


# **EQUILÍBRIO GERAL COMPUTÁVEL: IMPLEMENTANDO O MINIMAL NO R**

**Paulo Felipe Oliveira**

 paulofelipe

 paulofelipeao

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Estruturas de Modelo para o Pacote emr</b>	<b>3</b>
2.1	Exemplo: Oferta e Demanda . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Implementando o MINIMAL no R</b>	<b>4</b>
3.1	Dados para o Modelo . . . . .	4
3.2	Implementação . . . . .	7
3.2.1	Passos Iniciais . . . . .	7
3.2.2	Conjuntos ( <i>Sets</i> ) . . . . .	8
3.2.3	Preços . . . . .	9
3.2.4	Produção . . . . .	12
3.2.5	Famílias . . . . .	15
3.2.6	Investimento e Governo . . . . .	17
3.2.7	Demanda de segundo nível entre bens domésticos e importados . .	18
3.2.8	Exportações . . . . .	20
3.2.9	Demanda por Fatores Primários . . . . .	20
3.2.10	Equilíbrios nos Mercados de Bens . . . . .	23
3.2.11	Equilíbrio nos Mercados de Fatores de Produção . . . . .	26
3.2.12	Criando o objeto do modelo . . . . .	28
3.3	Exemplos de Simulações . . . . .	29

## Resumo

Este documento tem o objetivo de discutir a implementação de um modelo de equilíbrio geral simples no R usando o pacote ‘emr’. Como exemplo, utiliza-se o MINIMAL que é um modelo desenvolvido com propósitos educacionais pelos criadores do GEMPACK. Este modelo é de um único país com múltiplos setores, múltiplas fontes de demanda e comércio internacional.

## 1. INTRODUÇÃO

Os modelos econômicos constituem uma ferramenta fundamental para o desenvolvimento de análises por economistas. Para análises *ex ante*, tradicionalmente, são utilizados os modelos de equilíbrio parcial ou de equilíbrio geral. Enquanto os modelos de equilíbrio parcial estão focados em um mercado específico, os modelos de equilíbrio geral focam na interação entre os diversos setores da economia. Conforme [Burfisher \[2017\]](#), o modelo de equilíbrio geral é economicamente amplo porque considera as motivações e o comportamento de consumidores e produtores e as suas ligações.

Apesar da microeconomia utilizada nos modelos tradicionais de equilíbrio geral ser relativamente simples, a implementação de um modelo completo pode ser uma tarefa não trivial. Para facilitar essa tarefa, duas linguagens específicas foram desenvolvidas: GEMPACK e GAMS. É incontestável que, muito provavelmente, especialistas em modelos de equilíbrio geral irão trabalhar com uma dessas duas ferramentas. Contudo, vale ressaltar que essas ferramentas necessitam da aquisição de licenças para que seja possível trabalhar com modelos mais complexos em termos do número de variáveis/equações.

O MINIMAL<sup>1</sup> ([Horridge and Powell \[2001\]](#)) é um modelo de equilíbrio geral simplificado utilizado em cursos introdutórios do GEMPACK. A partir desse modelo, é possível deixar claro como a teoria microeconômica do consumidor e do produtor podem ser combinadas para a construção de um modelo de equilíbrio geral.

Este modelo considera 7 setores, um investidor agregado, um agente representativo das famílias, exportações agregadas e o governo. Cada produto pode ser obtido a partir de fontes domésticas ou importadas.

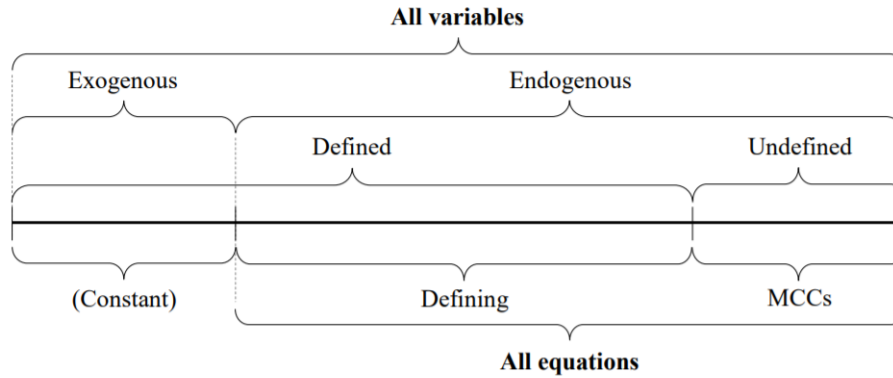
## 2. ESTRUTURAS DE MODELO PARA O PACOTE EMR

A definição dos modelos segue a lógica discutida em [A simple structure for CGE models by Xiao-guang Zhang](#).

---

<sup>1</sup><https://www.copsmodels.com/minimal.htm>

Figura 1. Estrutura das variáveis e das equações (Zhang, 2013)



Nessa abordagem, as variáveis exógenas e endógenas serão classificadas em dois tipos: definidas ou não-definidas. As variáveis exógenas, por definição, são definidas. As endógenas pode ser dos dois tipos. As variáveis definidas são aquelas que podem ser construídas a partir dos valores das demais variáveis, das chamadas equação de definição. Já as não-definidas são aquelas que os valores serão definidos a partir de condições de equilíbrio de mercado (MCCs).

## 2.1 Exemplo: Oferta e Demanda

## 3. IMPLEMENTANDO O MINIMAL NO R

### 3.1 Dados para o Modelo

Os dados para o modelo são esquematizados conforme a Figura 2. O esquema é similar ao de uma matriz de insumo produto, na qual os elementos das linhas vendem para os elementos das colunas.

Fica claro na Figura 2 que existem duas fontes (*sources*) de fornecimento de produtos: doméstica e importada. Esse produtos são demandados pelos  $I$  setores produtores, pelos investidores, pelas famílias, pelas exportações<sup>2</sup> e pelo governo. As somas das linhas para produtos (*commodities*) domésticos ou importados serão denominadas de vendas (*sales*).

Adicionalmente, os fatores trabalhos e capital são demandados pelos produtores, e há uma taxa sobre a produção. Por fim, independente do demandante, existe um imposto

<sup>2</sup>O fornecimento de produtos importados para exportação é igual a zero.

Figura 2. Base de Dados para o Minimal(Horridge and Powell [2001])

		Absorption Matrix					
		1	2	3	4	5	
		Producers	Investors	Household	Export	Government	Total Sales
		← I →	← 1 →	← 1 →	← 1 →	← 1 →	
Domestic Flows	↑ C ↓	USE(commodity,"dom",user)					
Imported Flows	↑ C ↓	USE(commodity,"imp",user)					
Labour	↑ 1 ↓	FACTOR (labour)	C = Number of Commodities = 7 I = Number of Industries = 7				
Capital	↑ 1 ↓	FACTOR (capital)					
Output tax	↑ 1 ↓	V1PTX					

		Tax on Imports
Size	← 1 →	
↑ C ↓	V0MTX	

de importação por produto. O valor arrecadado de imposto de importação será único por produto, o que resulta em uma única taxa de importação por produto.

A tabela apresentada na Figura 3 detalha um conjunto de valores para a Austrália a partir de dados de 1986–1987. Os valores estão a preços dos produtores. Ou seja, inclui qualquer imposto indireto que possa ter sido aplicada àquele fluxo. Para cada setor produtor, a sua produção (soma da respectiva coluna) tem que ser igual às suas vendas (soma da respectiva linha). Por exemplo, a produção do setor Agricultura-Mineração (AgricMining) foi igual 45.730, que é o mesmo valor de suas vendas.

Para as importações de produtos manufaturados (Manufacture), foi recolhido o montante de 5.787. O valor total importado desses produtos foi de 42.087 (este valor já inclui o imposto de importação), o que implica em uma taxa de importação de 15,94%<sup>3</sup>.

<sup>3</sup>5787/(42087 - 5787).

Figura 3. Base de Dados para Austrália (Milhões 1986-1987)

	All Users										
	Industries						Final Demands				
	Agric	Mining	Manufacture	Utilities	Construction	Trade	Transpt	Finan	Property	Services	Total
<i>Domestic</i>											
Agric	5502	14658	1839	689	143					641	45730
Mining	4587	30009	643	12486	10200					6947	127264
Manufacture	1345	2045	3261	176	979					2037	16401
Utilities	89	55	13	0	438					381	40201
Construction	2958	11539	694	3353	8892					5680	88793
Trade	1754	6545	622	1886	9623					6111	74520
Transpt	403	1595	92	290	1316					2210	80801
Finan											
Property											
Services											
<i>Imported</i>											
Agric	233	1677	1	49	7					145	2470
Mining	1305	12411	184	2518	2322					3232	42087
Manufacture	1	2	2	0	1					2	14
Utilities	0	1	0	0	3					8	82
Construction	104	259	11	34	703					258	2599
Trade	90	302	19	29	328					209	1470
Transpt	26	451	7	55	117					774	2312
Finan											
Property											
Services											
Labour	10779	22512	3594	15008	35532					17095	147866
Capital	11337	6359	4293	2160	10409					28873	68043
Production tax	5217	16844	1126	1468	7780					5140	41783
<b>Total Cost</b>	<b>45730</b>	<b>127264</b>	<b>16401</b>	<b>40201</b>	<b>88793</b>					<b>80801</b>	<b>782436</b>
Tax on imports	497	5787	0	0	0					27	52

## 3.2 Implementação

### 3.2.1 Passos Iniciais

Inicialmente, é preciso carregar o pacote `emr`:

```
library(emr)
# Carregar o tidyverse para manipulação dos dados
library(tidyverse)
```

Adicionalmente, também é necessário ler os dados que servirão de base para o modelo. Os dados foram exportados do formato HAR do GEMPACK para csv. Nessa conversão, as diversas tabelas são empilhadas em um único csv, sendo separadas por uma linha denominada de *HEADER*.

Dessa forma, vamos inicialmente identificar os *headers*:

```
minimal_headers <- read_lines('../dados/minimal.csv')

minimal_headers[str_detect(minimal_headers, "Header")]

## [1] "!Header: USE , dimensions: COM*SRC*USER [7*2*11], description: USE matrix"
## [2] "!Header: 1FAC, dimensions: FAC*IND [2*7], description: Wages and profits"
## [3] "!Header: OTAR, dimensions: COM [7], description: Import tax revenue"
## [4] "!Header: 1PTX, dimensions: IND [7], description: Production tax revenue"
## [5] "!Header: ARM , dimensions: COM [7], description: Armington elasticities"
## [6] "!Header: P028, dimensions: IND [7], description: Primary factor substitution elasticity"
## [7] "!Header: P018, dimensions: COM [7], description: Export demand elasticities"
```

A Tabela 1 detalha em quais linhas as tabelas se iniciam de fato e quantas linhas de dados existem em cada tabela. Por exemplo, a tabela `USE`, que contém os dados de uso por produto, origem e usuário, inicia-se na linha 2 e encerra na linha 156, sendo 154 linhas de dados e uma com os títulos de cada coluna. Para, ler essa tabela, podemos executar o seguinte código:

```
USE <- read_csv(
  file = '../dados/minimal.csv',
  skip = 1,
  n_max = 154,
  col_types = 'cccd'
)

head(USE)

## # A tibble: 6 x 4
##   COM      SRC  USER      Value
##   <chr>    <chr> <chr>    <dbl>
```

```
## 1 AgricMining dom AgricMining 5502
## 2 Manufacture dom AgricMining 4587
## 3 Utilities dom AgricMining 1345
## 4 Construction dom AgricMining 89
## 5 TradeTranspt dom AgricMining 2958
## 6 FinanProprty dom AgricMining 1754
```

Tabela 1. Posições dos Headers no Arquivo minimal.csv

Nome	Início	Fim	Nº de Linhas
USE	2	156	154
1FAC	158	172	14
0TAR	174	181	7
1PTX	183	190	7
ARM	192	199	7
P028	201	208	7
P018	210	217	7

As demais tabelas serão importadas quando necessárias.

### 3.2.2 Conjuntos (*Sets*)

Aqui, iremos definir os conjuntos de índices que são utilizados pelas variáveis do modelo. Por exemplo, a variável de produção é definida por produto (*commodity*) pertencente ao conjunto COM, que é composto pela descrição de todos os produtos.

Para implementação do modelo, precisamos de uma lista nomeada *sets*, na qual cada elemento recebe o nome do conjunto e seus possíveis valores.

Abaixo listamos todos os conjuntos:

- IND: indústrias;
- SRC: origem (doméstica ou importada);
- COM: produtos;
- USER: usuários (fontes de demanda);
- IMPUSER: usuários que demandam produtos importados;
- FINALUSER: usuários que compõem a absorção final da economia;
- FAC: fatores primários (capital e trabalho).

Abaixo, o código para criar os conjuntos.



```

IND <- c("AgricMining", "Manufacture", "Utilities", "Construction",
        "TradeTranspt", "FinanProprty", "Services")

COM <- c("AgricMining", "Manufacture", "Utilities", "Construction",
        "TradeTranspt", "FinanProprty", "Services")

SRC <- c("dom", "imp")

USER <- c("AgricMining", "Manufacture", "Utilities", "Construction",
        "TradeTranspt", "FinanProprty", "Services", "Investment",
        "Households", "Government", "Exports")

IMPUSER <- c("AgricMining", "Manufacture", "Utilities", "Construction",
        "TradeTranspt", "FinanProprty", "Services", "Investment",
        "Households", "Government")

FINALUSER <- setdiff(USER, IND)

FAC <- c("Labour", "Capital")

sets <- list(
  IND = IND,
  COM = COM,
  SRC = SRC,
  USER = USER,
  IMPUSER = IMPUSER,
  FINALUSER = FINALUSER,
  FAC = FAC
)

```

### 3.2.3 Preços

Inicialmente, vamos definir os preços dos produtos  $c \in \text{COM}$  fornecidos pelas fontes  $s \in \text{SRC}$ :

$$P_{cs} = \begin{cases} \text{P1TOT}_c \times \text{PTX}_c & \text{se } s = \text{dom} \\ \text{PWORLD}_c \times \phi \times \text{mtx}_c & \text{se } s = \text{imp}, \end{cases} \quad (1)$$

em que  $P_{cs}$  é o preço do produto  $c$  de origem  $s$ ,  $\text{P1TOT}_c$  é o custo (marginal) de produção do produto  $c$ ,  $\text{PTX}_c$  é o poder da imposto sobre a produção ( $1 + \text{imposto sobre a produção}$ ),  $\text{PWORLD}_c$  é o preço internacional do produto  $c$ ,  $\phi$  é a taxa de câmbio<sup>4</sup> e  $\text{mtx}_c$  é o poder da tarifa sobre a importação do produto  $c$ .

---

<sup>4</sup>A taxa de câmbio é usada como numerário no modelo

No GEMPACK, as equações são reescritas utilizando a forma de variação percentual. Aqui, vamos utilizar a chamada *exact-hat algebra*. As variáveis serão reescritas em variações. Assim, por exemplo, denotamos a variação exata de uma variável  $x$  como  $\hat{x} = \frac{x'}{x}$ , em que  $x$  é o valor inicial e  $x'$  é o valor no novo equilíbrio.

Assim, iremos reescrever 1 como:

$$\hat{P}_{cs} = \begin{cases} P1\hat{T}OT_c \times P\hat{T}X_c & \text{se } s = \text{dom} \\ PW\hat{O}RLD_c \times \hat{\phi} \times m\hat{t}x_c & \text{se } s = \text{imp}, \end{cases} \quad (2)$$

Adicionalmente, ao consumir o bem  $c$  de duas diferentes fontes (doméstica e importada), os demandantes estão consumindo um bem composto com preço  $P_{cu}^s$  definido como:

$$\hat{P}_{cu}^s = \sum_{s \in SRC} SRC\text{SHARE}_{cus} \hat{P}_{cs}, \quad c \in \text{COM}, u \in \text{IMPUSER}$$

em que  $SRC\text{SHARE}_{cus}$  é participação da origem  $s$  no dispêndio do usuário  $u$  em produtos  $c$ .

Antes de começarmos a definir os parâmetros, as variáveis e as equações, precisamos definir as listas que guardarão esses componentes do modelo:

```
params <- list()
variables <- list()
equations <- list()
```

Agora, vamos começar a definir os parâmetros das equações acima.

```
params[["PTX"]] <- create_param(
  value = 1,
  indexes = sets['IND'],
  desc = "Variação no poder do imposto sobre a produção"
)

params[["PWORLD"]] <- create_param(
  value = 1,
  indexes = sets['COM'],
  desc = "Variação no preço internacional do produto c"
)

params[["PHI"]] <- create_param(
  value = 1,
  indexes = "PHI",
  desc = "Variação na taxa de câmbio"
)
```

```

params[["MTX"]] <- create_param(
  value = 1,
  indexes = sets['COM'],
  desc = "Variação no poder da tarifa de importação do produto c"
)

SRCSHARE <- USE %>%
  filter(USER %in% IMPUSER) %>%
  group_by(COM, USER) %>%
  mutate(SRCshr = Value/sum(Value),
         SRCshr = ifelse(is.nan(SRCshr), 0.5, SRCshr)) %>%
  select(COM, SRC, IMPUSER = USER, SRCshr)

params[["SRCSHARE"]] <- create_param(
  value = SRCSHARE,
  indexes = sets[c("COM", "SRC", "IMPUSER")],
  desc = "Participação da origem s no consumo do produto c pelo usuário u"
)

```

Consideramos que  $PWORLD_c$  é um parâmetro, ou seja, é exógeno. Isto significa que foi assumido que os preços internacionais são dados, a demanda do país analisado não tem poder para alterar os preços internacionais.

O segundo passo para esse bloco é definir as variáveis. Iremos definir as variáveis  $\hat{P}_{cs}$  e  $\hat{P}_{cu}^s$ . A variável  $P1\hat{T}OT$  não será definida agora por dois motivos, pois não temos uma equação para definir o seu valor. Veremos adiante que o valor de  $P1\hat{T}OT$  é encontrada a partir de um equação de equilíbrio de mercado (mcc) que define que  $P1\hat{T}OT$  tem que ser igual à variação do custo de produção (lucro zero).

```

variables[["p"]] <- create_variable(
  value = 1,
  indexes = sets[c("COM", "SRC")],
  type = "defined",
  desc = "Variação no preço do produto c de origem s"
)

variables[["p_s"]] <- create_variable(
  value = 1,
  indexes = sets[c("COM", "IMPUSER")],
  type = "defined",
  desc = "Variação no índice de preço do bem composto c para o usuário u"
)

```

Por último, iremos definir as equações.

```

equations[["E_p"]] <- create_equation(
  'if(s == "dom"){
    p[c,s] = p1tot[c] * PTX[c]
  } else {
    p[c,s] = PWORLD[c] * PHI * MTX[c]
  }',
  indexes = c("c in COM", "s in SRC"),
  type = "defining",
  desc = "Variação no preço do produto c de origem s"
)

equations[["E_p_s"]] <- create_equation(
  'p_s[c,u] = sum(SRCSHARE[c,,u] * p[c,])',
  indexes = c('c in COM', 'u in IMPUSER'),
  type = "defining",
  desc = "Variação no índice de preço do bem composto c para o usuário u"
)

```

Note que para o somatório usamos a função `sum()` do R. Além disso, tem-se que `SRCSHARE` tem 3 dimensões e queremos somar em relação a origem, que é a segunda dimensão. Então, omitimos o índice de origem (`SRC`) e a soma ocorrerá nessa dimensão.

Além dos preços para os produtos  $c$ , existem os mercados de trabalho (*labor*) e de capital que possuem seus respectivos preços,  $P1LAB_i$  (salário) e  $P1CAP_i$  (remuneração do capital). Note que, inicialmente, esses preços estão indexados à indústria que utiliza o fator de produção. Isto ocorre quando assumimos que o fator de produção é específico da indústria. Se o fator de produção tem mobilidade entre os setores, haverá um único preço para o fator de produção e o índice  $i$  será removido. Isso dependerá do fechamento que será escolhido.

Além desses preços, o modelo considera índices de preços da cesta de consumos do investimento (`P2TOT`), das famílias (`P3TOT`) e do governo (`P5TOT`). Estes índices serão posteriormente definidos dentro do seu respectivo bloco.

### 3.2.4 Produção

A estrutura de produção utilizada no minimal é apresentada na Figura ... A estrutura adotada considera um primeiro nível em que o produtor demanda bens intermediários (*commodities*) e o fator primário, que é uma combinação de capital e trabalho. É assumida uma tecnologia do tipo Leontief. Dessa forma, pode-se definir o primeiro nível da produção como:

$$X1TOT_i = \min \left\{ \frac{X_{c\{c \in COM\}_i}}{A_{c\{c \in COM\}_i}}, \frac{X1PRIM_i}{A1PRIM_i} \right\}, \quad i \in IND, \quad (3)$$

em que  $X1TOT_i$  é a produção total da  $i$ -ésima indústria,  $X_{ci}$  é a demanda pelo produto  $c$  pela indústria  $i$  e  $X1PRIM_i$  é a demanda por fatores primários pela indústria  $i$ .  $A_{ci}$  e  $A1PRIM$  podem ser entendidos como coeficientes técnicos da matriz de insumo-produto. Isto é, necessita-se  $A_{ci}$  unidades do produto  $c$  para se produzir uma unidade de  $i$ .

Para essa tecnologia, tem-se as seguintes funções de demanda:

- Demanda por bens intermediários (compostos)<sup>5</sup>:

$$X_{ci} = A_{ci} \times X1TOT_i, \quad i \in \text{IND}, \quad c \in \text{COM}$$

- Demanda por valor adicionado:

$$X1PRIM_i = A1PRIM_i \times X1TOT_i$$

Essas equações, facilmente, podem ser reescritas em variações exatas:

- Demanda por bens intermediários:

$$\hat{X}_{ci} = \hat{A}_{ci} \times X1\hat{TOT}_i, \quad i \in \text{IND}, \quad c \in \text{COM}$$

- Demanda por valor adicionado:

$$X1\hat{PRIM}_i = A1\hat{PRIM}_i \times X1\hat{TOT}_i$$

Na sequência, vamos definir os parâmetros  $\hat{A}_{ci}$  e  $A1\hat{PRIM}_i$ . Como estamos usando em variação, o valor inicial desses parâmetros é igual a 1.

```
params[["A"]] <- create_param(
  value = 1,
  indexes = sets[c('COM', 'IND')],
  desc = "Variação do coeficiente técnico para o produto c usado pela indústria i"
)

params[["A1PRIM"]] <- create_param(
  value = 1,
  indexes = sets['IND'],
  desc = "Variação do coeficiente técnico para o fator primário usado pela indústria i"
)
```

Agora, vamos definir as variáveis  $\hat{X}_{ci}$  (uso do produto composto  $c$  pela indústria  $i$ ) e  $X1\hat{PRIM}_i$  (uso do fator primário composto). Aqui, existe um detalhe, o uso do produto  $c$

<sup>5</sup>Os bens intermediários compostos são uma composição entre produtos domésticos e importados.

pode ser feito pelas indústrias ou pelos demais usuários de demandas importações (IMPUSER). Dessa forma, na definição da variável  $\hat{X}_{ci}$ , vamos utilizar o conjunto IMPUSER ao invés do conjunto IND. Deixando mais claro, iremos definir

$$\hat{X}_{cu}, c \in \text{COM}, u \in \text{IMPUSER}$$

$$\hat{X}_{cu} = \begin{cases} \hat{X}_{ci} & \text{se } u \in \text{IND} \\ \hat{X}_{c,\text{HH}} & \text{se } u = \text{Households} \\ \hat{X}_{c,\text{GOV}} & \text{se } u = \text{Government} \\ \hat{X}_{c,\text{INV}} & \text{se } u = \text{Investment} \end{cases}$$

Ambas as variáveis são definidas, pois possuem equações que definem os seus valores.

```
# chamamos de x de x_s (composto de várias sources s)
variables[["x_s"]] <- create_variable(
  value = 1,
  indexes = sets[c("COM", "IMPUSER")],
  type = "defined",
  desc = "Variação no uso do composto c por impuser"
)

variables[["x1prim"]] <- create_variable(
  value = 1,
  indexes = sets[c('IND')],
  type = "defined",
  desc = "Uso do fator primário composto por indústria"
)
```

Finalmente, iremos definir as equações. Note que temos a equação de uso para o produto composto c para os usuários industriais. Assim, iremos utilizar o índice i in IND ( $i \in \text{IND}$ ).

```
equations[["E_x_s_ind"]] <- create_equation(
  'x_s[c,i] = A[c,i] * x1tot[i]',
  indexes = c('c in COM', 'i in IND'),
  type = "defining",
  desc = "Variação do uso do composto c por indústria"
)

equations[["E_x1prim"]] <- create_equation(
  'x1prim[i] = A1PRIM[i] * x1tot[i]',
  indexes = 'i in IND',
  type = "defining",
  desc = "Uso do fator primário composto por indústria"
)
```

Perceba que ainda não especificamos a variável  $X1\hat{T}OT_i$ . Ela será especificada em momento oportuno, mas vale antecipar que essa variável é do tipo mcc. Por quê? Perceba que, na Equação 3,  $X1TOT_i$  é função dos usos de bens intermediários e fatores primários. No entanto, a quantidade demandada desses bens e fatores dependem de  $X1TOT$ . Dessa forma,  $X1TOT$  não pode ser definida. Precisaremos de uma condição de equilíbrio de mercado para encontrar o seu valor no novo equilíbrio. Isto será feito posteriormente.

Adicionalmente, por enquanto, não entraremos nos detalhes sobre a demanda no segundo nível (escolha entre bens domésticos e importados), tendo em vista que a forma da demanda é comum independente do usuário (indústrias, família, governo etc.).

### 3.2.5 Famílias

Para as famílias, que serão representadas como HH, assume-se um agente representativo com preferências do tipo Cobb-Douglas sobre um conjunto de produtos (compostos) e uma restrição orçamentária. Isto é:

$$U = \prod_{c \in \text{COM}} X_{c,\text{HH}}^{\alpha_c}$$

$$s.a. \sum_{c \in \text{COM}} P_{c,\text{HH}} X_{c,\text{HH}} = W3TOT,$$

em que  $X_{c,\text{HH}}$  é quantidade demandada do bem composto  $c$  pelas famílias (HH),  $P_{c,\text{HH}}$  é o índice de preço do bem composto  $c$  para as famílias e  $W3TOT$  é renda nominal das famílias. Adicionalmente,  $\sum_{c \in \text{COM}} \alpha_c = 1$ .

Para esse tipo de preferência, sabe-se que, a partir da maximização de utilidade do consumidor, que a função de demanda ótima é:

$$X_{c,\text{HH}} = \alpha_c \frac{W3TOT}{P_{c,\text{HH}}}, \quad c \in \text{COM}.$$

Em variações, a demanda das famílias é escrita da seguinte forma:

$$\hat{X}_{c,\text{HH}} = \frac{W3\hat{T}OT}{\hat{P}_{c,\text{HH}}}, \quad c \in \text{COM}.$$

Por fim, definimos o dispêndio real das famílias ( $X3TOT$ ) como:

$$X3\hat{T}OT = \frac{W3\hat{T}OT}{P3\hat{T}OT},$$

em que  $P3TOT$  é o índice de preços associado à cesta de consumo das famílias. O índice  $P3TOT$  é uma média ponderada dos preços de cada bem composto  $c$  para as famílias:

$$P3TOT = \sum_{c \in COM} SHARE_{c,HH} P_{c,HH}.$$

em que  $SHARE_{c,HH}$  é a participação do bem  $c$  no dispêndio das famílias.

Especificado a estrutura das famílias no modelo, vamos definir, primeiramente, o parâmetro  $SHARE_{c,HH}$ .

```
# calcula os shares
SHARE_HH <- USE %>%
  filter(USER == "Households") %>%
  group_by(COM) %>%
  summarise(Value = sum(Value)) %>%
  mutate(SHARE = Value/sum(Value)) %>%
  select(COM, SHARE)

params[["SHARE_HH"]] <- create_param(
  value = SHARE_HH,
  indexes = sets['COM'],
  desc = "Participação do bem c no dispêndio das famílias"
)
```

No fechamento do modelo que será adotado, o dispêndio real das famílias ( $X3\hat{T}OT$ ) será exógeno. Portanto, o definiremos como um parâmetro do modelo.

```
params[["X3TOT"]] <- create_param(
  value = 1,
  indexes = "X3TOT",
  desc = "Variação no dispêndio real das famílias"
)
```

Com essa definição, temos que:

$$W3\hat{T}OT = X3\hat{T}OT \times P3\hat{T}OT.$$

Isto é, a variação da renda das famílias tem que ser igual a variação do dispêndio real vezes a variação dos preços para as famílias.

Lembrando que a variável  $\hat{X}_{c,HH}$  já está incluída na variável  $x_s$ , vamos definir as demais variáveis desse bloco:

```
variables[["p3tot"]] <- create_variable(
  value = 1,
  indexes = "p3tot",
  type = "defined",
  desc = "Variação no índice de preços das famílias"
```



```
)

variables[["w3tot"]] <- create_variable(
  value = 1,
  indexes = "w3tot",
  type = "defined",
  desc = "Variação da renda nominal das famílias"
)
```

Finalmente, vamos definir as equações:

```
equations[["E_p3tot"]] <- create_equation(
  'p3tot = sum(SHARE_HH[] * p_s[, "Households"])',
  type = "defining",
  desc = "Variação do índice de preços das famílias"
)

equations[["E_w3tot"]] <- create_equation(
  'w3tot = X3TOT * p3tot',
  type = "defining",
  desc = "Variação na renda (dispêndio) nominal das família"
)

equations[["E_x_s_hh"]] <- create_equation(
  'x_s[c, "Households"] = w3tot/p_s[c, "Households"]',
  indexes = c('c in COM'),
  type = "defining",
  desc = "Variação do uso do composto c pelas famílias"
)
```

### 3.2.6 Investimento e Governo

No MINIMAL, não é assumida nenhuma estrutura específica para o dispêndio em investimento ou do governo. Será assumido, que essas duas fontes de demandas são exógenas. Ou seja,  $\hat{X}_{c,INV} = 1$  e  $\hat{X}_{c,GOV} = 1$ . Portanto, iremos apenas defini-los como parâmetros, que poderão ser utilizados posteriormente como fontes de choques do modelo.

```
params[["X_S_INV"]] <- create_param(
  value = 1,
  indexes = sets["COM"],
  desc = "Variação na demanda de investimento por produto c"
)

params[["X_S_GOV"]] <- create_param(
  value = 1,
```

```

indexes = sets["COM"],
desc = "Variação na demanda do governo por produto c"
)

```

Também definimos as equações que capturarão esses choques.

```

equations[["E_x_s_inv"]] <- create_equation(
  'x_s[c, "Investment"] = X_S_INV[c]',
  indexes = 'c in COM',
  type = "defining",
  desc = "Variação no uso do composto c para investimento"
)

equations[["E_x_s_gov"]] <- create_equation(
  'x_s[c, "Government"] = X_S_GOV[c]',
  indexes = 'c in COM',
  type = "defining",
  desc = "Variação no uso do composto c pelo governo"
)

```

### 3.2.7 Demanda de segundo nível entre bens domésticos e importados

Até o momento, apresentamos a demanda<sup>6</sup> das indústrias, das famílias, do governo e do investimento pelos bens compostos. Nessa parte, vamos definir a demanda do nível inferior. Nesse nível, o consumidor escolhe alocar o seu consumo total entre o produto doméstico e o produto importado.

É assumida uma função de agregação CES, com elasticidade de substituição  $\sigma_i$ , que combina os produtos domésticos e importados. Nesse caso, a variação na demanda por cada produto, por fonte e por usuário,  $\hat{X}_{csu}$ , é dada pela seguinte função de demanda:

$$\hat{X}_{csu} = \left( \frac{\hat{P}_{cs}}{\hat{P}_{cu}} \right)^{-\sigma_i} \hat{X}_{cu}^s, \quad c \in \text{COM}, s \in \text{SRC}, s \in \text{IMPUSER} \quad (4)$$

em que  $\hat{P}_{cs}$  é a variação do preço do produto  $c$  fornecido pela fonte  $s$ . Já  $\hat{P}_{cu}$  é o preço médio (índice de preço) do produto  $c$  para o usuário  $u$ .

Nesse bloco, precisamos criar o parâmetro  $\sigma_i$ , que é também chamado de elasticidade de Armington. Os valores dessas elasticidades estão no *header* ARM. Usamos o código abaixo para importar essa tabela.

---

<sup>6</sup>O componente de exportação demanda apenas o bem doméstico.

```
ARM <- read_csv(
  file = '../dados/minimal.csv',
  skip = 191,
  n_max = 7,
  col_types = 'cd'
)
```

```
ARM
```

```
## # A tibble: 7 x 2
##   COM      Value
##   <chr>    <dbl>
## 1 AgricMining    2
## 2 Manufacture    2
## 3 Utilities      2
## 4 Construction  2
## 5 TradeTranspt   2
## 6 FinanProprty   2
## 7 Services       2
```

Então, podemos criar este parâmetro.

```
params[["SIGMA"]] <- create_param(
  value = ARM,
  indexes = sets[c("COM")],
  desc = "Elasticidade de Armington"
)
```

Por fim, define-se a variável  $\hat{X}_{csu}$  e a equação para os usuários pertencentes ao conjunto IMPUSER.

```
variables[["x"]] <- create_variable(
  value = 1,
  indexes = sets[c("COM", "SRC", "USER")],
  type = "defined",
  desc = "Demand by commodity, source and user"
)

equations[["E_x_impuser"]] <- create_equation(
  'x[c,s,u] = x_s[c,u]*(p[c,s]/p_s[c,u])^(-SIGMA[c])',
  indexes = c('c in COM', 's in SRC', 'u in IMPUSER'),
  type = "defining",
  desc = "Demand by commodity, source and impuser"
)
```

Perceba que a variável foi definida para todos os usuários. No entanto, na Equação 4, está definida equação para  $u \in \text{IMPUSER}$ . Isto deve-se ao fato de que a demanda para o usuário *Exports* será definida de outra forma.

### 3.2.8 Exportações

Para as exportações, é assumida uma função de elasticidade constante com parâmetro  $\text{EXP\_ELAST}_c$  para o produto  $c$ . A demanda externa pelo produto doméstico depende do preço relativo entre o preço doméstico e o preço internacional daquele produto:

$$\hat{X}_{csu} = F4Q_c \left( \frac{\hat{P}_{cs}}{\hat{\phi} \text{PWORLD}_c} \right)^{-\text{EXP\_ELAST}_c}, \quad c \in \text{COM}, \quad s = \text{dom}, \quad u = \text{Exports}$$

em que  $F4Q_c$  é um *shift* na demanda externa.

Abaixo, definimos este bloco.

```
EXP_ELAST <- read_csv(
  file = '../dados/minimal.csv',
  skip = 209,
  n_max = 7,
  col_types = 'cd'
)

params[["EXP_ELAST"]] <- create_param(
  value = EXP_ELAST,
  indexes = sets["COM"],
  desc = "Elasticidade da demanda por exportações"
)

params[["F4Q"]] <- create_param(
  value = 1,
  indexes = sets[c("COM")],
  desc = "Shift na demanda externa para o produto c"
)

equations[["E_x_exp"]] <- create_equation(
  'x[c,"dom","Exports"] = F4Q[c]*(p[c,"dom"]/(PHI*PWORLD[c]))^(-EXP_ELAST[c])',
  indexes = 'c in COM',
  type = "defining",
  desc = "Variação das exportações do produto c"
)
```

### 3.2.9 Demanda por Fatores Primários

Na parte da produção, vimos como cada indústria define a quantidade de fator primário que será utilizada para atingir uma determinada produção. Todavia, cada indústria pode escolher um mix diferente entre os fatores de produção capital e trabalho. Para essa alocação,

também é utilizada uma função de agregação CES, com elasticidade substituição  $\sigma_i^{1PRIM}$ . Assim, pode-se definir a demanda (em variações) por trabalho e capital na indústria  $i$  como:

$$X1\hat{LAB}_i = \left( \frac{P1\hat{LAB}}{P1\hat{PRIM}_i} \right)^{-\sigma_i^{1PRIM}} X1\hat{PRIM}_i, \quad i \in IND \quad e$$

$$X1\hat{CAP}_i = \left( \frac{P1\hat{CAP}_i}{P1\hat{PRIM}_i} \right)^{-\sigma_i^{1PRIM}} X1\hat{PRIM}_i, \quad i \in IND,$$

em que  $X1\hat{LAB}_i$  é a variação da demanda por trabalho pela indústria  $i$ ,  $P1\hat{LAB}$  é o salário nominal,  $P1\hat{PRIM}_i$  é a variação do índice de preços dos fatores primários para a indústria  $i$ ,  $X1\hat{PRIM}_i$  é a variação da demanda por fatores primários da indústria  $i$ ,  $X1\hat{CAP}_i$  é a variação da demanda por capital pela indústria  $i$  e  $P1\hat{CAP}_i$  é a remuneração do capital na indústria  $i$ .

A variável  $P1\hat{PRIM}_i$  é calculada da seguinte forma:

$$P1\hat{PRIM}_i = SHAREPRIM_{lab,i} \times P1\hat{LAB} + SHAREPRIM_{cap,i} \times P1\hat{CAP}_i$$

Note que o índice da  $i$  foi retirado de  $P1\hat{LAB}$  (salário), pois no fechamento adotado assume-se que o trabalho tem perfeita mobilidade entre os setores. Diferentemente, o capital será assumido fixo dentro de cada indústria. Ademais, consideraremos que no curto prazo a variação do salário real ( $R\hat{W}$ ) é fixa (exógena) e a variação do nível de emprego ( $\hat{L}$ ) é endógena, o que implica que  $P1\hat{LAB}$  deve variar na mesma proporção de  $P3\hat{TOT}$ . Então, temos mais duas equações:

$$P1\hat{LAB} = R\hat{W} \times P3\hat{TOT}$$

$$\hat{L} = \sum_{i \in IND} SHARE\ LAB_i \times X1\hat{LAB}_i$$

Primeiro, definimos os parâmetros desse bloco.

```
SIGMA1PRIM <- read_csv(
  file = "../dados/minimal.csv",
  skip = 200,
  n_max = 7,
  col_types = 'cd'
)

params[["SIGMA1PRIM"]] <- create_param(
  value = SIGMA1PRIM,
  indexes = sets["IND"],
  desc = "Elasticidade de substituição entre os fatores de produção"
```

```

)

FAC_DF <- read_csv(
  file = "../dados/minimal.csv",
  skip = 157,
  n_max = 14,
  col_types = 'ccd'
)

SHAREPRIM <- FAC_DF %>%
  group_by(IND) %>%
  mutate(SHAREPRIM = Value/sum(Value)) %>%
  select(FAC, IND, SHAREPRIM)

params[["SHAREPRIM"]] <- create_param(
  value = SHAREPRIM,
  indexes = sets[c("FAC", "IND")],
  desc = "Part. de cada fator no uso do fator primário por indústria"
)

params[["RW"]] <- create_param(
  value = 1,
  indexes = "rw",
  desc = 'Variação no salário real'
)

```

Na sequência, definimos as variáveis.

```

variables[["x1lab"]] <- create_variable(
  value = 1,
  indexes = sets[c('IND')],
  type = "defined",
  desc = "Variação no emprego por indústria"
)

variables[["x1cap"]] <- create_variable(
  value = 1,
  indexes = sets[c('IND')],
  type = "defined",
  desc = "Variação no uso de capital por indústria"
)

variables[["p1lab"]] <- create_variable(
  value = 1,
  indexes = "p1lab",
  type = "defined",
  desc = "Variação no salário nominal"
)

```

```
variables[["p1prim"]] <- create_variable(
  value = 1,
  indexes = sets['IND'],
  type = "defined",
  desc = "Variação no índice de preço do fator primário composto por indústria i"
)
```

Por fim, vamos definir as equações<sup>7</sup>.

```
equations[["E_x1lab"]] <- create_equation(
  'x1lab[i] = x1prim[i]*(p1lab/p1prim[i])^(-SIGMA1PRIM[i])',
  indexes = c('i in IND'),
  type = "defining",
  desc = "Variação no emprego por indústria"
)
```

```
equations[["E_p1lab"]] <- create_equation(
  'p1lab = RW * p3tot',
  type = "defining",
  desc = "Variação no salário nominal"
)
```

```
equations[["E_x1cap"]] <- create_equation(
  'x1cap[i] = (p1cap[i]/p1prim[i])^(-SIGMA1PRIM[i]) * x1prim[i]',
  indexes = "i in IND",
  type = "defining",
  desc = "Variação na demanda por capital na indústria i"
)
```

```
equations[["E_p1prim"]] <- create_equation(
  'p1prim[i] = SHAREPRIM["Labour",i] * p1lab +
    SHAREPRIM["Capital",i] * p1cap[i]',
  indexes = c('i in IND'),
  type = "defining",
  desc = "Variação no índice de preço do fator primário para indústria i"
)
```

### 3.2.10 Equilíbrios nos Mercados de Bens

$$\hat{X}_{cs}^0 = \sum_{u \in \text{USER}} \text{SHRSALES}_{csu} \hat{X}_{csu}, \quad c \in \text{COM}, s \in \text{SRC}$$

<sup>7</sup>A equação para a remuneração do capital foi invertida para isolar  $\text{P1}\hat{\text{CAP}}_i$ .

em que

$$\text{SHRSALES}_{csu} = \frac{\text{USE}_{csu}}{\sum_u \text{USE}_{csu}}, \quad c \in \text{COM}, s \in \text{SRC}, u \in \text{USER}$$

$$\text{CÔST}_i = \frac{\sum_c \sum_s \text{USE}_{csi} \times \hat{p}_{cs} + \text{FAC}_{labour,i} \times \text{P1}\hat{\text{LAB}}_i + \text{FAC}_{capital,i} \times \text{P1}\hat{\text{CAP}}_i}{\text{V1TOT}_i}$$

```
SHRSALES <- USE %>%
  group_by(COM, SRC) %>%
  mutate(SALES = sum(Value),
         SHRSALES = Value/SALES) %>%
  select(COM, SRC, USER, SHRSALES)

# Salários + Remuneração do Capital
V1PRIM <- FAC_DF %>%
  group_by(IND) %>%
  summarise(Value = sum(Value))

# Custos Intermediários
IC <- USE %>%
  filter(USER %in% IND) %>%
  group_by(IND = USER) %>%
  summarise(ic = sum(Value))

# Custos totais
V1TOT <- V1PRIM %>%
  rename(va = Value) %>%
  left_join(IC) %>%
  mutate(Value = va + ic) %>%
  select(IND, Value)

## Joining, by = "IND"
params[["USE"]] <- create_param(
  value = USE,
  indexes = sets[c("COM", "SRC", "USER")],
  desc = "Uso do produto c da fonte s pelo usuário u"
)

params[["FACO"]] <- create_param(
  value = FAC_DF,
  indexes = sets[c("FAC", "IND")],
  desc = "Uso inicial dos fatores primários pela indústria i"
)

params[["V1TOT"]] <- create_param(
```



```

value = V1TOT,
indexes = sets[c("IND")],
desc = "Custo total da indústria i"
)

params[["SHRSALES"]] <- create_param(
  value = SHRSALES,
  indexes = sets[c("COM", "SRC", "USER")],
  desc = "Participação do usuário u nas vendas de c de origem s"
)

variables[["x0"]] <- create_variable(
  value = 1,
  indexes = sets[c("COM", "SRC")],
  type = "defined",
  desc = "Variação na demanda total de c de origem s"
)

variables[["cost"]] <- create_variable(
  value = 1,
  indexes = sets[c("IND")],
  type = "defined",
  desc = "Variação no custo marginal de produção "
)

equations[["E_x0"]] <- create_equation(
  "x0[c,s] = sum(SHRSALES[c,s] * x[c,s])",
  indexes = c("c in COM", "s in SRC"),
  type = "defining",
  desc = "Variação na demanda total de c de origem s"
)

equations[["E_cost"]] <- create_equation(
  "cost[i] = (sum(USE[,i]*p) +
  FACO['Labour',i]*p1lab +
  FACO['Capital',i]*p1cap[i])/V1TOT[i]",
  indexes = c("i in IND"),
  type = "defining",
  desc = "Variação no custo marginal de produção da indústria i"
)

```

Agora, vamos definir as equações para duas variáveis do tipo mcc:  $P1\hat{TOT}_i$  e  $X1\hat{TOT}_i$ :

- Condição de lucro zero para a indústria  $i$ :

$$P1\hat{TOT}_i = C\hat{OST}_i, \quad i \in IND$$

- Oferta igual a demanda para a indústria  $i$ <sup>8</sup>:

$$X1\hat{T}OT_i = \hat{X}_{i\text{ dom}}^0, \quad i \in \text{IND}$$

```
variables[["p1tot"]] <- create_variable(
  value = 1,
  indexes = sets[c("IND")],
  type = "undefined",
  desc = "Variação no preço da indústria i"
)

variables[["x1tot"]] <- create_variable(
  value = 1,
  indexes = sets[c("IND")],
  type = "undefined",
  desc = "Variação na produção da indústria i"
)

equations[["E_p1tot"]] <- create_equation(
  "p1tot[i] - cost[i]",
  indexes = c("i in IND"),
  type = "mcc",
  desc = "Condição de lucro zero"
)

equations[["E_x1tot"]] <- create_equation(
  "x1tot[i] - x0[i,'dom']",
  indexes = c("i in IND"),
  type = "mcc",
  desc = "Equilíbrio no mercado i"
)
```

### 3.2.11 Equilíbrio nos Mercados de Fatores de Produção

No mercado de fatores, temos equilíbrios de para dois mercados: trabalho e capital. No entanto, a suposição escolhida sobre a mobilidade dos fatores irá determinar quantos preços de fato existirão. Para o fator trabalho, assume-se que a mão-de-obra não é específica de cada setor, o que resulta em um único mercado de trabalho com preço P1LAB. No entanto, para utilização de capital será assumido que o fator é específico da indústria e o total usado por cada indústria (X1CAP) é determinado exogenamente. Dessa forma, cada indústria terá um preço (remuneração) de capital que faz com que a variação no uso de capital seja igual àquela determinada exogenamente.

<sup>8</sup>Lembre que o conjunto de produtos é o mesmo conjunto de indústrias. Dessa forma, utilizaremos o índice  $i$  para a variável  $\hat{X}_{cs}^0$ .

Adicionalmente, no exemplo apresentado, consideramos um fechamento de curto prazo no qual o salário real é fixo e o nível total de emprego é determinado endogenamente. Assim, no equilíbrio espera-se que

$$\hat{L} = \sum_{i \in \text{IND}} \text{SHARE LAB}_i \times X1\hat{\text{LAB}}_i,$$

em que  $\hat{L}$  é a variação no emprego total e o lado direito da equação mensura a variação na quantidade total demandada por trabalho de cada indústria ponderado pela participação inicial de cada indústria no uso do trabalho total ( $\text{SHARE LAB}_i$ ).

```
SHARELAB <- FAC_DF %>%
  filter(FAC == "Labour") %>%
  mutate(SHARELAB = Value/sum(Value)) %>%
  select(IND, SHARELAB)

params[["SHARELAB"]] <- create_param(
  value = SHARELAB,
  indexes = sets["IND"],
  desc = "Part. de cada indústria no uso do fator trabalho"
)

variables[["l"]] <- create_variable(
  value = 1,
  indexes = "emprego",
  type = "defined",
  desc = "Variação no emprego total"
)

equations[["E_1"]] <- create_equation(
  'l = sum(SHARELAB * x1lab)',
  type = "defining",
  desc = "Variação no emprego total"
)
```

Para o mercado do fator capital, assume-se que ele é fixo na indústria. Assim, temos que a variação na demanda tem que ser igual a uma constante que tem valor inicial 1. Essa constante poderá ser usada para simular cenários de aumento do estoque de capital em alguma indústria. Considerando isso, em equilíbrio, a variação do preço do capital na indústria  $i$ ,  $P1\hat{\text{CAP}}_i$ , tem que satisfazer a seguinte equação de equilíbrio:

$$X1\hat{\text{CAP}}_i = X1\hat{\text{CAP}}_i^{\text{EXO}}$$

```
# O capital é fixo na indústria (exógeno)
params[["X1CAP_EXO"]] <- create_param(
  value = 1,
```

```

indexes = sets["IND"],
desc = "Variação exógena no uso de capital por indústria"
)

variables[["p1cap"]] <- create_variable(
  value = 1,
  indexes = sets['IND'],
  type = "undefined",
  desc = "Variação na remuneração do capital por indústria i"
)

equations[["E_p1cap"]] <- create_equation(
  'x1cap[i] - X1CAP_EXO[i]',
  indexes = 'i in IND',
  type = "mcc",
  desc = "equilíbrio no mercado de capital para indústria i"
)

```

### 3.2.12 Criando o objeto do modelo

```

minimal <- list(
  sets = sets,
  params = params,
  variables = variables,
  equations = equations
)

minimal$params$X3TOT$value[] <- 1.1

sol <- solve_emr_block(minimal)
sol$message

## [1] "Successful convergence"

sol$variables$l

##  emprego
## 1.011378

sol$variables$p1tot

##  AgricMining  Manufacture  Utilities  Construction  TradeTranspt
##      1.022332      1.058874      1.111257      1.070042      1.083058
##  FinanProprty  Services
##      1.131613      1.083139

```

### 3.3 Exemplos de Simulações

#### REFERÊNCIAS

M.E. Burfisher. *Introduction to Computable General Equilibrium Models*. Cambridge University Press, 2017. ISBN 9781107132207. URL <https://books.google.com.br/books?id=mIHuDQAAQBAJ>.

Mark Horridge and Alan Powell. Minimal – a simplified general equilibrium model. Technical report, Centre of Policies Studies and the Impact Project, 2001.