Inferência Estatística I

Lista 2

AUTOR
Paulo Cerqueira Jr

AFILIAÇÕES
Faculdade de Estatística - FAEST
Universidade Federal do Pará - UFPA

Exercício 1 Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da v.a. $X \sim \text{Poisson}(\theta)$. Considere os seguintes estimadores para θ:

$$\hat{\theta}_1 = \bar{X} \quad \text{e} \quad \hat{\theta}_2 = \frac{X_1 + X_2}{2}$$

Verifique se os estimadores são não viciados e consistentes, e compare seus EQMs.

Exercício 2 Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da v.a. $X \sim \text{Bernoulli}(\theta)$. Considere os seguintes estimadores para θ:

$$\hat{\theta}_1 = 2\bar{X} \quad \text{e} \quad \hat{\theta}_2 = \frac{1}{2}$$

a. Verifique se os estimadores são não viciados e consistentes.

b. Faça um gráfico dos seus EQMs e compare-os.

Exercício 3 Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da v.a. $X \sim \text{Normal}(\mu, 4)$. Considere os seguintes estimadores para θ:

$$\hat{\theta}_1 = \bar{X} \quad \text{e} \quad \hat{\theta}_2 = 8$$

a. Verifique se os estimadores são não viciados e consistentes.

b. Faça um gráfico dos seus EQMs e compare-os.

Exercício 4 Seja X uma única observação da $\text{Bernoulli}(\theta)$. Considere os estimadores:

$$T_1(X) = X \quad \text{e} \quad T_2(X) = \frac{1}{2}$$

a. $T_1(X)$ e $T_2(X)$ são estimadores não viciados para θ? \

b. Calcule o erro quadrático médio de $T_1(X)$ e $T_2(X)$.

Exercício 5 Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma a.a. da v.a. com f.d.p. $f(x|\theta) = \exp -(x - \theta)$, $x > \theta$, $\theta > 0$. Considere:

$$\hat{\theta}_1 = \bar{X} \quad \text{e} \quad \hat{\theta}_2 = X_{(1)}$$

a. Verifique se os estimadores são não viciados.

b. Faça um gráfico dos EQMs e compare-os.

Exercício 6 Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma a.a. da v.a. com f.d.p. $f(x|\theta) = \theta x^{\theta - 1}$, $0 < x < 1$, $\theta > 0$. Mostre que:

$$\hat{\theta} = \bar{X}$$

é um estimador não-viciado para θ.

Exercício 7 Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma a.a. da v.a. $X \sim \mathrm{Normal}(\mu, 1)$. Mostre que T é não viciado para $g(\mu) = \mu^2$.

Exercício 8 Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma a.a. com f.d.p. $f(x|\theta) = \frac{2x}{\theta^2}$, $0 < x < \theta$, $\theta > 0$. Considere:

$$\hat{\theta}_1 = c_1 \bar{X} \quad \text{e} \quad \hat{\theta}_2 = c_2 X_{(n)}.$$

a. Verifique se são não-viciados.

b. Compare os EQMs.

Exercício 9 Seja $X_1, \ldots, X_n \sim \mathrm{Normal}(0, \sigma^2)$ e $V^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2$, considere:

$$\hat{\sigma}_c^2 = cV^2$$

a. Encontre o EQM.

b. Determine c que minimiza o EQM.

Exercício 10 Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma a.a. da v.a. X, com função de densidade:

$$f(x) = \theta x^{\theta - 1} I_{(0,1)}(x), \quad \theta > 0$$

a. Mostre que X pertence à Família Exponencial.
b. Encontre o limite inferior da variância dos estimadores não viciados de θ.
c. Encontre uma estatística suficiente para θ.
d. Calcule o valor esperado desta estatística.

Exercício 11 Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da distribuição:

$$f(x) = \exp\{-(x - \theta)\} I_{(\theta, \infty)}(x), \quad \theta > 0$$

a. Obtenha uma estatística suficiente para θ.
b. Obtenha um estimador não viciado que seja função da estatística suficiente.

Exercício 12 Mostre que as seguintes distribuições pertencem à família exponencial:

a. $\mathrm{Gama}(\alpha, \gamma)$ com α e γ desconhecidos.
b. $\mathrm{Gama}(\alpha, \gamma)$ com α conhecido e γ desconhecido.
c. $\mathrm{Beta}(a, b)$ com a e b desconhecidos.
d. $\mathrm{Beta}(a, b)$ com a conhecido e b desconhecido.
e. $\mathrm{Poisson}(\theta)$.
f. Binomial Negativa com número de sucessos r conhecido e $0 < p < 1$ desconhecido.

Exercício 13 Para cada item da questão 14, encontre uma estatística suficiente para os parâmetros de interesse.

Exercício 14 Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra da distribuição:

$$f(x_i|\theta) = \frac{1}{2i\theta}, \quad -i(\theta-1) < x_i < i(\theta+1),\ \theta > 0$$

Encontre uma estatística suficiente bidimensional para θ.

Exercício 15 Seja $X_1, \ldots, X_n \sim \text{Gama}(2, 1/\theta)$.

a. Mostre que X pertence à Família Exponencial.
b. Obtenha uma estatística suficiente para θ.

Exercício 16 Seja $X_1, \ldots, X_n \sim N(0, \sigma^2)$.

a. Encontre o limite inferior da variância dos estimadores não viciados de σ^2.
b. Obtenha uma estatística suficiente para σ^2.
c. Obtenha um estimador não viciado que seja função da estatística suficiente.
d. Verifique se este estimador é eficiente.

Exercício 17 Seja $X_1, \ldots, X_n \sim \text{Bin}(2, \theta)$.

a. Encontre o limite inferior da variância dos estimadores não viciados de θ.
b. Obtenha uma estatística suficiente para θ.
c. Obtenha um estimador não viciado que seja função da estatística suficiente.
d. Verifique se este estimador é eficiente.

Exercício 18 Sejam $Y_1, \ldots, Y_n$ independentes com $Y_i \sim N(\beta x_i, \sigma^2)$.

a. Obtenha uma estatística suficiente para β e σ^2.
b. Obtenha o ENVVUM para β e σ^2.

Exercício 19 Seja $X_1, \ldots, X_n$ da v.a. com densidade:

$$f(x|\theta) = \frac{2x}{\theta^2}, \quad 0 < x < \theta,\ \theta > 0$$

Obtenha uma estatística suficiente para θ.

Exercício 20 Seja $X_1, \ldots, X_n \sim \text{Bernoulli}(\theta)$.

a. Obtenha o ENVVUM para θ.
b. Obtenha o ENVVUM para $\theta(1-\theta)$..

Exercício 21 Seja $X_1, \ldots, X_n$ com densidade:

$$f(x|\mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)}{\sigma}\right\}, \quad \mu < x < \infty,\ 0 < \sigma < \infty$$

Encontre uma estatística bidimensional para o vetor (μ, σ).

Exercício 22 Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da v.a. $X \sim \text{Gama}(2, 1/\theta)$.

a.Obtenha o EMV para θ.
b. Obtenha a distribuição para grandes amostras do estimador obtido no item a).

Exercício 23 Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da v.a. X, com função de densidade dada por:

$$f(x \mid \theta) = \frac{x+1}{\theta(\theta+1)} \exp\left\{-\frac{x}{\theta}\right\}, \quad x > 0, \theta > 0.$$

a.Obtenha o EMV para θ.
b. Obtenha a distribuição para grandes amostras do estimador obtido no item a).
c. Obtenha um estimador via método de momentos.

Exercício 24 Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da v.a. $X \sim \text{Poisson}(\theta)$. Seja $g(\theta) = \exp\{-\theta\}$.

a.Obtenha o EMV para $g(\theta)$.
b. Obtenha a distribuição para grandes amostras do estimador obtido no item a).

Exercício 25 Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da v.a. X, com função de densidade dada por:

$$f(x \mid \theta) = \theta(1+x)^{-(1+\theta)} I_{(0,\infty)}(x), \quad \theta > 0.$$

a.Obtenha o EMV para $1/\theta$.
b. Obtenha a distribuição para grandes amostras do estimador obtido no item a).
c. Obtenha um estimador via método de momentos.

Exercício 26 Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da v.a. X, com função de densidade dada por:

$$f(x \mid \theta) = \frac{2x}{\theta^2}, \quad 0 < x < \theta, \theta > 0.$$

a.Obtenha o EMV para $g(\theta) = \theta + \theta^2$.
b. Obtenha um estimador para θ via métodos de momentos.

Exercício 27 Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da v.a. X, com função de densidade dada por:

$$f(x \mid \theta) = \frac{\theta}{x^2}, \quad x > \theta, \theta > 0.$$

a.Obtenha o EMV para θ.
b. Obtenha o EMV para $g(\theta) = E\left(\frac{1}{X}\right)$.

Exercício 28 Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória obtida a partir da distribuição:

$$f(x) = \exp\{-(x-\theta)\} I_{(\theta,\infty)}(x), \quad \theta > 0.$$

a.Obtenha o EMV para θ.
b. Obtenha um estimador para θ via métodos de momentos.

Exercício 29 Seja $Y_1, \ldots, Y_n$ variáveis aleatórias independentes com $Y_i \sim N(\alpha + \beta x_i, \sigma^2)$, em que x_i é conhecido para todo $i = 1, \ldots, n$.
Encontre o EMV para α, β e σ^2.

Exercício 30 Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da v.a. $X \sim \text{Ber}(\theta)$.

a.Encontre o EMV para $\text{Var}(X)$.
b. Obtenha a distribuição para grandes amostras do estimador obtido no item a).