Inferência Estatística II

Lista 1

AUTOR
Paulo Cerqueira Jr

AFILIAÇÕES
Faculdade de Estatística - FAEST
Universidade Federal do Pará - UFPA

Exercício 1 Seja X uma variável aleatória com função de densidade

$$f(x|\theta) = \theta^2 x e^{-\theta x}, \quad x > 0, \theta > 0.$$

Queremos testar $H_0 : \theta = 1$ versus $H_1 : \theta = 2$.

i. Qual é a região crítica se $n = 5$ e $\alpha = 0,05$?

ii. Se $n = 1$, qual é o teste que minimiza $\alpha + \beta$? E qual o valor de $\alpha + \beta$?

Exercício 2 Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da variável aleatória $X \sim N(\mu, 1)$. Queremos testar $H_0 : \mu = 0$ versus $H_1 : \mu = 1$. Encontre n que produz o teste mais poderoso com $\alpha = \beta = 0,05$.

Exercício 3 Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da variável aleatória X com função de densidade dada por

$$f(x|\theta) = \theta x^{\theta - 1}, \quad 0 < x < 1, \quad \theta > 0.$$

i. Mostre que o teste mais poderoso para testar $H_0 : \theta = 1$ versus $H_1 : \theta = 2$, rejeita H_0, se e somente se, $\sum_{i=1}^{n} - \log x_i \leq a$, onde a é uma constante.

ii. Sendo $n = 2$ e $\alpha = (1 - \log 2)/2$, qual a região crítica?

Exercício 4 Seja X uma única observação da função de densidade

$$f(x|\theta) = (2\theta x + 1 - \theta) I_{(0,1)}(x)$$

Queremos testar $H_0 : \theta = 0$ versus $H_1 : \theta = 1$.

i. Obtenha o teste mais poderoso com nível de significância α.

ii. Se $\alpha = 0,05$ e $x = 0,8$, qual a sua conclusão?

Exercício 5 Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da variável aleatória $X \sim Poisson(\theta)$.

i. Encontre o teste UMP para testar $H_0 : \theta = \theta_0$ versus $H_1 : \theta > \theta_0$.

ii. Seja $\alpha = 0,05$, faça o gráfico da função poder para $\theta_0 = 1$ e $n = 25$ (use o Teorema do limite central).

Exercício 6 Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da variável aleatória $X \sim N(\mu_X, 1)$ e sejam $Y_1, \ldots, Y_m$ uma amostra aleatória da variável aleatória $Y \sim N(\mu_Y, 4)$ sendo as amostras independentes.

i. Determine o teste mais poderoso para testar

$$H_0 : \mu_X = \mu_Y = 0 \quad \text{versus} \quad H_1 : \mu_X = \mu_Y = 1$$

ii. Sendo $n = 9$, $\sum x_i = 3,95$; $m = 4$; $\sum y_i = 2,03$. Qual a sua conclusão ao nível de significância de 5%? E qual o poder do teste?

Exercício 7 Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da variável aleatória X com função de densidade

$$f(x|\theta) = \frac{1}{\theta} x^{(1-\theta)/\theta}, \quad 0 < x < 1, \quad \theta > 0.$$

Queremos testar $H_0 : \theta \leq \theta_0$ versus $H_1 : \theta > \theta_0$.

i. Encontre o teste UMP de nível α (se existir).

ii. Se $n = 2$, $\theta_0 = 1$ e $\alpha = 0,05$, encontre a região crítica.

Exercício 8 Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da variável aleatória $X \sim N(0, \sigma^2)$.

i. Encontre o teste UMP para testar $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ versus $H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$.

ii. Seja $\alpha = 0,05$, $n = 9$ e $\sigma_0^2 = 9$, faça o gráfico da função poder.

Exercício 9 Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da variável aleatória $X \sim \exp(\theta)$.

i. Encontre o teste da razão de verossimilhanças generalizada para testar

$$H_0 : \theta = 1 \quad \text{versus} \quad H_1 : \theta \neq 1.$$

ii. Se você observar $n = 5$; $x_1 = 0,8$; $x_2 = 1,3$; $x_3 = 1,8$; $x_4 = 0,9$ e $x_5 = 1,0$, qual a sua decisão ao nível de 5%?