Estatística Matemática

Verossimilhança

Prof. Paulo Cerqueira Jr - cerqueirajr@ufpa.br
Faculdade de Estatística - FAEST
Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística - PPGME
Instituto de Ciências Exatas e Naturais - ICEN

https://github.com/paulocerqueirajr

Modelos estatísticos

Modelos Estatísticos

- Nosso ponto de partida será um estudo empírico (pode ser experimental ou observacional) que irá fornecer certo conjunto de dados (amostra) que denotamos por $\mathbf{y}$. Nos casos mais simples, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)'$.

> **Suposição fundamental:** considere $\mathbf{y}$ como um valor obtido de uma vetor aleatório Y.

- Nosso objetivo é usar $\mathbf{y}$ para tirar conclusões sobre a distribuição desconhecida $F(\cdot)$ de Y.
- Nossas conclusões sobre $F(\cdot)$ estão sujeitas à incerteza dado a aleatoriedade governando Y (que irá produzir $\mathbf{y}$). Devemos certificar que:
  - O nível de incerteza é o menor possível, considerando a aleatoriedade de Y.
  - Somos capazes de avaliar o nível de incerteza em nossas conclusões.

Modelos Estatísticos

- A natureza física do fenômeno que gera $\mathbf{y}$, o esquema de amostragem, e outras informações, irão colocar limites no conjunto de possíveis escolhas para $F(\cdot)$.
- Este conjunto (denotado por $\mathcal{F}$) é chamado de modelo estatístico.
- É intuitivo pensar que nossa inferênias serão mais precisas de formos capazes de selecionar o conjunto $\mathcal{F}$ menor possível, sob o requerimento de que $F \in \mathcal{F}$.
- Em alguns casos, podemos assumir que Y é uma a. a. com componentes independentes e identicamentes distribuídos. Neste caso, dizemos que $\mathbf{y}$ é uma a.a. simples de Y.

Modelos paramétricos

Modelos paramétricos

- A princípio, $\mathcal{F}$ pode ser qualquer conjunto de funções de distribuições, mas existe uma categoria de tais conjuntos que possui importante papel, tanto do ponto de vista teórico quando aplicado.
- Este caso ocorre todos os elementos de $\mathcal{F}$ são funções com a mesma formulação matemática, identificadas apenas pelas diferentes especificações de θ, que varia em $\Theta \in \mathbb{R}^k$,

$$\mathcal{F} = \left\{F(\cdot \mid \theta) : \theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^k\right\}$$

Modelos paramétricos

- Na grande maioria dos casos (em todos os casos que iremos considerar neste curso), toda a função de distribuição membro de $\mathcal{F}$ refere-se a v.a. discretas ou contínuas.
- Então, $\mathcal{F}$ pode ser definida usando as f.p. ou f.d. correspondentes.
- Podemos definir um modelo estatístico $\mathcal{F}$ (caso contínuo) como um conjunto de f.d's

$$\mathcal{F} = \left\{ f(\cdot \mid \theta) : \theta \in \mathbf{\Theta} \subseteq \mathbb{R}^k \right\}$$

θ : parâmetro.

$\mathbf{\Theta}$: espaço paramétrico.

- $\mathcal{F}$, indicado acima, é chamado de classe paramétrica ou modelo paramétrico.
- Portanto, os elementos de $\mathcal{F}$ estão associados aos elementos de $\mathbf{\Theta}$.
- Em particular, existe um valor $\theta^* \in \Theta$, associado a $F(\cdot)$, chamado de **valor real** do parâmetro, e nossas inferências serão sobre θ^*

Modelos paramétricos

Definição 1 (Espaço amostral) É o conjunto $\mathcal{Y}$ de todos os possíveis resultados y compatíveis com o modelo paramétrico dado.

- Formalmente denotado por $\mathcal{Y}_\theta$ o suporte (domínio) da densidade $f(\cdot;\theta)$, o espaço amostral é dado por $\mathcal{Y} = \bigcup_{\theta\in\Theta} \mathcal{Y}_\theta$.
- Frequentemente, entretanto, $\mathcal{Y}_\theta$ é o mesmo que as possíveis escolhas de θ, e este conjunto coincidirá com $\mathcal{Y}$.

Exemplo 1 Assuma que $Y \sim Binomial(n, \theta)$. Se $\theta \in [0, 1]$, $\mathcal{Y}_\theta$ será o mesmo para todo θ. $\mathcal{Y}_\theta$ coincidirá com o espaço amostral $\mathcal{Y} = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$.

- Se $\theta \in [0, 1]$, então $\mathcal{Y}_{\theta=0} = \{0\}$, $\mathcal{Y}_{\theta=1} = \{n\}$ e $\mathcal{Y}_{\theta\in(0,1)} = \{0, 1, \ldots, n\}$.
- Neste caso, $\mathcal{Y} = \bigcup_{\theta\in[0,1]} \mathcal{Y}_\theta = \{0, 1, \ldots, n\}$.

Modelos paramétricos

Exemplo 2 Se dois valores são amostrados independentemente da $N(\theta, 1)$, então $\mathbf{y} = (y_1, y_2)^\top$, onde $y_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$,

$$\mathcal{Y} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad Y \sim N \left[\begin{matrix} \theta \\ \theta \end{matrix}, I_2 \right],$$

em que,

$$f(y; \theta) = \phi(y_1 - \theta)\phi(y_2 - \theta)$$

- Se não houver qualquer restrição para θ, temos $\Theta = \mathbb{R}$.
- Se existir restrição (ex. sabemos que $\theta > 0$)

Famílias de locação e escala

Famílias de locação e escala

- Aqui discutiremos três técnicas para construir famílias de distribuições.
- As famílias resultantes possuem interpretações físicas diretas que as tornam úteis para modelagem, além de apresentarem propriedades matemáticas convenientes. Considere apenas o caso contínuo.
- Os 3 tipos de famílias são:

  i. locação;

  ii. lscala e

  iii. locação e escala.

- Cada família é construída pela especificação de uma f.d $f(x)$ chamada de densidade padrão da família.
- Todas as outras densidades da família podem ser geradas pela transformação da densidade padrão.

Famílias de locação e escala

> **Teorema 1** Seja $f(x)$ qualquer f.d. e considere μ e $\sigma > 0$ como constantes conhecidas. Então, a função $g(x|\mu, \sigma) = \dfrac{1}{\sigma} f\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)$ é uma f.d.

Prova: Para verificar que a transformação produziu um f.d. legítima, precisamos verificar que

$$\frac{1}{\sigma} f\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

se é:

1. não negativa;

2. integra 1.

- Logo, em relação a `1.`, tem-se

$f(x)$ é uma f.d.$\Rightarrow f(x) > 0, \forall x$, então $\dfrac{1}{\sigma} f\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right) > 0$, para todos os valores de x, μ e σ.

Famílias de Locação e Escala.

- Referente a 2 .

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma} f\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) dx, \qquad y = \frac{x-\mu}{\sigma} \text{ e } dy = \frac{1}{\sigma}.$$

Logo,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma} f(y)\, \sigma dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, dy = 1.$$

Famílias de Locação e Escala.

Definição 2 Seja $f(x)$ qualquer f.d., então a família de densidades $f(x - \mu)$ indexada pelo parâmetro real μ é chamada de **família de locação (localização)** com densidade padrão $f(x)$. O μ é conhecido como **parâmetro de localização da família**.

- O parâmetro μ simplesmente desloca a densidade $f(x)$ de maneira que o formato do gráfico não é alterado, mas o ponto do gráfico de $f(x)$ que estava acima de $x = 0$, estará agora acima de $x = \mu$ para $f(x - \mu)$.

Exemplo 3 Se $\sigma > 0$ é especificado e definimos

$$f(x) = (2\pi\sigma^2)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right\} I_{(-\infty,\infty)}(x),$$

então a família de localização com densidade padrão $f(x)$ é o conjunto de distribuições Normais com média μ desconhecida e variância σ^2 conhecida.

Famílias de Locação e Escala.

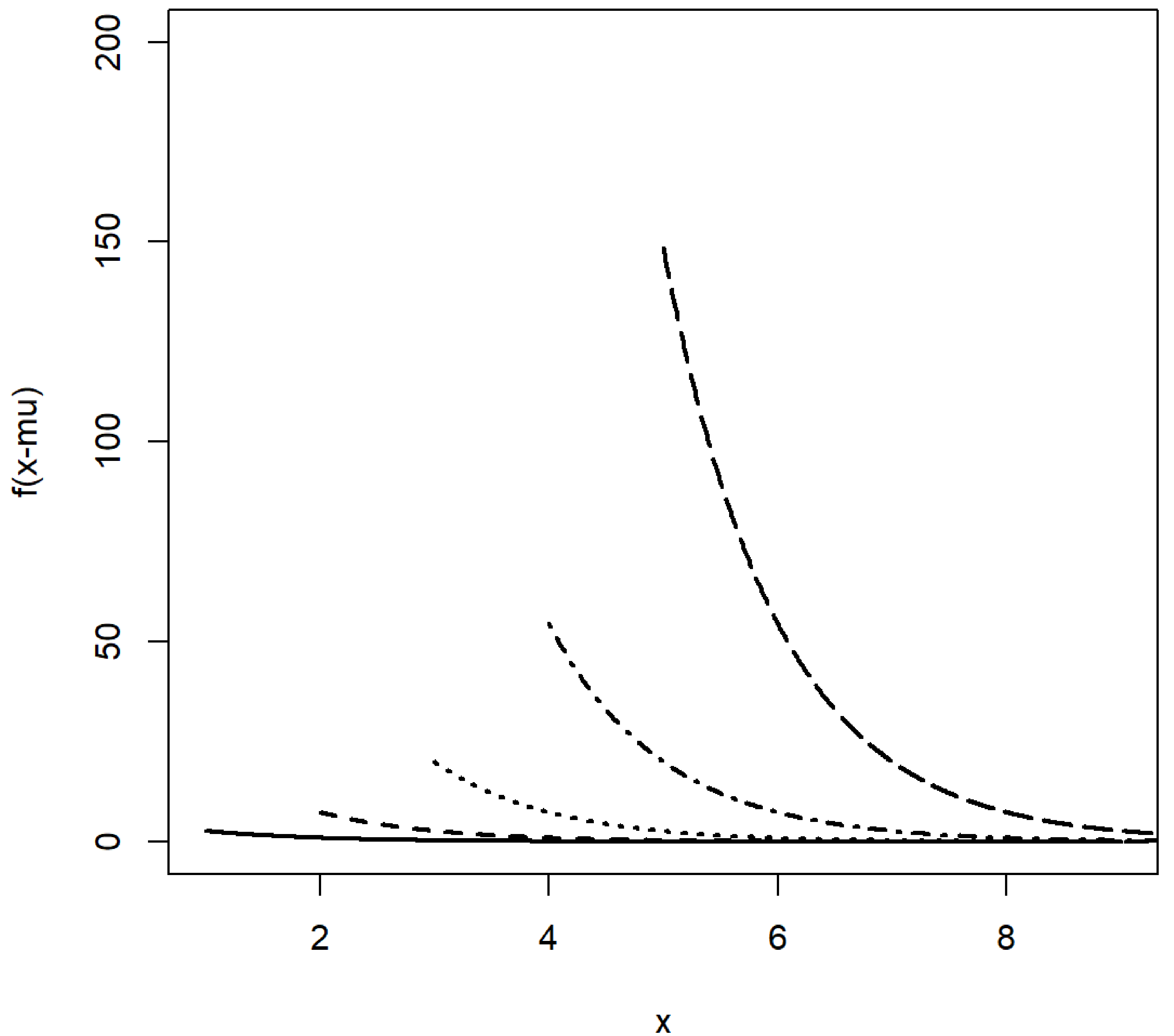
- A família Cauchy com σ (conhecido) e μ (desconhecido) é outro exemplo de família de locação.
- O ponto principal da Definição 2 é que podemos iniciar com qualquer densidade $f(x)$ e gerar uma família de densidades com a introdução do parâmetro de localização.
- Se X é uma variável aleatória com densidade $f(x-\mu)$, então X pode ser representada como $X = Z + \mu$, onde Z é variável aleatória com densidade $f(z)$.

Exemplo 4 (Família de locação exponencial) Seja $f(x) = e^{-x}$ para todo $x \geq 0$ e $f(x) = 0$ para $x < 0$.

Para formar uma família de locação devemos substituir x por $x - \mu$

$$f(x) = \begin{cases} e^{-(x-\mu)} & x - \mu \geq 0 \\ 0 & x - \mu < 0 \end{cases} = \begin{cases} e^{-(x-\mu)} & x \geq \mu \\ 0 & x < \mu \end{cases}$$

Famílias de Locação e Escala.

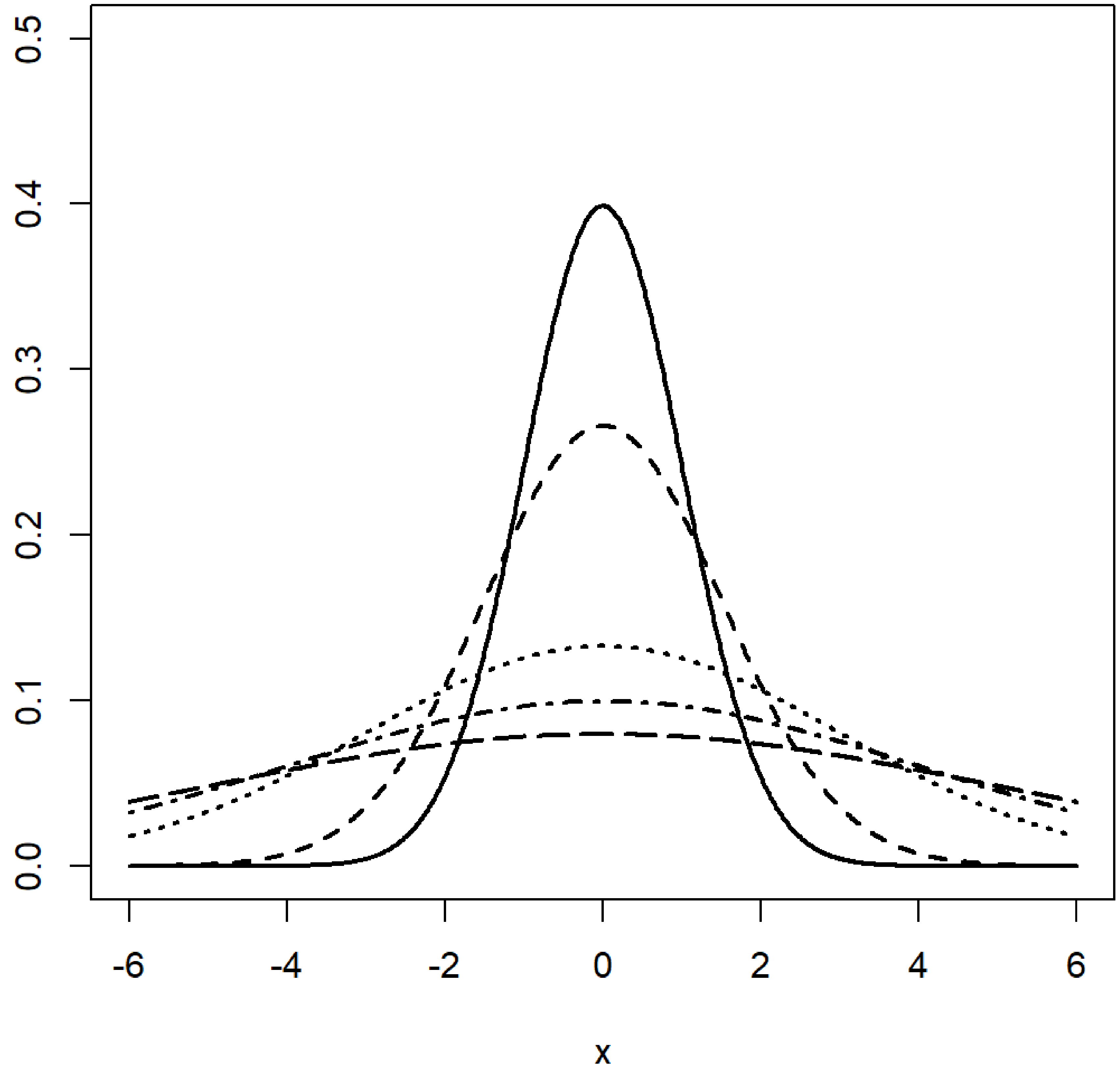


Famílias de Locação e Escala

Definição 3 Seja $f(x)$ qualquer f.d., então para qualquer $\sigma > 0$, a família de densidades $1/\sigma f[x/\sigma]$ indexada pelo parâmetro σ é chamada de **família de escala** com densidade padrão $f(x)$ e parâmetro de escala σ.

- O efeito de introduzir σ é tanto esticar ($\sigma > 1$) quanto contrair ($\sigma < 1$) o gráfico $f(x)$ a forma básica é mantida.

Famílias de Locação e Escala



Famílias de Locação e Escala

Exemplo 5 $Ga\left(\alpha, \beta = \dfrac{1}{\sigma}\right)$ com α conhecido e $\beta = \dfrac{1}{\sigma}$ onde σ é desconhecido.

A densidade padrão $Ga(\alpha, \beta = 1)$

$$f(x|\alpha, \beta = 1) = \frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)} x^{\alpha-1} \exp\{-x\} I_{(-\infty,\infty)}(x).$$

Logo,

$$f(x/\sigma) = \frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)} \frac{x^{\alpha-1}}{\sigma^{\alpha-1}} \exp\left\{-\frac{x}{\sigma}\right\} I_{(-\infty,\infty)}(x)$$

$$1/\sigma f(x/\sigma) = \frac{1}{\sigma^{\alpha}} \frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)} x^{\alpha-1} \exp\left\{-\frac{x}{\sigma}\right\} I_{(-\infty,\infty)}(x)$$

Famílias de Locação e Escala

Exemplo 6 Família Normal com $\mu = 0$ e σ^2 desconhecido.

A densidade padrão $N(0,1)$

$$f(x) = 1 * (2\pi)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2(1)}x^2\right\} I_{(-\infty,\infty)}(x),$$

Logo,

$$\begin{aligned} f(x/\sigma) = &\quad (2\pi)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right\} I_{(-\infty,\infty)}(x) \\ 1/\sigma f(x/\sigma) = &\quad (2\pi\sigma^2)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right\} I_{(-\infty,\infty)}(x) \end{aligned}$$

Famílias de Locação e Escala

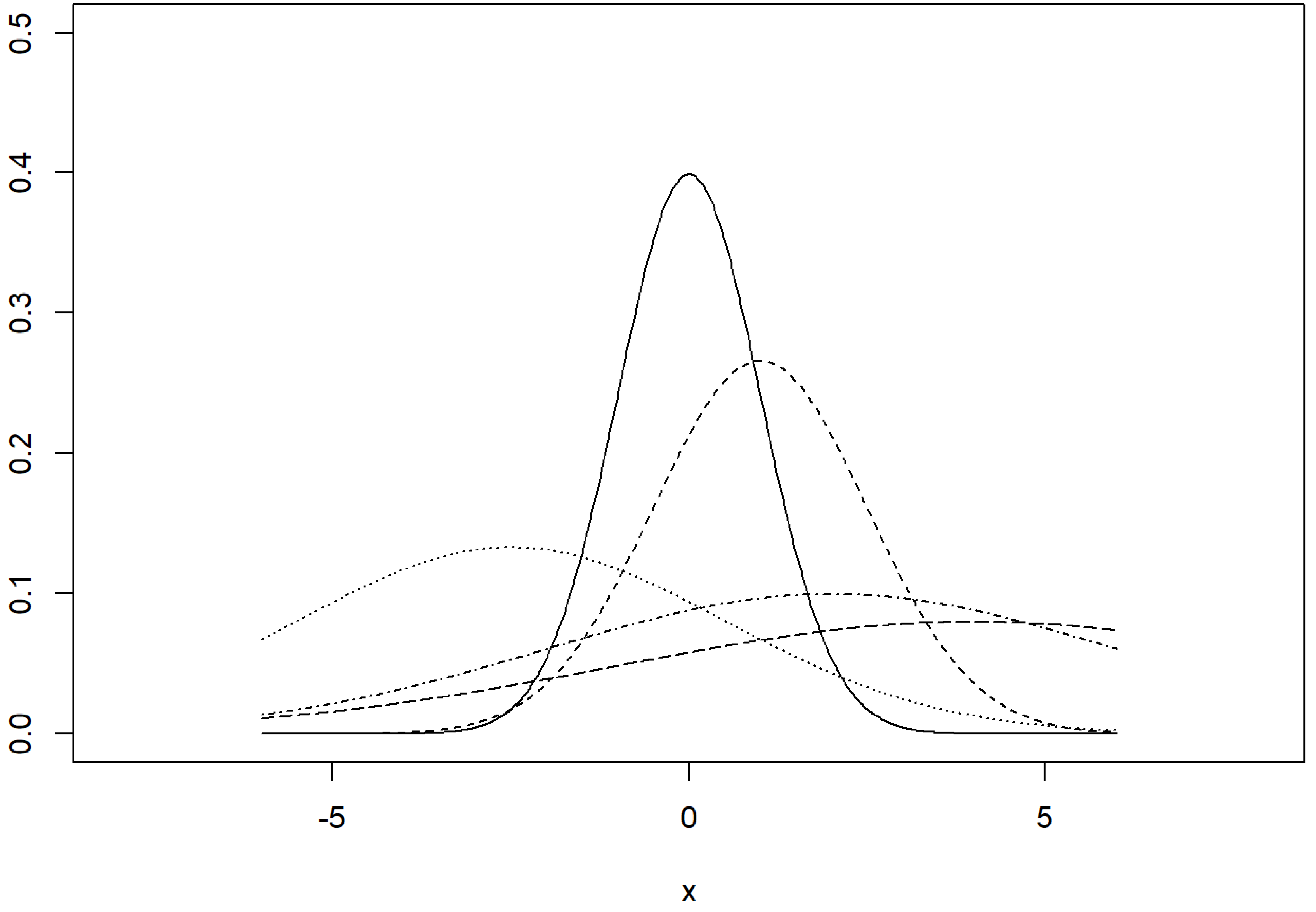
Definição 4 Seja $f(x)$ qualquer f.d., então para qualquer μ real e qualquer $\sigma > 0$ a família de densidades

$$\frac{1}{\sigma} f\left[\frac{(x-\mu)}{\sigma}\right],$$

indexadas pelos parâmetros (μ, σ), é chamada de família de locação e escala com densidade padrão $f(x)$. Neste caso, μ é o parâmetro de localização e σ é o parâmetro de escala.

- Efeito da inclusão dos parâmetros:
  - μ irá deslocar o gráfico de maneira que o ponto que estava acima de 0, agora fica acima de μ.
  - σ irá esticar ($\sigma > 1$) ou contrair ($\sigma < 1$) o gráfico de $f(x)$.

Famílias de Locação e Escala



Famílias de Locação e Escala

- O seguinte teorema relaciona a transformação da f.d. $f(x)$, que define uma família de locação e escala, com a transformação da variável aleatória Z com densidade $f(z)$.

> **Teorema 2** Seja $f(\cdot)$ qualquer f.d. e considere $\mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma \in \mathbb{R}^+$. Então X é uma v.a. com densidade $1/\sigma f[(x-\mu)/\sigma]$, se e somente se, existe uma v.a. Z com densidade $f(z)$ e $X = \sigma Z + \mu$.

- No Teorema 2:
  - Se $\sigma = 1$: família de locação (apenas).
  - Se $\mu = 0$: família de escala (apenas).

Famílias de Locação e Escala

- Fato importante a ser extraído do `Teorema 12` é que $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$, tem f.d.

$$f_Z(z) = \frac{1}{1} f\left(\frac{z - 0}{1}\right) = f(z),$$

isto é, a distribuição de Z é membro da família de locação escala com $\mu = 0$ e $\sigma = 1$.

- Frequentemente, cálculos são desenvolvidos para a v.a. padrão Z com f.d $f(z)$ e então o resultado correspondente para a v.a. X com f.d. $1/\sigma f[(x - \mu)/\sigma]$ pode ser facilmente derivado.

Famílias de Locação e Escala

> **Teorema 3** Seja Z uma v.a. com f.d. $f(z)$. Suponha que $E(Z)$ e $Var(Z)$ existem. Se X é uma v.a. com densidade $1/\sigma f(x/\sigma)$, então,

$$E(X) = \sigma E(Z) + \mu \text{ e } Var(X) = \sigma^2 Var(Z).$$

- Em particular, se $E(Z) = 0$ e $Var(Z) = 1$, então, $E(X) = \mu$ e $Var(X) = \sigma^2$.
- Probabilidades para qualquer membro da família de locação escala pode ser calculada em termos da variável padrão Z.

$$P(X \leq x) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right).$$

A função de verossimilhança

A função de verossimilhança

- Considere o dado modelo do tipo: $\mathcal{F} = \left\{ f(\cdot \mid \theta) : \theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^k \right\}$.
- Quando um valor amostral y é observado, o valor da f.d $f(y;\theta)$ **dependerá apenas** de θ.
- Esta função nos parece a f.d para observar aquilo que de fato observamos (y).
- Se precisamos estabelecer um *ranking* envolvendo dois elementos de θ (considere θ' e θ''), então uma quantidade relevante e útil para esta tarefa será a razão $f(y;\theta')/f(y;\theta'')$, desde que o denominador não seja zero.
- Como esta razão não muda caso ambos os temos sejam multiplicados por uma constante postiva C, independentemente de θ, então para comparar os elementos de Θ a quantidade relevante será proporcional a $f(y;\theta)$.

A função de verossimilhança

Definição 5 Para o modelo $\mathcal{F} = \left\{ f(\cdot \mid \theta) : \theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^k \right\}$ a partir do qual uma amostra $y \in \mathcal{Y}$ foi observada, usamos o termo **função de verossimilhança**, ou simplesmente **verossimilhança**, para a função de Θ para $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ escrita como

$$L(\theta; y) = c(y) f(y; \theta),$$

em que $c(y)$: constante positiva independente de θ.

- A verossimilhança é uma função de θ.
- A notação $L(\theta; y)$ é usada para enfatizar que esta função depende de y, no sentido de que para uma amostra diferente y' obteremos uma verossimilhança diferente $L(\theta; y')$.

A função de verossimilhança

- Note que não importa se escrevemos c ou $c(y)$ na definição de verossimilhança, uma vez que a verossimilhança é uma função de θ.
- Mesmo que todo valor $L(\theta; y)$ seja determinado por distribuições de probabilidades, a função de verossimilhança **não é uma distribuição de probabilidade**.
- $L(\theta; y)$ é uma quantidade não negativa, e na maioria dos casos é positiva para todo θ. Sendo assim, definimos a função de log-verossimilhança como:

$$\ell(\theta; y) = \ln L(\theta; y) = c + \ln f(y; \theta),$$

com a convenção de que $\ell(\theta; y) = -\infty$ se $L(\theta; y) = 0$.

A função de verossimilhança

Exemplo 7 Considere uma a.a. $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)'$ da v.a. $N(\mu, \sigma^2)$, onde $\theta = (\mu, \sigma^2)$ varia no espaço $\Theta = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$.

- Devido à independência das componentes, temos,

$$
\begin{aligned}
L(\theta; \mathbf{y}) &= c \prod_{i=1}^{n} (2\pi\sigma^2)^{-1/2} \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} (y_i - \mu)^2 \right\} \\
&= c \, (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \mu)^2 \right\} \\
&= c \, (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \left[\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - 2\mu \sum_{i=1}^{n} y_i + n\mu^2 \right] \right\}
\end{aligned}
$$

- Qualquer constante não dependente de θ, por exemplo, $c = 1$.
- Função de log-verossimilhança

$$
\ell(\theta; \mathbf{y}) = c - \frac{n}{2} \ln 2\pi - \frac{n}{2} \ln \sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} \left[\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - 2\mu \sum_{i=1}^{n} y_i + n\mu^2 \right]
$$

A função de verossimilhança

Exemplo 8 Considere uma a.a. $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)'$ da v.a. $U(0, \theta)$, onde $\theta > 0$. A f.d. associada a x_i é $f(x_i) = \frac{1}{\theta}$, se $x_i \in (0, \theta)$.

- Quando multiplicamos tais f.d.'s para obter $L(\theta; x)$, não podemos simplesmente multiplicar o termo $1/\theta$ sen considerar a condição **se** $x_i \in (0, \theta)$.
- Portanto, escrevemos a densidade para uma única observação, como segue,

$$\frac{1}{\theta} I_{(0,\theta)}(x), \; x \in \mathbb{R}.$$

A função de verossimilhança

Função de verossimilhança

$$
\begin{aligned}
L(\theta; \mathbf{x}) &= c \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta} I_{(0,\theta)}(x_i) \\
&= \frac{c}{\theta^n} \prod_{i=1}^{n} I_{(0,\theta)}(x_i)
\end{aligned}
$$

- Note que $\prod_{i=1}^{n} I_{(0,\theta)}(x_i) = 1,$ se

$$
\left.
\begin{array}{c}
0 < x_1 < \theta \\
0 < x_2 < \theta \\
\vdots \\
0 < x_n < \theta
\end{array}
\right. \Longrightarrow x_{(n)} < \theta
$$

A função de verossimilhança

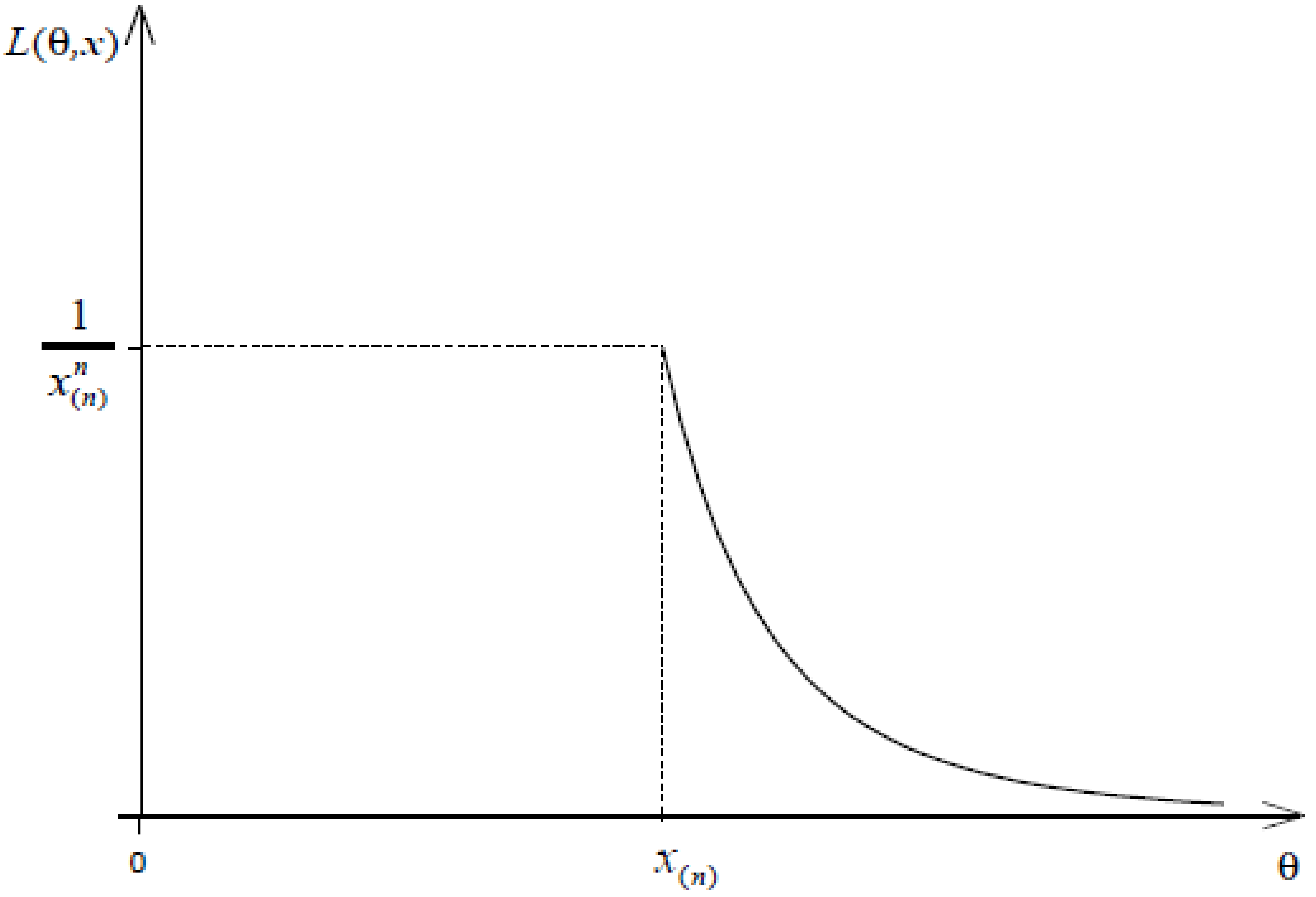
Assim,

$$
\begin{aligned}
L(\theta; \mathbf{y}) &= c \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta} I_{(0,\theta)}(x_i) \\
&= \frac{c}{\theta^n} I_{(x_{(n)},\infty)}(\theta)
\end{aligned}
$$

A log-verossimilhança:

$$
\ell(\theta; \mathbf{y}) = \begin{cases} \infty, & \theta \leq x_{(n)} \\ c - n \ln \theta, & \theta > x_{(n)} \end{cases}
$$

A função de verossimilhança



Princípio da verossimilhança.

- A função de verossimilhança conecta a informação pré-experimental (expressa pela escolha do modelo) com a informação experimental contida em y.
- Portanto, de certa forma, a verossimilhança contém tudo que sabemos sobre o problema de inferência em questão (sem levar em conta qualquer informação sobre θ que, por qualquer razão, não foi acomodada no modelo, tais como opiniões pessoais ou resultado de estudos relacionados).

Exemplo 9 O princípio da verossimilhança. Para um modelo estatístico $\{f(\cdot \mid \theta) : \theta \in \Theta\}$ dois pontos $y, z \in \mathcal{Y}$ tal que $L(\theta; y) \propto L(\theta; z)$ devem levar às mesmas conclusões inferenciais.

- Esta afirmação representa a versão mais fraca do princípio da verossimilhança.
- A seguir apresentamos uma versão mais forte que diz que as conclusões coincidem mesmo quando as duas observações se referem a modelos distintos e espaços amostrais distintos.

Princípio da verossimilhança.

Definição 6 Considere um experimento que consiste em lançar várias vezes uma moeda, de forma independente, e seja θ a probabilidade de ocorrer coroa $\bar{C}$ e $1-\theta$ a probabilidade de ocorrer cara C.

Suponha que o resultado do experimento foi:

$$\mathbf{x} = \{\bar{C}, \bar{C}, \bar{C}, \bar{C}, \bar{C}, C, \bar{C}, \bar{C}, \bar{C}, \bar{C}, C, C\}$$

`Regras de parada:`

1. Lançar a moeda 12 vezes (n^o de lançamentos fixado);
2. Lançar a moeda até aparecer 3 caras;
3. Lançar a moeda até aparecerem 2 caras consecutivas;
4. Lançar a moeda até o lançador ficar cansado.

Princípio da verossimilhança.

Em qualquer situação a verossimilhança é proporcional a

$$\theta^9(1-\theta)^3,$$

- Segundo o princípio da verossimilhança as inferências **devem ser a mesmas qualquer que tenha sido o processo experimental** (ou a regra de parada).

Estatísticas Suficientes

Estatísticas Suficientes

- Em uma descrição mais simplificada da teoria estatística, alguns poderiam dizer que seu objetivo é selecionar as **operações** mais apropriadas para serem aplicadas aos dados.
- Visto que uma variedade destas operações serão consideradas, é necessário introduzir a seguinte definição:

Definição 7 Uma função $T(\cdot) : y \to \mathbb{R}^R$, para algum inteiro positivo r, tal que $T(y)$ não depende de θ, é chamada de **Estatística**, e o valor $t = T(y)$ correspondendo ao valor observado y é chamado de valor amostral.

- A condição de que $T(y)$ não dependa de θ é necessária para assegurar que a estatística seja calculável na presença dos dados.

Estatísticas Suficientes

Exemplo 10 Estatísticas para uma amostra $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ cujos elementos pertencem a $\mathbb{R}$:

$$
\begin{aligned}
T_1 &= \sum_{i=1}^{n} y_i, && T_1(\cdot) : (y_1, y_2, \ldots, y_n) \to \mathbb{R} \\
T_2 &= \sum_{i=1}^{n} \exp\{y_i\}, && T_2(\cdot) : (y_1, y_2, \ldots, y_n) \to \mathbb{R}^+ \\
T_3 &= \left(\sum_{i=1}^{n} y_i, \sum_{i=1}^{n} \exp\{y_i\} \right), && T_3(\cdot) : (y_1, y_2, \ldots, y_n) \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+
\end{aligned}
$$

Obviamente, estes são apenas 3 exemplos entre inúmeros casos.

Estatísticas suficientes

- Algumas vezes devemos considerar a imagem inversa dos valores de t de uma estatística T, isto é, conjuntos do tipo:

$$A_t = \{y : y \in \mathcal{Y}; T(y) = t\},$$

formam uma partição do espaço amostral. Fazemos referência a esta partição induzida por $T(y)$.

- Por exemplo, se $T = \sum_{i=1}^{n} y_i$, os conjuntos $\{A_t\}$ serão hiperplanos paralelos uns aos outros.
- Um conjunto específico A_t é dado por todos os pontos $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)' \in \mathbb{R}$ satisfazendo a equação $y_1 + y_2 + \cdots + y_n = t$.

Estatísticas suficientes

Exemplo 11 Entre os tipos de estatísticas que iremos considerar, alguns são usados com frequência e a eles são dados nomes específicos. Para a amostra $(y_1, y_2, \ldots, y_n)'$ o r-ésimo momento amostral é a estatística de $\mathcal{Y}$ para $\mathbb{R}$ dada por

$$m_r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i^r.$$

- Em particular, $m_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i^1$ é a média amostral $\bar{y}$.
- Outro exemplo de estatística é o que definimos como variância amostral:

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2,$$

que assume valores em $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

Estatísticas Suficientes

- No caso da distribuição $N(\mu, \sigma^2)$, temos a verossimilhança indicada abaixo para uma amostra aleatória simples $(y_1, y_2, \ldots, y_n)' = \mathbf{y}$.
- Considere $\theta = (\mu, \sigma^2)$,

$$L(\theta; \mathbf{y}) = (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \left[\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - 2\mu \sum_{i=1}^{n} y_i + n\mu^2 \right] \right\}$$

Estatísticas Suficientes

- Veja que não é preciso conhecer todos os elementos individuais de $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ para escrever $L(\theta; \mathbf{y})$ do *slide* anterior, dado a quantidade $\left(\sum_{i=1}^{n} y_i, \sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)$.
- Essa função de verossimilhança é unicamente identificada, entre todas as possíveis funções de verossimilhança para o modelo estatístico escolhido, uma vez que dois valores $\left(\sum_{i=1}^{n} y_i, \sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)$ são dados.
- A questão agora é saber se tal situação favorável pode ser estendida em geral, ou pelo menos para algumas classes de modelos (neste caso, para quais classes?) A seguir, iremos examinar a natureza e propriedades daquelas estatísticas capazes de sumarizar **toda a informação** presente na função de verossimilhança.

Estatísticas Suficientes

Definição 8 Para o modelo $\mathcal{F} = \{f(\cdot \mid \theta) : \theta \in \Theta\}$, uma estatística $T(y)$ é dita **suficiente** para θ se assume valores em dois pontos do espaço amostral somente se estes pontos possuem verossimilhanças equivalentes. Isto é:

$$\forall\, y, z \in \mathcal{Y}, \quad T(y) = T(z) \Rightarrow L(\theta; y) \propto L(\theta; z), \forall\, \theta \in \Theta.$$

- Devemos ter em mente que a propriedade de suficiência está diretamente relacionada à escolha do modelo.
- Se o modelo é **alterado**, as estatísticas em questão podem não ser mais suficientes.
- Para qualquer modelo, sempre existirá uma estatística suficiente que será a própria amostra $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)'$, entretanto, esta estatística suficiente é uma escolha muito trivial e na prática é desconsiderada.

Exemplo 12 Suponha que θ pode assumir dois valores (0 e 1). As duas funções de verossimilhança correspondentes são fornecidas a seguir:

θ	$P(Y=0)$	$P(Y=1)$	$P(Y=2)$
0	8/12	1/12	3/12
1	4/12	2/12	6/12

Note que:

$$\begin{aligned}
\underbrace{L(\theta=0; y=2)}_{3/12} &= 3\,\underbrace{L(\theta=0; y=1)}_{1/12} \\
\underbrace{L(\theta=1; y=2)}_{6/12} &= 3\,\underbrace{L(\theta=1; y=1)}_{2/12}
\end{aligned}$$

Estatística:

$$T(y) = I_{\{0\}}(y) = \begin{cases} 1, & \text{se } y = 0 \\ 0, & \text{se } y \neq 0 \end{cases}$$

$$T(y=1) = 0 = T(y=2) \Rightarrow L(\theta; y=1) \propto L(\theta; y=2).$$

Estatísticas Suficientes

Exemplo 13 Considere $g(\cdot;\theta)$ a f.d. associada a uma a.a. simples $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

- A função de verossimilhança pode ser escrita como

$$L(\theta;\mathbf{y}) = \prod_{i=1}^{n} g(y_i;\theta) = \prod_{i=1}^{n} g(y_{(i)};\theta),$$

onde na última igualdade, os temos foram multiplicados após terem sido organizados de acordo com as estatísticas de ordem.

- Portanto, duas amostras com as mesmas estatísticas de ordem possuem as mesmas funções verossimilhança.
- Segue então que, para quaisquer f.d.'s $g(\cdot;\theta)$ as estatísicas de ordem são suficientes.

Fatoração de Neyman

Fatoração de Neyman

- Se $T(\cdot)$ é uma estatística suficiente, então $L(\theta; \mathbf{y})$ depende apenas através de $T(\mathbf{y})$. Isto significa que existe uma função g tal que $L(\theta; \mathbf{y}) \propto g\left(T(\mathbf{y})|\theta\right)$.
- Note que $L(\theta; \mathbf{y}) \propto f\left(\mathbf{y}|\theta\right)$, logo

$$\frac{f\left(\mathbf{y}|\theta\right)}{g\left(T(\mathbf{y})|\theta\right)},$$

não dependerá de θ.

- Denote:

$$h(\mathbf{y}) = \frac{f\left(\mathbf{y}|\theta\right)}{g\left(T(\mathbf{y})|\theta\right)},$$

portanto, se $T(\cdot)$ é estatística suficiente, a seguinte relação será válida: $f\left(\mathbf{y}|\theta\right) = h(\mathbf{y})g\left(T(\mathbf{y})|\theta\right)$.

Fatoração de Neyman

> **Teorema 4 (Teorema da Fatoração de Neyman)** Para o modelo $\mathcal{F} = \left\{f(\cdot \mid \theta) : \theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^k\right\}$ a estatística $T(\cdot)$ é sufuciente para θ se e somente se $f(\mathbf{y}; \theta)$ pode ser escrita na forma $f\left(\mathbf{y}|\theta\right) = h(\mathbf{y})g\left(T(\mathbf{y})|\theta\right)$ para alguma função g e h.

Uma forma alternativa de interpretar a definição:

Se conhecermos o valor amostral de $t = T(\mathbf{y})$ e escrevessemos a verossimilhança $L_T(\theta; t)$ para o modelo estatístico associado a distribuição de T, então tal verssimilhança seria equivalente a $L(\theta; \mathbf{y})$.

Fatoração de Neyman

Exemplo 14 Considere $g(\cdot;\theta)$ a f.d. associada a uma a.a. simples $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ obtida de forma que $Y_i \sim Bin(1, \theta)$.

- Temos a verossimilhança:

$$\begin{aligned}
L(\theta;\mathbf{y}) &= \prod_{i=1}^{n} \theta^{y_i}(1-\theta)^{1-y_i} \\
&= \theta^{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i}(1-\theta)^{n-\sum\limits_{i=1}^{n} y_i} \\
&= \theta^{T(\mathbf{y})}(1-\theta)^{n-T(\mathbf{y})} \\
&= \underbrace{1}_{h(\mathbf{y})}\ \underbrace{\theta^{T(\mathbf{y})}(1-\theta)^{n-T(\mathbf{y})}}_{g(T(\mathbf{y})|\theta)}
\end{aligned}$$

Fatoração de Neyman

- Temos então que $T(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} y_i$ é uma estatística suficiente para θ e que $T(\mathbf{y}) \sim Bin(n, \theta)$, em que

$$\binom{n}{t}\theta^t(1-\theta)^{n-t}.$$

- Uma outra forma de definir estatística suficiente pode ser expressa como segue:

Definição 9 Uma estatística $T(\cdot)$ é suficiente para θ se a distribuição condicional de Y dado o valor de $T(Y)$ não depende de θ. Em outras palavras:

$$P(Y = y|T(Y) = T(y), \theta) = P(Y = y|T(Y) = T(y)).$$

Fatoração de Neyman

Exemplo 15 Sejam $(X_1, \ldots, X_n)$ uma a.a. da v.a. $X \sim Ber(\theta)$. Verifique se $T = \sum_{i=1}^{n} X_i$ suficiente para θ.

Fatoração de Neyman

Exemplo 16 Considere $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ uma a.a. simples da $N(\mu, \sigma^2)$,

$$\begin{aligned}
L(\theta; \mathbf{y}) &= \prod_{i=1}^{n} (2\pi\sigma^2)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(y_i - \mu)^2\right\} I_{(-\infty,\infty)}(y_i) \\
&= (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - 2\mu \sum_{i=1}^{n} y_i + n\mu^2\right]\right\} \prod_{i=1}^{n} I_{(-\infty,\infty)}(y_i) \\
&= \underbrace{(2\pi)^{-n/2} \prod_{i=1}^{n} I_{(-\infty,\infty)}(y_i)}_{h(\mathbf{y})} \underbrace{\left(\sigma^2\right)^{-n/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - 2\mu \sum_{i=1}^{n} y_i + n\mu^2\right]\right\}}_{g(T(\mathbf{y})|\theta)}
\end{aligned}$$

- Então $T(\mathbf{y}) = \left(\sum_{i=1}^{n} y_i, \sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)$ é uma estatística suficiente para $\theta = (\mu, \sigma^2)$ de acordo com o método da fatoração de Neyman.

Fatoração de Neyman

`Observação:` Qualquer função 1 a 1 de uma estatística suficiente também é uma estatística suficiente.

- Suponha que $T(\mathbf{y})$ é estatística suficiente e defina $T^*(\mathbf{y}) = r(T(\mathbf{y}))$ para todo $\mathbf{y}$
- r é uma função 1 a 1 com inversa r^{-1}.
- Teorema da Fatoração, existe g e h tal que

$$f(\mathbf{y}|\theta) = h(\mathbf{y})g\left[r^{-1}(T^*(\mathbf{y}))|\theta\right]$$

- Defina $g^*(t|\theta) = g(r^{-1}(t)|\theta)$, então

$$f(\mathbf{y}|\theta) = h(\mathbf{y})g^*\left[T^*(\mathbf{y})|\theta\right]$$

e pelo Teorema da Fatoração $T^*(\mathbf{y})$ é uma estatística suficiente.

Fatoração de Neyman

- No caso anterior considere:

$(t_1, t_2) = \left(\sum_{i=1}^{n} y_i, \sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)$ nossa estatística suficiente para $\theta = (\mu, \sigma^2)$.

- Veja que:

$$(\bar{y}, S^2) = \left(\frac{t_1}{n}, \frac{t_2 - (t_1^2/n)}{n-1}\right) = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}, \frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2}{n-1}\right)$$

que são função 1 a 1 de (t_1, t_2) com transformação inversa

$$t_1 = n\bar{y} \;\; e \;\; t_2 = (n-1)S^2 + n\bar{y}^2.$$

- Logo, $(\bar{y}, S^2)$ também é uma estatística suficiente para $\theta = (\mu, \sigma^2)$.

Fatoração de Neyman

Exemplo 17 Considere uma a.a. $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)'$ da v.a. $U(\theta, 2\theta)$, onde $\theta > 0$. A f.d. associada a y_i é $f(y_i) = \frac{1}{\theta}$, se $y_i \in (\theta, 2\theta)$.

- Quando multiplicamos tais f.d.'s para obter $L(\theta; y)$, não podemos simplesmente multiplicar o termo $1/\theta$ sem considerar a condição se $y_i \in (\theta, 2\theta)$.
- Portanto, escrevemos a densidade para uma única observação, como segue,

$$\frac{1}{\theta} I_{(\theta, 2\theta)}(y).$$

Fatoração de Neyman

Função de verossimilhança

$$
\begin{aligned}
L(\theta; \mathbf{y}) &= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta} I_{(\theta,2\theta)}(y_i) \\
&= \frac{1}{\theta^n} \prod_{i=1}^{n} I_{(\theta,2\theta)}(y_i)
\end{aligned}
$$

- Note que $\prod_{i=1}^{n} I_{(\theta,2\theta)}(y_i) = 1$, se

$$
\begin{matrix}
\theta < y_1 < 2\theta \\
\theta < y_2 < 2\theta \\
\vdots \\
\theta < y_n < 2\theta
\end{matrix}
\implies \theta < y_{(1)} \;\text{ e }\; \frac{y_{(n)}}{2} < \theta \implies \left[\frac{y_{(n)}}{2} < \theta < y_{(1)}\right]
$$

Fatoração de Neyman

Assim,

$$
\begin{aligned}
L(\theta; \mathbf{y}) &= \frac{1}{\theta^n} \prod_{i=1}^{n} I_{(\theta, 2\theta)}(y_i) \\
&= \frac{1}{\theta^n} I_{(y_{(n)}/2, y_{(1)})}(\theta)
\end{aligned}
$$

- Pelo critério da Fatoração, o par $(y_{(1)}, y_{(n)})$ é uma estatística suficiente para θ.

Fatoração de Neyman

- Lembre que qualquer função 1 a 1 de uma estatística suficiente é também estatística suficiente.
- Desta forma, podemos definir inúmeras estatísticas suficientes para um dado problema.
- Poderíamos perguntar se uma estatística suficiente é melhor que as outras.
- O objetivo de uma estatística suficiente é atingir uma redução nos dados sem perder informação sobre o parâmetro θ.
- Iremos preferir a estatística que atinge a maior redução nos dados e mantenha toda informação sobre θ

Definição 10 Uma estatística suficiente $T(\mathbf{y})$ é chamada de **Estatística suficiente minimal** se, para qualquer outra estatística suficiente $T^{'}(\mathbf{y}), T(\mathbf{y})$ é uma função de $T^{'}(\mathbf{y})$. Dizer que $T(\mathbf{y})$ é função de $T^{'}(\mathbf{y})$ significa que

$$T^{'}(\mathbf{x}) = T^{'}(\mathbf{y}) \Rightarrow T(\mathbf{x}) = T(\mathbf{y})$$

Fatoração de Neyman

Exemplo 18 Duas estatísticas suficientes (caso Normal).

Já vimos anteriormente que se $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ uma a.a. simples da $N(\mu, \sigma^2)$ com $\theta = (\mu, \sigma^2)$, temos $T^{'}(\mathbf{y}) = (\bar{y}, S^2)$ como estatística suficiente para (μ, σ^2).

Se σ^2 é conhecido, podemos usar a Fatoração de Neyman e obter

$$\begin{aligned} L(\theta; \mathbf{y}) &= (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - 2\mu \sum_{i=1}^{n} y_i + n\mu^2\right]\right\} \\ &= (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \underbrace{\exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} y_i\right\}}_{h(\mathbf{y})} \underbrace{\exp\left\{ -\frac{n}{2}\left[\frac{\mu^2}{\sigma^2} - \frac{2}{\sigma^2}\overline{y}\right]\right\}}_{g(T(\mathbf{y})|\theta)} \end{aligned}$$

Portanto, $T(\mathbf{y}) = \overline{y}$ é estatística suficiente para μ.

Fatoração de Neyman

- Se σ^2 é conhecido, temos que $T^{'}(\mathbf{y}) = (\bar{y}, S^2)$ e $T(\mathbf{y}) = \bar{y}$ são estatísticas suficientes para μ.
- Claramente, $T(\mathbf{y})$ atinge maior redução nos dados neste caso.
- Podemos escrever $T(\mathbf{y})$ como função de $T^{'}(\mathbf{y})$ usando a seguinte igualdade: $r(a, b) = a$. Então, $T(\mathbf{y}) = \bar{y} = r(\bar{y}, S^2) = r(T^{'}(\mathbf{y}))$.
- Como $T(\mathbf{y})$ e $T^{'}(\mathbf{y})$ são ambas estatísticas suficientes, as duas possuem a mesmas informações sobre μ.
- Então a informação adicional S^2 não acrescenta nada ao nosso conhecimento de μ, dado que σ^2 é conhecido.
- Obviamente, se σ^2 é desconhecido, a estatístca $T(\mathbf{y}) = \bar{y}$ deixa de ser sufuciente e $T^{'}(\mathbf{y}) = (\bar{y}, S^2)$ passa a conter mais informação sobre (μ, σ^2) do que $T(\mathbf{y})$.

Estatística Suficiente Minimal

Estatística Suficiente Minimal

- Usar a última definição para encontrar uma estatística suficiente minimal não é uma tarefa prática.
- Teríamos que adivinhar que $T(\mathbf{y})$ é uma estatística suficiente minimal e então verificar a condição dada na definição.
- Felizmente, o seguinte resultado de Lehmman e Scheffé (1950) fornece uma maneira mais fácil de encontrar uma estatística suficiente minimal.

Estatística Suficiente Minimal

> **Teorema 5** Seja $f(\mathbf{y})$ é uma f.d. associada com a amostra $\mathbf{y}$. Suponha que exista uma função $T(\mathbf{y})$ tal que para quaisquer dois pontos amostrais x e y, a razão $f(x|\theta)/f(y|\theta)$ é constante como função de θ se e somente se $T(x) = T(y)$. Então $T(\mathbf{y})$ é uma estatística suficiente minimal para θ.

Exemplo 19 Estatística suficiente minimal (caso Normal). Sejam $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ uma a.a. simples da $N(\mu, \sigma^2)$ com $\theta = (\mu, \sigma^2)$ desconhecido.

Considere $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ são dois pontos amostrais.

$$(\overline{x}, S_x^2) \text{ é a média e a variância amostral de } \mathbf{x}$$

$$(\overline{y}, S_y^2) \text{ é a média e a variância amostral de } \mathbf{y}$$

Estatística Suficiente Minimal

- O Exemplo 19 solicita a seguinte razão:

$$
\begin{aligned}
L(\theta; \mathbf{y}) &= \frac{(2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\mu \sum_{i=1}^{n} x_i + n\mu^2\right]\right\}}{(2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - 2\mu \sum_{i=1}^{n} y_i + n\mu^2\right]\right\}} \\
&= \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i + \bar{x} - \bar{x})^2 - 2n\mu\bar{x}\right]\right\} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} n\mu^2\right\}}{\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^{n}(y_i + \bar{y} - \bar{y})^2 - 2n\mu\bar{y}\right]\right\} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} n\mu^2\right\}} \\
&= \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 + n\bar{x}^2 - 2n\mu\bar{x}^2\right]\right\}}{\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 + n\bar{y}^2 - 2n\mu\bar{y}^2\right]\right\}}
\end{aligned}
$$

Estatística Suficiente Minimal

Assim,

$$
\begin{aligned}
L(\theta;\mathbf{y}) &= \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[(n-1)S_x^2+\bar{x}^2(n-2n\mu)-(n-1)S_y^2-\bar{y}^2(n-2n\mu)\right]\right\}\\
&= \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[(n-1)(S_x^2-S_y^2)(n-2n\mu)(\bar{x}^2-\bar{y}^2)\right]\right\}
\end{aligned}
$$

- Este resultado será constante como função de μ e σ^2 se e somente se $\overline{x}=\overline{y}$ e $S_x^2=S_y^2$. Então pelo Exemplo 19 $(\overline{X},S^2)$ é uma estatística suficiente minimal para (μ,σ^2).

Estatística Suficiente Minimal

Exemplo 20 (Estatística suficiente minimal (caso Uniforme).) Sejam $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ uma a.a. simples da $Uniforme(\theta, \theta + 1)$ com $-\infty < \theta < \infty$.

Considere $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ são dois pontos amostrais.

- A densidade para uma única observação, como segue,

$$f(x \mid \theta) = I_{(\theta, \theta+1)}(x),\ \theta \in \mathbb{R}.$$

Estatística Suficiente Minimal

Assim,

$$\left.\begin{array}{c} \theta < x_1 < \theta + 1 \\ \theta < x_2 < \theta + 1 \\ \vdots \\ \theta < x_n < \theta + 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \theta < x_{(1)} \text{ e } x_{(n)} - 1 < \theta \Longrightarrow \left[x_{(n)} - 1 < \theta < x_{(1)}\right]$$

- Logo,

$$f(x \mid \theta) = I_{(x_{(n)}-1, x_{(1)})}(\theta), \; \theta \in \mathbb{R}.$$

Estatística Suficiente Minimal

- Então,

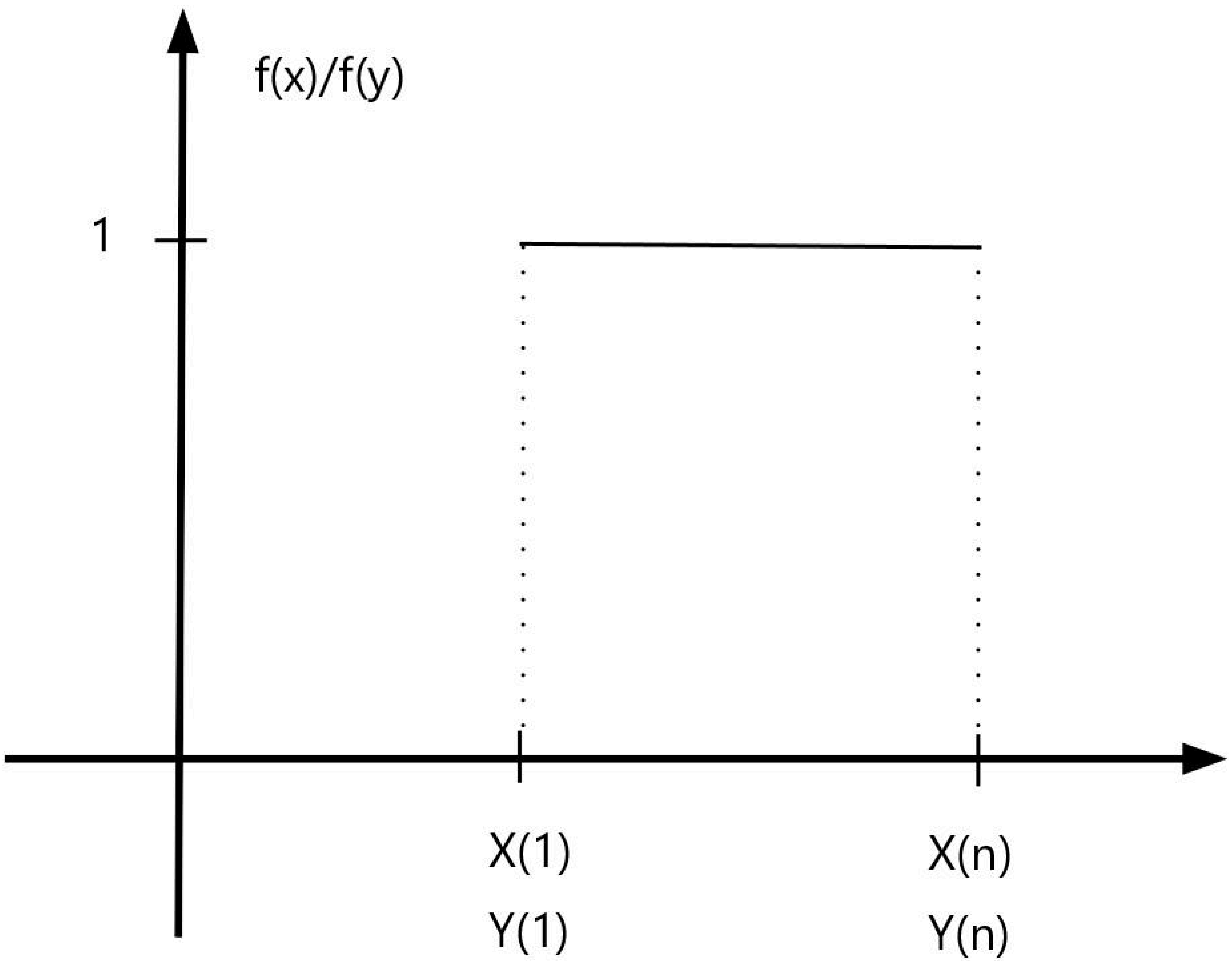
$$f(x \mid \theta) = I_{(x_{(n)}-1, x_{(1)})}(\theta) = \begin{cases} 1 & \text{se } x_{(n)} - 1 < \theta < x_{(1)} \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

- De forma similar:

$$f(y \mid \theta) = I_{(y_{(n)}-1, y_{(1)})}(\theta) = \begin{cases} 1 & \text{se } y_{(n)} - 1 < \theta < y_{(1)} \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

Estatística Suficiente Minimal

A razão $\dfrac{f(x \mid \theta)}{f(y \mid \theta)}$ será constante como função de θ se e só $x_{(1)} = y_{(1)}$ e $x_{(n)} = y_{(n)}$.



`Conclusão:` $T(X) = (x_{(1)}, x_{(n)})$ é uma estatística suficiente minimal para θ. Neste caso, note que a dimensão é diferente da dimensão do parâmetro.

Família Exponencial

Família exponencial

Definição 11 Dizemos que a distribuição da v.a. Y pertence à família exponencial unidimensional se pudermos escrever sua f.p. ou f.d. como

$$f(y \mid \theta) = h(x)c(\theta)\exp\left\{\sum_{i=1}^{k} \omega_i(\theta)t_i(y)\right\},$$

em que:

- $h(x) \geq 0$ e $t_i(y), i = 1, \ldots, k$, são funções reais da observação y e são elementos que não dependem de θ.
- $c(\theta) \geq 0$ e $\omega_i(\theta), i = 1, \ldots, k$, são funções reais de θ e são elementos que não dependem de y.

Família exponencial

- Diversas distribuições são importantes membros da família exponencial.
- Por exemplo:
  - Caso contínuo: Normal, Gama, e Beta;
  - Binomial, Poisson, Binomial Negativa;
- Para verificar se uma certa distribuição pertence à família exponencial devemos identificar as funções $h(y), c(\theta), t_i(y)$ e $\omega_i(\theta)$, e mostrar que a família pode ser escreta conforme foi expressado acima.

Família exponencial

Exemplo 21 Verifique se $Y \sim Binomial(n, p)$, pertence à família exponencial, em que n é um inteiro positivo e $0 < p < 1$. Nosso parâmetro de interesse é p.

$$
\begin{aligned}
f(y|p) &= \binom{n}{y} p^y (1-p)^{n-y} \\
&= \binom{n}{y} (1-p)^n \left(\frac{p}{1-p}\right)^y \\
&= \underbrace{\binom{n}{y}}_{h(y)} \; \underbrace{(1-p)^n}_{c(p)} \; \exp\left\{ \underbrace{y}_{t_1(y)} \; \underbrace{\log\left(\frac{p}{1-p}\right)}_{\omega_1(p)} \right\}
\end{aligned}
$$

- A família exponencial apresenta propriedades estatísticas interessantes.
- É possível tirar conclusões relevantes para uma família de distribuições sem realizar explicitamente os cálculos para cada caso específico.

Família exponencial

Exemplo 22 Considere $Y = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ i.i.d $N(\mu, \sigma^2)$. Assim a $f(Y|\mu, \sigma^2)$ é igual

$$
\begin{aligned}
&= \prod_{i=1}^{n} (2\pi\sigma^2)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(y_i - \mu)^2\right\} I_{(-\infty,\infty)}(y_i) \\
&= (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - 2\mu\sum_{i=1}^{n} y_i + n\mu^2\right]\right\} \prod_{i=1}^{n} I_{(-\infty,\infty)}(y_i) \\
&= \prod_{i=1}^{n} \left[I_{(-\infty,\infty)}(y_i)\right] (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right) + \frac{2\mu}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} y_i\right\} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} n\mu \right. \\
&= \underbrace{\prod_{i=1}^{n} \left[I_{(-\infty,\infty)}(y_i)\right]}_{h(y)} \underbrace{(2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} n\mu^2\right\}}_{c(\mu,\sigma^2)} \exp\left\{ \underbrace{-\frac{1}{2\sigma^2}}_{\omega_1(\mu,\sigma^2)} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)}_{t_1(y)} + \underbrace{\frac{\mu}{\sigma^2}}_{\omega_2(\mu,\sigma^2)} \underbrace{\sum_{i=1}^{n}}_{t_2} \right.
\end{aligned}
$$

Família exponencial

- É fácil encontrar uma estatística suficiente para uma distribuição da família exponencial. Considere o teorema abaixo.

Teorema 6 Sejam $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ observações i.i.d. de uma f.d. ou f.p $f(Y \mid \theta)$ que pertence à família exponencial dada por

$$f(y \mid \theta) = h(x)c(\theta)\exp\left\{\sum_{i=1}^{k} \omega_i(\theta)t_i(y)\right\},$$

sendo $\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_d),\ d \leq K$.

Então, $T(Y) = (t_1(y), t_2(y), \ldots, t_k(y))$ é uma estatística suficiente para θ.

Família exponencial

`Prova:` Considere o teorema da fatoração de Neyman

$$f(y \mid \theta) = h(x)\underbrace{c(\theta)\exp\left\{\sum_{i=1}^{k} \omega_i(\theta) t_i(y)\right\}}_{g(T(Y)|\theta)},$$

- Então, $T(Y) = (t_1(y), t_2(y), \ldots, t_k(y))$ é uma estatística suficiente para θ.
- No exemplo anterior (caso Normal) temos $t_1(Y) = \sum_{i=1}^{n} Y_i^2$ e $t_2(Y) = \sum_{i=1}^{n} Y_i$.

Então, $\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i^2, \sum_{i=1}^{n} Y_i\right)$ é estatística suficiente para (μ, σ^2).

Ancilaridade e Completude

Ancilaridade

- Consideramos anteriormente as estatísticas suficientes. Estas estatísticas contêm toda a informação sobre θ que está disponível na amostra.
- Iremos introduzir agora um tipo diferente de estatística; ela apresenta um conceito oposto.

Definição 12 Uma estatística $S(X)$ cuja distribuição não depende do parâmetro de interesse θ é dita `estatística ancilar`.

- Uma estatística ancilar não contém informação sobre θ. Ela é uma observação de uma variável aleatória cuja distribuição é fixa e conhecida (sem relação com θ).
- Paradoxalmente, uma estatística ancilar usada em conjunto com outras estatísticas pode conter informação sobre θ.

Ancilaridade

Exemplo 23 Sejam $X_1, \ldots, X_n$ observações iid de uma distribuição pertencente à família de locação com f.d.a $F(x - \theta)$ sendo $-\infty < \theta < \infty$. A diferença $R = X_{(n)} - X_{(1)}$ é uma estatística ancilar?

Assuma que $X_1 = Z_1 + \theta,\ X_2 = Z_2 + \theta,\ \ldots,\ X_n = Z_n + \theta$ sendo $Z_1, \ldots, Z_n$ observações iid com f.d.a. $F(X)$.

A f.d.a. de R será

$$F_R\left(r \mid \theta\right) = P\left[R \leq r\right] = P\left[\max_i(X_i) - \min_i(X_i) \leq r\right]$$

Logo,

$$\begin{aligned} F_R\left(r \mid \theta\right) &= P\left[\max_i(Z_i + \theta) - \min_i(Z_i + \theta) \leq r\right] \\ &= P\left[\max_i(Z_i) + \theta - \min_i(Z_i) - \theta \leq r\right] \\ &= P\left[\max_i(Z_i) - \min_i(Z_i) \leq r\right] \end{aligned}$$

Esta f.d.a. não depende de θ, logo R é uma estatística ancilar.

Ancilaridade

Exemplo 24 Sejam $X_1, \ldots, X_n$ observações iid de uma distribuição pertencente à família de escala com f.d.a $F(x/\sigma)$ sendo $0 < \theta < \infty$. Qualquer estatística, que dependa da amostra apenas através de $n-1$ valores do tipo $X_1/X_n, \ \ldots, X_{n-1}/X_n$ será ancilar.

Por exemplo:

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{X_n} = X_1/X_n + \cdots + X_{n-1}/X_n + 1, \text{ é ancilar.}$$

Seja $Z_1, \ldots, Z_n$ observações iid com f.d.a $F(x)$ (temos aqui $\sigma = 1$). Defina $X_1 = \sigma Z_1, \ldots, X_n = \sigma Z_n$.

A f.d.a conjunta de $X_1/X_n, \ \ldots, X_{n-1}/X_n$ é dada por

$$\begin{aligned}
F\left(y_1, \ldots, y_{n-1} \mid \sigma\right) &= P\left[X_1/X_n \leq y_1, \ldots, X_{n-1}/X_n \leq y_{n-1}\right] \\
&= P\left[\frac{\sigma Z_1}{\sigma Z_n} \leq y_1, \ldots, \frac{\sigma Z_{n-1}}{\sigma Z_n} \leq y_{n-1}\right] \\
&= P\left[\frac{Z_1}{Z_n} \leq y_1, \ldots, \frac{Z_{n-1}}{Z_n} \leq y_{n-1}\right]
\end{aligned}$$

Ancilaridade

A última probabilidade não depende de σ visto que a distribuição de $Z_1, \ldots, Z_n$ não depende de σ.

Portanto, a distribuição de $X_1/X_n, \ \ \ldots, X_{n-1}/X_n$ não dependerá de σ, assim como a distribuição de qualquer função destas quantidades.

Caso particular: X_1 e X_2 são iid. $N(0, \sigma^2)$

O resultado acima indica que X_1/X_2 tem distribuição que não depende de σ.

É possível mostrar que $X_1/X_2 \sim Cauchy(0, 1)$ para qualquer $\sigma > 0$

Ancilaridade

- Uma estatística suficiente minimal é aquela que atinge a maior redução de dados possível, mantendo toda informação sobre θ.
- Intuitivamente, uma estatística suficiente minimal elimina toda a informação irrelevante na amostra, retendo apenas aquilo que interessa sobre θ.
- A distribuição de uma estatística ancilar não depende de θ, então poderíamos suspeitar que uma estatística suficiente minimal não tem relação com estatísticas acilares.
- Entretanto, isso não é necessariamente verdade.
- Investigaremos esta relação a seguir…

Ancilaridade

- É possível mostrar que se $X_1, \ldots, X_n$ são iid com distribuição $U(\theta, \theta+1)$, então $\left[X_{(n)} - X_{(1)}, \dfrac{X_{(1)} + X_{(n)}}{2}\right]$ é uma estatística suficiente minimal para θ.
- Temos também o seguinte resultado $X_{(n)} - X_{(1)}$ é estatística ancilar. *(Ver, Casella e Berger(2002), pag. 282 e 283).*
- Neste caso, a estatística ancilar é uma **componente importante** na formulação da estatística minimal.
- Aqui, estes dois tipos de estatísticas não são independentes.
- Para dar uma ideia de como uma estatistica ancilar pode trazer informação sobre θ, considere o próximo exemplo.

Ancilaridade

Exemplo 25 Caso particular: X_1 e X_2 são iid com f.p.

$$P(X = \theta) = P(X = \theta + 1) = P(X = \theta + 2) = \frac{1}{3},$$

sendo θ um inteiro desconhecido.

- Esta distribuição é da família de locação.
- Estatísticas de ordem: $X_{(1)} \leq X_{(1)}$.
- Assuma $R = X_{(2)} - X_{(1)}$ e $M = \dfrac{X_{(1)} + X_{(2)}}{2}$.
- Estatística suficiente minimal para θ : $[R, M]$.
- Estatística ancilar: R.
- Considere o ponto $[R, M] = (r, m)$, sendo m inteiro.

Ancilaridade

- $M = \dfrac{X_{(1)} + X_{(2)}}{2}$ então temos as seguintes possibilidades para m:

$$
\begin{aligned}
m &= \frac{\theta + \theta}{2} && = \theta \\
m &= \frac{\theta + (\theta + 1)}{2} && = \theta + \frac{1}{2} \\
m &= \frac{\theta + (\theta + 2)}{2} && = \theta + 1 \\
m &= \frac{(\theta + 1) + (\theta + 1)}{2} && = \theta + 1 \\
m &= \frac{(\theta + 1) + (\theta + 2)}{2} && = \theta + \frac{3}{2} \\
m &= \frac{(\theta + 2) + (\theta + 2)}{2} && = \theta + 2
\end{aligned}
$$

Lembre que θ e m são inteiros, logo podemos ter $m = \theta, m = \theta + 1$ ou $m = \theta + 2$, quando dispomos apenas da informação de $M = m$ (Estatística suficiente minimal).

Ancilaridade

Suponha agora que $R = 2$ é uma informação adicional obtida. $R = X_{(2)} - X_{(1)}$

$X_{(1)}$	$X_{(n)}$	m	r
θ	θ	θ	0
θ	$\theta+2$	$\theta+1$	2
$\theta+1$	$\theta+1$	$\theta+1$	0
$\theta+2$	$\theta+2$	$\theta+2$	0

`Conclusão:` O conhecimento de uma estatística ancilar (R) aumentou nosso conhecimento sobre θ.

- O conhecimento do valor de R sozinho, não traria qualquer informação sobre o valor de θ (no caso r=2, saberíamos que $X_{(1)} = \theta$ e $X_{(2)} = \theta + 2$ mas não teríamos m para determinar θ).

Completude

- Para muitas situações, entretanto, nossa intuição de que uma `estatística suficiente minimal` é independente de qualquer `estatística ancilar` está correta.
- Os casos onde isso ocorre tem como base a seguinte definição:

Definição 13 Uma estatística $T = T(X_1, \ldots, X_n)$ é dita ser completa em relação à família $f(x \mid \theta), \theta \in \Theta$, se a única função real g, definida no domínio de T, tal que $E(g(T)) = 0$ para todo θ é a função nula, isto é, $g(T) = 0$ com probabilidade um.

T é completa se, e somente se, $E(g(T(\mathbf{X}))) = 0, \theta \in \Theta$, implicar que $P(g(T(\mathbf{X})) = 0) = 1, \theta \in \Theta$.

- Note que a `completude` é uma propriedade de uma família de distribuições, e não de uma distribuição particular.

Completude

Exemplo 26 $X \sim N(0,1)$ e $g(X) = X$. Então,

$$E(g(X) = X) = E(X) = 0.$$

Entretando, $P(g(X) = 0) = P(X = 0) \neq 1$. Note que a $N(0,1)$ é uma distribuição particular.

Exemplo 27 $X \sim N(\theta, 1)$ com $\theta \in \mathbb{R}$. Nenhuma função de X, exceto $g(X) = 0$ para todo θ, satisfaz $E[g(X)] = 0$ para todo θ.

Então temos que $E[g(X)] = 0 \Rightarrow P(g(X) = 0) = 1, \ \forall\theta$.

Dessa forma, a família de distribuições $X \sim N(\theta, 1)$ é completa.

Completude

Exemplo 28 Suponha que $T \sim Binomial(n, p)$, com $0 < p < 1$.

Seja g uma função tal que $E_p(g(T)) = 0$.

Então,

$$\begin{aligned} 0 = E_p\left[g(T)\right] &= \sum_{t=0}^{n} g(t)\tbinom{n}{t}p^t(1-p)^{n-t} \\ &= (1-p)^n \sum_{t=0}^{n} g(t)\tbinom{n}{t}\left(\frac{p}{1-p}\right)^t, \ \forall p. \end{aligned}$$

O componente $(1-p)^n \neq 0$ para qualquer $p \in (0, 1)$.

Entao devemos ter:

$$0 = \sum_{t=0}^{n} g(t)\binom{n}{t} r^t,$$

com $r = \dfrac{p}{1-p} \in (0, \infty)$.

Completude

- A última expressão é um polinômio de grau n em r, onde o coeficiente r^t sera $g(t)\binom{n}{t}$.
- Para que o polinômio seja $0\ \forall r$ cada coeficiente deve ser 0.
- Veja, que $\binom{n}{t} \neq 0$, então $g(t) = 0$, para $t = 0, 1, \ldots, n$.
- Dado que $T = 0, 1, \ldots, n$, temos que $E_p\left[g(T)\right] = 0 \Rightarrow P_p(g(T) = 0) = 1, \forall p$.

`Conclusão:` T é uma estatística completa.

Completude

- O teorema abaixo usa a completude para estabelecer uma condição na qual uma estatística suficiente minimal é independente de toda estatística ancilar.

Teorema 7 (Teorema de Basu) Se $T(X)$ é uma estatística suficiente minimal completa, então $T(X)$ é independente de toda estatística ancilar.

- O Teorema de Basu permite deduzir a independência de duas estatísticas sem ter que encontrar a distribuição conjunta delas.
- Para usar o Teorema de Basu, precisamos mostrar que a estatística é completa.
- Muitas vezes, isso é uma tarefa difícil em termos de análise.
- Felizmente, a maioria dos problemas que iremos trabalhar utilizam o seguinte resultado.

Completude

Teorema 8 (Estatistica completa da família exponencial.)

Seja $X_1, \ldots, X_n$ observações iid de uma distribuição da Família Exponencial com f.d. ou f.p. do tipo

$$f(x \mid \theta) = h(x)c(\theta)\exp\left\{\sum_{j=1}^{k} \omega_j(\theta)t_j(x)\right\},\ \theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)'$$

Então a estatística $T(X) = \left[\sum_{i=1}^{n} t_1(x), \sum_{i=1}^{n} t_2(x), \ldots, \sum_{i=1}^{n} t_k(x)\right]$ é completa se e somente se $\{[\omega_1(\theta), \ldots, \omega_k(\theta)] : \theta \in \Theta\}$ contém um conjunto aberto em $\mathbb{R}^k$.

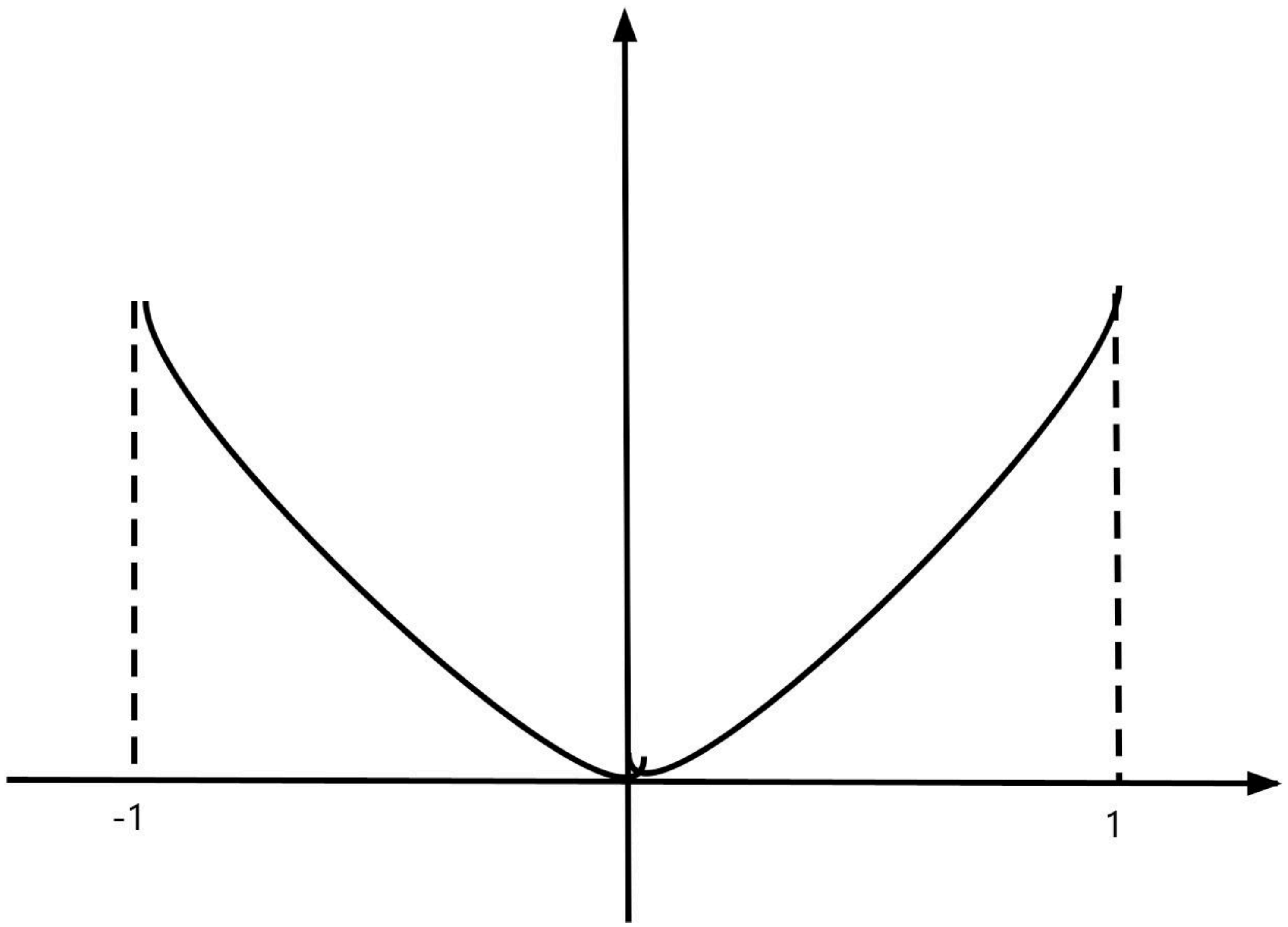
Completude

- A condição de que o espaço paramétrico contenha um conjunto aberto é necessária para evitar a seguinte situação:
- A $N(\theta, \theta^2)$ é membro da família exponencial.
- Verossimilhança: $(2\pi\theta^2)^{-n/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\theta^2}\left[\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - 2\theta\sum_{i=1}^{n} y_i + n\theta^2\right]\right\}$
- Formulação da FE:

$$\underbrace{(2\pi)^{-n/2}}_{h(x)}\underbrace{\theta^{-n}}_{c(\theta)} \exp\left\{-\underbrace{\frac{1}{2\theta^2}}_{\omega_1(\theta)}\underbrace{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}_{t_1(x)} + \underbrace{\frac{1}{\theta}}_{\omega_2(\theta)}\underbrace{\sum_{i=1}^{n} y_i}_{t_1(x)}\right\}$$

$\{\omega_1(\theta), \omega_2(\theta)\} = \left\{\frac{1}{\theta^2}, \frac{1}{\theta}\right\}$ que possui uma relação muito próxima com o espaço paramétrico $\{\theta, \theta^2\}$.

Completude



`Conclusão:` $\{\omega_1(\theta), \omega_2(\theta)\}$ não contém um aberto em $\mathbb{R}^2$, então

$$T(X) = \left[t_1(x) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} X_i^2, t_2(x) = \sum\right.$$

não é uma estatítica completa.