Inferência Estatística II

Testes de hipótestes específicos - Aula 2

Prof. Paulo Cerqueira Jr - cerqueirajr@ufpa.br
Faculdade de Estatística - FAEST
Instituto de Ciências Exatas e Naturais - ICEN

https://github.com/paulocerqueirajr

Introdução

Introdução

- Os testes não-paramétricos são muito úteis na ausência de normalidade ou na aplicação em variáveis em a natureza é não numérica.
- Para uma amostra, temos alguns testes:
  - Teste χ^2 de aderência;
  - Teste χ^2 de homogeneidade;
  - Teste χ^2 de independência.

Teste χ^2 de aderência

Teste χ^2 de aderência

> Objetivo: Verificar se uma população P segue uma distribuição especificada P_0.

- Seja X uma v.a. que caracteriza uma população P. Suponha que esta variável está categorizada em s classes $A_1, A_2, \cdots, A_s$, com $p_i = P(X \in A_i), i = 1, 2, \cdots, s$. Queremos testar

$$H_0 : p_1 = p_{10}, p_2 = p_{20}, \cdots, p_s = p_{s0} \quad \text{versus} \quad H_1 : p_j \neq p_{j0}, \text{para algum } j,$$

onde p_{i0} são os valores especificados pela hipótese H_0, ou seja, são as probabilidades conhecidas que determinam P_0.

Tabela 1: Frequências observadas (O) e esperadas (E)

Frequências	A_1	A_2	$\cdots$	A_s	**Total**
Observadas	O_1	O_2	$\cdots$	O_s	n
Esperadas	E_1	E_2	$\cdots$	E_s	n

Teste χ^2 de aderência

O valor esperado, sob H_0, para a classe A_i é dado por

$$E_i = n \times p_{i0}, \quad i = 1, 2, \cdots, s.$$

A estatística do teste é dada por

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{s} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i},$$

que sob H_0 tem distribuição qui-quadrado com $s - 1$ graus de liberdade. A regra de decisão consiste em rejeitar H_0, ao nível α, se o valor da estatística for grande, ou seja, a região crítica do teste é dada por

$$RC = \{\chi^2_{obs} > k\},$$

onde k é tal que $P\{\chi^2_{s-1} > k\} = \alpha$.

Teste χ^2 de aderência

> Exemplo: Um estudo sobre acidentes de trabalho numa indústria revelou que, em 150 acidentes, obtemos a distribuição da Tabela 1. O objetivo é testar a hipótese que os acidentes ocorrem com igual frequência nos 5 dias da semana.

Tabela 1: Acidentes de trabalho nos dias da semana

Dia	Segunda	Terça	Quarta	Quinta	Sexta	Total
O_i	32	40	20	25	33	150

> Solução:

1. **Hipóteses:**
   - H_0: Os acidentes ocorrem com igual frequência nos 5 dias ($p_1 = p_2 = \cdots = p_5 = 0.2$).
   - H_1: Pelo menos um dia tem frequência diferente dos demais.
2. **Cálculo das Frequências Esperadas (E_i):**
   Sob H_0, cada dia deve ter:

$$E_i = n \times p_{i0} = 150 \times 0.2 = 30 \quad \text{(para todos os dias)}$$

Teste χ^2 de aderência

3. **Estatística do Teste (χ^2):**

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{5} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} = \frac{(32-30)^2}{30} + \frac{(40-30)^2}{30} + \frac{(20-30)^2}{30} + \frac{(25-30)^2}{30} + \frac{(33-30)^2}{30}$$

$$\chi^2 = \frac{4}{30} + \frac{100}{30} + \frac{100}{30} + \frac{25}{30} + \frac{9}{30} = 7.933$$

4. **Região Crítica (α = 0.05):**
   - Graus de liberdade: $s - 1 = 4$.
   - Valor crítico da tabela $\chi^2_{4;0.05} = 9.488$.
   - Regra de decisão: Rejeitar H_0 se $\chi^2_{obs} > 9.488$.

5. **Conclusão:**
   Como $7.933 < 9.488$, **não rejeitamos** H_0. Não há evidências estatísticas para afirmar que os acidentes ocorrem com frequências diferentes nos dias da semana.

Teste χ^2 de aderência

Tabela de Cálculo Detalhado:

Dia	O_i	E_i	$(O_i - E_i)^2/E_i$
Segunda	32	30	0.133
Terça	40	30	3.333
Quarta	20	30	3.333
Quinta	25	30	0.833
Sexta	33	30	0.300
Total	150	150	**7.933**

Teste χ^2 de aderência

> Exemplo: Considere os dados abaixo, que supostamente são uma amostra de tamanho 30 de uma distribuição normal, de média 10 e variância 25.

Dados	—-	—-	—-	—-	—–
1,04	1,73	3,93	4,44	6,37	6,51
7,61	7,64	8,18	8,48	8,57	8,65
9,71	9,87	9,95	10,01	10,52	10,69
11,72	12,17	12,61	12,98	13,03	13,16
14,11	14,60	14,64	14,75	16,68	22,14

> Solução:

1. Hipóteses:
   - H_0: Os dados seguem uma $N(10, 25)$
   - H_1: Os dados **não** seguem uma $N(10, 25)$

Teste χ^2 de aderência

2. Organizar os dados em classes

- Primeiro, devemos agrupar os dados em **k intervalos (classes)**. Como temos 30 observações, uma sugestão é usar $k \approx \sqrt{n}$, ou seja, **5 ou 6 classes**.
- Vamos usar **6 classes** com amplitudes aproximadamente iguais. Como os dados variam de 1,04 a 22,14, dividimos esse intervalo:
  - Amplitude total: $22,14 - 1,04 = 21,10$
  - Amplitude de cada classe: $21,10/6 \approx 3,52$

As classes ficam:

Classe	**Intervalo**	**Frequência Observada (O_i)**
1	$[1,04; 4,56)$	3
2	$[4,56; 8,08)$	5
3	$[8,08; 11,60)$	8
4	$[11,60; 15,12)$	10
5	$[15,12; 18,64)$	3

Classe	Intervalo	Frequência Observada (O_i)
6	$[18,64;22,16]$	1
Total		30

Teste χ^2 de aderência

3. Calcular Frequências Esperadas (E_i)

- Com base na $N(10, 25) = N(10, 5^2)$, para cada classe calculamos a probabilidade p_i de um valor cair naquele intervalo, e multiplicamos por $n = 30$:
- Utilizando a padronização, temos que $Z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{x-10}{5} \sim N(0, 1)$
- Calculamos:

Classe	**Intervalo**	Z **lim.inf**	Z **lim. sup**	p_i **(usando tabela normal)**	$E_i = 30$
1	$[1,04; 4,56)$	-1.79	-1.09	$\Phi(-1.09) - \Phi(-1.79) = 0.1379 - 0.0367 = 0.1012$	3.04
2	$[4,56; 8,08)$	-1.09	-0.38	$0.3516 - 0.1379 = 0.2137$	6.41
3	$[8,08; 11,60)$	-0.38	0.32	$0.6255 - 0.3516 = 0.2739$	8.22
4	$[11,60; 15,12)$	0.32	1.02	$0.8461 - 0.6255 = 0.2206$	6.62
5	$[15,12; 18,64)$	1.02	1.73	$0.9582 - 0.8461 = 0.1121$	3.36
6	$[18,64; 22,16]$	1.73	2.43	$0.9925 - 0.9582 = 0.0343$	1.03

Teste χ^2 de aderência

4. Estatística do teste qui-quadrado

A fórmula é:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

Calculando cada termo:

Classe	O_i	E_i	$(O_i - E_i)^2/E_i$
1	3	3.04	0.0005
2	5	6.41	0.3100
3	8	8.22	0.0059
4	10	6.62	1.7302
5	3	3.36	0.0385
6	1	1.03	0.0009
Total			$\chi^2 = 2.09$

Teste χ^2 de aderência

5. Grau de liberdade (a média e variância são **especificadas** e não estimadas)

$$gl = \text{n}^{\text{o}} \text{ de classes} - 1 - \text{n}^{\text{o}} \text{ de parâmetros estimados} = 6 - 1 = 5$$

6. Valor crítico: Para $\alpha = 0{,}05$, e $gl = 5$, temos:

$$\chi^2_{0{,}05;5} \approx 11{,}07$$

7. Conclusão: Como:

$$\chi^2_{\text{calculado}} = 2{,}09 < 11{,}07 = \chi^2_{\text{crítico}}$$

Não rejeitamos a hipótese nula. Dessa forma,os dados são compatíveis com uma distribuição normal $N(10, 25)$, ao nível de significância de 5%.

Teste χ^2 de aderência

> Exercício: Gols por Partida de um Time de Futebol

Um analista esportivo quer saber se o número de **gols por partida** marcados por um determinado time em uma temporada segue uma **distribuição de Poisson**, com média de $\lambda = 1{,}5$ gols por jogo. Ele coleta os dados de **40 jogos** e registra a **frequência de gols por partida**:

Número de Gols	Frequência Observada
0	5
1	14
2	12
3	6
4	2
5 ou mais	1
Total	40

Objetivo: Testar, ao nível de 5% de significância, se a distribuição do número de gols por jogo segue uma **distribuição de Poisson com $\lambda = 1{,}5$.**

Teste χ^2 de Homogeneidade

Teste χ^2 de Homogeneidade

> Objetivo: Comparar duas ou mais populações.

Suponha novamente que a v.a. X assume valores em s categorias, e deseja-se comparar a distribuição da v.a. X em r populações $P_1, \cdots, P_r$, com base em amostras de cada população.

Tabela: Frequências observadas (O) nas amostras de cada população

População	A_1	A_2	$\cdots$	A_s	**Total**
P_1	O_{11}	O_{12}	$\cdots$	O_{1s}	n_1
P_2	O_{21}	O_{22}	$\cdots$	O_{2s}	n_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
P_r	O_{r1}	O_{r2}	$\cdots$	O_{rs}	n_r
Total	n_1	n_2	$\cdots$	n_s	n

Neste caso, os valores esperados sob H_0 para a população i na categoria A_j são dados por

$$E_{ij} = \frac{n_i \times n_j}{n}, \quad i = 1, 2, \cdots, r; \quad j = 1, 2, \cdots, s.$$

Teste χ^2 de Homogeneidade

- `Estatística do Teste`:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}}$$

- `Distribuição sob` H_0: χ^2 com $(r-1) \times (s-1)$ graus de liberdade.
- `Região Crítica`: Rejeitar H_0 se $\chi^2_{obs} > k$, onde $P(\chi^2_{(r-1)(s-1)} > k) = \alpha$.

Teste χ^2 de Homogeneidade

> Exemplo: Uma prova básica de estatística foi aplicada a 100 alunos de Ciências Humanas e a 100 alunos de Biológicas. As notas foram classificadas segundo os graus A, B, C, D e E (onde D o aluno não recebe o crédito e E o aluno foi reprovado).

- `Objetivo:` Testar se as distribuições de notas são iguais entre alunos de Ciências Humanas e Biológicas.

Tabela: Resultados da prova

Aluno de	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**Total**
C. Humanas	15	20	30	20	15	100
C. Biológicas	8	23	18	34	17	100
Total	23	43	48	54	32	200

> Solução:

1. Definição das Hipóteses
   - H_0 : As distribuições das notas são as mesmas para ambos os grupos (Humanas e Biológicas).
   - H_1 : As distribuições diferem entre os grupos.

Teste χ^2 de Homogeneidade

2. Cálculo das Frequências Esperadas (E_{ij}): Sob H_0, as frequências esperadas são calculadas por:

$$E_{ij} = \frac{(\text{Total da linha } i) \times (\text{Total da coluna } j)}{\text{Total geral}}$$

Exemplo para Célula (Humanas, A):

$$E_{11} = \frac{100 \times 23}{200} = 11.5$$

Tabela de Valores Esperados:

Aluno de	A	B	C	D	E
C. Humanas	11.5	21.5	24	27	16
C. Biológicas	11.5	21.5	24	27	16

Teste χ^2 de Homogeneidade

3. Cálculo da Estatística Qui-Quadrado χ^2

$$\chi^2 = \sum \frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}}$$

Cálculos Parciais:

- Humanas, A: $\frac{(15-11.5)^2}{11.5} = 1.09$
- Biológicas, D: $\frac{(34-27)^2}{27} = 1.81$

Valor Total de χ^2:

$$\chi^2_{\text{obs}} \approx 13.14 \quad (\text{soma de todas as contribuições})$$

4. Determinação da Região Crítica

- **Graus de Liberdade:** $(r-1)(c-1) = (2-1)(5-1) = 4$
- **Valor Crítico (α = 0.05):** $\chi^2_{4;0.05} = 9.488$ (da tabela qui-quadrado).

Teste χ^2 de Homogeneidade

5. Decisão e Conclusão

- **Regra de Decisão:** Rejeitar H_0 se $\chi^2_{\text{obs}} > 9.488$.
- **Resultado:** Como $13.14 > 9.488$, **rejeitamos H_0.**

6: **Conclusão:** Há evidências estatísticas (α = 0.05) de que as distribuições de notas diferem entre alunos de Ciências Humanas e Biológicas.

Teste χ^2 de Homogeneidade

Tabela de Resumo do Teste Qui-Quadrado de Homogeneidade

Categoria	Grupo	O_{ij} (Observado)	E_{ij} (Esperado)	$(O_{ij} - E_{ij})^2 / E_{ij}$	Contribuição para χ^2
A	Humanas	15	11.5	(= 1.09)	1.09
A	Biológicas	8	11.5	(= 1.07)	1.07
B	Humanas	20	21.5	(= 0.10)	0.10
B	Biológicas	23	21.5	(= 0.10)	0.10
C	Humanas	30	24	(= 1.50)	1.50
C	Biológicas	18	24	(= 1.50)	1.50
D	Humanas	20	27	(= 1.81)	1.81
D	Biológicas	34	27	(= 1.81)	1.81
E	Humanas	15	16	(= 0.06)	0.06
E	Biológicas	17	16	(= 0.06)	0.06
Total		**200**	**200**	**Soma**	**$\chi^2 = 13.14$**