



Universidade Federal do Pará - UFPA
Faculdade de Estatística - FAEST
Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística - PPGME
Instituto de Ciências Exatas e Naturais - ICEN
Disciplina: Estatística Matemática
Prof. Paulo Cerqueira Jr. - cerqueirajr@ufpa.br - <https://github.com/paulocerqueirajr>

Lista 4: Estimação de Parâmetros com o Método de Newton-Raphson

Objetivo

Aplicar o método de Newton-Raphson para estimar os parâmetros de **quatro modelos de probabilidade**, cada um com **três ou mais parâmetros**, por meio da maximização da função de verossimilhança. O aluno deverá:

- Derivar a função de verossimilhança e a log-verossimilhança.
- Calcular o vetor gradiente (derivadas de primeira ordem).
- Calcular a matriz Hessiana (derivadas de segunda ordem).
- Implementar o algoritmo de Newton-Raphson.
- Utilizar **R ou Python**, sem bibliotecas externas para otimização ou estatística.

Modelos Escolhidos

A seguir estão as quatro distribuições a serem estudadas.

1. Distribuição Gama Generalizada

Parâmetros: $\alpha > 0, \beta > 0, \lambda > 0$

Densidade:

$$f(x) = \frac{\lambda \beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha\lambda-1} e^{-\beta x^\lambda}, \quad x > 0$$

2. Distribuição Weibull Generalizada

Parâmetros: $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0$

Densidade:

$$f(x) = \alpha \beta^\gamma x^{\gamma-1} e^{-(\beta x)^\alpha}, \quad x > 0$$

3. Distribuição Log-Normal Truncada

Parâmetros: $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, $\tau > 0$ (parâmetro de truncamento)

Densidade:

$$f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\log x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad x > \tau$$

4. Distribuição Beta Generalizada

Parâmetros: $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\lambda > 0$

Densidade:

$$f(x) = \frac{\lambda x^{\lambda\alpha-1} (1-x^\lambda)^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta)}, \quad 0 < x < 1$$

Orientações

Para **cada distribuição**, siga as etapas:

1. Derivação Analítica

- Função de verossimilhança $L(\theta)$
- Log-verossimilhança $\ell(\theta)$
- Vetor gradiente $\nabla \ell(\theta)$
- Matriz Hessiana $H(\theta)$

Utilize aproximações para funções como $\psi(\cdot)$ e $\psi'(\cdot)$ se necessário.

2. Implementação

- Linguagens permitidas: R ou Python
- **Proibido usar pacotes prontos como `scipy`, `statsmodels`, `optim`, `fitdistr` etc.**
- Recomenda-se modularização do código:
 - `log_verossimilhanca(params, dados)`
 - `gradiente(params, dados)`
 - `hessiana(params, dados)`
 - `newton_raphson(params_iniciais, dados, tol, max_iter)`

3. Dados

Use o método da transformação inversa para gerar de cada modelo usando a seguinte definição:

Definição: Método da Transformação Inversa. Seja X uma v.a. com função de distribuição acumulada F contínua. Seja $F^{-1} : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida por

$$F^{-1}(u) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq u\}.$$

A função F^{-1} é a função generalizada de F .

No repositório [github](#) da disciplina de **Estatística Computacional** há exemplos do método disponíveis para acesso e consulta.

Para cada modelo, **simule uma amostra de tamanho 100** (ou o que for mais adequado) com parâmetros conhecidos. Exemplo:

Distribuição	Parâmetros sugeridos
Gama Generalizada	$\alpha = 2, \beta = 1.5, \lambda = 1.2$
Weibull Generalizada	$\alpha = 1.8, \beta = 0.9, \gamma = 2.5$
Log-Normal Truncada	$\mu = 1, \sigma = 0.5, \tau = 1$
Beta Generalizada	$\alpha = 2, \beta = 3, \lambda = 1.5$

Entregáveis

O que o relatório da atividade deverá conter:

- Documento (html, PDF ou Jupyter/Quarto) com:
 - Derivações matemáticas detalhadas
 - Implementação do algoritmo
 - Resultados com gráfico da convergência
 - Discussões sobre dificuldades encontradas
- Código-fonte comentado e funcional.

Avaliação

Os critérios de avaliação da atividade são:

Critério	Peso
Derivações matemáticas	30%
Implementação do algoritmo	30%
Clareza e organização do código	20%
Relatório analítico e gráfico	20%

Boa sorte e bons cálculos!