Inferência Estatística II

Testes de hipótestes específicos

Prof. Paulo Cerqueira Jr - cerqueirajr@ufpa.br
Faculdade de Estatística - FAEST
Instituto de Ciências Exatas e Naturais - ICEN

https://github.com/paulocerqueirajr

Introdução

Introdução

- Existem uma série de testes de hipóteses, cada um com sua finalidade.
- Para uma amostra, temos alguns testes:
  - Teste de normalidade
  - Teste-t comparação de grupos (indedependentes e pareados);
  - Testes não-paramétricos Qui-quadrado;

Testes para duas amostra

Testes para duas amostra

- Para duas amostra, temos alguns testes:
  - Teste para a comparação de médias com variância conhecida (Teste Z);
  - Teste para a comparação de médias com variância desconhecida (Teste t de **Student** comparação de grupos);
  - Teste para a comparação de variâncias;
  - Teste para comparação de amostras dependentes (Teste t de **Student** comparação de grupos pareado)

Teste para Comparação das médias

Teste para Comparação das médias

- Queremos comparar:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \quad \begin{array}{ll} \times & (i) H_1 : \mu_1 \neq \mu_2. \text{ (bilateral)} \\ \times & (ii) H_1 : \mu_1 > \mu_2. \text{ (Unilateral à direita)} \\ \times & (iii) H_1 : \mu_1 < \mu_2. \text{ (Unilateral à esquerda)} \end{array}$$

CASO 1: Mesma variância, conhecida. $(\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2)$.

- Estatística para o teste:

$$Z = \frac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \sim N(0, 1).$$

Exemplo

Exemplo: Vamos supor que os níveis de QI entre meninos e meninas da décima série sejam normalmente distribuídos, cada um com desvio padrão populacional de 25. Uma professora quer saber se a média do QI entre meninos e meninas da turma é diferente, então ela seleciona duas amostras aleatórias — uma de meninos e outra de meninas — cada uma com tamanho 40, e registra os níveis de QI. Vamos realizar o teste Z para duas amostras para determinar se a média dos níveis de QI é diferente entre meninos e meninas, com nível de significância de 5%.

Os dados:

```r
# Definindo os dados:
qi_meninos = c( 79,118,99,117,98,102,112,111,102,73,114,97,114,122,
                  90,115,84,105,84,126,83,96,111,151,147,103,104,118,
                  132,108,95,118,121,88,94,92,94,109,105,123)
qi_meninas = c( 99,128,89,107,99,104,119,112,105,93,84,91,113,129,
                   100,105,94,115,114,106,113,116,116,131,117,123,134,
                   128,112,101,105,89,101,118,124,72,104,119,145,133)
dados <- data.frame(grupo = rep(c("Meninas", "Meninos"), each=40),
                qi = c(qi_meninos, qi_meninas))
head(dados)
```

```
    grupo  qi
1 Meninas  79
2 Meninas 118
3 Meninas  99
4 Meninas 117
5 Meninas  98
6 Meninas 102
```

Exemplo

Passo 1: $H_0 : \mu_A = \mu_B$ contra $H_1 : \mu_A \neq \mu_B$

Passo 2:

$$Z = \frac{\overline{X}_A - \overline{X}_B - (\mu_A - \mu_B)}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \sim N(0,1)$$

Passo 3: Sob H_0, temos $Z = \frac{\overline{X}_A - \overline{X}_B}{\sqrt{50}\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}} \sim N(0,1)$,

$$RC = \{Z \in \mathbb{R} : |Z| < z_c\}$$

Logo,

$$0,025 = P(Z < z_1 | Z \sim N(0,1)) \quad \text{e} \quad 0,025 = P(Z > z_2 | Z \sim N(0,1)).$$

Assim, temos $z_1 = -1,96$ e $z_2 = 1,96$. E a regra de decisão é dada por

$$\text{Rejeitar } \; H_0 \; \text{ se } \; |Z| < 1,96.$$

Exemplo

Passo 4: O valor observado da estatística é

$$z_0 = \frac{106.350 - 110.175}{25\sqrt{\frac{1}{40} + \frac{1}{40}}} = -0.6842368$$

Passo 5: Como o valor observado de Z pertence a RC, rejeitamos H_0, e concluímos que há evidências de que a média dos níveis de QI é a mesma entre meninos e meninas.

Importante

- Poderíamos construir um I.C. para a diferença $\theta = \mu_A - \mu_B$!!!
- Em que:

$$\text{IC}(\theta, \gamma) = \left(\overline{X}_A - \overline{X}_B \pm z_{\alpha/2}\sigma\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}\right)$$

Exemplo

```r
library(BSDA)
z.test(x=qi_meninos, y=qi_meninas, mu=0, sigma.x=25, sigma.y=25, alternative = "two.sided")
```

```
    Two-sample z-Test

data:  qi_meninos and qi_meninas
z = -0.68424, p-value = 0.4938
alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 -14.781532   7.131532
sample estimates:
mean of x mean of y
  106.350   110.175
```

Teste para Comparação das médias

CASO 2: Mesma variância, desconhecida.

- Neste caso, a estatística para o teste:

$$T = \frac{\overline{X}_A - \overline{X}_B - (\mu_A - \mu_B)}{S_p\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \sim t_{n+m-2},$$

onde

$$S_p^2 = \frac{(n-1)S_A^2 + (m-1)S_B^2}{n+m-2}.$$

- Este teste é conhecido como `teste t para duas amostras!`

Teste para Comparação das médias

CASO 3: Variâncias desiguais e desconhecidas.

- Pode-se provar que a estatística

$$T = \frac{\overline{X}_A - \overline{X}_B - (\mu_A - \mu_B)}{\sqrt{\frac{S_A^2}{n} + \frac{S_B^2}{m}}},$$

sob H_0, tem uma distribuição aproximadamente t-Student com graus de liberdade, dados aproximadamente por

$$v = \frac{(x+y)^2}{\frac{x^2}{n-1} + \frac{y^2}{m-1}},$$

com $x = \frac{S_A^2}{n}$ e $y = \frac{S_B^2}{m}$.

- Este teste é conhecido como `Problema de Behrens-Fisher!`.

Exemplo

- Os dados:

```r
# Peso de homens e mulheres
peso.m <- c(38.9, 61.2, 73.3, 21.8, 63.4,
            64.6, 48.4, 48.8, 48.5)
peso.h <- c(67.8, 60, 63.4, 76, 89.4,
            73.3, 67.3, 61.3, 62.4)
# Creando um data frame
dados <- data.frame(
                grupo = rep(c("Mulheres",
                              "Homens"), ea
                peso = c(peso.m,  peso.h)
                )
head(dados)
```

```
     grupo peso
1 Mulheres 38.9
2 Mulheres 61.2
3 Mulheres 73.3
4 Mulheres 21.8
5 Mulheres 63.4
6 Mulheres 64.6
```

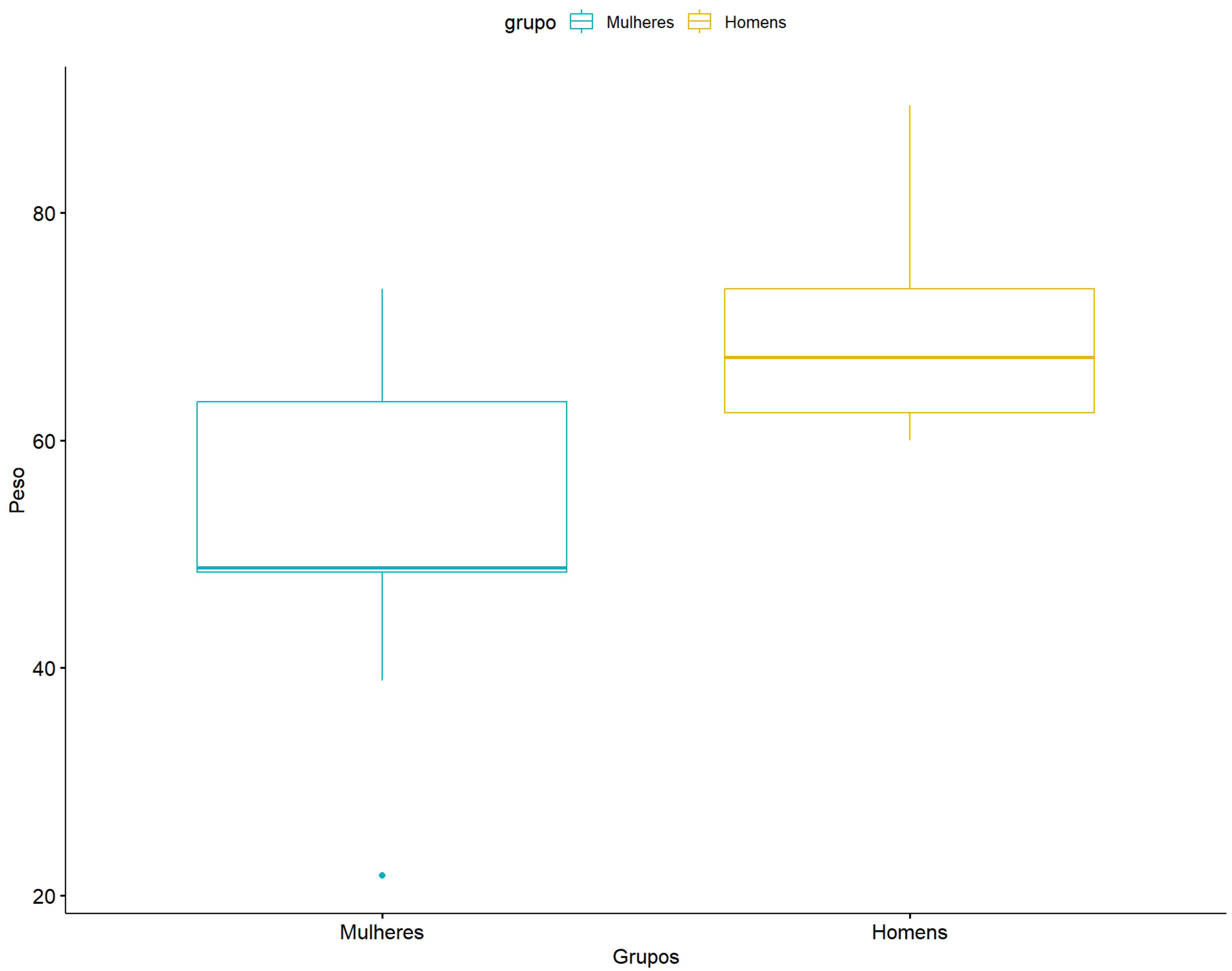
- Medidas de resumo:

```r
library(dplyr)
group_by(dados, grupo) %>%
  summarise(
    freq = n(),
    media = mean(peso, na.rm = TRUE),
    vari = var(peso, na.rm = TRUE)
  )
```

```
# A tibble: 2 × 4
  grupo     freq media  vari
  <chr>    <int> <dbl> <dbl>
1 Homens       9  69.0  87.9
2 Mulheres     9  52.1 243.
```

Exemplo

```r
library("ggpubr")
ggboxplot(dados, x = "grupo", y = "peso",
          color = "grupo", palette = c("#00AFBB", "#E7B800"),
          ylab = "Peso", xlab = "Grupos")
```



Exemplo

> A construção formal do teste.

Passo 1: $H_0 : \mu_A = \mu_B$ contra $H_1 : \mu_A \neq \mu_B$

Passo 2:

$$T = \frac{\overline{X}_A - \overline{X}_B - (\mu_A - \mu_B)}{\sqrt{\frac{S_A^2}{n} + \frac{S_B^2}{m}}}$$

Exemplo

Passo 3: Sob H_0, temos $T = \frac{\overline{X}_A - \overline{X}_B}{\sqrt{\frac{S_A^2}{n} + \frac{S_B^2}{m}}} \sim t_v$

$$RC = \{T \in \mathbb{R} : T < t_1 \text{ ou } T > t_2\},$$

com

$$0,025 = P(T < t_1 | T \sim t_v) \quad \text{e} \quad 0,025 = P(T > t_2 | T \sim t_v).$$

Agora,

$$v = \frac{((87.9/9) + (243/9))^2}{(87.9/9)^2/8 + (243/9)^2/8} = 13.1179798 \simeq 14$$

Portanto,

$$t_1 = -2.1447867 \quad \text{e} \quad t_2 = 2.1447867.$$

E a regra de decisão é dada por: Rejeitar H_0 se $T < -2.1447867$ ou $T > 2.1447867$.

Exemplo

Passo 4: O valor observado da estatística é

$$t_0 = \frac{69.0 - 52.1}{\sqrt{\frac{87.9}{9} + \frac{243}{9}}} = 2.7871451.$$

Passo 5: Como o valor observado de T pertence a RC, rejeitamos H_0, e concluímos que há evidências de que os dois tipos de vigas têm resistências médias diferentes.

Exemplo

- Caso 3:

```r
(res <- t.test(peso ~ grupo, data = dados, var.equal = FALSE))
```

```
	Welch Two Sample t-test

data:  peso by grupo
t = 2.7842, df = 13.114, p-value = 0.01538
alternative hypothesis: true difference in means between group Homens and group Mulheres is not equal to 0
95 percent confidence interval:
  3.795858 29.981920
sample estimates:
  mean in group Homens mean in group Mulheres 
              68.98889               52.10000 
```

Exemplo

- Caso 2:

```r
(res <- t.test(peso ~ grupo, data = dados, var.equal = TRUE))
```

```
	Two Sample t-test

data:  peso by grupo
t = 2.7842, df = 16, p-value = 0.01327
alternative hypothesis: true difference in means between group Homens and group Mulheres is not equal to 0
95 percent confidence interval:
  4.029759 29.748019
sample estimates:
  mean in group Homens mean in group Mulheres 
              68.98889               52.10000 
```

`Obs:` Para realizar o teste t com variâncias iguais temos que usar o argumento `var.equal=TRUE`.

Teste para Comparação das Variâncias

Teste para Comparação das Variâncias

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$

A estatística do teste será

$$F = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \sim F_{n-1,m-1}$$

Exemplo: Queremos verificar se duas máquinas produzem peças com a mesma homogeneidade quanto à resistência à tensão. Para isso, sorteamos duas amostras de seis peças de cada máquina, e obtivemos as seguintes resistências:

- Máquina A: 145, 127, 136, 142, 141, 137
- Máquina B: 143, 128, 132, 138, 142, 132

Exemplo

Passo 1: $H_0 : \sigma_A^2 = \sigma_B^2$ contra $H_1 : \sigma_A^2 \neq \sigma_B^2$

Passo 2:

$$F = \frac{S_A^2/\sigma_A^2}{S_B^2/\sigma_B^2} \sim F_{5,5}$$

Passo 3: Sob H_0, temos que $F = \frac{S_A^2}{S_B^2} \sim F_{5,5}$

Fixando $\alpha = 0,05$, a RC é dada por

$$RC = \{F < F_1 \text{ ou } F > F_2\},$$

com F_1 e F_2 tais que

$$0,025 = P(F < F_1 | F \sim F_{5,5}) \quad \text{e} \quad 0,025 = P(F > F_2 | F \sim F_{5,5})$$

Exemplo

Temos então, $F_2 = 7,15$ e $F_1 = 1/7,15 = 0,14$. Assim, a regra de decisão é:

$$\text{Rejeitar } \ H_0 \ \text{ se } \ F < 0,14 \ \text{ ou } \ F > 7,15.$$

Passo 4: Com os dados apresentados, temos $S_A^2 = 40$ e $S_B^2 = 37$. Portanto, o valor observado da estatística é $F_o = 40/37 = 1,08$.

Passo 5: Como o valor observado da estatística não pertence a RC, aceitamos H_0 e concluímos que as máquinas produzem com a mesma variabilidade.

Exemplo

```r
A <- c(145, 127, 136, 142, 141, 137)
B <-  c(143, 128, 132, 138, 142, 132)
dados <- data.frame(grupo = rep(c("A", "B"), each=6), res = c(A,  B))
head(dados)
```

```
  grupo res
1     A 145
2     A 127
3     A 136
4     A 142
5     A 141
6     A 137
```

```r
(res.ftest <- var.test(res ~ grupo, data = dados))
```

```

	F test to compare two variances

data:  res by grupo
F = 1.0821, num df = 5, denom df = 5, p-value = 0.9331
alternative hypothesis: true ratio of variances is not equal to 1
95 percent confidence interval:
 0.1514131 7.7327847
sample estimates:
ratio of variances 
          1.082056 
```

Duas Populações Normais dependentes

Duas Populações Normais dependentes

Aqui temos duas amostras $X_1, X_2, \cdots, X_n$ e $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$, só que agora as observações são pareadas, isto é, temos uma amostra de pares

$$(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \cdots, (X_n, Y_n)$$

Se definirmos a v.a. $D = X - Y$, teremos uma amostra $D_1, D_2, \cdots, D_n$, resultante da diferença dos valores entre cada par. Reduzimos o problema de duas populações a um problema de uma única população, já visto anteriormente. Assim,

$$\overline{D} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} D_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - Y_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i = \overline{X} - \overline{Y}$$

terá distribuição $N(\mu_D, \sigma_D^2/n)$.

Duas Populações Normais dependentes :

Considerando

$$S_D^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(D_i - \overline{D})^2,$$

temos que

$$T = \frac{\sqrt{n}(\overline{D} - \mu_D)}{S_D} \sim t_{n-1}$$

Como $\mu_D = E(D) = E(X - Y) = E(X) - E(Y) = \mu_1 - \mu_2$, testar $H_0 : \mu_D = 0$ é equivalente a testar $H_0 : \mu_1 = \mu_2$.

Exemplo

Exemplo: Cinco operadores de certo tipo de máquina são treinados em máquinas de duas marcas diferentes, A e B. Mediu-se o tempo em que cada um deles gasta na realização de uma mesma tarefa, e os resultados estão na tabela a seguir.

Operador	**Marca A**	**Marca B**
A	80	75
B	72	70
C	65	60
D	78	72
E	85	78

Ao nível de significância de 10%, poderíamos afirmar que a tarefa realizada na Máquina A demora mais que na Máquina B?

Exemplo

Passo 1:

$$H_0 : \mu_A = \mu_B \times H_1 : \mu_A > \mu_B$$

Essas hipóteses são equivalentes a

$$H_0 : \mu_D = 0 \times H_1 : \mu_D > 0$$

Passo 2:

$$T = \frac{\sqrt{n}(\overline{D} - \mu_D)}{S_D} \sim t_4$$

Passo 3: Como é o mesmo operador que realiza a tarefa nas duas máquinas, dizemos que as variáveis são emparelhadas. Sob H_0, temos $T = \frac{\sqrt{n}\overline{D}}{S_D} \sim t_4$. Assim, com $\alpha = 0,10$, temos

$$P(T > t_c | T \sim t_4) = 0,10.$$

Portanto, $t_c = 1,533$, logo, a regra de decisão é: Rejeitar H_0 se $T > 1,533$.

Exemplo

Passo 4: Da Tabela de dados acima, obtemos os valores de D:

$$d_i : \quad 5, 2, 5, 6, 7$$

e, portanto,

$$\overline{d} = 5, \quad \text{e} \quad s_D^2 = 3,5$$

Logo, o valor observado da estatística $\hat{e}$

$$t_o = (\sqrt{5} \times 5)/\sqrt{3,5} = 5,98$$

Passo 5: Como o valor observado pertence a RC, rejeitamos H_0, ou seja, demora-se mais para realizar a tarefa na máquina A.

Podemos construir um I.C. para μ_D, adotando $\gamma = 0,90$:

$$IC(\mu_D; 90\%) = \bar{D} \pm t_{\alpha/2} \times \sqrt{s_D^2}/\sqrt{n}$$

$$IC(\mu_D; 90\%) = 5 \pm 1,78 = [3,22 \; ; \; 6,78]$$

Exemplo

```r
ma <- c(80, 72, 65, 78, 85)
mb <- c(75, 70, 60, 72, 78)

dados <- data.frame(grupo = rep(c("antes", "depois"), each=5), tempo = c(ma, mb) )
head(dados)
```

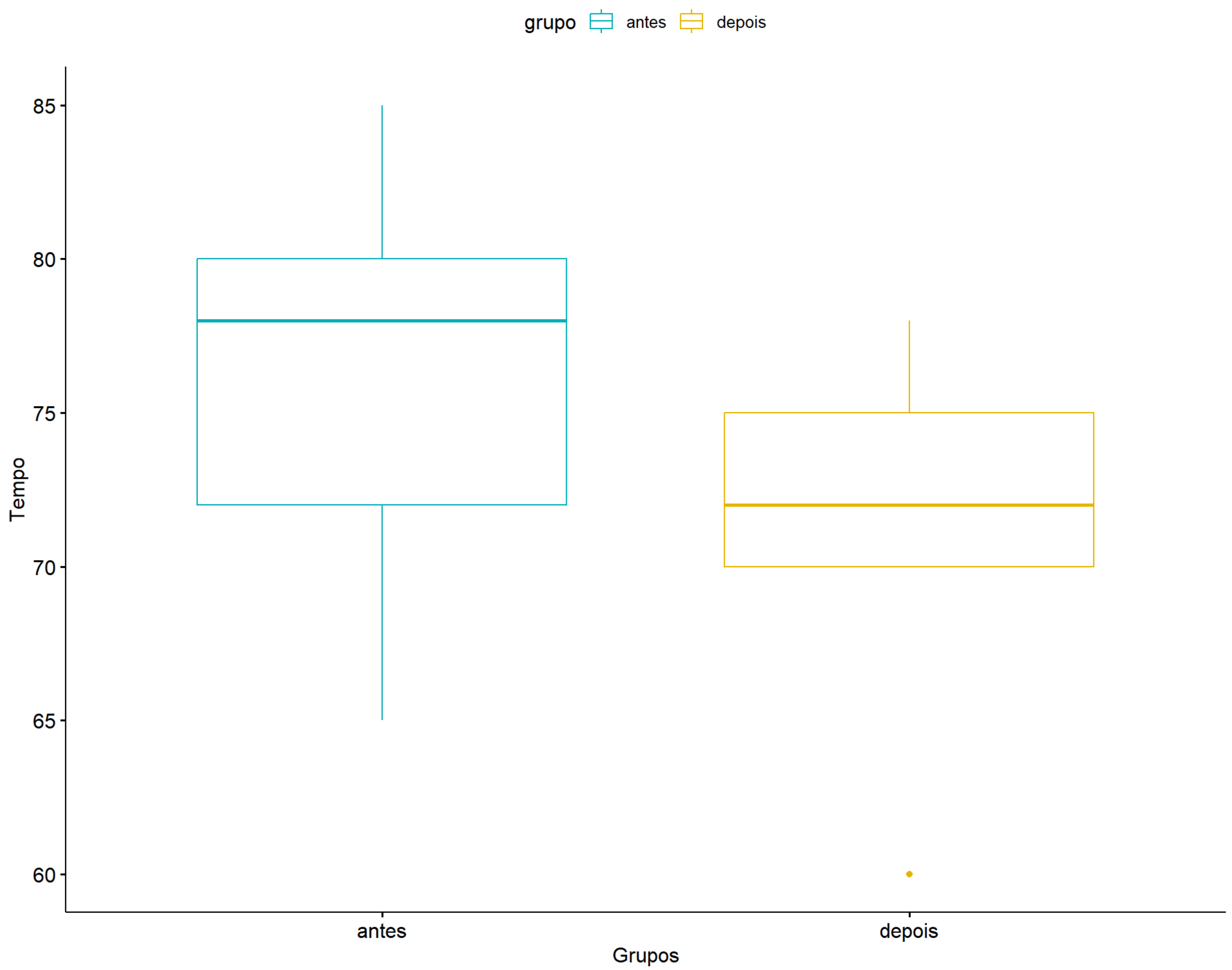
```
   grupo tempo
1  antes    80
2  antes    72
3  antes    65
4  antes    78
5  antes    85
6 depois    75
```

```r
group_by(dados, grupo) %>%
  summarise(
    freq = n(),
    media = mean(tempo, na.rm = TRUE),
    desvio = sd(tempo, na.rm = TRUE)
  )
```

```
# A tibble: 2 × 4
  grupo   freq media desvio
  <chr>  <int> <dbl>  <dbl>
1 antes      5    76   7.71
2 depois     5    71   6.86
```

Exemplo

```r
ggboxplot(dados, x = "grupo", y = "tempo",
          color = "grupo",
          palette = c("#00AFBB", "#E7B800"),
          order = c("antes", "depois"),
          ylab = "Tempo", xlab = "Grupos")
```




```r
t.test(x=mb, y=ma, paired = TRUE)
```

```
	Paired t-test

data:  mb and ma
t = -5.9761, df = 4, p-value = 0.00394
alternative hypothesis: true mean difference is not
equal to 0
95 percent confidence interval:
 -7.322941 -2.677059
sample estimates:
mean difference
             -5
```

Testes Não-paramétricos

Teste de Aderência de Kolmogorov-Smirnov:

> Objetivo: Testar se a amostra observada provém de um modelo de probabilidade especificado, com função de distribuição acumulada (f.d.a.) $F_0(x)$.

- $X_1, \cdots, X_n$: a.a. da v.a. X, cujo modelo de probabilidade é desconhecido.
- Seja $f(x)$ a f.d.p. (ou f.p.) da v.a. X e $F(x) = P(X \leq x)$ a sua f.d.a. Queremos testar a seguinte hipótese:

$$H_0 : F(x) = F_0(x), \quad \text{para todo } x$$

- Um possível estimador para $F(x)$ é a função de distribuição empírica (f.d.e.), definida por

$$F_e(x) = \frac{N(x)}{n},$$

onde $N(x)$ é o número de observações menores ou iguais a x, e n é o número total de observações.

- Se $F_e(x)$ for um bom estimador de $F(x)$, então as duas curvas devem estar próximas.

Teste de Aderência de Kolmogorov-Smirnov:

Passos de construção do teste:

1. Ordenar os valores da amostra;
2. Obter os valores de $F(x_i)$, a f.d.a. especificada na hipótese H_0, para cada observação x_i da amostra;
3. Obter os valores de $F_e(x_i) = \frac{i}{n}$, a f.d.a. empírica para cada observação x_i da amostra;
4. Obter as diferenças $|F(x_i) - F_e(x_i)|$;
5. Obter o valor da diferença máxima, $D_{obs} = \max |F(x_i) - F_e(x_i)|$;
6. Obter na Tabela da distribuição de Kolmogorov-Smirnov o valor tabelado da variável D, para um nível fixado ($\alpha = 0,05$ ou $\alpha = 0,01$), D_{tabi};
7. Rejeitar H_0 se $D_{obs} > D_{tab}$, caso contrário, aceitar H_0.

Determinação do Valor Tabelado para o Teste de Kolmogorov-Smirnov

- Para Amostras Pequenas ($n \leq 50$) tem-se a seguinte tabela de Valores Críticos:

n	$D_{0.05}$	$D_{0.01}$
5	0.565	0.669
10	0.409	0.490
20	0.294	0.352
30	0.242	0.290
50	0.188	0.226

- Fórmula Aproximada

$$D_\alpha \approx \frac{c(\alpha)}{\sqrt{n}}$$

Determinação do Valor Tabelado para o Teste de Kolmogorov-Smirnov

- Para Amostras Grandes ($n > 50$), temos a aproximação Assintótica:

$$D_\alpha = \frac{c(\alpha)}{\sqrt{n}}$$

- Valores de $c(\alpha)$:
  - $\alpha = 0.05 \Rightarrow \frac{1.36}{\sqrt{n}}$
  - $\alpha = 0.01 \Rightarrow \frac{1.63}{\sqrt{n}}$
- A fórmula geral para qualquer tamanho de amostra:

$$D_\alpha = \sqrt{-\frac{\ln(\alpha/2)}{2n}}$$

Exemplo

> Objetivo: Verificar se uma amostra de dados segue uma distribuição normal padrão $\mathcal{N}(0, 1)$ utilizando o teste de aderência de Kolmogorov-Smirnov.

- Amostra de tamanho $n = 5$:

$$X = \{-0.5, 0.1, 0.3, 0.8, 1.2\}$$

- Passo a Passo do Teste:
  - Passo 1: Ordenar os dados

$$X_{\text{ordenado}} = \{-0.5, 0.1, 0.3, 0.8, 1.2\}$$

Exemplo

- Passo 2: Calcular $F(x_i)$ (f.d.a. teórica sob H_0) Assumindo $H_0 : F(x) = \Phi(x)$ (distribuição normal padrão):

$$
\begin{aligned}
F(-0.5) &= \Phi(-0.5) \approx 0.3085 \\
F(0.1) &= \Phi(0.1) \approx 0.5398 \\
F(0.3) &= \Phi(0.3) \approx 0.6179 \\
F(0.8) &= \Phi(0.8) \approx 0.7881 \\
F(1.2) &= \Phi(1.2) \approx 0.8849
\end{aligned}
$$

- Passo 3: Calcular $F_e(x_i)$ (f.d.a. empírica)

$$
F_e(x_i) = \frac{i}{n} = \begin{cases}
F_e(-0.5) = \frac{1}{5} = 0.2 \\
F_e(0.1) = \frac{2}{5} = 0.4 \\
F_e(0.3) = \frac{3}{5} = 0.6 \\
F_e(0.8) = \frac{4}{5} = 0.8 \\
F_e(1.2) = \frac{5}{5} = 1.0
\end{cases}
$$

Exemplo

- Passo 4: Calcular as diferenças $|F(x_i) - F_e(x_i)|$

$$\begin{aligned}
|F(-0.5) - F_e(-0.5)| &= 0.1085 \\
|F(0.1) - F_e(0.1)| &= 0.1398 \\
|F(0.3) - F_e(0.3)| &= 0.0179 \\
|F(0.8) - F_e(0.8)| &= 0.0119 \\
|F(1.2) - F_e(1.2)| &= 0.1151
\end{aligned}$$

- Passo 5: Encontrar a diferença máxima D_{obs}

$$D_{\text{obs}} = \max\{0.1085, 0.1398, 0.0179, 0.0119, 0.1151\} = 0.1398$$

- Passo 6: Valor crítico D_{tab} ($\alpha = 0.05$) Para $n = 5$ e $\alpha = 0.05$:

$$D_{\text{tab}} \approx 0.565$$

Exemplo

- Passo 7: Decisão Como $D_{\text{obs}} = 0.1398 < D_{\text{tab}} = 0.565$, **não rejeitamos** H_0.
- **Conclusão:** `Não há evidências estatísticas` para afirmar que a amostra não segue a distribuição normal padrão $N(0, 1)$.

Observações Adicionais:

1. **Amostras maiores**: Para $n > 50$, utilize aproximações assintóticas (ex: $D_{\text{tab}} \approx \frac{1.36}{\sqrt{n}}$ para $\alpha = 0.05$).
2. **Outras distribuições**: O teste pode ser adaptado para qualquer distribuição contínua (exponencial, uniforme, etc.).
3. O teste é mais conservativo para amostras pequenas.
4. $F_0(x)$ deve ser completamente especificada.