Inferência Estatística I

Lista 1

AUTOR
Paulo Cerqueira Jr

AFILIAÇÕES
Faculdade de Estatística - FAEST
Universidade Federal do Pará - UFPA

`1-Questão:` Uma v.a X assume os valores -1, 0 e 1 com igual probabilidade. Para uma amostra de tamanho 2, obtenha a distribuicao de probabilidade de $\bar{X}$ e verifique que ele não e viciado para a média de X.

`2-Questão:` Para uma $\text{Normal}(5, 10)$ coletou-se uma amostra de tamanho 25. Calcule:

a. $P(\bar{X} \leq 48)$.

b. $P(45 \leq \bar{X} \leq 53)$.

c. $P(\bar{X} \leq 47 \quad ou \quad \bar{X} \geq 47)$.

`3-Questão:` A duracão do *tonner* de uma máquina de fotocópia pode ser modelado como Normal com média 15 e desvio padrão 2 (em milhares de cópias). Para uma amostra de 12 fotocopiadoras a duração do *tonner* sera observada e pergunta-se a probabilidade de, em média, durar:

a. Menos de 16 mil cópias?

b. Mais de 13 mil cópias?

c. Entre 12 e 14 mil cópias?

`4-Questão:` A dosagem de certa substância no sangue distribuicao Normal com média μ e desvio padrão 15 mg/l. Se uma amostra de tamanho 25 for coletada, determine, a probabilidade de $\mid \bar{X} - \mu \mid$ ser inferior a 5.

`5-Questão:` A vida de uma lâmpada elétrica pode ser considerada uma variável aleatória com distribuicão normal com media de 50 dias e desvio padrão de 10 dias. Retirando-se da populacao de lâmpadas todas as amostras aleatórias possíveis com 25 lâmpadas, quais serão os valores, respectivamente, da média e do erro padrão da distribuição amostral da média?

`6-Questão:` Uma máquina de empacotar leite em pó, o faz segundo uma Normal com média μ e desvio padrão 10g.

a. Encontre o valor de μ, tal que o valor do peso médio μ deve ser regulado para que apenas 5,5% dos pacotes tenham menos do que 1000g.

b. Com a máquina assim regulada, qual a probabilidade de que o peso total de 4 pacotes escolhidos ao acaso seja inferior a 4040g?

`7-Questão:` Trinta observações de uma distribuição Normal com média μ e variância 36 são coletadas. Então,

a. Calcule $P(\mid \bar{X} - \mu \mid \leq 3)$.

b. Determine o valor de a tal que $P(\mid \bar{X} - \mu \mid \leq a) = 0,9$.

`8-Questão:` O tempo de reação de uma pessoa a uma droga e considerado uma variável aleatória com média 5 minutos e desvio padrão de 3 minutos. Esse tempo foi medido em uma amostra de 80 pessoas escolhidas, sem reposição, em Belem. Pergunta-se a probabilidade de:

a. O tempo médio amostral ser inferior a 5,5?

b. O tempo médio na mostra não diferir da verdadeira média por mais de 0,4?

`9-Questão:` Sendo $X \sim Binon(n = 10; p = 0.5)$, pergunta-se:

a. Para uma amostra de tamanho 2 desta variável, qual a probabilidade da média amostral ser superior a 9?

b. Para uma amostra de tamanho 100, qual a probabilidade da média amostral ser superior a 4,7?

`10-Questão:` O tempo de emissão de extratos, em segundos, pelo caixa eletrônico de um banco foi modelado por uma distribuição Exponencial com parametro $1/40$. Para uma amostra aleatória com 50 clientes que solicitaram extratos:

a. Qual a probabilidade do segundo cliente sorteado na amostra demorar mais de 30 segundos na sua solicitacao?

b. Determine a probabilidade de que o intervalo médio de emissão, entre os clientes amostrados, seja inferior a 35 segundos?

`11-Questão:` O tempo de espera, em minutos, na fila de votacao numa certa zona eleitoral com urna eletrônica, foi modelado segundo uma distribuição uniforme no intervalo de 0 a 30. Para uma amostra aleatória de tamanho 100:

a. Qual a probabilidade de um eleitor demorar mais de 20 minutos?

b. Obtenha o valor de s para que a média da amostra seja inferior a esse valor com probabilidade de 0,8.

`12-Questão:` Considere $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatoria da distribuição $Bernoulli(p)$. Então temos $E(X_i) = p$ e $Var(X_i) = p(1 - p)$. Defina $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

a. Qual é a distribuição de Y?

b. Seja $n = 100$ e $p = 0,5$. Utilize o Teorema Central do Limite para calcular uma aproximação para a seguinte probabilidade $P(47,5 < Y < 52,5)$.

`13-Questão:` Verifique que se $X_1, X_2, \ldots, X_n$ forem v.a.s independentes, cada uma tendo distribuição exponencial com parametro α_i, para $i = 1, 2 \ldots, n$, e se $K = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ então K terá distribuicao exponencial com parâmetro $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i$.

`13-Questão:` Seja X_i uma v.a. com distribuicao $N(ii^2),\ i = 1,\ 2,\ 3$. Suponha que as v.a.s X_1, X_2 e X_3 são independentes. Usando apenas as v.a.s X_1, X_2 e X_3:

a. Dê um exemplo de uma estatística que tenha distribuição χ^2_3;

b. Dê um exemplo de uma estatística que tenha distribuição $F_{(1,2)}$;

c. Dê um exemplo de uma estatística que tenha distribuição t_2.

`14-Questão:` Sejam X_1, X_2, uma a.a. da distribuição $N(0,1)$.Obtenha a distribuição amostral das seguintes estatísticas:

a. $\dfrac{X_2 - X_1}{\sqrt{2}}$;

b. $\dfrac{(X_1 + X_2)^2}{(X_2 - X_1)^2}$;

c. $\dfrac{(X_1 + X_2)}{\sqrt{(X_2 - X_1)^2}}$;

d. $\dfrac{X_1^2}{X_2^2}$.

`15-Questão:` Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$, uma a.a. da distribuição $N(0,1)$. Considere as seguintes va's:

$$\bar{X} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} X_i \qquad \bar{X} = \frac{1}{n-k}\sum_{i=1}^{n-k} X_i$$

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \qquad S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

$$S_k^2 = \frac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{k}(X_i - \bar{X}_k)^2 \qquad S_(n-k)^2 = \frac{1}{(n-k-1)}\sum_{i=1}^{n-k}(X_i - \bar{X}_(n-k))^2$$

Determine as distribuições de:

a. $\sigma^{-2}\left[(k-1)S_k^2 + (n-k-1)S_{n-k}^2\right]$;

b. $\dfrac{1}{2}(\bar{X}_k - \bar{X}_{n-k})$;

c. $\sigma^{-2}(X_i - \mu)^2$;

d. $\dfrac{S_k^2}{S_{n-k}^2}$;

e. $\dfrac{(\bar{X} - \mu)}{S/\sqrt{n}}$.

`16-Questão:` Obtenha a função de verossimilhança em cada uma das situações abaixo:

a. Seja $(X_1, X_2, \ldots, X_{10})$ uma a.a. da v.a. $X \sim Exp(\lambda)$;

b. Seja (X_1, X_2, X_3, X_4) uma a.a. da v.a. $X \sim Beta(\theta, 1)$;

c. Seja $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ uma a.a. da v.a. $X \sim N(\theta, 1)$;

d. Seja $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ uma a.a. da v.a. $X \sim N(0, \theta)$;

e. Seja $(X_1, X_2, \ldots, X_6)$ uma a.a. da v.a. $X \sim N(\theta, \theta^2)$;

f. Seja $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ uma a.a. da v.a. $X \sim Gama(2, \theta)$.