Estatística Matemática

Lista 2 - Verossimlhança

AUTOR
Paulo Cerqueira Jr

AFILIAÇÕES
Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística - PPGME
Universidade Federal do Pará - UFPA

Exercício 1 Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória obtida a partir da distribuição $f(x) = \theta x^{\theta-1} I_{(0,1)}(x)$, com $\theta > 0$. Encontre uma estatística suficiente para θ. Calcule o valor esperado desta estatística.

Exercício 2 Seja X_1, X_2 uma amostra aleatória da variável $X \sim Poisson(\theta)$. Mostre que $T = X_1 + 2X_2$ não é suficiente para θ.

Exercício 3 Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória obtida a partir da distribuição $f(x) = \exp\{-(x-\theta)\} I_{(\theta,\infty)}(x)$, com $\theta > 0$. Encontre uma estatística suficiente para θ.

Exercício 4 Mostre que a distribuição, indicada em cada um dos itens abaixo, pertence à família exponencial.

a. $Gama(\alpha, \beta)$ com α e β desconhecidos.

b. $Gama(\alpha, \beta)$ com α conhecido e β desconhecido.

c. $Beta(\alpha, \beta)$ com α e β desconhecidos.

d. $Beta(\alpha, \beta)$ com α conhecido e β desconhecido.

e. $Poisson(\lambda)$.

f. Binomial Negativa com numero de sucessos r conhecido e $0 < p < 1$ desconhecido

Exercício 5 Para cada um dos itens do Exercício (9), encontre uma estatística suficiente para o parâmetro(s) de interesse.

Exercício 6 Nos Exercícios (6) e (8) determine se a estatística suficiente encontrada pode ser classificada como minimal.

Exercício 7 Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória com f.d

$$f(x|\mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)}{\sigma}\right\}, \text{ para } \mu < x < \infty, \ 0 < \sigma < \infty.$$

Encontre uma estatística suficiente bi-dimensional para (μ, σ).

Exercício 8 Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória com f.d.'s

$$f(x|\theta) = \frac{1}{2i\theta}, \text{ para } -i(\theta-1) < x_i < i(\theta+1), \ \theta > 0.$$

Encontre uma estatística suficiente bi-dimensional para θ.

Exercício 9 Suponha que X_1 e X_2 sao i.i.d. com p.d.f. $f(x|\alpha) = \alpha x^{\alpha-1} \exp -x^{\alpha} I_{(0,\infty)}(x)$ sendo $\alpha > 0$. Mostre que $\log(X_1)/\log(X_2)$ e uma estatística ancilar.

Exercício 10 Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de uma família de locação. Mostre que $M - \overline{X}$ e uma estatística ancilar, sendo M a mediana amostral.

Exercício 11 Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória com f.d. indicada nos itens abaixo. Em cada caso, encontre uma estatística suficiente completa, ou mostre que tal estatística não existe.

a. $f(x|\theta) = \dfrac{2x}{\theta^2} I_{(0,\theta)}(x), \text{ para } \theta > 0.$

b. $f(x|\theta) = \dfrac{\theta}{(1+x)^{1+\theta}} I_{(0,\infty)}(x), \text{ para } \theta > 0.$

c. $f(x|\theta) = \binom{2}{x} \theta^x (1-\theta)^{2-x}, \text{ para } x = 0, 1, 2, \ldots \text{ e } \theta \in [0, 1].$

Exercício 12 Seja X uma única observação da Bernoulli(θ). Considere os estimadores $T_1(X) = X$ e $T_2(X) = 1/2$.

a. $T_1(X) = X$ e $T_2(X) = 1/2$ são estimadores não viciados para θ?

b. Calcule o erro quadrático médio de $T_1(X) = X$ e $T_2(X) = 1/2$.

Exercício 13 Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de alguma densidade cujo valor esperado é igual a μ e a variância é σ^2. Mostre que $\sum_{i=1}^{n} a_i X_i$ é um estimador não viciado de para qualquer conjunto de constantes conhecidas $a_1, \ldots, a_n$ satisfazendo $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$.

Exercício 14 Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da distribuição com função de probabilidade $f(x \mid \theta) = \theta^x (1-\theta)^{1-x} \; I(x)_{\{0,1\}}, \;\; 0 < \theta < 1.$

a. Encontre o estimador do método dos momentos para θ.

b. Encontre o estimador de m´axima verossimilhança para θ.

c. Calcule o erro quadrático médio dos estimadores obtidos nos itens a. e b.

Exercício 15 Em estudos de genética, o modelo Binomial é frequentemente utilizado exceto quando a observação $x = 0$ é impossível de ocorrer; nestes casos, a amostragem será realizada a partir da seguinte distribuição truncada:

$$\binom{m}{x} \frac{p^x (1-p)^{m-x}}{1-(1-p)^m} I_{\{1,2,\ldots,m\}}(x)$$

Encontre o estimador de máxima verossimilhança de p para o caso onde $m = 2$ e o tamanho amostral é n.

Exercício 16 Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória obtida a partir da distribuição Exponencial(λ) com densidade $f(x \mid \lambda) = \lambda \exp\{-\lambda x\} I_{[0,\infty)}(x)$. Encontre o estimador de máxima verossimilhança para λ.

Exercício 17 Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória obtida a partir da densidade $f(x \mid \theta) = \dfrac{2x}{\theta} I_{[0,\theta)}(x)$, $\theta > 0$. Encontre o estimador de máxima verossimilhança para θ.

Exercício 18 Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória obtida a partir da densidade $f(x \mid \theta) = \dfrac{1}{2\theta} I_{[-\theta,\theta)}(x)$, $\theta > 0$. Encontre o estimador de máxima verossimilhança para θ.

Exercício 19 Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória obtida a partir da densidade $f(x \mid \theta) = \theta(1+x)^{(-(1+\theta))} I_{[0,\infty)}(x)$, $\theta > 0$.

a. Encontre o estimador de máxima verossimilhança para $1/\theta$.

b. Encontre o limite inferior de Cramér-Rao para a variância de um estimador não viciado de $1/\theta$.

Exercício 20 Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória obtida a partir da distribuição Poisson(λ). Encontre o estimador de máxima verossimilhança para $\tau(\lambda) = (1+\lambda)\exp\{-\lambda\}$.

Exercício 21 Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória obtida a partir da densidade $f(x \mid \theta) = \theta x^{\theta-1} I_{[0,1)}(x)$, $\theta > 0$.

a. Encontre o estimador de máxima verossimilhança para θ.

b. Encontre o estimador de máxima verossimilhança para $g(\theta) = \theta/(1+\theta)$.

c. Use os resultados da teoria assintótica dos EMVs para determinar a distribuição aproximada dos estimadores obtidos nos items a. e b. quando n é grande.

Exercício 22 Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória obtida da $N(\theta, 1)$.

a. Encontre o estimador de máxima verossimilhança para θ. Calcule o EQM deste estimador.

b. Encontre o estimador de máxima verossimilhança para $P(X_i > 0)$.

c. Encontre o limite inferior de Cramér-Rao para a variância de um estimador não viciado de θ.

d. O estimador encontrado no item a. é eficiente?

Exercício 23 Considere o resultado obtido no exercício 5. para uma amostra aleatória da Exponencial(λ).

a. Encontre o estimador de máxima verossimilhança de $g(\lambda) = P(X > 1)$.

b. Use os resultados da teoria assintótica dos EMVs para determinar a distribuição aproximada do estimador obtido em a. quando n é grande.

Exercício 24 Sejam $Y_1, \ldots, Y_n$ variáveis aleatórias independentes com $Y_i \sim N(\alpha + \beta x_i, \sigma^2)$, onde x_i é conhecido para todo $i = 1, \ldots, n$. Encontre os estimadores de áxima verossimilhança de α, β e σ^2.

Exercício 25 Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória obtida a partir da densidade $f(x \mid \theta) = \dfrac{x}{\theta^2}\exp\{-x\theta\} I_{[0,\infty)}(x)$, $\theta > 0$. Encontre o estimador de máxima verossimilhança de θ e verifique se ele é eficiente.

Exercício 26 Sejam $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. Bernoulli(p). Mostre que a variância de $\bar{X}$ atinge o limite inferior de Cramér-Rao e, portanto, $\bar{X}$ é o melhor estimador não viciado de p.

Exercício 27

15. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. Exp(λ).

   a. Encontre um estimador não viciado para baseado apenas em $Y = min(X_1, \ldots, X_n)$.

   b. Encontre um estimador que é melhor do que aquele obtido em a. Prove que é melhor.

Exercício 28 Sejam $X_1, \ldots, X_n$ v.a's i.i.d. $N(\theta, \theta^2)$, com $\theta > 0$. Para este modelo $\bar{X}$ e cS são estimadores não viciados para θ, sendo $c = \sqrt{n-1}\Gamma[(n-1)/2]/\sqrt{2}\Gamma[n/2]$.

a. Prove que para qualquer número a o estimador $a\bar{X} + (1a)cS$ é um estimador não viciado para θ.

b. Encontre o valor de a que determina o estimador com variância mínima.

Exercício 29 Suponha que $X_1, \ldots, X_n$ é uma amostra aleatória da distribuição Normal com média desconhecida $\theta \neq 0$ e variância desconhecida σ^2. Utilize o Método Delta para determinar a distribuição assintótica de $\bar{X}^3$.

Exercício 30 Suponha que $X_1, \ldots, X_n$ é uma amostra aleatória da distribuição Exponencial com parâmetro β. A densidade é dada por

$$f(x \mid \beta) = \beta \exp\{-\beta x\} I_{[0,\infty)}(x)$$

a.Encontre $\hat{\beta}_n$ o estimador de máxima verossimilhança para β.

b. Se n é grande, a distribuição de $\hat{\beta}_n$ será aproximadamente Normal com média β. Mostre que a variância desta distribuição Normal será β^2/n.

c. Use o Método Delta para encontrar a distribuição assintótica de $1/\hat{\beta}_n$.