Estatística Matemática

Estimação Pontual

Prof. Paulo Cerqueira Jr - cerqueirajr@ufpa.br
Faculdade de Estatística - FAEST
Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística - PPGME
Instituto de Ciências Exatas e Naturais - ICEN

https://github.com/paulocerqueirajr

Introdução

Introdução

- Assuma que os valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de uma amostra aleatória com f.d ou f.p podem ser observados (a p.d.f. é conhecida, é desconhecido).
- Tomando como base as observações deseja-se estimar o valor do parâmetro desconhecido ou o valor de alguma função do parâmetro desconhecido. Esta estimação pode ser feita de duas maneiras:
  - **Estimação pontual**: O valor de alguma estatística, ex. , representará o desconhecido . Esta estatística é chamada de `estimador pontual`.
  - **Estimação intervalar**: Definimos duas estatísticas

    tal que

    constitui um intervalo para o qual a probabilidade de conter pode ser determinada.

Métodos para encontrar estimadores pontuais

Métodos para encontrar estimadores pontuais

Um **estimador** é uma estatística que pode ser encarada tanto como:

- Variável aleatória;
- Função de valores observados.

Considere que é uma amostra aleatória com p.d.f. e queremos estimar , sendo: - é alguma função de - é um estimador de

> Representações do estimador:

1. Como variável aleatória:
2. Como função de valores observados:

`Obs:` O valor numérico obtido é chamado de **estimativa**.

Estimador para a média populacional ()

Como variável aleatória:

Como estimativa baseada em dados observados:

Neste caso, é um valor numérico representando uma estimativa para baseada na amostra .

- Sobre a estimação de parâmetros:
  - **Estimação de** : Busca determinar o valor desconhecido do parâmetro .
  - **Estimação de** : Busca determinar o valor que a função conhecida assume para o parâmetro desconhecido .

Observações importantes

1. **Candidatos naturais**:
    - A média amostral é um candidato natural para estimar a média populacional.
2. **Limitações da intuição**:
    - Em casos mais complexos, a intuição pode falhar;
    - Técnicas formais são necessárias para sugerir estimadores adequados.
3. **Aviso sobre qualidade**:
    - As técnicas de estimação não garantem automaticamente bons estimadores;
    - Os estimadores obtidos devem sempre ser avaliados quanto à sua **qualidade**.

> **Nota**: Todo estimador pontual deve ser cuidadosamente avaliado antes de ser considerado adequado para inferência estatística.

Método dos Momentos

Método dos Momentos

- Este método é, talvez, o mais velho método para encontrar estimadores pontuais. Tem a virtude de ser bastante simples de usar e quase sempre fornece algum tipo de estimativa.
- Em muitos casos, infelizmente, este método fornece estimadores que podem ser melhorados. Entretanto, ele é uma opção interessante quando outros métodos se mostram problemáticos.
- Os estimadores do Método de Momentos são encontrados quando igualamos os primeiros momentos amostrais aos correspondentes momentos populacionais, e resolvemos os sistema resultante de equações simultâneas.
- Seja uma amostra aleatória de uma população com p.m.f. ou p.d.f. .

Método dos Momentos

- Seja o -ésimo momento amostral.

- Denote como o -ésimo momento populacional em relação à zero. .
- O momento populacional será tipicamente uma função de ; denote .
- Sistema de equações a ser resolvido:

Método dos Momentos - Exemplos

Exemplo 1 Suponha i.i.d. . Determine o estimador pelo método de momentos.

`Solução:` Na notação anterior, temos e :

- Momentos amostrais:
- Momentos populacionais:

Equações:

Método dos Momentos - Exemplos

- Continuação, substituindo , temos

- Neste exemplo, a solução do método de momentos coincide com nossa intuição.
- O método será mais útil, entretanto, quando nenhum estimador óbvio existir.

Método dos Momentos - Exemplos

Exemplo 2 Seja i.i.d. Binomial . Determine o estimador pelo método de momentos.

Assumimos que ambos e são desconhecidos e nós desejamos estimadores para ambos os parâmetros.

- Momentos amostrais:
- Momentos populacionais:

Método dos Momentos - Exemplos

Equações :

Substituindo , temos

Método dos Momentos - Exemplos

Logo,

- Estes não são os melhores estimadores para os parâmetros populacionais e .
- Veja que é possível obter **estimativas negativas** para estes parâmetros que são números positivos. Isso ocorre quando a média amostral é menor que a variância (**alto grau de variabilidade nos dados**).
- O método dos momentos, neste caso, pelo menos nos deu um conjunto de candidatos a estimadores pontuais para e .

Método dos Momentos - Exemplos

Exemplo 3 Seja uma amostra aleatória da Poisson(). Determine o estimador pelo método de momentos.

- Então o estimador de , obtido pelo método de momentos, é , ou seja, estimamos a média populacional com a média amostral .

Método da máxima verossimilhança

Método da máxima verossimilhança

- Para introduzir este método, considere o seguinte problema:
- Suponha que uma urna contenha bolas brancas e pretas. Sabemos também que a razão entre o nº de bolas brancas e pretas é , entretanto, não se sabe qual das duas cores é mais numerosa dentro da urna. Isto é, a probabilidade de sortear uma bola preta pode ser tanto quanto .
- Se bolas são sorteadas (com reposição) desta urna, a distribuição de (variável de bolas pretas) é a Binomial:

sendo é a probabilidade de retirar uma bola preta. Temos que ou .

Método da máxima verossimilhança

`Estratégia:` Sortear três bolas da urna , com reposição, e tentar estimar o parâmetro .

- O problema de estimação é particularmente simples, neste caso, visto que devemos escolher entre dois números e . Desta forma podemos avaliar todos os possíveis resultados desta amostragem:

Resultado: de bolas pretas	0	1	2	3

Método da máxima verossimilhança

- Neste exemplo, se encontraremos em uma amostra , a estimativa será preferida com relação a visto que

- Isto é, a amostra é mais provável (no sentido de ter maior probabilidade) de surgir em uma população com do que em uma população com .
- Usando o raciocínio acima:
  - Devemos estimar , quando ou 1.
  - Devemos estimar , quando ou 3.
- O estimador pode ser definido como:

Método da máxima verossimilhança

- O estimador seleciona para cada possível resultado , o valor de tal que sendo o valor alternativo de .
- De maneira geral, se diversos valores alternativos de forem possíveis, podemos proceder da seguinte forma:
- Se encontraremos em uma amostra com de uma população Binomial, devemos substituir todos os possíveis valores de na expressão

e escolher, como nossa estimativa, o valor de que maximiza .

- O valor de , correspondente ao máximo, pode ser encontrado quando derivamos a função acima com respeito a , e igualamos o resultado a zero. Ver a seguir…

Método da máxima verossimilhança

- Igualando a zero

- Raízes
- As primeiras duas raízes fornecem . Portanto, nossa estimativa será .
- A estimativa tem a propriedade sendo qualquer outro valor de no intervalo .

Método da máxima verossimilhança

- Antes de definir os estimadores de máxima verossimilhança, considere a seguinte revisão:
- A função de verossimilhança de variáveis aleatórias é definida pela p.m.f. ou p.d.f. conjunta , que é considerada uma função de .
- Em particular, se é uma amostra aleatória com f.d. ou f.p. , então temos:
- Notação é usada para nos lembrar que a verossimilhança é encarada como uma função de .

Método da máxima verossimilhança

- Suponha que os valores observados na amostra sejam .
  Queremos saber de qual f.d. ou f.p. este conjunto de valores é proveniente com maior chance. Em outras palavras:
  - Queremos saber de qual f.d. ou f.p. (qual valor de) a verossimilhança apresentará seu maior valor tendo em vista que observamos .
  - Desejamos encontrar o valor de , denotado por , que irá maximizar a função de verossimilhança .
- é em geral uma função da amostra aleatória .
- .

é chamado de Estimador de Máxima Verossimilhança (EMV) de .

- A definição formal é dada a seguir…

Método da máxima verossimilhança

Definição 1 (Estimador de Máxima Verossimilhança (EMV).) Seja a função de verossimilhança associada às variáveis aleatórias . Se é o valor de que maximiza , então é o EMV de .

- Para a amostra observada , o número calculado através da formulação
  será a estimativa de máxima verossimilhança de .
- Muitas funções de verossimilhança satisfazem condições de regularidade, tal que o EMV é obtido pela solução da equação: .

Método da máxima verossimilhança

- Outro ponto importante é que e apresentam ponto de máximo para o mesmo valor de .
- Muitas vezes é mais fácil encontrar o máximo usando o logaritmo da verossimilhança.
- Se a função de verossimilhança envolve parâmetros, isto é:

então os EMVs de serão as variáveis aleatórias

onde são os valores em que maximizam

Método da máxima verossimilhança

- Se certas condições de regularidade são satisfeitas, o ponto onde a verossimilhança atinge seu máximo é solução do sistema de equações ao lado.

- Neste caso, também pode ser mais fácil trabalhar com o log da verossimilhança.

Método da máxima verossimilhança - Exemplos

Exemplo 4 Suponha que uma amostra aleatória é obtida a partir da distribuição Bernoulli(p).

- A amostra será uma sequência de 0's e 1's.
- Função de verossimilhança:

- Para simplificar a notação considere

Método da máxima verossimilhança - Exemplos

- Aplicando o logaritmo:
- Derivando em relação a :
- Igualando a zero:

Método da máxima verossimilhança - Exemplos

- Resolvendo:

- Neste caso o EMV coincide com o estimador do método dos momentos.