Estatística Matemática

Lista 1 - Amostra aleatória

AUTOR
Paulo Cerqueira Jr

AFILIAÇÕES
Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística - PPGME
Universidade Federal do Pará - UFPA

Exercício 1 Uma v.a X assume os valores -1, 0 e 1 com igual probabilidade. Para uma amostra de tamanho 2, obtenha a distribuição de probabilidade de $\bar{X}$.

Exercício 2 Considere $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatoria da distribuição $Bernoulli(p)$. Então temos $E(X_i) = p$ e $Var(X_i) = p(1-p)$. Defina $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

a. Qual é a distribuição de Y?

b. Seja $n = 100$ e $p = 0,5$. Utilize o Teorema Central do Limite para calcular uma aproximação para a seguinte probabilidade $P(47,5 < Y < 52,5)$.

Exercício 3 Verifique que se $X_1, X_2, \ldots, X_n$ forem v.a.s independentes, cada uma tendo distribuição exponencial com parâmetro α_i, para $i = 1, 2 \ldots, n$, e se $K = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ então K terá distribuição exponencial com parâmetro $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i$.

Exercício 4 Bolas sao sorteadas com reposição de uma urna contendo 1 bola branca e 2 bolas pretas. Denote $X_i = 0$ se a bola retirada no i−ésimo sorteio for branca e $X_i = 1$ se for preta. Considere a amostra aleatoria $X_1, X_2, \ldots, X_9$.

a. Qual e a distribuição conjunta destas nove variáveis aleatórias?

b. Qual e a distribuição da soma destas variáveis?

c. Encontre o valor esperado da media amostral.

d. Encontre o valor esperado da variancia amostral S^2.

Exercício 5 Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatoria de uma população Exponencial(β). Especificamente, X_i poderia representar o tempo ate a falha (medida em anos) para n equipamentos idênticos colocados em teste.

a. Encontre a distribuição conjunta das variáveis nesta amostra aleatória.

b. Qual é a probabilidade de que todos os equipamentos durem mais de 2 anos?

Exercício 6 Considere que X e Y são variáveis aleatórias independentes com distribuição Normal Padrão. Encontre a função geradora de momentos conjunta de X e Y.

Exercício 7 Seja X uma variavel aleatóoria com distribuição $Gama(r, \lambda)$. Sua densidade de probabilidade é dada a seguir:

$$f(x, r, \lambda) = \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} \exp\{-\lambda x\} I_{(0,\infty)}(x).$$

Determine a função geradora de momentos de X.

Exercício 8 Suponha que $X_1, X_2, \ldots, X_n$ e uma amostra aleatória de uma população Exponencial(λ) cuja função densidade é dada por: ´

$$f(x, \lambda) = \lambda \exp\{-\lambda x\} I_{(0,\infty)}(x).$$

Encontre a distribuição de $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

Exercício 9 Suponha que uma população tem $\sigma = 2$ e $\overline{X}$ é a média de amostras de tamanho 100. Enconte l tal que $P(-l < \overline{X} - \mu < l) = 0.90$.

Exercício 10 Um pesquisador deseja estimar a média de uma população usando uma amostra grande o suficiente tal que temos probabilidade de 0.95 para que a média amostral não difira da média populacional por mais de 25% do desvio padrão. Qual deve ser o tamanho da amostra?

Exercício 11 Seja $\overline{X}$ a média de uma amostra aleatória de tamanho 75 com a seguinte função densidade $f(x) = I_{(0,1)}(x)$. Calcule um valor aproximado para a seguinte probabilidade $P(0.45 < \overline{X} < 0.55)$.

Exercício 12 Seja X_i uma v.a. com distribuicao $N(ii^2),\ i = 1,\ 2,\ 3$. Suponha que as v.a.s X_1, X_2 e X_3 são independentes. Usando apenas as v.a.s X_1, X_2 e X_3:

a. Dê um exemplo de uma estatística que tenha distribuição χ^2_3;

b. Dê um exemplo de uma estatística que tenha distribuição $F_{(1,2)}$;

c. Dê um exemplo de uma estatística que tenha distribuição t_2.

Exercício 13 Sejam X_1, X_2, uma a.a. da distribuição $N(0, 1)$.Obtenha a distribuição amostral das seguintes estatísticas:

a. $\dfrac{X_2 - X_1}{\sqrt{2}}$;

b. $\dfrac{(X_1 + X_2)^2}{(X_2 - X_1)^2}$;

c. $\dfrac{(X_1 + X_2)}{\sqrt{(X_2 - X_1)^2}}$;

d. $\dfrac{X_1^2}{X_2^2}$.

Exercício 14 Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$, uma a.a. da distribuição $N(0, 1)$. Considere as seguintes va's:

$$\bar{X} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} X_i \qquad \bar{X} = \frac{1}{n-k} \sum_{i=1}^{n-k} X_i$$

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \qquad S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$$

$$S_k^2 = \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^{k} (X_i - \bar{X}_k)^2 \qquad S^2_{(n-k)} = \frac{1}{(n-k-1)} \sum_{i=1}^{n-k} (X_i - \bar{X}_(n-k))^2$$

Determine as distribuições de:

a. $\sigma^{-2}\left[(k-1)S_k^2 + (n-k-1)S_{n-k}^2\right]$;

b. $\dfrac{1}{2}(\bar{X}_k - \bar{X}_{n-k})$;

c. $\sigma^{-2}(X_i - \mu)^2$;

d. $\dfrac{S_k^2}{S_{n-k}^2}$;

e. $\dfrac{(\bar{X}-\mu)}{S/\sqrt{n}}$.

Exercício 15 Seja X_1, X_2 uma amostra aleatória da $N(0,1)$. Usando resultados vistos em aula, determine a distribuição de:

a. $(X_2 - X_1)/\sqrt{2}$.

b. $(X_1 + X_2)^2/(X_2 - X_1)^2$.

c. $(X_1 + X_2)/\sqrt{(X_2 - X_1)^2}$.

d. $1/Z$, onde $Z = \dfrac{X_1^2}{X_2^2}$.

Exercício 16 Seja X_1, X_2 uma amostra aleatória da densidade

$$f(x) = (1/2)\exp\{-x/2\}\, I_{(0,\infty)}(x).$$

Use resultados relacionados as distribuições Qui-Quadrado e F para obter a distribuição de X_1/X_2.

Exercício 17 Respondas as seguintes sentenças:

1. Se X tem distribuição $F_{m,n}$, mostre que $1/X$ tem distribuição $F_{n,m}$.

2. Se X tem distribuição t_k, mostre que X^2 tem distribuição $F_{1,k}$. Qual é a distribuição de $(1/X)^2$?