1. Transformadas de Laplace para Engenharia

Na modelagem matemática de sistemas dinâmicos, frequentemente utiliza-se equações diferenciais para descrever o comportamento do sistema. Uma parcela considerável dos problemas de engenharia são de sistemas lineares e invariantes no tempo (LTI) que podem ser representados através de equações diferenciais lineares com coeficientes constantes (invariantes no tempo). A transformada de Laplace é uma ferramenta matemática muito útil para resolver este tipo de equação e portanto conhecer o comportamento dinâmico de um sistema.

A vantagem do método é que equações diferenciais no domínio do tempo são convertidas em equações algébricas facilmente manipuláveis em outro domínio, o da frequência, como será visto posteriormente.

1.1. Definição da Transformada de Laplace

Seja um sinal físico que pode ser representado pela função no domínio do tempo denotada por $f(t)$. A transformada de Laplace de $f(t)$, doravante denotada por $L\{f(t)\} = F(s)$ é definida por:

$$F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-st} \cdot dt$$

Entretanto para sistemas físicos, causais por natureza, é comum definir os sinais e sistemas dinâmicos considerando somente o tempo positivo ou $t>0$. Matematicamente isto resulta da multiplicação da função degrau unitário $u(t)$ pela função $f(t)$, ou seja, $f(t)$ será nula para tempos $t<0$. A função degrau unitário é muito importante será estudada como exemplo de aplicação.

A integral de Laplace pode então ter seu limite de integração inferior alterado de $-\infty$ para zero, quando recebe o nome de Transformada Unilateral de Laplace

Nas aplicações de Sistemas de Controle usualmente e também neste texto é utilizada a seguinte definição:

$$F(s) = \int_{0}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-st} \cdot dt$$

Onde: $s=\sigma+j\omega$ - variável complexa sendo σ é parte real e ω a parte imaginária.

t – variável real que representa o tempo.

$f(t)$ – função no domínio do tempo tal que $f(t)=0$ para $t<0$.

Analisando-se o expoente ($-st$), sabe-se que o mesmo deve ser adimensional para que tenha significado físico de onde conclui-se que a variável s deve ter mesma dimensão de frequência (T^{-1}) recebendo o nome de frequência complexa.

A transformada de Laplace pode então ser entendida como uma mudança de domínio, onde uma função (no domínio do tempo) é transformada em outra no domínio da frequência.

O retorno do domínio da frequência para o domínio do tempo é obtida pela transformada inversa de Laplace denotada por $L^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ e definida por:

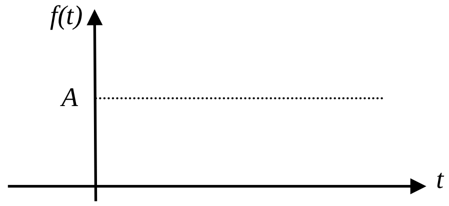
$$L^{-1}\{F(s)\} = f(t) = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} F(s) \cdot e^{st} \cdot ds$$

1.1.1. Algumas transformadas úteis

As transformadas abaixo são de algumas das funções excitação mais comumente empregadas em sistemas de controle e estão aqui relacionadas somente para definir estas funções e utilizá-las como exemplo de aplicação da definição de transformadas de Laplace.

Função degrau

A função degrau é definida por $f(t) = \begin{cases} 0 & para\ t < 0 \\ A & para\ t > 0 \end{cases}$

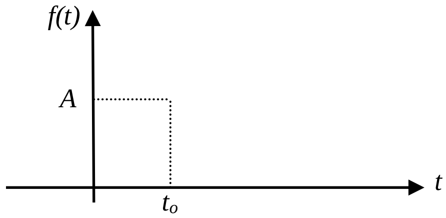


$$L(f(t)) = \int_0^{+\infty} A \cdot e^{-st} \cdot dt = A \cdot \left(-\frac{1}{s}\right) \cdot e^{-st}\Big|_0^{+\infty} = \frac{A}{s}$$

Um caso especial da função degrau é quando $A=1$, quando a função recebe o nome de degrau unitário $u(t)$.

Função pulso

Seja a função $f(t) = \begin{cases} 0 & para\ \ t < 0 \\ A/t_0 & para\ \ 0 < t < t_0 \\ 0 & para\ \ t > t_0 \end{cases}$



Esta função pode ser entendida como um degrau positivo de altura A/t_0 superposto de um degrau negativo atrasado de t_0 segundos tal que a área abaixo da curva seja $A\ t_0$.

$$L(f(t)) = \frac{A}{t_0 s}(1 - e^{-st_0})$$

Função impulso unitário ou delta de Dirac δ(t).

A função impulso é um caso particular da função pulso quando $t_0 \to 0$.

$$f(t) = \lim_{t_0 \to 0} A/t_0 \qquad \text{e} \qquad L(f(t)) = A$$

No caso especial em que $A=1$ a função é chamada é chamada de Delta de Dirac $\delta(t)$ e portanto $L(\delta(t))=1$.

Raramente será necessário resolver a integral para obter a transformada de Laplace de um determinado sinal ou sua inversa, sendo mais indicada a consulta a tabelas de pares de transformadas de Laplace onde se encontra a representação do sinal no domínio do tempo e sua correspondente no domínio da frequência.

Entretanto as tabelas disponíveis não contemplam todos os sinais e suas combinações e desta forma é conveniente conhecer as propriedades básicas de transformadas de Laplace. Estas propriedades são úteis quando uma função não tabelada pode ser convertida em uma soma de outras funções, todas tabeladas.

1.1.2.Propriedades das Transformadas de Laplace

As propriedades das Transformadas de Laplace são úteis para obter transformadas de funções não tabeladas mas que podem ser obtidas a partir de funções tabeladas.

Linearidade (Superposição e Homogeneidade)

Considere a e b constantes reais ou complexas e $f(t)$ e $g(t)$ funções no domínio do tempo, a propriedade da superposição estabelece que:

$$L(a\cdot f(t)+b\cdot g(t))=a\cdot F(s)+b\cdot G(s)$$

Mudança de escala

Quando se pretende normalizar a resposta no domínio do tempo para unificar o comportamento de diversos sistemas físicos em um único modelo matemático é conveniente utilizar uma mudança de escala. Note que o fator de escala a deve ser positivo.

$$L\left(f\left(\frac{t}{a}\right)\right)=a\cdot F(a\cdot s)$$

Deslocamento no tempo

$$L(f(t-a)\cdot u(t-a))=e^{-as}\cdot F(s)$$

Quando este tipo de comportamento ocorre em sistemas físicos o tempo de atraso a é chamado de tempo morto ou atraso de transporte.

Multiplicação por e^{-at} (deslocamento em frequência)

A multiplicação da função no domínio do tempo por e^{-at} tem o efeito de substituir a variável s por $(s+a)$ na função no domínio da frequência, onde a pode ser uma constante real ou complexa.

$$L(e^{-at}f(t))=F(s+a)$$

Diferenciação no tempo

Diferenciar no domínio do tempo equivale a multiplicar por s no domínio da frequência.

$$L\left(\frac{df(t)}{dt}\right)=s\cdot F(s)-f(0^+)$$

Onde: $f(0^+)$ é o valor da função no tempo $t=0$.

A forma geral para diferenciação no tempo pode ser obtida aplicando a propriedade sucessivamente:

$$L\left(\frac{d^n y(t)}{dt^n}\right) = s^n \cdot F(s) - s^{n-1} \cdot f(0) - s^{n-2} \cdot \dot{f}(0) - .....$$

Onde $f(0), \dot{f}(0), \ddot{f}(0)$ são os valores iniciais de *f(t)* e de suas derivadas até a ordem *(n-1)*.

Integração no tempo

Integrar no domínio do tempo equivale a dividir por s no domínio da frequência.

$$L\left(\int f(t)\cdot dt\right) = \frac{F(s)}{s} + \frac{\overset{-1}{f}(0)}{s}$$

Onde $\overset{-1}{f}(0)$ é o valor da integral em $t=0$.

Convolução

A operação matemática chamada convolução definida pela integral:

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau)\cdot g(t-\tau)\cdot d\tau = \int_0^t f(t-\tau)\cdot g(\tau)\cdot d\tau$$

Que tem como transformada de Laplace:

$$L\big(f(t) * g(t)\big) = F(s)\cdot G(s)$$

Teorema do valor inicial

Relaciona o comportamento da função *f(t)* próximo a $t=0$ com o comportamento de $s\cdot F(s)$ quando $s\to\infty$.

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} s\cdot F(s)$$

Teorema do valor final

Relaciona o comportamento da função *f(t)* quando $t\to\infty$ com o comportamento de $s\cdot F(s)$ quando $s\to 0$. O teorema é válido quando os limites existem, ou seja, quando a parte real dos pólos da função *F(s)* é negativa e permite-se um pólo simples na origem para *F(s)*.

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} s\cdot F(s)$$

Este teorema é aplicado quando se deseja conhecer o comportamento do sistema em regime permanente (domínio do tempo) sem a necessidade de obter a transformada inversa.

Expansão em Frações Parciais

Em problemas de engenharia as transformadas de Laplace geralmente aparecem na forma:

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

Onde *N(s)* é um polinômio de grau m e *D(s)* um polinômio de grau n e, para sistemas físicos, $n \geq m$.

Considerando que as tabelas de transformadas de Laplace não comtemplam todas as funções nem sempre é possível obter diretamente a transformada inversa consultando uma tabela.

A expansão em frações parciais ajuda a resolver este problema separando a função $F(s)$ em uma soma de funções mais simples que apresentam pares de transformada tabelados. Uma vantagem do método é que os efeitos de cada um dos pólos do polinômio característico podem ser avaliados independentemente. Por outro lado o polinômio característico deve ser fatorado antes de ser aplicado o método.

1.1.3. Frações parciais de funções com pólos simples

Seja a função $F(s)$ que pode ser fatorada na forma abaixo e que os pólos $-p_1, -p_2, \ldots, -p_n$ são todos distintos, podendo ser reais ou complexos conjugados.

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = K\frac{(s+z_1)\cdot(s+z_2)\cdot.......(s+z_m)}{(s+p_1)\cdot(s+p_2)\cdot.......(s+p_n)} \qquad n > m$$

Utilizando o teorema de Heaviside a expressão acima pode ser expandida em:

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{a_1}{(s+p_1)} + \frac{a_2}{(s+p_2)} + ... + \frac{a_n}{(s+p_n)}$$

E os coeficientes a_k $(k=1,2,.....n)$ são os resíduos nos pólos $-p_1, -p_2, \ldots, -p_n$ e são obtidos através de:

$$a_k = \left.\left((s+p_k)\cdot\frac{N(s)}{D(s)}\right)\right|_{s=-p_k} = \left.\left((s+p_k)\cdot\frac{(s+z_1)\cdot(s+z_2)\cdot...(s+z_m)\cdot}{(s+p_1)\cdot(s+p_2)\cdot...(s+p_n)\cdot}\right)\right|_{s=-p_k}$$

O teorema de Heaviside também é aplicado quando a função envolve pólos múltiplos, quando os coeficientes são obtidos de maneira diferente desta (ver FRANKLIN, 1994). Entretanto não é de aplicação simples e direta. Atualmente diversos pacotes de simulação computacional oferecem ferramentas para obter os coeficientes de expansão em frações parciais.

Exercícios

1 - Aplicando as propriedades de Transformadas de Laplace e considerando que A, α, β e θ são constantes, determine:

$L\{A \cdot e^{-\alpha \cdot t}\}$ $\qquad$ $L\{A \cdot sen(\omega \cdot t + \theta)\}$ $\qquad$ $L\{A \cdot e^{-\alpha \cdot t} \cos(\omega \cdot t + \theta)\}$

$L^{-1}\left\{\frac{3}{3s+5}\right\}$ $\qquad$ $L^{-1}\left\{\frac{3 \cdot e^{-2s}}{3s+5}\right\}$ $\qquad$ $L^{-1}\left\{\frac{10}{s \cdot (s^2+5s+10)}\right\}$

$L^{-1}\left\{\frac{10}{s^2+5s+10}\right\}$ $\qquad$ $L^{-1}\left\{\frac{10}{s^2+8s+10}\right\}$ $\qquad$ $L^{-1}\left\{\frac{10}{s \cdot (s^2+8s+10)}\right\}$

2 - Determine o valor de *f(t)* quando $t \to \infty$:

$F(s) = \frac{10}{s+10}$ $\qquad$ $F(s) = \frac{25}{s \cdot (s+10)}$ $\qquad$ $F(s) = \frac{10}{s-10}$

$F(s) = \frac{-5}{s \cdot (s^2+2s+10)}$ $\qquad$ $F(s) = \frac{10 \cdot s + 2}{s^2 - 8s + 10}$ $\qquad$ $F(s) = \frac{30}{s \cdot (s^2+8s+10)}$

3 – Determine a convolução das funções abaixo, aplicando as propriedades de Transformadas de Laplace:

$f_1(t) = 5 \cdot u(t)$ $\qquad$ $f_2(t) = 2 \cdot e^{-10 \cdot t} + 3 \cdot e^{-22 \cdot t}$

$f_1(t) = 5 \cdot t$ $\qquad$ $f_2(t) = 2 \cdot e^{-10 \cdot t} + 3 \cdot e^{-22 \cdot t}$

$f_1(t) = 5 \cdot \cos(2 \cdot t)$ $\qquad$ $f_2(t) = 3 \cdot u(t)$

$f_1(t) = 5 \cdot u(t)$ $\qquad$ $f_2(t) = 3 \cdot (1 - e^{-3 \cdot t})$

4 – Obtenha a função no domínio do tempo utilizando expansão em frações parciais quando necessário. Determine ainda os valores iniciais e finais das funções.

$F(s) = \frac{400}{(s+10) \cdot (s+20) \cdot (s+5)}$ $\qquad$ $F(s) = \frac{45}{s \cdot (s^2+30s+10) \cdot (s+3)}$

1.2. Resolução de Equações Diferenciais

O método de Transformadas de Laplace é particularmente útil para se obter a solução de equações diferenciais lineares com coeficientes constantes.

O método pode ser resumido em três passos e é amplamente aplicado na resolução de a equações diferenciais lineares de ordem n submetidas a n-1 condições iniciais.

Neste caso, somente a título de exemplo, será aqui aplicada a uma equação diferencial de segunda ordem definida genericamente pelo problema de valor inicial abaixo:

$$a \cdot \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + b \cdot \frac{dy(t)}{dt} + c \cdot y(t) = f(t)$$
$$y(0) = y_0$$
$$\dot{y}(0) = \dot{y}_0$$

Onde: a, b e c são coeficientes constantes

$y(0)$ e $\dot{y}(0)$ – condições iniciais da função resposta.

$y(t)$ – função resposta a ser determinada.

$f(t)$ – função excitação.

1º Passo – Aplicar a Transformada de Laplace e suas propriedades na equação diferencial, convertendo-a em uma equação algébrica no domínio da frequência.

$$L\left(a \cdot \frac{d^2 y(t)}{dt} + b \cdot \frac{d\ \ y(t)}{dt} + c \cdot y(t) \right) = L\big(f(t)\big)$$

$$a\left(s^2 \cdot Y(s) - s \cdot y(0) - \dot{y}(0) \right) + b\big(s \cdot Y(s) - y(0)\big) + c \cdot Y(s) = F(s)$$

2º Passo – Manipular a equação resultante de maneira a isolar a variável de interesse $Y(s)$.

$$Y(s) = \frac{1}{a \cdot s^2 + b \cdot s + c} \cdot F(s) + \frac{(a \cdot s + b) \cdot y_0}{a \cdot s^2 + b \cdot s + c} + \frac{a \cdot \dot{y}_0}{a \cdot s^2 + b \cdot s + c}$$

Note que a primeira parcela está relacionada com a transformada da função excitação $F(s)$ e as outras parcelas estão relacionadas com as condições iniciais.

O polinômio, comum a todas as parcelas, que aparece no denominador é conhecido como equação ou polinômio característico do sistema e suas raízes são os chamados pólos do sistema e não dependem da função excitação $F(s)$.

3º Passo – Aplicar a Transformada Inversa de Laplace e obter o resultado $y(t)$.

$$L^{-1}\big(Y(s)\big) = y(t)$$

Note que a resposta completa, formada pelas respostas forçada e natural, são obtidas simultaneamente. Isto é uma vantagem quando comparada a outros métodos tradicionais de resolução.

A obtenção da transformada inversa muita vezes requer a realização de uma expansão em frações parciais para facilitar a utilização de funções tabeladas.

Exercícios

1 - Resolver as equações diferenciais utilizando Transformadas de Laplace:

$\dot{y} + 2 \cdot y = \delta(t)$ $\quad y(0) = 0$

$\dot{y} + 2 \cdot y = 3 \cdot u(t)$ $\quad y(0) = 5$

$\dot{y} + 2 \cdot y = (2 \cdot t + 3) \cdot u(t)$ $\quad y(0) = 5$

$\ddot{y} + 12\dot{y} + 5 \cdot y = 3 \cdot u(t)$ $\quad y(0) = 0$ $\quad \dot{y}(0) = 2$

$\ddot{y} + 2\dot{y} + 5 \cdot y = 3 \cdot \left(1 - e^{-2 \cdot t}\right) \cdot u(t)$ $\quad y(0) = 0$ $\quad \dot{y}(0) = 0$

Referências Bibliográficas

D'AZZO, John J., HOUPIS, Constantine H. ***Análise e Projeto de Sistemas de Controle Lineares***. 3ª Ed. Editora Guanabara.

DORF, Richard C., BISHOP, Robert H. ***Sistemas de Controle Modernos***. 8ª Ed. Editora LTC. Rio de Janeiro. 2001.

FRANKLIN, Gene F., POWELL, J. David, EMAMI-NAEINI, Abbas ***Feedback Control of Dynamic Systems***. 3rd Ed. Addison-Wesley. 1994.

OGATA, Katsuhiko. ***Modern Control Enginnering****.* 3rd Ed. Prentice-Hall. 1997.