

# Inferência Estatística I

## Amostra aleatória

---



**Prof. Paulo Cerqueira Jr**

**Faculdade de Estatística - FAEST**

**Instituto de Ciências Exatas e Naturais - ICEN**

<https://github.com/paulocerqueirajr> 

# Introdução

# Introdução

- Os avanços científicos são, na maioria das vezes, atribuídos aos experimentos realizados.
- Um pesquisador realiza o experimento e obtém dados.
- Baseado nos dados, algumas conclusões podem ser retiradas.
- Estas conclusões vão, geralmente, além dos que foi observado nos dados.
- Dessa forma, o pesquisador generaliza, partindo de um experimentos para os demais que são similares.
- Esta generalização é denominada de **Inferência**.

## ! Uma função da Estatística:

Fornecer um conjunto de metodologias para realizar a inferência e medir o grau de incerteza dessa inferência, através da **teoria das probabilidades**.

# Introdução

## Exemplo 1

- Suponha um recipiente com 10 milhões de sementes de flores.
- Cada semente pode produzir flores brancas ou vermelhas.
- Pergunta-se: Qual a porcentagem de flores brancas que serão geradas?
- Para saber o resultado real, teríamos que plantar todas as sementes.
- Seria uma tarefa muito trabalhosa!
- Solução: Plantar algumas sementes, e baseando-se nos resultados podemos obter alguma informação para a porcentagem de flores brancas.

# População e amostra

**Definição 1 (População)** É um conjunto que contém todos os elementos do problema a ser discutido, com pelo menos uma característica em comum. Desejamos obter informação sobre esta população.

## Exemplo 2

- Preços da carne em um mês na região metropolitana de Belém.
- Preços do pão em certo dia em Belém.
- Produção de leite por animal em uma fazenda.
- Queremos estudar a proporção de votos para um determinado candidato ao governo do Estado do Pará.
- Queremos estudar o grau de satisfação dos usuários de uma determinada operadora de telefonia celular.

# População e amostra

# População e amostra

**Definição 2 (Amostra aleatória - a.a)** Sejam  $X_1, X_2, \dots, X_n$  uma sequência de variáveis aleatórias com distribuição conjunta  $f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n)$  que fatora como na seguinte igualdade:

$$f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \times f_{X_2}(x_2) \times \dots \times f_{X_n}(x_n) = \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i),$$

em que  $f(\cdot)$  é a função de probabilidade (f.p) ou função de densidade de probabilidade (f.d) para cada  $X_i$ . Então,  $X_1, X_2, \dots, X_n$  é uma amostra aleatória de tamanho  $n$  retirada de uma população com p.d/f.d.

# População e amostra

**Exemplo 3** Imagine 10 milhões de sementes em um recipiente e a produção de flores brancas e vermelhas.

- **População:** Sementes dentro do recipiente.
- **Unidade experimental:** Uma semente.
- **Característica:** Flor branca ou vermelha.
- Não temos um valor numérico associado a cada elemento, mas podemos definir o seguinte tipo de resposta:

Flor branca = 1 e Flor vermelha = 0.

**Variável aleatória:**  $X_i = 1$  ou  $X_i = 0$ , para  $i = 1, 2, \dots, n$ .



# População e amostra

- A variável aleatória  $X_i$  é uma representação do valor numérico que a  $i$  – ésima unidade amostral irá assumir.
- Depois que a amostra  $X_1, X_2, \dots, X_n$  observada os valores serão conhecidos e denotados por  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .
- Logo:

Suponha que  $X$  pode assumir apenas os valores 0 ou 1 com probabilidades  $1 - \theta$  e  $\theta$ , respectivamente. Então, sejam  $X_1, X_2, \dots, X_n$  uma a.a de  $X \sim \text{Ber}(\theta)$ , sua distribuição conjunta  $P(X_1 = x_1; X_2 = x_2; \dots; X_n = x_n)$  é dada por

$$= \theta^{x_1}(1 - \theta)^{1-x_1} \times \theta^{x_2}(1 - \theta)^{1-x_2} \times \dots \times \theta^{x_n}(1 - \theta)^{1-x_n}$$

$$= \theta^{x_1+x_2+\dots+x_n}(1 - \theta)^{(1-x_1)+(1-x_2)+\dots+(1-x_n)}$$

$$= \theta^{\sum_{i=1}^n x_i}(1 - \theta)^{\sum_{i=1}^n (1-x_i)}$$

$$= \theta^{\sum_{i=1}^n x_i}(1 - \theta)^{(n - \sum_{i=1}^n x_i)}$$

# Estatísticas e Parâmetros

# Estatísticas e Parâmetros - Introdução

**i** Um dos problemas principais da Estatística envolve o seguinte:

- Estudar uma população com f.p/f.d  $f(\cdot \mid \theta)$ , onde a forma da f.p/f.d é conhecida com parâmetro desconhecido  $\theta$ .
- Se  $\theta$  fosse conhecido f.p/f.d estaria completamente especificada.

**i** Procedimento de inferência envolverá:

- A obtenção de uma amostra aleatória  $X_1, X_2, \dots, X_n$  desta f.p/f.d.
- O uso de uma função  $T(x_1, x_2, \dots, x_n)$  como estimativa para o parâmetro  $\theta$  (desconhecido).

# Estatísticas

- O problema aqui consiste em determinar qual será a melhor função para estimar  $\theta$ .
- Iremos avaliar certas funções (funções amostrais) de uma amostra aleatória.

**Definição 3 (Estatísticas)** É uma função da amostra,  $T(x) = f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ , representando uma característica da amostra.

## ⚠ Importante:

A formulação de uma estatística **não pode envolver quantidades desconhecidas.**

# Estatísticas

Os exemplos mais comuns:

- Média amostral:  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ .
- Variância amostral:  $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ .
- Mediana amostral:  $\tilde{X} = \text{med}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ .
- Mínimo amostral:  $X_{(1)} = \min (X_1, X_2, \dots, X_n)$ .
- Máximo amostral:  $X_{(n)} = \max (X_1, X_2, \dots, X_n)$ .
- Ponto médio amostral:  $\frac{1}{2}(X_{(1)} + X_{(n)})$ .

# Parâmetros

**Definição 4 (Parâmetro)** Uma parâmetro é uma medida (desconhecida) usada para descrever uma característica da população.

- As relação das estatísticas com seus respectivos parâmetros:

Medida	Estatística	Parâmetro
Média	$\bar{X}$	$\mu$
Variância	$\hat{\sigma}^2$	$\sigma^2$
$N$ de elementos	$n$	$N$
Proporção	$\hat{\theta}$	$\theta$

# Estatísticas e Parâmetros

**Exemplo 4** Considere uma variável aleatória observável com f.d:

- $f(x) = N\left[x \mid \mu, \sigma^2\right]$ , com  $\mu$  e  $\sigma$  desconhecidos.
- Logo,

$X - \mu$  e  $X/\sigma$  são Estatísticas??

- Não são, pois contém elementos desconhecidos.
- $X, X + 3$  e  $X^2 + \log X^2$  são estatísticas.

# Estatísticas e Parâmetros

**Exemplo 5** Seja  $X_1, X_2, \dots, X_n$  uma amostra aleatória com f.p/f.d  $f(\cdot; \theta)$  então:

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad \text{e} \quad \frac{1}{2} \left\{ \min (X_1, \dots, X_n) + \max (X_1, \dots, X_n) \right\}$$

são exemplos de estatísticas.

**Exemplo 6** Se  $f(x; \theta) = N[x \mid \theta, 1]$ , com  $\theta$  desconhecido.

$$\bar{X}_n - \theta \quad \text{é uma Estatística?}$$

- Não é uma estatística, pois depende de  $\theta$ .



# Momentos amostrais

# Momentos amostrais

Seja  $X_1, \dots, X_n$  uma a.a com f.p/f.d  $f(\cdot)$ . O  $r$ -ésimo momento amostral em relação à 0 é definido por

$$M'_r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - 0)^r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i)^r.$$

- Em particular, quando  $r = 1$ , temos a média amostral  $\bar{X}$  ou  $\bar{X}_n$ , em que

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i).$$

O  $r$ -ésimo momento em relação à  $\bar{X}_n$  é dado por

$$M_r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( X_i - \bar{X}_n \right)^r$$

# Momentos amostrais

Momentos amostrais são exemplos de estatísticas!

**Teorema 1 (Momentos Amostrais)** Seja  $X_1, \dots, X_n$  uma a.a com f.p/f.d  $f(\cdot)$ . O valor esperado do  $r$ -ésimo momento amostral (em relação à 0) é igual ao  $r$ -ésimo momento populacional, isto é,

$$E(M'_r) = \mu'_r, \text{ se } \mu'_r \text{ existir.}$$

- Temos que  $\mu'_r = E(X^r)$  é o  $r$ -ésimo momento populacional de uma população com f.p/f.d  $f(x) = f_X(x)$ .
- Além disso:

$$Var(M'_r) = \frac{1}{n} \left[ E(X^{2r}) - E^2(X^r) \right]$$

$$= \frac{1}{n} \left[ \mu'_{2r} - (\mu'_r)^2 \right].$$

# Momentos amostrais

## Demonstração:(cont.)

A média:

$$\begin{aligned} E(M_r') &= E\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i)^r\right] = \frac{1}{n} E\left[\sum_{i=1}^n (X_i)^r\right] = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E\left[(X_i)^r\right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mu_r' = \mu_r'. \end{aligned}$$

A variância:

$$Var(M_r') = Var\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i)^r\right] = \frac{1}{n^2} Var\left[\sum_{i=1}^n (X_i)^r\right]$$

# Momentos amostrais

Demonstração:(cont.)

Supondo independência, temos

$$\begin{aligned} Var(M_r') &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n Var\left[(X_i)^r\right] = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \left[E(X_i)^{2r} - E^2(X_i^r)\right] \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \left[\mu_{2r}' - (\mu_r')^2\right] = \frac{1}{n} \left[\mu_{2r}' - (\mu_r')^2\right]. \end{aligned}$$

# Momentos amostrais

Quando  $r = 1$ , temos o seguinte corolário.

**Corolário 1** Seja  $X_1, \dots, X_n$  uma a.a com f.p/f.d  $f(\cdot)$  e se  $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  é a média amostral, então,

$$E(\bar{X}_n) = \mu, \text{ e } Var(\bar{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

em que  $\mu$  e  $\sigma^2$  são a média e a variância de  $f(\cdot)$ .

# Momentos amostrais

- O Teorema 1 fornece a média e a variância, em termos de momentos populacionais, do  $r$ -ésimo momento amostral em relação a 0.
- Um resultado similar, porém mais complicado, pode ser derivado para a média e variância do  $r$ -ésimo momento amostral em relação a média amostral.
- Considere  $r = 2$ , tal que  $M_2 = \frac{1}{n} \sum (X_i - \bar{X})^2$ .
- $M_2$  as vezes é chamado de **variância amostral**.
- Entretanto, definiremos a variância amostral de outra forma.

# Momentos amostrais

**Definição 5** Seja  $X_1, \dots, X_n$  uma a.a com f.p/f.d  $f(\cdot)$ ,

$$S_n^2 = S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_i (X_i - \bar{X})^2, \text{ para } n > 1,$$

é definida como **variância amostral**.

A razão para considerarmos  $S^2$  ao invés de  $M_2$  como variância é devido

$$E(S^2) = \sigma^2 \text{ e } E(M_2) \neq \sigma^2$$

- Revisando:  $\mu'_r = E(X^r)$  é o  $r$ -ésimo momento de  $X$  (em relação a 0).



# Momentos amostrais

**Definição 6 (Momento central)** O  $r$ -ésimo momento central de uma variável aleatória  $X$  com relação ao ponto  $\mathbf{a}$  é definido por

$$\mu_r = E\left[(X - \mathbf{a})^r\right]$$

- Se  $\mathbf{a} = E(X) = \mu$ , temos  $\mu_r = E\left[(X - \mathbf{a})^r\right]$ , então

$$\mu_1 = E\left[(X - \mu)^1\right] = 0 \quad \text{e} \quad \mu_2 = E\left[(X - \mu)^2\right] = \text{Var}(X) = \sigma^2.$$

**Teorema 2** Seja  $X_1, \dots, X_n$  uma a.a com f.p/f.d  $f(\cdot)$  e seja

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_i (X_i - \bar{X})^2,$$

Então,

$$E(S^2) = \sigma^2 \quad \text{e} \quad Var(S^2) = \frac{1}{n} \left[ \mu_4 - \frac{n-3}{n-1} \sigma^2 \right].$$

# Momentos amostrais

**Prova:** Para  $E(S^2) = \sigma^2$ , temos que  $\sigma^2 = E[(X - \mu)^2]$  e  $\mu_r = E[(X - \mu)^r]$ . Note que,

$$\overbrace{0}$$

# Momentos amostrais

Prova (cont.):

Assim,

$$\begin{aligned}
E(S^2) &= E\left[\frac{1}{n-1} \sum_i (X_i - \bar{X})^2\right] \\
&= E\left[\frac{1}{n-1} \sum_i (X_i - \mu)^2 - n(\bar{X} - \mu)^2\right] \\
&= \frac{1}{n-1} E\left[\sum_i (X_i - \mu)^2 - n(\bar{X} - \mu)^2\right] \\
&= \frac{1}{n-1} E\left[\sum_i (X_i - \mu)^2\right] - \frac{n}{n-1} E\left[(\bar{X} - \mu)^2\right] \\
&= \frac{n}{n-1} \sigma^2 - \frac{n}{n-1} \text{Var}(\bar{X}) \\
&= \frac{n}{n-1} \sigma^2 - \frac{n}{n-1} \frac{\sigma^2}{n} \\
&= \sigma^2
\end{aligned}$$

# Momentos amostrais

- De forma similar,

$$\begin{aligned} E(M_2) &= E\left[\frac{1}{n} \sum_i (X_i - \bar{X})^2\right] \\ &= \frac{1}{n} \sigma^2 - \frac{n}{n} \text{Var}(\bar{X}) \\ &= \sigma^2 \left( \frac{n-1}{n} \right) \end{aligned}$$

- Momentos amostrais são exemplos de **exemplos de estatísticas** que podem ser usados para estimar quantidades populacionais.
- Por exemplo:
  - $M'_r$  para estimar  $\mu'_r$ ;
  - 
  - $\bar{X}$  para estimar  $\mu$ ;
  - $S^2$  para estimar  $\sigma^2$ .



# Função de verossimilhança

# Função de verossimilhança

**Definição 7 (Função de verossimilhança)** A f.p/p.d.f conjunta é denominada função de verossimilhança de  $\theta$ , correspondente a amostra observada  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  e será denotada por

$$L(\theta \mid \mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n f(x_i \mid \theta) = f(x_1 \mid \theta) \times f(x_2 \mid \theta) \times \dots \times f(x_n \mid \theta).$$

Dada a amostra  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , podemos encontrar o **ponto mais verossímil** para  $\theta$ .

# Função de verossimilhança

**Exemplo 7 (Caso discreto)** Sejam  $X_1, X_2, \dots, X_n$  uma a.a de  $X \sim Pois(\theta)$ . Temos que a função de verossimilhança é dada por

$$\begin{aligned} L(\theta \mid \mathbf{x}) &= \prod_{i=1}^n \frac{\exp\{-\lambda\}\lambda^{x_i}}{x_i!} \\ &= \frac{\exp\{-\lambda\}\lambda^{x_1}}{x_1!} \times \frac{\exp\{-\lambda\}\lambda^{x_2}}{x_2!} \times \dots \times \frac{\exp\{-\lambda\}\lambda^{x_n}}{x_n!} \\ &= \frac{\exp\{-n\lambda\}\lambda^{\sum_{i=1}^n x_i}}{\prod_{i=1}^n x_i!}. \end{aligned}$$

# Função de verossimilhança

**Exemplo 8 (Caso contínuo)** Sejam  $X_1, X_2, \dots, X_n$  uma a.a de  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ . Temos que a função de verossimilhança é dada por

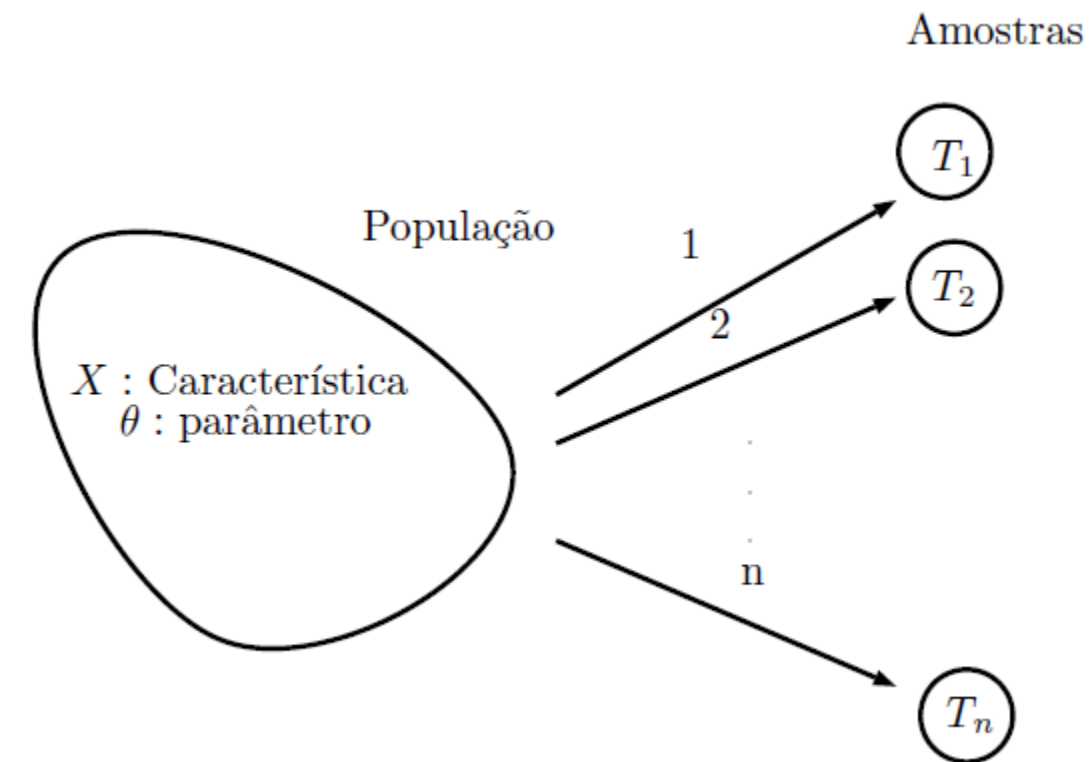
$$\begin{aligned}
&= \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left\{ \frac{1}{2\sigma^2} (x_i - \mu)^2 \right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left\{ \frac{1}{2\sigma^2} (x_1 - \mu)^2 \right\} \times \dots \times \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left\{ \frac{1}{2\sigma^2} (x_n - \mu)^2 \right\} \\
&= \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \right)^n \exp \left\{ \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \right\} \\
&= \left( \frac{1}{2\pi\sigma^2} \right)^{n/2} \exp \left\{ \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \right\} \\
&= \left( 2\pi\sigma^2 \right)^{-n/2} \exp \left\{ \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \right\}
\end{aligned}$$

# Distribuição amostral

# Introdução

Para este caso temos:

- $X$ : Variável de interesse;
- $\theta$ : parâmetro de interesse;
- $T = f(X_1, X_2, \dots, X_n)$  Função da amostra que vai fornecer informação sobre  $\theta$ .



$T$  é uma variável aleatória.

**Pergunta:** Qual a distribuição de  $T$  quando  $X_1, X_2, \dots, X_n$  assume valores observados?

# Distribuição amostral da média



# Distribuição amostral da média

**Exemplo 9** Suponha que selecionamos todas as amostras de tamanho 2, com reposição, da população  $\{1, 3, 5, 5, 7\}$

$X$	1	3	5	7
$P(X = x)$	1/5	1/5	2/5	1/5

- Encontrar a distribuição conjunta da v.a.  $(X_1, X_2)$ , sendo  $X_1$  sendo o número selecionado na primeira extração e  $X_2$  o número da segunda.
- Encontre a distribuição de  $\bar{X} = \frac{X_1 + X_2}{2}$ .

# Distribuição amostral da média

Combinação	Prob.	$X_1$	$X_2$	$X$
(1, 1)	1/25	1	1	1
(1, 3)	1/25	1	3	2
(1, 5)	2/25	1	5	3
(1, 7)	1/25	1	7	4
(3, 1)	1/25	3	1	2
(3, 3)	1/25	3	3	3
(3, 5)	2/25	3	5	4
(3, 7)	1/25	3	7	5
(5, 1)	2/25	5	1	3
(5, 3)	4/25	5	3	4
(5, 5)	2/25	5	5	5
(5, 7)	1/25	5	7	6
(7, 1)	1/25	5	7	4
(7, 3)	1/25	5	7	5
(7, 5)	1/25	5	7	6
(7, 7)	1/25	5	7	7

Distribuição conjunta:

$X_1/X_2$	1	3	5	7	Total
1	1/25	1/25	2/25	1/25	1/5
3	1/25	1/25	2/25	1/25	1/5
5	2/25	2/25	4/25	2/25	2/5
7	1/25	1/25	2/25	1/25	1/5
Total	1/5	1/5	2/5	1/5	Total

# Distribuição amostral da média

Distribuição amostral da média  $\bar{X}$ :

$\bar{X}$	1	2	3	4	5	6	7
$P(\bar{X} = x)$	$\frac{1}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{5}{25}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{1}{25}$

```
1 require(ggplot2)
2 mx      <- c(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)
3 pmx     <- c(1/25, 2/25, 5/25, 6/25, 6/25, 4/25, 1/25)
4 dados   <- data.frame(mx, pmx)
5 ggplot(data=dados, aes(x = factor(mx), ymin=0, ymax=pmx)) + geom_linerange() +
6   scale_x_discrete(breaks=1:7) + ylab("P(X=x)") +
7   xlab("Média amostral") + theme_bw()
```

# Distribuição amostral da média

- O primeiro momento amostral é a média definida como:

$$\bar{X} = \bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i).$$

onde  $X_1, X_2, \dots, X_n$  é uma amostra aleatória com f.p/f.d  $f(\cdot)$ .

- $\bar{X}$  é função das v.a  $X_1, X_2, \dots, X_n$  e, portanto a distribuição pode ser encontrada teoricamente.
- Pode ser útil pensar na média amostral  $\bar{X}$  como uma estimativa da média  $\mu$  da f.p/f.d  $f(\cdot)$  a partir de qual amostra foi selecionada.

Um dos objetivos da amostragem é estimar  $\mu$  a partir de  $\bar{X}$ .

# Distribuição amostral da média

**Teorema 3** Seja  $X_1, X_2, \dots, X_n$  uma a.a com f.p/f.d  $f(\cdot)$ , média  $\mu$  e variância  $\sigma^2$ . Considere:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i).$$

$$\text{Então, } E(\bar{X}) = \mu_{\bar{X}} = \mu \text{ e } Var(\bar{X}) = \sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}.$$

$E(\bar{X}) = \mu$ : diz que em média  $\bar{X}$  é igual ao parâmetro  $\mu$  sendo estimado ou que a distribuição de  $\bar{X}$  está centrada em  $\mu$ .

$Var(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$ : diz que a dispersão dos valores de  $\bar{X}$  em torno de  $\mu$  é pequena para amostras grandes em comparação com tamanhos menores.

# Teoremas de convergência

# Teoremas de convergência

---

- Para amostras grandes, os valores de  $X$  (que são usados para estimar  $\mu$ ) tendem a estar mais concentrados de  $\mu$  do que em amostras pequenas.
- Esta noção será definida pela **Lei dos Grandes Números**
- Seja  $E(X) = \mu$  para a f.p/f.d  $f(\cdot)$ . Desejamos estimar  $\mu$ .
- De maneira não rigorosa,  $E(X)$  é a média de um número infinito de valores da variável aleatória  $X$ .
- Em qualquer problema real podemos observar apenas um número finito de valores da variável aleatória  $X$ .
- Questão: Usando apenas um número finito de valores de  $X$  (uma amostra aleatória de tamanho  $n$ ) pode ser feita qualquer inferência confiável sobre  $E(X)$ ? **A resposta é sim.**
- Usaremos isso através da Lei Fraca dos Grandes Números.



# Teoremas de convergência

**Teorema 4 (Lei fraca dos Grandes Números)** Seja  $X_1, X_2, \dots, X_n$  uma a.a de tamanho  $n$  de uma população com variável  $X$ , com média  $E(X) = \mu$  e  $Var(X) = \sigma^2 < \infty$ . Sejam,  $\epsilon > 0$  e  $0 < \delta < 1$ . Se,  $n > \frac{\sigma^2 \epsilon^2}{\delta}$ , então,

$$P(|X_n - \mu| < \epsilon) \geq 1 - \delta,$$

ou seja,  $X_n$  converge em probabilidade para  $\mu$ .

# Teorema de convergência

Seja  $X_1, X_2, \dots, X_n$  uma a.a. de  $X \sim \text{Ber}(0.5)$ . Observe que,

$$X_i = \begin{cases} 0, & \text{fracasso} \\ 1, & \text{sucesso} \end{cases}, i = 1, 2, \dots, n.$$

A proporção amostral é determinada por

$$\hat{p}_n = \bar{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$

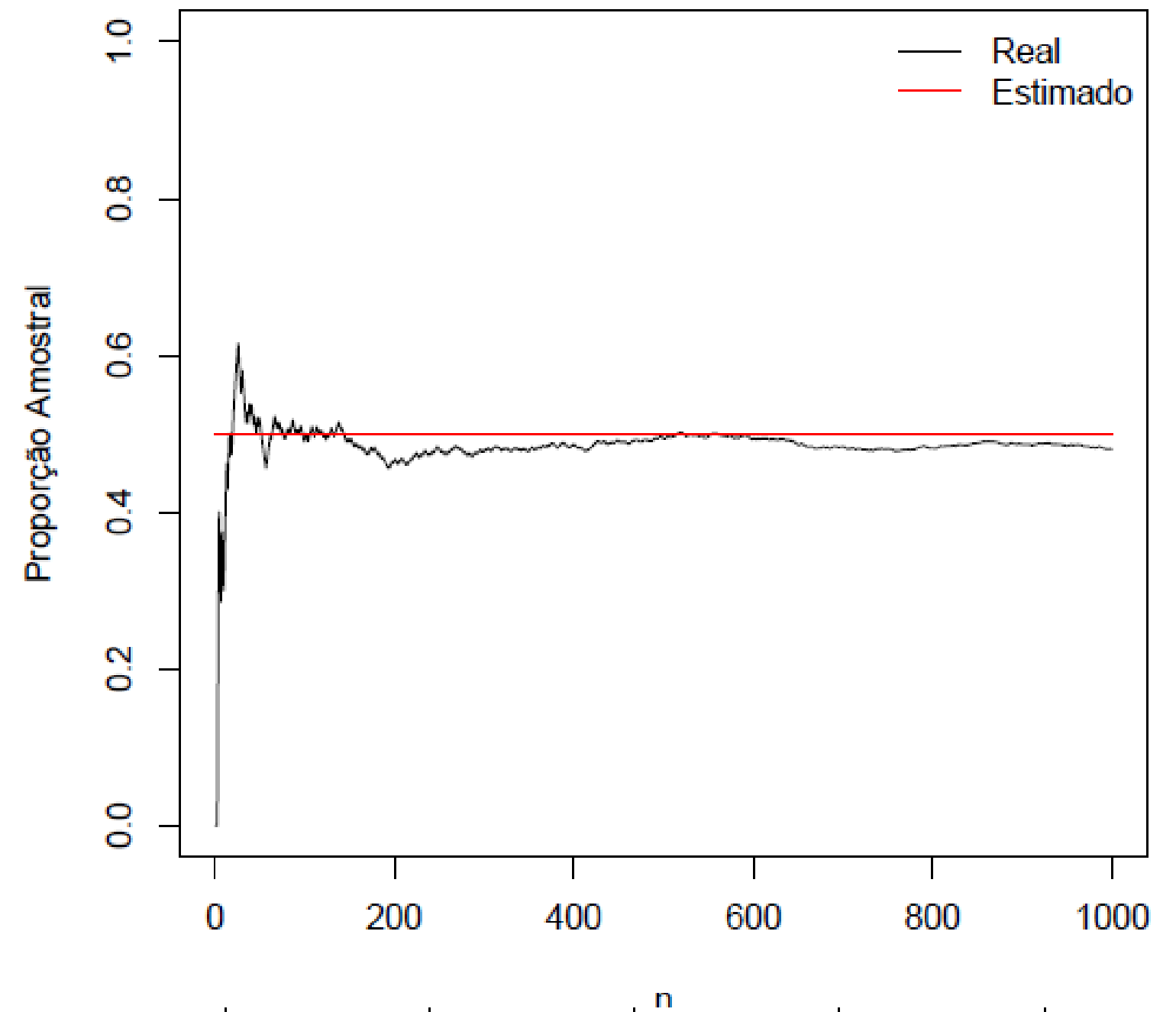
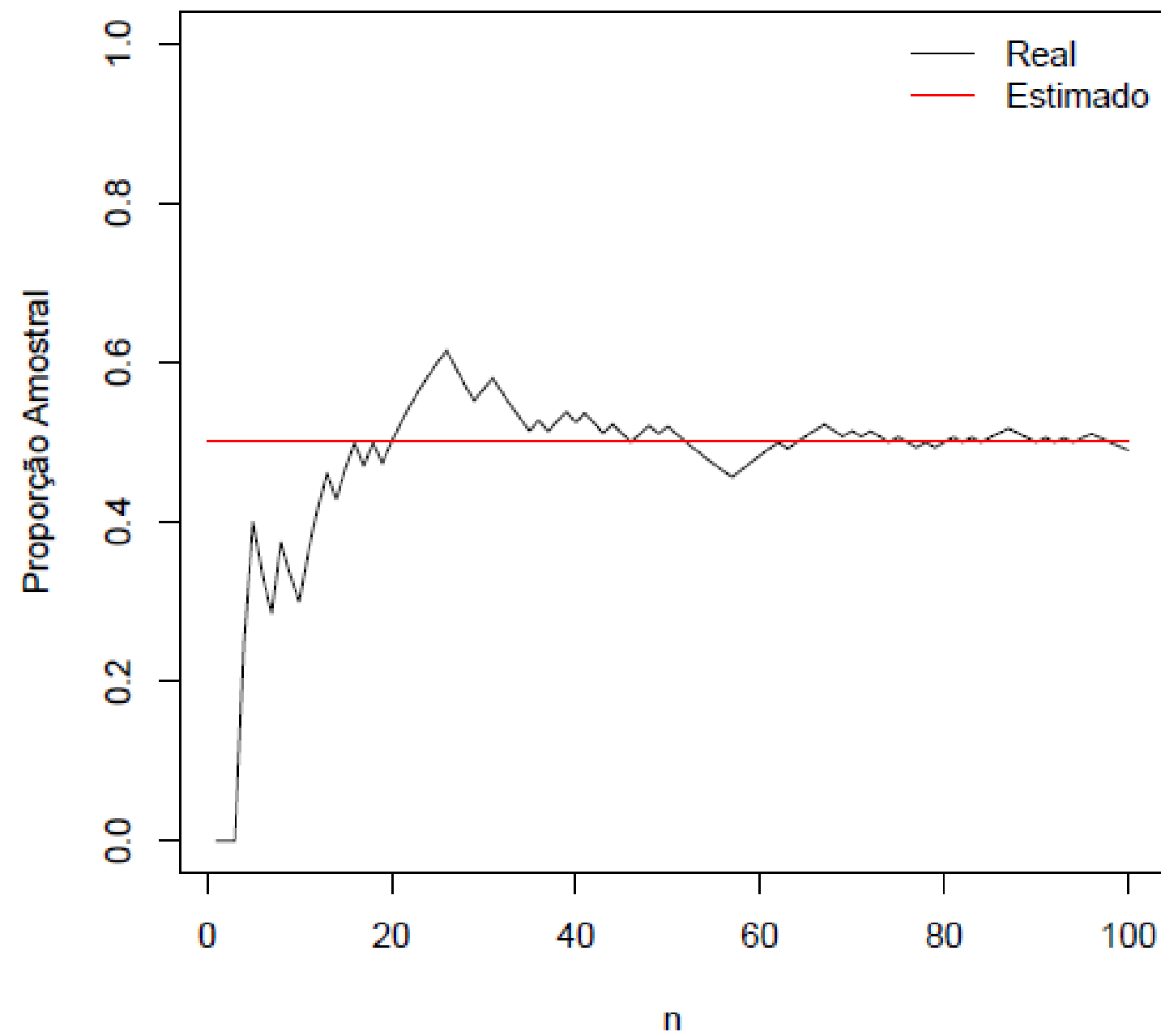
$$\text{Para } n = 1 \quad \Rightarrow \quad \hat{p}_1 = \frac{X_1}{1}.$$

$$\text{Para } n = 2 \quad \Rightarrow \quad \hat{p}_2 = \frac{X_1 + X_2}{2}.$$

$\vdots$

$$\text{Para } n = n \quad \Rightarrow \quad \hat{p}_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}.$$

# Teorema de convergência



# Teorema central do limite

O Teorema Central do Limite é um dos mais importantes resultados em toda área de Probabilidade e Estatística. Ele nos diz aproximadamente como a **média amostral** é distribuída.

**Teorema 5 (Teorema Central do Limite - TCL)** Seja  $X_1, X_2, \dots, X_n$  uma sequência de v.a.'s independentes com  $E(X_i) = \mu_i$  e  $Var(X_i) = \sigma_i^2 < \infty, i = 1, 2, \dots, n$ . Tome  $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ , então, sob determinadas condições gerais,

$$Z_n = \frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{Var(S_n)}} = \frac{S_n - \sum_{i=1}^n \mu_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2}} \rightarrow N(0, 1).$$

A distribuição de  $Z_n$  se aproxima da  $N(0, 1)$  quando  $n \rightarrow \infty$ .

O **Teorema 5** nos diz que a distribuição limite de  $Z_n$  ( $S_n$  padronizado) será a distribuição  $N(0, 1)$ .

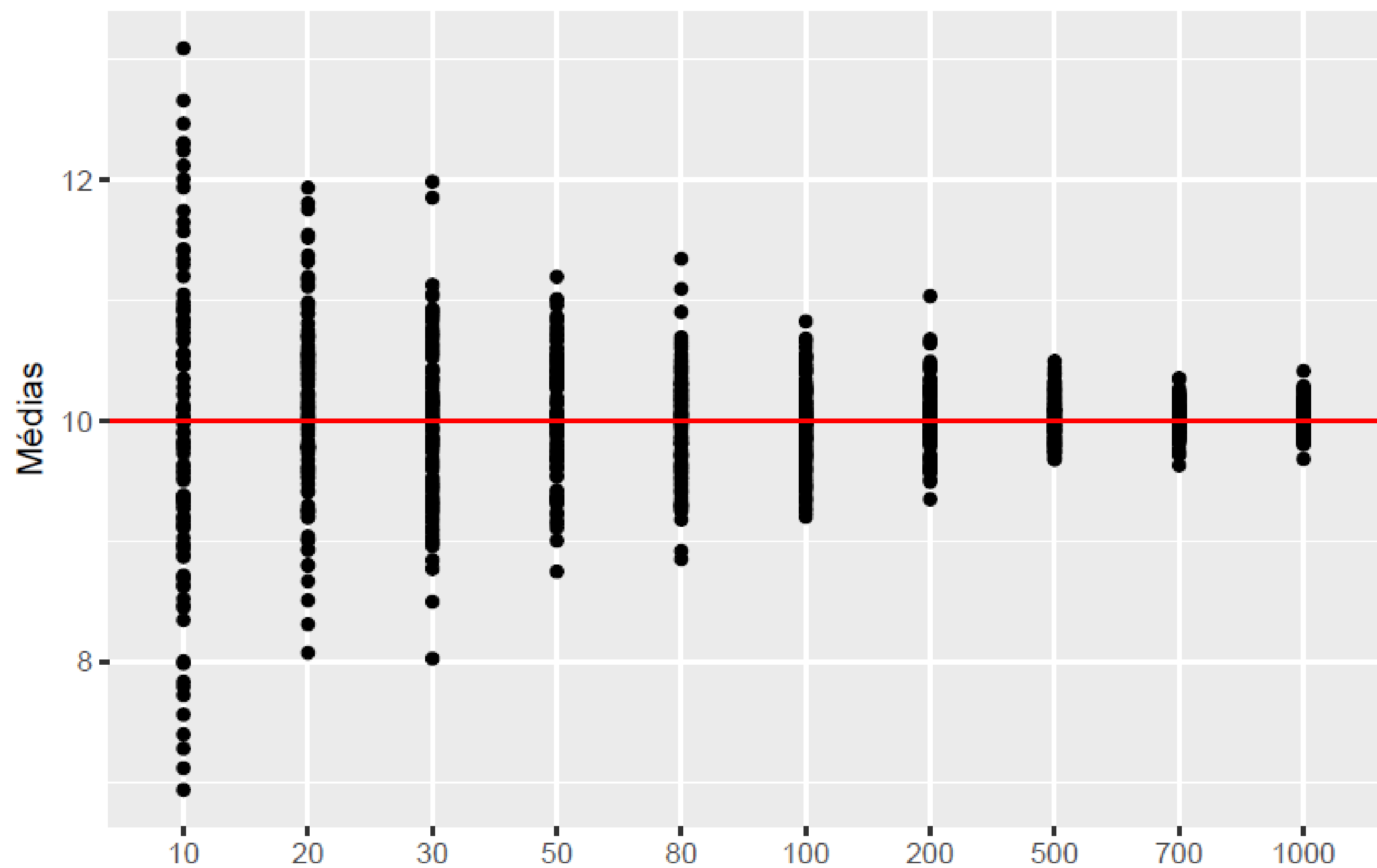
# Distribuição amostral da média

**Corolário 2** Seja  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  uma a.a. de  $X$  com  $E(X) = \mu$  e  $Var(X) = \sigma^2 < \infty$ . Então, para  $n \rightarrow \infty$ ,

$$Z_n = \frac{X_n - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \rightarrow N(0, 1).$$

- Em outras palavras  $X_n$  é assintoticamente distribuído como uma Normal com média  $\mu$  e variância  $\sigma^2/n$ .
- Um aspecto importante sobre o **Teorema 5** é o fato de que nada é dito sobre a forma da **f.p** ou **f.d original**. Qualquer que seja a distribuição, dado que possui variância **finita**, a média amostral terá **aproximadamente** distribuição Normal para amostras grandes.

# Representação do TCL graficamente



# Algumas distribuições exatas

- Se  $X \sim \text{Ber}(\theta)$ , então:  $P(\bar{X} = \bar{x}_n) = \binom{n}{\bar{x}_n} \theta^{\bar{x}_n} (1-\theta)^{n-\bar{x}_n}$ ,  $\bar{x}_n = 0, 1/n, 2/n, \dots, 1$ .
- Se  $X \sim \text{Pois}(\theta)$ , então:  $P(\bar{X} = \bar{x}_n) = \frac{e^{-n\theta} (n\theta)^{\bar{x}_n}}{\bar{x}_n!}$ ,  $\bar{x}_n = 0, 1/n, 2/n, \dots$
- Se  $X \sim \text{Normal}(\mu, \sigma^2)$ , então:  $\bar{X}_n \sim N(\mu, \sigma^2/n)$ .
- Se  $X \sim \text{Exp}(\theta)$ , então:  $\bar{X}_n \sim \text{Gama}(n, n\theta)$ .

# Distribuição amostral da proporção

- Seja  $X_1, X_2, \dots, X_n$  uma a.a. de  $X \sim \text{Ber}(\theta)$ .
- Em que  $\theta$  representa a proporção de elementos com uma determinada característica na população.
- Temos que

$$E(X_i) = \theta \quad \text{e} \quad \text{Var}(X_i) = \theta(1-\theta).$$

- Seja  $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ , então a proporção amostral é definida por

$$\hat{p} = \frac{S_n}{n} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} = \bar{X}.$$



# Distribuição amostral da proporção

Distribuição exata:

- Temos que  $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n \sim \text{Bin}(n, \theta)$ , então

$P(\hat{p} = \frac{k}{n}) = \binom{n}{k} \theta^k (1-\theta)^{n-k}$ ,  $k=0,1,2, \dots, n$ .

Distribuição aproximada pelo TCL:

- Temos que  $\hat{p} = \frac{S_n}{n} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} = \bar{X}_n$ , então

$\hat{p} \sim N\left(\theta, \frac{\theta(1-\theta)}{n}\right)$ .

# Distribuição amostral de estatísticas de ordem

# Estatísticas de ordem amostrais

- Seja  $X_1, X_2, \dots, X_n$  sendo uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. com função de distribuição  $F(\cdot)$ .
- Podemos reordenar (de forma crescente) essa sequência da seguinte forma  $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$ .
- No caso em que  $F$  seja contínua, temos que  $X_{(1)} < X_{(2)} < \dots < X_{(n)}$ .
- Uma vez que  $P(X_i = X_j) = 0$  para todo  $i \neq j$ , para variáveis aleatórias contínuas.

# Estatísticas de ordem amostrais

- Para uma sequência de v.a's  $X_1, X_2, \dots, X_n$  i.i.d.,  $X_{(k)}$  é denominada de k-ésima estatística de ordem.
- O mínimo é denotado por  $X_{(1)}$ :  $X_{(1)} = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$ .
- De maneira similar, o máximo é denotado por  $X_{(n)}$ :  $X_{(n)} = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$ .

# Estatísticas de ordem amostrais

Seja  $g(x)$  e  $G(X)$  as funções de densidade (probabilidade) e distribuição de  $X$ , respectivamente.

- Para o  $X_{(1)}$ :
  - A função de distribuição é dada por

$$F_{X_{(1)}}(x) = 1 - (1 - G(x))^n.$$

- A função de densidade é dada por

$$f_{X_{(1)}}(x) = \frac{d}{dx} F_{X_{(1)}}(x) = ng(x)(1 - G(x))^{n-1}.$$

# Estatísticas de ordem amostrais

Seja  $g(x)$  e  $G(X)$  as funções de densidade (probabilidade) e distribuição de  $X$ , respectivamente.

- Para o  $X_{\{(n)\}}$ :
  - A função de distribuição é dada por

$$F_{\{X_{\{(n)}\}}(x) = G(x)^n.$$

- A função de densidade é dada por

$$f_{\{X_{\{(n)}\}}(x) = \frac{d}{dx}F_{\{X_{\{(n)}\}}(x) = ng(x)G(x)^{(n-1)}.$$

# Amostrando da Normal - Média amostral

# Média amostral

- Esta seção lida com propriedades das quantidades amostrais provenientes de uma população Normal.
- A distribuição Normal tem papel importante nos estudos estatísticos.
- Muitas populações seguem a distribuição Normal com um bom grau de aproximação.
- Modelos estatísticos utilizando a distribuição Normal são amplamente considerados na literatura científica.
- Amostrar de uma população Normal leva a muitas propriedades úteis e também a muitas distribuições amostrais conhecidas.

## Média amostral e a população Normal:

- A média amostral é uma das mais simples funções de uma amostra aleatória.
- Para uma amostra aleatória da distribuição Normal, a distribuição exata da média amostral também é Normal (para qualquer tamanho amostral  $n$ , ou seja, não precisamos do TCL para dar suporte a esta afirmação).



# Média amostral

**Teorema 6** Seja  $\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  a média amostral de uma amostra aleatória  $X_1, \dots, X_n$  obtida da distribuição Normal com média  $\mu$  e variância  $\sigma^2$ . Então,  $\overline{X}_n \sim N(\mu, \sigma^2/n)$ .

**Prova:** Usaremos a função geradora de momentos (f.g.m),

$$\begin{array}{l} m_{\overline{X}_n}(t) = E\left(e^{t\overline{X}_n}\right) = E\left[\exp\left\{\frac{t}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right\}\right] = E\left[\prod_{i=1}^n \exp\left\{\frac{t}{n} X_i\right\}\right] = \underbrace{E\left[\prod_{i=1}^n \exp\left\{\frac{t}{n} X_i\right\}\right]}_{= \prod_{i=1}^n E\left[\exp\left\{\frac{t}{n} X_i\right\}\right]} = \prod_{i=1}^n m_{X_i}(t/n) = \prod_{i=1}^n \exp\left\{\mu \frac{t}{n} + \frac{\sigma^2}{2n} t^2\right\}. \end{array} \quad \text{f.g.m da } N(\mu, \sigma^2/n)$$

# Média amostral

- Dado que temos a distribuição exata de  $\overline{X}_n$  quando estimamos  $\mu$  com  $\overline{X}_n$ , seremos capazes de calcular, por exemplo, a probabilidade exata de que nosso estimador  $\overline{X}_n$  esteja dentro de uma distância fixada do parâmetro desconhecido  $\mu$ .

# Amostrando da Normal - Variância amostral

# Variância amostral

- A distribuição Normal possui dois parâmetros desconhecidos  $\mu$  e  $\sigma^2$ .
- Vimos anteriormente a distribuição amostral de  $\overline{X}_n$  que estima  $\mu$ .
- Procuremos agora pela distribuição de

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2,$$

que estima o parâmetro  $\sigma^2$ .

- A distribuição Qui-Quadrado desempenha um papel fundamental na determinação da distribuição de  $S^2$ .

# Variância amostral

**Definição 8 (Distribuição Qui-Quadrado)** Seja  $X$  uma v.a. com f.d

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(k/2)} \left( \frac{1}{2} \right)^{k/2} x^{k/2 - 1} \exp\left\{ -\frac{1}{2}x \right\} \times I_{(0, \infty)}(x),$$

então dizemos que  $X$  tem distribuição Qui-Quadrado com  $k$  graus de liberdade ( $k$  é um número inteiro positivo).

**Notação:**  $\chi^2_k$  = Qui-Quadrado com  $k$  graus de liberdade.

- A densidade da Qui-Quadrado é um caso particular da densidade  $\text{Gama}(r, \lambda)$ , onde  $r = k/2$  e  $\lambda = 1/2$ .
- Se  $X \sim \text{Ga}(r, \lambda)$  temos  $f(x) = \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-\lambda x}$ ,  $I_{(0, \infty)}(x)$ .
- Fazendo  $r = k/2$  e  $\lambda = 1/2$ , tem-se na densidade definida anteriormente.

# Variância amostral

Temos também que:

$$E(X) = \frac{r}{\lambda} = \frac{k/2}{1/2} = k \quad \text{e} \quad \text{Var}(X) = \frac{r}{\lambda^2} = \frac{k/2}{1/2^2} = 2k.$$

A f.g.m é dada por

$$m_X(t) = \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^{-r} = \left(1 - \frac{t}{1/2}\right)^{-k/2} = \left(\frac{1}{1-2t}\right)^{k/2}, \quad \text{para todo } t < \lambda = 1/2.$$

**Teorema 7** Se  $X_1, \dots, X_n$  são v.a. Normais independentes com médias  $\mu_i$  e variâncias  $\sigma_i^2$  (Note que não precisam ser i.i.d). Então,

$$U = \sum_{i=1}^k \left( \frac{X_i - \mu_i}{\sigma_i} \right)^2 \sim \chi_k^2.$$

# Variância amostral

**Prova:** Seja  $Z_{\{i\}} = \frac{X_{\{i\}} - \mu_{\{i\}}}{\sigma_{\{i\}}}$ , em que  $Z_{\{i\}} \sim N(0,1)$ . Assim,

$$\begin{array}{l} m_{\{U\}}(t) = E\left[ e^{tU} \right] = E\left[ e^{t \sum_{i=1}^k Z_{\{i\}}^2} \right] \\ = E\left[ \prod_{i=1}^k e^{t Z_{\{i\}}^2} \right] \\ = \underbrace{E\left[ e^{t Z_{\{i\}}^2} \right]}_{Z_{\{i\}}'s \text{ ind.}} \prod_{i=1}^k E\left[ e^{t Z_{\{i\}}^2} \right] \end{array}$$

# Variância amostral

Mas,

$$\begin{array}{l} E\left[ e^{t Z_i^2}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{t Z^2} (2\pi)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2} Z^2} dZ = \\ (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} (Z^2 - 2tZ^2)} dZ \quad \&\quad = \int_{-\infty}^{\infty} (2\pi)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2} (1-2t)Z^2} dZ \quad \&\quad = \frac{1}{\sqrt{1-2t}} \\ \displaystyle \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{1-2t} (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-2t}\right) Z^2\right\} dZ \quad \&\quad = \frac{1}{\sqrt{1-2t}} \\ \displaystyle \int_{-\infty}^{\infty} \left[2\pi \left(\frac{1}{1-2t}\right)\right]^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-2t}\right) Z^2\right\} dZ \quad \&\quad \end{array}$$



# Variância amostral

- A expressão de dentro da integral é a densidade da  $N(0,V)$ , onde  $V=\frac{1}{(1-2t)}$ .
- O resultado da integral é, portanto, igual a 1.
- Conclusão:

$E\left[ e^{t Z_i^2} \right] = m_{Z_i^2}(t) = \left( \frac{1}{1-2t} \right)^{\frac{1}{2}}, \text{ para } t < 1/2.$

**Nota:** O resultado acima determina que  $Z_i^2 \sim \chi_1^2$ , ou seja, se  $Z_i \sim N(0,1)$  temos  $Z_i^2 \sim \chi_1^2$ .

$m_U(t) = \prod_{i=1}^k E\left[ e^{t Z_i^2} \right] = \prod_{i=1}^k \left( \frac{1}{1-2t} \right)^{\frac{1}{2}} = \left( \frac{1}{1-2t} \right)^{\frac{k}{2}}$  Portanto,  $U \sim \chi_2^k$  finalizando a prova.

# Variância amostral

**Corolário 3** Se  $X_1, \dots, X_n$  são v.a. Normais independentes com médias  $\mu$  e variâncias  $\sigma^2$

$$U = \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi_k^2.$$

Em palavras, o **Teorema 7** diz que a soma de quadrados de variáveis aleatórias  $N(0,1)$  independentes possui distribuição Qui-Quadrado com grau de liberdade igual ao número de termos na soma.

# Variância amostral

**Teorema 8** Se  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$  é uma amostra aleatória da distribuição  $N(0,1)$ , então:

- i.  $\overline{Z} \sim N(0, 1/n)$ ;
- ii.  $\overline{Z}$  e  $\sum_{i=1}^n (Z_i - \overline{Z})^2$  são independentes;
- iii.  $\sum_{i=1}^n (Z_i - \overline{Z})^2 \sim \chi^2_{n-1}$ .

**Prova:** (i) é um caso especial do **Teorema 7**. A prova da parte (ii) será incompleta (somente o caso  $n = 2$ ). Se  $n=2$  temos  $\overline{Z} = (Z_1 + Z_2)/2$  e

$$\begin{array}{l} \sum_{i=1}^2 (Z_i - \overline{Z})^2 = (Z_1 - (Z_1 + Z_2)/2)^2 + (Z_2 - (Z_1 + Z_2)/2)^2 \\ = \frac{(Z_1 - Z_2)^2}{4} + \frac{(Z_2 - Z_1)^2}{4} = \frac{(Z_2 - Z_1)^2}{2} \end{array}$$

# Variância amostral

- Então,  $\overline{Z}$  é função de  $Z_1 + Z_2$  e  $\sum_{i=1}^2 (Z_i - \overline{Z})^2$  é função de  $Z_2 - Z_1$ .
- Para mostrar que  $\overline{Z}$  e  $\sum_{i=1}^2 (Z_i - \overline{Z})^2$  são independentes basta mostrar que  $Z_1 + Z_2$  e  $Z_2 - Z_1$  são independentes.

Veja que

$$m_{Z_1 + Z_2}(t_1) = E[e^{t_1(Z_1 + Z_2)}] = E[e^{t_1 Z_1} e^{t_1 Z_2}]$$

$$= \underbrace{E[e^{t_1 Z_1}]}_{Z_i \text{ ind.}} E[e^{t_1 Z_2}] = \exp\left\{-\frac{1}{2}t_1^2\right\} \exp\left\{-\frac{1}{2}t_1^2\right\} = \exp\left\{-t_1^2\right\}$$

Similarmente,

$$m_{Z_2 - Z_1}(t_2) = \exp\left\{-t_2^2\right\}$$

Se  $Z_1 \sim N(0,1)$ , então  $-Z_1 \sim N(0,1)$ .

# Variância amostral

Além disso, temos que a  $m_{\{Z_1+Z_2, Z_2-Z_1\}}(t_1, t_2)$

$$\begin{aligned} &= E\left[ e^{t_1(Z_1+Z_2)+t_2(Z_2-Z_1)} \right] = E\left[ e^{(t_1-t_2)Z_1} e^{(t_1+t_2)Z_2} \right] \\ &= \underbrace{E\left[ e^{(t_1-t_2)Z_1} \right]}_{\text{ind.}} E\left[ e^{(t_1+t_2)Z_2} \right] = \exp\left\{ \frac{1}{2}(t_1-t_2)^2 \right\} \exp\left\{ \frac{1}{2}(t_1+t_2)^2 \right\} \\ &= \exp\left\{ \frac{1}{2}(t_1-t_2)^2 + \frac{1}{2}(t_1+t_2)^2 \right\} = \exp\left\{ \frac{1}{2} \left[ (t_1^2 - 2t_1t_2 + t_2^2) + (t_1^2 + 2t_1t_2 + t_2^2) \right] \right\} \\ &= \exp\left\{ \frac{1}{2} (2t_1^2 + 2t_2^2) \right\} = \exp\left\{ t_1^2 + t_2^2 \right\} = m_{\{Z_1+Z_2\}}(t_1) m_{\{Z_2-Z_1\}}(t_2). \end{aligned}$$

Visto que a f.g.m. conjunta pode ser fatorada no produto das f.g.m.'s  $Z_1+Z_2$  e  $Z_2-Z_1$  são independentes.

# Variância amostral

iii. Para provar essa parte, iremos supor que  $\overline{Z}$  e  $\sum_{i=1}^n (Z_i - \overline{Z})^2$  para um  $n$  arbitrário.

Note que:

$$\begin{array}{l} \sum_{i=1}^n Z_i^2 = \sum_{i=1}^n (Z_i - \overline{Z} + \overline{Z})^2 \\ = \sum_{i=1}^n (Z_i - \overline{Z})^2 + 2\overline{Z} \underbrace{\sum_{i=1}^n (Z_i - \overline{Z})}_{n\overline{Z} - n\overline{Z} = 0} + n\overline{Z}^2 \\ = \sum_{i=1}^n (Z_i - \overline{Z})^2 + n\overline{Z}^2 \end{array}$$

# Variância amostral

Usando o resultado da parte (ii) temos que  $\overline{Z}$  e  $\sum_{i=1}^n (Z_i - \overline{Z})^2$  são independentes. Então:

$$\begin{array}{l} m_{\sum_{i=1}^n Z_i^2}(t) = m_{\sum_{i=1}^n (Z_i - \overline{Z})^2 + n \overline{Z}^2}(t) \underbrace{=}_{\text{ind.}} m_{\sum_{i=1}^n (Z_i - \overline{Z})^2}(t) m_{n \overline{Z}^2}(t) \end{array}$$

e

$$\begin{aligned} m_{\sum_{i=1}^n (Z_i - \overline{Z})^2}(t) &= \frac{m_{\sum_{i=1}^n Z_i^2}(t)}{m_{n \overline{Z}^2}(t)} = \frac{\overbrace{\left( \frac{1}{1-2t} \right)^{\frac{n}{2}} \chi_n^2}}{\underbrace{\left( \frac{1}{1-2t} \right)^{\frac{1}{2}} \chi_1^2}} = \left( \frac{1}{1-2t} \right)^{\frac{n-1}{2}}. \end{aligned}$$

O resultado da f.g.m. da distribuição  $\chi_{n-1}^2$ .

# Variância amostral

- O Teorema 8 foi definido para uma amostra aleatória da distribuição  $N(0,1)$ , entretanto se desejamos fazer inferência sobre  $\mu$  e  $\sigma^2$  devemos considerar uma amostra da  $N(\mu, \sigma^2)$ .
- Se  $X_1, X_2, \dots, X_n$  uma a.a. da  $N(\mu, \sigma^2)$ . Neste caso definimos  $Z_i = (X_i - \mu) / \sigma$ . (ver Teorema 8)
- Parte (i) do Teorema 8 se torna:
  1.  $\overline{Z} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu) / \sigma = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1/n)$



# Variância amostral

- Parte (ii) do Teorema 8 se torna:

2.  $\overline{X} = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma}$  e  $\sum_{i=1}^n (Z_i - \overline{Z})^2 = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{X_i - \mu}{\sigma} - \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma} \right]^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \overline{X})^2}{\sigma^2}$

são independentes, implicando que  $\overline{X}$  e  $\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2$  também são.

- Parte (iii) do Teorema 8 se torna

3.  $\sum_{i=1}^n (Z_i - \overline{Z})^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \overline{X})^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$

conforme mostrado em ii.

# Variância amostral

**Corolário 4** Considere  $X_1, X_2, \dots, X_n$  uma a.a. da  $N(\mu, \sigma^2)$ . Seja  $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2$  a variância amostral. Então,  $U = \frac{(n-1)}{\sigma^2} S^2 \sim \chi_{n-1}^2$ .

**Prova:** Considere a parte (iii) da extensão do **Teorema 8**.

Observação: Como  $S^2$  é uma função linear de  $U$  no corolário acima, a densidade de  $S^2$  pode ser obtida a partir da densidade de  $U$ .

$U \sim \chi_{n-1}^2$  e  $S^2$  é dada por uma função monótona de  $U$ .

$S^2 = \frac{\sigma^2}{n-1} U$ ,  $U = \frac{(n-1)}{\sigma^2} S^2$  e  $\frac{dU}{dS^2} = \frac{n-1}{\sigma^2}$

# Variância amostral

A função de densidade de  $S^2$  é dada por

$$\begin{array}{l} f_{S^2}(s^2) = f_U\left[\frac{(n-1)}{\sigma^2}s^2\right] \times \\ \left|\frac{dn-1}{\sigma^2}\right|, \quad \text{para } s^2 > 0 \quad \& \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}} \left[\frac{(n-1)}{\sigma^2}s^2\right]^{\frac{n-1}{2}-1} \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{(n-1)}{\sigma^2}s^2\right\} \\ \frac{1}{\sigma^2} I_{(0,\infty)}(s^2) \quad \& \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}} \left[\frac{(n-1)}{\sigma^2}\right]^{\frac{n-1}{2}} \left[\frac{(n-1)}{\sigma^2}s^2\right]^{-1} (s^2)^{\frac{n-1}{2}-1} \times \\ \& \frac{(n-1)}{\sigma^2} \exp\left\{-\frac{(n-1)}{2\sigma^2}s^2\right\} \times \\ I_{(0,\infty)}(s^2) \quad \& \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \left[\frac{(n-1)}{2\sigma^2}\right]^{\frac{n-1}{2}} (s^2)^{\frac{n-3}{2}} \exp\left\{-\frac{(n-1)}{2\sigma^2}s^2\right\} \times I_{(0,\infty)}(s^2) \end{array}$$

# Variância amostral

- Todos os resultados desta subseção são desenvolvidos para o caso de populações Normais.
- Pode ser provado que para nenhuma outra distribuição:
  1. A média e a variância amostral são independentemente distribuídas.
  2. A média amostral possui exatamente a distribuição Normal