D S T Q Q S S ___/___/___

Lista 10

Capitulo 10.1

③ Seja $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma funcão de uma variavel real, diferenciavel e tal que $\phi'(1) = 4$. Seja $G(x,y) = \phi\left(\frac{x}{y}\right)$

Calcule.

ⓐ $\frac{\partial G}{\partial x}(1,1)$ $\qquad \frac{\partial G}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\phi\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{1}{y}\phi'\left(\frac{x}{y}\right)$

$\frac{\partial G}{\partial x}(1,1) = \phi'(1) = 4$

ⓑ $\frac{\partial G}{\partial y}(1,1)$ $\qquad \frac{\partial G}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\phi\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{-x}{y^2}\phi\left(\frac{x}{y}\right)$

$\frac{\partial G}{\partial y}(1,1) = -\phi'(1) = -4$

Capitulo 10.2

⑥ Seja $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma funcão diferenciavel tal que $\phi'(3) = 4$. Seja $G(x,y,z) = \phi(x^2+y^2+z^2)$. Calcule:

ⓐ $\frac{\partial G}{\partial x}(1,1,1)$ $\qquad \frac{\partial G}{\partial x}(x,y,z) = \phi'(x^2+y^2+z^2) \cdot 2x$

$\frac{\partial G}{\partial x}(1,1,1) = \phi'(3) \cdot 2 = 4 \cdot 2 = 8$

ⓑ $\frac{\partial G}{\partial y}(1,1,1)$ $\qquad \frac{\partial G}{\partial y}(x,y,z) = \phi'(x^2+y^2+z^2) \cdot 2y$

___/___/___ D S T Q Q S S

$$\frac{\partial G}{\partial y}(1,1,1) = \emptyset'(3).2 = 8$$

Ⓒ $\frac{\partial G}{\partial z}(1,1,1)$ $\quad \frac{\partial G}{\partial z}(x,y,z) = \emptyset'(x^2+y^2+z^2).2z$

$$\frac{\partial G}{\partial z}(1,1,1) = \emptyset'(3).2 = 8$$

Capitulo 11.3

⑤ $2x+y+3z=6$ é uma equacão do plano tangente ao grafico de $f(x,y)$ no ponto $(1,1,1)$.

ⓐ Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)$.

Plano tangente em $(1,1,1)$

$2x+y+3z=6$ ou seja $z = -\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + 2$

Por outro Lado

$$z-1 = \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)(y-1)$$

e Dai

$$z = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)}_{-\cancel{2}/3}.x + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)}_{-1/3}.y \underbrace{- \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) - \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) + 1}_{2}$$

Portanto $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = \frac{-2}{3}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = \frac{-1}{3}$

(b) Determine a equaçaõ da reta normal no ponto $(1,1,1)$

$$(x,y,z) = (1,1,1) + \lambda\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -1\right) \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

ou seja

$$(x,y,z) = (1,1,1) + \lambda(2,1,3)$$

Capitulo 12.1

(5) Suponha que, para todo x, $f(3x, x^3) = \text{arctg}\, x$.

(a) Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(3,1)$ admitindo $\frac{\partial f}{\partial y}(3,1) = 2$

$f(3x, x^3) = \text{arctg}\, x$, para todo x Segue que para todo t, temos tambem $f(3t, t^3)$. Derivando em relaçaõ a t

$$\frac{d}{dt}\left[f(x,y)\right] = \frac{d}{dt}\left[\text{arctg}\, x\right], \text{ onde } x = 3t \text{ e } y = t^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{1+t^2}, \text{ para todo } t$$

Para $t=1$

$$3\frac{\partial f}{\partial x}(3,1) + 3\frac{\partial f}{\partial y}(3,1) = \frac{1}{2}$$

Olhando que $\frac{\partial f}{\partial y}(3,1) = 2$, é $\frac{\partial f}{\partial x}(3,1) = -\frac{11}{6}$

SÃO DOMINGO

/ /

D S T Q Q S S

(B) Determine a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(3,1,f(3,1))$.

$$z - f(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$

Em $(3,1,f(3,1))$, $x_0 = 3$, $y_0 = 1$

$$f(3,1) = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$$

Substituindo

$$z - \frac{\pi}{4} = \frac{\partial f}{\partial x}(3,1)(x-3) + \frac{\partial f}{\partial y}(3,1)(y-1)$$

$$z - \frac{\pi}{4} = -\frac{11}{6}(x-3) + 2(y-1)$$

SÃO DOMINGOS

Capitulo 12.2

(11) Calcule:

(a) $\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}$ sendo $F(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ e $G(x,y,z) = x+y+z$.

$\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}$ é o determinante de F e G em relação a x e y.

Sendo $F(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ e $G(x,y,z) = x+y+z$, temos

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2x - 2y = 2(x-y)$$

(b) $\frac{\partial(u,v)}{\partial(y,z)}$ sendo $u = xyz$ e $v = x^3+y^2$.

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(y,z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} xz & xy \\ 2y & 0 \end{vmatrix} = -2xy^2$$

(c) $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,s)}$ sendo $x = r+3s+t^2$ e $y = r^2-s^2-3t^2$.

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,s)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial s} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2r & -2s \end{vmatrix} = -2s - 6r = -2(s+3r).$$

___/___/___ D S T Q Q S S

① $\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}$ sendo $x = r + 3s + t^2$ e $y = r^2 - s^2 - 3t^2$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2t \\ -2s & -6t \end{vmatrix} = -18t + 4st = 2t(-9 + 2s)$$

Capitulo 13.1

② Determine a equação da reta tangente à curva γ no ponto $\gamma(t_0) = (2,5)$ sabendo-se que $\gamma'(t_0) \neq \vec{0}$ e que sua imagem está contida na curva de nivel $xy = 10$. Qual a equação da reta normal a γ, neste ponto?

Seja $F(x,y) = xy - 10$

$\nabla F(2,5) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}(2,5), \frac{\partial F}{\partial y}(2,5)\right) = (5,2)$ pois $\frac{\partial F}{\partial x} = y$ e $\frac{\partial F}{\partial y} = x$

Reta tangente em notação vetorial (o vetor $(-2,5)$ é perpendicular ao vetor $\nabla F = (5,2)$; logo o vetor $(-2,5)$ é paralelo a reta tangente)

$(x,y) = (2,5) + \lambda(-2,5) \quad \lambda \in \mathbb{R}$

Reta normal em notação vetorial (o $\nabla F = (5,2)$ é um vetor normal à curva de nivel de F que passa por $(2,5)$)

$(x,y) = (2,5) + \lambda(5,2)$

D S T Q Q S S — / /

① Determine uma reta que seja tangente à elipse $2x^2+y^2=3$ e paralela à reta $2x+y=5$

$$-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)} = \frac{4x_0}{2y_0} = -\frac{2x_0}{y_0}$$ é o coeficiente angular a reta tangente à elipse

$2x+y=5 \rightarrow y=-2x+5$ (-2 é o coeficiente angular a reta paralela)

Logo:

$-\frac{2x_0}{y_0} = -2 \rightarrow x_0 = y_0$

$(x_0,y_0) \in$ elipse $\rightarrow 2x_0^2+x_0^2=3 \rightarrow x_0=\pm 1 \rightarrow y_0=\pm 1$

$\nabla f(1,1)\cdot[(x,y)-(1,1)]=0$

$(4,2)\cdot(x-1,y-1)=0$

$4x-4+2y-2=0$ ou seja $y=-2x+3$

$\nabla f(-1,1)\cdot[(x,y)-(-1,-1)]=0$

$(4,2)\cdot(x+1,y+1)=0$

$4x+4+2y+2=0$ ou seja $y=-2x-3$

⑦ Determine uma função $z=f(x,y)$ tal que $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}$ e cujo o gráfico passe pelos pontos $(1,1,3)$, $(0,0,1)$ e $(0,1,2)$

$z=f(x,y)=\varphi(x,y)$, com $\varphi(u)$ derivável, satisfaz à condição

$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}$

___/___/___ D S T Q Q S S

Seja $\varphi(u) = au^2 + bu + c$. Então

$\varphi(1+1) = \varphi(2) = 3 \rightarrow 4a + 2b + c = 3$
$\varphi(0+0) = \varphi(0) = 1 \rightarrow c = 1$
$\varphi(0+1) = \varphi(1) = 2 \rightarrow a + b + c = 2$
Então $a = 0$, $b = 1$, $c = 1$ e $(u) = u + 1$

Assim $\varphi(x+y) = x + y + 1$ e, portanto, $f(x,y) = x + y + 1$ atende a que foi solicitado

Capitulo 13.2
② A função diferenciavel $z = f(x,y)$ é dada implicitamente pela equação $x^3 + y^3 + z^3 = 10$. Determine a equação do plano tangente ao grafico de f no ponto $(1, 1, f(1,1))$.

$F(x,y) = x^3 + y^3 + z^3 - 10 \rightarrow \nabla F(x,y,z) = (3x^2, 3y^2, 3z^2)$

$z = f(x,y) = \sqrt[3]{10 - x^3 - y^3}$ e
$z = f(1,1) = \sqrt[3]{8} = 2$.

Plano tangente em $(1, 1, f(1,1)) = (1, 1, 2)$
$\nabla F(1,1,2) \cdot [(x,y,z) - (1,1,2)] = 0$ ou seja
$x + y + 4z = 10$

⑤ A imagem da curva $\gamma(t)$ está contida na interseção das superfícies $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ e $x^2 + 3y^2 - z^2 = 3$. Suponha $\gamma(t_0) = (1,1,1)$ e $\gamma'(t_0) \neq \vec{0}$. Determine a reta tangente a γ em $\gamma(t_0)$

D S T Q Q S S ___/___/___

$F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 = 3$

$G(x,y,z) = x^2 + 3y^2 - z^2 = 3$

Para todo t no Dominio γ temos $F(\gamma(t)) = 3$ e $G(\gamma(t)) = 3$, Pois as imagens de γ está contina na superficies $F(x,y,z) = 3$ e $G(x,y,z) = 3$ segue que

$\nabla F(\gamma(t_0)) \cdot \gamma'(t_0) = 0$ e

$\nabla G(\gamma(t_0)) \cdot \gamma(t_0) = 0$

$\gamma(t_0)$ é normal aos vetores $\nabla F(1,1,1) = (2,2,2)$ e $\nabla G(1,1,1) = (2,6,-2)$

Logo $\gamma(t_0)$ é paralelo ao Produto vetorial

$$\nabla F(1,1,1) \wedge \nabla G(1,1,1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & -2 \end{vmatrix} = -16\vec{i} + 8\vec{j} + 8\vec{k}$$

A equação da reta tangente a γ no ponto $\gamma(t_0) = (1,1,1)$ é

$(x,y,z) = (1,1,1) + \lambda(-16,8,8)$ ou

$(x,y,z) = (1,1,1) + \lambda(-2,1,1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$