

EQUILÍBRIO GERAL COMPUTÁVEL: IMPLEMENTANDO O MINIMAL NO R

Paulo Felipe Oliveira
Ministério da Economia

Sumário

| | | |
|----------|---|----------|
| 1 | Introdução | 3 |
| 2 | Estruturas de Modelo para o Pacote <code>emr</code> | 3 |
| 2.1 | Exemplo: Oferta e Demanda | 4 |
| 3 | Implementando o MINIMAL no R | 4 |
| 3.1 | Dados para o Modelo | 4 |
| 3.2 | Implementação | 5 |
| 3.2.1 | Passos Iniciais | 5 |
| 3.2.2 | Conjuntos (Sets) | 7 |
| 3.2.3 | Preços | 8 |
| 3.2.4 | Produção | 12 |
| 3.2.5 | Famílias | 14 |
| 3.2.6 | Investimento e Governo | 16 |
| 3.2.7 | Demanda de segundo nível entre bens domésticos e importados | 17 |
| 3.2.8 | Exportações | 19 |
| 3.2.9 | Demanda por Fatores Primários | 19 |
| 3.2.10 | Equilíbrios nos Mercados de Bens | 23 |

Resumo

Este documento tem o objetivo de discutir a implementação de um modelo de equilíbrio geral simples no R usando o pacote ‘emr’. Como exemplo, utiliza-se o MINIMAL que é um modelo desenvolvido com propósitos educacionais pelos criadores do GEMPACK. Este modelo é de um único país com múltiplos setores, múltiplas fontes de demanda e comércio internacional.

1. INTRODUÇÃO

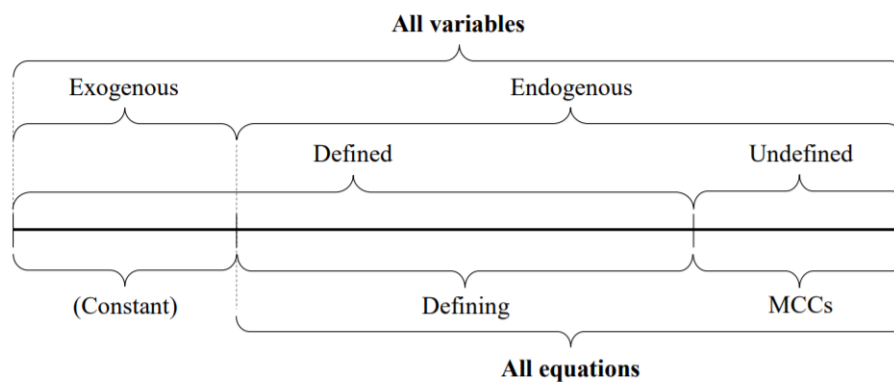
O MINIMAL¹ (Horridge and Powell [2001]) é um modelo de equilíbrio geral simplificado utilizado em cursos introdutórios do GEMPACK. A partir desse modelo, é possível deixar claro como a teoria microeconômica do consumidor e do produtor podem ser combinadas para a construção de um modelo de equilíbrio geral.

Este modelo considera 7 setores, um investidor agregado, um agente representativo das famílias, exportações agregadas e o governo. Cada produto pode ser obtido a partir de fontes domésticas ou importadas.

2. ESTRUTURAS DE MODELO PARA O PACOTE EMR

A definição dos modelos segue a lógica discutida em [A simple structure for CGE models](#) by Xiao-guang Zhang.

Figura 1. Estrutura das variáveis e das equações (Zhang, 2013)



Nessa abordagem, as variáveis exógenas e endógenas serão classificadas em dois tipos: definidas ou não-definidas. As variáveis exógenas, por definição, são definidas. As endógenas pode ser dos dois tipos. As variáveis definidas são aquelas que podem ser construídas a partir dos valores das demais variáveis, das chamadas equação de definição. Já as não-definidas são aquelas que os valores serão definidos a partir de condições de equilíbrio de mercado (MCCs).

¹<https://www.copsmodels.com/minimal.htm>

2.1 Exemplo: Oferta e Demanda

3. IMPLEMENTANDO O MINIMAL NO R

3.1 Dados para o Modelo

Os dados para o modelo são esquematizados conforme a Figura 2. O esquema é similar ao de uma matriz de insumo produto, na qual os elementos das linhas vendem para os elementos das colunas.

Figura 2. Base de Dados para o Minimal(Horridge and Powell [2001])

| | | Absorption Matrix | | | | | |
|----------------|-------------|---------------------------|---|-----------|--------|------------|-------------|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | |
| | | Producers | Investors | Household | Export | Government | Total Sales |
| | | ← I → | ← 1 → | ← 1 → | ← 1 → | ← 1 → | |
| Domestic Flows | ↑ C ↓ | USE(commodity,"dom",user) | | | | | |
| Imported Flows | ↑ C ↓ | USE(commodity,"imp",user) | | | | | |
| Labour | ↑ 1 ↓ | FACTOR (labour) | C = Number of Commodities = 7 I = Number of Industries = 7 | | | | |
| Capital | ↑ 1 ↓ | FACTOR (capital) | | | | | |
| Output tax | ↑ 1 ↓ | V1PTX | | | | | |

| | | Tax on Imports |
|-------------|-------|----------------|
| Size | ← 1 → | |
| ↑ C ↓ | V0MTX | |

Fica claro na 2 que existem duas fontes (*sources*) de fornecimento de produtos: doméstica e importada. Esse produtos são demandados pelos I setores produtores, pelos investidores, pelas famílias, pelas exportações² e pelo governo. As somas das linhas para produtos (*commodities*) domésticos ou importados serão denominadas de vendas (*sales*).

Adicionalmente, os fatores trabalhos e capital são demandados pelos produtores, e há uma taxa sobre a produção. Por fim, independente do demandante, existe um imposto de importação

²O fornecimento de produtos importados para exportação é igual a zero.

por produto. O valor arrecadado de imposto de importação será único por produto, o que resulta em uma única taxa de importação por produto.

A tabela apresentada na Figura 3 detalha um conjunto de valores para a Austrália a partir de dados de 1986-1987. Os valores estão a preços dos produtores. Ou seja, inclui qualquer imposto indireto que possa ter sido aplicada àquele fluxo. Para cada setor produtor, a sua produção (soma da respectiva coluna) tem que ser igual às suas vendas (soma da respectiva linha). Por exemplo, a produção do setor Agricultura-Mineração (AgricMining) foi igual 45.730, que é o mesmo valor de suas vendas.

Para as importações de produtos manufaturados (Manufacture), foi recolhido o montante de 5.787. O valor total importado desses produtos foi de 42.087 (este valor já inclui o imposto de importação), o que implica em uma taxa de importação de 15,94%³.

3.2 Implementação

3.2.1 Passos Iniciais

Inicialmente, é preciso carregar o pacote `emr`:

```
library(emr)
# Carregar o tidyverse para manipulação dos dados
library(tidyverse)
```

Adicionalmente, também é necessário ler os dados que servirão de base para o modelo. Os dados foram exportados do formato HAR do GEMPACK para csv. Nessa conversão, as diversas tabelas são empilhadas em um único csv, sendo separadas por uma linha denominada de *HEADER*.

Dessa forma, vamos inicialmente identificar os *headers*:

```
minimal_headers <- read_lines('../dados/minimal.csv')

minimal_headers[str_detect(minimal_headers, "Header")]

## [1] "!Header: USE , dimensions: COM*SRC*USER [7*2*11], description: USE matrix"
## [2] "!Header: 1FAC, dimensions: FAC*IND [2*7], description: Wages and profits"
## [3] "!Header: OTAR, dimensions: COM [7], description: Import tax revenue"
## [4] "!Header: 1PTX, dimensions: IND [7], description: Production tax revenue"
## [5] "!Header: ARM , dimensions: COM [7], description: Armington elasticities"
## [6] "!Header: P028, dimensions: IND [7], description: Primary factor substitution elasticity"
## [7] "!Header: P018, dimensions: COM [7], description: Export demand elasticities"
```

A Tabela 1 detalha em quais linhas as tabelas se iniciam de fato e quantas linhas de dados existem em cada tabela. Por exemplo, a tabela *USE*, que contém os dados de uso por produto, origem e usuário, inicia-se na linha 2 e encerra na linha 156, sendo 154 linhas de dados e uma com os títulos de cada coluna. Para, ler essa tabela, podemos executar o seguinte código:

³5787/(42087 - 5787).

Figura 3. Base de Dados para Austrália (Milhões 1986-1987)

| | All Users | | | | | | | | | | |
|-----------------------|--------------|--------|---------------|--------------|--------------|--------------|---------------|--------------|----------|--------------|---------------|
| | Industries | | | | | | Final Demands | | | | |
| | Agric | Mining | Manufacture | Utilities | Construction | Trade | Transpt | Finan | Property | Services | Total |
| Domestic | | | | | | | | | | | |
| Agric | 5502 | | 14658 | 1839 | 689 | 143 | | 52 | | 641 | 45730 |
| Mining | 4587 | | 30009 | 643 | 12486 | 10200 | | 3061 | | 6947 | 127264 |
| Manufacture | 1345 | | 2045 | 3261 | 176 | 979 | | 2814 | | 2037 | 16401 |
| Utilities | 89 | | 55 | 13 | 0 | 438 | | 1708 | | 381 | 40201 |
| Construction | 2958 | | 11539 | 694 | 3353 | 8892 | | 3052 | | 5680 | 88793 |
| Trade | 1754 | | 6545 | 622 | 1886 | 9623 | | 9819 | | 6111 | 74520 |
| Transpt | 403 | | 1595 | 92 | 290 | 1316 | | 1586 | | 2210 | 80801 |
| Finan | | | | | | | | | | | |
| Property | | | | | | | | | | | |
| Services | | | | | | | | | | | |
| Imported | | | | | | | | | | | |
| Agric | 233 | | 1677 | 1 | 49 | 7 | | 3 | | 145 | 2470 |
| Mining | 1305 | | 12411 | 184 | 2518 | 2322 | | 832 | | 3232 | 42087 |
| Manufacture | 1 | | 2 | 2 | 0 | 1 | | 3 | | 2 | 14 |
| Utilities | 0 | | 1 | 0 | 0 | 3 | | 0 | | 8 | 82 |
| Construction | 104 | | 259 | 11 | 34 | 703 | | 142 | | 258 | 2599 |
| Trade | 90 | | 302 | 19 | 29 | 328 | | 274 | | 209 | 1470 |
| Transpt | 26 | | 451 | 7 | 55 | 117 | | 66 | | 774 | 2312 |
| Finan | | | | | | | | | | | |
| Property | | | | | | | | | | | |
| Services | | | | | | | | | | | |
| Labour | 10779 | | 22512 | 3594 | 15008 | 35532 | | 17095 | | 43346 | 147866 |
| Capital | 11337 | | 6359 | 4293 | 2160 | 10409 | | 28873 | | 4612 | 68043 |
| Production tax | 5217 | | 16844 | 1126 | 1468 | 7780 | | 5140 | | 4208 | 41783 |
| Total Cost | 45730 | | 127264 | 16401 | 40201 | 88793 | | 74520 | | 80801 | 782436 |
| Tax on imports | 497 | | 5787 | 0 | 0 | 0 | | 27 | | 52 | |

```
USE <- read_csv(
  file = '../dados/minimal.csv',
  skip = 1,
  n_max = 154,
  col_types = 'cccd'
)

head(USE)

## # A tibble: 6 x 4
##   COM      SRC  USER      Value
##   <chr>    <chr> <chr>    <dbl>
## 1 AgricMining dom   AgricMining 5502
## 2 Manufacture dom   AgricMining 4587
## 3 Utilities   dom   AgricMining 1345
## 4 Construction dom   AgricMining   89
## 5 TradeTranspt dom   AgricMining 2958
## 6 FinanProprty dom   AgricMining 1754
```

Tabela 1. Posição de Cada Header no Arquivo minimal.csv

| Nome | Início | Fim | Nº de Linhas |
|------|--------|-----|--------------|
| USE | 2 | 156 | 154 |
| 1FAC | 158 | 172 | 14 |
| 0TAR | 174 | 181 | 7 |
| 1PTX | 183 | 190 | 7 |
| ARM | 192 | 199 | 7 |
| P028 | 201 | 208 | 7 |
| P018 | 210 | 217 | 7 |

As demais tabelas serão importadas quando necessárias.

3.2.2 Conjuntos (Sets)

Aqui, iremos definir os conjuntos de índices que são utilizados pelas variáveis do modelo. Por exemplo, a variável de produção é definida por produto (*commodity*) pertencente ao conjunto COM, que é composto pela descrição de todos os produtos.

Para implementação do modelo, precisamos de uma lista nomeada **sets**, na qual cada elemento recebe o nome do conjunto e seus possíveis valores.

Abaixo listamos todos os conjuntos:

- IND: indústrias;

- SRC: origem (doméstica ou importada);
- COM: produtos;
- USER: usuários (fontes de demanda);
- IMPUSER: usuários que demandam produtos importados;
- FINALUSER: usuários que compõem a absorção final da economia;
- FAC: fatores primários (capital e trabalho).

Abaixo, o código para criar os conjuntos.

```
IND <- c("AgricMining", "Manufacture", "Utilities", "Construction",
        "TradeTranspt", "FinanProprty", "Services")

COM <- c("AgricMining", "Manufacture", "Utilities", "Construction",
        "TradeTranspt", "FinanProprty", "Services")

SRC <- c("dom", "imp")

USER <- c("AgricMining", "Manufacture", "Utilities", "Construction",
        "TradeTranspt", "FinanProprty", "Services", "Investment",
        "Households", "Government", "Exports")

IMPUSER <- c("AgricMining", "Manufacture", "Utilities", "Construction",
        "TradeTranspt", "FinanProprty", "Services", "Investment",
        "Households", "Government")

FINALUSER <- setdiff(USER, IND)

FAC <- c("Labour", "Capital")

sets <- list(
  IND = IND,
  COM = COM,
  SRC = SRC,
  USER = USER,
  IMPUSER = IMPUSER,
  FINALUSER = FINALUSER,
  FAC = FAC
)
```

3.2.3 Preços

Inicialmente, vamos definir os preços dos produtos $c \in \text{COM}$ fornecidos pelas fontes $s \in \text{SRC}$:

$$P_{cs} = \begin{cases} P1TOT_c \times PTX_c & \text{se } s = \text{dom} \\ PWORLD_c \times \phi \times mtx_c & \text{se } s = \text{imp}, \end{cases} \quad (1)$$

em que P_{cs} é o preço do produto c de origem s , $P1TOT_c$ é o custo (marginal) de produção do produto c , PTX_c é o poder da imposto sobre a produção ($1 +$ imposto sobre a produção), $PWORLD_c$ é o preço internacional do produto c , ϕ é a taxa de câmbio⁴ e mtx_c é o poder da tarifa sobre a importação do produto c .

No GEMPACK, as equações são reescritas utilizando a forma de variação percentual. Aqui, vamos utilizar a chamada *exact-hat algebra*. As variáveis serão reescritas em variações. Assim, por exemplo, denotamos a variação exata de uma variável x como $\hat{x} = \frac{x'}{x}$, em que x é o valor inicial e x' é o valor no novo equilíbrio.

Assim, iremos reescrever 1 como:

$$\hat{P}_{cs} = \begin{cases} P1\hat{T}OT_c \times P\hat{T}X_c & \text{se } s = \text{dom} \\ P\hat{W}ORLD_c \times \hat{\phi} \times \hat{m}tx_c & \text{se } s = \text{imp}, \end{cases} \quad (2)$$

Adicionalmente, ao consumir o bem c de duas diferentes fontes (doméstica e importada), os demandantes estão consumindo um bem composto com preço P_{cu}^s definido como:

$$\hat{P}_{cu}^s = \sum_{s \in SRC} SRC SHARE_{cus} \hat{P}_{cs}, \quad c \in COM, u \in IMPUSER$$

em que $SRC SHARE_{cus}$ é participação da origem s no dispêndio do usuário u em produtos c .

Antes de começarmos a definir os parâmetros, as variáveis e as equações, precisamos definir as listas que guardarão esses componentes do modelo:

```
params <- list()
variables <- list()
equations <- list()
```

Agora, vamos começar a definir os parâmetros das equações acima.

```
params[["PTX"]] <- create_param(
  value = 1,
  indexes = sets['IND'],
  desc = "Variação no poder do imposto sobre a produção"
)

params[["PWORLD"]] <- create_param(
  value = 1,
  indexes = sets['COM'],
  desc = "Variação no preço internacional do produto c"
```

⁴A taxa de câmbio é usada como numerário no modelo

```

)

params[["PHI"]] <- create_param(
  value = 1,
  indexes = "PHI",
  desc = "Variação na taxa de câmbio"
)

params[["MTX"]] <- create_param(
  value = 1,
  indexes = sets['COM'],
  desc = "Variação no poder da tarifa de importação do produto c"
)

SRCSHARE <- USE %>%
  filter(USER %in% IMPUSER) %>%
  group_by(COM, USER) %>%
  mutate(SRCshr = Value/sum(Value),
         SRCshr = ifelse(is.nan(SRCshr), 0, SRCshr)) %>%
  select(COM, SRC, USER, SRCshr)

params[["SRCSHARE"]] <- create_param(
  value = SRCSHARE,
  indexes = sets[c("COM", "SRC", "IMPUSER")],
  desc = "Participação da origem s no consumo do produto c pelo usuário u"
)

```

Consideramos que $PWORLD_c$ é um parâmetro, ou seja, é exógeno. Isto significa que foi assumido que os preços internacionais são dados, a demanda do país analisado não tem poder para alterar os preços internacionais.

O segundo passo para esse bloco é definir as variáveis. Iremos definir as variáveis \hat{P}_{cs} e \hat{P}_{cu}^s . A variável $P1\hat{T}OT$ não será definida agora por dois motivos, pois não temos uma equação para definir o seu valor. Veremos adiante que o valor de $P1\hat{T}OT$ é encontrada a partir de um equação de equilíbrio de mercado (mcc) que define que $P1\hat{T}OT$ tem que ser igual à variação do custo de produção (lucro zero).

```

variables[["p"]] <- create_variable(
  value = 1,
  indexes = sets[c("COM", "SRC")],
  type = "defined",
  desc = "Variação no preço do produto c de origem s"
)

```

```
variables[["p_s"]] <- create_variable(
  value = 1,
  indexes = sets[c("COM", "IMPUSER")],
  type = "defined",
  desc = "Variação no índice de preço do bem composto c para o usuário u"
)
```

Por último, iremos definir as equações.

```
equations[["E_p"]] <- create_equation(
  'if(s == "dom"){
    p[c,s] = p1tot[c] * PTX[c]
  } else {
    p[c,s] = PWORLD[c] * PHI * MTX[c]
  }',
  indexes = c("c in COM", "s in SRC"),
  type = "defining",
  desc = "Variação no preço do produto c de origem s"
)
```

```
equations[["E_p_s"]] <- create_equation(
  'p_s[c,u] = sum(SRCSHARE[c,,u] * p[c,])',
  indexes = c('c in COM', 'u in IMPUSER'),
  type = "defining",
  desc = "Variação no índice de preço do bem composto c para o usuário u"
)
```

Note que para o somatório usamos a função `sum()` do R. Além disso, tem-se que `SRCSHARE` tem 3 dimensões e queremos somar em relação a origem, que é a segunda dimensão. Então, omitimos o índice de origem (SRC) e a soma ocorrerá nessa dimensão.

Além dos preços para os produtos c , existem os mercados de trabalho (*labor*) e de capital que possuem seus respectivos preços, $P1LAB_i$ (salário) e $P1CAP_i$ (remuneração do capital). Note que, inicialmente, esses preços estão indexados à indústria que utiliza o fator de produção. Isto ocorre quando assumimos que o fator de produção é específico da indústria. Se o fator de produção tem mobilidade entre os setores, haverá um único preço para o fator de produção e o índice i será removido. Isso dependerá do fechamento que será escolhido.

Além desses preços, o modelo considera índices de preços da cesta de consumos do investimento (P2TOT), das famílias (P3TOT) e do governo (P5TOT). Estes índices serão posteriormente definidos dentro do seu respectivo bloco.

3.2.4 Produção

A estrutura de produção utilizada no minimal é apresentada na Figura ... A estrutura adotada considera um primeiro nível em que o produtor demanda bens intermediários (*commodities*) e o fator primário, que é uma combinação de capital e trabalho. É assumida uma tecnologia do tipo Leontief. Dessa forma, pode-se definir o primeiro nível da produção como:

$$X1TOT_i = \min \left\{ \frac{X_{c\{c \in COM\}_i}}{A_{c\{c \in COM\}_i}}, \frac{X1PRIM_i}{A1PRIM_i} \right\}, \quad i \in IND, \quad (3)$$

em que $X1TOT_i$ é a produção total da i -ésima indústria, X_{ci} é a demanda pelo produto c pela indústria i e $X1PRIM_i$ é a demanda por fatores primários pela indústria i . A_{ci} e $A1PRIM$ podem ser entendidos como coeficientes técnicos da matriz de insumo-produto. Isto é, necessita-se A_{ci} unidades do produto c para se produzir uma unidade de i .

Para essa tecnologia, tem-se as seguintes funções de demanda:

- Demanda por bens intermediários (compostos)⁵:

$$X_{ci} = A_{ci} \times X1TOT_i, \quad i \in IND, \quad c \in COM$$

- Demanda por valor adicionado:

$$X1PRIM_i = A1PRIM_i \times X1TOT_i$$

Essas equações, facilmente, podem ser reescritas em variações exatas:

- Demanda por bens intermediários:

$$\hat{X}_{ci} = \hat{A}_{ci} \times X1\hat{TOT}_i, \quad i \in IND, \quad c \in COM$$

- Demanda por valor adicionado:

$$X1\hat{PRIM}_i = A1\hat{PRIM}_i \times X1\hat{TOT}_i$$

Na sequência, vamos definir os parâmetros \hat{A}_{ci} e $A1\hat{PRIM}_i$. Como estamos usando em variação, o valor inicial desses parâmetros é igual a 1.

```
params[["A"]] <- create_param(
  value = 1,
  indexes = sets[c('COM', 'IND')],
  desc = "Variação do coeficiente técnico para o produto c usado pela indústria i"
)

params[["A1PRIM"]] <- create_param(
  value = 1,
```

⁵Os bens intermediários compostos são uma composição entre produtos domésticos e importados.

```

indexes = sets['IND'],
desc = "Variação do coeficiente técnico para o fator primário usado pela indústria i"
)

```

Agora, vamos definir as variáveis \hat{X}_{ci} (uso do produto composto c pela indústria i) e $X1\hat{P}RIM_i$ (uso do fator primário composto). Aqui, existe um detalhe, o uso do produto c pode ser feito pelas indústrias ou pelos demais usuários de demandam importações (IMPUSER). Dessa forma, na definição da variável \hat{X}_{ci} , vamos utilizar o conjunto IMPUSER ao invés do conjunto IND. Deixando mais claro, iremos definir

$$\hat{X}_{cu}, \quad c \in \text{COM}, u \in \text{IMPUSER}$$

$$\hat{X}_{cu} = \begin{cases} \hat{X}_{ci} & \text{se } u \in \text{IND} \\ \hat{X}_{c,\text{HH}} & \text{se } u = \text{Households} \\ \hat{X}_{c,\text{GOV}} & \text{se } u = \text{Government} \\ \hat{X}_{c,\text{INV}} & \text{se } u = \text{Investment} \end{cases}$$

Ambas as variáveis são definidas, pois possuem equações que definem os seus valores.

```

# chamamos de x de x_s (composto de várias sources s)
variables[["x_s"]] <- create_variable(
  value = 1,
  indexes = sets[c("COM", "IMPUSER")],
  type = "defined",
  desc = "Variação no uso do composto c por impuser"
)

variables[["x1prim"]] <- create_variable(
  value = 1,
  indexes = sets[c('IND')],
  type = "defined",
  desc = "Uso do fator primário composto por indústria"
)

```

Finalmente, iremos definir as equações. Note que temos a equação de uso para o produto composto c para os usuários industriais. Assim, iremos utilizar o índice i in IND ($i \in \text{IND}$).

```

equations[["E_x_s_ind"]] <- create_equation(
  'x_s[c,i] = A[c,i] * x1tot[i]',
  indexes = c('c in COM', 'i in IND'),
  type = "defining",
  desc = "Variação do uso do composto c por indústria"
)

```

```
equations[["E_x1prim"]] <- create_equation(
  'x1prim[i] = a1prim[i] * x1tot[i]',
  indexes = 'i in IND',
  type = "defining",
  desc = "Uso do fator primário composto por indústria"
)
```

Perceba que ainda não especificamos a variável $X1\hat{T}OT_i$. Ela será especificada em momento oportuno, mas vale antecipar que essa variável é do tipo `mcc`. Por quê? Perceba que, na Equação 3, $X1TOT_i$ é função dos usos de bens intermediários e fatores primários. No entanto, a quantidade demandada desses bens e fatores dependem de $X1TOT$. Dessa forma, $X1TOT$ não pode ser definida. Precisaremos de uma condição de equilíbrio de mercado para encontrar o seu valor no novo equilíbrio. Isto será feito posteriormente.

Adicionalmente, por enquanto, não entraremos nos detalhes sobre a demanda no segundo nível (escolha entre bens domésticos e importados), tendo em vista que a forma da demanda é comum independente do usuário (indústrias, família, governo etc.).

3.2.5 Famílias

Para as famílias, que serão representadas como `HH`, assume-se um agente representativo com preferências do tipo Cobb-Douglas sobre um conjunto de produtos (compostos) e uma restrição orçamentária. Isto é:

$$U = \prod_{c \in \text{COM}} X_{c,\text{HH}}^{\alpha_c}$$

$$s.a. \sum_{c \in \text{COM}} P_{c,\text{HH}} X_{c,\text{HH}} = W3TOT,$$

em que $X_{c,\text{HH}}$ é quantidade demandada do bem composto c pelas famílias (`HH`), $P_{c,\text{HH}}$ é o índice de preço do bem composto c para as famílias e $W3TOT$ é renda nominal das famílias. Adicionalmente, $\sum_{c \in \text{COM}} \alpha_c = 1$.

Para esse tipo de preferência, sabe-se que, a partir da maximização de utilidade do consumidor, que a função de demanda ótima é:

$$X_{c,\text{HH}} = \alpha_c \frac{W3TOT}{P_{c,\text{HH}}}, \quad c \in \text{COM}.$$

Em variações, a demanda das famílias é escrita da seguinte forma:

$$\hat{X}_{c,\text{HH}} = \frac{W3\hat{T}OT}{\hat{P}_{c,\text{HH}}}, \quad c \in \text{COM}.$$

Por fim, definimos o dispêndio real das famílias ($X3TOT$) como:

$$X3\hat{T}OT = \frac{W3\hat{T}OT}{P3\hat{T}OT},$$

em que P3TOT é o índice de preços associado à cesta de consumo das famílias. O índice P3TOT é uma média ponderada dos preços de cada bem composto c para as famílias:

$$P3TOT = \sum_{c \in \text{COM}} \text{SHARE}_{c,\text{HH}} P_{c,\text{HH}}.$$

em que $\text{SHARE}_{c,\text{HH}}$ é a participação do bem c no dispêndio das famílias.

Especificado a estrutura das famílias no modelo, vamos definir, primeiramente, o parâmetro $\text{SHARE}_{c,\text{HH}}$.

```
# calcula os shares
SHARE_HH <- USE %>%
  filter(USER == "Households") %>%
  group_by(COM) %>%
  summarise(Value = sum(Value)) %>%
  mutate(SHARE = Value/sum(Value)) %>%
  select(COM, SHARE)

params[["SHARE_HH"]] <- create_param(
  value = SHARE_HH,
  indexes = sets['COM'],
  desc = "Participação do bem c no dispêndio das famílias"
)
```

No fechamento do modelo que será adotado, o dispêndio real das famílias ($X3\hat{\text{TOT}}$) será exógeno. Portanto, o definiremos como um parâmetro do modelo.

```
params[["X3TOT"]] <- create_param(
  value = 1,
  indexes = "X3TOT",
  desc = "Variação no dispêndio real das famílias"
)
```

Com essa definição, temos que:

$$W3\hat{\text{TOT}} = X3\hat{\text{TOT}} \times P3\hat{\text{TOT}}.$$

Isto é, a variação da renda das famílias tem que ser igual a variação do dispêndio real vezes a variação dos preços para as famílias.

Lembrando que a variável $\hat{X}_{c,\text{HH}}$ já está incluída na variável \mathbf{x}_s , vamos definir as demais variáveis desse bloco:

```
variables[["w3tot"]] <- create_variable(
  value = 1,
  indexes = "w3tot",
  type = "defined",
  desc = "Variação da renda nominal das famílias"
```

```
)

variables[["p3tot"]] <- create_variable(
  value = 1,
  indexes = "p3tot",
  type = "defined",
  desc = "Variação no índice de preços das famílias"
)
```

Finalmente, vamos definir as equações:

```
equations[["E_x_s_hh"]] <- create_equation(
  'x_s[c, "Households"] = w3tot/p_s[c, "Households"]',
  indexes = c('c in COM'),
  type = "defining",
  desc = "Variação do uso do composto c pelas famílias"
)

equations[["E_w3tot"]] <- create_equation(
  'w3tot = X3TOT * p3tot',
  type = "defining",
  desc = "Variação na renda (dispêndio) nominal das família"
)

equations[["E_p3tot"]] <- create_equation(
  'p3tot = sum(SHARE_HH[] * p_s[, "Households"])',
  type = "defining",
  desc = "Variação do índice de preços das famílias"
)
```

3.2.6 Investimento e Governo

No MINIMAL, não é assumida nenhuma estrutura específica para o dispêndio em investimento ou do governo. Será assumido, que essas duas fontes de demandas são exógenas. Ou seja, $\hat{X}_{c,INV} = 1$ e $\hat{X}_{c,GOV} = 1$. Portanto, iremos apenas defini-los como parâmetros, que poderão ser utilizados posteriormente como fontes de choques do modelo.

```
params[["X_S_INV"]] <- create_param(
  value = 1,
  indexes = sets["COM"],
  desc = "Variação na demanda de investimento por produto c"
)

params[["X_S_GOV"]] <- create_param(
```



```

value = 1,
indexes = sets["COM"],
desc = "Variação na demanda do governo por produto c"
)

```

Também definimos as equações que capturarão esses choques.

```

equations[["E_x_s_inv"]] <- create_equation(
  'x_s[c, "Investment"] = X_S_INV[c]',
  indexes = 'c in COM',
  type = "defining",
  desc = "Variação no uso do composto c para investimento"
)

equations[["E_x_s_gov"]] <- create_equation(
  'x_s[c, "Government"] = X_S_GOV[c]',
  indexes = 'c in COM',
  type = "defining",
  desc = "Variação no uso do composto c pelo governo"
)

```

3.2.7 Demanda de segundo nível entre bens domésticos e importados

Até o momento, apresentamos a demanda⁶ das indústrias, das famílias, do governo e do investimento pelos bens compostos. Nessa parte, vamos definir a demanda do nível inferior. Nesse nível, o consumidor escolhe alocar o seu consumo total entre o produto doméstico e o produto importado.

É assumida uma função de agregação CES, com elasticidade de substituição σ_i , que combina os produtos domésticos e importados. Nesse caso, a variação na demanda por cada produto, por fonte e por usuário, \hat{X}_{csu} , é dada pela seguinte função de demanda:

$$\hat{X}_{csu} = \left(\frac{\hat{P}_{cs}}{\hat{P}_{cu}} \right)^{-\sigma_i} \hat{X}_{cu}^s, \quad c \in \text{COM}, \quad s \in \text{SRC}, \quad s \in \text{IMPUSER} \quad (4)$$

em que \hat{P}_{cs} é a variação do preço do produto c fornecido pela fonte s . Já \hat{P}_{cu} é o preço médio (índice de preço) do produto c para o usuário u .

Nesse bloco, precisamos criar o parâmetro σ_i , que é a também chamado de elasticidade de Armington. Os valores dessas elasticidades estão no *header* ARM. Usamos o código abaixo para importar essa tabela.

```

ARM <- read_csv(
  file = '../dados/minimal.csv',
  skip = 191,

```

⁶O componente de exportação demanda apenas o bem doméstico.

```
n_max = 7,
col_types = 'cd'
)
```

```
ARM
```

```
## # A tibble: 7 x 2
##   COM      Value
##   <chr>    <dbl>
## 1 AgricMining    2
## 2 Manufacture    2
## 3 Utilities      2
## 4 Construction  2
## 5 TradeTranspt   2
## 6 FinanProprty   2
## 7 Services       2
```

Então, podemos criar este parâmetro.

```
params[["SIGMA"]] <- create_param(
  value = ARM,
  indexes = sets[c("COM")],
  desc = "Elasticidade de Armington"
)
```

Por fim, define-se a variável \hat{X}_{csu} e a equação para os usuários pertencentes ao conjunto IMPUSER.

```
variables[["x"]] <- create_variable(
  value = 1,
  indexes = sets[c("COM", "SRC", "USER")],
  type = "defined",
  desc = "Demand by commodity, source and user"
)

equations[["E_x_impuser"]] <- create_equation(
  'x[c,s,u] = x_s[c,u]*(p[c,s]/p_s[c,u])^(-SIGMA[c])',
  indexes = c('c in COM', 's in SRC', 'u in IMPUSER'),
  type = "defining",
  desc = "Demand by commodity, source and impuser"
)
```

Perceba que a variável foi definida para todos os usuários. No entanto, na Equação 4, está definida equação para $u \in \text{IMPUSER}$. Isto deve-se ao fato de que a demanda para o usuário *Exports* será definida de outra forma.

3.2.8 Exportações

Para as exportações, é assumida uma função de elasticidade constante com parâmetro EXP_ELAST_c para o produto c . A demanda externa pelo produto doméstico depende do preço relativo entre o preço doméstico e o preço internacional daquele produto:

$$\hat{X}_{csu} = F\hat{4}Q_c \left(\frac{\hat{P}_{cs}}{\hat{\phi} \text{PWORLD}_c} \right)^{-\text{EXP_ELAST}_c}, \quad c \in \text{COM}, \quad s = \text{dom}, \quad u = \text{Exports}$$

em que $F\hat{4}Q_c$ é um *shift* na demanda externa.

Abaixo, definimos este bloco.

```
EXP_ELAST <- read_csv(
  file = '../dados/minimal.csv',
  skip = 209,
  n_max = 7,
  col_types = 'cd'
)

params[["EXP_ELAST"]] <- create_param(
  value = EXP_ELAST,
  indexes = sets["COM"],
  desc = "Elasticidade da demanda por exportações"
)

params[["F4Q"]] <- create_param(
  value = 1,
  indexes = sets[c("COM")],
  desc = "Shift na demanda externa para o produto c"
)

equations[["E_x_exp"]] <- create_equation(
  'x[c,"dom","Exports"] = F4Q[c]*(p[c,"dom"]/(PHI*PWORLD[c]))^(-EXP_ELAST[c])',
  indexes = 'c in COM',
  type = "defining",
  desc = "Variação das exportações do produto c"
)
```

3.2.9 Demanda por Fatores Primários

Na parte da produção, vimos como cada indústria define a quantidade de fator primário que será utilizada para atingir uma determinada produção. Todavia, cada indústria pode escolher um mix diferente entre os fatores de produção capital e trabalho. Para essa alocação, também é utilizada

uma função de agregação CES, com elasticidade substituição σ_i^{1PRIM} . Assim, pode-se definir a demanda (em variações) por trabalho e capital na indústria i como:

$$X1\hat{LAB}_i = \left(\frac{P1\hat{LAB}}{P1\hat{PRIM}_i} \right)^{-\sigma_i^{1PRIM}} X1\hat{PRIM}_i, \quad i \in IND \quad e$$

$$X1\hat{CAP}_i = \left(\frac{P1\hat{CAP}_i}{P1\hat{PRIM}_i} \right)^{-\sigma_i^{1PRIM}} X1\hat{PRIM}_i, \quad i \in IND,$$

em que $X1\hat{LAB}_i$ é a variação da demanda por trabalho pela indústria i , $P1\hat{LAB}$ é o salário nominal, $P1\hat{PRIM}_i$ é a variação do índice de preços dos fatores primários para a indústria i , $X1\hat{PRIM}_i$ é a variação da demanda por fatores primários da indústria i , $X1\hat{CAP}_i$ é a variação da demanda por capital pela indústria i e $P1\hat{CAP}_i$ é a remuneração do capital na indústria i .

A variável $P1\hat{PRIM}_i$ é calculada da seguinte forma:

$$P1\hat{PRIM}_i = SHAREPRIM_{lab,i} \times P1\hat{LAB} + SHAREPRIM_{cap,i} \times P1\hat{CAP}_i$$

Note que o índice da i foi retirado de $P1\hat{LAB}$ (salário), pois no fechamento adotado assume-se que o trabalho tem perfeita mobilidade entre os setores. Diferentemente, o capital será assumido fixo dentro de cada indústria. Ademais, consideraremos que no curto prazo a variação do salário real ($R\hat{W}$) é fixa (exógena) e a variação do nível de emprego (\hat{L}) é endógena, o que implica que $P1\hat{LAB}$ deve variar na mesma proporção de $P3\hat{TOT}$. Então, temos mais duas equações:

$$P1\hat{LAB} = R\hat{W} \times P3\hat{TOT}$$

$$\hat{L} = \sum_{i \in IND} SHARE_{LAB}_i \times X1\hat{LAB}_i$$

Primeiro, definimos os parâmetros desse bloco.

```
SIGMA1PRIM <- read_csv(
  file = "../dados/minimal.csv",
  skip = 200,
  n_max = 7,
  col_types = 'cd'
)

params[["SIGMA1PRIM"]] <- create_param(
  value = SIGMA1PRIM,
  indexes = sets["IND"],
  desc = "Elasticidade de substituição entre os fatores de produção"
)

FAC_DF <- read_csv(
  file = "../dados/minimal.csv",
```

```

    skip = 157,
    n_max = 14,
    col_types = 'ccd'
  )

SHAREPRIM <- FAC_DF %>%
  group_by(IND) %>%
  mutate(SHAREPRIM = Value/sum(Value)) %>%
  select(FAC, IND, SHAREPRIM)

params[["SHAREPRIM"]] <- create_param(
  value = SHAREPRIM,
  indexes = sets[c("FAC", "IND")],
  desc = "Part. de cada fator no uso do fator primário por indústria"
)

SHARELAB <- FAC_DF %>%
  filter(FAC == "Labour") %>%
  mutate(SHARELAB = Value/sum(Value)) %>%
  select(IND, SHARELAB)

params[["SHARELAB"]] <- create_param(
  value = SHARELAB,
  indexes = sets["IND"],
  desc = "Part. de cada indústria no uso do fator trabalho"
)

params[["RW"]] <- create_param(
  value = 1,
  indexes = "rw",
  desc = 'Variação no salário real'
)

# O capital é fixo na indústria (exógeno)
params[["X1CAP"]] <- create_param(
  value = 1,
  indexes = sets["IND"],
  desc = "Variação no uso de capital por indústria"
)

```

Na sequência, definimos as variáveis.

```

variables[["x1lab"]] <- create_variable(
  value = 1,

```

```

indexes = sets[c('IND')],
type = "defined",
desc = "Variação no emprego por indústria"
)

variables[["p1lab"]] <- create_variable(
  value = 1,
  indexes = "p1lab",
  type = "defined",
  desc = "Variação no salário nominal"
)

variables[["p1cap"]] <- create_variable(
  value = 1,
  indexes = sets['IND'],
  type = "defined",
  desc = "Variação na remuneração do capital por indústria i"
)

variables[["p1prim"]] <- create_variable(
  value = 1,
  indexes = sets['IND'],
  type = "defined",
  desc = "Variação no índice de preço do fator primário composto por indústria i"
)

variables[["l"]] <- create_variable(
  value = 1,
  indexes = "emprego",
  type = "defined",
  desc = "Variação no emprego total"
)

```

Por fim, vamos definir as equações⁷.

```

equations[["E_x1lab"]] <- create_equation(
  'x1lab[i] = x1prim[i]*(p1lab/p1prim[i])^(-SIGMA1PRIM[i])',
  indexes = c('i in IND'),
  type = "defining",
  desc = "Variação no emprego por indústria"
)

```

⁷A equação para a remuneração do capital foi invertida para isolar $P1\hat{CAP}_i$.

```

equations[["E_p1lab"]] <- create_equation(
  'p1lab = RW * p3tot',
  type = "defining",
  desc = "Variação no salário nominal"
)

equations[["E_p1cap"]] <- create_equation(
  'p1cap[i] = p1prim[i] * (x1cap[i]/x1prim[i])^(-1/SIGMA1PRIM[i])',
  type = "defining",
  desc = "Variação no salário nominal"
)

equations[["E_p1prim"]] <- create_equation(
  'p1prim[i] = SHAREPRIM["Labour",i] * p1lab +
    SHAREPRIM["Capital",i] * p1cap[i]',
  indexes = c('i in IND'),
  type = "defining",
  desc = "Variação no índice de preço do fator primário para indústria i"
)

equations[["E_l"]] <- create_equation(
  'l = sum(SHARELAB * x1lab)',
  type = "defining",
  desc = "Variação no emprego total"
)

```

3.2.10 Equilíbrios nos Mercados de Bens

$$\hat{X}_{cs}^0 = \sum_{u \in \text{USER}} \text{SHRSALES}_{csu} \hat{X}_{csu}, \quad c \in \text{COM}, s \in \text{SRC}$$

em que

$$\text{SHRSALES}_{csu} = \frac{\text{USE}_{csu}}{\sum_u \text{USE}_{csu}}, \quad c \in \text{COM}, s \in \text{SRC}, u \in \text{USER}$$

$$\hat{\text{COST}}_i = \frac{\sum_c \text{USE}_{csi} \times \hat{p}_{cs} + \text{FAC}_{\text{labour},i} \times \text{P1}\hat{\text{LAB}}_i + \text{FAC}_{\text{capital},i} \times \text{P1}\hat{\text{CAP}}_i}{\text{V1TOT}_i}$$

```

SHRSALES <- USE %>%
  group_by(COM, SRC) %>%
  mutate(SALES = sum(Value),
    SHRSALES = Value/SALES) %>%
  select(COM, SRC, USER, SHRSALES)

```

```
params[["SHRSALES"]] <- create_param(  
  value = SHRSALES,  
  indexes = sets[c("COM", "SRC", "USER")],  
  desc = "Participação do usuário u nas vendas de c de origem s"  
)
```

```
variables[["x0"]] <- create_variable(  
  value = 1,  
  indexes = sets[c("COM", "SRC")],  
  type = "defined",  
  desc = "Variação na demanda total de c de origem s"  
)
```

```
equations[["E_x0"]] <- create_equation(  
  "x0[c,s] = sum(SHRSALES[c,s,] * x[c,s,])",  
  indexes = c("c in COM", "s in SRC"),  
  type = "defining",  
  desc = "Variação na demanda total de c de origem s"  
)
```

REFERÊNCIAS

Mark Horridge and Alan Powell. Minimal - a simplified general equilibrium model. Technical report, Centre of Policies Studies and the Impact Project, 2001.