

Inferência Estatística I

Amostra aleatória



Prof. Paulo Cerqueira Jr

Faculdade de Estatística - FAEST

Instituto de Ciências Exatas e Naturais - ICEN

<https://github.com/paulocerqueirajr> 

Introdução

Introdução

- Os avanços científicos são, na maioria das vezes, atribuídos aos experimentos realizados.
- Um pesquisador realiza o experimento e obtém dados.
- Baseado nos dados, algumas conclusões podem ser retiradas.
- Estas conclusões vão, geralmente, além dos que foi observado nos dados.
- Dessa forma, o pesquisador generaliza, partindo de um experimentos para os demais que são similares.
- Esta generalização é denominada de **Inferência**.

! Uma função da Estatística:

Fornecer um conjunto de metodologias para realizar a inferência e medir o grau de incerteza dessa inferência, através da **teoria das probabilidades**.

Introdução

Exemplo 1

- Suponha um recipiente com 10 milhões de sementes de flores.
- Cada semente pode produzir flores brancas ou vermelhas.
- Pergunta-se: Qual a porcentagem de flores brancas que serão geradas?
- Para saber o resultado real, teríamos que plantar todas as sementes.
- Seria uma tarefa muito trabalhosa!
- Solução: Plantar algumas sementes, e baseando-se nos resultados podemos obter alguma informação para a porcentagem de flores brancas.

População e amostra

Definição 1 (População) É um conjunto que contém todos os elementos do problema a ser discutido, com pelo menos uma característica em comum. Desejamos obter informação sobre esta população.

Exemplo 2

- Preços da carne em um mês na região metropolitana de Belém.
- Preços do pão em certo dia em Belém.
- Produção de leite por animal em uma fazenda.
- Queremos estudar a proporção de votos para um determinado candidato ao governo do Estado do Pará.
- Queremos estudar o grau de satisfação dos usuários de uma determinada operadora de telefonia celular.

População e amostra

População e amostra

Definição 2 (Amostra aleatória - a.a) Sejam X_1, X_2, \dots, X_n uma sequência de variáveis aleatórias com distribuição conjunta $f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n)$ que fatora como na seguinte igualdade:

$$f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \times f_{X_2}(x_2) \times \dots \times f_{X_n}(x_n) = \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i),$$

em que $f(\cdot)$ é a função de probabilidade (f.p) ou função de densidade de probabilidade (f.d) para cada X_i . Então, X_1, X_2, \dots, X_n é uma amostra aleatória de tamanho n retirada de uma população com p.d/f.d.

População e amostra

Exemplo 3 Imagine 10 milhões de sementes em um recipiente e a produção de flores brancas e vermelhas.

- **População:** Sementes dentro do recipiente.
- **Unidade experimental:** Uma semente.
- **Característica:** Flor branca ou vermelha.
- Não temos um valor numérico associado a cada elemento, mas podemos definir o seguinte tipo de resposta:

Flor branca = 1 e Flor vermelha = 0.

Variável aleatória: $X_i = 1$ ou $X_i = 0$, para $i = 1, 2, \dots, n$.

População e amostra

- A variável aleatória X_i é uma representação do valor numérico que a i —ésima unidade amostral irá assumir.
- Depois que a amostra X_1, X_2, \dots, X_n observada os valores serão conhecidos e denotados por x_1, x_2, \dots, x_n .
- Logo:

Suponha que X pode assumir apenas os valores 0 ou 1 com probabilidades $1 - \theta$ e θ , respectivamente. Então, sejam X_1, X_2, \dots, X_n uma a.a de $X \sim \text{Ber}(\theta)$, sua distribuição conjunta $P(X_1 = x_1; X_2 = x_2; \dots; X_n = x_n)$ é dada por

$$= \theta^{x_1} (1 - \theta)^{1-x_1} \times \theta^{x_2} (1 - \theta)^{1-x_2} \times \dots \times \theta^{x_n} (1 - \theta)^{1-x_n}$$

$$= \theta^{x_1+x_2+\dots+x_n} (1 - \theta)^{(1-x_1)+(1-x_2)+\dots+(1-x_n)}$$

$$= \theta^{\sum_{i=1}^n x_i} (1 - \theta)^{\sum_{i=1}^n (1-x_i)}$$

$$= \theta^{\sum_{i=1}^n x_i} (1 - \theta)^{(n - \sum_{i=1}^n x_i)}$$

Estatísticas e Parâmetros

Estatísticas e Parâmetros - Introdução

i Um dos problemas principais da Estatística envolve o seguinte:

- Estudar uma população com f.p/f.d $f(\cdot \mid \theta)$, onde a forma da f.p/f.d é conhecida com parâmetro desconhecido θ .
- Se θ fosse conhecido f.p/f.d estaria completamente especificada.

i Procedimento de inferência envolverá:

- A obtenção de uma amostra aleatória X_1, X_2, \dots, X_n desta f.p/f.d.
- O uso de uma função $T(x_1, x_2, \dots, x_n)$ como estimativa para o parâmetro θ (desconhecido).

Estatísticas

- O problema aqui consiste em determinar qual será a melhor função para estimar θ .
- Iremos avaliar certas funções (funções amostrais) de uma amostra aleatória.

Definição 3 (Estatísticas) É uma função da amostra, $T(x) = f(X_1, X_2, \dots, X_n)$, representando uma característica da amostra.

⚠ **Importante:**

A formulação de uma estatística **não pode envolver quantidades desconhecidas.**

Estatísticas

Os exemplos mais comuns:

- Média amostral: $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$.
- Variância amostral: $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$.
- Mediana amostral: $\tilde{X} = \text{med}(X_1, X_2, \dots, X_n)$.
- Mínimo amostral: $X_{(1)} = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$.
- Máximo amostral: $X_{(n)} = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$.
- Ponto médio amostral: $\frac{1}{2} (X_{(1)} + X_{(n)})$.

Parâmetros

Definição 4 (Parâmetro) Uma parâmetro é uma medida (desconhecida) usada para descrever uma característica da população.

- As relação das estatísticas com seus respectivos parâmetros:

Medida	Estatística	Parâmetro
Média	\overline{X}	μ
Variância	$\hat{\sigma}^2$	σ^2
N de elementos	n	N
Proporção	$\hat{\theta}$	θ

Estatísticas e Parâmetros

Exemplo 4 Considere uma variável aleatória observável com f.d:

- $f(x) = N [x \mid \mu, \sigma^2]$, com μ e σ desconhecidos.
- Logo,

$X - \mu$ e X/σ são Estatísticas??

- Não são, pois contém elementos desconhecidos.
- X , $X + 3$ e $X^2 + \log X^2$ são estatísticas.

Estatísticas e Parâmetros

Exemplo 5 Seja X_1, X_2, \dots, X_n uma amostra aleatória com f.p/f.d $f(\cdot; \theta)$ então:

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad \text{e} \quad \frac{1}{2} \{ \min(X_1, \dots, X_n) + \max(X_1, \dots, X_n) \}$$

são exemplos de estatísticas.

Exemplo 6 Se $f(x; \theta) = N[x \mid \theta, 1]$, com θ desconhecido.

$\overline{X}_n - \theta$ é uma Estatística?

- Não é uma estatística, pois depende de θ .

Momentos amostrais

Momentos amostrais

Seja X_1, \dots, X_n uma a.a com f.p/f.d $f(\cdot)$. O r -ésimo momento amostral em relação à 0 é definido por

$$M'_r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - 0)^r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i)^r.$$

- Em particular, quando $r = 1$, temos a média amostral \bar{X} ou \bar{X}_n , em que

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i).$$

O r -ésimo momento em relação à \bar{X}_n é dado por

$$M_r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(X_i - \bar{X}_n \right)^r$$

Momentos amostrais

Momentos amostrais são exemplos de estatísticas!

Teorema 1 (Momentos Amostrais) Seja X_1, \dots, X_n uma a.a com f.p/f.d $f(\cdot)$. O valor esperado do r-ésimo momento amostral (em relação à 0) é igual ao r-ésimo momento populacional, isto é,

$$E(M_r') = \mu_r', \text{ se } \mu_r' \text{ existir.}$$

- Temos que $\mu_r' = E(X^r)$ é o r-ésimo momento populacional de uma população com f.p/f.d $f(x) = f_X(x)$.
- Além disso:

$$\begin{aligned} Var(M_r') &= \frac{1}{n} [E(X^{2r}) - E^2(X^r)] \\ &= \frac{1}{n} [\mu_{2r}' - (\mu_r')^2] . \end{aligned}$$

Momentos amostrais

Demonstração:(cont.)

A média:

$$\begin{aligned} E(M_r') &= E \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i)^r \right] = \frac{1}{n} E \left[\sum_{i=1}^n (X_i)^r \right] = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E [(X_i)^r] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mu_r' = \mu_r'. \end{aligned}$$

A variância:

$$Var(M_r') = Var \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i)^r \right] = \frac{1}{n^2} Var \left[\sum_{i=1}^n (X_i)^r \right]$$

Momentos amostrais

Demonstração:(cont.)

Supondo independência, temos

$$\begin{aligned} Var(M_r') &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n Var[(X_i)^r] = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \left[E(X_i)^{2r} - E^2(X_i^r) \right] \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n [\mu'_{2r} - (\mu'_r)^2] = \frac{1}{n} [\mu'_{2r} - (\mu'_r)^2] . \end{aligned}$$

Momentos amostrais

Quando $r = 1$, temos o seguinte corolário.

Corolário 1 Seja X_1, \dots, X_n uma a.a com f.p/f.d $f(\cdot)$ e se $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i)$ é a média amostral, então,

$$E(\bar{X}_n) = \mu, \text{ e } Var(\bar{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

em que μ e σ^2 são a média e a variância de $f(\cdot)$.

Momentos amostrais

- O Teorema 1 fornece a média e a variância, em termos de momentos populacionais, do r -ésimo momento amostral em relação a 0.
- Um resultado similar, porém mais complicado, pode ser derivado para a média e variância do r -ésimo momento amostral em relação a média amostral.
- Considere $r = 2$, tal que $M_2 = \frac{1}{n} \sum_i (X_i - \bar{X})^2$.
- M_2 as vezes é chamado de **variância amostral**.
- Entretanto, definiremos a variância amostral de outra forma.

Momentos amostrais

Definição 5 Seja X_1, \dots, X_n uma a.a com f.p/f.d $f(\cdot)$,

$$S_n^2 = S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_i (X_i - \bar{X})^2, \text{ para } n > 1,$$

é definida como **variância amostral**.

A razão para considerarmos S^2 ao invés de M_2 como variância é devido

$$E(S^2) = \sigma^2 \text{ e } E(M_2) \neq \sigma^2$$

- Revisando: $\mu'_r = E(X^r)$ é o r -ésimo momento de X (em relação a 0).

Momentos amostrais

Definição 6 (Momento central) O r -ésimo momento central de uma variável aleatória X com relação ao ponto \mathbf{a} é definido por

$$\mu_r = E[(X - \mathbf{a})^r]$$

- Se $\mathbf{a} = E(X) = \mu$, temos $\mu_r = E[(X - \mathbf{a})^r]$, então

$$\mu_1 = E[(X - \mu)^1] = 0 \quad \text{e} \quad \mu_2 = E[(X - \mu)^2] = Var(X) = \sigma^2.$$

Teorema 2 Seja X_1, \dots, X_n uma a.a com f.p/f.d $f(\cdot)$ e seja

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_i (X_i - \bar{X})^2,$$

Então,

$$E(S^2) = \sigma^2 \quad \text{e} \quad Var(S^2) = \frac{1}{n} \left[\mu_4 - \frac{n-3}{n-1} \sigma^2 \right].$$

Momentos amostrais

Prova: Para $E(S^2) = \sigma^2$, temos que $\sigma^2 = E[(X - \mu)^2]$ e $\mu_r = E[(X - \mu)^r]$. Note que,

$$\begin{aligned}\sum_i (X_i - \mu)^2 &= \sum_i \left(X_i + \bar{X} - \bar{X} - \mu \right)^2 \\&= \sum_i \left[\left(X_i - \bar{X} \right)^2 - 2 \left(X_i - \bar{X} \right) \left(\bar{X} - \mu \right) + \left(\bar{X} - \mu \right)^2 \right] \\&= \sum_i \left(X_i - \bar{X} \right)^2 - 2 \left(\bar{X} - \mu \right) \sum_i \left(X_i - \bar{X} \right) + n \left(\bar{X} - \mu \right)^2 \\&= \sum_i \left(X_i - \bar{X} \right)^2 - 2 \left(\bar{X} - \mu \right) \underbrace{\left(n\bar{X} - n\bar{X} \right)}_0 + n \left(\bar{X} - \mu \right)^2 \\&= \sum_i \left(X_i - \bar{X} \right)^2 + n \left(\bar{X} - \mu \right)^2\end{aligned}$$

Momentos amostrais

Prova (cont.):

Assim,

$$\begin{aligned} E(S^2) &= E \left[\frac{1}{n-1} \sum_i (X_i - \bar{X})^2 \right] \\ &= E \left[\frac{1}{n-1} \sum_i (X_i - \mu)^2 - n (\bar{X} - \mu)^2 \right] \\ &= \frac{1}{n-1} E \left[\sum_i (X_i - \mu)^2 - n (\bar{X} - \mu)^2 \right] \\ &= \frac{1}{n-1} E \left[\sum_i (X_i - \mu)^2 \right] - \frac{n}{n-1} E \left[(\bar{X} - \mu)^2 \right] \\ &= \frac{n}{n-1} \sigma^2 - \frac{n}{n-1} \text{Var}(\bar{X}) \\ &= \frac{n}{n-1} \sigma^2 - \frac{n}{n-1} \frac{\sigma^2}{n} \\ &= \sigma^2 \end{aligned}$$

Momentos amostrais

- De forma similar,

$$\begin{aligned} E(M_2) &= E \left[\frac{1}{n} \sum_i (X_i - \bar{X})^2 \right] \\ &= \frac{1}{n} \sigma^2 - \frac{n}{n} \text{Var}(\bar{X}) \\ &= \sigma^2 \left(\frac{n-1}{n} \right) \end{aligned}$$

- Momentos amostrais são exemplos de **exemplos de estatísticas** que podem ser usados para estimar quantidades populacionais.
- Por exemplo:
 - M'_r para estimar μ'_r ;
 - \bar{X} para estimar μ ;
 - S^2 para estimar σ^2 .

Função de verossimilhança

Função de verossimilhança

Definição 7 (Função de verossimilhança) A f.p/p.d.f conjunta é denominada função de verossimilhança de θ , correspondente a amostra observada $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e será denotada por

$$L(\theta \mid \mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n f(x_i \mid \theta) = f(x_1 \mid \theta) \times f(x_2 \mid \theta) \times \dots \times f(x_n \mid \theta).$$

Dada a amostra $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, podemos encontrar o **ponto mais verossímil** para θ .

Função de verossimilhança

Exemplo 7 (Caso discreto) Sejam X_1, X_2, \dots, X_n uma a.a de $X \sim \text{Pois}(\theta)$. Temos que a função de verossimilhança é dada por

$$\begin{aligned} L(\theta \mid \mathbf{x}) &= \prod_{i=1}^n \frac{\exp\{-\lambda\} \lambda^{x_i}}{x_i!} \\ &= \frac{\exp\{-\lambda\} \lambda^{x_1}}{x_1!} \times \frac{\exp\{-\lambda\} \lambda^{x_2}}{x_2!} \times \dots \times \frac{\exp\{-\lambda\} \lambda^{x_n}}{x_n!} \\ &= \frac{\exp\{-n\lambda\} \lambda^{\sum_{i=1}^n x_i}}{\prod_{i=1}^n x_i!}. \end{aligned}$$

Função de verossimilhança

Exemplo 8 (Caso contínuo) Sejam X_1, X_2, \dots, X_n uma a.a de $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Temos que a função de verossimilhança é dada por

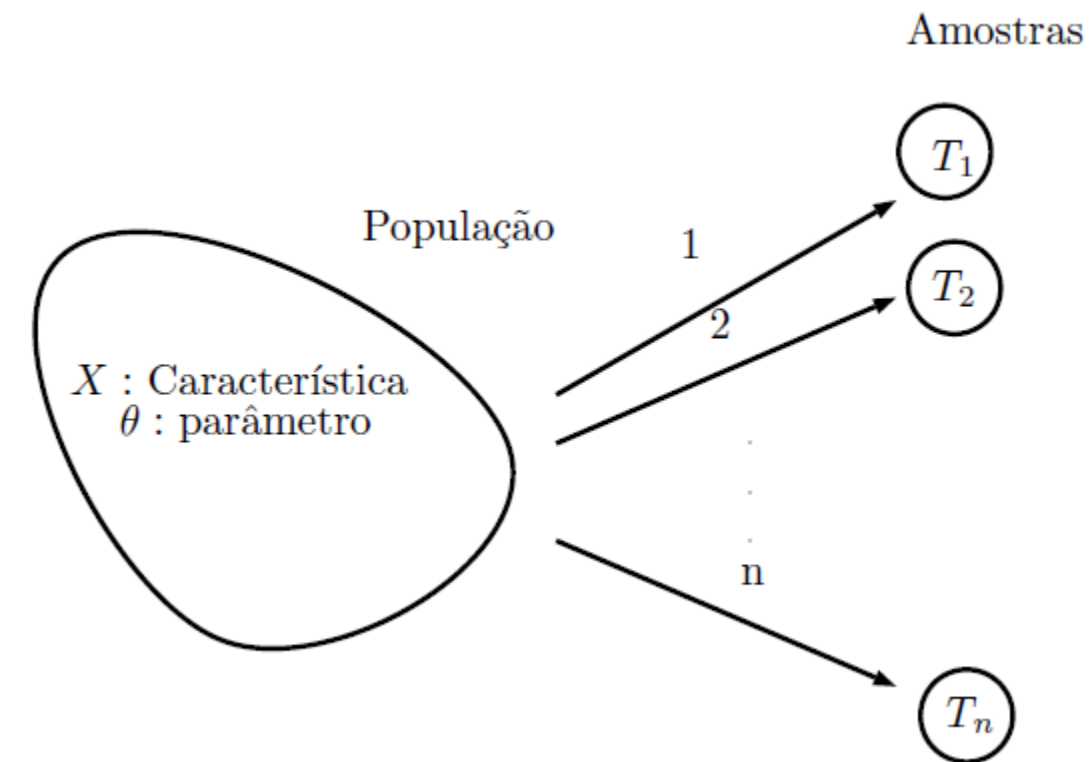
$$\begin{aligned} &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{\frac{1}{2\sigma^2}(x_i - \mu)^2\right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{\frac{1}{2\sigma^2}(x_1 - \mu)^2\right\} \times \dots \times \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{\frac{1}{2\sigma^2}(x_n - \mu)^2\right\} \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n \exp\left\{\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2\right\} \\ &= \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{n/2} \exp\left\{\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2\right\} \\ &= (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp\left\{\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2\right\} \end{aligned}$$

Distribuição amostral

Introdução

Para este caso temos:

- X : Variável de interesse;
- θ : parâmetro de interesse;
- $T = f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ Função da amostra que vai fornecer informação sobre θ .



T é uma variável aleatória.

Pergunta: Qual a distribuição de T quando X_1, X_2, \dots, X_n assume valores observados?

Distribuição amostral da média

Distribuição amostral da média

Exemplo 9 Suponha que selecionamos todas as amostras de tamanho 2, com reposição, da população $\{1, 3, 5, 5, 7\}$

X	1	3	5	7
$P(X = x)$	1/5	1/5	2/5	1/5

- Encontrar a distribuição conjunta da v.a. (X_1, X_2) , sendo X_1 sendo o número selecionado na primeira extração e X_2 o número da segunda.
- Encontre a distribuição de $\bar{X} = \frac{X_1 + X_2}{2}$.

Distribuição amostral da média

Combinação	Prob.	X_1	X_2	\overline{X}
(1, 1)	1/25	1	1	1
(1, 3)	1/25	1	3	2
(1, 5)	2/25	1	5	3
(1, 7)	1/25	1	7	4
(3, 1)	1/25	3	1	2
(3, 3)	1/25	3	3	3
(3, 5)	2/25	3	5	4
(3, 7)	1/25	3	7	5
(5, 1)	2/25	5	1	3
(5, 3)	4/25	5	3	4
(5, 5)	2/25	5	5	5
(5, 7)	1/25	5	7	6
(7, 1)	1/25	5	7	4
(7, 3)	1/25	5	7	5
(7, 5)	1/25	5	7	6
(7, 7)	1/25	5	7	7

Distribuição conjunta:

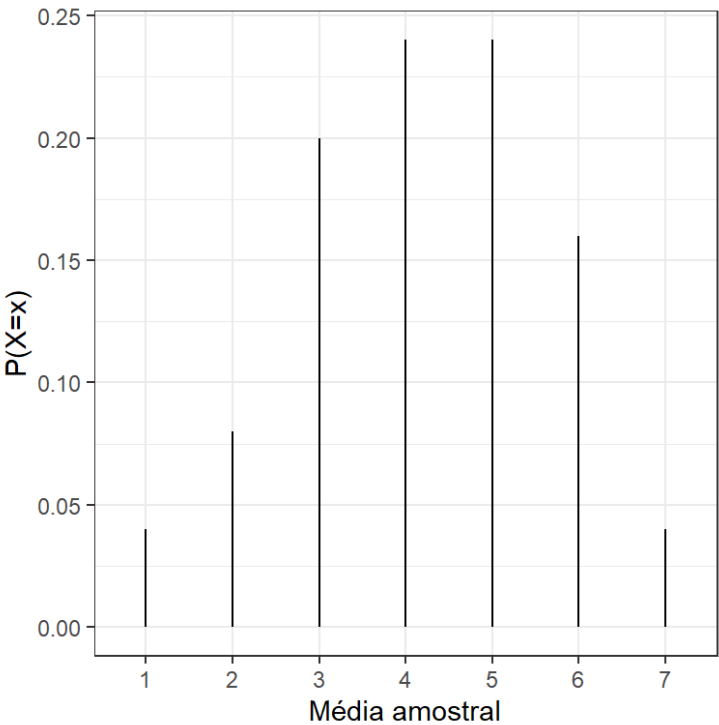
X_1/X_2	1	3	5	7	Total
1	1/25	1/25	2/25	1/25	1/5
3	1/25	1/25	2/25	1/25	1/5
5	2/25	2/25	4/25	2/25	2/5
7	1/25	1/25	2/25	1/25	1/5
Total	1/5	1/5	2/5	1/5	Total

Distribuição amostral da média

Distribuição amostral da média \bar{X} :

\bar{X}	1	2	3	4	5	6	7
$P(\bar{X} = \bar{x})$	$\frac{1}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{5}{25}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{1}{25}$

```
1 require(ggplot2)
2 mx      <- c(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)
3 pmx     <- c(1/25, 2/25, 5/25, 6/25, 6/25, 4/25, 1/25)
4 dados   <- data.frame(mx, pmx)
5 ggplot(data=dados, aes(x = factor(mx), ymin=0, ymax=pmx)) + geom_linerange() +
6   scale_x_discrete(breaks=1:7) + ylab("P(X=x)") +
7   xlab("Média amostral") + theme_bw()
```



Distribuição amostral da média

- O primeiro momento amostral é a média definida como:

$$\overline{X} = \overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i) .$$

onde X_1, X_2, \dots, X_n é uma amostra aleatória com f.p/f.d $f(\cdot)$.

- \overline{X} é função das v.a X_1, X_2, \dots, X_n e, portanto a distribuição pode ser encontrada teoricamente.
- Pode ser útil pensar na média amostral \overline{X} como uma estimativa da média μ da f.p/f.d $f(\cdot)$ a partir de qual amostra foi selecionada.

Um dos objetivos da amostragem é estimar μ a partir de \overline{X} .

Distribuição amostral da média

Teorema 3 Seja X_1, X_2, \dots, X_n uma a.a com f.p/f.d $f(\cdot)$, média μ e variância σ^2 .

Considere:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i).$$

Então, $E(\bar{X}) = \mu_{\bar{X}} = \mu$ e $Var(\bar{X}) = \sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$.

$E(\bar{X}) = \mu$: diz que em média \bar{X} é igual ao parâmetro μ sendo estimado ou que a distribuição de \bar{X} está centrada em μ .

$Var(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$: diz que a dispersão dos valores de \bar{X} em torno de μ é pequena para amostras grandes em comparação com tamanhos menores.

Teoremas de convergência

Teoremas de convergência

- Para amostras grandes, os valores de \bar{X} (que são usados para estimar μ) tendem a estar mais concentrados de μ do que em amostras pequenas.
- Esta noção será definida pela **Lei dos Grandes Números**
- Seja $E(X) = \mu$ para a f.p/f.d $f(\cdot)$. Desejamos estimar μ .
- De maneira não rigorosa, $E(X)$ é a média de um número infinito de valores da variável aleatória X .
- Em qualquer problema real podemos observar apenas um número finito de valores da variável aleatória X .
- Questão: Usando apenas um número finito de valores de X (uma amostra aleatória de tamanho n) pode ser feita qualquer inferência confiável sobre $E(X)$? **A resposta é sim.**
- Usaremos isso através da Lei Fraca dos Grandes Números.

Teoremas de convergência

Teorema 4 (Lei fraca dos Grandes Números) Seja X_1, X_2, \dots, X_n uma a.a de tamanho n de uma população com variável X , com média $E(X) = \mu$ e $Var(X) = \sigma^2 < \infty$. Sejam, $\epsilon > 0$ e $0 < \delta < 1$. Se, $n > \frac{\sigma^2 \epsilon^2}{\delta}$, então,

$$P(|\bar{X}_n - \mu| < \epsilon) \geq 1 - \delta,$$

ou seja, \bar{X}_n converge em probabilidade para μ .

Teorema de convergência

Seja X_1, X_2, \dots, X_n uma a.a. de $X \sim \text{Ber}(0.5)$. Observe que,

$$X_i = \begin{cases} 0, & \text{fracasso} \\ 1, & \text{sucesso} \end{cases}, i = 1, 2, \dots, n.$$

A proporção amostral é determinada por

$$\hat{p}_n = \overline{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$

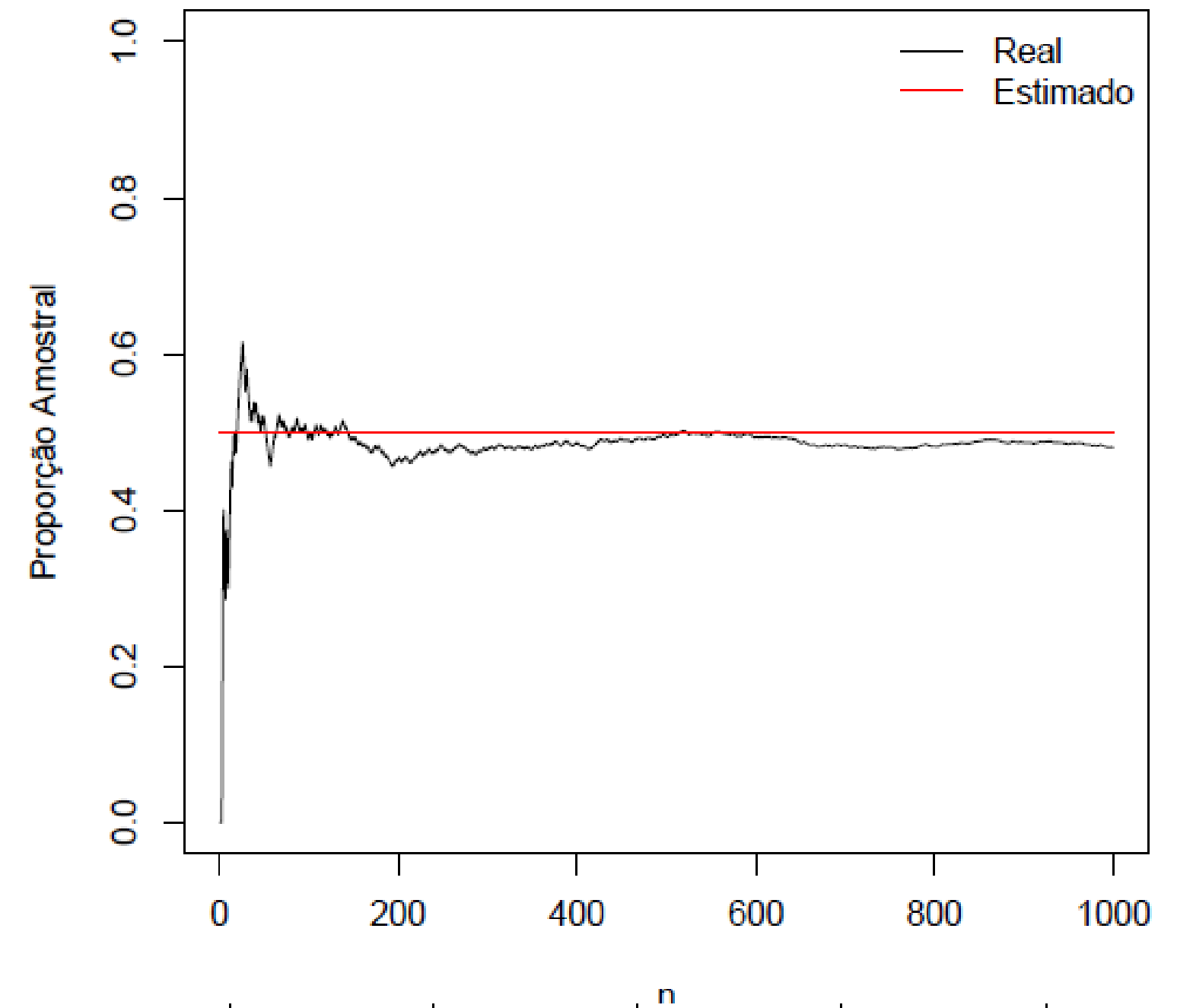
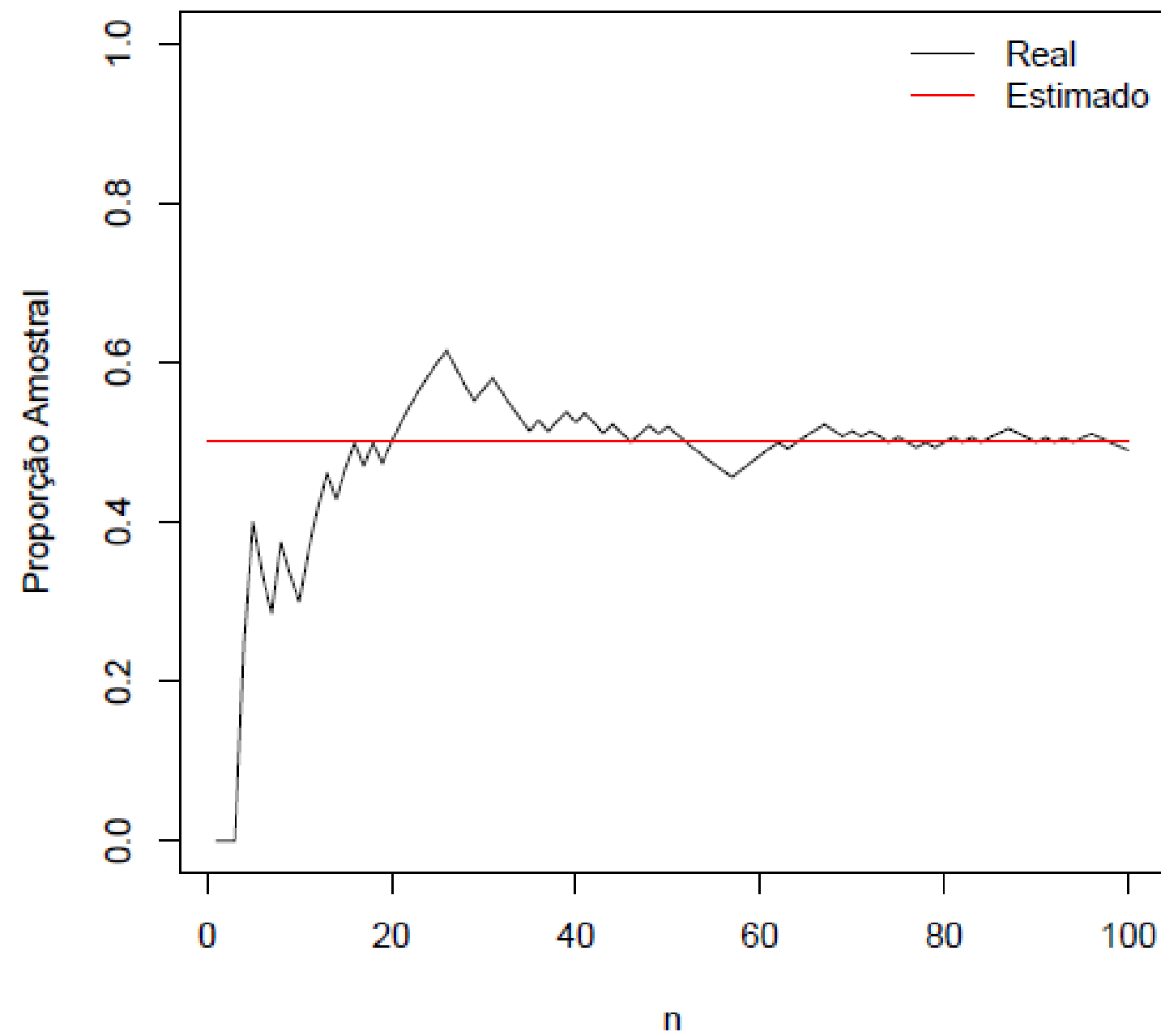
$$\text{Para } n = 1 \quad \Rightarrow \quad \hat{p}_1 = \frac{X_1}{1}.$$

$$\text{Para } n = 2 \quad \Rightarrow \quad \hat{p}_2 = \frac{X_1 + X_2}{2}.$$

⋮

$$\text{Para } n = n \quad \Rightarrow \quad \hat{p}_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}.$$

Teorema de convergência



Teorema central do limite

O Teorema Central do Limite é um dos mais importantes resultados em toda área de Probabilidade e Estatística. Ele nos diz aproximadamente como a **média amostral** é distribuída.

Teorema 5 (Teorema Central do Limite - TCL) Seja X_1, X_2, \dots, X_n uma sequência de v.a.'s independentes com $E(X_i) = \mu_i$ e $Var(X_i) = \sigma_i^2 < \infty, i = 1, 2, \dots, n$. Tome $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, então, sob determinadas condições gerais,

$$Z_n = \frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{Var(S_n)}} = \frac{S_n - \sum_{i=1}^n \mu_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2}} \rightarrow N(0, 1).$$

A distribuição de Z_n se aproxima da $N(0, 1)$ quando $n \rightarrow \infty$.

O **Teorema 5** nos diz que a distribuição limite de Z_n (S_n padronizado) será a distribuição $N(0, 1)$.

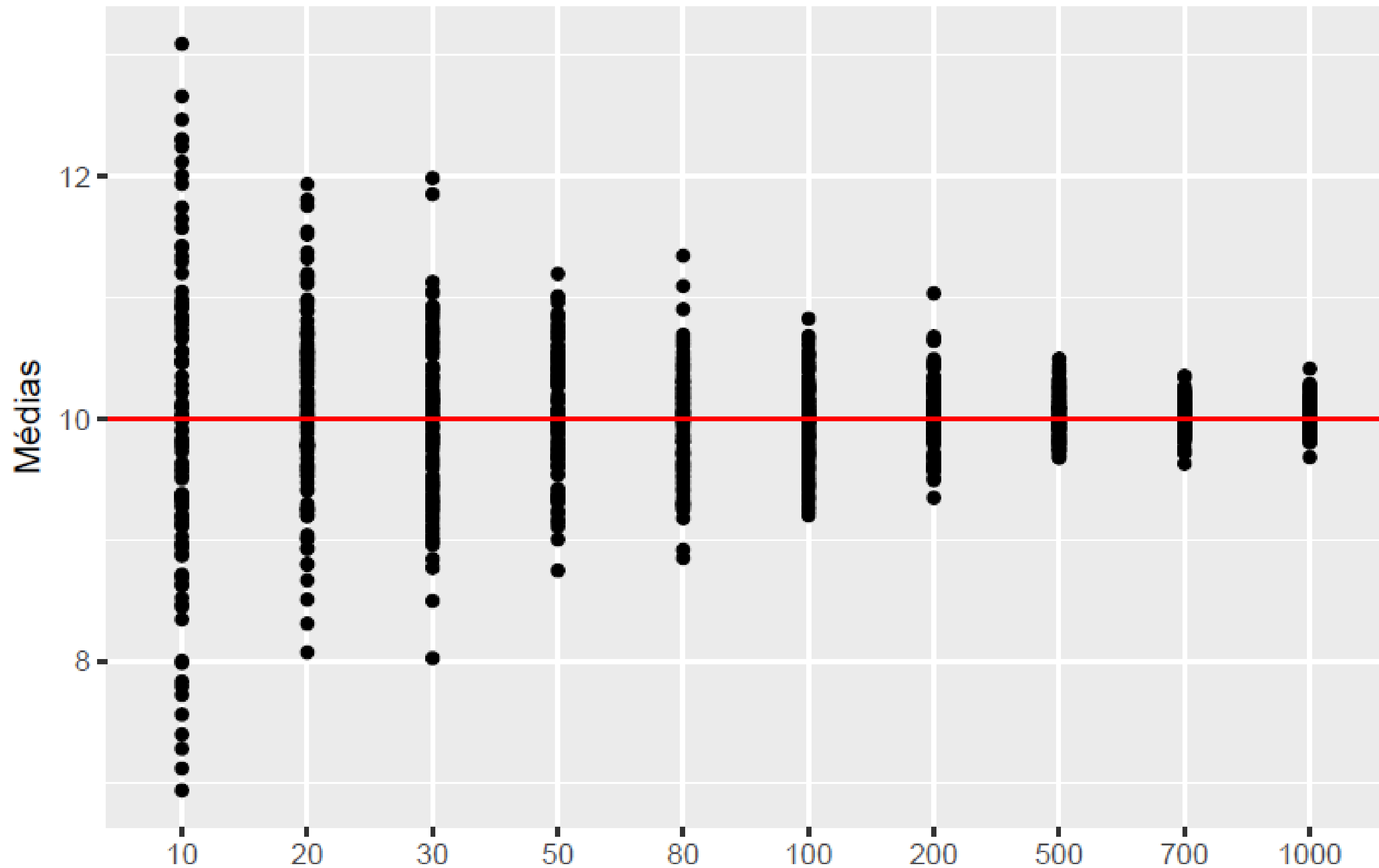
Distribuição amostral da média

Corolário 2 Seja (X_1, X_2, \dots, X_n) uma a.a. de X com $E(X) = \mu$ e $Var(X) = \sigma^2 < \infty$. Então, para $n \rightarrow \infty$,

$$Z_n = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \rightarrow N(0, 1).$$

- Em outras palavras \bar{X}_n é assintoticamente distribuído como uma Normal com média μ e variância σ^2/n .
- Um aspecto importante sobre o [Teorema 5](#) é o fato de que nada é dito sobre a forma da **f.p** ou **f.d original**. Qualquer que seja a distribuição, dado que possui variância **finita**, a média amostral terá **aproximadamente** distribuição Normal para amostras grandes.

Representação do TCL graficamente



Algumas distribuições exatas

- Se $X \sim Ber(\theta)$, então:

$$P(\bar{X} = \bar{x}_n) = \binom{n}{n\bar{x}_n} \theta^{n\bar{x}_n} (1 - \theta)^{n - n\bar{x}_n}, \bar{x}_n = 0, 1/n, 2/n, \dots, 1.$$

- Se $X \sim Pois(\theta)$, então:

$$P(\bar{X} = \bar{x}_n) = \frac{e^{-n\theta} \theta^{n\bar{x}_n}}{n\bar{x}_n!}, \bar{x}_n = 0, 1/n, 2/n, \dots$$

- Se $X \sim Normal(\mu, \sigma^2)$, então:

$$\bar{X}_n \sim N(\mu, \sigma^2).$$

- Se $X \sim Exp(\theta)$, então:

$$\bar{X}_n \sim Gama(n, n\theta).$$

Distribuição amostral da proporção

- Seja X_1, X_2, \dots, X_n uma a.a. de $X \sim \text{Ber}(\theta)$.
- Em que θ representa a proporção de elementos com uma determinada característica na população.
- Temos que

$$E(X_i) = \theta \quad \text{e} \quad \text{Var}(X_i) = \theta(1 - \theta).$$

- Seja $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, então a proporção amostral é definida por

$$\hat{p} = \frac{S_n}{n} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} = \bar{X}.$$

Distribuição amostral da proporção

Distribuição exata:

- Temos que $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n \sim \text{Bin}(n, \theta)$, então

$$P\left(\hat{p} = \frac{k}{n}\right) = \binom{n}{k} \theta^k (1 - \theta)^{n-k}, k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Distribuição aproximada pelo TCL:

- Temos que $\hat{p} = \frac{S_n}{n} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} = \bar{X}_n$, então

$$\hat{p} \sim N\left(\theta, \frac{\theta(1 - \theta)}{n}\right).$$

Distribuição amostral de estatísticas de ordem

Estatísticas de ordem amostrais

- Seja X_1, X_2, \dots, X_n sendo uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. com função de distribuição $F(\cdot)$.
- Podemos reordenar (de forma crescente) essa sequência da seguinte forma

$$X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}.$$

- No caso em que F seja contínua, temos que

$$X_{(1)} < X_{(2)} < \dots < X_{(n)}.$$

- Uma vez que $P(X_i = X_j) = 0$ para todo $i \neq j$, para variáveis aleatórias contínuas.

Estatísticas de ordem amostrais

- Para uma sequência de v.a's X_1, X_2, \dots, X_n i.i.d., $X_{(k)}$ é denominada de k —ésima estatística de ordem.
- O mínimo é denotado por $X_{(1)}$:

$$X_{(1)} = \min(X_1, X_2, \dots, X_n).$$

- De maneira similar, o máximo é denotado por $X_{(n)}$:

$$X_{(n)} = \max(X_1, X_2, \dots, X_n).$$

Estatísticas de ordem amostrais

Seja $g(x)$ e $G(X)$ as funções de densidade (probabilidade) e distribuição de X , respectivamente.

- Para o $X_{(1)}$:
 - A função de distribuição é dada por

$$F_{X_{(1)}}(x) = 1 - (1 - G(x))^n.$$

- A função de densidade é dada por

$$f_{X_{(1)}}(x) = \frac{d}{dx} F_{X_{(1)}}(x) = ng(x)(1 - G(x))^{(n-1)}.$$

Estatísticas de ordem amostrais

Seja $g(x)$ e $G(X)$ as funções de densidade (probabilidade) e distribuição de X , respectivamente.

- Para o $X_{(n)}$:
 - A função de distribuição é dada por

$$F_{X_{(n)}}(x) = G(x)^n.$$

- A função de densidade é dada por

$$f_{X_{(n)}}(x) = \frac{d}{dx} F_{X_{(n)}}(x) = ng(x)G(x)^{(n-1)}.$$

Amostrando da Normal - Média amostral

Média amostral

- Esta seção lida com propriedades das quantidades amostrais provenientes de uma população Normal.
- A distribuição Normal tem papel importante nos estudos estatísticos.
- Muitas populações seguem a distribuição Normal com um bom grau de aproximação.
- Modelos estatísticos utilizando a distribuição Normal são amplamente considerados na literatura científica.
- Amostrar de uma população Normal leva a muitas propriedades úteis e também a muitas distribuições amostrais conhecidas.

Média amostral e a população Normal:

- A média amostral é uma das mais simples funções de uma amostra aleatória.
- Para uma amostra aleatória da distribuição Normal, a distribuição exata da média amostral também é Normal (para qualquer tamanho amostral n , ou seja, não precisamos do TCL para dar suporte a esta afirmação).

Média amostral

Teorema 6 Seja $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i)$ a média amostral de uma amostra aleatória X_1, \dots, X_n obtida da distribuição Normal com média μ e variância σ^2 . Então, $\bar{X}_n \sim N(\mu, \sigma^2/n)$.

Prova: Usaremos a função geradora de momentos (f.g.m),

$$\begin{aligned} m_{\bar{X}_n}(t) &= E\left(e^{t\bar{X}_n}\right) = E\left[\exp\left\{\frac{t}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right\}\right] \\ &= E\left[\prod_{i=1}^n \exp\left\{\frac{t}{n} X_i\right\}\right] \underbrace{=}_{X_i' \text{ s ind.}} \prod_{i=1}^n E\left[\exp\left\{\frac{t}{n} X_i\right\}\right] \\ &= \prod_{i=1}^n m_{X_i}(t/n) = \prod_{i=1}^n \exp\left\{\mu \frac{t}{n} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{t^2}{n^2}\right\} \\ &= \exp\left\{\mu t + \frac{\sigma^2/n}{2} t^2\right\}. \Rightarrow \text{f.g.m da } N(\mu, \sigma^2/n) \end{aligned}$$

Média amostral

- Dado que temos a distribuição exata de \overline{X}_n quando estimamos μ com \overline{X}_n , seremos capazes de calcular, por exemplo, a probabilidade exata de que nosso estimador \overline{X}_n esteja dentro de uma distância fixada do parâmetro desconhecido μ .

Amostrando da Normal - Variância amostral

Variância amostral

- A distribuição Normal possui dois parâmetros desconhecidos μ e σ^2 .
- Vimos anteriormente a distribuição amostral de \bar{X}_n que estima μ .
- Procuremos agora pela distribuição de

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2,$$

que estima o parâmetro σ^2 .

- A distribuição Qui-Quadrado desempenha um papel fundamental na determinação da distribuição de S^2 .

Variância amostral

Definição 8 (Distribuição Qui-Quadrado) Seja X uma v.a. com f.d

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(k/2)} \left(\frac{1}{2}\right)^{k/2} x^{k/2-1} \exp\left\{-\frac{1}{2}x\right\} \times I_{(0,\infty)}(x),$$

então dizemos que X tem distribuição Qui-Quadrado com k graus de liberdade (k é um número inteiro positivo).

Notação: χ_k^2 = Qui-Quadrado com k graus de liberdade.

- A densidade da Qui-Quadrado é um caso particular da densidade $Gama(r, \lambda)$, onde $r = k/2$ e $\lambda = 1/2$.
- Se $X \sim Ga(r, \lambda)$ temos $f(x) = \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-\lambda x}, I_{(0,\infty)}(x)$.
- Fazendo $r = k/2$ e $\lambda = 1/2$, tem-se na densidade definida anteriormente.

Variância amostral

Temos também que:

$$E(X) = \frac{r}{\lambda} = \frac{k/2}{1/2} = k \quad \text{e} \quad Var(X) = \frac{r}{\lambda^2} = \frac{k/2}{1/2^2} = 2k.$$

A f.g.m é dada por

$$m_X(t) = \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^{-r} = \left(1 - \frac{t}{1/2}\right)^{-k/2} = \left(\frac{1}{1-2t}\right)^{k/2}, \quad \text{para todo } t < \lambda = 1/2.$$

Teorema 7 Se X_1, \dots, X_n são v.a. Normais independentes com médias μ_i e variâncias σ_i^2 (Note que não precisar ser i.i.d). Então,

$$U = \sum_{i=1}^k \left(\frac{X_i - \mu_i}{\sigma_i} \right)^2 \sim \chi_k^2.$$

Variância amostral

Prova: Seja $Z_i = \frac{X_i - \mu_i}{\sigma_i}$, em que $Z_i \sim N(0, 1)$. Assim,

$$\begin{aligned} m_U(t) &= E \left[e^{tU} \right] = E \left[e^{t \sum_{i=1}^k Z_i^2} \right] \\ &= E \left[\prod_{i=1}^k e^{tZ_i^2} \right] \underbrace{=}_{Z_i' \text{ ind.}} \prod_{i=1}^k E \left[e^{tZ_i^2} \right]. \end{aligned}$$

Variância amostral

Mas,

$$\begin{aligned} E \left[e^{tZ_i^2} \right] &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tZ^2} (2\pi)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}Z^2} dZ = \int_{-\infty}^{\infty} (2\pi)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}(Z^2 - 2tZ^2)} dZ \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (2\pi)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}(1-2t)Z^2} dZ \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-2t}} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{1-2t} (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2 \left(\frac{1}{(1-2t)} \right)} Z^2 \right\} dZ \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-2t}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[2\pi \left(\frac{1}{(1-2t)} \right) \right]^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2 \left(\frac{1}{(1-2t)} \right)} Z^2 \right\} dZ \end{aligned}$$

Variância amostral

- A expressão de dentro da integral é a densidade da $N(0, V)$, onde $V = \frac{1}{(1-2t)}$.
- O resultado da integral é, portanto, igual a 1.
- Conclusão:

$$E \left[e^{tZ_i^2} \right] = m_{Z_i^2}(t) = \left(\frac{1}{1-2t} \right)^{\frac{1}{2}}, \text{ para } t < 1/2.$$

Nota: O resultado acima determina que $Z_i^2 \sim \chi_1^2$, ou seja, se $Z_i \sim N(0, 1)$ temos $Z_i^2 \sim \chi_1^2$.

$$m_U(t) = \prod_{i=1}^k E \left[e^{tZ_i^2} \right] = \prod_{i=1}^k \left(\frac{1}{1-2t} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{1-2t} \right)^{\frac{k}{2}}$$

Portanto, $U \sim \chi_2^k$ finalizando a prova.

Variância amostral

Corolário 3 Se X_1, \dots, X_n são v.a. Normais independentes com médias μ e variâncias σ^2

$$U = \sum_{i=1}^k \frac{(X_i - \mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi_k^2.$$

Em palavras, o [Teorema 7](#) diz que a soma de quadrados de variáveis aleatórias $N(0,1)$ independentes possui distribuição Qui-Quadrado com grau de liberdade igual ao número de termos na soma.

Variância amostral

Teorema 8 Se Z_1, Z_2, \dots, Z_n é uma amostra aleatória da distribuição $N(0, 1)$, então:

- i. $\bar{Z} \sim N(0, 1/n)$;
- ii. \bar{Z} e $\sum_{i=1}^n (Z_i - \bar{Z})^2$ são independentes;
- iii. $\sum_{i=1}^n (Z_i - \bar{Z})^2 \sim \chi_{n-1}^2$.

Prova: (i) é um caso especial do [Teorema 7](#). A prova da parte (ii) será incompleta (somente o caso $n = 2$). Se $n = 2$ temos $\bar{Z} = (Z_1 + Z_2)/2$ e

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 (Z_i - \bar{Z})^2 &= (Z_1 - (Z_1 + Z_2)/2)^2 + (Z_2 - (Z_1 + Z_2)/2)^2 \\ &= \frac{(Z_1 - Z_2)^2}{4} + \frac{(Z_2 - Z_1)^2}{4} = \frac{(Z_2 - Z_1)^2}{2} \end{aligned}$$

Variância amostral

- Então, \bar{Z} é função de $Z_1 + Z_2$ e $\sum_{i=1}^2 (Z_i - \bar{Z})^2$ é função de $Z_2 - Z_1$.
- Para mostrar que \bar{Z} e $\sum_{i=1}^2 (Z_i - \bar{Z})^2$ são independentes basta mostrar que $Z_1 + Z_2$ e $Z_2 - Z_1$ são independentes.

Veja que

$$\begin{aligned} m_{Z_1+Z_2}(t_1) &= E[e^{t_1(Z_1+Z_2)}] = E[e^{t_1 Z_1} e^{t_1 Z_2}] \\ &\underbrace{=}_{Z_i' \text{ ind.}} E[e^{t_1 Z_1}] E[e^{t_1 Z_2}] = \exp\left\{\frac{1}{2}t_1^2\right\} \exp\left\{\frac{1}{2}t_1^2\right\} \\ &= \exp\{t_1^2\}. \end{aligned}$$

Similarmente, $m_{Z_2-Z_1}(t_2) = \exp\{t_2^2\}$. Se $Z_1 \sim N(0, 1)$, então $-Z_1 \sim N(0, 1)$.

Variância amostral

Além disso, temos que a $m_{Z_1+Z_2, Z_2-Z_1}(t_1, t_2)$

$$\begin{aligned} &= E \left[e^{t_1(Z_1+Z_2)+t_2(Z_2-Z_1)} \right] = E \left[e^{(t_1-t_2)Z_1} e^{(t_1+t_2)Z_2} \right] \\ &\underbrace{=}_{ind.} E \left[e^{(t_1-t_2)Z_1} \right] E \left[e^{(t_1+t_2)Z_2} \right] = \exp \left\{ \frac{1}{2} (t_1 - t_2)^2 \right\} \exp \left\{ \frac{1}{2} (t_1 + t_2)^2 \right\} \\ &= \exp \left\{ \frac{1}{2} (t_1 - t_2)^2 \right\} \exp \left\{ \frac{1}{2} (t_1 + t_2)^2 \right\} \\ &= \exp \left\{ \frac{1}{2} [t_1^2 - 2t_1t_2 + t_2^2 + t_1^2 + 2t_1t_2 + t_2^2] \right\} = \exp \{ t_1^2 \} \exp \{ t_2^2 \} \\ &= m_{Z_1+Z_2}(t_1) m_{Z_2-Z_1}(t_2). \end{aligned}$$

Visto que a f.g.m. conjunta pode ser fatorada no produto das f.g.m.'s $Z_1 + Z_2$ e $Z_2 - Z_1$ são independentes.

Variância amostral

iii. Para provar essa parte, iremos supor que \bar{Z} e $\sum_{i=1}^n (Z_i - \bar{Z})^2$ para um n arbitrário.

Note que:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n Z_i^2 &= \sum_{i=1}^n (Z_i - \bar{Z} + \bar{Z})^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (Z_i - \bar{Z})^2 + \underbrace{2\bar{Z} \sum_{i=1}^n (Z_i - \bar{Z})}_{n\bar{Z} - n\bar{Z} = 0} + n\bar{Z}^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (Z_i - \bar{Z})^2 + n\bar{Z}^2\end{aligned}$$

Variância amostral

Usando o resultado da parte (ii) temos que \bar{Z} e $\sum_{i=1}^n (Z_i - \bar{Z})^2$ são independentes.

Então:

$$m_{\sum_{i=1}^n Z_i^2}(t) = m_{\sum_{i=1}^n (Z_i - \bar{Z})^2 + n\bar{Z}^2}(t) \underbrace{=}_{ind.} m_{\sum_{i=1}^n (Z_i - \bar{Z})^2}(t) m_{n\bar{Z}^2}(t)$$

e

$$m_{\sum_{i=1}^n (Z_i - \bar{Z})^2}(t) = \frac{m_{\sum_{i=1}^n Z_i^2}(t)}{m_{n\bar{Z}^2}(t)} = \frac{\overbrace{\left(\frac{1}{1-2t}\right)^{\frac{n}{2}}}^{\chi_n^2}}{\underbrace{\left(\frac{1}{1-2t}\right)^{\frac{1}{2}}}_{\chi_1^2}} = \left(\frac{1}{1-2t}\right)^{\frac{n-1}{2}}.$$

O resultado da f.g.m. da distribuição χ_{n-1}^2 .

Variância amostral

- O Teorema 8 foi definido para uma amostra aleatória da distribuição $N(0, 1)$, entretanto se desejamos fazer inferência sobre μ e σ^2 devemos considerar uma amostra da $N(\mu, \sigma^2)$.
- Se X_1, X_2, \dots, X_n uma a.a. da $N(\mu, \sigma^2)$. Neste caso definimos $Z_i = (X_i - \mu)/\sigma$. (ver Teorema 8)
- Parte (i) do Teorema 8 se torna:

$$1. \bar{Z} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)/\sigma = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1/n)$$

Variância amostral

- Parte (ii) do Teorema 8 se torna:

$$2. \bar{X} = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} e$$

$$\sum_{i=1}^n (Z_i - \bar{Z})^2 = \sum_{i=1}^n \left[\frac{X_i - \mu}{\sigma} - \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \right]^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2}$$

são independentes, implicando que \bar{X} e $\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ também são.

- Parte (iii) do Teorema 8 se torna 3. $\sum_{i=1}^n (Z_i - \bar{Z})^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$

conforme mostrado em ii.

Variância amostral

Corolário 4 Considere X_1, X_2, \dots, X_n uma a.a. da $N(\mu, \sigma^2)$. Seja

$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ a variância amostral. Então,

$$U = \frac{(n-1)}{\sigma^2} S^2 \sim \chi_{n-1}^2.$$

Prova: Considere a parte (iii) da extensão do **Teorema 8**.

Observação: Como S^2 é uma função linear de U no corolário acima, a densidade de S^2 pode ser obtida a partir da densidade de U .

$U \sim \chi_{n-1}^2$ e S^2 é dada por uma função monótona de U .

$$S^2 = \frac{\sigma^2}{n-1} U, U = \frac{(n-1)}{\sigma^2} S^2 \text{ e } \frac{dU}{dS^2} = \frac{n-1}{\sigma^2}$$

Variância amostral

A função de densidade de S^2 é dada por

$$\begin{aligned} f_{S^2}(s^2) &= f_U \left[\frac{(n-1)}{\sigma^2} s^2 \right] \times \left| \frac{n-1}{\sigma^2} \right|, \quad \text{para } s^2 > 0 \\ &= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}} \left[\frac{(n-1)}{\sigma^2} s^2 \right]^{\frac{n-1}{2}-1} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \frac{(n-1)}{\sigma^2} s^2 \right\} \frac{(n-1)}{\sigma^2} I_{(0,\infty)} \\ &= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}} \left[\frac{(n-1)}{\sigma^2} \right]^{\frac{n-1}{2}} \left[\frac{(n-1)}{\sigma^2} \right]^{-1} (s^2)^{\frac{n-1}{2}-1} \times \\ &\times \frac{(n-1)}{\sigma^2} \exp\left\{ -\frac{(n-1)}{2\sigma^2} s^2 \right\} \times I_{(0,\infty)}(s^2) \\ &= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \left[\frac{(n-1)}{2\sigma^2} \right]^{\frac{n-1}{2}} (s^2)^{\frac{n-3}{2}} \exp\left\{ -\frac{(n-1)}{2\sigma^2} s^2 \right\} \times I_{(0,\infty)}(s^2) \end{aligned}$$

Variância amostral

- Todos os resultados desta subseção são desenvolvidos para o caso de populações Normais.
- Pode ser provado que para nenhuma outra distribuição:
 1. A média e a variância amostral são independentemente distribuídas.
 2. A média amostral possui exatamente a distribuição Normal

Distribuição F

Distribuição F

- Apresenta considerável interesse prático.
- É a distribuição da razão de duas variáveis aleatórias Qui-Quadrado independentes e divididas pelos seus respectivos graus de liberdade.
- Suponha que $U \sim \chi_m^2$ e $V \sim \chi_n^2$ são variáveis aleatórias independentes. A densidade conjunta será dada por:

$$\begin{aligned} f_{U,V}(u, v) &= f_U(u) f_V(v) \\ &= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{m}{2}} u^{\frac{m}{2}-1} \exp\left(-\frac{1}{2}u\right) I_{(0,\infty)}(u) \\ &\quad \times \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}} v^{\frac{n}{2}-1} \exp\left(-\frac{1}{2}v\right) I_{(0,\infty)}(v) \\ &= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) 2^{\frac{m+n}{2}}} u^{\frac{m}{2}-1} v^{\frac{n}{2}-1} \exp\left(-\frac{1}{2}(u+v)\right) I_{(0,\infty)}(u) I_{(0,\infty)}(v) \end{aligned}$$

Distribuição F

- Desejamos encontrar a distribuição da quantidade

$$X = \frac{\frac{U}{m}}{\frac{V}{n}}$$

conhecida como **razão de variâncias**.

- Para encontrar a distribuição de X , considere:
- Jacobiano da Transformação:

$$X = \frac{\frac{U}{m}}{\frac{V}{n}} = \frac{n}{m} \frac{U}{V} \quad \text{e} \quad Y = V$$

$$U = \frac{m}{n} Y X$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial U}{\partial X} & \frac{\partial U}{\partial Y} \\ \frac{\partial V}{\partial X} & \frac{\partial V}{\partial Y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{mY}{n} & \frac{mX}{n} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{mY}{n}$$

Distribuição F

- A distribuição conjunta de X e Y é dada por:

$$\begin{aligned} f_{X,Y}(x, y) &= f_{U,V}\left(\frac{m}{n}yx, y\right) \cdot \left|\frac{my}{n}\right| \cdot I_{(0,\infty)}(x) \cdot I_{(0,\infty)}(y) \\ &= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)2^{\frac{m+n}{2}}} \left(\frac{m}{n}yx\right)^{\frac{m}{2}-1} y^{\frac{n}{2}-1} \\ &\times \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{m}{n}yx + y\right]\right\} \frac{my}{n} I_{(0,\infty)}(x) I_{(0,\infty)}(y) \end{aligned}$$

Distribuição F

- A distribuição marginal de X é

$$\begin{aligned} &= \int_0^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dy = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)2^{\frac{m+n}{2}}} \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}} x^{\frac{m-2}{2}} \\ &\times \int_0^{\infty} y^{\frac{m+n-2}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}y\left(\frac{m}{n}x + 1\right)\right\} dy \\ &= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} 2^{-\frac{m+n}{2}} \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}} x^{\frac{m-2}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\left[\frac{1}{2}\left(\frac{m}{n}x + 1\right)\right]^{\frac{m+n}{2}}} \\ &\times \int_0^{\infty} \frac{\left[\frac{1}{2}\left(\frac{m}{n}x + 1\right)\right]^{\frac{m+n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)} y^{\frac{m+n}{2}-1} \exp\left\{-y\frac{1}{2}\left(\frac{m}{n}x + 1\right)\right\} dy \end{aligned}$$

Distribuição F

- Dentro da integral temos a densidade da

[Math Processing Error]

- Portanto, esta integral resulta em 1. Logo,

[Math Processing Error]

Distribuição F

Definição 9 (Distribuição F) Se X é uma variável aleatória com a f.d $f_x(x)$ do slide anterior, então X é definida como uma variável aleatória apresentando distribuição F com m e n graus de liberdade.

- **Notação:** $X \sim F_{m,n}$

Importante:

- A ordem na qual os graus de liberdade são indicados é importante visto que a f.d da distribuição não é simétrica em relação a m e n .
- Se a variável aleatória F é obtida a partir da razão de duas variáveis aleatórias Qui-Quadrado independentes, divididas pelos seus respectivos graus de liberdade, então o grau de liberdade da variável no numerador deve ser indicado primeiro na notação da F .

Distribuição F

Teorema 9 Seja U uma variável aleatória χ_m^2 e V uma variável aleatória χ_n^2 . Assuma também que U e V são independentes. Então:

$$X = \frac{U/m}{V/n} \quad \text{tem distribuição} \quad F_{m,n}.$$

Corolário 5 Se X_1, \dots, X_{m+1} é uma amostra aleatória de tamanho $m + 1$ de uma população $N(\mu_X, \sigma^2)$. Considere Y_1, \dots, Y_{n+1} uma amostra aleatória de tamanho $n + 1$ de uma população $N(\mu_Y, \sigma^2)$.

- Assuma que as duas amostras sejam independentes, então:

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{j=1}^{m+1} (X_j - \bar{X})^2 \sim \chi_m^2 \quad \text{e} \quad \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n+1} (Y_i - \bar{Y})^2 \sim \chi_n^2$$

e a estatística

$$\frac{\sum_{j=1}^{m+1} (X_j - \bar{X})^2 / m}{\sum_{i=1}^{n+1} (Y_i - \bar{Y})^2 / n} \sim F_{m,n}.$$

Distribuição F

ⁱ Observação 1:

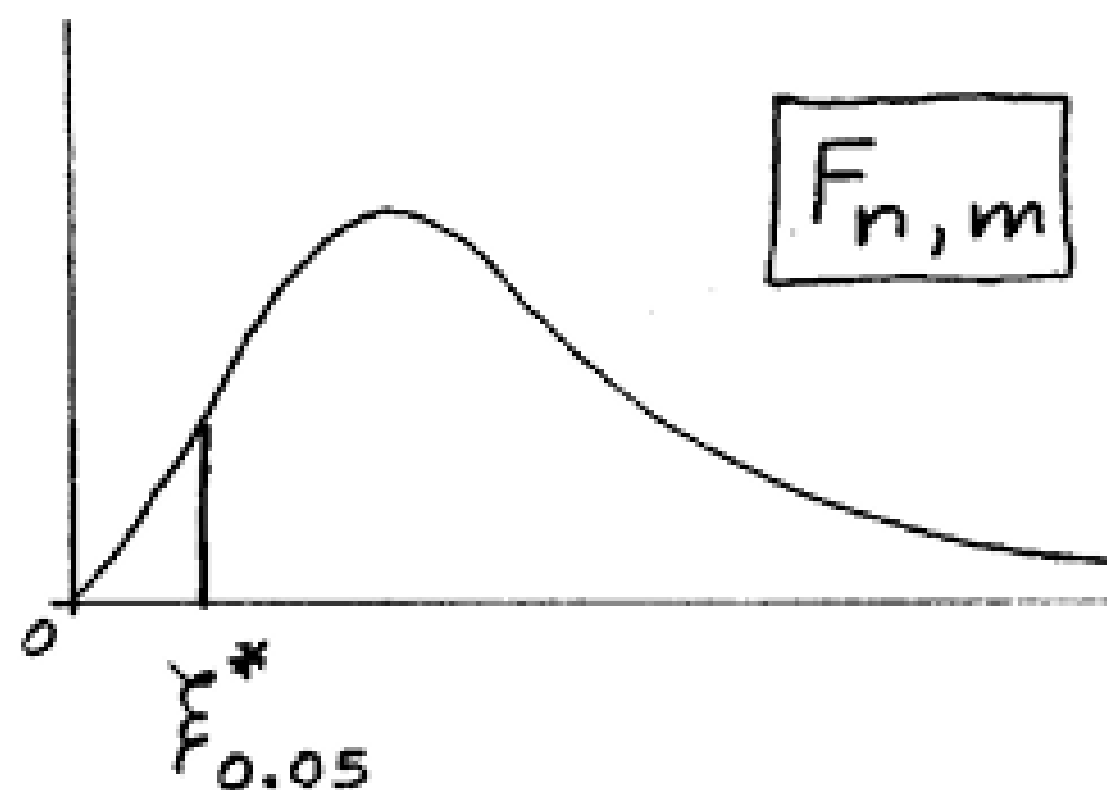
- Se $X \sim F_{m,n}$, então $E(X) = \frac{n}{n-2}$ para $n > 2$

e

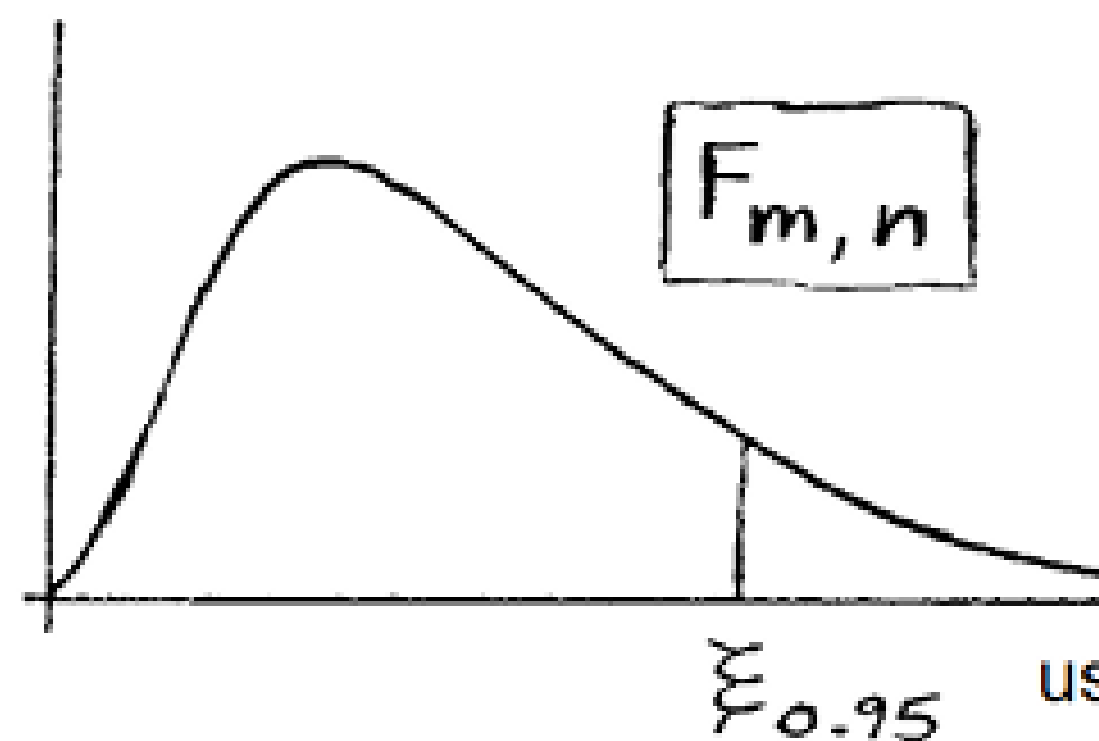
$$\text{Var}(X) = \frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)} \quad \text{para } n > 4.$$

ⁱ Observação 2:

Distribuição F



Este valor não é encontrado na Tabela da $F_{n,m}$



$$\chi^*_{0.05} = \frac{1}{\chi_{0.95}}$$

usamos a tabela $F_{m,n}$ para determinar $\chi^*_{0.05}$

Distribuição t-Student

Distribuição t-Student

- Outra distribuição de considerável importância prática.
- Seja $Z \sim N(0, 1)$ e $U \sim \chi_k^2$ v.a. independentes.
- Deseja-se encontrar a distribuição de

$$X = \frac{Z}{\sqrt{U/k}}.$$

- A densidade conjunta de Z e U é dada por

$$\begin{aligned} f_{Z,U}(z, u) &= f_Z(z) f_U(u) \\ &= (2\pi)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}z^2\right\} \frac{1}{\Gamma(k/2)} \\ &\quad \times \left(\frac{1}{2}\right)^{k/2} u^{\frac{k}{2}-1} \exp\left\{-\frac{1}{2}u\right\} I_{(-\infty, \infty)}(z) I_{(0, \infty)}(u) \end{aligned}$$

Distribuição t-Student

- Considere a seguinte transformação:

$$X = \frac{Z}{\sqrt{U/k}}, Y = U \text{ e } Z = X\sqrt{Y/k}, \text{ então}$$

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial Z}{\partial X} = \sqrt{\frac{Y}{k}} & \frac{\partial U}{\partial X} = 0 \\ \frac{\partial Z}{\partial Y} = \frac{X}{2k} \left(\frac{Y}{k}\right)^{-1/2} & \frac{\partial U}{\partial Y} = 1 \end{array} \right| = \sqrt{\frac{Y}{k}}$$

- Logo,

$$\begin{aligned} f_{XY}(x, y) &= f_{Z,U}(x\sqrt{y/k}, y) \times \sqrt{\frac{y}{k}} \\ &= (2\pi)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2} \frac{x^2 y}{k}\right\} \frac{1}{\Gamma(k/2)} \left(\frac{1}{2}\right)^{k/2} y^{\frac{k}{2}-1} \exp\left\{-\frac{1}{2} y\right\} \left(\frac{y}{k}\right)^{1/2} I_{(-\infty, \infty)}(x) \end{aligned}$$

Distribuição t-Student

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_0^{\infty} f_{XY}(x, y) dy \\ &= (2k\pi)^{-1/2} \frac{1}{\Gamma(k/2)} \left(\frac{1}{2}\right)^{k/2} \int_0^{\infty} y^{\frac{k}{2} + \frac{1}{2} - 1} \exp\left\{-\frac{1}{2}y \left[\frac{x^2}{k} + 1\right]\right\} dy \end{aligned}$$

- Dentro da integral temos o núcleo da: $Ga\left[\frac{k+1}{2}; \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{k} + 1\right)\right]$

Distribuição t-Student

$$\begin{aligned}
 f_X(x) = & (2k\pi)^{-1/2} \frac{1}{\Gamma(k/2)} \left(\frac{1}{2}\right)^{k/2} \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\left[\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{k} + 1\right)\right]^{\frac{k+1}{2}}} \times \\
 & \times \underbrace{\int_0^\infty \frac{\left[\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{k} + 1\right)\right]^{\frac{k+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)} y^{\frac{k+1}{2}-1} \exp\left\{-\frac{1}{2}y\left[\frac{x^2}{k} + 1\right]\right\} dy}_{1}
 \end{aligned}$$

Distribuição t-Student

- Assim,

$$\begin{aligned} f_X(x) &= (2k\pi)^{-1/2} \frac{1}{\Gamma(k/2)} \left(\frac{1}{2}\right)^{k/2} \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\left[\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{k} + 1\right)\right]^{\frac{k+1}{2}}} \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \frac{1}{\sqrt{k\pi}} \frac{1}{\left(\frac{x^2}{k} + 1\right)^{\frac{k+1}{2}}} I_{(-\infty, \infty)}(x). \end{aligned}$$

Distribuição t-Student

Teorema 10 (Distribuição t-Student) Se X é uma v.a. com f.d. igual a anterior, então dizemos que X segue a distribuição t-Student com k -graus de liberdade.

- **Notação:** t_k .

Teorema 11 Se $Z \sim N(0, 1)$ e $U \sim \chi_k^2$ são v.a's independentes, então

$$X = \frac{Z}{\sqrt{U/k}} \sim t_k.$$

Distribuição t-Student

O seguinte corolário mostra como o resultado do **Teorema 10** é aplicável quando consideramos a amostragem a partir da distribuição Normal.

Corolário 6 Considere X_1, X_2, \dots, X_n uma a.a. da $N(\mu, \sigma^2)$, então

$$Z = (\bar{X} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n}) \sim N(0, 1) \text{ e } \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \sim \chi_{n-1}^2.$$

- Além disso Z e U são independentes (**Teorema 8**). Sendo assim, a seguinte v.a

$$\frac{Z}{\sqrt{U/n-1}} = \frac{(\bar{X} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n})}{\sqrt{\frac{1}{\sigma^2} \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1}}} = \frac{\sqrt{n(n-1)}(\bar{X} - \mu)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}} = \frac{(\bar{X} - \mu)}{\sqrt{S^2/n}} \sim t_{n-1}.$$

Distribuição t-Student

Observações:

- Quando o grau de liberdade é igual a 1, a **distribuição t-Student** se torna a **distribuição Cauchy**.
- Conforme o grau de liberdade cresce, a distribuição t-Student se aproxima da distribuição $N(0, 1)$.
- O quadrado de uma variável aleatória com distribuição t_k terá distribuição $F_{1,k}$. Isto é, se $Y \sim t_k$ então $Y^2 \sim F_{1,k}$.
- Se X é uma variável aleatória com distribuição t_k , então

$$E(X) = 0, \quad \text{se } k > 1 \text{ e } Var(X) = \frac{k}{k-2}, \quad \text{se } k > 2.$$