Estatística Computacional

Inferência Bayesiana - Parte 2

Prof. Paulo Cerqueira Jr
Faculdade de Estatística - FAEST
Programa de Pós-graduação em Matemática e Estatística - PPGME

https://github.com/paulocerqueirajr

Distribuição normal univariada

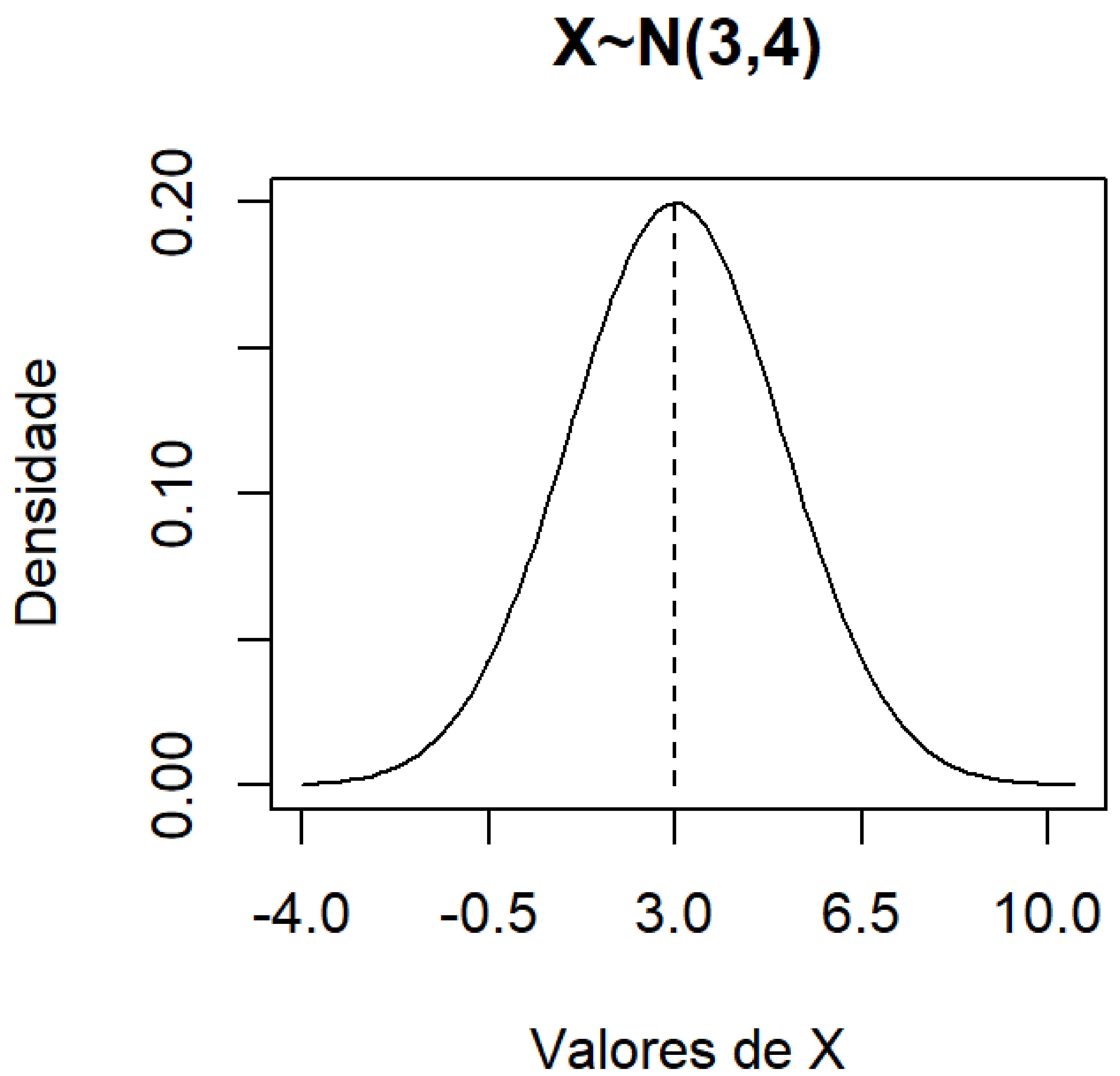
Distribuição normal univariada

Uma variável aleatória real X tem distribuição normal (ou gaussiana) com média (moda e mediana) $\mu \in (-\infty, \infty)$ e variância $\sigma^2 > 0$ se e somente se:

$$f(x \mid \mu, \sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right\},$$

Neste caso escreveremos $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Distribuição normal univariada



Distribuição normal univariada

Considere:

1. $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$, para $i = 1, 2, \ldots, n$;
2. $Cov(X_i, X_j) = c_{ij} = c_{ji}$, para $i \neq j$;
3. a_i e b são constantes.

Então $Y = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b$, tem distribuição normal com:

- $E(Y) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i + b$
- $Var(Y) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} a_i a_j c_{ij}$

Em particular, $c_{ij} = 0$ para todo $i \neq j$ se e somente se os $X_i^{'}s$ são normais e independentes. Neste caso, $Var(Y) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2$.

Função de verossimilhança

Função de verossimilhança

Seja $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)'$ um vetor contendo uma amostra aleatória da distribuição $N(\mu, \sigma^2)$.

A função de verossimilhança é denotada por $L(\theta \mid X)$, em que $\theta = (\mu, \sigma^2)$. Devido à independência das variáveis aleatórias X_i, temos

$$
\begin{aligned}
L(\theta \mid X) &= \prod_{i=1}^{n} f(x_i \mid \mu, \sigma^2) \\
&= \prod_{i=1}^{n} (2\pi\sigma^2)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x_i - \mu)^2\right\} \\
&= (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2\right\} \\
&= (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\mu\sum_{i=1}^{n} x_i + n\mu^2\right]\right\}
\end{aligned}
$$

Reparametrizando

- Defina $\phi = \dfrac{1}{\sigma^2}$, chamada de precisão.
- Se $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, então, $X_i \sim N(\mu, 1/\phi)$.
- Neste caso, a função de verossimilhança fica da seguinte forma:

$$L(\theta \mid X) = (2\pi/\phi)^{-n/2} \exp\left\{-\frac{\phi}{2}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\mu\sum_{i=1}^{n} x_i + n\mu^2\right]\right\}.$$

- A maneira de parametrizar a distribuição escolhida é de acordo com o pesquisador.
- Uma escolha de parametrização pode facilitar os cálculos, a interpretação e a implementação computacional de um problema.

Análise conjugada no modelo normal

Análise conjugada no modelo normal

Neste caso, precisamos especificar uma distribuição `a priori` conjunta para (μ, σ^2), ou seja:

$$h(\mu, \sigma^2) = h(\mu \mid \sigma^2)h(\sigma^2) \quad \text{ou} \quad h(\mu, \phi) = h(\mu \mid \phi)h(\phi)$$

Consideramos aqui a análise conjugada para a parametrização (μ, ϕ).

Resultados similares podem ser obtidos para o caso (μ, σ^2), serão deixados como exercícios.

Especificações `a priori`

$$(\mu \mid \phi) \sim N(m, v/\phi) \quad e \quad \phi \sim Ga(a, b).$$

onde $m \in (-\infty, \infty)$, $v > 0$, $a > 0$ e $b > 0$.

Distribuição Gama

Parametrização da distribuição Gama

Seja X uma variável aleatória com distribuição Gama definida com parâmetro de forma $a > 0$ e taxa $b > 0$. Sua função de densidade de probabilidade é dada por

$$f(x) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} \exp\{-bx\}, \quad \text{para} \quad x > 0.$$

Notação: $X \sim Ga(a, b)$. Em que

$$E(X) = \frac{a}{b}, \quad Moda(X) = \frac{a-1}{b}, (a > 1) \quad \text{e} \quad Var(X) = \frac{a}{b^2}.$$

A distribuição Gama Inversa

Se $X \sim Ga(a, b)$ então a variável aleatória $Y = 1/X$ segue a distribuição Gama Inversa cm parâmetro de forma $a > 0$ e de escala $b > 0$. Sua função densidade de probabilidade é dada a seguir:

$$f(y) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} y^{-a-1} \exp\{-b/y\}, \quad \text{para} \quad y > 0.$$

Notação: $X \sim GI(a, b)$. Em que

$$E(X) = \frac{b}{a-1}, (a > 1), \quad Moda(X) = \frac{b}{a+1}, \quad \text{e} \quad Var(X) = \frac{a}{b^2}(a > 2).$$

A distribuição *a posteriori*

A distribuição `a posteriori` conjunta pode ser fatorada como segue:

$$h(\mu, \phi \mid X) = h(\mu \mid \phi, X)h(\phi \mid X).$$

Nesta configuração vemos que o procedimento para gerar valor de (μ^*, ϕ^*) da distribuição conjunta (μ, ϕ) basta seguir os seguinte passos:

1. Gerar $\phi^* \sim h(\phi \mid X)$;
2. Gerar $\mu^* \sim h(\mu \mid \phi^*, X)$.

Os cálculos que determinam as distribuições *a posteriori* acima são descritas a seguir.

Distribuição *a posteriori*

$$
\begin{aligned}
h(\mu, \phi \mid X) &\propto L(X \mid \mu, \phi) h(\mu, \phi) \\
&\propto L(X \mid \mu, \phi) h(\mu \mid \phi) h(\phi)
\end{aligned}
$$

$$
\propto \quad (2\pi/\phi)^{-n/2} \exp\left\{-\frac{\phi}{2}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\mu \sum_{i=1}^{n} x_i + n\mu^2\right]\right\} \times
$$

$$
\times\, (2\pi v)^{-1/2} \phi^{1/2} \exp\left\{-\frac{\phi}{2v}\left[\mu^2 - 2\mu m + m^2\right]\right\} \times
$$

$$
\times\, \frac{b^a}{\Gamma(a)} \phi^{a-1} \exp{-b\phi}
$$

Distribuição *a posteriori*

Em que,

$$n\mu^2 + \frac{\mu^2}{v} - 2\mu\sum_{i=1}^{n} x_i - 2\frac{\mu m}{v} \Longrightarrow \mu^2\left(n + \frac{1}{v}\right) - 2\mu\left(\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{m}{v}\right)$$

A distribuição *a posteriori* é

$$\propto \quad \phi^{n/2+1/2+a-1}\exp\left\{-\phi\left[b + \frac{m^2}{2v} + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{2}\right]\right\} \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{\phi}{2}\left(n + \frac{1}{v}\right)\left[\mu^2 - 2\mu\left(n + \frac{1}{v}\right)^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{m}{v}\right)\right]\right\}$$

Distribuição *a posteriori*

Denote $M = \left(n + \frac{1}{v}\right)^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{m}{v}\right)$

Então,

$$h(\mu, \phi \mid X) \quad \propto \quad \phi^{n/2+1/2+a-1} \exp\left\{-\phi\left[b + \frac{m^2}{2v} + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{2}\right]\right\} \times$$

$$\times \exp\left\{+\frac{\phi}{2}\left(n + \frac{1}{v}\right)\right\} \exp\left\{-\frac{\phi}{2}\left(n + \frac{1}{v}\right)(\mu - M)^2\right\}$$

Distribuição *a posteriori*

$$h(\mu, \phi \mid X) \quad \propto \quad \phi^{n/2+1/2+a-1} \exp\left\{-\phi\left[b + \frac{m^2}{2v} + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{2} - \frac{1}{2}\left(n + \frac{1}{v}\right)M^2\right]\right\} \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{\phi}{2}\left(n + \frac{1}{v}\right)(\mu - M)^2\right\}$$

Observe que $\exp\left\{-\frac{\phi}{2}\left(n + \frac{1}{v}\right)(\mu - M)^2\right\}$ representa um núcleo de uma $N[\mu \mid M, V]$, onde

$V = \dfrac{v}{(nv+1)\phi}$.

Distribuição *a posteriori*

Denote $B = b + \frac{m^2}{2v} + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{2} - \frac{1}{2}\left(n + \frac{1}{v}\right) M^2$.

Então,

$$
\begin{aligned}
h(\mu, \phi \mid X) &\propto \phi^{n/2+1/2+a-1} \exp\{-\phi B\} \times \\
& \quad \times (2\pi V)^{1/2} (2\pi V)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2V}(\mu - M)^2\right\} \\
&\propto \phi^{n/2+1/2+a-1} \phi^{-1/2} \exp\{-\phi B\} \times (2\pi V)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2V}(\mu - M)^2\right\} \\
&\propto \phi^{n/2+a-1} \exp\{-\phi B\} \times (2\pi V)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2V}(\mu - M)^2\right\}
\end{aligned}
$$

Distribuição *a posteriori*

Logo,

$$(\mu \mid \phi, X) \sim N(M, V) \quad \text{e} \quad \phi \sim Ga(A, B),$$

onde $A = \dfrac{n}{2} + a.$

Dizemos que a distribuição *a posteriori* é denominada neste caso.