# Inferência Estatística I

## Amostra aleatória

**Prof. Paulo Cerqueira Jr**
**Faculdade de Estatística - FAEST**
**Instituto de Ciências Exatas e Naturais - ICEN**

**https://github.com/paulocerqueirajr**

# Introdução

# Introdução

- Os avanços científicos são, na maioria das vezes, atribuídos aos experimentos realizados.
- Um pesquisador realiza o experimento e obtém dados.
- Baseado nos dados, algumas conclusões podem ser retiradas.
- Estas conclusões vão, geralmente, além dos que foi observado nos dados.
- Dessa forma, o pesquisador generaliza, partindo de um experimentos para os demais que são similares.
- Esta generalização é denominada de `Inferência`.

**Uma função da Estatística:**

Fornecer um conjunto de metodologias para realizar a inferência e medir o grau de incerteza dessa inferência, através da `teoria das probabilidades`.

# Introdução

## Exemplo 1

- Suponha um recepiente com 10 milhões de sementes de flores.
- Cada semente pode produzir flores brancas ou vermelhas.
- Pergunta-se: Qual a porcentagem de flores brancas que serão geradas?
- Para saber o resultado real, teríamos que plantar todas as sementes.
- Seria uma tarefa muito trabalhosa!
- Solução: Plantar algumas sementes, e baseando-se nos resultados podemos obter alguma informação para a porcentagem de flores brancas.

# População e amostra

**Definição 1 (População)** É um conjunto que contém todos os elementos do problema a ser discutido, com pelo menos uma característica em comum. Desejamos obter informação sobre esta população.

**Exemplo 2**

- Preços da carne em um mês na região metropolitana de Belém.
- Preços do pão em certo dia em Belém.
- Produção de leite por animal em uma fazenda.
- Queremos estudar a proporção de votos para um determinado candidato ao governo do Estado do Pará.
- Queremos estudar o grau de satisfação dos usuários de uma determinada operadora de telefonia celular.

# População e amostra

# População e amostra

**Definição 2 (Amostra aleatória - a.a)** Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma sequência de variáveis aleatórias com distribuição conjunta $f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n)$ que fatora como na seguinte igualdade:

$$f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n) = f_{X_1}(x_1) \times f_{X_2}(x_2) \times \cdots \times f_{X_n}(x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i),$$

em que $f(\cdot)$ é a função de probabilidade (f.p) ou função de densidade de probabilidade (f.d) para cada $X_i$ . Então, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ é uma amostra aleatória de tamanho $n$ retirada de uma população com p.d/f.d.

# População e amostra

**Exemplo 3** Imagine 10 milhões de sementes em um recepiente e a produção de flores brancas e vermelhas.

- `População:` Sementes dentro do recipiente.
- `Unidade experimental:` Uma semente.
- `Característica:` Flor branca ou vermelha.

- Não temos um valor numérico associado a cada elemento, mas podemos definir o seguinte tipo de resposta:

$$\text{Flor branca} = 1 \text{ e Flor vermelha} = 0.$$

`Variável aleatória:` $X_i = 1$ ou $X_i = 0$, para $i = 1, 2, \ldots, n$.

# Poupulação e amostra

- A variável aleatória $X_i$ é uma representação do valor numérico que a $i-$ésima unidade amostral irá assumir.
- Depois que a amostra $X_1, X_2, \ldots, X_n$ observada os valores serão conhecidos e denotados por $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
- Logo:

Suponha que $X$ pode assumir apenas os valores 0 ou 1 com probabilidades $1-\theta$ e $\theta$, respectivamente. Então, sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma a.a de $X \sim Ber(\theta)$, sua distribuição conjunta $P(X_1 = x_1; X_2 = x_2; \ldots; X_n = x_n)$ é dada por

$$= \theta^{x_1}(1-\theta)^{1-x_1} \times \theta^{x_2}(1-\theta)^{1-x_2} \times \cdots \times \theta^{x_n}(1-\theta)^{1-x_n}$$

$$= \theta^{x_1+x_2+\cdots+x_n}(1-\theta)^{(1-x_1)+(1-x_2)+\cdots+(1-x_n)}$$

$$= \theta^{\sum_{i=1}^n x_i}(1-\theta)^{\sum_{i=1}^n (1-x_i)}$$

$$= \theta^{\sum_{i=1}^n x_i}(1-\theta)^{(n-\sum_{i=1}^n x_i)}$$

# Estatísticas e Parâmetros

# Estatísticas e Parâmetros - Introdução

**Um dos problemas principais da Estatística envolve o seguinte:**

- Estudar uma população com f.p/f.d $f(\cdot \mid \theta)$, onde a forma da f.p/f.d é conhecida com parêmetro desconhecido $\theta$.
- Se $\theta$ fosse conhecido f.p/f.d estaria completamente especificada.

**Procedimento de inferência envolverá:**

- A obtenção de uma amostra aleatória $X_1, X_2, \ldots, X_n$ desta f.p/f.d.
- O uso de uma função $T(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ como estimativa para o parâmetro $\theta$ (desconhecido).

# Estatísticas

- O problema aqui consiste em determinar qual será a melhor função para estimar $\theta$.
- Iremos avaliar certas funções (funções amostrais) de uma amostra aleatória.

**Definição 3 (Estatísticas)** É uma função da amostra, $T(x) = f(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, representando uma característica da amostra.

**Importante:**

A formulação de uma estatística `não pode envolver quantidades desconhecidas`.

# Estatísticas

> Os exemplos mais comuns:

- Média amostral: $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.
- Variância amostral: $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$.
- Mediana amostral: $\tilde{X} = \mathrm{med}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.
- Mínimo amostral: $X_{(1)} = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.
- Máximo amostral: $X_{(n)} = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.
- Ponto médio amostral: $\frac{1}{2}(X_{(1)} + X_{(n)})$.

# Parâmetros

**Definição 4 (Parâmetro)** Uma parâmetro é uma medida (desconhecida) usada para descrever uma característica da população.

- As relação das estatísticas com seus respectivos parâmetros:

| **Medida** | **Estatística** | **Parâmetro** |
|---|---|---|
| Média | $\overline{X}$ | $\mu$ |
| Variância | $\hat{\sigma^2}$ | $\sigma^2$ |
| $N$ de elementos | $n$ | $N$ |
| Proporção | $\hat{\theta}$ | $\theta$ |

# Estatísticas e Parâmetros

**Exemplo 4** Considere uma variável aleatória observável com f.d:

- $f(x) = N\left[x \mid \mu, \sigma^2\right]$, com $\mu$ e $\sigma$ desconhecidos.
- Logo,

$$X - \mu \text{ e } X/\sigma \text{ são Estatísticas??}$$

- `Não são`, pois contém elementos desconhecidos.

- $X, X+3$ e $X^2 + \log X^2$ `são estatísticas`.

# Estatísticas e Parâmetros

**Exemplo 5** Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória com f.p/f.d $f(\cdot;\theta)$ então:

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \quad \text{e} \quad \frac{1}{2}\{\min(X_1,\ldots,X_n) + \max(X_1,\ldots,X_n)\}$$

`são exemplos` de estatísticas.

**Exemplo 6** Se $f(x;\theta) = N\left[x \mid \theta, 1\right]$, com $\theta$ desconhecido.

$$\overline{X}_n - \theta \quad \text{é uma Estatística?}$$

- `Não` é uma estatística, pois depende de $\theta$.

# Momentos amostrais

# Momentos amostrais

Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma a.a com f.p/f.d $f(\cdot)$. O r-ésimo momento amostral em relação à $0$ é definido por

$$M_r^{'} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - 0)^r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i)^r.$$

- Em particular, quando $r = 1$, temos a média amostral $\overline{X}$ ou $\overline{X}_n$, em que

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i).$$

O r-ésimo momento em relação à $\overline{X}_n$ é dado por

$$M_r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}_n\right)^r$$

# Momentos amostrais

> Momentos amostrais são exemplos de estatísticas!

**Teorema 1 (Momentos Amostrais)** Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma a.a com f.p/f.d $f(\cdot)$. O valor esperado do r-ésimo momento amostral (em relação à $0$) é igual ao r-ésimo momento populacional, isto é,

$$E(M_r^{'}) = \mu_r^{'}, \text{ se } \mu_r^{'} \text{ existir.}$$

- Temos que $\mu_r^{'} = E(X^r)$ é o r-ésimo momento populacional de uma população com f.p/f.d $f(x) = f_X(x)$.
- Além disso:

$$Var(M_r^{'}) = \frac{1}{n}\left[E(X^{2r}) - E^2(X^r)\right]$$
$$= \frac{1}{n}\left[\mu_{2r}^{'} - (\mu_r^{'})^2\right].$$

# Momentos amostrais

Demonstração:(cont.)

> A média:

$$E(M_r^{'}) = E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i)^r\right] = \frac{1}{n}E\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i)^r\right] =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E\left[(X_i)^r\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu_r^{'} = \mu_r^{'}.$$

> A variância:

$$Var(M_r^{'}) = Var\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i)^r\right] = \frac{1}{n^2}Var\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i)^r\right]$$

# Momentos amostrais

`Demonstração:(cont.)`

Supondo independência, temos

$$Var(M_r^{'}) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var\left[(X_i)^r\right] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\left[E(X_i)^{2r} - E^2\left(X_i^r\right)\right]$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\left[\mu_{2r}^{'} - (\mu_r^{'})^2\right] = \frac{1}{n}\left[\mu_{2r}^{'} - (\mu_r^{'})^2\right].$$

# Momentos amostrais

Quando $r = 1$, temos o seguinte corolário.

**Corolário 1** Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma a.a com f.p/f.d $f(\cdot)$ e se $\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i)$ é a média amostral, então,

$$E(\overline{X}_n) = \mu, \text{ e } Var(\overline{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

em que $\mu$ e $\sigma^2$ são a média e a variância de $f(\cdot)$.

# Momentos amostrais

- O Teorema 1 fornece a média e a variância, em termos de momentos populacionais, do r-ésimo momento amostral em relação a 0.
- Um resultado similar, porém mais complicado, pode ser derivado para a média e variância do r-ésimo momento amostral em relação a média amostral.
- Considere $r = 2$, tal que $M_2 = \dfrac{1}{n} \sum_i (X_i - \overline{X})^2$.
- $M_2$ as vezes é chamado de `variância amostral`.
- Entretanto, definiremos a variância amostral de outra forma.

# Momentos amostrais

**Definição 5** Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma a.a com f.p/f.d $f(\cdot)$,

$$S_n^2 = S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_i (X_i - \overline{X})^2, \text{ para } n > 1,$$

é definida como **variância amostral**.

> A razão para considerarmos $S^2$ ao invés de $M_2$ como variância é devido
>
> $$E(S^2) = \sigma^2 \text{ e } E(M_2) \neq \sigma^2$$

- Revisando: $\mu_r^{'} = E(X^r)$ é o r-ésimo momento de $X$ (em relação a 0).

# Momentos amostrais

**Definição 6 (Momento central)** O r-ésimo momento central de uma variável aleatória $X$ com relação ao ponto $\mathbf{a}$ é definido por

$$\mu_r = E\left[(X - \mathbf{a})^r\right]$$

- Se $\mathbf{a} = E(X) = \mu$, temos $\mu_r = E\left[(X - \mathbf{a})^r\right]$, então

$$\mu_1 = E\left[(X - \mu)^1\right] = 0 \quad \text{e} \quad \mu_2 = E\left[(X - \mu)^2\right] = Var(X) = \sigma^2.$$

**Teorema 2** Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma a.a com f.p/f.d $f(\cdot)$ e seja

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_i (X_i - \overline{X})^2,$$

Então,

$$E(S^2) = \sigma^2 \quad \text{e} \quad Var(S^2) = \frac{1}{n}\left[\mu_4 - \frac{n-3}{n-1}\sigma^2\right].$$

# Momentos amostrais

**Prova:** Para $E(S^2) = \sigma^2$, temos que $\sigma^2 = E\left[(X-\mu)^2\right]$ e $\mu_r = E\left[(X-\mu)^r\right]$. Note que,

$$\begin{aligned}
\sum_i (X_i - \mu)^2 &= \sum_i \left(X_i + \overline{X} - \overline{X} - \mu\right)^2 \\
&= \sum_i \left[\left(X_i - \overline{X}\right)^2 - 2\left(X_i - \overline{X}\right)\left(\overline{X} - \mu\right) + \left(\overline{X} - \mu\right)^2\right] \\
&= \sum_i \left(X_i - \overline{X}\right)^2 - 2\left(\overline{X} - \mu\right)\sum_i \left(X_i - \overline{X}\right) + n\left(\overline{X} - \mu\right)^2 \\
&= \sum_i \left(X_i - \overline{X}\right)^2 - 2\left(\overline{X} - \mu\right)\underbrace{\left(n\overline{X} - n\overline{X}\right)}_{0} + n\left(\overline{X} - \mu\right)^2 \\
&= \sum_i \left(X_i - \overline{X}\right)^2 + n\left(\overline{X} - \mu\right)^2
\end{aligned}$$

# Momentos amostrais

**Prova (cont.):**

Assim,

$$
\begin{aligned}
E(S^2) &= E\left[\frac{1}{n-1}\sum_i (X_i - \overline{X})^2\right] \\
&= E\left[\frac{1}{n-1}\sum_i (X_i - \mu)^2 - n\left(\overline{X} - \mu\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{n-1} E\left[\sum_i (X_i - \mu)^2 - n\left(\overline{X} - \mu\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{n-1} E\left[\sum_i (X_i - \mu)^2\right] - \frac{n}{n-1} E\left[\left(\overline{X} - \mu\right)^2\right] \\
&= \frac{n}{n-1}\sigma^2 - \frac{n}{n-1} Var(\overline{X}) \\
&= \frac{n}{n-1}\sigma^2 - \frac{n}{n-1}\frac{\sigma^2}{n} \\
&= \sigma^2
\end{aligned}
$$

# Momentos amostrais

- De forma similar,

$$
\begin{aligned}
E(M_2) &= E\left[\frac{1}{n}\sum_i (X_i - \overline{X})^2\right] \\
&= \frac{1}{n}\sigma^2 - \frac{n}{n}Var(\overline{X}) \\
&= \sigma^2\left(\frac{n-1}{n}\right)
\end{aligned}
$$

- Momentos amostrais são exemplos de **exemplos de estatísticas** que podem ser usados para estimar quantidades populacionais.
- Por exemplo:
  - $M_r^{'}$ para estimar $\mu_r^{'}$;
  - $\overline{X}$ para estimar $\mu$;
  - $S^2$ para estimar $\sigma^2$.

# Função de verossimilhança

# Função de verossimilhança

**Definição 7 (Função de verossimilhança)** A f.p/p.d.f conjunta é denominada função de verossimilhança de $\theta$, correspondente a amostra observada $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e será denotada por

$$L(\theta \mid \mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i \mid \theta) = f(x_1 \mid \theta) \times f(x_2 \mid \theta) \times \cdots \times f(x_n \mid \theta).$$

Dada a amostra $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, podemos encontrar o `ponto mais verossímil` para $\theta$.

# Função de verossimilhança

**Exemplo 7 (Caso discreto)** Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma a.a de $X \sim Pois(\theta)$. Temos que a função de verossimilhança é dada por

$$
\begin{aligned}
L(\theta \mid \mathbf{x}) &= \prod_{i=1}^{n} \frac{\exp\{-\lambda\}\lambda^{x_i}}{x_i!} \\
&= \frac{\exp\{-\lambda\}\lambda^{x_1}}{x_1!} \times \frac{\exp\{-\lambda\}\lambda^{x_2}}{x_2!} \times \cdots \times \frac{\exp\{-\lambda\}\lambda^{x_n}}{x_n!} \\
&= \frac{\exp\{-n\lambda\}\lambda^{\sum_{i=1}^{n} x_i}}{\prod_{i=1}^{n} x_i!}.
\end{aligned}
$$

# Função de verossimilhança

**Exemplo 8 (Caso contínuo)** Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma a.a de $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Temos que a função de verossimilhança é dada por

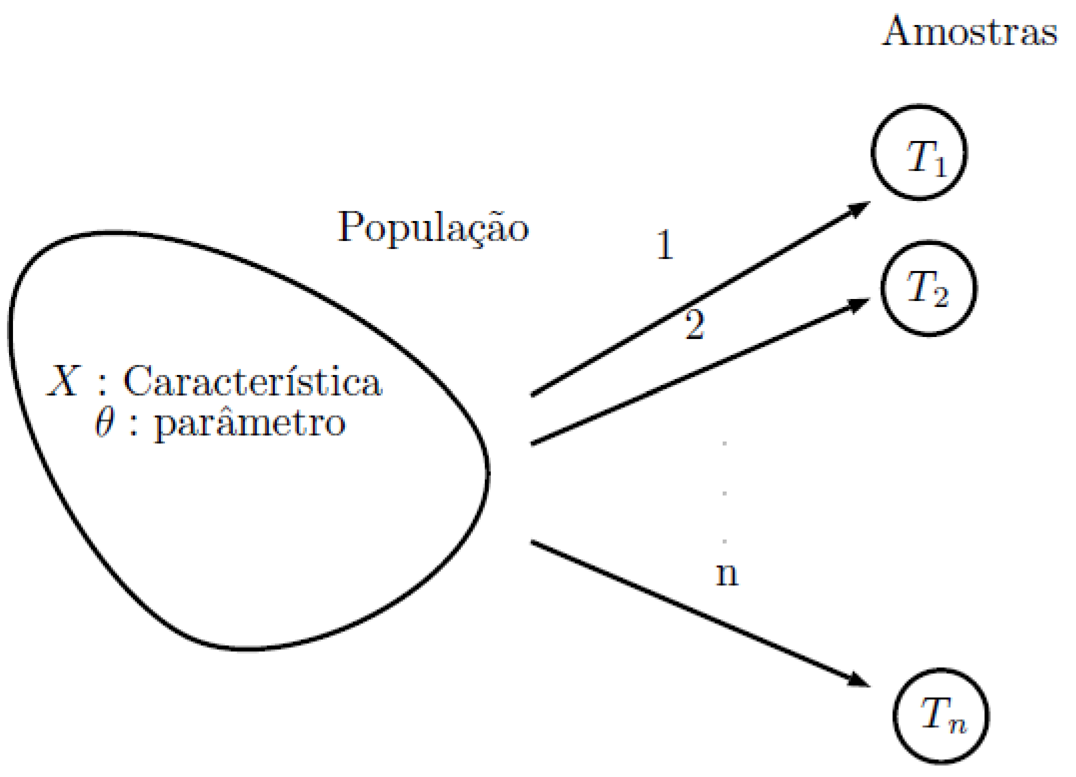
$$
\begin{aligned}
&= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{ \frac{1}{2\sigma^2} (x_i - \mu)^2 \right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{ \frac{1}{2\sigma^2} (x_1 - \mu)^2 \right\} \times \cdots \times \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{ \frac{1}{2\sigma^2} (x_n - \mu)^2 \right\} \\
&= \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \right)^{n} \exp\left\{ \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \right\} \\
&= \left( \frac{1}{2\pi\sigma^2} \right)^{n/2} \exp\left\{ \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \right\} \\
&= \left( 2\pi\sigma^2 \right)^{-n/2} \exp\left\{ \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \right\}
\end{aligned}
$$

# Distribuição amostral

# Introdução

Para este caso temos:

- $X$ : Variável de interesse;
- $\theta$ : parâmetro de interesse;
- $T = f(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ Função da amostra que vai fornecer informação sobre $\theta$.




$T$ é uma variável aleatória.

Pergunta: Qual a distribuição de $T$ quando $X_1, X_2, \ldots, X_n$ assume valores observados?

# Distribuição amostral da média

# Distribuição amostral da média

**Exemplo 9** Suponha que selecionamos todas as amostras de tamanho 2, com reposição, da população $\{1, 3, 5, 5, 7\}$

| $X$ | **1** | **3** | **5** | **7** |
|---|---|---|---|---|
| $P(X = x)$ | 1/5 | 1/5 | 2/5 | 1/5 |

- Encontrar a distribuição conjunta da v.a. $(X_1, X2)$, sendo $X_1$ sendo o número selecionado na primeira extração e $X_2$ o número da segunda.
- Encontre a distribuição de $\overline{X} = \dfrac{X_1 + X_2}{2}$.

# Distribuição amostral da média

| Combinação | Prob. | $X_1$ | $X_2$ | $\overline{X}$ |
|---|---|---|---|---|
| $(1, 1)$ | 1/25 | 1 | 1 | 1 |
| $(1, 3)$ | 1/25 | 1 | 3 | 2 |
| $(1, 5)$ | 2/25 | 1 | 5 | 3 |
| $(1, 7)$ | 1/25 | 1 | 7 | 4 |
| $(3, 1)$ | 1/25 | 3 | 1 | 2 |
| $(3, 3)$ | 1/25 | 3 | 3 | 3 |
| $(3, 5)$ | 2/25 | 3 | 5 | 4 |
| $(3, 7)$ | 1/25 | 3 | 7 | 5 |
| $(5, 1)$ | 2/25 | 5 | 1 | 3 |
| $(5, 3)$ | 4/25 | 5 | 3 | 4 |
| $(5, 5)$ | 2/25 | 5 | 5 | 5 |
| $(5, 7)$ | 1/25 | 5 | 7 | 6 |
| $(7, 1)$ | 1/25 | 5 | 7 | 4 |
| $(7, 3)$ | 1/25 | 5 | 7 | 5 |
| $(7, 5)$ | 1/25 | 5 | 7 | 6 |
| $(7, 7)$ | 1/25 | 5 | 7 | 7 |

Distribuição conjunta:

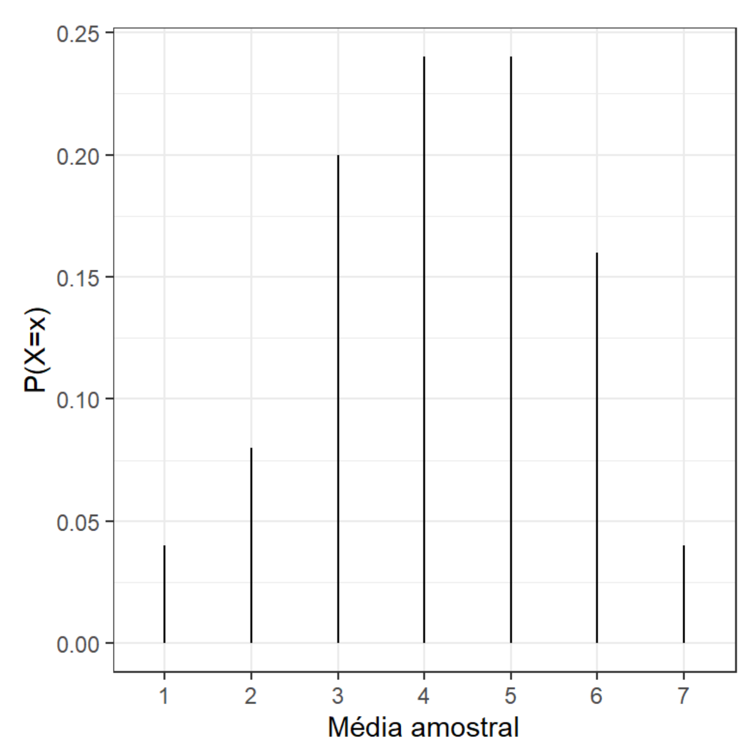
| $X_1/X_2$ | **1** | **3** | **5** | **7** | **Total** |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1/25 | 1/25 | 2/25 | 1/25 | 1/5 |
| 3 | 1/25 | 1/25 | 2/25 | 1/25 | 1/5 |
| 5 | 2/25 | 2/25 | 4/25 | 2/25 | 2/5 |
| 7 | 1/25 | 1/25 | 2/25 | 1/25 | 1/5 |
| Total | 1/5 | 1/5 | 2/5 | 1/5 | Total |

# Distribuição amostral da média

## Distribuição amostral da média $\overline{X}$:

| $\overline{X}$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(\overline{X}=\overline{x})$ | $\frac{1}{25}$ | $\frac{2}{25}$ | $\frac{5}{25}$ | $\frac{6}{25}$ | $\frac{6}{25}$ | $\frac{4}{25}$ | $\frac{1}{25}$ |

```r
require(ggplot2)
mx     <- c(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)
pmx    <-c(1/25, 2/25, 5/25, 6/25, 6/25, 4/25, 1/25)
dados <- data.frame(mx, pmx)
ggplot(data=dados, aes(x = factor(mx), ymin=0, ymax=pmx))+geom_linerange()+
  scale_x_discrete(breaks=1:7)+ylab("P(X=x)")+
  xlab("Média amostral") + theme_bw()
```



# Distribuição amostral da média

- O primeiro momento amostral é a média definida como:

$$\overline{X} = \overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i)\,.$$

onde $X_1, X_2, \ldots, X_n$ é uma amostra aleatória com f.p/f.d $f(\cdot)$.

- $\overline{X}$ é função das v.a $X_1, X_2, \ldots, X_n$ e, portanto a distribuição pode ser encontrada teoricamente.
- Pode ser útil pensar na média amostral $\overline{X}$ como uma estimativa da média $\mu$ da f.p/f.d $f(\cdot)$ a partir de qual amostra foi selecionada.

> Um dos objetivos da amostragem é estimar $\mu$ a partir de $\overline{X}$.

# Distribuição amostral da média

**Teorema 3** Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma a.a com f.p/f.d $f(\cdot)$, média $\mu$ e variância $\sigma^2$. Considere:

$$\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i) \, .$$

Então, $E(\overline{X}) = \mu_{\overline{X}} = \mu$ e $Var(\overline{X}) = \sigma^2_{\overline{X}} = \dfrac{\sigma^2}{n}$.

$E(\overline{X}) = \mu$: diz que em média $\overline{X}$ é igual ao parâmetro $\mu$ sendo estimado ou que a distribuição de $\overline{X}$ está centrada em $\mu$.

$Var(\overline{X}) = \dfrac{\sigma^2}{n}$: diz que a dispersão dos valoers de $\overline{X}$ em torno de $\mu$ é pequena para amostras grandes em comparação com tamanhos menores.

# Teoremas de convergência

# Teoremas de convergência

- Para amostras grandes, os valores de $\overline{X}$ (que são usados para estimar $\mu$) tendem a estar mais concentrados de $\mu$ do que em amostras pequenas.
- Esta noção será definida pela **Lei dos Grandes Números**
- Seja $E(X) = \mu$ para a f.p/f.d $f(\cdot)$. Desejamos estimar $\mu$.
- De maneira não rigorosa, $E(X)$ é a média de um número infinito de valores da variável aleatória $X$.
- Em qualquer problema real podemos observar apenas um número finito de valores da variável aleatória $X$.
- Questão: Usando apenas um número finito de valores de $X$ (uma amostra aleatória de tamanho $n$) pode ser feita qualquer inferência confiável sobre $E(X)$? **A resposta é sim**.
- Usaremos isso através da Lei Fraca dos Grandes Números.

# Teoremas de convergência

**Teorema 4 (Lei fraca dos Grandes Números)** Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma a.a de tamanho $n$ de uma população com variável $X$, com média $E(X) = \mu$ e $Var(X) = \sigma^2 < \infty$. Sejam, $\epsilon > 0$ e $0 < \delta < 1$. Se, $n > \dfrac{\sigma^2 \epsilon^2}{\delta}$, então,

$$P(\mid \overline{X}_n - \mu \mid < \epsilon) \geq 1 - \delta,$$

ou seja, $\overline{X}_n$ converge em probabilidade para $\mu$.

# Teorema de convergência

Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma a.a. de $X \sim Ber(0.5)$. Observe que,

$$X_i = \begin{cases} 0, & \text{fracasso} \\ 1, & \text{sucesso} \end{cases}, i = 1, 2, \ldots, n.$$

A proporção amostral é determinada por

$$\hat{p}_n = \overline{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

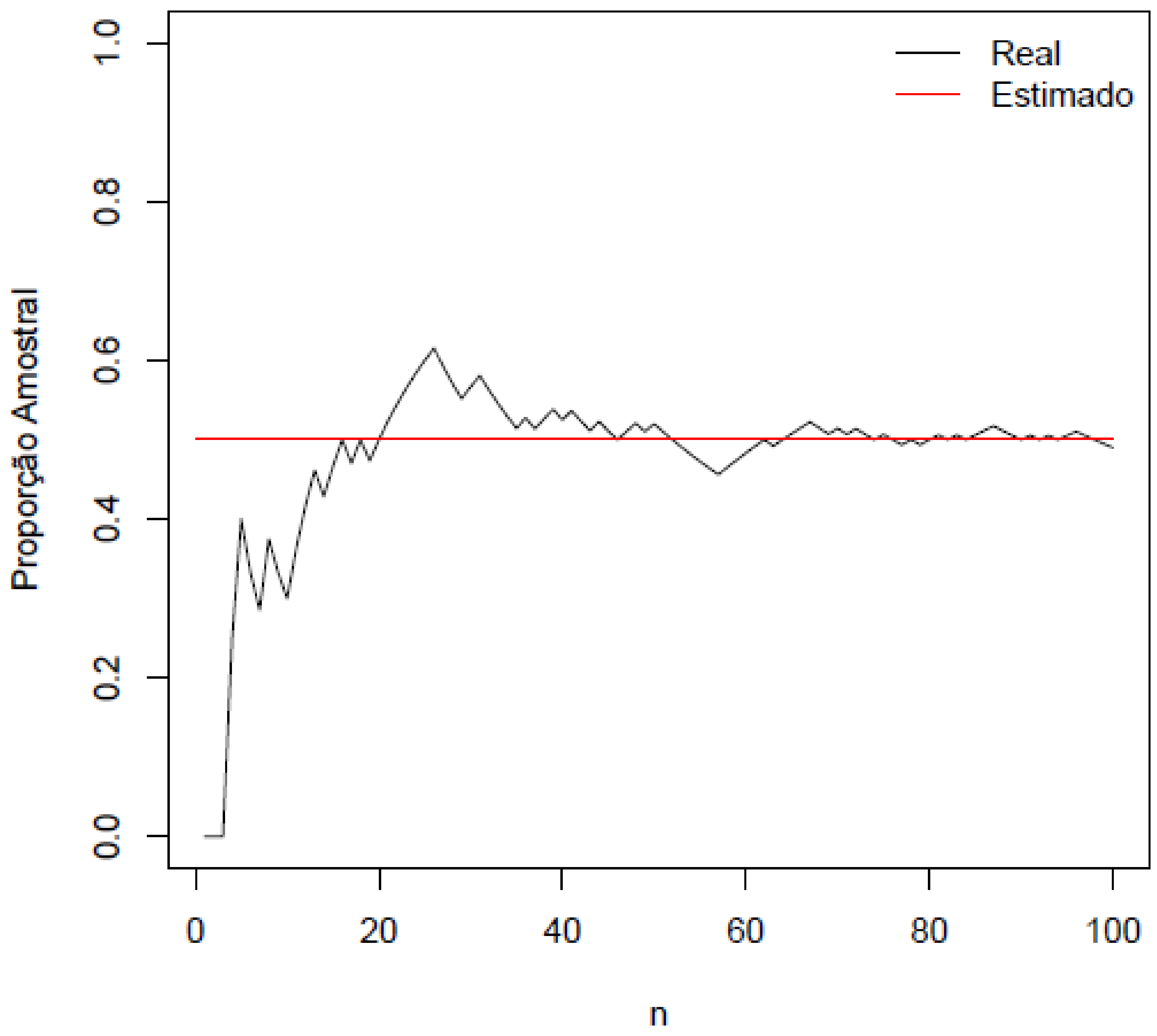
Para $n = 1 \quad \Rightarrow \quad \hat{p}_1 = \dfrac{X_1}{1}.$

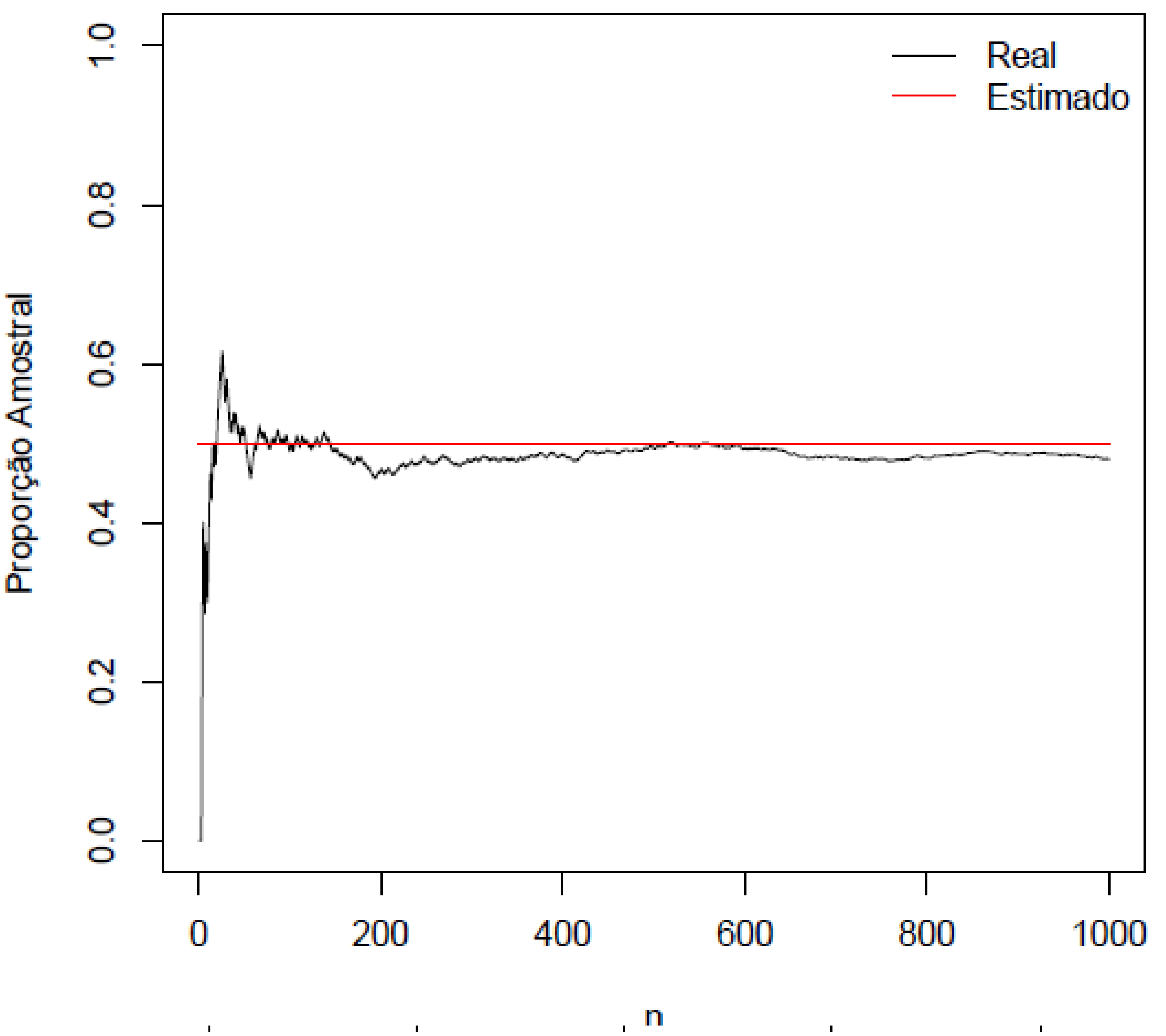
Para $n = 2 \quad \Rightarrow \quad \hat{p}_2 = \dfrac{X_1 + X_2}{2}.$

$\vdots$

Para $n = n \quad \Rightarrow \quad \hat{p}_n = \dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}.$

# Teorema de convergência



# Teorema central do limite

> O Teorema Central do Limite é um dos mais importantes resultados em toda área de Probabilidade e Estatística. Ele nos diz aproximadamente como a **média amostral** é distribuída.

**Teorema 5 (Teorema Central do Limite - TCL)** Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma sequência de v.a.'s independentes com $E(X_i) = \mu_i$ e $Var(X_i) = \sigma^2) < \infty, i = 1, 2, \ldots, n$. Tome $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, então, sob determinadas condições gerais,

$$Z_n = \frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{Var(S_n)}} = \frac{S_n - \sum_{i=1}^{n} \mu_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2}} \to N(0, 1).$$

A distribuição de $Z_n$ se aproxima da $N(0, 1)$ quando $n \to \infty$.

O Teorema 5 nos diz que a ditribuição limite de $Z_n$ ($S_n$ padronizado) será a distribuição $N(0, 1)$.

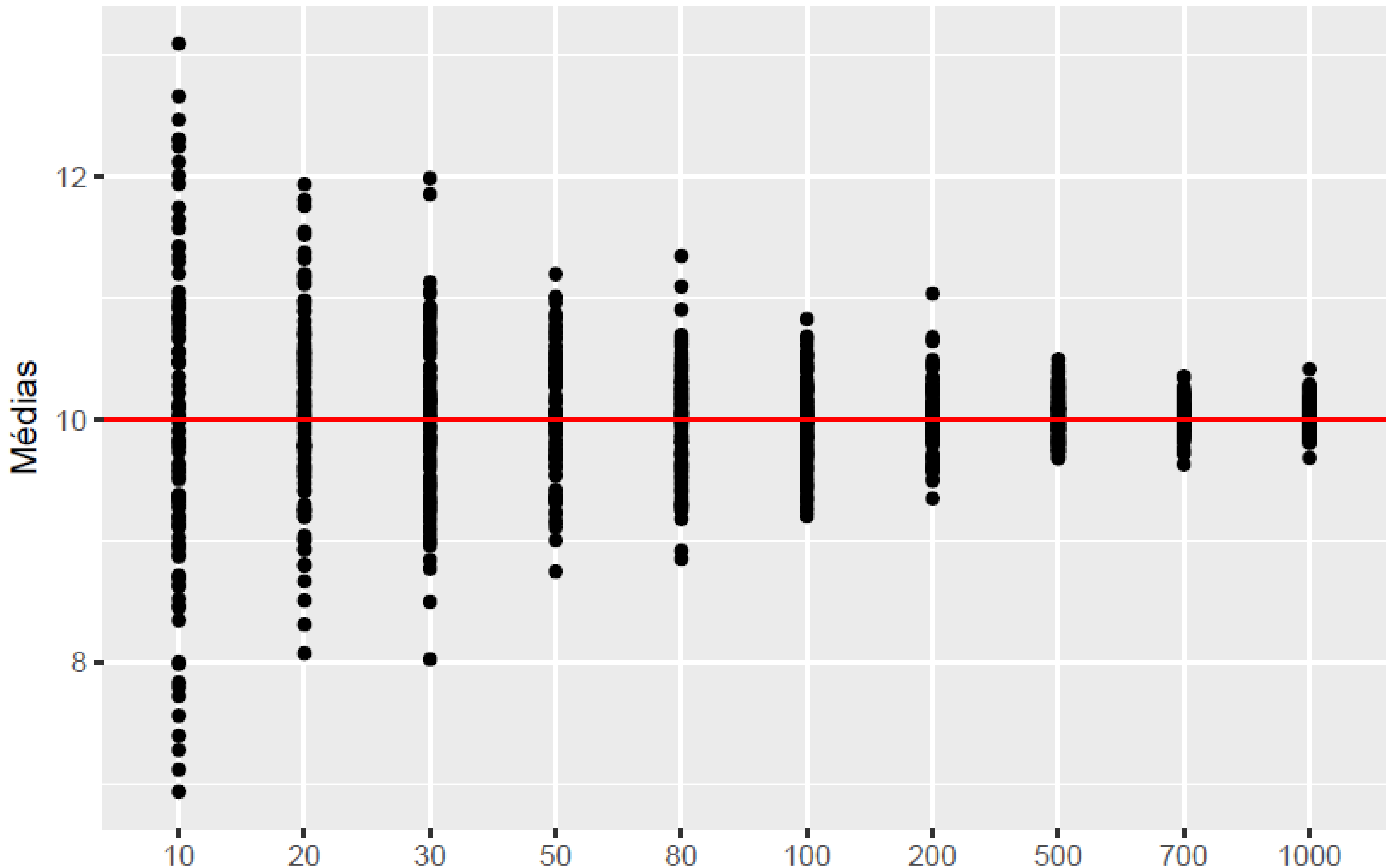
# Distribuição amostral da média

**Corolário 2** Seja $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ uma a.a. de $X$ com $E(X) = \mu$ e $Var(X) = \sigma^2 < \infty$. Então, para $n \to \infty$,

$$Z_n = \frac{\overline{X}_n - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \to N(0,1).$$

- Em outras palavras $\overline{X}_n$ é assintoticamente distribuído como uma Normal com média $\mu$ e variância $\sigma^2/n$.
- Um aspecto importante sobre o Teorema 5 é o fato de que nada é dito sobre a forma da **f.p ou f.d original**. Qualquer que seja a distribuição, dado que possui variância **finita**, a média amostral terá **aproximadamente** distribuição Normal para amostras grandes.

# Representação do TCL graficamente



# Algumas distribuições exatas

- Se $X \sim Ber(\theta)$, então:

$$P(\bar{X} = \bar{x}_n) = \backslash\mathrm{mathchoice}\left(((({n \atop n\bar{x}_n} \backslash\mathrm{mathchoice}\right))))\theta^{n\bar{x}_n}(1-\theta)^{n-n\bar{x}_n}, \bar{x}_n = 0, 1/n$$

- Se $X \sim Pois(\theta)$, então:

$$P(\bar{X} = \bar{x}_n) = \frac{e^{-n\theta}\theta^{n\bar{x}_n}}{n\bar{x}_n!}, \bar{x}_n = 0, 1/n, 2/n, \ldots$$

- Se $X \sim Normal(\mu, \sigma^2)$, então:

$$\bar{X}_n \sim N(\mu, \sigma^2).$$

- Se $X \sim Exp(\theta)$, então:

$$\bar{X}_n \sim Gama(n, n\theta).$$

# Distribuição amostral da proporção

- Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma a.a. de $X \sim Ber(\theta)$.
- Em que $\theta$ representa a proporção de elementos com uma determinada característica na população.
- Temos que

$$E(X_i) = \theta \quad \text{e} \quad Var(X_i) = \theta(1-\theta).$$

- Seja $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, então a proporção amostral é definida por

$$\hat{p} = \frac{S_n}{n} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} = \bar{X}.$$

# Distribuição amostral da proporção

`Distribuição exata:`

- Temos que $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n \sim Bin(n, \theta)$, então

$$P\left(\hat{p} = \frac{k}{n}\right) = \binom{n}{k}\theta^k(1-\theta)^{n-k}, k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

`Distribuição aproximada pelo TCL:`

- Temos que $\hat{p} = \dfrac{S_n}{n} = \dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} = \bar{X}_n.$, então

$$\hat{p} \sim N\left(\theta, \frac{\theta(1-\theta)}{n}\right).$$

# Distribuição amostral de estatísticas de ordem

# Estatísticas de ordem amostrais

- Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sendo uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. com função de distribuição $F(\cdot)$.
- Podemos reordenar (de forma crescente) essa sequência da seguinte forma

$$X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \cdots \leq X_{(n)}.$$

- No caso em que $F$ seja contínua, temos que

$$X_{(1)} < X_{(2)} < \cdots < X_{(n)}.$$

- Uma vez que $P(X_i = X_j) = 0$ para todo $i \neq j$, para variáveis aleatórias contínuas.

# Estatísticas de ordem amostrais

- Para uma sequência de v.a's $X_1, X_2, \ldots, X_n$ i.i.d., $X_{(k)}$ é denominada de $k-$ésima estatística de ordem.
- O mínimo é denotado por $X_{(1)}$:

$$X_{(1)} = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n).$$

- De maneira similar, o máximo é denotado por $X_{(n)}$:

$$X_{(n)} = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n).$$

# Estatísticas de ordem amostrais

Seja $g(x)$ e $G(X)$ as funções de densidade (probabilidade) e distribuição de $X$, respectivamente.

- Para o $X_{(1)}$:
  - A função de distribuição é dada por

$$F_{X_{(1)}}(x) = 1 - (1 - G(x))^n.$$

- A função de densidade é dada por

$$f_{X_{(1)}}(x) = \frac{d}{dx} F_{X_{(1)}}(x) = ng(x)(1 - G(x))^{(n-1)}.$$

# Estatísticas de ordem amostrais

Seja $g(x)$ e $G(X)$ as funções de densidade (probabilidade) e distribuição de $X$, respectivamente.

- Para o $X_{(n)}$:
  - A função de distribuição é dada por

$$F_{X_{(n)}}(x) = G(x)^n.$$

- A função de densidade é dada por

$$f_{X_{(n)}}(x) = \frac{d}{dx} F_{X_{(n)}}(x) = ng(x)G(x)^{(n-1)}.$$

# Amostrando da Normal - Média amostral

# Média amostral

- Esta seção lida com propriedades das quantidades amostrais provenientes de uma população Normal.
- A distribuição Normal tem papel importante nos estudos estatísticos.
- Muitas populações seguem a distribuição Normal com um bom grau de aproximação.
- Modelos estatísticos utilizando a distribuição Normal são amplamente considerados na literatura científica.
- Amostrar de uma população Normal leva a muitas propriedades úteis e também a muitas distribuições amostrais conhecidas.

## Média amostral e a população Normal:

- A média amostral é uma das mais simples funções de uma amostra aleatória.
- Para uma amostra aleatória da distribuição Normal, a distribuição exata da média amostral também é Normal (para qualquer tamanho amostral n, ou seja, não precisamos do TCL para dar suporte a esta afirmação).

# Média amostral

**Teorema 6** Seja $\overline{X}_n = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i)$ a média amostral de uma amostra aleatória $X_1, \ldots, X_n$ obtida da distribuição Normal com média $\mu$ e variância $\sigma^2$. Então, $\overline{X}_n \sim N\left(\mu, \sigma^2/n\right)$.

**Prova:** Usaremos a função geradora de momentos (f.g.m),

$$
\begin{aligned}
m_{\overline{X}_n}(t) &= E\left(e^{t\overline{X}_n}\right) &&= E\left[\exp\left\{\frac{t}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right\}\right] \\
&= E\left[\prod_{i=1}^{n}\exp\left\{\frac{t}{n}X_i\right\}\right] &&\underbrace{=}_{X_i^{'} s\ ind.} \prod_{i=1}^{n} E\left[\exp\left\{\frac{t}{n}X_i\right\}\right] \\
&= \prod_{i=1}^{n} m_{X_i}(t/n) &&= \prod_{i=1}^{n}\exp\left\{\mu\frac{t}{n} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{t^2}{n^2}\right\} \\
&= \exp\left\{\mu t + \frac{\sigma^2/n}{2}t^2\right\}. &&\Rightarrow \quad \text{f.g.m da } N\left(\mu, \sigma^2/n\right)
\end{aligned}
$$

# Média amostral

- Dado que temos a distribuição exata de $\overline{X}_n$ quando estimamos $\mu$ com $\overline{X}_n$, seremos capazes de calcular, por exemplo, a probabilidade exata de que nosso estimador $\overline{X}_n$ esteja dentro de uma distância fixada do parâmetro desconhecido $\mu$.

# Amostrando da Normal - Variância amostral

# Variância amostral

- A distribuição Normal possui dois parâmetros desconhecidos $\mu$ e $\sigma^2$.
- Vimos anteriormente a distribuição amostral de $\overline{X}_n$ que estima $\mu$.
- Procuremos agora pela distribuição de

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2,$$

que estima o parâmetro $\sigma^2$.

- A distribuição Qui-Quadrado desempenha um papel fundamental na determinação da distribuição de $S^2$.

# Variância amostral

**Definição 8 (Distribuição Qui-Quadrado)** Seja $X$ uma v.a. com f.d

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(k/2)} \left(\frac{1}{2}\right)^{k/2} x^{k/2-1} \exp\left\{-\frac{1}{2}x\right\} \times I_{(0,\infty)}(x),$$

então dizemos que $X$ tem distribuição Qui-Quadrado com $k$ graus de liberdade ($k$ é um número inteiro positivo).

`Notação:` $\chi^2_k$ = Qui-Quadrado com $k$ graus de liberdade.

- A densidade da Qui-Quadrado é um caso particular da densidade $Gama(r, \lambda)$, onde $r = k/2$ e $\lambda = 1/2$.
- Se $X \sim Ga(r, \lambda)$ temos $f(x) = \dfrac{\lambda^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{\lambda x}, I_{(0,\infty)}(x)$.
- Fazendo $r = k/2$ e $\lambda = 1/2$, tem-se na densidade definida anteriormente.

# Variância amostral

Temos também que:

$$E(X) = \frac{r}{\lambda} = \frac{k/2}{1/2} = k \quad \text{e} \quad Var(X) = \frac{r}{\lambda^2} = \frac{k/2}{1/2^2} = 2k.$$

A f.g.m é dada por

$$m_X(t) = \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^{-r} = \left(1 - \frac{t}{1/2}\right)^{-k/2} = \left(\frac{1}{1-2t}\right)^{k/2}, \quad \text{para todo} \quad t < \lambda = 1/2.$$

**Teorema 7** Se $X_1, \ldots, X_n$ são v.a. Normais independentes com médias $\mu_i$ e variâncias $\sigma_i^2$ (Note que não prescisar ser i.i.d). Então,

$$U = \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{X_i - \mu_i}{\sigma_i}\right)^2 \sim \chi_k^2.$$

# Variância amostral

`Prova:` Seja $Z_i = \dfrac{X_i - \mu_i}{\sigma_i}$, em que $Z_i \sim N(0,1)$. Assim,

$$\begin{aligned} m_U(t) &= E\left[e^{tU}\right] &=& \quad E\left[e^{t\sum_{i=1}^{k} Z_i^2}\right] \\ &= E\left[\prod_{i=1}^{k} e^{tZ_i^2}\right] & \underbrace{=}_{Z_i' sind.} & \quad \prod_{i=1}^{k} E\left[e^{tZ_i^2}\right]. \end{aligned}$$

# Variância amostral

Mas,

$$
\begin{aligned}
E\left[e^{tZ_i^2}\right] &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tZ^2}(2\pi)^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}Z^2}dZ = \int_{-\infty}^{\infty}(2\pi)^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}(Z^2-2tZ^2)}dZ \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}(2\pi)^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}(1-2t)Z^2}dZ \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-2t}}\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{1-2t}(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\left(\frac{1}{(1-2t)}\right)}Z^2\right\}dZ \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-2t}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[2\pi\left(\frac{1}{(1-2t)}\right)\right]^{-\frac{1}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\left(\frac{1}{(1-2t)}\right)}Z^2\right\}dZ
\end{aligned}
$$

# Variância amostral

- A expressão de dentro da integral é a densidade da $N(0, V)$, onde $V = \frac{1}{(1-2t)}$.
- O resultado da integral é, portanto, igual a $1$.
- Conclusão:

$$E\left[e^{tZ_i^2}\right] = m_{Z_i^2}(t) = \left(\frac{1}{1-2t}\right)^{\frac{1}{2}}, \text{ para } t < 1/2.$$

`Nota:` O resultado acima determina que $Z_i^2 \sim \chi_1^2$, ou seja, se $Z_i \sim N(0,1)$ temos $Z_i^2 \sim \chi_1^2$.

$$m_U(t) = \prod_{i=1}^{k} E\left[e^{tZ_i^2}\right] = \prod_{i=1}^{k}\left(\frac{1}{1-2t}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{1-2t}\right)^{\frac{k}{2}}$$

Portanto, $U \sim \chi_2^k$ finalizando a prova.

# Variância amostral

**Corolário 3** Se $X_1, \ldots, X_n$ são v.a. Normais independentes com médias $\mu$ e variâncias $\sigma^2$

$$U = \sum_{i=1}^{k} \frac{(X_i - \mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi_k^2.$$

Em palavras, o Teorema 7 diz que a soma de quadrados de variáveis aleatórias N(0,1) independentes possui distribuição Qui-Quadrado com grau de liberdade igual ao número de termos na soma.

# Variância amostral

**Teorema 8** Se $Z_1, Z_2 \ldots, Z_n$ é uma amostra aleatória da distribuição $N(0,1)$, então:

i. $\overline{Z} \sim N(0, 1/n)$;

ii. $\overline{Z}$ e $\sum_{i=1}^{n}(Z_i - \overline{Z})^2$ são independentes;

iii. $\sum_{i=1}^{n}(Z_i - \overline{Z})^2 \sim \chi^2_{n-1}$.

`Prova:` (i) é um caso especial do Teorema 7. A prova da parte (ii) será incompleta (somente o caso $n = 2$). Se $n = 2$ temos $\overline{Z} = (Z_1 + Z_2)/2$ e

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{2}(Z_i - \overline{Z})^2 &= (Z_1 - (Z_1 + Z_2)/2)^2 + (Z_2 - (Z_1 + Z_2)/2)^2 \\
&= \frac{(Z_1 - Z_2)^2}{4} + \frac{(Z_2 - Z_1)^2}{4} = \frac{(Z_2 - Z_1)^2}{2}
\end{aligned}$$

# Variância amostral

- Então, $\overline{Z}$ é função de $Z_1 + Z_2$ e $\sum_{i=1}^{2}(Z_i - \overline{Z})^2$ é função de $Z_2 - Z_1$.
- Para mostrar que $\overline{Z}$ e $\sum_{i=1}^{2}(Z_i - \overline{Z})^2$ são independentes basta mostrar que $Z_1 + Z_2$ e $Z_2 - Z_1$ são independentes.

Veja que

$$
\begin{aligned}
m_{Z_1+Z_2}(t_1) &= E\left[e^{t_1(Z_1+Z_2)}\right] = E\left[e^{t_1 Z_1} e^{t_1 Z_2}\right] \\
&\underbrace{=}_{Z_i' ind.} E\left[e^{t_1 Z_1}\right] E\left[e^{t_1 Z_2}\right] = \exp\left\{\frac{1}{2}t_1^2\right\} \exp\left\{\frac{1}{2}t_1^2\right\} \\
&= \exp\{t_1^2\}.
\end{aligned}
$$

Similarmente, $m_{Z_2-Z_1}(t_2) = \exp\{t_2^2\}$. Se $Z_1 \sim N(0,1)$, então $-Z_1 \sim N(0,1)$.

# Variância amostral

Além disso, temos que a $m_{Z_1+Z_2,Z_2-Z_1}(t_1,t_2)$

$$\begin{aligned}
&= E\left[e^{t_1(Z_1+Z_2)+t_2(Z_2-Z_1)}\right] = E\left[e^{(t_1-t_2)Z_1}e^{(t_1+t_2)Z_2}\right] \\
&\underbrace{=}_{ind.} E\left[e^{(t_1-t_2)Z_1}\right]E\left[e^{(t_1+t_2)Z_2}\right] = \exp\left\{\frac{1}{2}(t_1-t_2)^2\right\}\exp\left\{\frac{1}{2}(t_1+t_2)^2\right\} \\
&= \exp\left\{\frac{1}{2}(t_1-t_2)^2\right\}\exp\left\{\frac{1}{2}(t_1+t_2)^2\right\} \\
&= \exp\left\{\frac{1}{2}\left[t_1^2-2t_1t_2+t_2^2+t_1^2+2t_1t_2+t_2^2\right]\right\} = \exp\left\{t_1^2\right\}\exp\left\{t_2^2\right\} \\
&= m_{Z_1+Z_2}(t_1)m_{Z_2-Z_1}(t_2).
\end{aligned}$$

Visto que a f.g.m. conjunta pode ser fatorada no produto das f.g.m.'s $Z_1+Z_2$ e $Z_2-Z_1$ são independentes.

# Variância amostral

iii. Para provar essa parte, iremos supor que $\overline{Z}$ e $\sum_{i=1}^{n}(Z_i - \overline{Z})^2$ para um $n$ arbitrário.

Note que:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} Z_i^2 &= \sum_{i=1}^{n}(Z_i - \overline{Z} + \overline{Z})^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}(Z_i - \overline{Z})^2 + 2\overline{X}\underbrace{\sum_{i=1}^{n}(Z_i - \overline{Z})}_{n\overline{Z}-n\overline{Z}=0} + n\overline{X}^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}(Z_i - \overline{Z})^2 + n\overline{Z}^2
\end{aligned}
$$

# Variância amostral

Usando o resultado da parte (ii) temos que que $\overline{Z}$ e $\sum_{i=1}^{n}(Z_i - \overline{Z})^2$ são independentes.

Então:

$$m_{\sum_{i=1}^{n} Z_i^2}(t) \quad = \quad m_{\sum_{i=1}^{n}(Z_i-\overline{Z})^2+n\overline{Z}^2}(t) \quad \underbrace{=}_{ind.} \quad m_{\sum_{i=1}^{n}(Z_i-\overline{Z})^2}(t)m_{n\overline{Z}^2}(t)$$

e

$$m_{\sum_{i=1}^{n}(Z_i-\overline{Z})^2}(t) = \frac{m_{\sum_{i=1}^{n} Z_i^2}(t)}{m_{n\overline{Z}^2}(t)} = \frac{\overbrace{\left(\frac{1}{1-2t}\right)^{\frac{n}{2}}}^{\chi_n^2}}{\underbrace{\left(\frac{1}{1-2t}\right)^{\frac{1}{2}}}_{\chi_1^2}} = \left(\frac{1}{1-2t}\right)^{\frac{n-1}{2}}.$$

O resultado da f.g.m. da distribuição $\chi^2_{n-1}$.

# Variância amostral

- O Teorema 8 foi definido para uma amostra aleatória da distribuição $N(0,1)$, entretanto se desejamos fazer inferência sobre $\mu$ e $\sigma^2$ devemos considerar uma amostra da $N(\mu, \sigma^2)$.
- Se $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma a.a. da $N(\mu, \sigma^2)$. Neste caso definimos $Z_i (X_i - \mu)/\sigma$. (ver `Teorema 8`)
- Parte (i) do Teorema 8 se torna:

1. $\overline{Z} = \dfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)/\sigma = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1/n)$

# Variância amostral

- Parte (ii) do Teorema 8 se torna:

2. $\overline{X} = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma}$ e

$$\sum_{i=1}^{n} (Z_i - \overline{Z})^2 = \sum_{i=1}^{n} \left[ \frac{X_i - \mu}{\sigma} - \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma} \right]^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \overline{X})^2}{\sigma^2}$$

são independentes, implicando que $\overline{X}$ e $\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2$ também são.

- Parte (iii) do Teorema 8 se torna 3. $\sum_{i=1}^{n} (Z_i - \overline{Z})^2 = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{(X_i - \overline{X})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$

conforme mostrado em ii.

# Variância amostral

**Corolário 4** Considere $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma a.a. da $N(\mu, \sigma^2)$. Seja $S^2 = \dfrac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2$ a variâcia amostral. Então,

$$U = \frac{(n-1)}{\sigma^2} S^2 \sim \chi^2_{n-1}.$$

`Prova:` Considere a parte (iii) da extensão do `Teorema 8`.

Observação:Como $S^2$ é uma função linear de $U$ no corolário acima, a densidade de $S^2$ pode ser obtida a partir da densidade de $U$.

$U \sim \chi^2_{n-1}$ e $S^2$ é dada por uma função monótona de $U$.

$S^2 = \dfrac{\sigma^2}{n-1} U, U = \dfrac{(n-1)}{\sigma^2} S^2$ e $\dfrac{dU}{dS^2} = \dfrac{n-1}{\sigma^2}$

# Variância amostral

A função de densidade de $S^2$ é dada por

$$
\begin{aligned}
f_{S^2}(s^2) &= f_U\left[\frac{(n-1)}{\sigma^2}s^2\right] \times \left|\frac{n-1}{\sigma^2}\right|, \quad \text{para} \quad s^2 > 0 \\
&= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}}\left[\frac{(n-1)}{\sigma^2}s^2\right]^{\frac{n-1}{2}-1}\exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{(n-1)}{\sigma^2}s^2\right\}\frac{(n-1)}{\sigma^2}I_{(0,\infty)} \\
&= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}}\left[\frac{(n-1)}{\sigma^2}\right]^{\frac{n-1}{2}}\left[\frac{(n-1)}{\sigma^2}\right]^{-1}(s^2)^{\frac{n-1}{2}-1}\times \\
&\times \quad \frac{(n-1)}{\sigma^2}\exp\left\{-\frac{(n-1)}{2\sigma^2}s^2\right\} \times I_{(0,\infty)}(s^2) \\
&= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\left[\frac{(n-1)}{2\sigma^2}\right]^{\frac{n-1}{2}}(s^2)^{\frac{n-3}{2}}\exp\left\{-\frac{(n-1)}{2\sigma^2}s^2\right\} \times I_{(0,\infty)}(s^2)
\end{aligned}
$$

# Variância amostral

- Todos os resultados desta subseção são desenvolvidos para o caso de populações Normais.
- Pode ser provado que para nenhuma outra distribuição:

1. A média e a variância amostral são independentemente distribuídas.
2. A média amostral possui exatamente a distribuição Normal