

Inferência Estatística I

Lista 2

AUTOR

Paulo Cerqueira Jr  

AFILIAÇÕES

Faculdade de Estatística - FAEST

Universidade Federal do Pará - UFPA

Exercício 1 Seja X_1, \dots, X_n uma amostra aleatória da v.a. $X \sim \text{Poisson}(\theta)$. Considere os seguintes estimadores para θ :

$$\hat{\theta}_1 = \bar{X} \quad \text{e} \quad \hat{\theta}_2 = \frac{X_1 + X_2}{2}$$

Verifique se os estimadores são não viciados e consistentes, e compare seus EQMs.

Exercício 2 Seja X_1, \dots, X_n uma amostra aleatória da v.a. $X \sim \text{Bernoulli}(\theta)$. Considere os seguintes estimadores para θ :

$$\hat{\theta}_1 = 2\bar{X} \quad \text{e} \quad \hat{\theta}_2 = \frac{1}{2}$$

a. Verifique se os estimadores são não viciados e consistentes.

b. Faça um gráfico dos seus EQMs e compare-os.

Exercício 3 Seja X_1, \dots, X_n uma amostra aleatória da v.a. $X \sim \text{Normal}(\mu, 4)$. Considere os seguintes estimadores para θ :

$$\hat{\theta}_1 = \bar{X} \quad \text{e} \quad \hat{\theta}_2 = 8$$

a. Verifique se os estimadores são não viciados e consistentes.

b. Faça um gráfico dos seus EQMs e compare-os.

Exercício 4 Seja X uma única observação da $\text{Bernoulli}(\theta)$. Considere os estimadores:

$$T_1(X) = X \quad \text{e} \quad T_2(X) = \frac{1}{2}$$

a. $T_1(X)$ e $T_2(X)$ são estimadores não viciados para θ ?

b. Calcule o erro quadrático médio de $T_1(X)$ e $T_2(X)$.

Exercício 5 Seja X_1, \dots, X_n uma a.a. da v.a. com f.d.p. $f(x|\theta) = \exp -(x - \theta)$, $x > \theta$, $\theta > 0$. Considere:

$$\hat{\theta}_1 = \bar{X} \quad \text{e} \quad \hat{\theta}_2 = X_{(1)}$$

a. Verifique se os estimadores são não viciados.

b. Faça um gráfico dos EQMs e compare-os.

Exercício 6 Seja X_1, \dots, X_n uma a.a. da v.a. com f.d.p. $f(x|\theta) = \theta x^{\theta-1}$, $0 < x < 1$, $\theta > 0$. Mostre que:

$$\hat{\theta} = \bar{X}$$

é um estimador não-viciado para θ .

Exercício 7 Seja X_1, \dots, X_n uma a.a. da v.a. $X \sim \text{Normal}(\mu, 1)$. Mostre que T é não viciado para $g(\mu) = \mu^2$.

Exercício 8 Seja X_1, \dots, X_n uma a.a. com f.d.p. $f(x|\theta) = \frac{2x}{\theta^2}, 0 < x < \theta, \theta > 0$. Considere:

$$\hat{\theta}_1 = c_1 \bar{X} \quad \text{e} \quad \hat{\theta}_2 = c_2 X_{(n)}.$$

- Verifique se são não-viciados.
- Compare os EQMs.

Exercício 9 Seja $X_1, \dots, X_n \sim \text{Normal}(0, \sigma^2)$ e $V^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2$, considere:

$$\hat{\sigma}_c^2 = cV^2$$

- Encontre o EQM.
- Determine c que minimiza o EQM.

Exercício 10 Sejam X_1, \dots, X_n uma a.a. da v.a. X , com função de densidade:

$$f(x) = \theta x^{\theta-1} I_{(0,1)}(x), \quad \theta > 0$$

- Mostre que X pertence à Família Exponencial.
- Encontre o limite inferior da variância dos estimadores não viciados de θ .
- Encontre uma estatística suficiente para θ .
- Calcule o valor esperado desta estatística.

Exercício 11 Seja X_1, \dots, X_n uma amostra aleatória da distribuição:

$$f(x) = \exp \{-(x - \theta)\} I_{(\theta, \infty)}(x), \quad \theta > 0$$

- Obtenha uma estatística suficiente para θ .
- Obtenha um estimador não viciado que seja função da estatística suficiente.

Exercício 12 Mostre que as seguintes distribuições pertencem à família exponencial:

- Gama(α, γ) com α e γ desconhecidos.
- Gama(α, γ) com α conhecido e γ desconhecido.
- Beta(a, b) com a e b desconhecidos.
- Beta(a, b) com a conhecido e b desconhecido.
- Poisson(θ).
- Binomial Negativa com número de sucessos r conhecido e $0 < p < 1$ desconhecido.

Exercício 13 Para cada item da questão 14, encontre uma estatística suficiente para os parâmetros de interesse.

Exercício 14 Seja X_1, \dots, X_n uma amostra da distribuição:

$$f(x_i|\theta) = \frac{1}{2i\theta}, \quad -i(\theta - 1) < x_i < i(\theta + 1), \theta > 0$$

Encontre uma estatística suficiente bidimensional para θ .

Exercício 15 Seja $X_1, \dots, X_n \sim \text{Gama}(2, 1/\theta)$.

- Mostre que X pertence à Família Exponencial.
- Obtenha uma estatística suficiente para θ .

Exercício 16 Seja $X_1, \dots, X_n \sim N(0, \sigma^2)$.

- Encontre o limite inferior da variância dos estimadores não viciados de σ^2 .
- Obtenha uma estatística suficiente para σ^2 .
- Obtenha um estimador não viciado que seja função da estatística suficiente.
- Verifique se este estimador é eficiente.

Exercício 17 Seja $X_1, \dots, X_n \sim \text{Bin}(2, \theta)$.

- Encontre o limite inferior da variância dos estimadores não viciados de θ .
- Obtenha uma estatística suficiente para θ .
- Obtenha um estimador não viciado que seja função da estatística suficiente.
- Verifique se este estimador é eficiente.

Exercício 18 Sejam Y_1, \dots, Y_n independentes com $Y_i \sim N(\beta x_i, \sigma^2)$.

- Obtenha uma estatística suficiente para β e σ^2 .
- Obtenha o ENVVUM para β e σ^2 .

Exercício 19 Seja X_1, \dots, X_n da v.a. com densidade:

$$f(x|\theta) = \frac{2x}{\theta^2}, \quad 0 < x < \theta, \theta > 0$$

Obtenha uma estatística suficiente para θ .

Exercício 20 Seja $X_1, \dots, X_n \sim \text{Bernoulli}(\theta)$.

- Obtenha o ENVVUM para θ .
- Obtenha o ENVVUM para $\theta(1 - \theta)$.

Exercício 21 Seja X_1, \dots, X_n com densidade:

$$f(x|\mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma} \exp \left\{ -\frac{(x - \mu)}{\sigma} \right\}, \quad \mu < x < \infty, 0 < \sigma < \infty$$

Encontre uma estatística bidimensional para o vetor (μ, σ) .