# Inferência Estatística II

## Apresentação da disciplina

**Prof. Paulo Cerqueira Jr - cerqueirajr@ufpa.br**
**Faculdade de Estatística - FAEST**
**Instituto de Ciências Exatas e Naturais - ICEN**

**https://github.com/paulocerqueirajr**

# Introdução

# Introdução

- Em estatística, uma hipótese é uma afirmativa sobre um propriedade da população (ex.: média).
- Um teste de hipóteses é um procedimento padrão (regra de decisão) para se testar uma afirmativa sobre uma propriedade da população.

**Exemplos:**

- A produtividade média de milho em Santa Catarina é de 2300kg/ha. (teste para a média);
- A proporção de alevinos de tilápia do Nilo que atingem o peso adequado em 120 dias é de 54%. (teste para a proporção)
- A sobrevivência de mudas não dependem da época do plantio. (teste qui-quadrado);
- A proporção de fixação de fitoplâncton em dois tipos de solos é a mesma (Teste de comparação de porporções).

# Testes de hipóteses

# Testes de hipóteses

- São ferramentas estatísticas que quantificam quão plausíveis são os resultados observados em uma amostra, podem ou não, ser verdadeiro.
- Além disto, um teste também define um ponto de corte (regra de decisão) para tomarmos a decisão de aceitar ou rejeitar a hipótese testada.
- Veremos testes para afirmações sobre a média e proporção de uma população.

# Introdução

> Um criador do *Colossoma macropomum* (tambaqui), criado à densidade de $1,0 \text{ peixe}/m^2/120 \text{ dias}$, afirma que os mesmos tem peso médio de $360,7g$ e uma variância de $30,7g^2$.

Uma amostra com $22$ peixes foi formada e vetificou-se que o peso médio foi igual à $358,2g$. Dessa forma, temos duas situações:

1. $H_0$: O criador está correto. (Hipótese nula)
2. $H_1$: O criador está errado. (Hipótese alternativa)

O que de fato queremos saber?

```
Se a média é igual a $360,7g$ ou diferente!!
```

# Testes de hipóteses

**Definição 1 (Hipóteses estatística)** É uma afirmação ou conjetura sobre o parâmetro, ou parâmetros, da distribuição de probabilidades de uma característica, X, da população ou de uma v.a.

**Definição 2 (Teste de hipóteses)** Um teste de hipóteses estatística é o procedimento ou regra de decisão que nos possibilita decidir por $H_0$ (Hipótese Nula) ou $H_1$ (Hipótese Alternativa), com base a informação contida na amostra.

# Procedimentos gerais

- População: $X$ com f.d ou f.p ($f(x \mid \theta)$).
- $\theta$ é um parâmetro desconhecido, e temos alguma hipótese sobre o valor verdadeiro de $\theta$, por exemplo, afirmamos que seu valor é $\theta_0$.
- Observamos uma a.a. de $X$, e com ela desejamos comprovar ou não tal hipótese.
- Assim, queremos testar

$$H_0 : \theta = \theta_0$$

- Temos também que explicitar a hipótese que aceitaremos caso $H_0$ seja rejeitada,

$$\underbrace{H_1 : \theta \neq \theta_0}_{\text{Bilateral}} \quad \text{ou} \quad \underbrace{H_1 : \theta < \theta_0}_{\text{Unilateral à esquerda.}} \quad \text{ou} \quad \underbrace{H_1 : \theta > \theta_0}_{\text{Unilateral à direita.}},$$

que dependerá das informações que o problema traz.

# Erros associados aos testes de hipóteses

- Devemos tomar como $H_0$ aquela hipótese que, rejeitada, conduza a um erro de tipo I mais importante de evitar.
- Por exemplo, suponha um experimento para determinar se um produto A é ou não cancerígeno. Após realizado o teste, podemos concluir:

$$\text{(i) A é cancerígeno ou (ii) A não é cancerígeno.}$$

- Cada uma dessas conclusões pode estar errada e temos os dois tipos de erro:

1. concluir que o produto é cancerígeno, quando ele não é.
2. concluir que o produto não é cancerígeno, quando ele é.

Qual o pior erro?

O **segundo erro** é pior, este deve ser o erro tipo I (rejeitar $H_0$, quando ela é verdadeira), portanto,

$$H_0 : \text{A é cancerígeno.}$$

# Erros associados

# Erros associados aos testes de hipóteses:

- Os dois erros que podem ser cometidos ao se realizar um teste de hipóteses são:
  - Rejeitar a hipótese nula (H0), quando tal hipótese é verdadeira;
  - Não rejeitar a hipótese nula (H0) quando ela deveria ser rejeitada.
- De forma mais simplificada temos:

| **Decisão/ Situação** | $H_0$ **verdade** | $H_0$ **falso** |
|---|---|---|
| Rejeita $H_0$ | Erro I | Certo |
| Não rejeita $H_0$ | Certo | Erro II |

# Erros associados aos testes de hipóteses

- Tais erros são expressos em termos de probabilidade.
- O nível de significância ou probabilidade do Erro I é dada por

$$\alpha = P(\text{Rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ verdadeira}).$$

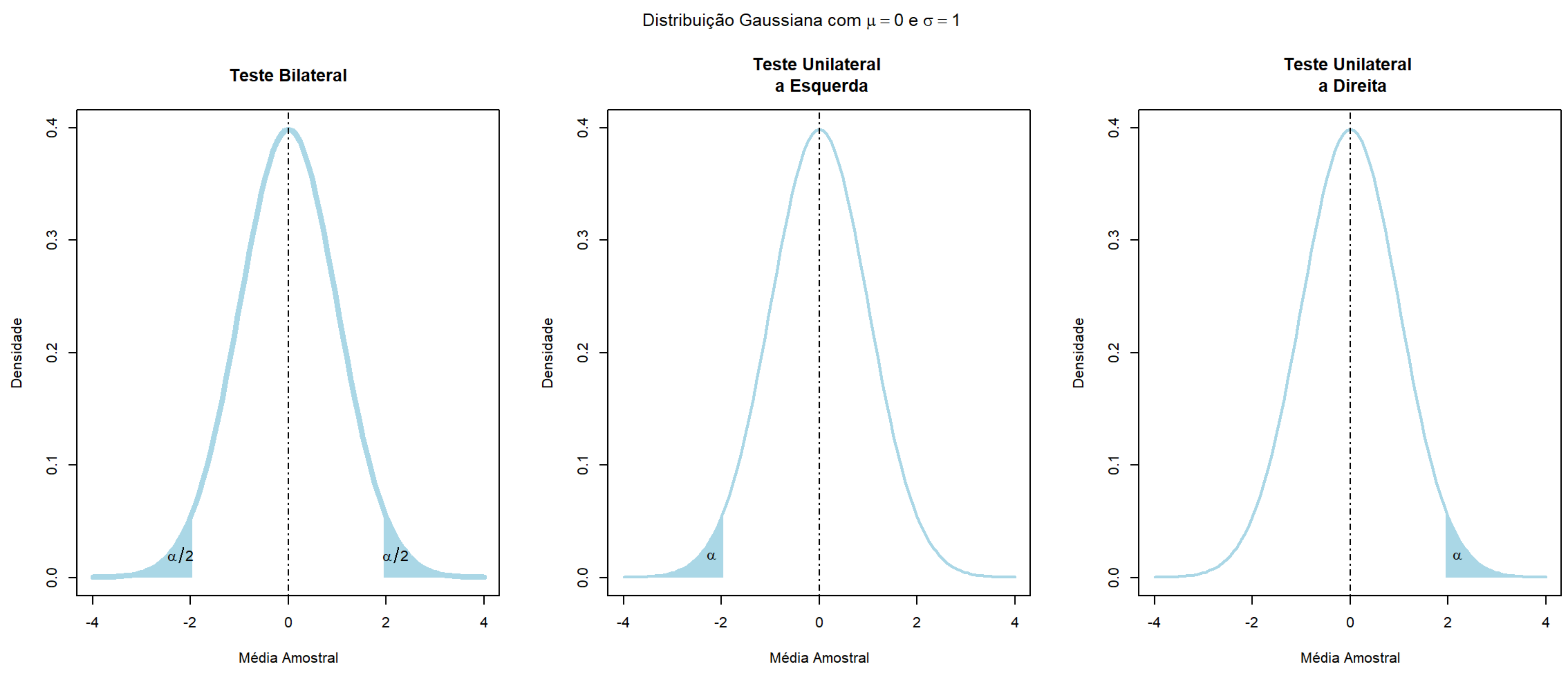
- Em geral o `nível de siginificância` gira em torno de $1\%, 5\%, 10\%$.
- A probabilidade do Erro II é dada por

$$\beta = P(\text{Não rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ falsa}).$$

- O poder o teste é dado por:

$$\text{Poder} = 1 - \beta = 1 - P(\text{Não rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ falsa}) = P(\text{Rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ falsa}).$$

# Erros associados aos testes de hipóteses




$H_0 : \mu = \mu_0$ | $H_0 : \mu = \mu_0$ | $H_0 : \mu = \mu_0$

$H_a : \mu \neq \mu_0$ | $H_a : \mu < \mu_0$ | $H_a : \mu > \mu_0$

# Testes mais poderosos

# Testes mais poderosos

> Hipótese Nula Simples contra Alternativa Simples

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{contra} \quad H_1 : \theta = \theta_1$$

- Fixado o valor de $\alpha$, a probabilidade do erro tipo I, vamos procurar a região crítica $RC$ que tenha o menor valor de $\beta$, ou seja, tenha maior poder dentre todos os testes com nível menor ou igual a $\alpha$.
- No caso discreto, temos

$$\alpha = P_{H_0}(X \in RC) = \sum_{\boldsymbol{x} \in RC} f(\boldsymbol{x}|\theta_0) \quad \text{e} \quad \beta = \sum_{\boldsymbol{x} \in \overline{RC}} f(\boldsymbol{x}|\theta_1),$$

onde $\overline{RC}$ é o conjunto complementar de $RC$.

# Testes mais poderosos

**Exemplo 1** Suponha que queremos testar $H_0 : \theta = \theta_0$ contra $H_1 : \theta = \theta_1$, com base em uma única observação da v.a. $X$, com f.p. dada na tabela abaixo.

| $X$ | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x\|\theta_0)$ | 0,02 | 0,03 | 0,05 | 0,05 | 0,35 | 0,50 |
| $f(x\|\theta_1)$ | 0,04 | 0,05 | 0,08 | 0,12 | 0,41 | 0,30 |

- Fixando $\alpha = 0,05$, vamos procurar a RC que fornece o teste mais poderoso.
- A Tabela 3 apresenta as possíveis RC para $\alpha = 0,05$, com os respectivos valores de $\beta = P$ (Erro tipo II).

| $RC$ | $\alpha$ | $\overline{RC}$ | $\beta$ |
|---|---|---|---|
| $\{0, 1\}$ | 0,05 | $\{2, 3, 4, 5\}$ | 0,91 |
| $\{2\}$ | 0,05 | $\{0, 1, 3, 4, 5\}$ | 0,92 |
| $\{3\}$ | 0,05 | $\{0, 1, 2, 4, 5\}$ | 0,88 |

Portanto, o teste MP (que tem o menor $\beta$) é dado pela $RC = \{3\}$.

# Testes mais poderosos

**Lema 1** O teste que minimiza uma combinação linear dos erros, do tipo $a\alpha + b\beta$, é dado pela seguinte região crítica:

$$RC^* = \left\{ \boldsymbol{x} : \frac{L_1(\boldsymbol{x})}{L_0(\boldsymbol{x})} \geq \frac{a}{b} \right\}$$

onde $a$ e $b$ são conhecidos (com $b > 0$) e

$$L_1(\boldsymbol{x}) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta_1) \qquad L_0(\boldsymbol{x}) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta_0)$$

*(Demonstração na pg. 95 do livro de Bolfarine & Sandoval)*

# Testes mais poderosos

**Lema 2 (Lema de Neyman-Pearson)** Considere o teste com região crítica dada por

$$RC^* = \left\{ \boldsymbol{x} : \frac{L_1(\boldsymbol{x})}{L_0(\boldsymbol{x})} \geq k \right\}$$

Então, $RC^*$ é a melhor região crítica de nível $\alpha = \alpha(RC^*)$ para testar $H_0 : \theta = \theta_0$ contra $H_1 : \theta = \theta_1$, isto é, $\beta(RC^*) \leq \beta(RC)$ para qualquer outro teste $RC$ com $\alpha(RC) \leq \alpha$.

*(Demonstração na pg. 96 do livro de Bolfarine & Sandoval)*

**Observações:**

1. $L_0(\boldsymbol{x})$ é a função de verossimilhança sob $H_0$ e representa a evidência trazida pelos dados em favor de $H_0$;
2. $L_1(\boldsymbol{x})$ é a função de verossimilhança sob $H_1$ e representa a evidência trazida pelos dados em favor de $H_1$;
3. O teste apresentado no Lema 2 é o teste MP de nível $\alpha$ para testar $H_0 : \theta = \theta_0$ contra $H_1 : \theta = \theta_1$. Este teste rejeita $H_0$ quando a evidência em favor de $H_1$ é maior que a evidência em favor de $H_0$.

# Testes mais poderosos

**Exemplo 2** Seja $X_1, \cdots, X_n$ uma a.a. de $X \sim N(\mu, 1)$. Obtenha o teste MP para testar $H_0 : \mu = 0$ contra $H_1 : \mu = 1$.

- A função de verossimilhança é dada por

$$L(\mu, \boldsymbol{x}) = \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^n e^{-\sum_{i=1}^n \frac{(x_i - 1)^2}{2}}.$$

- Sob $H_1$ e sob $H_0$, temos respectivamente

$$L_1(\boldsymbol{x}) = \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^n e^{-\sum_{i=1}^n \frac{(x_i - 1)^2}{2}} \quad \text{e} \quad L_0(\boldsymbol{x}) = \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^n e^{-\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{2}}.$$

- Portanto, o teste MP rejeita $H_0$ se

$$\frac{L_1(\boldsymbol{x})}{L_0(\boldsymbol{x})} = e^{\sum_{i=1}^n x_i - \frac{n}{2}} \geq k$$

# Testes mais poderosos

- Ou seja, se

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \geq \log k + \frac{n}{2} = c.$$

- Portanto, a RC do teste MP é dada por

$$RC = \left\{ \sum_{i=1}^{n} X_i \geq c \right\}.$$

- Assim, se tomarmos $\alpha = 0,05$ e $n = 9$, temos:

$$0,05 = P_{H_0}\left( \sum_{i=1}^{9} X_i \geq c \right).$$

# Testes mais poderosos

- Agora, sob $H_0 : \mu = 0$, temos que $\sum_{i=1}^n X_i \sim N(0, 9)$, logo

$$0,05 = P_{H_0}\left(\sum_{i=1}^n X_i \geq c\right) = P\left(Z \geq \frac{c-0}{3}\right),$$

e temos que

$$\frac{c}{3} = 1,64 \quad \Longleftrightarrow \quad c = 4,92$$

- Portanto, o teste MP consiste em rejeitar $H_0$ se $\sum_{i=1}^n X_i \geq 4,92$. Associado a esta RC podemos calcular o valor de $\beta = P(\text{aceitar } H_0 | H_1 \text{ é verdadeira})$:

$$\beta = P_{H_1}\left(\sum_{i=1}^n X_i < 4,92\right) = P\left(Z < \frac{4,92-9}{3}\right) = P(Z < -1,36) = 0,09.$$

- O poder do teste é dado por $= 1-= 0,91.

# Testes mais poderosos

**Exemplo 3** Seja $X_1, \cdots, X_n$ uma a.a. de $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, onde $\mu$ é conhecido. Obtenha o teste MP para testar $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ contra $H_1 : \sigma^2 = \sigma_1^2$, com $\sigma_1^2 > \sigma_0^2$.

- Portanto, o teste MP rejeita $H_0$ se

$$\frac{L_1(\mathbf{x})}{L_0(\mathbf{x})} = \left(\frac{\sigma_0}{\sigma_1}\right)^n e^{\left(\frac{1}{2\sigma_0^2} - \frac{1}{2\sigma_1^2}\right)\sum_{l=1}^n (x_l - \mu)^2} \geq k$$

- Ou seja, se

$$e^{\left(\frac{1}{2\sigma_0^2} - \frac{1}{2\sigma_1^2}\right)\sum_{l=1}^n (x_l - \mu)^2} \geq k\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_0}\right)^n$$

# Testes mais poderosos

ou, equivalentemente, se

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 \geq \frac{\log\left[k\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_0}\right)^n\right]}{\left(\frac{1}{2\sigma_0^2}-\frac{1}{2\sigma_1^2}\right)} = c.$$

- Portanto, a RC do teste MP é dada por

$$RC = \left\{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 \geq c\right\}$$

- Fixado o valor de $\alpha$ e usando o fato de que sob $H_0$ temos

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i-\mu)^2}{\sigma_0^2} \sim \chi_n^2,$$

podemos facilmente obter o valor de $c$.

# Testes Uniformemente Mais Poderosos (UMP)

# Testes Uniformemente Mais Poderosos (UMP)

> Caso I: Hipótese Nula Simples contra Alternativa Composta

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \textbf{contra} \quad H_1 : \theta \in \Theta_1$$

**Definição 3** Um teste com região crítica $RC^*$ é dito ser UMP para testar $H_0 : \theta = \theta_0$ contra $H_1 : \theta \in \Theta_1$, se ele é MP de nível $\alpha$ para testar $H_0 : \theta = \theta_0$ contra $H_1 : \theta = \theta_1$, qualquer que seja $\theta_1 \in \Theta_1$.

# Testes Uniformemente Mais Poderosos (UMP)

**Exemplo 4** Seja $X_1, \cdots, X_n$ uma a.a. de $X \sim N(\mu, 1)$. Obtenha o teste UMP para testar $H_0 : \mu = 0$ contra $H_1 : \mu > 0$.

- Vamos inicialmente obter o teste MP para testar $H_0 : \mu = 0$ contra $H_1 : \mu = \mu_1 (\mu_1 > 0)$.
- Assim, o teste MP rejeita $H_0$ se

$$\frac{L_1(x)}{L_0(x)} = e^{\mu_1 \sum_{l=1}^{n} x_l - \frac{n\mu_1^2}{2}} \geq k$$

- Ou seja, se

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \geq \frac{1}{\mu_1}\left(\log k + \frac{n\mu_1^2}{2}\right) = c.$$

# Testes Uniformemente Mais Poderosos (UMP)

- Como a região crítica do teste MP não depende do particular $\mu_1$ especificado em $H_1$, ela também será a RC do teste UMP para testar $H_0 : \mu = 0$ contra $H_1 : \mu > 0$:

$$RC = \left\{ \sum_{i=1}^{n} X_i \geq c \right\}.$$

# Testes Uniformemente Mais Poderosos (UMP)

**Exemplo 5** Seja $X_1, \cdots, X_n$ uma a.a. de $X \sim N(\mu, 1)$. Obtenha o teste UMP para testar $H_0 : \mu = 0$ contra $H_1 : \mu \neq 0$.

- Vimos no Exemplo 2 que o teste MP para testar $H_0 : \mu = 0$ contra $H_1 : \mu = 1$ é dado pela seguinte região crítica:

$$RC = \left\{ \sum_{i=1}^{n} X_i \geq c \right\}$$

# Testes Uniformemente Mais Poderosos (UMP)

- Agora, vamos obter a RC do teste MP para testar $H_0 : \mu = 0$ contra $H_1 : \mu = -1$. O teste MP consiste em rejeitar $H_0$ se

$$\frac{L_1(\boldsymbol{x})}{L_0(\boldsymbol{x})} = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\sum_{i=1}^n \frac{(x_i+1)^2}{2}}}{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{2}}} = e^{-\sum_{i=1}^n x_i - \frac{n}{2}} \geq k$$

- Ou seja, se

$$\sum_{i=1}^n x_i \leq -\left(\log k + \frac{n}{2}\right) = c_1.$$

# Testes Uniformemente Mais Poderosos (UMP)

- Portanto, temos

$$RC = \left\{ \sum_{i=1}^{n} X_i \leq c_1 \right\}.$$

- Vemos então que a RC do teste MP depende do particular valor de $\mu$ que tomarmos na hipótese alternativa.
- Concluímos, portanto, que não existe teste UMP para testar $H_0 : \mu = 0$ contra $H_1 : \mu \neq 0$.

# Testes Uniformemente Mais Poderosos (UMP)

> Caso II: Hipóteses Compostas

$$H_0 : \theta \in \Theta_0 \quad \text{contra} \quad H_1 : \theta \in \Theta_1$$

**Teorema 1** No caso em que $X_1, \cdots, X_n$ seguem uma distribuição da família exponencial, temos que o teste UMP para testar $H_0 : \theta = \theta_0$ contra $H_1 : \theta > \theta_0$ é também UMP para testar $H_0 : \theta \leq \theta_0$ contra $H_1 : \theta > \theta_0$. Também o teste UMP para testar $H_0 : \theta = \theta_0$ contra $H_1 : \theta < \theta_0$ é UMP para testar $H_0 : \theta \geq \theta_0$ contra $H_1 : \theta < \theta_0$.

**Exemplo 6** Seja $X_1, \cdots, X_n$ uma a.a. de $X \sim N(\mu, 1)$. De acordo com o Teorema 1, temos do exemplo 10 que o teste UMP para testar $H_0 : \mu \leq 0$ contra $H_1 : \mu > 0$ tem região crítica dada por

$$RC = \left\{ \sum_{i=1}^{n} X_i \geq c \right\}.$$

# Testes Uniformemente Mais Poderosos (UMP)

**Exemplo 7** Seja $X_1, \cdots, X_n$ uma a.a. de $X \sim \mathrm{Bernoulli}(\theta)$. Obtenha o teste UMP para testar $H_0 : \theta \geq 0,5$ contra $H_1 : \theta < 0,5$.

- Vamos, inicialmente, obter o teste MP para testar $H_0 : \theta = 0,5$ contra $H_1 : \theta = \theta_1, \theta_1 < 0,5$. Pelo Lema 2, temos que o teste MP rejeita $H_0$ se

$$\frac{L_1(\boldsymbol{x})}{L_0(\boldsymbol{x})} = \frac{\theta_1^{\sum_{i=1}^n x_i}(1-\theta_1)^{n-\sum_{i=1}^n x_i}}{0,5^{\sum_{i=1}^n x_i} 0,5^{n-\sum_{i=1}^n x_i}} = \left(\frac{\theta_1}{1-\theta_1}\right)^{\sum_{i=1}^n x_i} \left(\frac{1-\theta_1}{0,5}\right)^n \geq k$$

ou seja, se

$$\left(\frac{\theta_1}{1-\theta_1}\right)^{\sum_{i=1}^n x_i} \geq k\left(\frac{0,5}{1-\theta_1}\right)^n.$$

# Testes Uniformemente Mais Poderosos (UMP)

- Aplicando logaritmo em ambos os lados da desigualdade, temos que o teste MP rejeita $H_0$ se

$$(\sum_{i=1}^{n} x_i) \log\left(\frac{\theta_1}{1-\theta_1}\right) \geq \log\left[k\left(\frac{0,5}{1-\theta_1}\right)^n\right]$$

- Agora, como $\theta_1 < 0,5$, então $\left(\frac{\theta_1}{1-\theta_1}\right) < 1$. Logo, $\log\left(\frac{\theta_1}{1-\theta_1}\right) < 0$. Portanto, o teste MP rejeita $H_0$ se

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \leq \frac{\log\left[k\left(\frac{0,5}{1-\theta_1}\right)^n\right]}{\log\left(\frac{\theta_1}{1-\theta_1}\right)} = c$$

# Testes Uniformemente Mais Poderosos (UMP)

- Como o teste MP não depende do particular valor de $\theta_1$, pela Definição 1 este teste é UMP para testar $H_0 : \theta = 0,5$ contra $H_1 : \theta < 0,5$. E pelo Teorema 1 ele será UMP para testar $H_0 : \theta \geq 0,5$ contra $H_1 : \theta < 0,5$:

$$RC = \left\{ \sum_{i=1}^{n} X_i \leq c \right\}.$$

- Se tomarmos $\alpha = 0,055$ e $n = 10$, temos que

$$\alpha = P_{H_0} \left( \sum_{i=1}^{n} X_i \leq c \right).$$

# Testes Uniformemente Mais Poderosos (UMP)

- Sob $H_0$, temos que $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim Binomial(10;\ 0,5)$, logo

$$0,055 = P_{H_0}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \leq c\right) \iff c = 2.$$

- Portanto, a RC do teste UMP para testar $H_0 : \theta \geq 0,5$ contra $H_1 : \theta < 0,5$, ao nível $\alpha = 0,055$ é dada por

$$RC = \left\{\sum_{i=1}^{n} X_i \leq 2\right\}.$$

# Função poder

# Função Poder

**Definição 4** A função de poder $\pi(\theta)$ com região crítica $RC$ para testar $H_0 : \theta = \theta_0$ contra $H_1 : \theta \in \Theta_1$ é dada por

$$\pi(\theta) = P_\theta[X \in RC],$$

ou seja, é a probabilidade de rejeitar $H_0$ para $\theta \in \Theta$. Notemos que $\pi(\theta_0) = \alpha$.

**Exemplo 8** Sejam $X_1, \ldots, X_n$, uma amostra aleatória de tamanho $n$ da distribuição $N(\mu, 1)$.

- Consideremos o problema de testar $H_0 : \mu = 0$ contra $H_1 : \mu > 0$.
- Conforme visto, a região crítica do teste U.M.P. é dada por $RC = \{x; \sum_{i=1}^n x_i \geq c\}$.
- Sendo $n = 9$ e $\alpha = 0,05$, temos que $c = 1,64\sqrt{9} = 4,92$, de modo que $RC = \{x; \sum_{i=1}^n x_i \geq 4,92\}$. A função de poder é, então, dada por

$$\pi(\mu) = P_\mu\left[\sum_{i=1}^{9} X_i \geq 4,92\right] = 1 - \Phi\left(\frac{4,92 - 9\mu}{3}\right),$$

onde $\Phi(\cdot)$ denota a função de distribuição acumulada da distribuição $N(0, 1)$.

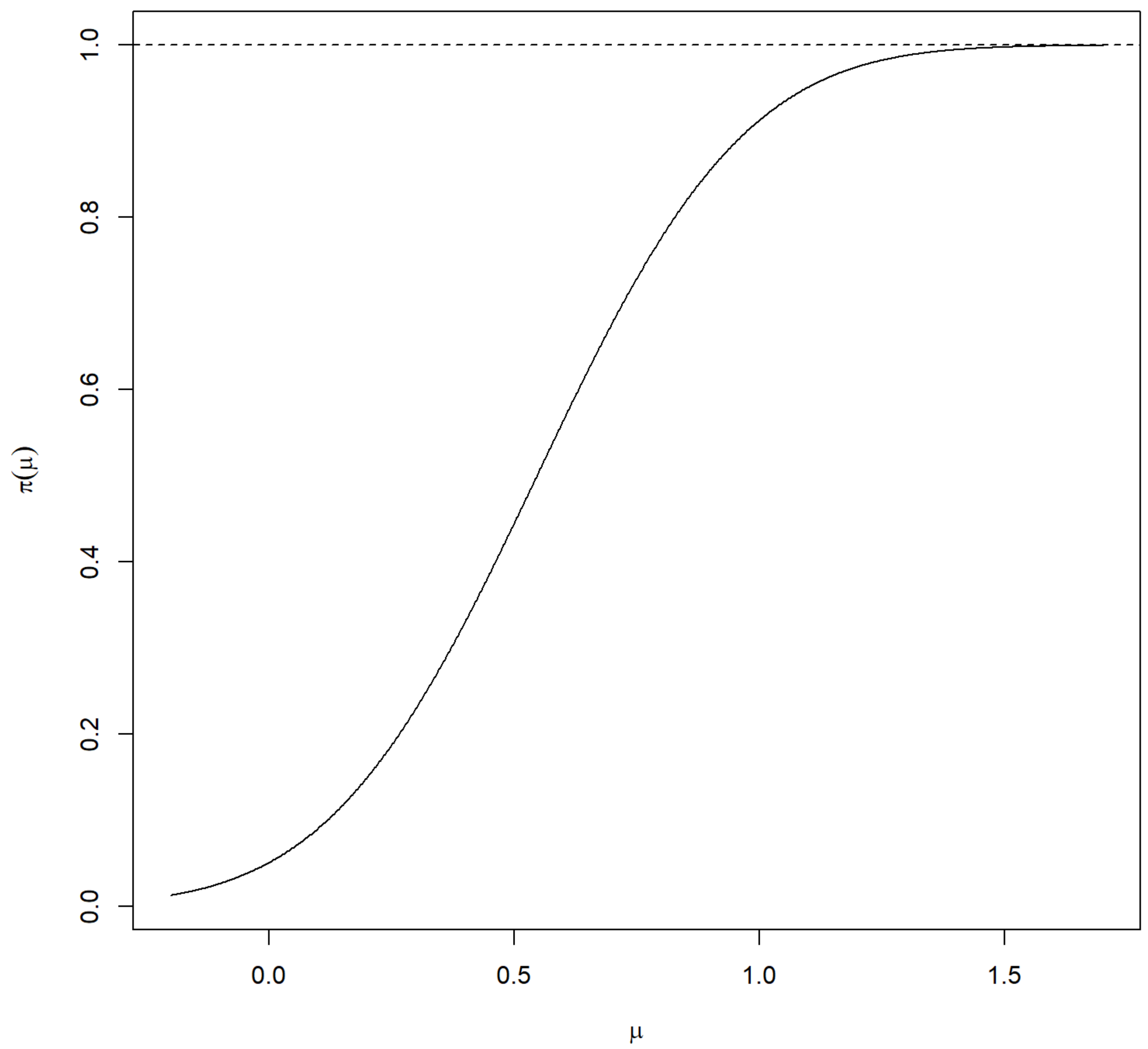
# Função Poder

- Então,

$$\pi(0,3) = 1 - \Phi(0,74) = 1 - 0,77 = 0,23.$$

De modo similar,

- $\pi(0,5) = 1 - \Phi(0,14) = 0,44;$
- $\pi(1,0) = 0,91;$
- $\pi(0,0) = 0,05 = \alpha.$



# Testes da Razão de Verossimilhanças Generalizadas

# Testes da Razão de Verossimilhanças Generalizadas (TRVG)

- Vimos que os testes UMP existem apenas em situações especiais.
- Essas situações compreendem o caso das famílias exponenciais unidimensionais.
- Vimos também que, em geral, não existem testes UMP para testar $H_0 : \theta = \theta_0$ versus $H_1 : \theta \neq \theta_0$.
- Também não existe teste UMP na maioria dos casos em que a distribuição envolve mais de um parâmetro desconhecido como, por exemplo, a $N(\mu, \sigma^2)$ com $\mu$ e $\sigma^2$ desconhecidos.
- Um procedimento que produz testes razoáveis e que pode ser utilizado em muitos casos, sem muita dificuldade, é o Teste da Razão de Verossimilhanças Generalizada (TRVG).

# Testes da Razão de Verossimilhanças Generalizadas (TRVG)

- Consideremos uma situação bastante geral onde as hipóteses de interesse são

$$H_0 : \theta \in \Theta_0 \quad \text{versus} \quad H_1 : \theta \in \Theta_1$$

onde $\Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1, \Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset, \Theta_0 \neq \emptyset$ e $\Theta_1 \neq \emptyset$.

- O TRVG pode ser definido como o teste com região crítica dada por (ver Bickel e Doksum(1976))

$$RC = \left\{ \mathbf{x};\, \frac{\sup_{\theta \in \Theta_1} L(\theta; \mathbf{x})}{\sup_{\theta \in \Theta_0} L(\theta; \mathbf{x})} \geq c \right\}.$$

- Podemos notar que, quando as hipóteses são simples, ou seja, $\Theta_0 = \{\theta_0\}$ e $\Theta_1 = \{\theta_1\}$, o TRVG coincide com o Lema de Neyma-Pearson.

# Testes da Razão de Verossimilhanças Generalizadas (TRVG)

Como

$$\frac{\sup_{\theta\in\Theta} L(\theta;\mathbf{x})}{\sup_{\theta\in\Theta_0} L(\theta;\mathbf{x})} = \max\left\{1, \frac{\sup_{\theta\in\Theta_1} L(\theta;\mathbf{x})}{\sup_{\theta\in\Theta_0} L(\theta;\mathbf{x})}\right\}.$$

Por facilidades computacionais o TRVG pode também ser definido como

$$RC = \left\{\mathbf{x}; \lambda(\mathbf{x}) = \frac{\sup_{\theta\in\Theta_0} L(\theta;\mathbf{x})}{\sup_{\theta\in\Theta} L(\theta;\mathbf{x})} \leq c\right\}.$$

Observemos que $0 \leq \lambda(\mathbf{x}) \leq 1$, pois o numerador é o supremo com relação a $\theta$ pertencente a um subconjunto de $\Theta$ ($\Theta_0 \in \Theta$), enquanto que o denominador é o supremo sobre todo conjunto $\Theta$.

- Se a hipótese $H_0$ for verdadeira, esperamos que $\lambda(\mathbf{x})$ esteja `próximo` de $1$.
- se a hipótese $H_0$ for falsa, esperamos que o denominador seja grande em relação ao numerador, e, portanto, $\lambda(\mathbf{x})$ deve ser `próximo` de zero.

# Testes da Razão de Verossimilhanças Generalizadas (TRVG)

- Para determinar $c$ temos que resolver a equação

$$\alpha = \sup_{\theta \in \Theta_0} P(\lambda(\mathbf{X}) \leq c).$$

- Para isso, precisamos da distribuição da estatística $\lambda(\mathbf{X})$ que, em geral, não é simples de ser obtida.
- Ou podemos encontrar uma função $h$ estritamente crescente no domínio de $\lambda(\mathbf{x})$ tal que $h(\lambda(\mathbf{X}))$ tenha uma forma simples e uma distribuição conhecida e tabelada sob a hipótese $H_0$.

# Testes da Razão de Verossimilhanças Generalizadas (TRVG)

> Para implementação do TRVG, os seguintes passos devem ser seguidos:

1. obter o estimador de máxima verossimilhança (EMV) $\hat{\theta}$ de $\theta$;
2. obter o EMV $\hat{\theta}_0$ de $\theta$, quando $\theta \in \mathbf{\Theta}_0$;
3. calcular $\lambda(\mathbf{X}) = \frac{L(\hat{\theta}_0;\mathbf{X})}{L(\hat{\theta};\mathbf{X})}$;
4. encontrar a função $h$;
5. obter $c$, resolvendo a equação $\alpha = P_{H_0}(h(\lambda(\mathbf{X})) \leq c)$.

# Testes da Razão de Verossimilhanças Generalizadas (TRVG)

**Exemplo 9** Consideremos da $N(\mu, 1)$, mas agora o interesse é testar $H_0 : \mu = \mu_0$ versus $H_1 : \mu \neq \mu_0$.

- Vimos não existe teste UMP nesse caso.
- Pelo exemplo, temos que o EMV de $\mu$ é dado por $\hat{\mu} = \overline{X}$.
- Como a hipótese $H_0$ só especifica um único valor para $\mu$, o numerador de $\lambda(\mathbf{x})$ é $L(\mu_0; \mathbf{x})$ de modo que

$$\lambda(\mathbf{x}) = \frac{(2\pi)^{-n/2} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2} \sum (x_i - \mu_0)^2}}{(2\pi)^{-n/2} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2} \sum (x_i - \overline{x})^2}} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2} \left[ \sum (x_i - \mu_0)^2 - \sum (x_i - \overline{x})^2 \right]}.$$

- Podemos simplificar $\lambda(\mathbf{x})$ usando o fato de que

$$\sum (x_i - \mu_0)^2 = \sum (x_i - \overline{x})^2 + n(\overline{x} - \mu_0)^2.$$

# Testes da Razão de Verossimilhanças Generalizadas (TRVG)

- Temos que o TRVG rejeita $H_0$ quando

$$\mathrm{e}^{-\frac{n}{2}(\overline{x}-\mu_0)^2} \leq c,$$

que é equivalente a rejeitar $H_0$ quando

$$|\overline{x} - \mu_0| \geq \sqrt{-2\log c/n}.$$

- Portanto a região crítica do TRVG é dada por

$$RC = \{\mathbf{x}; \sqrt{n}|\overline{x} - \mu_0| \geq a\}.$$

# Testes da Razão de Verossimilhanças Generalizadas (TRVG)

- Fixado $\alpha$, obtemos $a$ de forma que

$$\alpha = P_{H_0}(\sqrt{n}|\overline{X} - \mu_0| \geq a)$$

- Como sob $H_0$, $\sqrt{n}(\overline{X} - \mu_0) \sim N(0,1)$, temos que $a = z_{\alpha/2}$.
- Sendo $\alpha = 0,05$ temos que $RC = \{\mathbf{x}; \sqrt{n}|\overline{x} - \mu_0| \geq 1,96\}$.
- Considerando $\mu_0 = 0, n = 9, \sum_{i=1}^{n} x_i = 3,4$, `não rejeitamos` $H_0$ pois $\sqrt{9}|3,4/9 - 0| = 1.33 < 1,96$.
- Nesse caso, a função de poder do teste é

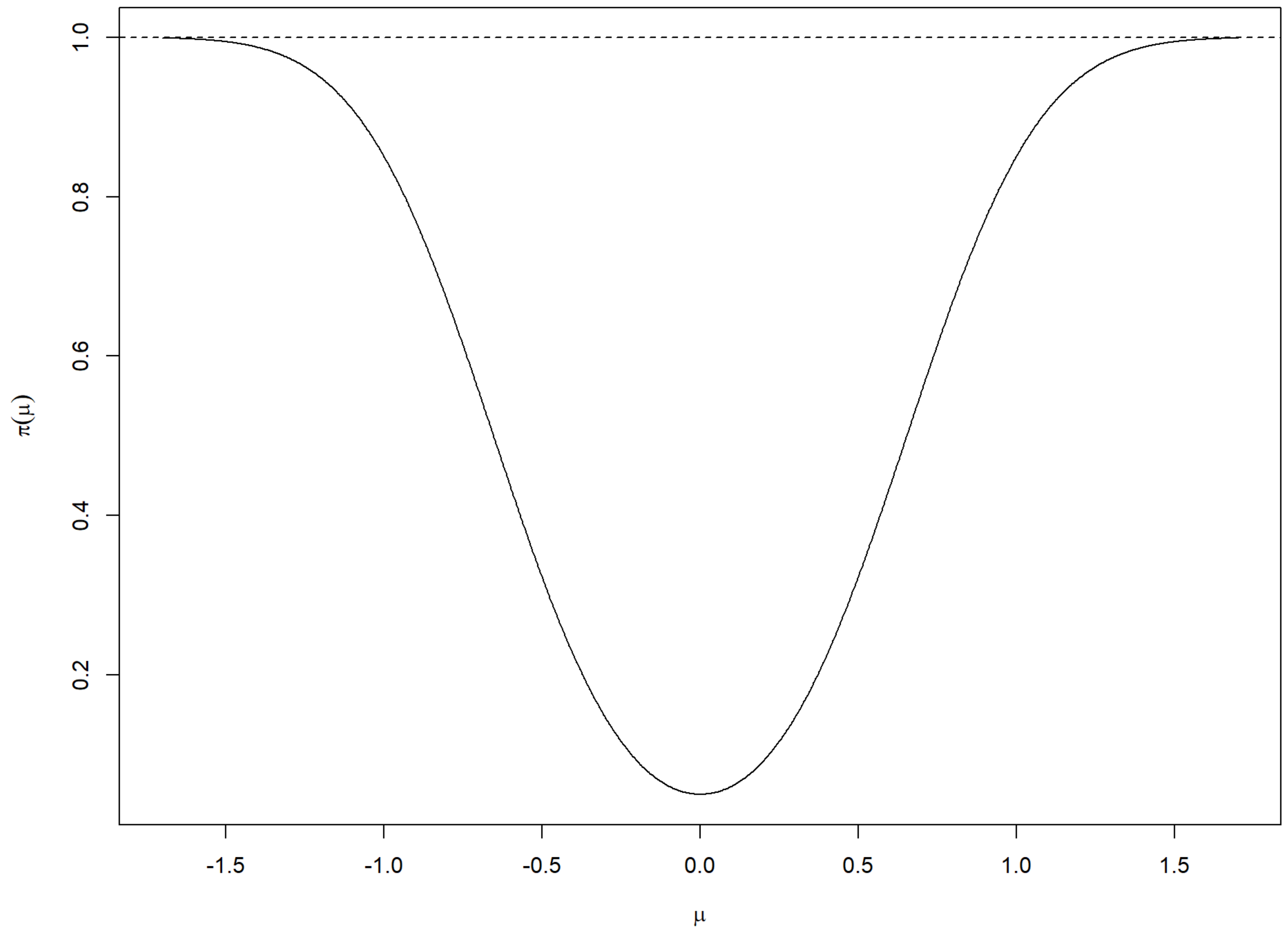
$$\pi(\mu) = P_\mu(\sqrt{n}|\overline{X} - \mu| \geq 1,96) = 1 - P(-1,96 - \sqrt{n}\mu \leq \sqrt{n}(\overline{X} - \mu) \leq 1,96 - \sqrt{n}\mu)$$

$$= 1 - [\Phi(1,96 - \sqrt{n}\mu) - \Phi(-1,96 - \sqrt{n}\mu)],$$

pois temos que $\sqrt{n}(\overline{X} - \mu) \sim N(0,1)$ quando $\mu$ é o verdadeiro valor do parâmetro.

# Testes da Razão de Verossimilhanças Generalizadas (TRVG)

- Notemos que $\pi(0) = 1 - P(-1,96 \leq Z \leq 1,96) = 0,05$
- De maneira similar, $\pi(0,3) = \pi(-0,3) = 0,15$.



# Testes da Razão de Verossimilhanças Generalizadas (TRVG)

**Exemplo 10** Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da variável aleatória $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ com $\mu$ e $\sigma^2$ desconhecidos.

- O interesse é testar $H_0 : \mu = \mu_0$ versus $H_1 : \mu \neq \mu_0$.

- Nesse caso,

$$\lambda(\mathbf{x}) = \frac{(2\pi)^{-n/2}(\hat{\sigma}_0^2)^{-n/2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2\hat{\sigma}_0^2}\sum(x_i-\mu_0)^2}}{(2\pi)^{-n/2}(\hat{\sigma}^2)^{-n/2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2\hat{\sigma}^2}\sum(x_i-\overline{x})^2}} = \left(\frac{\hat{\sigma}^2}{\hat{\sigma}_0^2}\right)^{n/2}$$

Usando $\sum(x_i - \mu_0)^2 = \sum(x_i - \overline{x})^2 + n(\overline{x} - \mu_0)^2$., temos que o TRVG rejeita $H_0$ quando

$$\left(\frac{1}{1 + \frac{n(\overline{x}-\mu_0)^2}{\sum(x_i-\overline{x})^2}}\right)^{n/2} \leq c$$

# Testes da Razão de Verossimilhanças Generalizadas (TRVG)

que é equivalente a rejeitar $H_0$ quando

$$\frac{\sqrt{n}\,|\overline{x}-\mu_0|}{\sqrt{\frac{\sum(x_i-\overline{x})^2}{n-1}}} \geq \sqrt{(c^{-2/n}-1)(n-1)}$$

- Portanto a região crítica do TRVG é dada por

$$RC = \left\{\mathbf{x};\ \frac{\sqrt{n}\,|\overline{x}-\mu_0|}{s} \geq a\right\}$$

onde $s^2 = \frac{\sum(x_i-\overline{x})^2}{n-1}$.

- Sob a hipótese $H_0$, $\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu_0)}{S} \sim t_{n-1}$.
- Então, dado $\alpha = 0,05$ e $n = 9$ obtemos, usando a tabela da distribuição $t$ com $8$ graus de liberdade, $a = 2,306$.
- Se $\mu_0 = 0, \overline{x} = 0,68$ e $s = 1,2$, então $\frac{\sqrt{n}(\overline{x}-\mu_0)}{s} = 1,7$ de modo que `não rejeitamos` $H_0$.

# Testes da Razão de Verossimilhanças Generalizadas (TRVG)

**Exemplo 11** Consideremos novamente, $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da variável aleatória $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ com $\mu$ e $\sigma^2$ desconhecidos, mas sendo que o interesse é testar $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ versus $H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$. Nesse caso,

$$\Theta_0 = \{(\mu, \sigma^2); -\infty < \mu < \infty, \sigma^2 = \sigma_0^2\}$$

e

$$\Theta = \{(\mu, \sigma^2), -\infty < \mu < \infty, \sigma^2 > 0\}$$

- Vimos que o EMV de $(\mu, \sigma^2)$ em $\Theta$ é dado por $\hat{\mu} = \overline{X}$ e $\hat{\sigma}^2 = \sum(X_i - \overline{X})^2/n$.
- Enquanto que em $\Theta_0$ é dado por $\hat{\mu}_0 = \overline{X}$ e $\hat{\sigma}_0^2 = \sigma_0^2$.
- Logo, a estatística do TRVG é dada por

$$\lambda(\mathbf{x}) = \frac{(2\pi)^{-n/2}(\sigma_0^2)^{-n/2}e^{-\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum(x_i-\overline{x})^2}}{(2\pi)^{-n/2}(\hat{\sigma}^2)^{-n/2}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum(x_i-\overline{x})^2}} = \left(\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma_0^2}\right)^{n/2} e^{-\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum(x_i-\overline{x})^2+n/2}.$$

# Testes da Razão de Verossimilhanças Generalizadas (TRVG)

- Então, temos que o TRVG rejeita $H_0$ quando

$$\left(\frac{\sum(x_i - \overline{x})^2}{\sigma_0^2}\right)^{n/2} e^{-\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{2\sigma_0^2}} \leq c.$$

- Notemos que se $g(y) = y^{n/2}e^{-y/2},\ y > 0$ então a função $\log g(y)$ (e também $g(y)$) é crescente para $y < n$, atingindo o ponto de máximo em $y = n$ e é decrescente para $y > n$.
- Logo $g(y) \leq c$ se e somente se $y \leq c_1$ ou $y \geq c_2$ com $g(c_1) = g(c_2)$.

# Testes da Razão de Verossimilhanças Generalizadas (TRVG)

- Portanto o TRVG é equivalente a rejeitar $H_0$ quando

$$\frac{\sum(x_i - \overline{x})^2}{\sigma_0^2} \leq c_1 \quad \text{ou} \quad \frac{\sum(x_i - \overline{x})^2}{\sigma_0^2} \geq c_2.$$

Sob a hipótese $H_0$, $\frac{\sum(X_i - \overline{X})^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2_{n-1}$ e, então, dado $\alpha = 0,05$ e $n = 9$ obtemos, usando a tabela da distribuição qui-quadrado com 8 graus de liberdade, $c_1 = 2,180$ e $c_2 = 17,534$ se considerarmos, como na Seção 5.2, probabilidades iguais para as duas caudas.

# Testes da Razão de Verossimilhanças Generalizadas (TRVG)

- Como mencionado anteriormente, a forma e a distribuição de $\lambda(\mathbf{X})$ po dem ser complicadas e nem sempre podemos encontrar uma função $h$ com distribuição conhecida.
- O Teorema a seguir fornece a distribuição assintótica da estatística do TRVG, resolvendo esse problema pelo menos para o caso de amostras grandes.

**Teorema 2** Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da variável aleatória $X$ com f.d.p. $f(x|\theta)$. Sob as condições de regularidade, se $\theta \in \Theta_0$, então a distribuição da estatística $-2\log\lambda(\mathbf{X})$ converge para a distribuição qui-quadrado quando o tamanho da amostra $n$ tende ao infinito. O número de graus de liberdade da distribuição limite é a diferença entre o número de parâmetros não especificados em $\Theta$ e o número de parâmetros não especificados em $\Theta_0$.

# Testes da Razão de Verossimilhanças Generalizadas (TRVG)

**Exemplo 12** Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da variável aleatória $X \sim Poisson(\theta)$.

- O interesse é testar $H_0 : \theta = 5$ versus $H_1 : \theta \neq 5$. Pelo
- O EMV de $\theta$ é dado por $\hat{\theta} = \overline{X}$. Como a hipótese $H_0$ só especifica um único valor para $\theta$, o numerador de $\lambda(\mathbf{x})$ é $L(5, \mathbf{x})$ de modo que

$$\lambda(\mathbf{x}) = \frac{e^{-5n} 5^{\sum x_i}}{\prod x_i!} \frac{\prod x_i!}{e^{-n\overline{x}} \overline{x}^{\sum x_i}} = e^{-n(5-\overline{x})} (5/\overline{x})^{\sum x_i}$$

# Testes da Razão de Verossimilhanças Generalizadas (TRVG)

- Pelo Teorema 2 temos que

$$-2\log\lambda(\mathbf{x}) = -2\left\{-n(5-\overline{x}) + \sum x_i \log(5/\overline{x})\right\}.$$

- Portanto a região crítica do TRVG é dada por

$$RC = \{-2[-n(5-\overline{x}) + \sum x_i \log(5/\overline{x})] \geq c\}$$

onde um valor aproximado para $c$ é obtido de modo que $P(\chi_1^2 \geq c) = 0,05$, que requer a utilização da tabela da distribuição qui-quadrado.