nulo pode não acompanhar uma entrada rampa também com erro nulo. Esta característica depende da estrutura do sistema e, principalmente da presença e da posição de integradores na função de transferência de malha aberta.

Seja uma função de transferência de malha aberta genérica representada na forma:

$$G \cdot H = \frac{K \cdot (T_a \cdot s + 1) \cdot (T_b \cdot s + 1) \cdot \dots \cdot (T_m \cdot s + 1)}{s^N \cdot (T_1 \cdot s + 1) \cdot (T_2 \cdot s + 1) \cdot \dots \cdot (T_q \cdot s + 1)}$$

O termo s^N do denominador mostra o número de integradores puros (ou de polos na origem) do sistema de malha aberta e N é chamado de tipo da função de transferência. Assim, um sistema tipo 0 não apresenta integradores puros e um sistema tipo 1 apresenta um único integrador.

Será visto que o aumento do tipo do sistema reflete na ampliação da capacidade do sistema de acompanhar entradas mais complexas, porém pode causar efeitos desastrosos nas características transientes e mesmo na estabilidade de malha fechada.

Deve ser ressaltado que o tipo do sistema não é necessariamente a ordem do sistema.

Considerando o sistema da Figura 2.24, a função de transferência de malha fechada é:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s) \cdot H(s)}$$

E a função de transferência da entrada para o erro é:

$$\frac{E(s)}{R(s)} = 1 - \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + G(s) \cdot H(s)}$$

E a equação para o erro é:

$$E(s) = \frac{1}{1 + G(s) \cdot H(s)} \cdot R(s) = \frac{1}{1 + FTMA(s)} \cdot R(s)$$

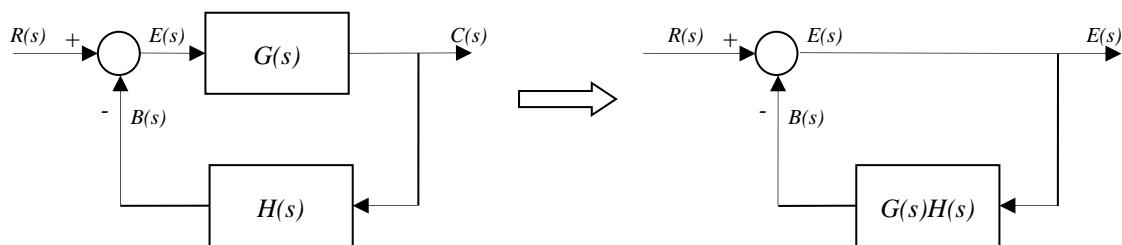


FIGURA 2.24 – Sistema de controle explicitando o sinal de erro $E(s)$ como variável de interesse

Pelo teorema do valor final pode-se determinar o valor do erro em regime permanente:

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{1 + G(s) \cdot H(s)} \cdot R(s)$$

2.7.1. Erro para entradas de posição (degrau):

É o erro em regime permanente que o sistema apresenta quando for excitado por uma entrada degrau ou entrada limitada:

$$e_{ss_degrau} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{1 + G(s) \cdot H(s)} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{1 + GH(0)}$$

A constante de erro estático de posição é definida por:

$$K_P = \lim_{s \rightarrow 0} G \cdot H(s) = G \cdot H(0)$$

E substituindo na equação anterior:

$$e_{ss_degrau} = \frac{1}{1 + K_P}$$

2.7.1.1. Sistemas tipo 0:

$$K_{P_tipo_0} = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) \cdot H(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K \cdot (T_a \cdot s + 1) \cdot (T_b \cdot s + 1) \dots (T_m \cdot s + 1)}{s^0 \cdot (T_1 \cdot s + 1) \cdot (T_2 \cdot s + 1) \dots (T_q \cdot s + 1)}$$

$$K_{P_tipo_0} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K \cdot (T_a \cdot s + 1) \cdot (T_b \cdot s + 1) \dots (T_m \cdot s + 1)}{(T_1 \cdot s + 1) \cdot (T_2 \cdot s + 1) \dots (T_q \cdot s + 1)} = K$$

Assim o erro em regime permanente para sistemas tipo 0 para entrada degrau será finito de valor

$$e_{ss_degrau_tipo_0} = \frac{1}{1 + K}.$$

2.7.1.2. Sistemas tipo 1:

$$K_{P_tipo_1} = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) \cdot H(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K \cdot (T_a \cdot s + 1) \cdot (T_b \cdot s + 1) \dots (T_m \cdot s + 1)}{s^N \cdot (T_1 \cdot s + 1) \cdot (T_2 \cdot s + 1) \dots (T_q \cdot s + 1)} \quad N \geq 1$$

$$K_{P_tipo_1} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K \cdot (T_a \cdot s + 1) \cdot (T_b \cdot s + 1) \dots (T_m \cdot s + 1)}{s^N \cdot (T_1 \cdot s + 1) \cdot (T_2 \cdot s + 1) \dots (T_q \cdot s + 1)} = \infty \quad N \geq 1$$

Logo, os sistemas do tipo 1 ou superior acompanham entrada degrau com erro nulo.

$$e_{ss_degrau_tipo_1} = \frac{1}{1 + \infty} = 0$$

Exemplo: Na Figura 2.25 tem-se a resposta de sistemas tipos 0, 1 e 2 estáveis para entrada degrau unitário.

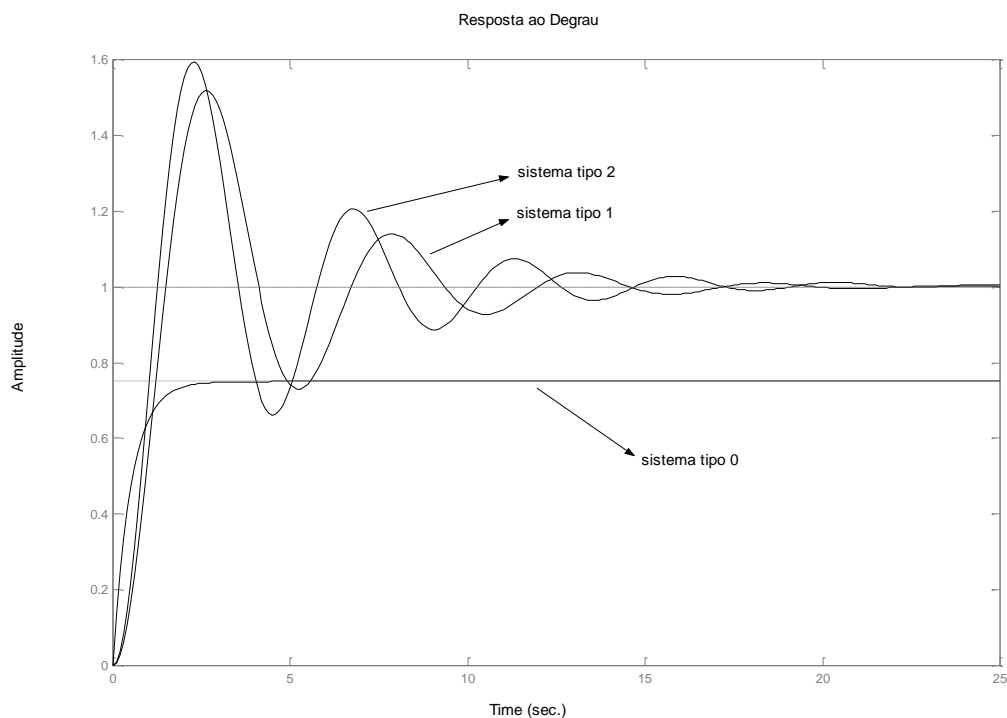


Figura 2.25 – Resposta ao degrau unitário de sistemas tipo 0, 1 e 2.

2.7.2. Erro para entrada de velocidade (rampa):

É o erro em regime permanente que o sistema apresenta quando for excitado por uma entrada rampa:

$$e_{ss_rampa} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{1 + G(s) \cdot H(s)} \cdot \frac{1}{s^2} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s \cdot G(s) \cdot H(s)}$$

A constante de erro de velocidade K_V é definida por:

$$K_V = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot G(s) \cdot H(s)$$

E substituindo na equação anterior:

$$e_{ss_rampa} = \frac{1}{K_V}$$

2.7.2.1. Sistemas tipo 0:

$$K_{V_tipo_0} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot G(s) \cdot H(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{K \cdot (T_a \cdot s + 1) \cdot (T_b \cdot s + 1) \dots (T_m \cdot s + 1)}{s^0 \cdot (T_1 \cdot s + 1) \cdot (T_2 \cdot s + 1) \dots (T_q \cdot s + 1)}$$

$$K_{V_tipo_0} = 0$$

$$e_{ss_rampa_tipo_0} = \frac{1}{0} = \infty$$

Assim o erro em regime permanente para sistemas tipo 0 para entrada rampa será infinito significando que sistemas tipo 0 não tem habilidade de seguir entradas rampa.

2.7.2.2. Sistemas tipo 1:

$$K_{V_tipo_1} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot G(s) \cdot H(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{K \cdot (T_a \cdot s + 1) \cdot (T_b \cdot s + 1) \dots (T_m \cdot s + 1)}{s^1 \cdot (T_1 \cdot s + 1) \cdot (T_2 \cdot s + 1) \dots (T_q \cdot s + 1)}$$

$$K_{V_tipo_1} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K \cdot (T_a \cdot s + 1) \cdot (T_b \cdot s + 1) \dots (T_m \cdot s + 1)}{(T_1 \cdot s + 1) \cdot (T_2 \cdot s + 1) \dots (T_q \cdot s + 1)} = K$$

Logo, os sistemas do tipo 1 ou superior acompanham entrada rampa com erro em regime permanente finito de valor:

$$e_{ss_rampa_tipo_1} = \frac{1}{K_V}$$

2.7.2.3. Sistemas tipo 2 ou superior:

$$K_{V_tipo_2} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot G(s) \cdot H(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{K \cdot (T_a \cdot s + 1) \cdot (T_b \cdot s + 1) \dots (T_m \cdot s + 1)}{s^2 \cdot (T_1 \cdot s + 1) \cdot (T_2 \cdot s + 1) \dots (T_q \cdot s + 1)}$$

$$K_{V_tipo_2} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K \cdot (T_a \cdot s + 1) \cdot (T_b \cdot s + 1) \dots (T_m \cdot s + 1)}{s^1 \cdot (T_1 \cdot s + 1) \cdot (T_2 \cdot s + 1) \dots (T_q \cdot s + 1)}$$

$$K_{V_tipo_2} = \infty$$

$$e_{ss_rampa_tipo_2} = \frac{1}{K_{V_tipo_2}} = 0$$

Logo, os sistemas do tipo 2 ou superior acompanham entrada rampa com erro em regime permanente nulo.

Exemplo: Respostas típicas de sistemas tipos 0, 1 e 2 estáveis para entrada rampa unitária são mostradas na Figura 2.26.

Analogamente às análises anteriores, pode ser determinado o coeficiente de erro estático para entrada de aceleração.

$$\begin{aligned} K_{A_tipo_0} = 0 & \Rightarrow e_{ss_acel_tipo_0} = \infty \\ K_{A_tipo_1} = 0 & \Rightarrow e_{ss_acel_tipo_1} = \infty \\ K_{A_tipo_2} = K & \Rightarrow e_{ss_acel_tipo_2} = \frac{1}{K} \quad - \text{erro finito} \end{aligned}$$

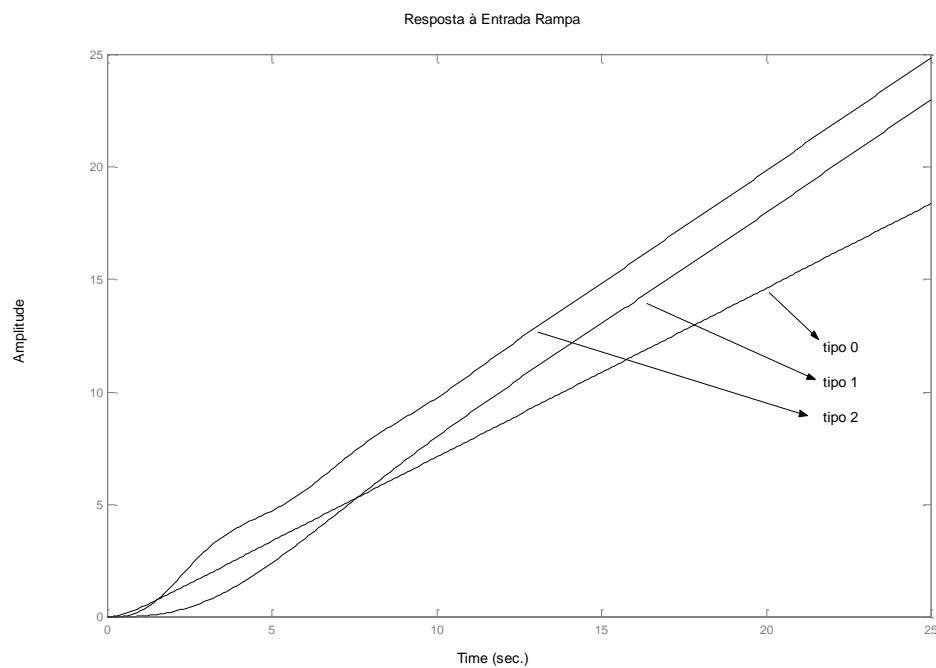


Figura 2.26 – Resposta à rampa de sistemas tipo 0, 1 e 2.

Exemplo: Resposta de sistemas tipos 1 e 2 estáveis para entrada parabólica podem ser vistas na Figura 2.27.

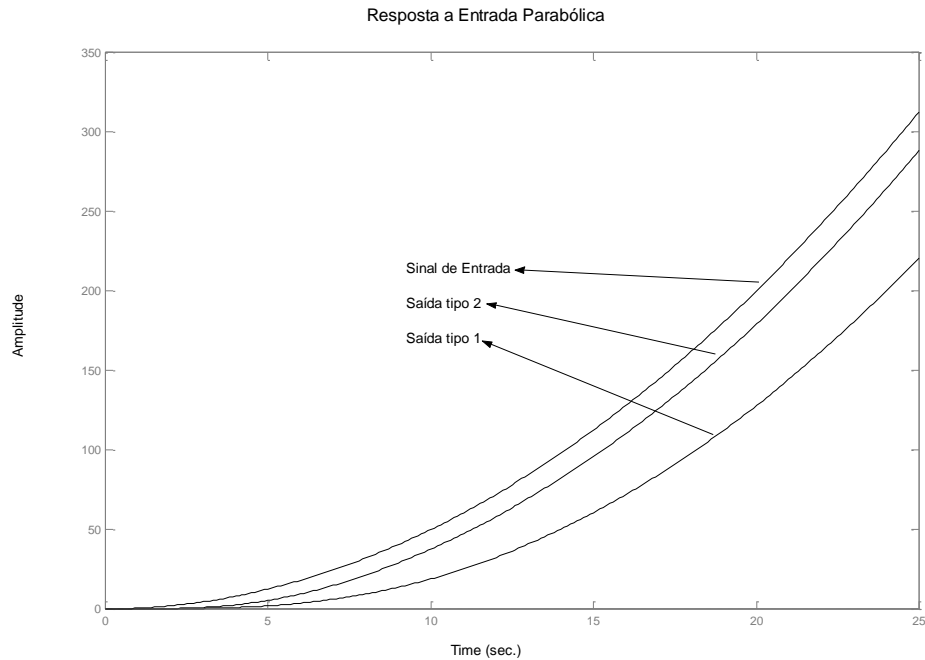


Figura 2.27 – Respostas de sistemas tipo 1 e 2 para entrada parabólica

A seguir tem-se um quadro comparativo (Quadro 2.1) onde são mostrados os valores dos erros em estado estacionário para sistemas tipo 0, 1 e 2 estáveis quando são excitados com entradas de posição, velocidade e aceleração.

Quadro 2.1 – Erro em regime permanente em função do ganho K

| Entrada | Sistema Tipo 0 | Sistema Tipo 1 | Sistema Tipo 2 |
|-----------------------------------|--|--|---|
| Estática, Posição ou Degrau | $K_P = \text{constante}$ $e_{ss_pos_tipo_0} = \frac{1}{1 + K_P} = \text{finito}$ | $K_P = \infty$ $e_{ss_pos_tipo_1} = 0$ | $K_P = \infty$ $e_{ss_pos_tipo_2} = 0$ |
| Velocidade ou Rampa | $K_V = 0$ $e_{ss_veloc_tipo_0} = \frac{1}{K_V} = \infty$ | $K_V = \text{constante}$ $e_{ss_veloc_tipo_1} = \frac{1}{K_V} = \text{finito}$ | $K_V = \infty$ $e_{ss_veloc_tipo_2} = \frac{1}{K_V} = 0$ |
| Aceleração ou Parábola | $K_A = 0$ $e_{ss_acel_tipo_0} = \frac{1}{K_A} = \infty$ | $K_A = 0$ $e_{ss_acel_tipo_1} = \frac{1}{K_A} = \infty$ | $K_A = \text{constante}$ $e_{ss_acel_tipo_2} = \frac{1}{K_A} = \text{finito}$ |

Deve-se ressaltar que esta análise não traz qualquer informação sobre o regime transiente e é válida somente para sistemas estáveis em malha fechada.

As constantes de erro K_P , K_V e K_A estão relacionadas à habilidade, em regime permanente, do sistema acompanhar entradas e é um indicador de desempenho de estado estacionário.

Torna-se desejável maximizar estas constantes de forma a melhorar as características de regime permanente, sempre tendo em consideração que isto pode prejudicar o comportamento transiente.

Por este estudo nota-se que uma maneira de melhorar o desempenho de regime permanente é aumentar o tipo do sistema pela inserção de integradores. Entretanto esta solução pode levar o sistema à instabilidade devido à inserção de polos de malha aberta na origem ($s=0$) que em malha fechada deslocam-se para o semi plano direito do plano s . Este tipo de análise poderá ser feita utilizando o método do Lugar Geométrico das Raízes.

Sistemas de tipo 2 ou superior são, em geral, difíceis de se tornar estáveis através de estratégias simples de controle e requerem compensadores mais sofisticados que melhorem a margens de estabilidade, uma característica que é avaliada a partir de métodos de Resposta em Frequência. Candidatos naturais a melhorar as condições de estabilidade são os compensadores em avanço de fase e os compensadores que incluem termos derivativos.

Exercício 1:

Seja o controle de nível, representado pelo diagrama de blocos da Figura 2.28.

Para o problema servo pede-se:

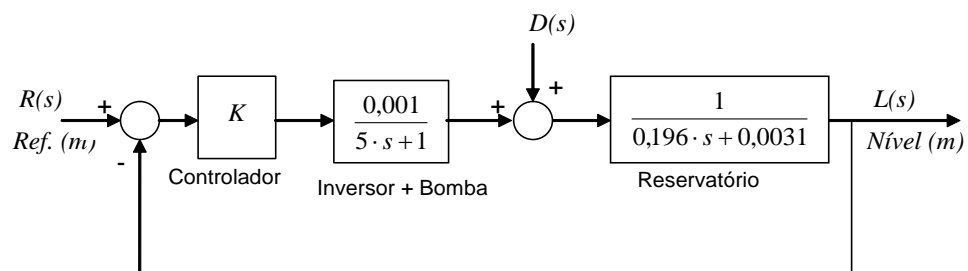


Figura 2.28 – Sistema de Controle de Nível de Reservatório

- Determine o valor de do ganho K para que sistema apresente erro em regime permanente igual ou inferior a 10% para entrada degrau.
- Verifique o comportamento de regime transiente para entrada degrau
- Caso o ganho K seja demasiado e/ou o comportamento transiente seja inadequado, que estrutura de controlador poderia ser utilizada para melhorar estes quesitos?
- Considerando que é inaceitável que o sistema apresente sobre sinal para entrada degrau, determine o valor de K aceitável.

3. Análise e Projeto pelo Lugar Geométrico das Raízes

3.1. Introdução

O comportamento dinâmico de um sistema de controle pode ser analisado pela localização dos polos e zeros de malha fechada no plano s .

Em um sistema de controle é comum ajustar o comportamento do sistema através de algum parâmetro, geralmente um ganho K , como o da Figura 3.1. O ajuste deste ganho causa uma mudança no mapa de polos e zeros do sistema, levando os polos e zeros para uma posição que proporcione o comportamento desejado do sistema.

O método do lugar das raízes é uma técnica que mostra a trajetória dos polos do sistema de malha fechada no plano s à medida que se varia algum parâmetro do sistema.

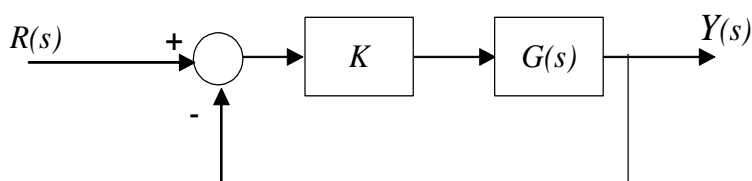


Figura 3.1 – Sistema de controle com ajuste de um parâmetro

3.2. Construção do Lugar Geométrico das Raízes

O traçado do LGR foi desenvolvido em uma época na qual não existiam os computadores digitais e ainda hoje é uma técnica bastante útil na análise e no projeto de sistemas de controle lineares.

O LGR é construído tendo por base os polos e zeros de malha ABERTA e permite visualizar a trajetória dos polos de malha FECHADA de acordo com a variação de algum parâmetro do sistema, frequentemente um ganho K variando de 0 a $+\infty$.

Utilizando o diagrama de malha fechada da Figura 2.5 reproduzida abaixo por comodidade com Figura 3.2, a função de transferência de malha fechada é:

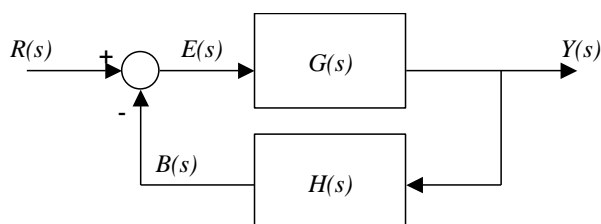


Figura 3.2 – Sistema de controle em Malha Fechada

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s) \cdot H(s)}$$

A equação característica do sistema é o denominador da FTMF e os polos de malha fechada são obtidos igualando o denominador a zero da forma:

$$1 + G(s) \cdot H(s) = 0$$

Nota-se que avaliar $1 + G(s) \cdot H(s) = 0$ equivale a comparar a função de transferência de malha aberta com -1 , ou $G(s) \cdot H(s) = -1$. Representando em coordenadas polares:

$$G(s) \cdot H(s) = -1$$

ou

$$|G(s) \cdot H(s)| = 1 \quad e \quad \arg(G(s) \cdot H(s)) = \pm 180^\circ \cdot (2 \cdot k + 1) \quad k \text{ inteiro}$$

Onde as relações acima são chamadas de condição de módulo e condição de fase, respectivamente.

Os valores de s que satisfazem, concomitantemente, as condições de módulo e de ângulo são os polos de malha fechada. Já o lugar geométrico dos pontos que satisfazem somente a condição de ângulo é chamado de Lugar Geométrico das Raízes.

O valor do ganho K necessário para que o polo se situe em um determinado ponto s_x do LGR pode ser obtido pela condição de módulo.

3.2.2. Características gerais do LGR

O LGR é traçado no plano complexo s , o qual tem as seguintes características:

- Os polos são marcados com o símbolo \times e os zeros com o símbolo \circ ;
- Continuidade – como os polinômios são funções contínuas, o LGR também será formado por linhas contínuas no plano s ;
- Número ramos – o número de ramos será o número de polos do sistema e igual à ordem do sistema;
- Pontos de início – considerando que o LGR inicia quando $K=0$ e K é sempre positivo, o LGR começa nos polos de malha aberta;
- Pontos de término – para $K \rightarrow \infty$ os polos tendem aos zeros de malha aberta do sistema;
- Simetria – como o polinômio característico tem somente coeficientes reais, os polos ou são reais e pertencem ao eixo real ou são complexos conjugados e, portanto, o LGR é simétrico em relação ao eixo real;
- Assíntotas – o número de assíntotas do LGR é igual ao excesso de polos do sistema. Para sistemas físicos, o número de polos n é sempre igual ou superior ao número de zeros m .

- O ângulo das assíntotas é obtido por:

$$\alpha_i = \frac{180^\circ}{n-m} \pm \frac{i}{n-m} \cdot 360^\circ \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

- O ponto de cruzamento das assíntotas é obtido por:

$$s = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i}{n-m}$$

- O ganho K_x que resulta em um polo desejado s_x é obtido por:

$$K_x = \frac{\prod_{i=1}^n |(s_x + p_i)|}{\prod_{i=1}^m |(s_x + z_i)|}$$

Diversas bibliografias descrevem procedimentos para o traçado manual do LGR, entretanto com o advento de recursos computacionais esta tarefa pode ser realizada por softwares específicos como o *Matlab*®.

3.2.3. Traçado do LGR utilizando o Matlab

A *Control System Toolbox* do *Matlab*® contém uma rotina para o traçado do LGR.

Esta rotina pede que a equação característica do sistema esteja representada na forma:

$$1 + G(s) \cdot H(s) = 0$$

$$1 + K \frac{\text{num}(s)}{\text{den}(s)}$$

Ou seja, requer que a função de transferência de malha aberta $G(s)H(s)$ esteja representada na forma de uma razão de polinômios e que o parâmetro a ser variado K apareça como fator multiplicativo.

Exemplo - Traçar o LGR para o sistema abaixo cuja função de transferência de malha aberta é:

$$G(s) \cdot H(s) = K \frac{(s + 5)}{s \cdot (s + 3) \cdot (s + 8)}$$

- Número de polos $n=3$
- Número de zeros $m=1$
- Logo: Excesso de polos = 2 \rightarrow dois ramos
- Pontos de início para $K=0$: polos de malha aberta
 - $s=0$
 - $s=-3$
 - $s=-8$
- Pontos de término:
 - um polo tende ao zero de malha aberta em $s=-5$
 - dois polos tendem a infinito

Utilizando o Matlab:

```
num=[1 5];
den=conv([1 0],conv([1 3],[1 8]));
sys=tf(num,den)
%definindo o numerador
%definindo o denominador
%montando a FTMA

Retorna: Transfer function:
      s + 5
-----
s^3 + 11 s^2 + 24 s

rlocus(sys)
%traçando o LGR
```

O resultado é mostrado na Figura 3.3:

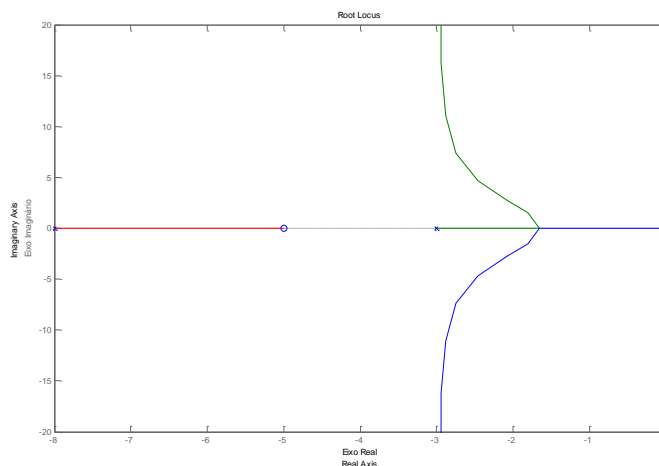


Figura 3.3 – Exemplo de Lugar das Raízes

3.2.4. Análise do LGR

Resposta transiente e plano s

A resposta do sistema está associada à localização dos polos e zeros no plano complexo. É comum especificar a resposta de um sistema de 2ª ordem ou superior como uma resposta sub amortecida de um sistema de 2ª ordem.

Assim, considerando um sistema genérico de 2ª ordem sub amortecido:

$$G(s) = K \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2 \cdot \xi \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^2}$$

Os polos são:

$$s_{1,2} = \sigma \pm j \cdot \omega_d = -\xi \cdot \omega_n \pm j \cdot \omega_n \cdot \sqrt{1-\xi^2}$$

E a resposta a entrada degrau unitário será:

$$y(t) = K \cdot \left(1 - \frac{\omega_n}{\omega_d} \cdot e^{\sigma \cdot t} \cdot \text{sen}(\omega_d \cdot t + \phi) \right)$$

$$y(t) = K \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} \cdot e^{-\xi \cdot \omega_n \cdot t} \cdot \text{sen}(\omega_n \cdot \sqrt{1-\xi^2} \cdot t + \phi) \right)$$

$$\phi = \text{tg}^{-1} \left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} \right) = \text{sen}^{-1} \sqrt{1-\xi^2} = \cos^{-1} \xi$$

O mapa de polos para este sistema é (Figura 3.4):

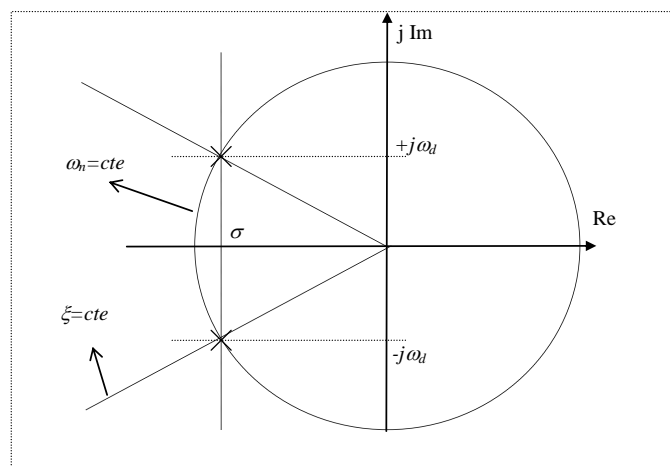


Figura 3.4 – Plano s para dois polos complexos conjugados

A parte real do polo está associada ao decaimento (ou crescimento) exponencial do sinal de saída. Nota-se que quanto mais próximos do eixo imaginário, menor é a parte real do polo e o sistema será mais lento. Portanto é necessário aguardar mais tempo para atingir o regime permanente.

A parte complexa dos polos está associada ao comportamento oscilatório do sistema. Se a parte imaginária é nula, não há comportamento oscilatório. Por outro lado, quanto mais afastado do eixo real, maior a frequência de oscilação do sinal de saída (resposta) do sistema.

Nota-se ainda que valores constantes do coeficiente de amortecimento ξ causam retas passando pela origem no plano s. Assim sistemas com mesmo ξ estarão localizados na mesma reta. Analogamente, valores constantes de frequência natural ω_n provocam circunferências no plano s.

3.2.5. Dominância de polos

Frequentemente as especificações de resposta transiente são baseadas em um sistema de 2ª ordem sub amortecido.

Quanto mais afastado para a esquerda está o polo, mais “rápido” ele é e mais rapidamente extingue-se seu transiente. Um polo é considerado dominado quando sua parte real for 10 vezes superior à parte real do polo mais próximo do eixo imaginário. A seguir são mostrados dois exemplos de dominância de polos.

Exemplo 1 – Sistema de 3ª ordem com polos complexos dominantes

Um sistema cuja função de transferência é:

$$G(s) = \frac{70}{s^3 + 8 \cdot s^2 + 16 \cdot s + 24} = \frac{70}{(s+6) \cdot (s^2 + 2 \cdot s + 4)} = 2,92 \cdot \frac{1}{(0,167 \cdot s + 1)} \cdot \frac{1}{(0,25 \cdot s^2 + 0,5 \cdot s + 1)}$$

O polo real está localizado em $s=-6$ e os polos complexos apresentam parte real de $Re=-1$. Assim o polo real é mais rápido que o complexo e será dominado pelo polo complexo, como pode ser verificado no mapa de polos e zeros da Figura 3.5 e na figura 3.6 podem ser vistas as respostas completas e somente dos polos dominantes para sistemas de 3ª ordem.

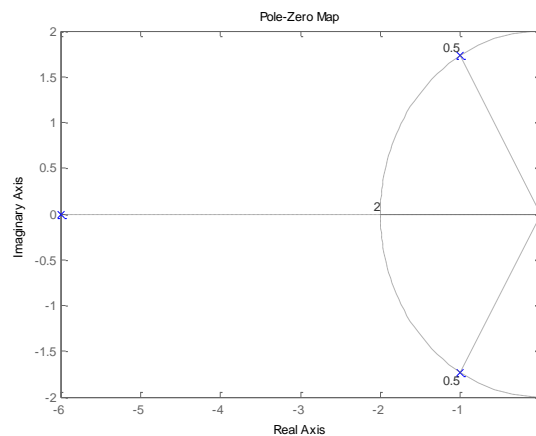


Figura 3.5 – Mapa de Polos e Zeros para $G(s) = \frac{70}{s^3 + 8 \cdot s^2 + 16 \cdot s + 24}$

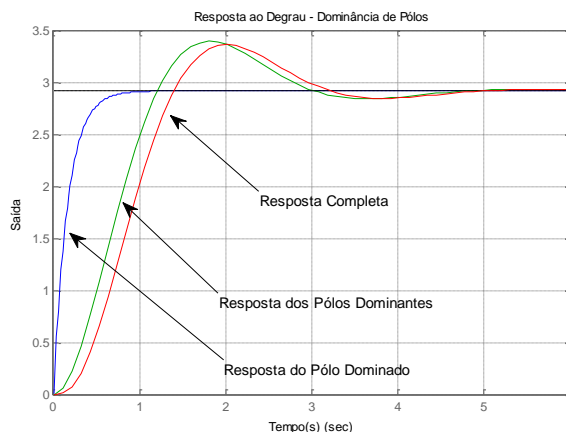


Figura 3.6 – Comparação da Resposta ao Degrau – Dominância de Polos Complexos Conjugados

Exemplo 2 – Sistema de 3ª ordem com polo real dominante

Seja um sistema representado pela função de transferência:

$$G(s) = \frac{420}{s^3 + 13 \cdot s^2 + 156 \cdot s + 144} = \frac{70}{(s+1) \cdot (s^2 + 12 \cdot s + 144)} = 2,92 \cdot \frac{1}{(s+1)} \cdot \frac{1}{(0,0069 \cdot s^2 + 0,083 \cdot s + 1)}$$

O polo real dominante está localizado em $s=-1$ e os polos complexos apresentam parte real de $Re=-6$. Assim o polo real é mais lento que o complexo e dominará a resposta, como pode ser verificado no mapa de polos e zeros da Figura 3.7.

Na figura 3.8 podem ser vistas as respostas completas e somente dos polos dominantes para sistemas de 3ª ordem.

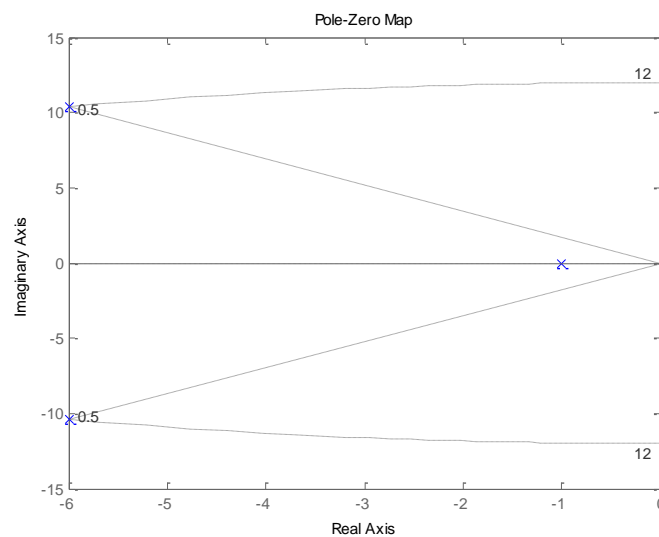


Figura 3.7 – Comparação da Resposta ao Degrau – Dominância de Polo Real

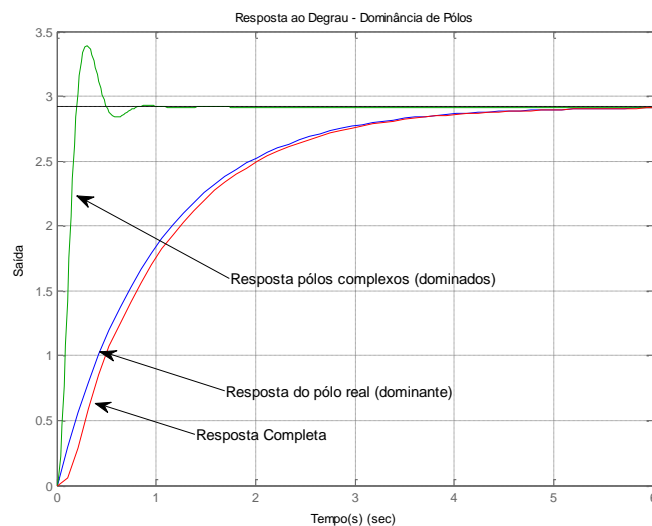


Figura 3.8 – Polo real dominante

3.2.6. Determinando o ganho K (escolhendo um ponto no LGR)

Uma vez traçado o LGR muitas vezes deseja-se conhecer qual o valor do ganho K que proporciona um determinado conjunto de polos.

Exemplo: Estime o ganho K que proporcione polos dominantes com frequência natural de $\omega_n=5 \text{ rad/s}$ e coeficiente de amortecimento $\xi=0,7$ para sistema do exemplo anterior.

Resolução Gráfica Manual:

- Traçar a circunferência de raio 5 rad/s
- Traçar a reta de amortecimento constante de 0,7
- Verificar se o ponto pertence ao LGR do sistema
- Se pertencer, determine os polos desejados e aplique a condição de módulo para obter o valor de K
- Se não pertencer, a especificação não pode ser atingida.
- Como o ponto não pertence, a título de exemplo, será escolhido o ponto que resulta em $\omega_n=5 \text{ rad/s}$. Assim os polos desejados são:

$$s_1 = -2,4 + j \cdot 4,4 \quad e \quad s_2 = -2,4 - j \cdot 4,4$$

$$K_x = \frac{\prod_{i=1}^n |(s + p_i)|}{\prod_{i=1}^n |(s + z_i)|} \bigg|_{s=s_x} = \frac{|-2,4 - j \cdot 4,4| \cdot |-2,4 - j \cdot 4,4 + 3| \cdot |-2,4 - j \cdot 4,4 + 8|}{|-2,4 - j \cdot 4,4 + 5|}$$

$$K_x = \frac{5 \cdot 4,44 \cdot 7,12}{5,11} = 30,9$$

Resolução com Matlab:

O Matlab tem uma ferramenta gráfica bastante útil que auxilia nesta tarefa: os comandos *sgrid* e *rlocfind*:

```
sgrid(0.7,5)                                % Traçando as curvas de wn e csi constantes
                                              % o ponto requerido não faz parte do LGR

[k,r]=rlocfind(sys)
```

Retorno:

```
Select a point in the graphics window      % escolhido ponto com wn=5 rad/s
selected_point = -2.3804 + 4.3692i
k = 30.6799
r =      -6.1669
      -2.4166 + 4.3629i
      -2.4166 - 4.3629i
```

3.2.7. Projeto pelo LGR

No projeto de um sistema de controle devem ser conhecidos os modelos da planta (processo a controlar) e dos elementos de atuação e de medição.

Baseado na aplicação do sistema são definidas as especificações de desempenho requeridas, que são as especificações de regime transiente, permanente e de custo.

Isto posto, será necessário projetar um compensador cuja ação proporcione atingir as especificações do projeto. Logo, o compensador é projetado para suprir as deficiências do sistema original.

O compensador mais “intuitivo” é a inserção de um amplificador de erro com ganho ajustável K. Entretanto

este ajuste nem sempre é suficiente para atender as especificações e torna-se necessário a inclusão de polos e zeros no sistema de forma a alterar o LGR que resulte em uma configuração de polos e zeros de malha fechada adequados.

A configuração de compensação mais usual é a compensação série, que pode ser vista na Figura 3.7 e a compensação em paralelo ou por realimentação na Figura 3.8.

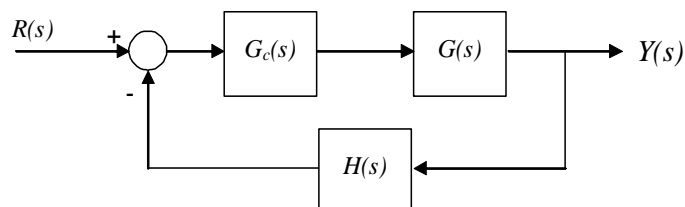


Figura 3.7 – Compensador Série

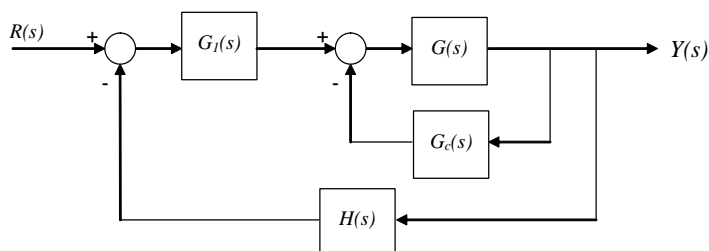


Figura 3.8 – Compensador por Realimentação

Efeitos da adição de polos

Adicionar um polo na função de transferência de malha aberta desloca o LGR em direção ao semi plano direito, causa redução na estabilidade relativa do sistema e torna a resposta do sistema mais lenta.

Em geral para atender a uma especificação de regime permanente de erro em regime permanente é necessária a adição de um integrador, ou seja, um polo na origem que provoca resposta mais lenta e redução da estabilidade relativa.

Efeitos da adição de zeros

Por outro lado, a adição de zeros na função de transferência de malha aberta desloca o LGR para a esquerda, afastando-o do eixo imaginário melhorando as características de estabilidade relativa resultando em transiente mais rápido.

Adicionar um zero equivale a inserir um controle derivativo, o que melhora a estabilidade relativa do sistema.

Ocorrem frequentes confusões em associar a ação derivativa com perda de estabilidade, mas o que ocorre é o sistema se tornar mais susceptível a ação de ruídos e esta característica não está relacionada à perda de estabilidade.

3.2.7.1. Compensadores em Avanço de Fase

Os compensadores em avanço de fase são utilizados quando é necessário melhorar a resposta transiente de um sistema que é demasiadamente lento e/ou apresenta tempo de acomodação elevado.

O compensador em avanço adiciona um polo e um zero de malha aberta no sistema que devem ser estrategicamente posicionados para se obter o efeito desejado.

A forma geral de um compensador em avanço é:

$$G_c(s) = K_c \cdot \alpha \cdot \frac{T \cdot s + 1}{\alpha \cdot T \cdot s + 1} = K_c \cdot \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha \cdot T}} \quad 0 < \alpha < 1$$

Do ponto de vista prático, deve-se procurar fazer α o maior possível resultando em um K_c menor e de implementação física mais fácil.

A seguir tem-se uma sugestão de roteiro para projeto de um controlador em avanço:

- Definir as especificações de desempenho desejadas e obter a localização dos polos dominantes de malha fechada.
- Traçar o LGR do sistema não compensado e sobrepor a localização desejada dos polos dominantes de malha fechada;
- Verificar se somente com o ajuste do ganho K é possível atingir as especificações;
- Se for necessária a adição de um compensador, verifique o ângulo necessário para atingir o ponto especificado através de:

$$\phi_{def} = \arg(G(s) \cdot H(s))\big|_{s=p_x} + 180^\circ$$

- Determine o valor de α e T que satisfazem a equação do ângulo calculado em $s=p_x$

$$\arg(G_c(s))\big|_{s=p_x} = \phi_{def}$$

Diversas serão as combinações de α e T que satisfazem a condição de ângulo e é conveniente utilizar $\alpha > 0,6$ quando possível.

Com o Matlab, pode-se utilizar a ferramenta *rltool*, que possibilita a visualização do LGR e resposta ao impulso e ao degrau unitário.

Ressalta-se que para o controlador ser em avanço o zero do compensador deve estar à direita do polo.

Um compensador PD é uma forma de compensação por avanço de fase na seguinte configuração extrema:

$$PD = K_p + K_D \cdot s$$

Como esta função de transferência não é realizável, o termo derivativo é implementado como:

$$\frac{K_D \cdot s}{\frac{K_D}{N} \cdot s + 1} \approx K_D \cdot s \quad \text{quando } N \gg K_D$$

3.2.7.2. Compensadores em Atraso de Fase

Os compensadores em atraso de fase são indicados quando o sistema não compensado apresenta deficiência no comportamento de regime permanente, não atendendo as especificações de erro em regime permanente, por exemplo.

A forma geral do compensador em atraso é:

$$G_c(s) = K_c \cdot \beta \cdot \frac{T \cdot s + 1}{\beta \cdot T \cdot s + 1} = K_c \cdot \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\beta \cdot T}} \quad \beta > 1$$

Recomenda-se que o compensador em avanço não contribua com mais de 5° nas características de fase do sistema original. Desta forma as características de regime transiente são pouco afetadas e melhora-se as características de regime permanente.

Este efeito é obtido posicionando-se o polo do compensador próximo ao seu zero e ambos próximos ao eixo imaginário.

Atendendo a estas sugestões tem-se que:

$$|G_c(s)| = \left| K_c \cdot \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\beta \cdot T}} \right| \approx K_c$$

$$\arg(G_c(s)) = \arg \left(K_c \cdot \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\beta \cdot T}} \right) \quad e \quad -5^\circ < \arg \left(K_c \cdot \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\beta \cdot T}} \right) < 0$$

O ganho de malha aberta pode ser aumentado de um fator β , que resulta em melhoria das características de regime permanente, sem afetar significativamente o comportamento transiente.

Os controladores de ação proporcional mais integral, os chamados PI, são compensadores em atraso de fase. Na condição extrema em que $\beta \rightarrow \infty$ é introduzido um polo de malha aberta na origem e o compensador será um PI na forma:

$$PI = \frac{K_P \cdot s + K_I}{s}$$

3.2.7.3. Compensadores em Avanço e Atraso de Fase

A compensação em avanço e atraso de fase tem o intuito de aliar as boas características de cada um dos compensadores isolados.

Este compensador, mais complexo, acrescenta dois polos e dois zeros a função de transferência de malha aberta, causando o aumento da ordem do sistema, evidentemente, se não houver cancelamento de polos e zeros.

A forma geral deste tipo de compensador é:

$$G_c(s) = K_c \cdot \frac{\left(s + \frac{1}{T_2} \right)}{\left(s + \frac{1}{\beta \cdot T_2} \right)} \cdot \frac{\left(s + \frac{1}{T_1} \right)}{\left(s + \frac{\gamma}{T_1} \right)} \quad \beta > 1 \quad e \quad \gamma > 1$$

Uma forma bastante usual de utilizarem-se os compensadores em avanço e atraso de fase é a implementação de controladores de ação proporcional mais integral mais derivativa, os PIDs.

Os PIDs são muitas vezes descritos no domínio do tempo por facilidade de entender sua ação.

As formas mais comuns são:

$$u(t) = K_P \cdot e(t) + K_I \cdot \int_0^t e(t) \cdot dt + K_D \cdot \frac{de(t)}{dt}$$

$$u(t) = K_P \cdot \left(e(t) + \frac{1}{T_I} \cdot \int_0^t e(t) \cdot dt + T_D \cdot \frac{de(t)}{dt} \right)$$

$$u(t) = \frac{1}{BP} \cdot \left(e(t) + \frac{1}{T_I} \cdot \int_0^t e(t) \cdot dt + T_D \cdot \frac{de(t)}{dt} \right)$$

Onde:

- K_P - ganho proporcional
- K_I - ganho integral
- K_D - ganho derivativo
- T_I - tempo integral ou de reset
- T_D - tempo derivativo
- BP - banda proporcional

Nota-se uma perfeita equivalência entre as formas e no domínio da frequência tem-se:

$$PID = \frac{K_D \cdot s^2 + K_P \cdot s + K_I}{s \cdot \left(\frac{1}{N} \cdot s + 1 \right)} \approx \frac{K_D \cdot s^2 + K_P \cdot s + K_I}{s}$$

4. Análise e Projeto pela Resposta em Frequência

A resposta em frequência de um sistema equivalente descreve o comportamento do sistema em regime permanente sob excitação senoidal.

Para caracterizar um sinal senoidal, ou simplesmente uma senoide, são necessários três parâmetros: a amplitude, a frequência e a fase.

$$f(t) = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \phi)$$

Para sistemas lineares em regime permanente, a frequência do sinal de saída é a mesma do sinal de entrada, entretanto a amplitude e a fase são diferentes.

Seja um sinal de entrada senoidal definido por:

$$r(t) = A_{in} \cdot \text{sen}(\omega \cdot t)$$

Então o sinal de saída de um sistema LTI estável em regime permanente será:

$$y(t) = A_{out} \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \phi)$$

Caso a frequência de excitação ω variar, a amplitude e a fase do sinal de saída também serão alteradas.

Assim, a resposta em frequência é retratada pela relação entre as amplitudes de entrada e de saída e o deslocamento de fase adicionado pelo sistema para diversas frequências de excitação, geralmente procura-se “varrer” a frequência de 0 a $+\infty$.

Determinando a resposta em frequência através da função de transferência

Seja um sistema linear, invariante no tempo e estável representado pela sua função de transferência $G(s)$, ao qual foi submetida uma excitação senoidal $r(t)$.

Sabe-se que a variável s de Laplace é uma variável complexa sendo composta por uma parte real e uma parte imaginária, assim $s = \sigma + j \cdot \omega$

Como se pretende estudar o comportamento em regime permanente pode-se fazer $\sigma = 0$ e basta substituir $s = j \cdot \omega$ em $G(s)$.

$$G(s) \xrightarrow{s=j\omega} G(j\omega)$$

A função $G(j\omega)$ é chamada de função de transferência senoidal e é uma função de variável complexa, podendo ser representada tanto na forma cartesiana quanto na forma polar:

$$G(j\omega) = \text{Re}(\omega) + j \cdot \text{Im}(\omega)$$

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| \angle G(j\omega)$$

$$|G(j\omega)| = \sqrt{\text{Re}^2 + \text{Im}^2}$$

$$\angle G(j\omega) = \text{tg}^{-1} \left(\frac{\text{Im}}{\text{Re}} \right)$$

O módulo de $G(j\omega)$ é a relação entre as amplitudes dos sinais de entrada e de saída, então:

$$|G(j\omega)| = \frac{A_{out}}{A_{in}} \quad \rightarrow \quad \text{Relação de amplitudes}$$

E o deslocamento (diferença) de fase entre os sinais de entrada e de saída é:

$$\angle G(j\omega) = \phi \quad \rightarrow \quad \text{Deslocamento de fase (defasagem)}$$

Na forma gráfica, a resposta em frequência é representada através dos diagramas de Bode e de Nyquist.

4.1. Diagramas de Bode

Os diagramas de Bode são dois gráficos logarítmicos sendo que um é o gráfico do ganho versus frequência e o outro do deslocamento de fase versus frequência. Assim, as características de módulo e de ângulo podem ser avaliadas separadamente.

Nos diagramas de Bode, o ganho é dado em decibéis (dB), uma unidade relativa definida por:

$$G_{dB} = 20 \cdot \log |G(j\omega)| = 20 \cdot \log \left(\frac{A_{out}}{A_{in}} \right)$$

Quando o ganho em decibéis é positivo, então a relação de amplitudes é superior a unidade e o sinal de entrada está sendo amplificado.

Quando os ganhos em decibéis são negativos equivale a dizer que módulo é menor que a unidade e, portanto, o sinal de entrada é atenuado.

Exemplo: Traçar o diagrama de Bode para um sistema de 1ª ordem a partir de sua função de transferência.

$$G(s) = \frac{K}{\tau \cdot s + 1} \quad \xrightarrow{s=j\omega} \quad G(j\omega) = \frac{K}{j \cdot \omega \cdot \tau + 1}$$

Logo:

$$|G(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{\omega^2 \cdot \tau^2 + 1}} \quad \Rightarrow \quad G_{dB} = 20 \cdot \log \left(\frac{K}{\sqrt{\omega^2 \cdot \tau^2 + 1}} \right)$$

$$\angle G(j\omega) = -\tan^{-1}(\omega \cdot \tau)$$

Variando-se a frequência de 0 a $+\infty$, obtém-se a tabela 3.1:

Tabela 3.1 – Resposta em frequência do Sistema de 1ª Ordem

| Frequência (rad/s) | Ganho Módulo | Ganho (dB) (para $K=1$) | Defasagem (graus) |
|-----------------------|--------------|--------------------------------|----------------------|
| 0 | K | 0 | 0 |
| $0,5/\tau$ | $0,89K$ | -1,0 | -26 |
| $1/\tau$ | $0,707K$ | -3,0 | -45 |
| $2/\tau$ | $0,2K$ | -14,1 | -78 |
| $5/\tau$ | $0,1K$ | -20 | -84 |
| $10/\tau$ | $0,01K$ | -40 | -89 |
| $100/\tau$ | $0,001K$ | -60 | -90 |
| $+\infty$ | 0 | $-\infty$ | -90 |

E os diagramas de Bode, parametrizados em função de ω_c do sistema de 1ª ordem estão mostrados na Figura 4.1.

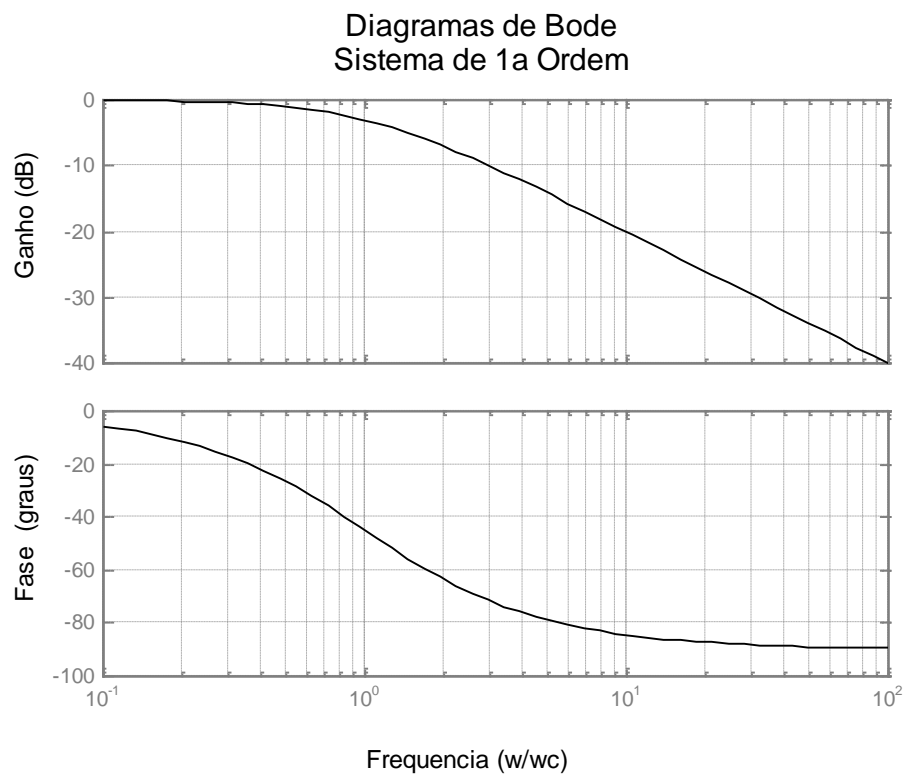


FIGURA 4.1 – Diagramas de Bode para sistemas de 1ª ordem

Exercícios: Traçar, utilizando o Matlab, os diagramas de Bode para os sistemas a seguir:

- $G(s) = K$
- $G(s) = \frac{1}{s}$
- $G(s) = \frac{T_A \cdot s + 1}{T_B \cdot s + 1} = \frac{T_A \cdot s + 1}{\alpha \cdot T_A \cdot s + 1} \quad T_A > T_B \quad \text{ou} \quad 0 < \alpha < 1$
- $G(s) = \frac{T_A \cdot s + 1}{T_B \cdot s + 1} = \frac{T_A \cdot s + 1}{\beta \cdot T_A \cdot s + 1} \quad T_A < T_B \quad \text{ou} \quad \beta > 1$

Os diagramas de Bode são particularmente úteis para se avaliar a largura de banda e a ocorrência de frequências de ressonância em sistemas.

Para sistemas de controle a largura de banda do sistema de malha fechada está associada à velocidade de resposta. Quanto maior a largura de banda, mais rápido é o sistema.

A largura de banda é definida como a frequência em que o ganho é $-3dB$ abaixo do valor do ganho de baixas frequências, independente da ordem do sistema.

Para o sistema de 1ª ordem do exemplo anterior, pode ser verificado que a frequência de corte ocorre em $\omega = \omega_c = \frac{1}{\tau}$, uma vez que o ganho em baixas frequências é de $0db$.

Quando ocorrem picos de ganho nos diagramas de Bode em alguma frequência, ocorreu o fenômeno da ressonância.

A ressonância está associada à presença de polos complexos com coeficiente de amortecimento ξ entre 0 e 0,7 e a frequência de ressonância para estes polos é:

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2 \cdot \xi^2} \quad \text{para} \quad 0 < \xi < 0,707$$

E o valor do ganho na frequência de ressonância é:

$$M_r = |G(j\omega)|_{m\acute{a}x} = |G(j\omega_r)| = \frac{1}{2 \cdot \xi \cdot \sqrt{1 - \xi^2}} \quad \text{para} \quad 0 < \xi < 0,707$$

Para $\xi > 0,707$ não ocorre ressonância e $M_r = 1$.

Na Figura 4.2 podem ser vistas algumas respostas de sistemas de 2ª ordem.

Sistemas de ordem superiores podem apresentar ressonâncias em mais de uma frequência, conhecidas por ressonâncias múltiplas. Este comportamento também ocorre em sistemas não lineares.

Diagramas de Bode Ressonância

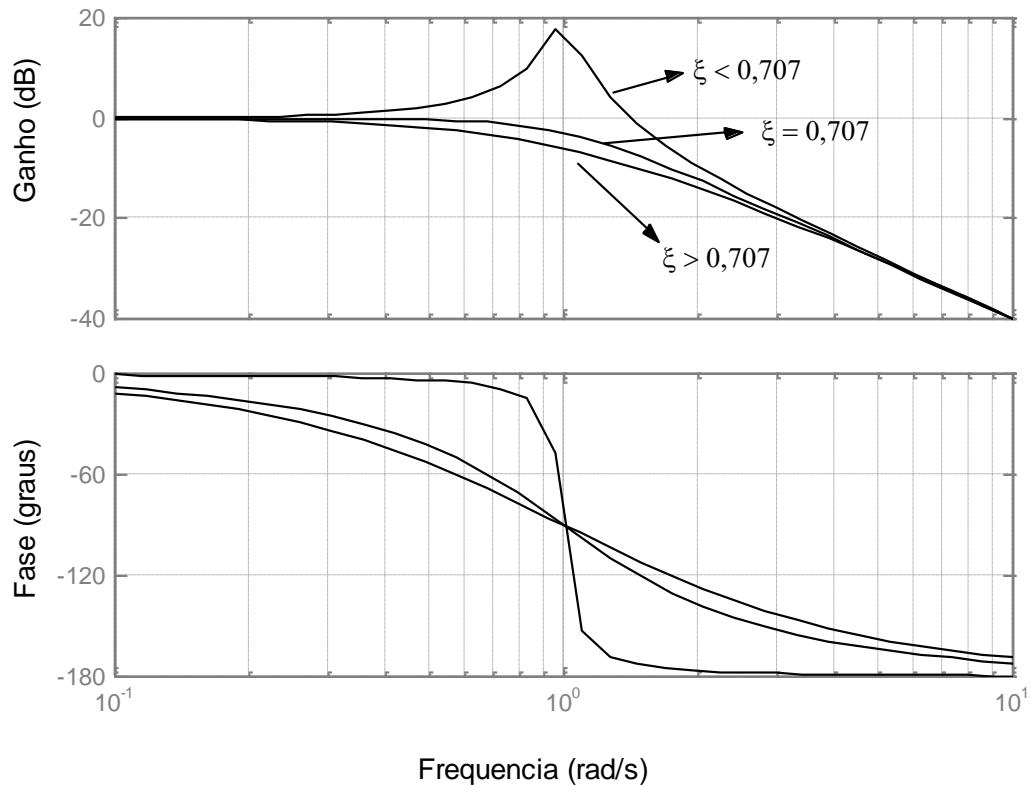
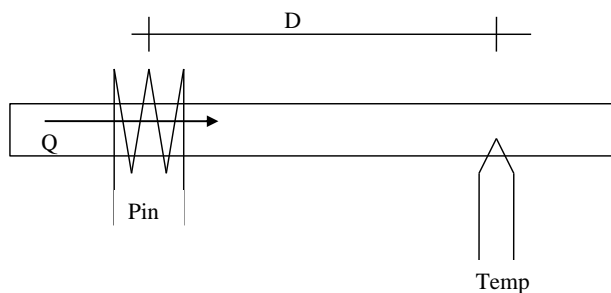


FIGURA 4.2 – Resposta em frequência de sistemas de 2ª ordem.

Caso especial - O Atraso de Transporte

O atraso de transporte é um comportamento bastante comum em processos industriais, também chamado de tempo morto.

É caracterizado por um atraso puro da reposta após ser aplicada uma entrada, como mostrado no exemplo a seguir em que a temperatura do fluido é medida somente após o fluido aquecido se mover do ponto de aplicação de calor até o ponto de medida (desprezando-se os efeitos de convecção e difusão térmica), como o exemplo mostrado na Figura 4.3.



$$\text{Velocidade média do fluido } V = Q / A$$

$$\text{Atraso de Transporte } t_0 = D / V$$

FIGURA 4.3 – Sistema com atraso de transporte

Aplicando o teorema de deslocamento no tempo para transformadas de Laplace, o atraso de transporte é representado no domínio da frequência como:

$$Atraso = e^{-t_0 s}$$

Para excitação senoidal em regime permanente $e^{-t_0 s} \xrightarrow{s=j\omega} e^{-j\omega t_0}$ e utilizando a relação de Euler:

$$e^{-j\omega t_0} = \cos \omega \cdot t_0 - j \cdot \sin \omega \cdot t_0$$

Logo, o atraso de transporte apresenta módulo unitário para qualquer frequência e defasagem linear com a frequência.

$$e^{-j\omega t_0} = 1 \quad \angle \omega \cdot t_0$$

A fase deste sistema não é limitada e este tipo de sistema recebe a denominação de sistemas de fase não mínima.

Todos os sistemas que apresentam zeros no semi plano direito também são de fase não mínima.

Uma aproximação do atraso de transporte muito utilizada para simulação, é a aproximação de Padé de 1ª ordem. Chamando o atraso de L , tem-se que:

$$Atraso = e^{-Ls} = \frac{e^{-\frac{L}{2}s}}{e^{\frac{L}{2}s}}$$

Utilizando a expansão em série de potência para a função exponencial e truncando no termo de primeira ordem:

$$Atraso = e^{-Ls} = \frac{e^{-\frac{L}{2}s}}{e^{\frac{L}{2}s}} \approx \frac{-Ls + 2}{Ls + 2}$$

4.2. Diagrama de Nyquist

O diagrama de Nyquist contém as características de fase e ganho em um único gráfico polar no qual a frequência ω é o parâmetro.

O traçado do diagrama de Nyquist se resume em plotar os pontos de ganho e fase diretamente no plano complexo s , tendo a frequência ω como parâmetro.

Utilizando a Tabela 4.1 como exemplo, foi traçado o diagrama de Nyquist para um sistema de 1ª ordem, que pode ser visto na Figura 4.4.

O diagrama de Nyquist é muito útil para se determinar a estabilidade de um sistema em malha fechada, que está relacionada ao envolvimento do ponto $-1+j0$ no sentido anti-horário.

4.2.1. Análise de Estabilidade Relativa

A estabilidade relativa avalia se o sistema permanece estável caso ocorra variação de algum parâmetro do sistema.

Esta análise é interessante quando deseja verificar a estabilidade de sistemas cujos parâmetros dos modelos matemáticos contêm incertezas.

A medida da estabilidade relativa é realizada através das margens de ganho e de fase.

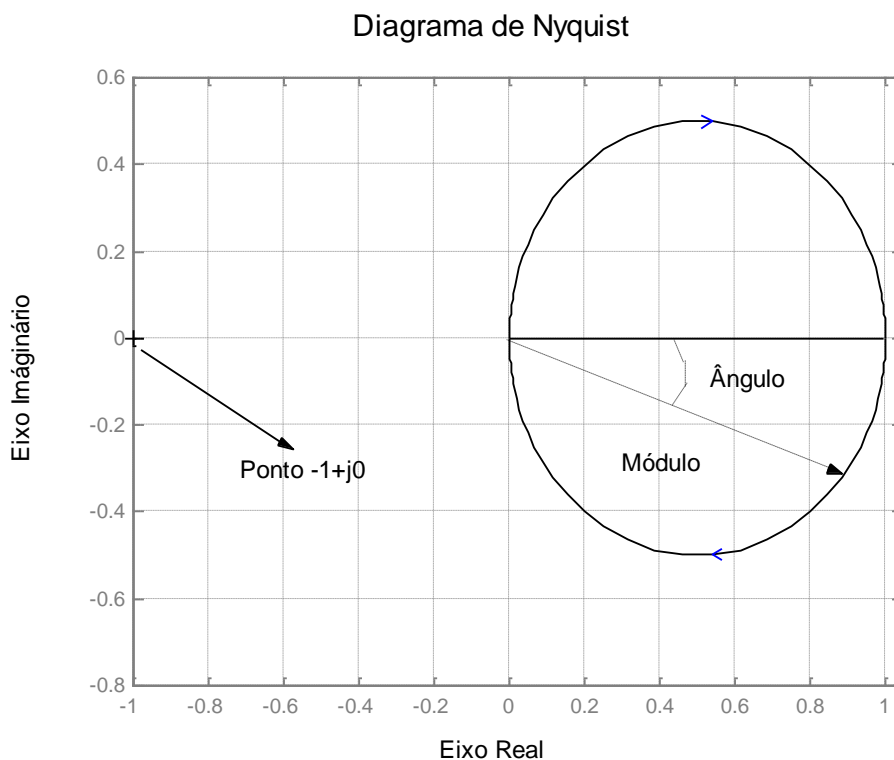


FIGURA 4.4 – Diagrama de Nyquist para um sistema de 1ª ordem

A margem de ganho é o valor que pode ser aumentado no ganho de malha do sistema sem que ocorra perda de estabilidade.

A margem de fase é o atraso puro de fase que pode ser adicionado sem que o sistema se torne instável.

Para definir a estabilidade relativa, tanto a margem de fase quanto a margem de ganho devem ser fornecidas. Existem sistemas que apresentam boa margem de ganho, mas são deficientes em margem de fase e vice-versa.

Analogamente ao método do Lugar Geométrico das Raízes, estuda-se o comportamento do sistema de malha aberta para concluir sobre a estabilidade do sistema de malha fechada, neste caso à luz da resposta em frequência.

$$1 + G(s) \cdot H(s) = 0 \quad \text{pólos de malha fechada}$$

ou

$$G(s) \cdot H(s) = -1$$

ou

$$|G(s) \cdot H(s)| = 1 \quad e \quad \angle(G(s) \cdot H(s)) = -180^\circ$$

Assim as margens de ganho e de fase são, conjuntamente, uma medida da distância do diagrama polar ao ponto $-1+j0$ do plano complexo.

São definidas:

Frequência de cruzamento de ganho ou de ganho crítico ω_{GC} – é a frequência na qual o sistema de malha aberta apresenta ganho unitário ou 0 dB.

Frequência de cruzamento de fase ou de fase crítica ω_{FC} – é a frequência na qual o sistema de malha aberta apresenta fase de -180° .

- Margem de Fase – é o atraso adicional de fase γ que pode ser incorporado ao sistema na frequência de ganho crítico tal que $\gamma = 180^\circ + \phi$, onde ϕ é a fase nesta frequência.
- Margem de Ganho – é o aumento de ganho em dB que pode ser acrescentado ao ganho do sistema na frequência de fase crítica sem que cause instabilidade. A margem de ganho também pode ser apresentada em termos de ganho absoluto.

$$MG = \frac{1}{|G(j\omega)|} \Big|_{\omega=\omega_{FC}} \quad \text{ou} \quad MG_{dB} = 20 \cdot \log(MG)$$

Para que o sistema seja estável, tanto a margem de ganho (em dB) quanto a margem de fase de ser positivas. Seja o diagrama de Bode da função de transferência de malha aberta de um sistema genérico da Figura 4.5.

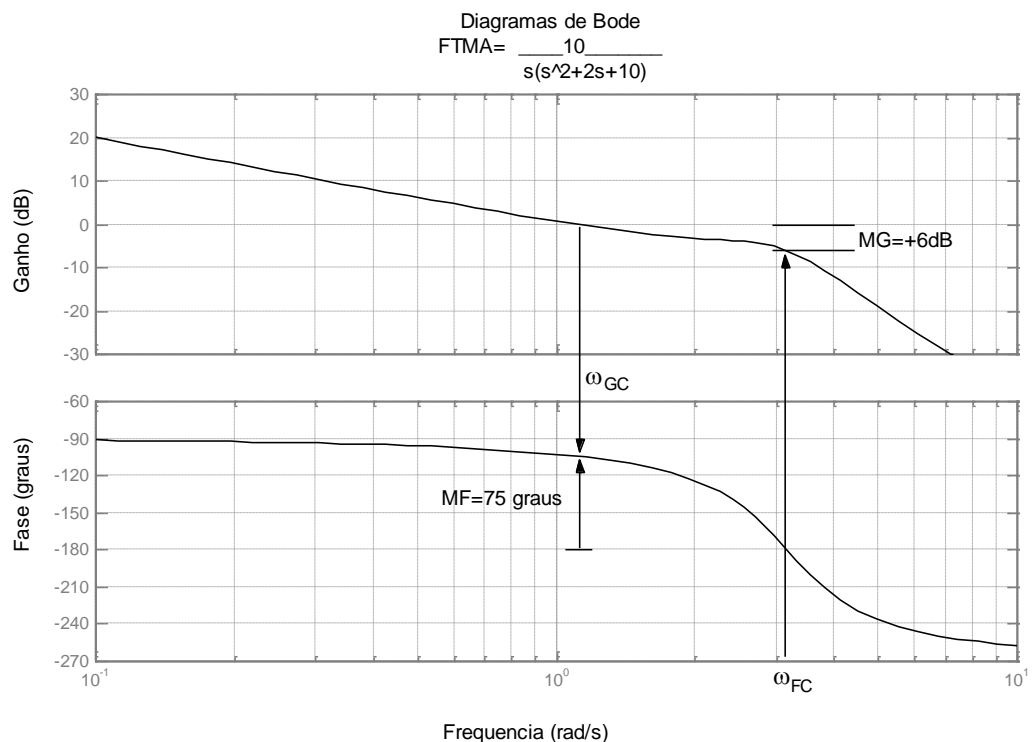


FIGURA 4.5 – Medida da Estabilidade Relativa por Bode

Note que um aumento no ganho do sistema causa um deslocamento vertical para cima no diagrama de Bode, preservando sua forma, e deslocando a frequência de ganho crítico para a direita.

Uma redução pura de fase (aumento da defasagem) causa um deslocamento para baixo do diagrama de fase, deslocando a frequência de fase crítica para a esquerda.

A mesma análise pode ser feita utilizando o diagrama de Nyquist, traçado para a mesma função de transferência do exemplo anterior, conforme Figura 4.6.

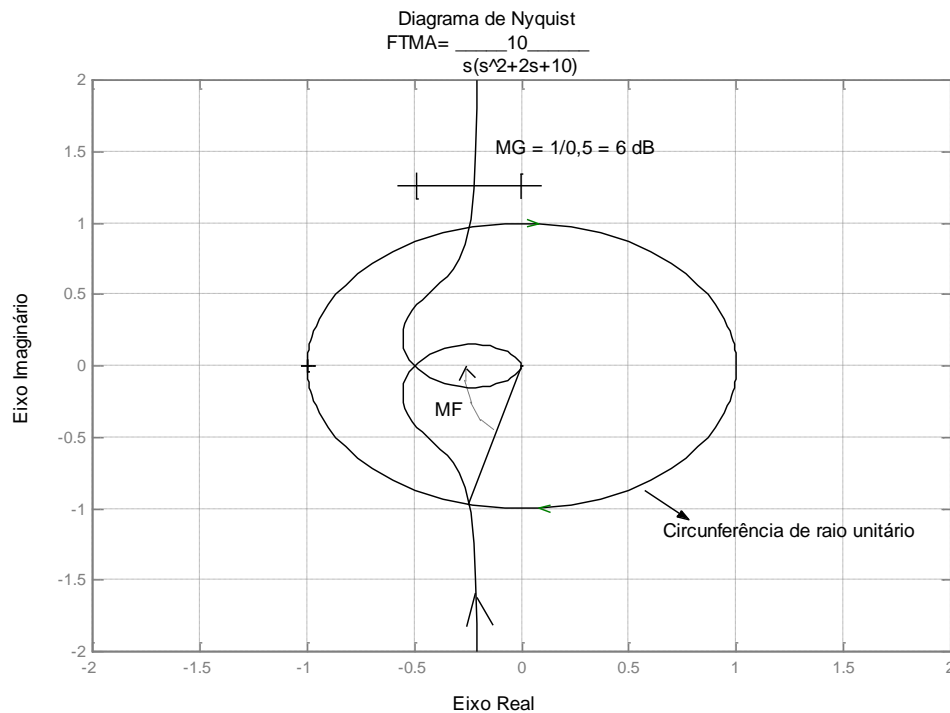


FIGURA 4.6 – Medida da Estabilidade Relativa por Nyquist

Note que um aumento no ganho do sistema causa um aumento nas dimensões do diagrama polar, preservando sua forma.

Uma redução pura de fase causa um giro em sentido anti-horário em torno da origem do diagrama polar.

De forma geral, considera-se razoável que sistemas de controle apresentem margens de fase entre 30° e 60° e margem de ganho maior que 6 dB . Entretanto esta consideração não deve ser entendida como necessária, mas como uma orientação.

Uma aproximação bastante utilizada é a relação entre margem de fase e o coeficiente de amortecimento de um sistema de 2ª ordem sub amortecido na qual:

$$\xi \approx \frac{MF}{100}$$

4.3. Projeto pela Resposta em Frequência

Analogamente ao método do LGR, os compensadores podem ser projetados pelo método de Resposta em Frequência.

4.3.1. Compensador por avanço de fase

O compensador por avanço série, de acordo com a Figura 30, tem a seguinte estrutura:

$$G_c(s) = K_c \cdot \alpha \cdot \frac{T \cdot s + 1}{\alpha \cdot T \cdot s + 1} = K_c \cdot \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha \cdot T}} \quad 0 < \alpha < 1$$

A resposta em frequência do compensador para $\alpha = 0,5$ e $T = 1$ segundo é:

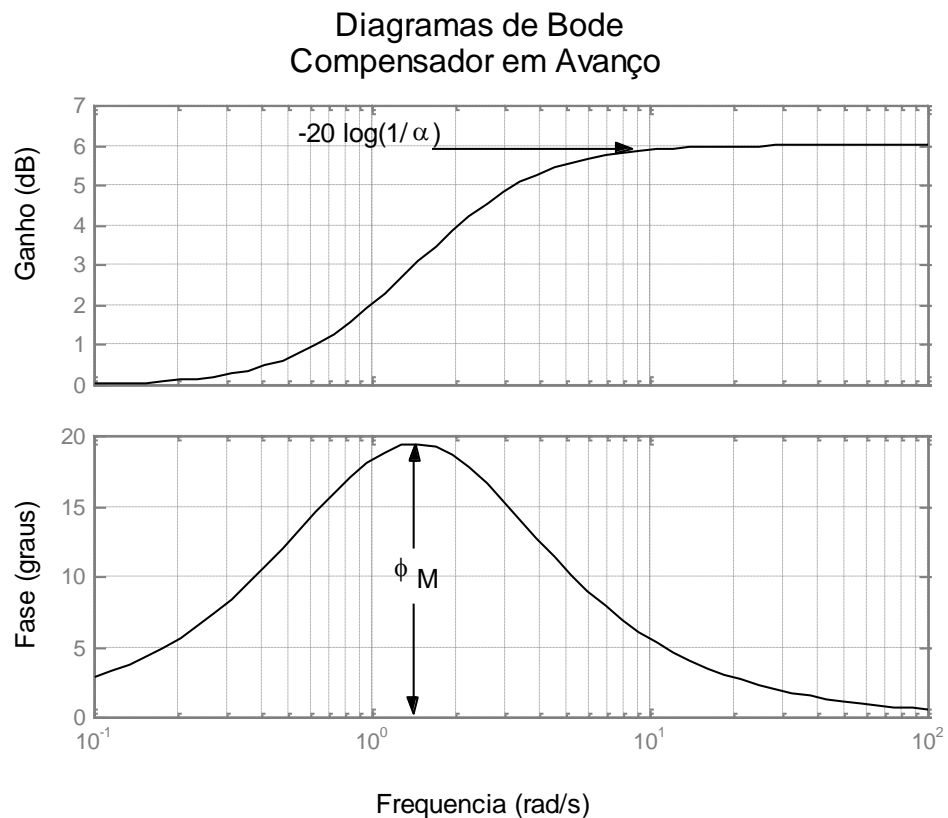


FIGURA 41 – Resposta em Frequência para o Compensador em Avanço

O avanço de fase máximo e a frequência na qual ele ocorre são:

$$\begin{aligned} \sin \phi_m &= \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \\ \omega_m &= \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \frac{1}{\alpha \cdot T}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha} \cdot T} \end{aligned}$$

Este compensador é utilizado quando se deseja aumentar a margem de fase do sistema e deve-se notar que:

- Aumentar o ganho de um sistema não altera o diagrama de fase;
- Todos os compensadores série trazem impactos aditivos tanto na fase quanto no ganho;
- Compensador em avanço não altera o ganho de malha aberta em baixas frequências, mas aumenta o ganho para altas frequências;
- Praticamente não contribui com fase em baixas frequências nem em altas frequências.

Procedimento de projeto de Compensador em Avanço

- Determinar o ganho K_c para satisfazer a condições de erro estacionário;
- Determinado K_c , obter a margem de fase do sistema não compensado;
- Estimar o ângulo de avanço necessário ϕ_m para atender as condições de margem de fase;
- Determinar o fator de atenuação α pela equação:

$$\sin \phi_m = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}$$

- Obter a frequência ω_m onde o ganho do sistema não compensado vale $-20 \cdot \log\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)$. Nesta frequência deve ocorrer o máximo avanço ϕ_m .
- Calcular T por $\omega_m = \frac{1}{\sqrt{\alpha} \cdot T}$
- Caso não seja possível obter uma solução realizável, pode-se inserir duas redes de avanço em cascata.

Exercício: Seja um sistema com realimentação unitária cuja função de transferência de malha aberta é

$$G(s) = \frac{5}{s \cdot (s + 2)}$$

e deve atender às seguintes especificações:

- ✓ Erro em estado estacionário para entrada rampa unitária menor que 0,1 segundo e,
- ✓ Margem de fase de, pelo menos, 50°.

4.3.2. Compensador por atraso de fase

Os compensadores têm a seguinte estrutura:

$$G_c(s) = K_c \cdot \beta \cdot \frac{T \cdot s + 1}{\beta \cdot T \cdot s + 1} = K_c \cdot \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\beta \cdot T}} \quad \beta > 1$$

Cujos Diagramas de Bode são:

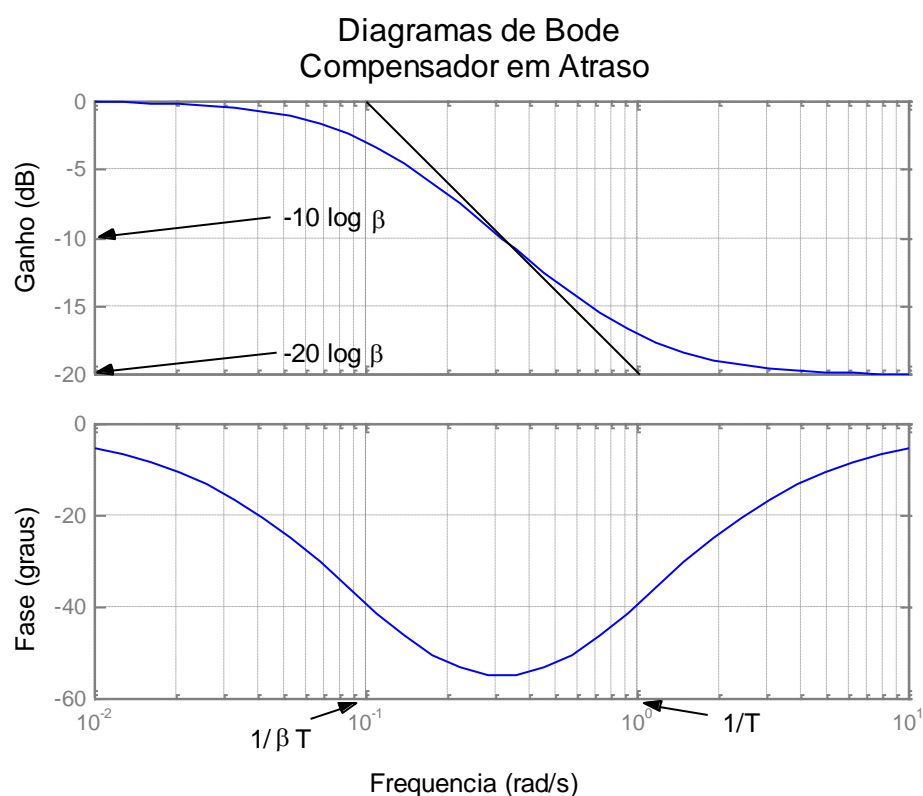


FIGURA 42 – Resposta em Frequência para Compensador em Atraso

O compensador em atraso introduz atraso em todas as frequências e apesar disto, não são as características de fase que são importantes para este compensador, mas sim a atenuação das altas frequências.

Essencialmente um compensador em atraso é um filtro passa baixas e deve ser utilizado quando os requisitos transientes estão atendidos e é necessário melhorar as especificações de regime permanente.

Procedimento de projeto de Compensador em Atraso de Fase

- Determinar o ganho para atender a especificação de regime permanente;
- Utilizando este ganho, traçar o diagrama de Bode do sistema não compensado e determinar as margens de ganho e de fase;
- Se a especificação de margem de fase não estiver atendida, estimar a margem de fase desejada e fazer $MFC = MF_{desejada} + 10^\circ$ (somar de 5° a 12°).

- Determinar a frequência na qual a fase será: $\phi = -180 + MFC$. Está será a frequência de ganho crítico do sistema compensado ω_{GC_Comp} ;
- Escolher a frequência de corte $\omega = \frac{1}{T}$ (que será o zero do compensador) de duas a dez vezes abaixo da frequência de ganho crítico ω_{GC_Comp} calculada anteriormente;
- Determinar a atenuação A_n em dB necessária no diagrama de Bode do sistema não compensado, para que a frequência ω_{GC_Comp} apresente 0 dB .
- Determinar o fator $\beta = 10^{\frac{-A_n}{20}}$
- Determinar a frequência de canto do polo do compensador.

Exercício: Considerando que a planta a seguir com realimentação unitária, projetar um compensador série em atraso para atender as seguintes especificações:

- Erro em regime permanente para entrada rampa de $r(t) = t$ (rampa unitária) seja de $0,5s$;
- Margem de fase não inferior a 35° .

$$G(s) = \frac{5}{s \cdot (s + 2) \cdot (s + 4)}$$

5. Projeto e Sintonia de Controladores

No processo de modelagem matemática de um sistema físico, as estimativas dos parâmetros dos modelos incluem incertezas consideráveis.

Uma das finalidades de se projetar um sistema de controle é obter um resultado que não seja significativamente afetado se os parâmetros da planta não forem exatos ou sofrerem alterações com o decorrer do tempo de uso.

Em resumo, o sistema de controle deve ser robusto o suficiente para absorver estas imprecisões e prover um comportamento dinâmico e estático adequado.

Os controladores de ação Proporcional + Integral + Derivativa, os populares PIDs, apresentam robustez suficiente para grande parte das aplicações industriais e tem seu comportamento de entendimento relativamente simples, o que torna esta estratégia de controle a mais largamente utilizada atualmente.

5.1. Controladores de três termos

Os controladores de três termos apresentam uma ação cujo sinal de controle $u(t)$ é formado pela soma de três parcelas, sem uma proporcional ao erro atuante, outra proporcional à integral do erro e outra proporcional à derivada do erro.

Grande parte dos processos industriais é representada por sistemas do tipo zero, ou seja, não apresentam integradores no ramo direto. As análises e comentários descritos neste capítulo referem-se a sistemas desta natureza.

Existem diversas formas de implementar esta estratégia e a mais comum e de fácil entendimento é a mostrada na Figura 5.1.

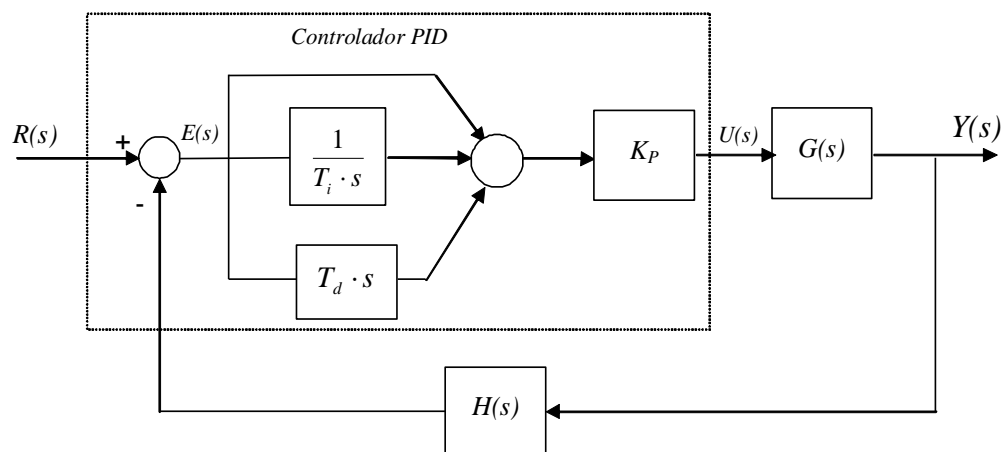


FIGURA 5.1 – Controlador PID

Assim, as equações que implementam um controle PID são:

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p \cdot \left(1 + \frac{1}{T_i \cdot s} + T_d \cdot s \right) \quad \text{domínio da frequência}$$

$$u(t) = K_p \cdot \left(e(t) + \frac{1}{T_i} \cdot \int_0^t e(t) dt + T_d \cdot \frac{de(t)}{dt} \right) \quad \text{domínio do tempo}$$

Ou ainda:

$$\frac{U(s)}{E(s)} = \frac{K_P \cdot T_d \cdot s^2 + K_P \cdot s + \frac{K_P}{T_i}}{s}$$

Sabe-se que funções de transferência realizáveis o grau do denominador deve ser igual ou superior a grau do numerador. Assim, uma implementação realizável do PID é:

$$\frac{U(s)}{E(s)} = \frac{K_P \cdot T_d \cdot s^2 + K_P \cdot s + \frac{K_P}{T_i}}{s \cdot \left(\frac{1}{N} \cdot s + 1 \right)}$$

Nota-se que um controle PID aumenta a ordem do sistema em duas unidades, aumenta o tipo do sistema em uma unidade (devido a presença do integrador) e acrescenta dois zeros em malha aberta.

Em termos práticos considera-se que o PID aumenta a ordem do sistema em uma unidade porque despreza-se o efeito do polo em $s = -N$ fazendo N o maior possível.

Boa parte dos controladores industriais utiliza o conceito de banda proporcional BP para descrever o ganho proporcional K_P , fazendo:

$$BP = \frac{1}{K_P} \cdot 100\%$$

E a equação implementada é:

$$\frac{U(s)}{E(s)} = \frac{100}{BP} \cdot \left(1 + \frac{1}{T_i \cdot s} + T_d \cdot s \right) \quad \text{domínio da frequência}$$

$$u(t) = \frac{100}{BP} \cdot \left(e(t) + \frac{1}{T_i} \cdot \int_0^t e(t) dt + T_d \cdot \frac{de(t)}{dt} \right) \quad \text{domínio do tempo}$$

Para analisar separadamente a ação de cada termo será tomado como exemplo um sistema com realimentação unitária com a seguinte função de transferência de malha aberta:

$$G(s) = \frac{103 \cdot e^{-8s}}{100 \cdot s + 1}$$

Utilizando a aproximação de Padé de 1ª ordem para o atraso de transporte fica:

$$FTMA = G(s) = \frac{103 \cdot (-s + 0,25)}{(100 \cdot s + 1) \cdot (s + 0,25)}$$

5.1.1. Ação Proporcional

Na ação proporcional o sinal de controle $u(t)$ é diretamente proporcional ao erro atuante e a constante de proporcionalidade é chamada de ganho proporcional K_p .

$$u(t) = K_p \cdot e(t)$$

Em aplicações usuais, os controladores puramente proporcionais resultam em sistemas com elevado erro em regime permanente mesmo para entradas estáticas (degrau).

Para redução deste erro pode-se aumentar o valor do ganho, o que pode prejudicar o transiente que se torna fortemente oscilatório podendo até causar instabilidade.

A seguir podem ser vistas na Figura 5.2 as respostas ao degrau unitário variando-se o valor de K_p .

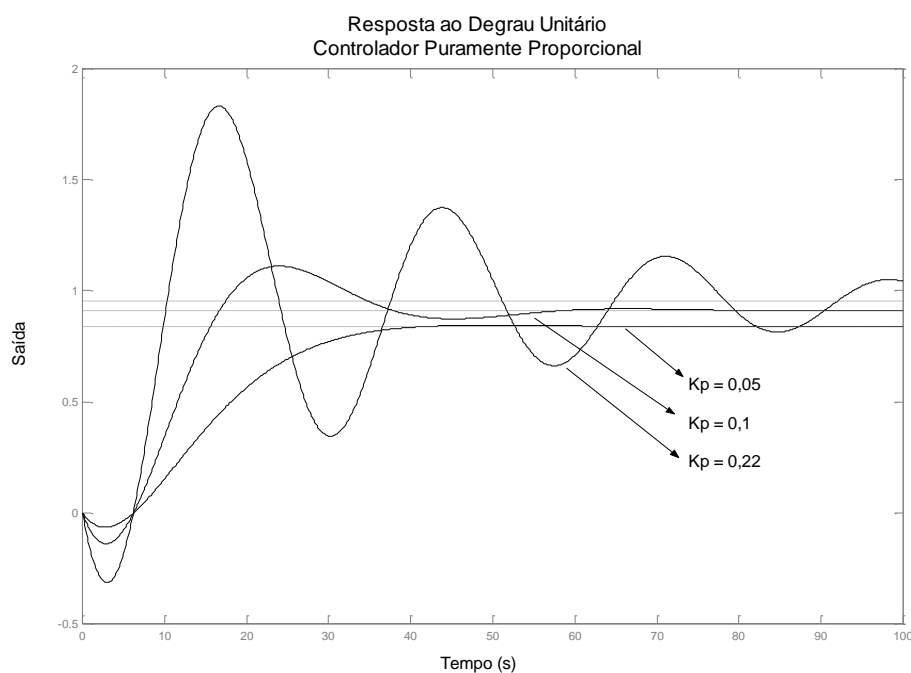


FIGURA 5.2 – Efeito da ação proporcional

5.1.2. Ação Integral

Na Figura 5.3 tem-se o efeito de um controlador puramente integral com a função de transferência

$$\frac{U(s)}{E(s)} = \frac{1}{T_i \cdot s} \text{ na planta tomada como exemplo.}$$

O controle de ação integral é empregado para remover o erro de regime permanente, entretanto um controle puramente integral torna o sistema excessivamente lento uma vez que o termo integral apresenta contribuição significativa para o sinal de controle quando o tempo de integração é alto.

Deve ser notado ainda que o comportamento final também é excessivamente oscilatório, o que demonstra que o sistema tem margem de fase muito reduzida.

Analisando o LGR verifica-se que a faixa de ganhos para manter a estabilidade é restrita e o sistema final não apresenta robustez à variação dos parâmetros da planta.

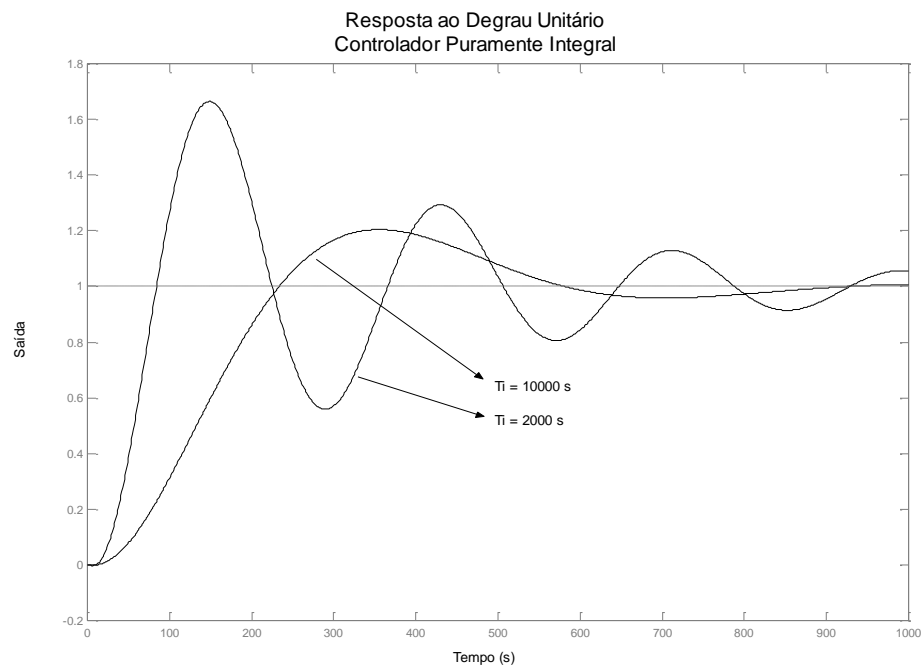


FIGURA 5.3 – Efeito da ação integral pura

5.1.3. Ação Derivativa

A ação derivativa, para entrada estática (degrau, por exemplo) não apresenta resposta em regime permanente e este tipo de controlador não pode ser empregado sozinho.

Pelo mesmo motivo a ação derivativa não altera as características de regime permanente como o erro em regime permanente para entrada degrau, atuando somente no regime transiente.

O termo derivativo $\frac{U(s)}{E(s)} = T_d \cdot s$ é incorporado quando é necessário reduzir comportamentos demasiadamente oscilatórios (sobre sinal) e tempos de acomodação elevados.

O uso de ação derivativa aumenta a largura de banda do sistema que pode ficar susceptível a ruídos e não deve ser empregado em sistemas cujo elemento de medida seja ruidoso.

5.2. Controladores P, PI, PD e PID

A seguir serão verificados os efeitos conjugados das três ações de controle. O diagrama de blocos utilizado é o da Figura 5.1.

O comportamento de um controlador puramente proporcional pode ser verificado no item anterior.

5.2.1. Controlador PI

O controlador PI apresenta uma ação proporcional + integral em relação ao erro atuante e incorpora as melhores características de cada uma das ações independentes.

O termo proporcional é responsável pela velocidade de resposta (transiente) e o termo integral garante o comportamento de regime transiente.

A combinação destes dois efeitos pode ser analisada na Figura 5.4, na qual é mostrada a resposta ao degrau para um controlador PI.

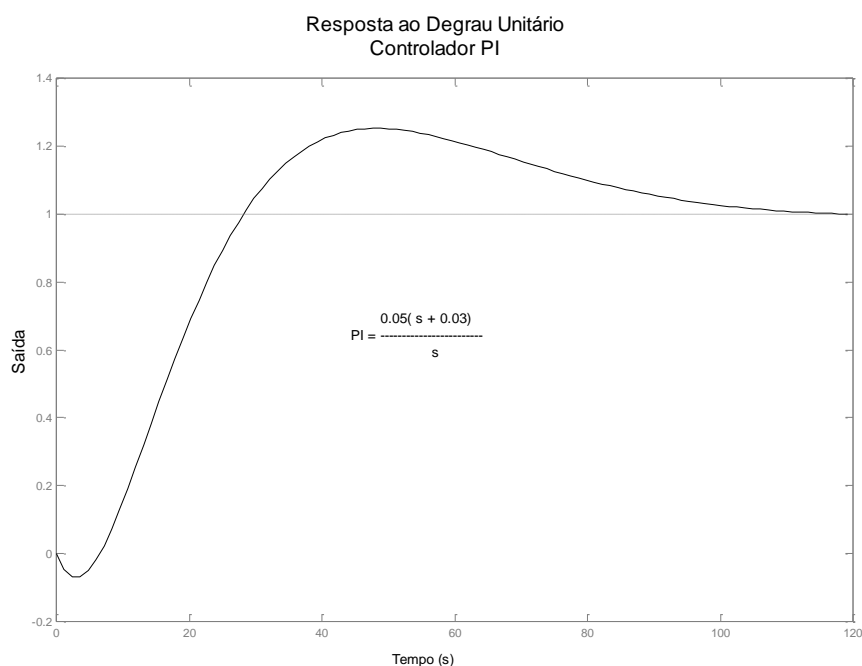


FIGURA 5.4 – Controlador PI

5.2.2. Controlador PD

O controle PD é utilizado para reduzir comportamento demasiadamente oscilatório e melhorar a rejeição de perturbações, principalmente em sistemas originalmente do **Tipo 1** ou cujos requisitos de erro em regime são atendidos pelo termo proporcional.

Devido ao termo derivativo, este controlador também deve ser empregado com cautela em sistemas ruidosos.

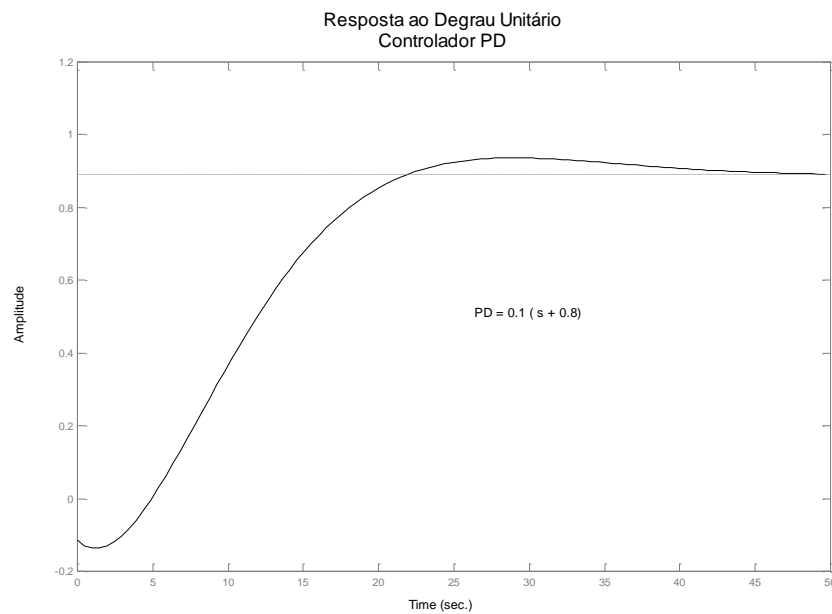


FIGURA 5.5 – Controlador PD

5.2.3. Controlador PID

O controlador PID apresenta as boas características das ações isoladas dos termos, que são velocidade de resposta (termo proporcional), eliminação do erro em regime permanente (termo integral) e redução de comportamento oscilatório de decaimento lento (termo derivativo).

Na Figura 5.6 podem ser vistas a ação deste tipo de controlador em três sintonias diferentes.

Ressalta-se que não existe resposta ótima que atenda a toda e qualquer aplicação e a seleção dos parâmetros PID é uma escolha do engenheiro de controle de forma a atender as especificações de desempenho do processo em questão.

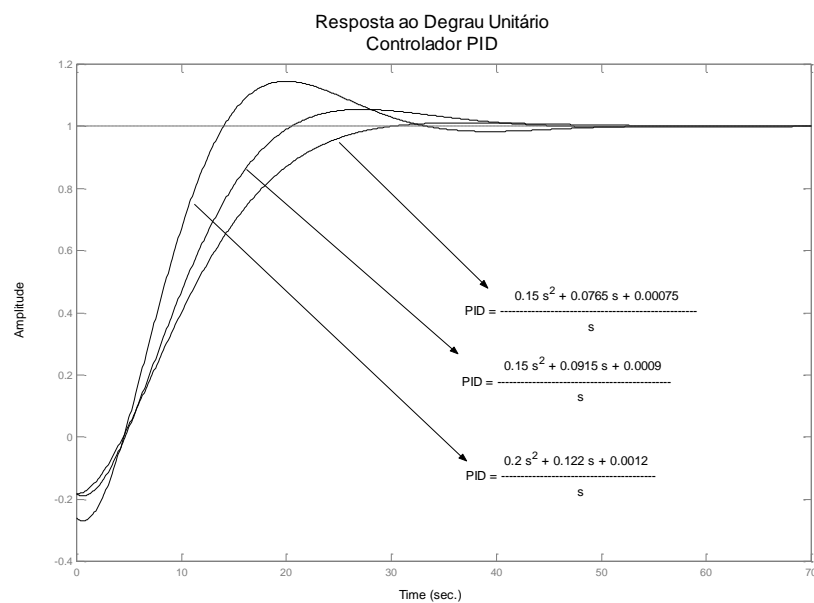


FIGURA 5.6 – Controlador PID

5.3. Métodos de Sintonia de Controladores de Três Termos

Diversos métodos são utilizados para fornecer a pré sintonia de controladores PID sendo que a maioria dos métodos é baseada na resposta transiente a uma entrada degrau.

5.3.1. Primeiro Método de Ziegler / Nichols

Este método desenvolvido em 1942 é um dos mais conhecidos e ainda é bastante utilizado e fornece sugestões de pré sintonia para implementações similares a da Figura 5.7.

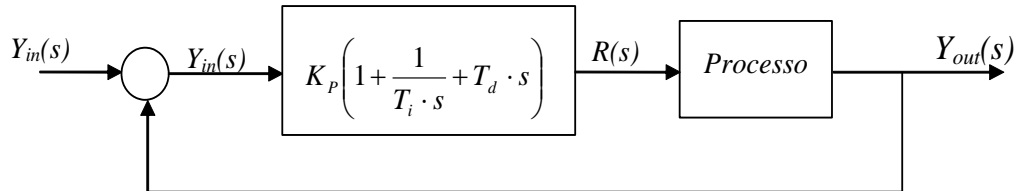


Figura 5.7 – Sistema em malha fechada com estrutura PID

Considerando o processo em regime permanente (linha base), aplica-se uma variação no sinal de entrada (degrau de amplitude conhecida) do processo em malha aberta e registra-se a evolução da variável controlada (Figura 5.8).

Este procedimento pode ser aplicado somente se a curva de reação a uma entrada degrau for similar à curva S (“S shape reaction curve”).

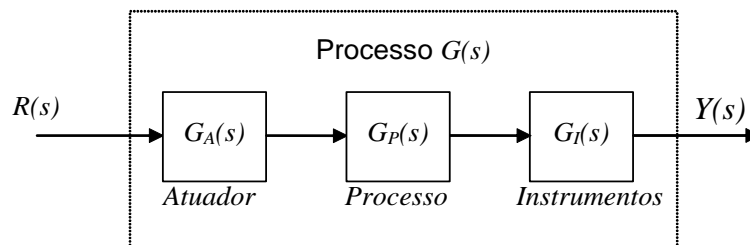


Figura 5.8 – Sistema em malha aberta

A resposta ao degrau com formato S pode ser representada por um sistema de 1ª ordem associado a um atraso de transporte.

$$\frac{\Delta Y}{\Delta R} = \frac{K \cdot e^{-L \cdot s}}{T \cdot s + 1}$$

São necessários três parâmetros para definir o modelo: o atraso de transporte L , a constante de tempo T e o ganho K .

Para determinar o atraso e a constante de tempo deve-se traçar uma reta tangente passando pelo ponto de inflexão (ponto de máxima inclinação) da resposta, como exemplificado na Figura 51.

O atraso de transporte L é o tempo decorrido entre a aplicação da entrada e o cruzamento da reta tangente com a linha base.

A constante de tempo T é o tempo para a reta tangente subir de 0 a 100% da evolução do sinal de saída.

O ganho K é determinado pela relação entre a variação da saída ΔY e variação da entrada ΔA , ou seja,

$$K = \frac{\Delta y}{\Delta A}.$$

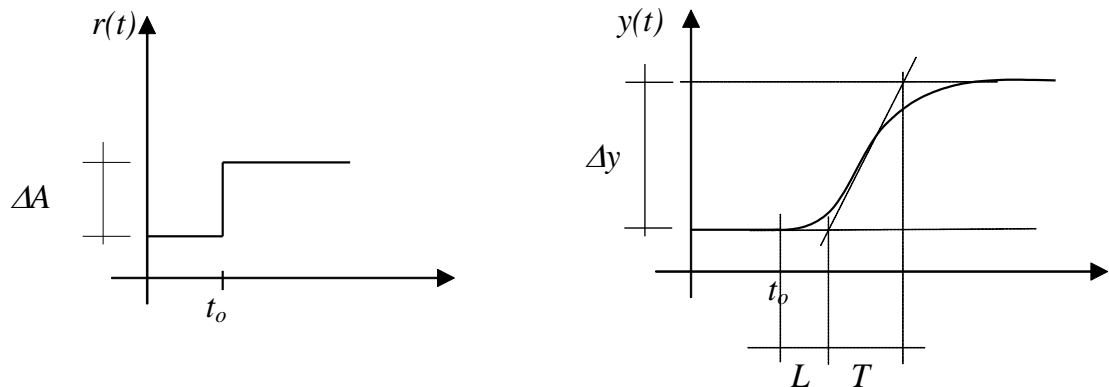


Figura 5.9 – Resposta ao Degrau de um processo

A sugestão de Ziegler e Nichols para o compensador PID em suas três versões mais utilizadas são as da Tabela 5.1.

Tabela 5.1 – Ganhos de Ziegler e Nichols (1º Método)

| Compensador | K_P | T_i | T_d |
|-------------|---------------------------------|-----------------|---------------|
| P | $\frac{T}{K \cdot L}$ | ∞ | 0 |
| PI | $0,9 \cdot \frac{T}{K \cdot L}$ | $\frac{L}{0,3}$ | 0 |
| PID | $1,2 \cdot \frac{T}{K \cdot L}$ | $2 \cdot L$ | $0,5 \cdot L$ |

A equação para um compensador PID segundo Ziegler e Nichols será;

$$G_{PID} = K_P \left(1 + \frac{1}{T_i \cdot s} + T_d \cdot s \right) = 1,2 \frac{T}{K \cdot L} \left(1 + \frac{1}{2 \cdot L \cdot s} + 0,5 \cdot L \cdot s \right)$$

$$G_{PID} = 0,6 \frac{T}{K} \frac{\left(s + \frac{1}{L} \right)^2}{s}$$

Logo, a sugestão PID é colocar um polo de malha aberta na origem (integrador) e um zero duplo sobre o atraso de transporte ($s = -1/L$).

5.3.2. Sugestão de Cohen e Coon

A sugestão de Cohen e Coon busca um sistema que em malha fechada apresente resposta ao degrau cuja amplitude de oscilação decaia 75% a cada ciclo, ou seja, que oscilação atual tenha amplitude de 25% da amplitude do ciclo anterior (“1/4 ratio decay”)

A estrutura do PID e o modelo do processo são os mesmos vistos anteriormente e sugestão para os ganhos estão na Tabela 5.2.

Tabela 5.2 – Ganhos de Cohen e Coon

| Compensador | K_p | T_i | T_d |
|-------------|--|---|--|
| P | $\frac{T}{K \cdot L} \left(1 + \frac{L}{3 \cdot T} \right)$ | ∞ | 0 |
| PI | $\frac{T}{K \cdot L} \left(\frac{9}{10} + \frac{L}{12 \cdot T} \right)$ | $L \cdot \frac{30 + 3 \cdot (L/T)}{9 + 20 \cdot (L/T)}$ | 0 |
| PID | $\frac{T}{K \cdot L} \left(\frac{4}{3} + \frac{L}{4 \cdot T} \right)$ | $L \cdot \frac{32 + 6 \cdot (L/T)}{13 + 8 \cdot (L/T)}$ | $L \cdot \frac{4}{11 + 2 \cdot (L/T)}$ |

5.3.3. 2º Método de Ziegler e Nichols

No 2º método são realizados ensaios em malha fechada com o compensador em modo puramente proporcional ($T_i = \infty$ e $T_d = 0$).

Aumenta-se sucessivamente o valor de K_p e aplica-se uma perturbação de pequena amplitude no sistema observando o resultado. Note que em alguns casos se o sistema não for perturbado o sistema não apresentará oscilação.

Quando o sistema apresentar oscilação sustentada, o ganho atingiu seu valor crítico $K_p = K_{cr}$ e o sistema está no limiar de estabilidade, como o comportamento mostrado na Figura 5.10.

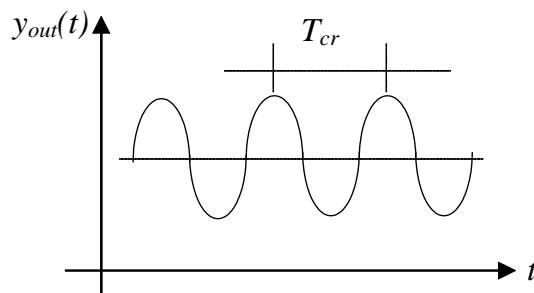


Figura 5.10 – Oscilação sustentada

Deve-se então medir experimentalmente o período da oscilação T_{cr} . Os ganhos sugeridos por Ziegler Nichols estão na Tabela 5.3.

Tabela 5.3 – Ganhos de Ziegler e Nichols (2º Método)

| Compensador | K_p | T_i | T_d |
|-------------|---------------------|----------------------|--------------------|
| P | $\frac{K_{cr}}{2}$ | ∞ | 0 |
| PI | $0,45 \cdot K_{cr}$ | $\frac{T_{cr}}{1,2}$ | 0 |
| PID | $0,6 \cdot K_{cr}$ | $\frac{T_{cr}}{2}$ | $\frac{T_{cr}}{8}$ |

5.4. Exemplo de Aplicação

Seja o sistema térmico ensaiado no laboratório LIC-FEAGRI-UNICAMP e representado pelo modelo:

$$G(s) = \frac{103 \cdot e^{-8s}}{100 \cdot s + 1} \text{ sabendo que a entrada pode ser excursionada de 0 a 1 (0 a 100\%):}$$

$$\text{Ganho de Malha} \quad K = 103 \text{ } ^\circ\text{C}/\%$$

$$\text{Atraso de Transporte} \quad L = 8 \text{ s}$$

$$\text{Constante de Tempo} \quad T = 100 \text{ s}$$

Utilizando a aproximação de Padé de 1ª ordem para o atraso de transporte, a função de transferência de malha aberta será:

$$FTMA = G(s) = \frac{103 \cdot (-s + 0,25)}{(100 \cdot s + 1) \cdot (s + 0,25)}$$

Utilizando LGR ou Routh/Hurwitz tem-se que:

$$\text{Ganho crítico} \quad K_{cr} = 0,25$$

$$\text{Frequência de oscilação} \quad \omega_{cr} = 0,2564 \text{ rad/s}$$

$$\text{Período crítico} \quad T_{cr} = 24,5 \text{ s.}$$

5.4.1. Controlador PI

Para um controlador PI, tem-se as seguintes sintonias:

| Compensador PI | K _P | T _i |
|---------------------|----------------|----------------|
| Ziegler e Nichols 1 | 0,109 | 26,6 |
| Cohen e Coon | 0,116 | 22,8 |
| Ziegler e Nichols 2 | 0,125 | 20,4 |

As equações para os controladores serão:

$$1^\circ \text{ Método Ziegler Nichols} \quad \frac{U(s)}{E(s)} = 0,109 \cdot \left(1 + \frac{1}{26,6 \cdot s} \right) = 0,109 + \frac{0,0041}{s} = \frac{0,109 \cdot s + 0,0041}{s}$$

$$\text{Cohen Coon} \quad \frac{U(s)}{E(s)} = 0,116 \cdot \left(1 + \frac{1}{22,8 \cdot s} \right) = 0,116 + \frac{0,0051}{s} = \frac{0,116 \cdot s + 0,0051}{s}$$

$$2^\circ \text{ Método Ziegler Nichols} \quad \frac{U(s)}{E(s)} = 0,125 \cdot \left(1 + \frac{1}{20,4 \cdot s} \right) = 0,125 + \frac{0,0061}{s} = \frac{0,125 \cdot s + 0,0061}{s}$$

E as respectivas respostas:

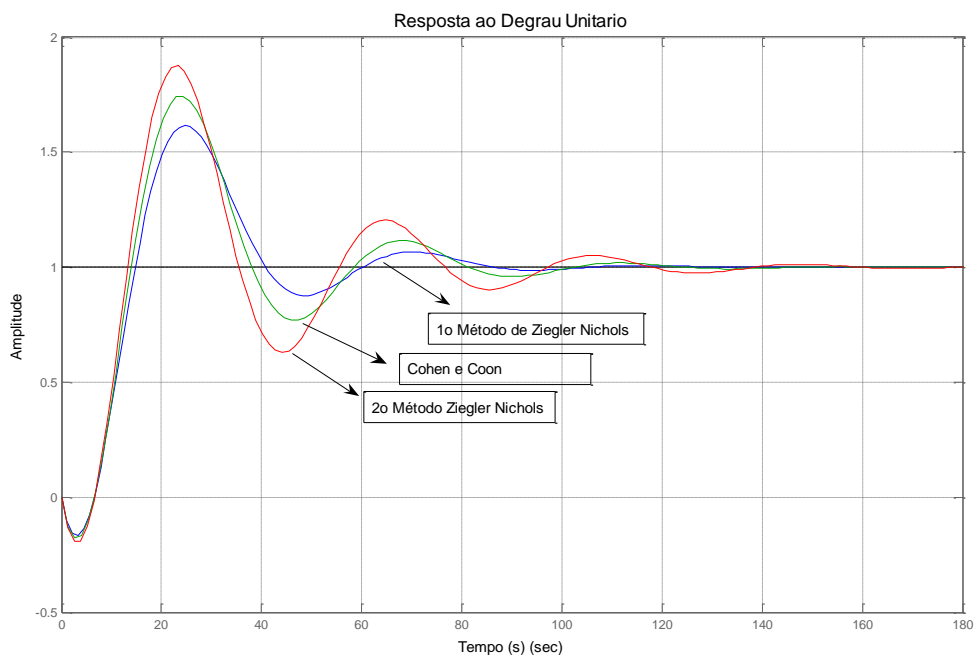


Figura 5.11 – Sintonia de Controlador PI por três métodos diferentes

5.4.2. Controlador PID

Para um controlador PID, tem-se as seguintes sintonias:

| Compensador PI | K_P | T_i | T_d |
|---------------------|-------|-------|-------|
| Ziegler e Nichols 1 | 0,145 | 16 | 4 |
| Cohen e Coon | 0,164 | 19 | 2,86 |
| Ziegler e Nichols 2 | 0,15 | 12,2 | 3,1 |

As equações para os controladores serão:

$$1^\circ \text{ Método Ziegler Nichols} \quad \frac{U(s)}{E(s)} = 0,145 \cdot \left(1 + \frac{1}{16 \cdot s} + 4 \cdot s \right) = \frac{0,58 \cdot s^2 + 0,145 \cdot s + 0,009}{s}$$

$$\text{Cohen Coon} \quad \frac{U(s)}{E(s)} = 0,164 \cdot \left(1 + \frac{1}{19 \cdot s} + 2,86 \cdot s \right) = \frac{0,47 \cdot s^2 + 0,164 \cdot s + 0,009}{s}$$

$$2^\circ \text{ Método Ziegler Nichols} \quad \frac{U(s)}{E(s)} = 0,15 \cdot \left(1 + \frac{1}{12,2 \cdot s} + 3,1 \cdot s \right) = \frac{0,47 \cdot s^2 + 0,15 \cdot s + 0,012}{s}$$

E as respectivas respostas:

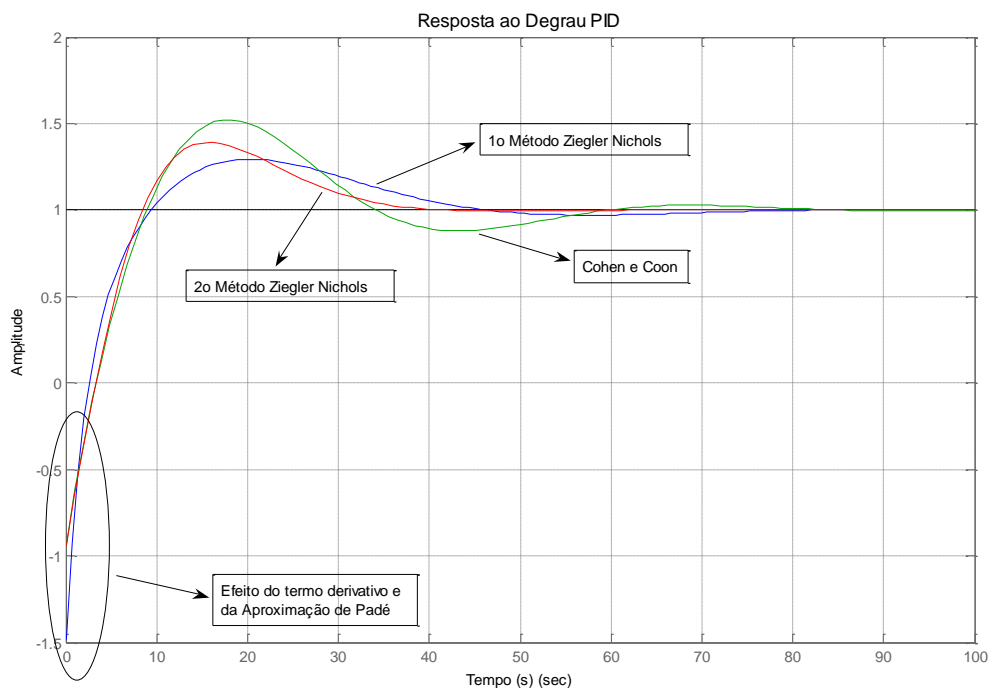


Figura 5.12 – Sintonia de Controlador PID por três métodos diferentes

5.5. Considerações Finais

Os controladores PID são projetados e sintonizados para que o sistema final seja robusto o suficiente para compensar alterações nos parâmetros da planta sem prejudicar o desempenho global. Estas alterações geralmente são resultado do uso e degradação física dos elementos da malha.

Na pré sintonia de controladores foram apresentados três métodos para obtenção de estimativas iniciais para os ganhos dos compensadores.

Entretanto nota-se que na aplicação prática uma sintonia fina manual pode melhorar o comportamento global do sistema.

Deve-se ficar atento quanto ao efeito que um ganho proporcional demasiadamente elevado pode causar no atuador (saturação e comportamento *on-off*).

Comparando-se as figuras 5.11 e 5.12 nota-se que o termo derivativo reduziu o comportamento oscilatório e o sobre sinal. Porém este termo é bastante sensível a ruídos presentes nas medidas, portanto não devem ser utilizados em malhas ruidosas como, por exemplo, nas malhas de controle de vazão cujos elementos de medida deprimogênios são tipicamente ruidosos.

Estes métodos são utilizados quando o modelo não é conhecido e não há interesse em realizar estudos mais aprofundados para determinação de um modelo mais preciso ou o procedimento de modelagem é inviável.

As sintonias apresentadas consideram somente o problema servo (acompanhamento de sinais de referência) e não trazem informações analíticas quanto ao desempenho do problema regulador (rejeição de perturbações), que não raro são tão ou mais importantes para o processo.

Quanto aos três métodos apresentados note que o Método de Cohen e Coon é baseado no 1º Método de Ziegler e Nichols e foi aprimorado uma vez que busca contemplar a relação entre o atraso de transporte e a constante de tempo (L/T).

O 2º Método de Ziegler e Nichols deve ser aplicado com extrema cautela em plantas industriais, pois podem levar o sistema a comportamentos desastrosos.

Outra consideração importante reside no fato que os exemplos aqui descritos consideram que os elementos são todos lineares e que seus limites físicos não foram excedidos. Isto significa dizer que estas análises são válidas para pequenas variações de no sinal de referência (*set-point*) e não foram analisados os efeitos de *wind-up* do termo integral.

Entretanto quando um modelo razoavelmente preciso é disponível, podem ser utilizadas as ferramentas analíticas e gráficas para o projeto de controladores PID com diferentes estruturas além de poderem ser estudados os efeitos de perturbações. Geralmente são utilizados os métodos de alocação de polos e de resposta em frequência auxiliados por simulação digital.

6. Sistemas de Controle Discretos

Atualmente praticamente todas as aplicações industriais de controle de processos são implementadas utilizando computadores digitais.

Uma característica inerente aos sistemas digitais é a operação a partir de dados amostrados, também chamados de discretos.

6.1. Classificação e representação de sinais

Sinais de tempo contínuo e tempo discreto

Um sinal $x(t)$ é considerado contínuo se apresenta valores conhecidos para todo instante t .

Um sinal de tempo discreto $x[k]$ apresenta valores somente para instantes isolados de t .

Quando o tempo que separa um instante isolado e seu adjacente for constante, este tempo é chamado de período de amostragem T .

Pode-se dizer que o sinal contínuo $x(t)$ foi amostrado a uma taxa de amostragem $f_s = 1/T$ resultando no sinal amostrado $x[k]$.

Na figura 6.1 pode ser visto um sinal amostrado com uma taxa de amostragem de $f_s = 2\text{Hz}$ (período de amostragem de $T = 0,5\text{ segundos}$).

Sinal analógico e sinal quantizado

Um sinal analógico representa uma variável física (valor do sinal é análogo ao valor da variável física) e, portanto, pode assumir qualquer valor entre dois limites físicos.

O sinal quantizado pode assumir somente determinados valores, chamados de níveis de quantização.

O processo de quantização de um sinal analógico, muitas vezes chamado de digitalização, representa um valor analógico através de uma palavra digital que por natureza tem um número finito de valores. Este valor é definido pelo número de bits da palavra.

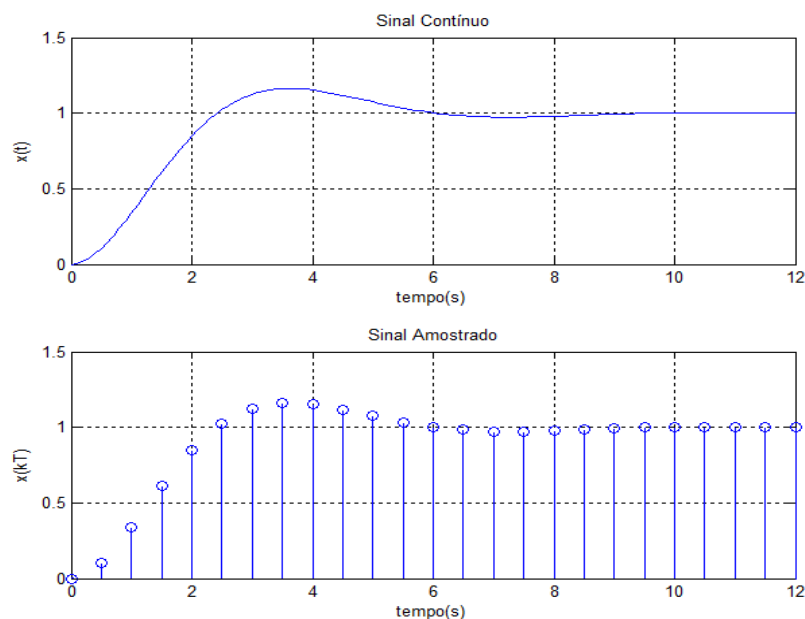


FIGURA 6.1 – Sinal Contínuo e Sinal Amostrado (discreto no tempo)

O sinal quantizado é comumente chamado de sinal digital que é discreto tanto no tempo como na amplitude, como o sinal mostrado na Figura 6.2 quantizado com níveis de resolução equivalentes a 0,1 unidades.

Neste texto, os termos “sinais e sistemas amostrados” e “sinais e sistemas digitais” serão utilizados indistintamente.

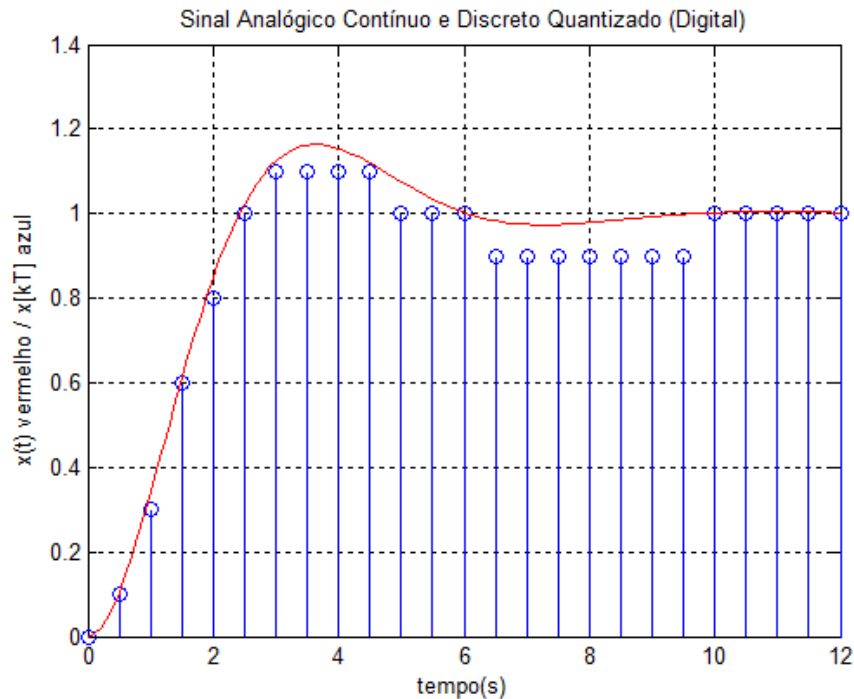


FIGURA 6.2 – Sinais analógicos e quantizados.

Representação Matemática de Sinais Amostrados

Seja um sinal contínuo amostrado através de um amostrador ideal (pulso de duração infinitesimal), como mostrado na Figura 6.3:

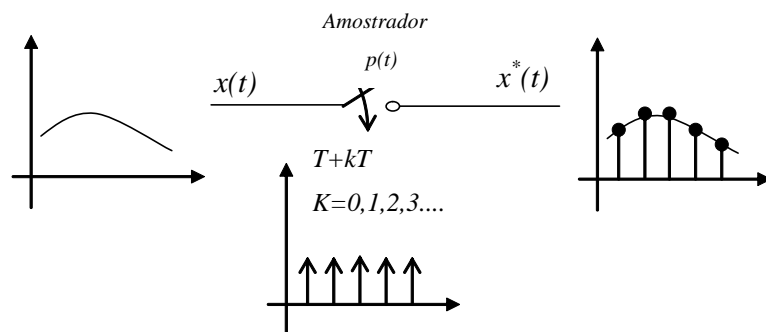


FIGURA 6.3 – Processo de Amostragem.

O amostrador pode ser representado por uma sequência de impulsos unitários (função “pente”):

$$p(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta(t - kT) \quad k \text{ inteiro}$$

A função amostrada $x^*(t)$ será um subconjunto de $x(t)$ e existe somente em instantes definidos de tempo $t = T + kT$

Matematicamente, $x^*(t)$ é obtida por:

$$x^*(t) = x(t) \cdot p(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} x(t) \cdot \delta(t - kT) = \sum_{k=0}^{+\infty} x(kT) \cdot \delta(t - kT)$$

Assim, reduzindo o formalismo matemático suprimindo o amostrador, a função $x^*(t)$ pode ser representada pela sequência:

$$x^*(t) = x[k] = \sum_{k=0}^{+\infty} x(kT)$$

A transformada de Laplace $F^*(s)$ é obtida por:

$$X^*(s) = \mathcal{L}\{x^*(t)\} = \int_0^{+\infty} x^*(t) \cdot e^{-st} \cdot dt$$

Como $x^*(t)$ é discreta a integral pode ser substituída por uma soma e:

$$X^*(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} x(kT) \cdot e^{-kT \cdot s}$$

Aplicando uma mudança de variáveis tal que $z = e^{T \cdot s}$ (z complexo) é definida a transformada Z de $x(t)$ amostrada com período de T_s como:

$$X(z) = \mathcal{L}\{x^*(t)\} \Big|_{e^{T \cdot s} = z} = \sum_{k=0}^{+\infty} x(kT) \cdot e^{-kT \cdot s} \Big|_{e^{T \cdot s} = z} = \sum_{k=0}^{+\infty} x(kT) \cdot z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} x[k] \cdot z^{-k}$$

Logo, a Transformada Z é a Transformada de Laplace aplicada à um sinal amostrado.

Entretanto, a Transformada Z de uma função não é única uma vez que depende da taxa de amostragem $f_s = 1/T$.

Exemplos

Função Degrau Unitário

$$U(z) = \mathcal{L}\{u(t)\} = \sum_{k=0}^{+\infty} x(kT) \cdot z^{-k}$$

$$U(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} 1 \cdot z^{-k} = 1 \cdot z^0 + 1 \cdot z^{-1} + 1 \cdot z^{-2} + \dots = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}$$

Função Exponencial $f(t) = A \cdot e^{-a \cdot t}$ $p / t > 0$

$$F(z) = \mathcal{L}\{f^*(t)\} = \sum_{k=0}^{+\infty} A \cdot e^{-a \cdot kT} \cdot z^{-k}$$

$$F(z) = A \cdot z^0 + A \cdot e^{-aT} \cdot z^{-1} + A \cdot e^{-2aT} \cdot z^{-2} + \dots = A \frac{1}{1 - e^{-aT} \cdot z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{-aT}}$$

Tabela 6.1 – Pares de Transformadas Z e de Laplace

| | $f(t)$ | $F(s)$ | $F(z)$ | $f(kT)$ |
|----|-------------------------|-------------------------------------|---|---------------------------|
| 1. | $u(t)$ | $\frac{1}{s}$ | $\frac{z}{z-1}$ | $u(kT)$ |
| 2. | t | $\frac{1}{s^2}$ | $\frac{Tz}{(z-1)^2}$ | kT |
| 3. | t^n | $\frac{n!}{s^{n+1}}$ | $\lim_{a \rightarrow 0} (-1)^n \frac{d^n}{da^n} \left[\frac{z}{z - e^{-aT}} \right]$ | $(kT)^n$ |
| 4. | e^{-at} | $\frac{1}{s+a}$ | $\frac{z}{z - e^{-aT}}$ | e^{-akT} |
| 5. | $t^n e^{-at}$ | $\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$ | $(-1)^n \frac{d^n}{da^n} \left[\frac{z}{z - e^{-aT}} \right]$ | $(kT)^n e^{-akT}$ |
| 6. | $\sin \omega t$ | $\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$ | $\frac{z \sin \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$ | $\sin \omega kT$ |
| 7. | $\cos \omega t$ | $\frac{s}{s^2 + \omega^2}$ | $\frac{z(z - \cos \omega T)}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$ | $\cos \omega kT$ |
| 8. | $e^{-at} \sin \omega t$ | $\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$ | $\frac{ze^{-aT} \sin \omega T}{z^2 - 2ze^{-aT} \cos \omega T + e^{-2aT}}$ | $e^{-akT} \sin \omega kT$ |
| 9. | $e^{-at} \cos \omega t$ | $\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$ | $\frac{z^2 - ze^{-aT} \cos \omega T}{z^2 - 2ze^{-aT} \cos \omega T + e^{-2aT}}$ | $e^{-akT} \cos \omega kT$ |

Propriedades

Linearidade

$$\mathcal{Z}\{A \cdot f(t) + B \cdot g(t)\} = A \cdot F(z) + B \cdot G(z)$$

Atraso de Transporte (Translação no Tempo)

$$\mathcal{Z}\{f(k-n)\} = z^{-n} \cdot F(z) \quad n \text{ inteiro}$$

Quando $n=1$ o operador é chamado de atraso unitário z^{-1} .

Teorema do Valor Inicial

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} f[k] = \lim_{z \rightarrow +\infty} F(z)$$

Teorema do Valor Final

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} f[k] = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \cdot F(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) \cdot F(z)$$

6.2. Representação de Sistemas em Tempo Discreto

Como as plantas (processos a controlar) são tipicamente contínuas, os sinais contínuos (medidas das variáveis controladas) deverão ser discretizados para serem submetidos aos computadores digitais.

Os sinais são processados de acordo com o algoritmo de controle gerando o sinal de controle, ainda na forma digital.

Os sinais de controle são então convertidos novamente para um formato contínuo e enviados à planta.

Assim os sistemas a dados amostrados incorporam, além do computador, os seguintes elementos:

- Amostrador – responsável por tomar uma amostra do sinal proveniente da planta;
- Conversor Analógico para Digital (A/D) – realiza a conversão de um valor analógico para uma palavra digital de valor proporcional ao nível do sinal;
- Conversor de Digital para Analógico (D/A) – realiza a conversão de uma palavra digital em um sinal (geralmente de tensão ou corrente) com valor correspondente;
- Segurador ou extrapolador – mantém o valor da saída analógica constante até uma nova atualização de valor.

Estas operações são realizadas de acordo com um sinal de relógio (*clock*), geralmente de período constante T_s chamado de período de amostragem e seu recíproco $f_s = 1/T_s$ conhecida por frequência de amostragem.

Um esquema de um sistema de controle a dados amostrados pode ser visto na figura 6.4 no qual considera-se que todos os amostradores são acionados simultaneamente.

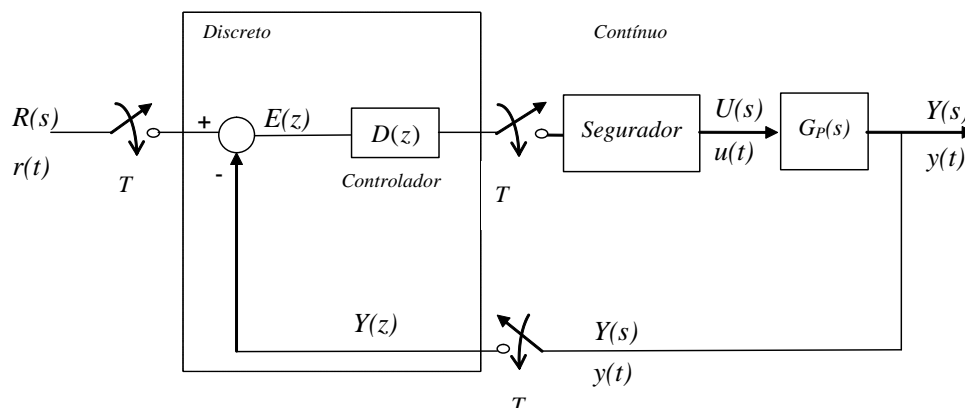


FIGURA 6.4 – Sistema de Controle a Dados Amostrados

Como o objetivo é montar controladores na forma discreta, na análise e projeto do sistema convém representá-lo integralmente na forma discreta.

6.3. Função de Transferência Pulsada

ZOH – Zero Order Hold (amostrador de ordem zero)

O conjunto Conversor D/A e um extrapolador formam o chamado ZOH – *zero order hold* (Figura 6.5).

Na prática, os conversores D/A estão associados a um *latch* (conjunto de flip-flops) que mantém as linhas digitais constantes até a próxima atualização.

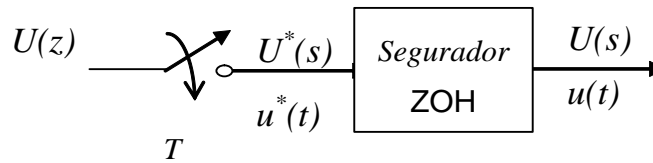


FIGURA 6.5 – Amostrador/Extrapolador de Ordem Zero

O ZOH é modelado como (Figura 6.6):

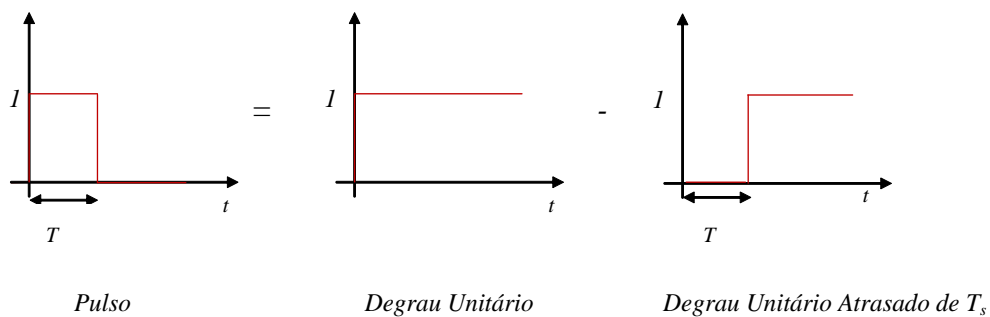


FIGURA 6.6 – A função Pulso como modelo para o ZOH

A função Pulso e, conseqüentemente o ZOH, serão:

$$\begin{aligned} \text{Pulso}(t) &= u(t) - u(t-T) \\ \text{ZOH}(s) &= \mathcal{Z}\{\text{pulso}(t)\} = \mathcal{Z}\{u(t) - u(t-T)\} = \frac{1}{s} - \frac{e^{-Ts}}{s} = \frac{1-e^{-Ts}}{s} \end{aligned}$$

Sistema amostrado através de um ZOH

Um sistema contínuo precedido de um ZOH (Figura 59) pode ser convertido para o seu equivalente discreto da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} G(s) &= \text{ZOH}(s) \cdot G_p(s) = \left(\frac{1-e^{-Ts}}{s} \right) \cdot G_p(s) \\ G(z) &= \mathcal{Z}\{G(s)\} = \mathcal{Z}\left\{ \left(\frac{1-e^{-Ts}}{s} \right) \cdot G_p(s) \right\} = (1-z^{-1}) \cdot \mathcal{Z}\left\{ \frac{G_p(s)}{s} \right\} \end{aligned}$$

Sabe-se que $y(t)$ é contínua e será amostrada na mesma taxa $f_s = 1/T_s$. Esta amostragem não é necessariamente física, utilizando-se de amostradores fictícios (fantasma ou “dummy”) para representá-los (Figura 6.7).

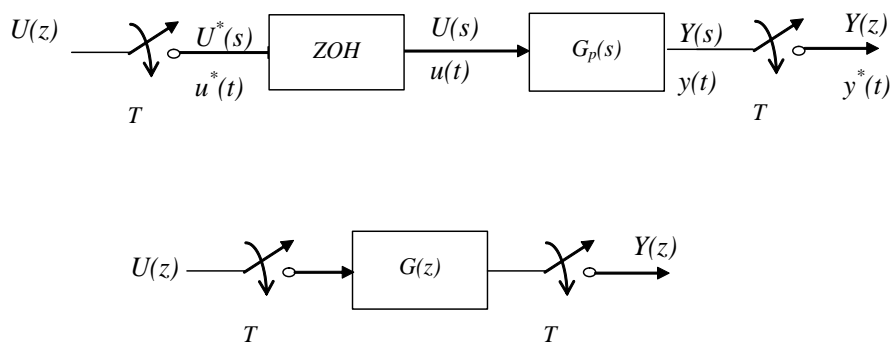
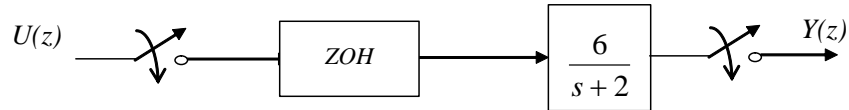


FIGURA 6.7 – Sistema Amostrado por um ZOH

Exemplo

1 - Determinar a função de transferência pulsada para $T=0,2$ segundos.

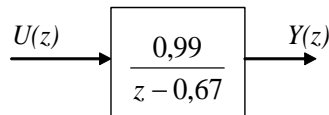


$$G(z) = (1 - z^{-1}) \cdot \mathcal{Z} \left\{ \frac{G_p(s)}{s} \right\} = (1 - z^{-1}) \cdot \mathcal{Z} \left\{ \frac{6}{s \cdot (s + 2)} \right\}$$

$$G(z) = 6 \cdot (1 - z^{-1}) \cdot \frac{1}{2} \cdot \mathcal{Z} \left\{ \frac{2}{s \cdot (s + 2)} \right\} = 3 \cdot (1 - z^{-1}) \cdot \frac{z \cdot (1 - e^{-aT})}{(z - 1) \cdot (z - e^{-aT})}$$

$$G(z) = 3 \cdot \left(\frac{z - 1}{z} \right) \cdot \frac{z \cdot (1 - e^{-0.4})}{(z - 1) \cdot (z - e^{-0.4})}$$

$$G(z) = 3 \cdot \frac{0,33}{z - 0,67} = \frac{0,99}{z - 0,67}$$



Determinação da resposta de malha aberta

São utilizados dois métodos para determinar a resposta de um sistema discreto: a divisão longa e as equações de diferenças.

Como os sistemas podem ser representados na forma $G(z) = \frac{num(z)}{den(z)}$ onde $num(z)$ e $den(z)$ são polinômios em z , uma sugestão de procedimento para obter a resposta a uma entrada é mostrado a seguir.

Tomando a equação anterior como exemplo:

1 – Reduza o maior expoente à 0 (zero):

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{0,99}{z - 0,67} \cdot \frac{z^{-1}}{z^{-1}} = \frac{0,99 \cdot z^{-1}}{z^0 - 0,67 \cdot z^{-1}}$$

2 – Isolando Y(z):

$$Y(z) \cdot (z^0 - 0,67 \cdot z^{-1}) = U(z) \cdot 0,99 \cdot z^{-1}$$

$$Y(z) \cdot z^0 = U(z) \cdot 0,99 \cdot z^{-1} + 0,67 \cdot z^{-1} \cdot Y(z)$$

$$Y(z) = U(z) \cdot 0,99 \cdot z^{-1} + 0,67 \cdot z^{-1} \cdot Y(z)$$

3 – Montando a equação de diferenças para y[k]:

$$Y(z) = 0,99 \cdot z^{-1} \cdot U(z) + 0,67 \cdot z^{-1} \cdot Y(z)$$

$$y[k] = 0,99 \cdot u(k - 1) + 0,67 \cdot y(k - 1)$$

4 – Determinando os valores de $y[k]$:

| K | u[k] | u[k-1] | y[k-1] | y[k] |
|----|------|--------|--------|------|
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0,99 |
| 2 | 1 | 1 | 0,99 | 1,65 |
| 3 | 1 | 1 | 1,65 | 2,10 |
| 4 | 1 | 1 | 2,10 | 2,40 |
| 5 | 1 | 1 | 2,40 | 2,60 |
| 6 | 1 | 1 | 2,60 | 2,73 |
| 7 | 1 | 1 | 2,73 | 2,82 |
| 8 | 1 | 1 | 2,82 | 2,88 |
| 9 | 1 | 1 | 2,88 | 2,92 |
| 10 | 1 | 1 | 2,92 | 2,95 |
| 11 | 1 | 1 | 2,95 | 2,96 |
| 12 | 1 | 1 | 2,96 | 2,98 |
| 13 | 1 | 1 | 2,98 | 2,99 |
| 14 | 1 | 1 | 2,99 | 2,99 |
| 15 | 1 | 1 | 2,99 | 3,00 |
| 16 | 1 | 1 | 3,00 | 3,00 |
| 17 | 1 | 1 | 3,00 | 3,00 |

Sistema em Malha Fechada

Um sistema discreto em malha fechada genérico pode ser representado pelas duas formas equivalentes como mostrado na Figura 6.8.

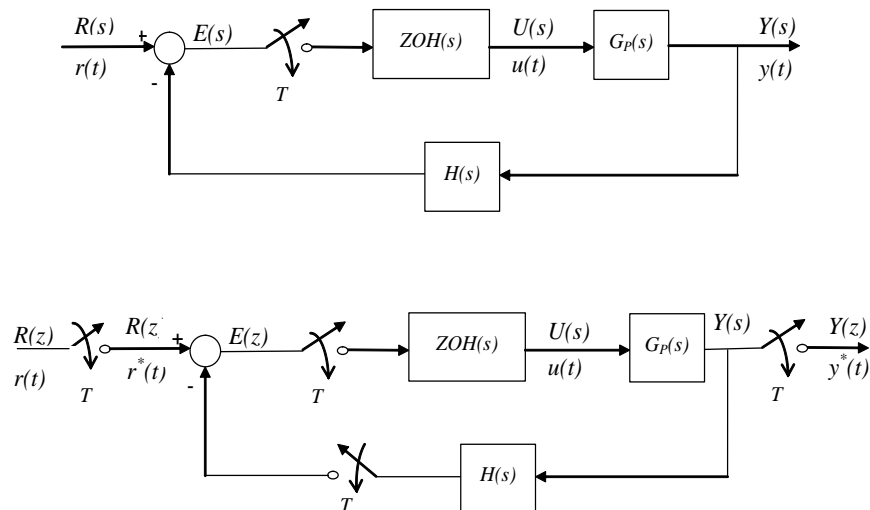


FIGURA 6.8 – Sistema Amostrado em Malha Fechada

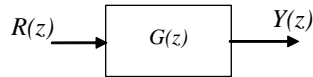
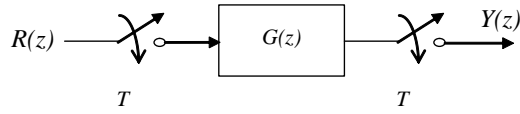
A função de transferência em malha fechada será:

$$FTMF = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1 + GH(z)}$$

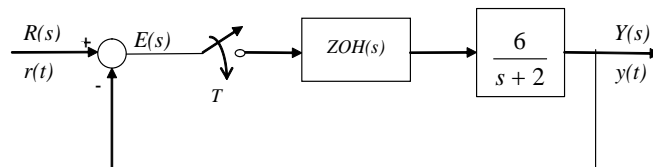
$$G(z) = (1 - z^{-1}) \cdot \mathcal{Z} \left\{ \frac{G_p(s)}{s} \right\}$$

$$GH(z) = (1 - z^{-1}) \cdot \mathcal{Z} \left\{ \frac{G_p(s) \cdot H(s)}{s} \right\}$$

Note que: $GH(z) \neq G(z) \cdot H(z)$



Exemplo: Obtenha a FTMF para o sistema:



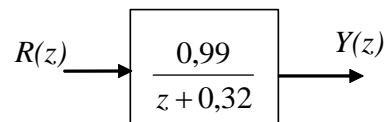
Como $H(s)=1$ (realimentação unitária) então:

$$GH(z) = G(z) = \frac{0,99}{z-0,67}$$

$$FTMF = \frac{Y(z)}{R(z)}$$

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{\frac{0,99}{z-0,67}}{1 + \frac{0,99}{z-0,67}} = \frac{0,99}{z-0,67+0,99}$$

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{0,99}{z+0,32}$$



6.4. Estabilidade de Sistemas Amostrados

A estabilidade de sistemas amostrados pode ser estudada pela relação entre a Transformada de Laplace e a Transformada Z.

Nos sistemas contínuos a estabilidade é definida pela localização dos polos de malha fechada no plano s .

No plano Z, a estabilidade será:

$$z = e^{sT} = e^{(\sigma + j\omega)T} = e^{\sigma T} e^{j\omega T}$$

Pela relação de Euler:

$$z = e^{\sigma T} \cdot (\cos \omega \cdot T + j \operatorname{sen} \omega \cdot T)$$

Ou na forma polar:

$$\begin{aligned} |z| &= e^{\sigma T} \\ \angle z &= \omega \cdot T \end{aligned}$$

A parte real dos polos σ define a estabilidade no domínio contínuo (plano s) e para $\sigma < 0$ o sistema é estável (pertence ao semi plano esquerdo).

No domínio discreto os sistemas serão estáveis quando os polos apresentarem polos de módulo inferior à 1, ou seja, $|z| < 1$.

Ou seja, o semi plano s esquerdo (estável) é mapeado em um círculo de raio unitário no plano z (Figura 6.9).

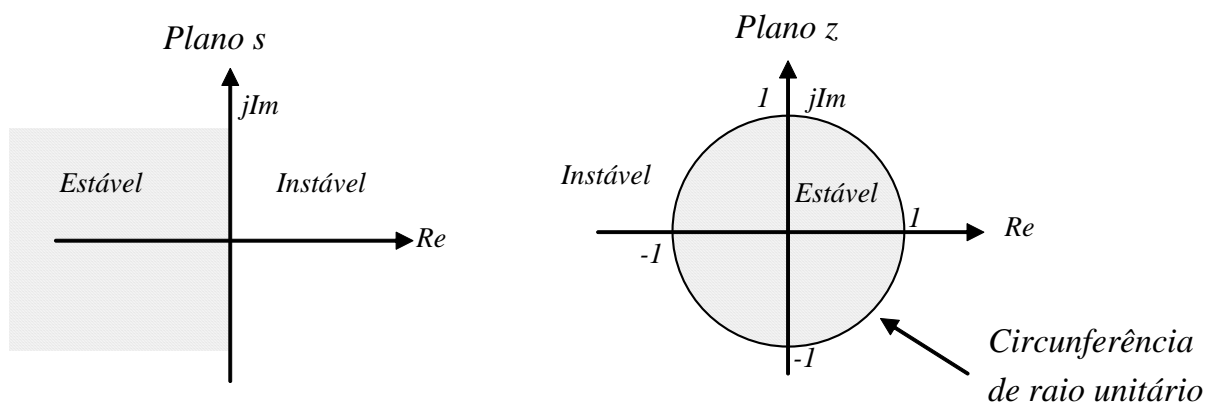
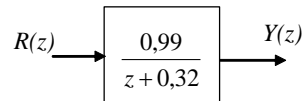


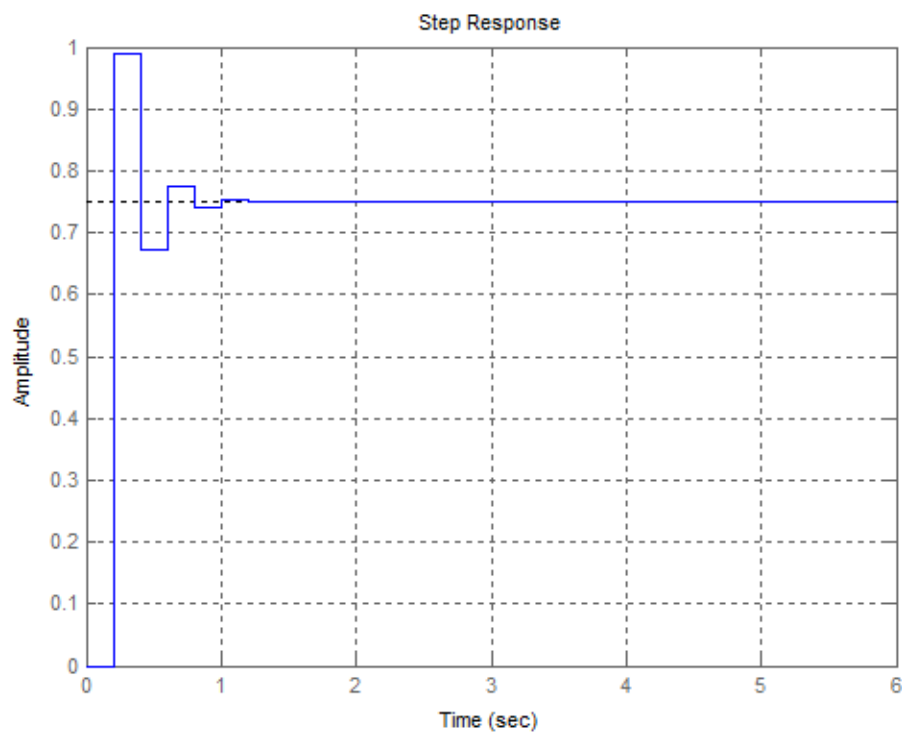
FIGURA 6.9 – Região de Estabilidade nos planos s e z

Exemplo: Determine a estabilidade do sistema anterior e esboce a resposta à uma entrada degrau unitário:

- Para $T=0,2$ segundos



O Polo está em $z=-0,32$. Logo $|z|=0,32 < 1$ e o sistema de malha fechada será estável.



- Para $T=1$ segundo.

A FTMA será:

$$G(z) = (1 - z^{-1}) \cdot \mathcal{Z} \left\{ \frac{G_p(s)}{s} \right\} = (1 - z^{-1}) \cdot \mathcal{Z} \left\{ \frac{6}{s \cdot (s + 2)} \right\}$$

$$G(z) = 6 \cdot (1 - z^{-1}) \cdot \frac{1}{2} \cdot \mathcal{Z} \left\{ \frac{2}{s \cdot (s + 2)} \right\} = 3 \cdot (1 - z^{-1}) \cdot \frac{z \cdot (1 - e^{-aT})}{(z - 1) \cdot (z - e^{-aT})}$$

$$G(z) = 3 \cdot \left(\frac{z - 1}{z} \right) \cdot \frac{z \cdot (1 - e^{-2})}{(z - 1) \cdot (z - e^{-2})}$$

$$G(z) = 3 \cdot \frac{0,8647}{z - 0,1353} = \frac{2,594}{z - 0,1353}$$

A FTMF será:

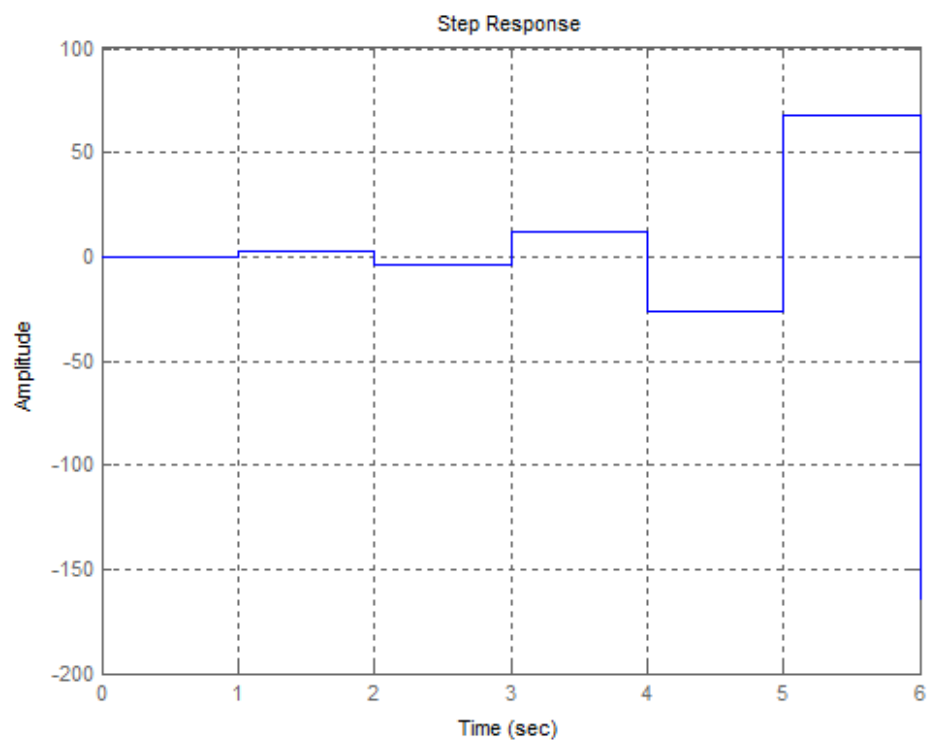
$$FTMF = \frac{Y(z)}{R(z)}$$

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{\frac{2,594}{z-0,1353}}{1 + \frac{2,594}{z-0,1353}} = \frac{2,594}{z-0,1353+2,594}$$

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{2,594}{z+2,4587}$$

O polo está em $z = -2,4587$.

Como $|z| = 2,4587 > 1$ e o sistema de malha fechada será instável.



6.5. Resposta Transiente de Polos Simples

Polo real simples

Seja um sistema cuja função de transferência foi expandida em frações parciais cujos termos são da forma $\frac{b \cdot z}{z - a}$ que contribuem, no tempo, com parcelas do tipo $b \cdot a^k$.

A resposta completa será a soma das respostas de cada uma das parcelas.

Na Figura 6.10, tem-se a resposta de cada polo real simples em função de sua localização no plano Z.

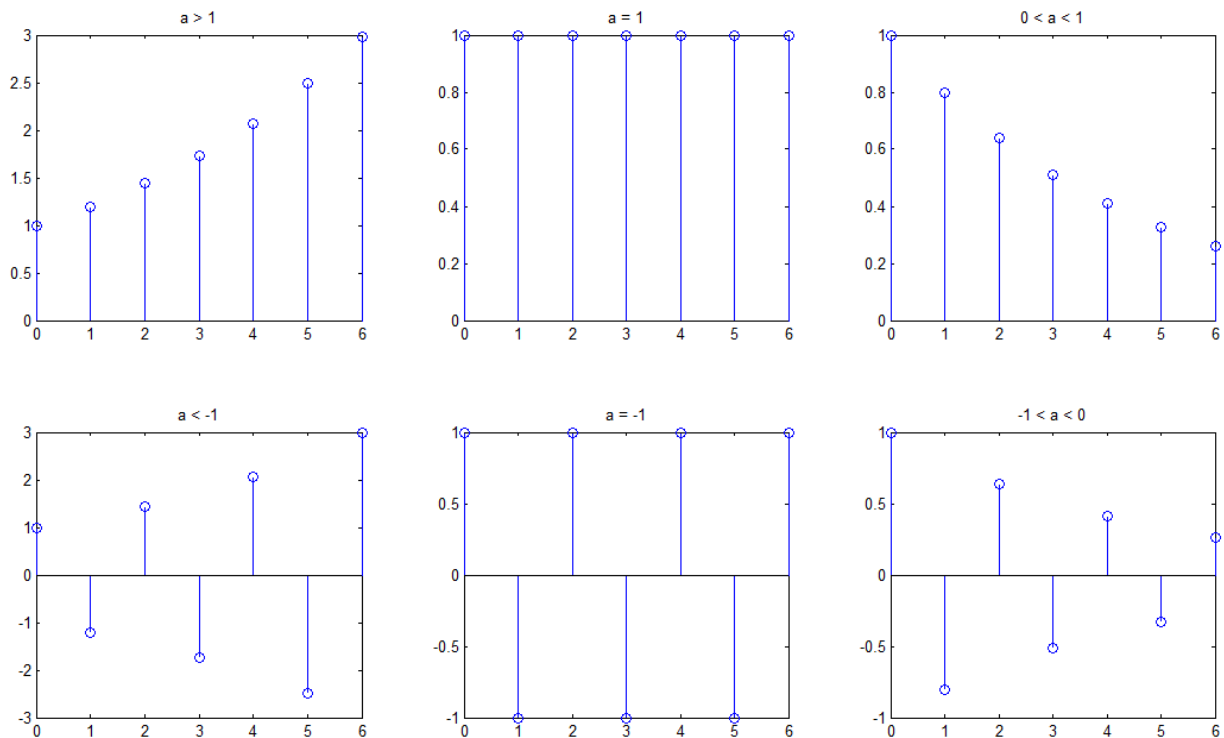


FIGURA 6.10 – Resposta de Polos Reais Simples no plano Z

Polo complexo conjugado

Um polo complexo conjugado pode ser escrito na forma $\frac{z \cdot (z - r \cdot \cos \theta)}{z^2 - 2 \cdot r \cdot z \cdot \cos \theta + r^2}$ um termo do tipo $2 \cdot r^k \cdot \cos(k \cdot \theta)$.

A distância r em relação à origem indica a duração do transitório. Quanto maior o valor de r , mais longo o transitório (ver Figura 6.11).

Logo, se $r > 1$ os polos estarão fora do círculo unitário e o sistema será instável.

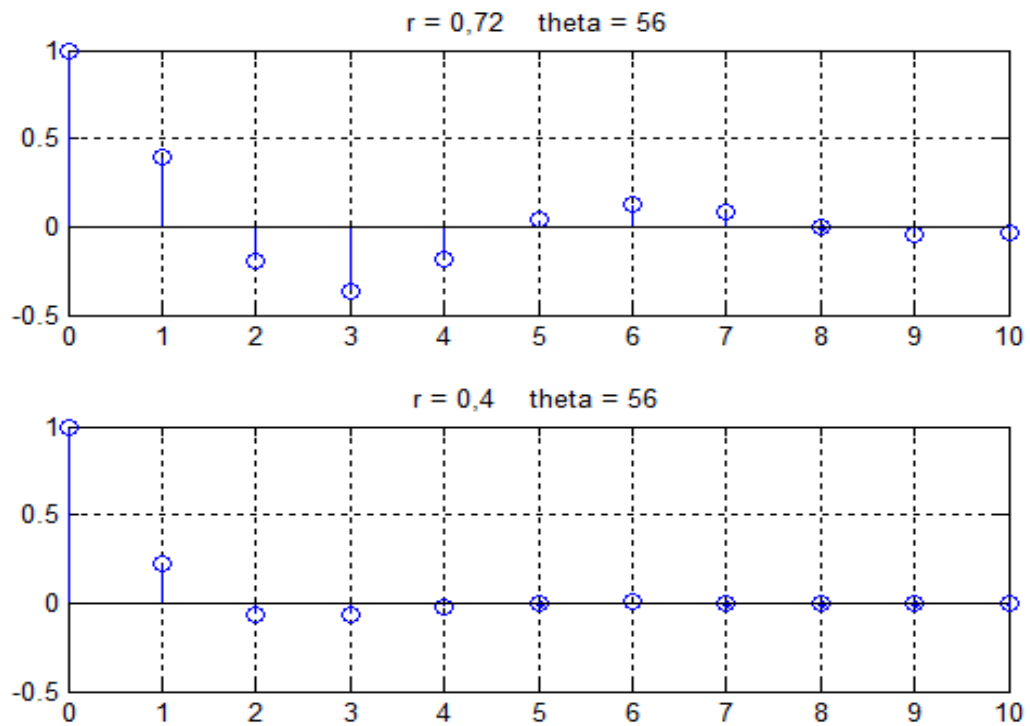


FIGURA 6.11 – Resposta de Polos Complexos Conjugados no plano Z

6.6. Erro em Regime Permanente

Nos sistemas contínuos os erros em regime permanente para as entradas polinomiais (degrau, rampa e parábola) são definidos pela presença de polos de malha aberta na origem (integradores).

Nos sistemas discretos vale o mesmo raciocínio, porém no plano z os integradores são definidos por polos de malha aberta em $z=1$.

Utilizando o diagrama da Figura 60, pelo Teorema do Valor Final, o erro em regime permanente é obtido por:

$$e_{ss}^* = \lim_{t \rightarrow \infty} e^*(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} e(kt)$$

$$e_{ss}^* = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \cdot E(z)$$

A função de transferência para o erro será:

$$\frac{E(z)}{R(z)} = \frac{1}{1 + GH(z)}$$

Erro para entrada degrau:

$$R(z) = \frac{z}{z-1} = \frac{1}{1-z^{-1}}$$

$$e_{ss}^* = \lim_{z \rightarrow 1} \left[(1-z^{-1}) \cdot \frac{1}{1+GH(z)} \cdot R(z) \right]$$

$$e_{ss}^* = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{1}{1+GH(z)} \right] = \frac{1}{1+\lim_{z \rightarrow 1} GH(z)}$$

Erro para entrada rampa:

$$R(z) = \frac{T \cdot z}{(z-1)^2} = \frac{T \cdot z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$$

$$e_{ss}^* = \lim_{z \rightarrow 1} \left[(1-z^{-1}) \cdot \frac{1}{1+GH(z)} \cdot \frac{T \cdot z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} \right]$$

$$e_{ss}^* = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{T}{(1-z^{-1}) \cdot GH(z)} \right]$$

6.7. Projeto de Compensadores Digitais

Diversos tipos de compensadores digitais podem ser construídos, mas devido à facilidade de uso e entendimento, as implementações digitais de controladores analógicos ainda são muito utilizadas.

De forma geral, todos os compensadores realizáveis no domínio contínuo são realizáveis no domínio discreto.

São então projetados controladores contínuos e suas equações são “digitalizadas” utilizando algumas simplificações para a Transformada Z.

6.7.1. Filtros Digitais

Embora não sejam propriamente compensadores, os filtros digitais são frequentemente utilizados para remover alguma parcela contaminante do sinal, ruídos por exemplo.

Os filtros mais comuns são os FIR (*Finite Impulse Response*) e os IIR (*Infinite Impulse Response*).

Filtro FIR – são filtros cuja resposta ao impulso tem duração finita e são implementados através de equações não recursivas. A função de transferência generalizada é:

$$\frac{Y_{out}(z)}{Y_{in}(z)} = A_0 z^0 + A_1 z^{-1} + A_2 z^{-2} + \dots$$

$$y_{out}(k) = A_0 \cdot y_{in}(k) + A_1 \cdot y_{in}(k-1) + A_2 \cdot y_{in}(k-2) + \dots$$

Os coeficientes A_0 até A_n indicam os pesos de cada uma das amostras e quantas posições de memória serão necessárias para sua implementação.

Caso seja desejado ganho unitário, deve-se respeitar: $\sum_{i=0}^n A_i = 1$.

Pensando em um processo de filtragem em tempo real, os expoentes deverão todos ser negativos (indicando tempo passado). Porém para pós-processamento, podem-se utilizar valores positivos como é o caso de uma média móvel.

Os filtros FIR são tipicamente filtros passa baixas e uma vantagem deste tipo de filtro é que sempre serão estáveis.

Filtro IIR - são filtros cuja resposta ao impulso tem duração idealmente infinita e são implementados através de equações recursivas. A função de transferência generalizada é:

$$\frac{Y_{out}(z)}{Y_{in}(z)} = \frac{A_0 z^0 + A_1 z^{-1} + A_2 z^{-2} + \dots}{B_0 z^0 + B_1 z^{-1} + B_2 z^{-2} + \dots}$$

Nota-se que estes filtros podem apresentar polos fora do círculo de raio unitário e serem instáveis.

6.7.2. Controladores PID

Este é o caso mais clássico de se utilizar um algoritmo para montar a equação de um controlador projetado no domínio contínuo.

É sabido que sempre haverá uma perda de desempenho do controlador digital em relação à sua forma original analógica, porém os ganhos em relação à flexibilidade, custo e benefícios justificam sua escolha.

Para pequenos períodos de amostragem, além da Transformada Z exata, a digitalização pode ser feita de diversas formas e as mais usuais são:

Aproximação de Euler

Consiste na expansão de primeira ordem de $z = e^{sT}$:

$$z = e^{sT} = 1 + s \cdot T \Rightarrow s \approx \frac{z-1}{T}$$

A aproximação de Euler pode levar polos contínuos estáveis em discretos instáveis, sendo utilizada com cuidado.

Aproximação Backward Difference

É a aproximação mais simples e é baseada na propriedade de diferenciação real. Como diferenciar no domínio do tempo equivale a multiplicar por s no domínio da frequência:

$$s \Leftrightarrow \frac{de}{dt} \approx \frac{\Delta e}{\Delta t} \approx \frac{e_n - e_{n-1}}{\Delta t} \Rightarrow s \cong \frac{(1 - z^{-1})}{T} = \frac{z-1}{T \cdot z}$$

Já a *backward difference* mapeia todos os polos estáveis no domínio s em polos estáveis no domínio z e remove polos oscilantes (“ringing poles”).

Aproximação de Tustin

Equivalente à integração trapezoidal, a aproximação de Tustin é definida por:

$$z = e^{sT} = \frac{e^{\frac{sT}{2}}}{e^{-\frac{sT}{2}}} \approx \frac{2 \cdot (1 - z^{-1})}{T_s (1 + z^{-1})}$$

É uma aproximação que fornece resultados mais próximos do comportamento analógico, porém podem resultar em polos oscilantes (“ringing poles”- ver Figura 6.10 com $-1 < a < 0$).

Exemplo

Utilizando a forma de PID abaixo como exemplo, pretende-se obter um algoritmo para a equação:

$$u(t) = K_p \cdot \left(e(t) + \frac{1}{T_i} \cdot \int_0^t e(t) dt + T_d \cdot \frac{de(t)}{dt} \right) \quad \text{domínio do tempo}$$

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p \cdot \left(1 + \frac{1}{T_i \cdot s} + T_d \cdot s \right) \quad \text{domínio da frequência}$$

Aproximando a parcela integral por Tustin e a parcela derivativa por *Backward Difference*, tem-se:

$$\frac{U(z)}{E(z)} = K_p \cdot \left(1 + \frac{T \cdot (z+1)}{2 \cdot T_i \cdot (z-1)} + T_d \cdot \frac{z-1}{T \cdot z} \right)$$

$$U(z) = K_p \cdot E(z) + \frac{K_p \cdot T \cdot (z+1)}{2 \cdot T_i \cdot (z-1)} \cdot E(z) + K_p \cdot T_d \cdot \frac{z-1}{T \cdot z} \cdot E(z)$$

Manipulando a equação algebricamente, resulta em:

$$U(z) = K_p \cdot \left(\frac{(T^2 + 2 \cdot T \cdot T_i + 2 \cdot T_d \cdot T) \cdot z^2 + (T^2 - 2 \cdot T \cdot T_i - 4 \cdot T_d \cdot T_i) \cdot z - 2 \cdot T_d \cdot T_i}{T \cdot T_i \cdot (z^2 - z)} \right) \cdot E(z)$$

Fazendo:

$$A = K_p \cdot \frac{(T^2 + 2 \cdot T \cdot T_i + 2 \cdot T_d \cdot T)}{T \cdot T_i}$$

$$B = K_p \cdot \frac{(T^2 - 2 \cdot T \cdot T_i - 4 \cdot T_d \cdot T_i)}{T \cdot T_i}$$

$$C = K_p \cdot \frac{-2 \cdot T_d \cdot T}{T \cdot T_i} = -K_p \cdot \frac{2 \cdot T_d}{T}$$

A equação se reduz a:

$$U \cdot (z^2 - z) = (A \cdot z^2 + B \cdot z + C) \cdot E \quad \text{ou}$$

$$U \cdot (1 - z^{-1}) = (A + B \cdot z^{-1} + C \cdot z^{-2}) \cdot E \quad \text{ou}$$

$$U = U \cdot z^{-1} + A \cdot E + B \cdot E \cdot z^{-1} + C \cdot E \cdot z^{-2}$$

Voltando para o domínio do tempo, a equação a ser implementada pelo algoritmo será:

$$u_k = u_{k-1} + A \cdot e_k + B \cdot e_{k-1} + C \cdot e_{k-2} \quad \text{ou}$$

$$u_{\text{atual}} = u_{\text{ant}} + A \cdot e_{\text{atual}} + B \cdot e_{\text{anterior}} + C \cdot e_{2\text{anterior}}$$

Ou ainda:

$$\Delta u = A \cdot e_k + B \cdot e_{k-1} + C \cdot e_{k-2}$$

$$e$$

$$u_{atual} = u_{ant} + \Delta u$$

Um algoritmo simples é:

Inicializar as variáveis:

Kp, Ti, Td, DeltaT, Tsample;

Calcula A, B e C

PIDant=0;

Eant = 0;

E2ant = 0;

Início:

Ler valor de referência Vref

Ler valor atual Vactual

Calcular erro Eatual = Vref – Vactual

Calcula PID = PIDant + A * Eatual + B * Eant + C * E2ant

Verificar limites:

Se PID > 100% então PID = 100

Se PID < 0 então PID=0

Realizar *Scaling* (adequar o valor calculado pelo PID à faixa do sinal de saída):

Analog_Out = PID (ou Analog_out = PID * 1023/100 → para um conversor D/A de 10 bits)

Atualizar variáveis intermediárias:

PIDant = PID

E2ant = Eant

Eant = E

Esperar Tempo de Amostragem Tsample

Voltar para Início

Recomenda-se verificar na literatura os algoritmos PID de posição e de velocidade.

Note ainda que alguns algoritmos não incorporam a prevenção de *wind-up*.