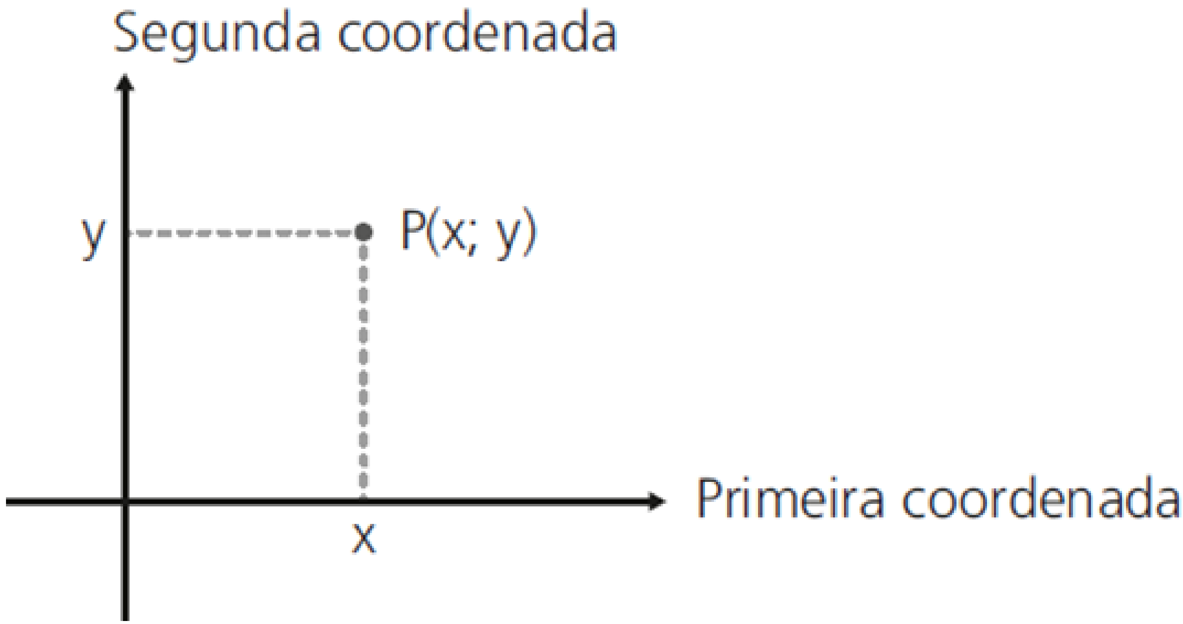
# Funções:


**Gênesis Soares Araújo**

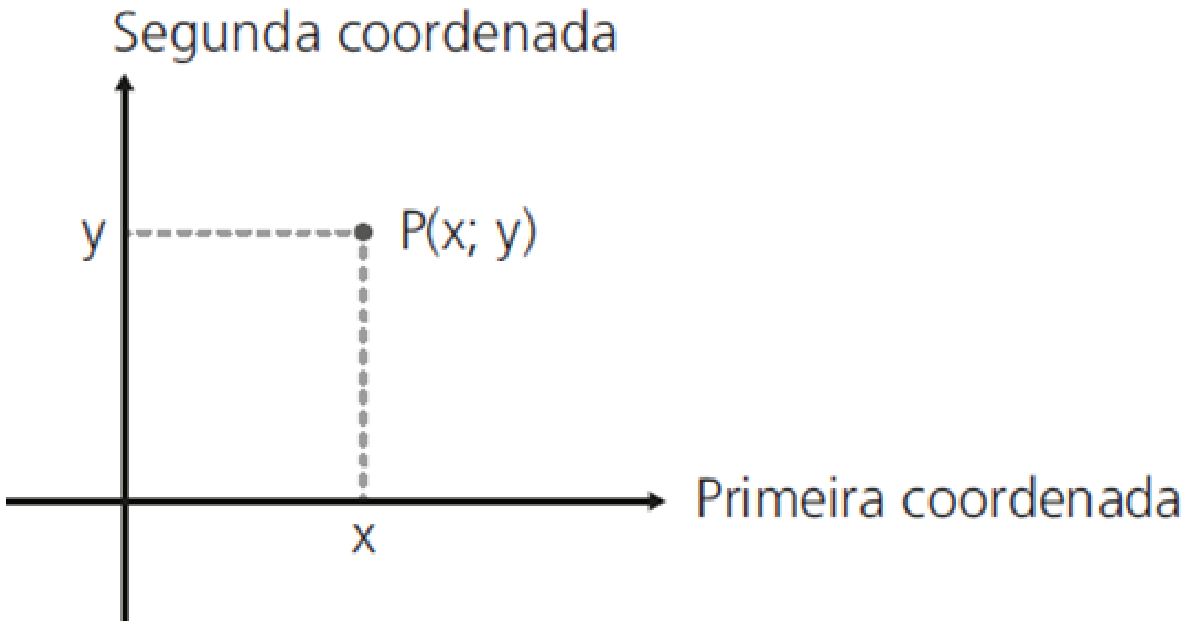
## • Par ordenado

De forma geral, a representação (x; y) está associada às **coordenadas cartesianas** e indica a localização de um ponto P num sistema de eixos ortogonais orientados, com uma origem comum: o plano cartesiano.



## • Par ordenado

De forma geral, a representação (x; y) está associada às **coordenadas cartesianas** e indica a localização de um ponto P num sistema de eixos ortogonais orientados, com uma origem comum: o plano cartesiano.




Os valores x e y são números reais de tal forma que x é a primeira coordenada – chamada de abscissa do ponto – e y é a segunda coordenada – chamada de ordenada do ponto.

- **Par ordenado**

  Igualdade

A igualdade de dois pares ordenados ocorrerá a partir de duas igualdades: entre os primeiros e entre os segundos elementos.

$$(a; b) = (c; d) \Leftrightarrow a = c \text{ e } b = d$$

## • Par ordenado

### Igualdade

A igualdade de dois pares ordenados ocorrerá a partir de duas igualdades: entre os primeiros e entre os segundos elementos.

$$(a;\ b) = (c;\ d) \Leftrightarrow a = c \text{ e } b = d$$

Diferença entre as representações dos conjuntos solução da equação e do sistema linear:

- Equação do 2º grau:

$x^2 - 5x + 6 = 0$

$\therefore\ x = 2$ ou $x = 3$

$S = \{2;\ 3\}$

- **Par ordenado**

  Igualdade

A igualdade de dois pares ordenados ocorrerá a partir de duas igualdades: entre os primeiros e entre os segundos elementos.

$$(a; b) = (c; d) \Leftrightarrow a = c \text{ e } b = d$$

Diferença entre as representações dos conjuntos solução da equação e do sistema linear:

- Equação do 2º grau:

$x^2 - 5x + 6 = 0$

$\therefore\ x = 2$ ou $x = 3$

$S = \{2; 3\}$

- Sistema linear:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 3x - y = 3 \end{cases}$$

$\therefore\ x = 2$ ou $x = 3$

$S = \{(2; 3)\}$

- **Produto cartesiano**

Dados dois conjuntos, A e B, o produto cartesiano de A por B, nessa ordem, cuja notação é $A \times B$, é definido como o conjunto de todos os pares ordenados que podemos apresentar, sendo o primeiro elemento do conjunto A e o segundo elemento do conjunto B.

$$A \times B = \{(x;\ y) \mid x \in A \text{ e } y \in B\}$$

## • Produto cartesiano

Dados dois conjuntos, A e B, o produto cartesiano de A por B, nessa ordem, cuja notação é $A \times B$, é definido como o conjunto de todos os pares ordenados que podemos apresentar, sendo o primeiro elemento do conjunto A e o segundo elemento do conjunto B.

$$A \times B = \{(x;\ y)\ |\ x \in A \text{ e } y \in B\}$$

Dados os conjuntos $A = \{1;\ 3;\ 4\}$ e $B = \{2;\ 5\}$, determinemos os produtos cartesianos $A \times B$ e $B \times A$, colocando os resultados nas suas diferentes formas de apresentação.

## • Produto cartesiano

Dados dois conjuntos, A e B, o produto cartesiano de A por B, nessa ordem, cuja notação é $A \times B$, é definido como o conjunto de todos os pares ordenados que podemos apresentar, sendo o primeiro elemento do conjunto A e o segundo elemento do conjunto B.

$$A \times B = \{(x; y) \mid x \in A \text{ e } y \in B\}$$

Dados os conjuntos $A = \{1; 3; 4\}$ e $B = \{2; 5\}$, determinemos os produtos cartesianos $A \times B$ e $B \times A$, colocando os resultados nas suas diferentes formas de apresentação.

### Listagem dos elementos

$A \times B = \{(1; 2); (1; 5); (3; 2); (3; 5); (4; 2); (4; 5)\}$

## • Produto cartesiano

Dados dois conjuntos, A e B, o produto cartesiano de A por B, nessa ordem, cuja notação é $A \times B$, é definido como o conjunto de todos os pares ordenados que podemos apresentar, sendo o primeiro elemento do conjunto A e o segundo elemento do conjunto B.

$$A \times B = \{(x; y) \mid x \in A \text{ e } y \in B\}$$

Dados os conjuntos $A = \{1; 3; 4\}$ e $B = \{2; 5\}$, determinemos os produtos cartesianos $A \times B$ e $B \times A$, colocando os resultados nas suas diferentes formas de apresentação.

### Listagem dos elementos

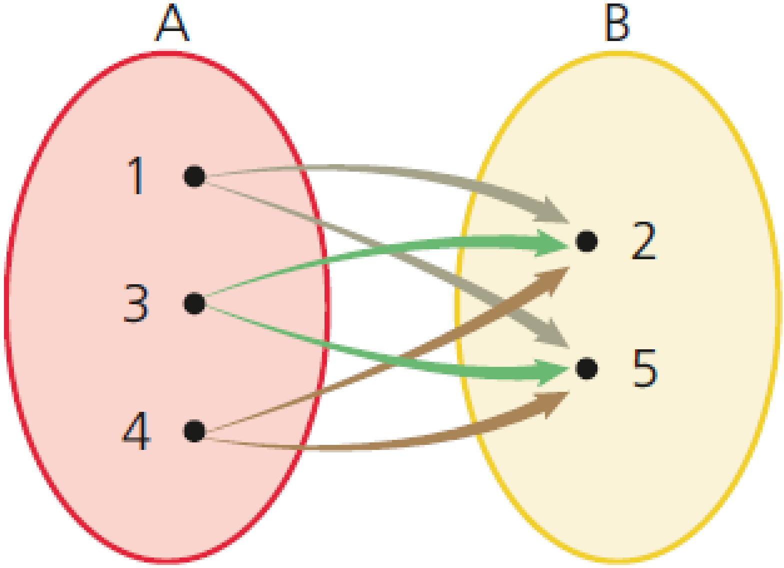
$A \times B = \{(1; 2); (1; 5); (3; 2); (3; 5); (4; 2); (4; 5)\}$

$B \times A = \{(2; 1); (2; 3); (2; 4); (5; 1); (5; 3); (5; 4)\}$

- **Produto cartesiano**

  Diagrama de flechas

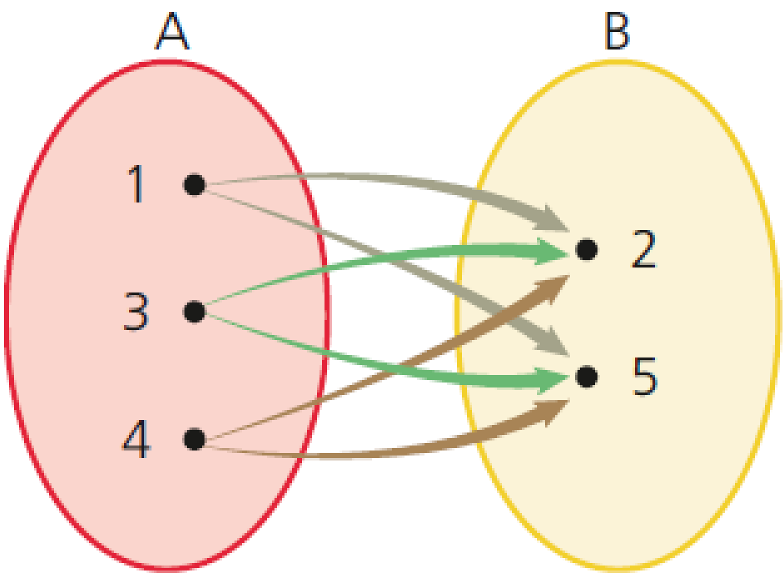
A × B = {(1; 2); (1; 5); (3; 2); (3; 5); (4; 2); (4; 5)}



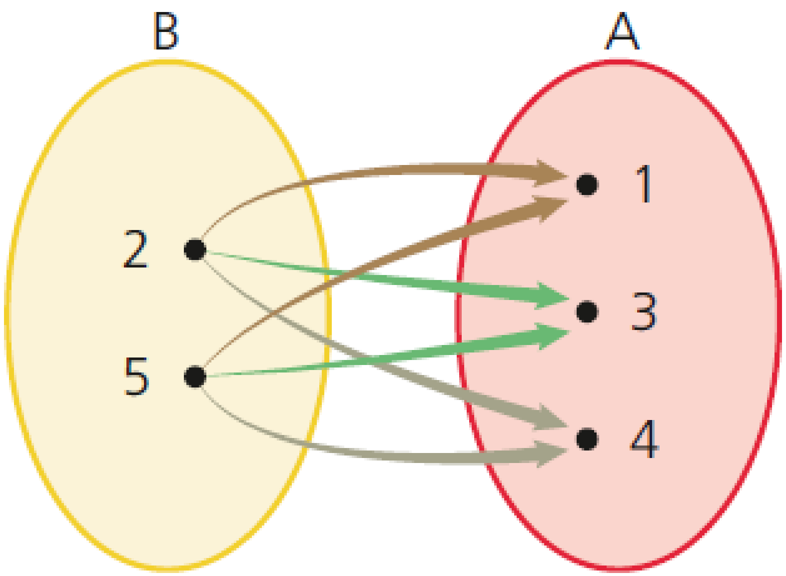
- **Produto cartesiano**

  Diagrama de flechas

$A \times B = \{(1; 2); (1; 5); (3; 2); (3; 5); (4; 2); (4; 5)\}$



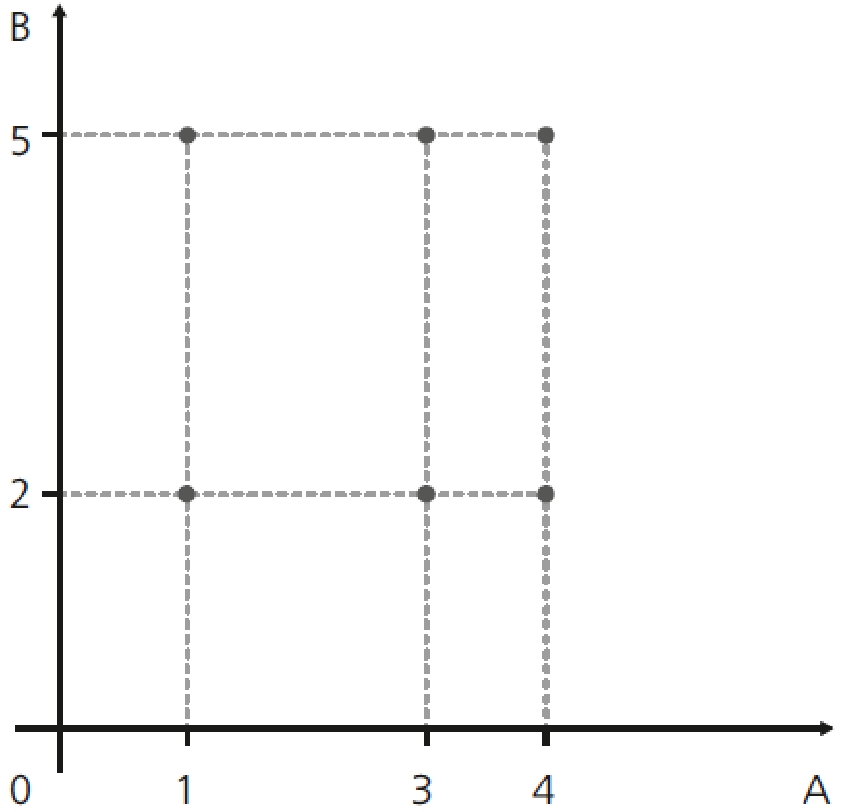

$B \times A = \{(2; 1); (2; 3); (2; 4); (5; 1); (5; 3); (5; 4)\}$



## • Produto cartesiano

### Gráfico cartesiano

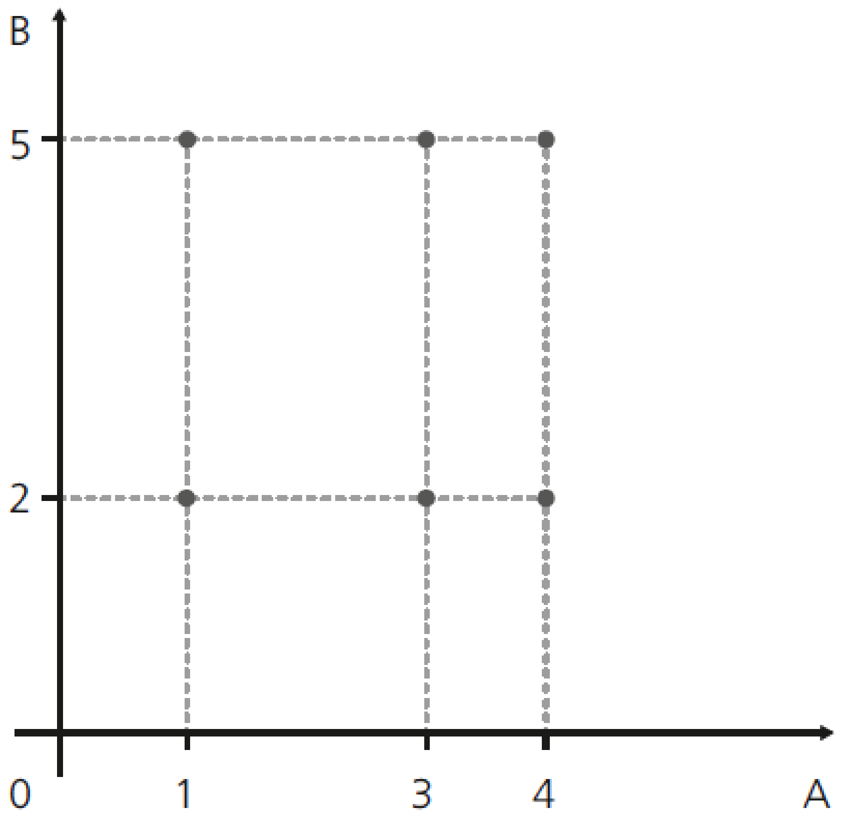
A × B = {(1; 2); (1; 5); (3; 2); (3; 5); (4; 2); (4; 5)}



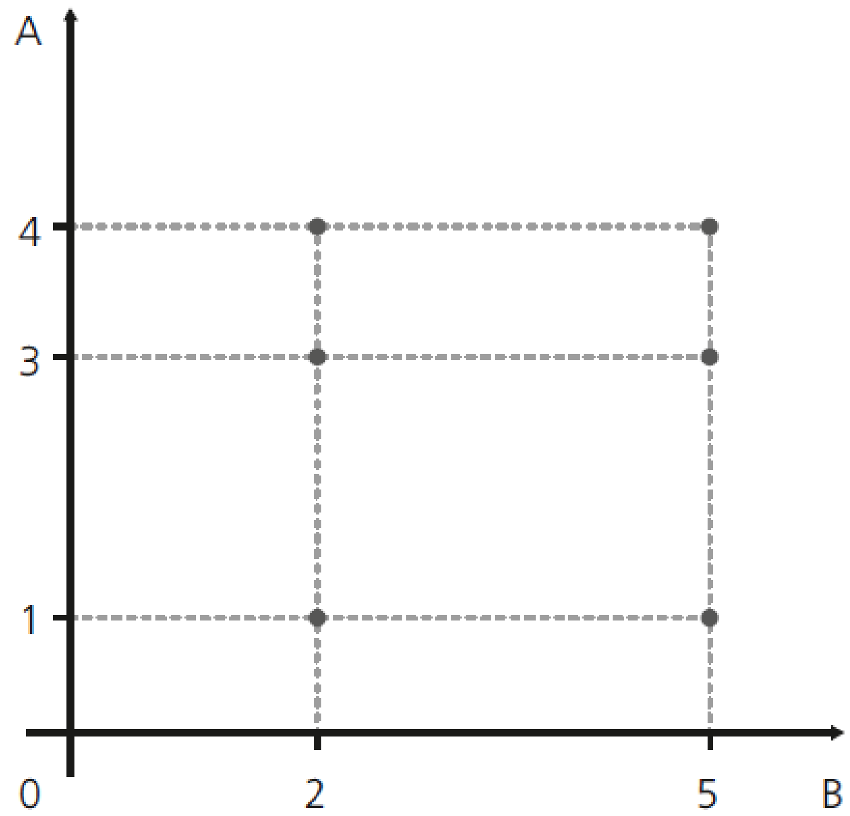
- **Produto cartesiano**

  Gráfico cartesiano

$A \times B = \{(1; 2); (1; 5); (3; 2); (3; 5); (4; 2); (4; 5)\}$




$B \times A = \{(2; 1); (2; 3); (2; 4); (5; 1); (5; 3); (5; 4)\}$

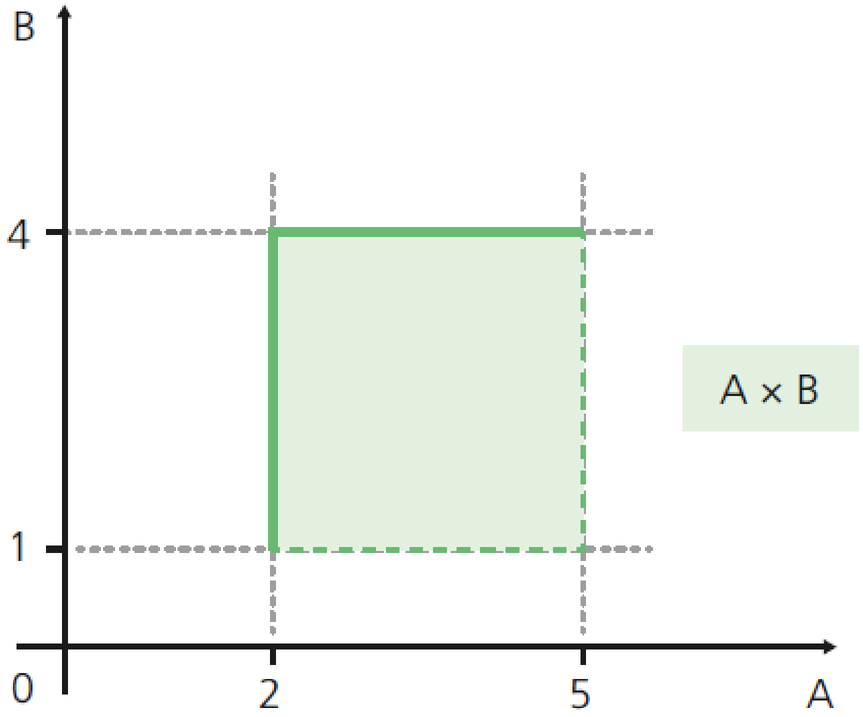


- **Produto cartesiano**

  Gráfico cartesiano

### Intervalos

Dados os intervalos reais A = [2; 5[ e B = ]1; 4], suas representações no plano cartesiano A × B e B × A, são:

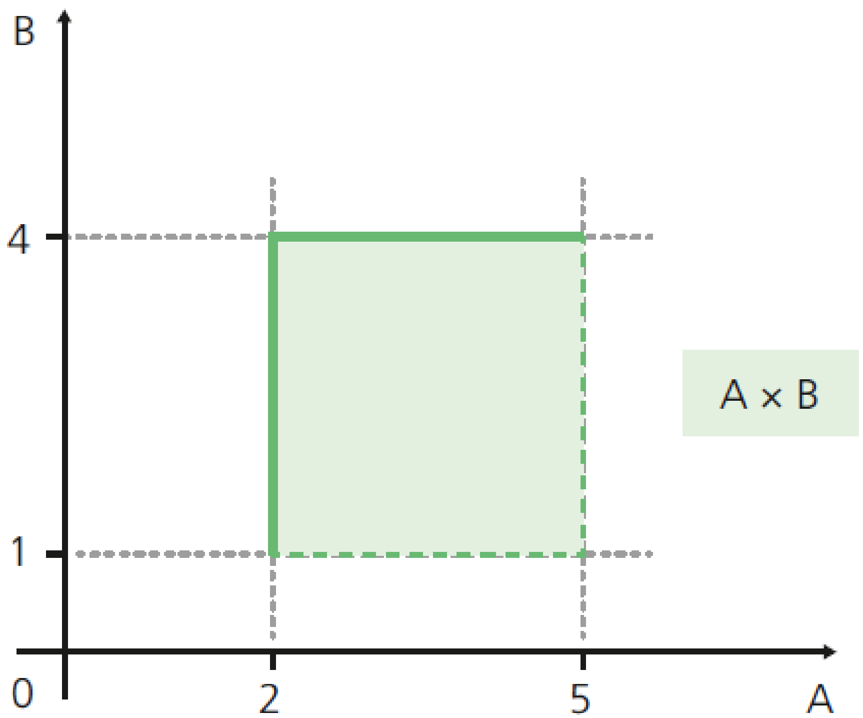


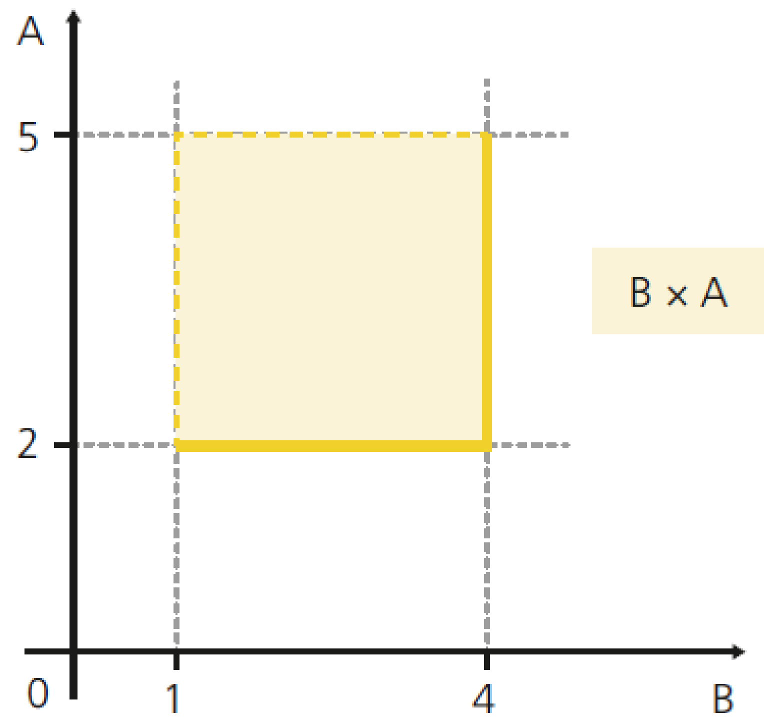
- **Produto cartesiano**

  Gráfico cartesiano

## Intervalos

Dados os intervalos reais A = [2; 5[ e B = ]1; 4], suas representações no plano cartesiano A × B e B × A, são:



## • Relação binária

Dado o produto cartesiano A × B, selecionamos alguns dos seus pares ordenados de tal maneira que estes respeitem uma condição preestabelecida.
Esses pares ordenados constituirão uma **relação binária**.

> Relação binária é um subconjunto do produto cartesiano.

## • Relação binária

Dado o produto cartesiano $A \times B$, selecionamos alguns dos seus pares ordenados de tal maneira que estes respeitem uma condição preestabelecida.
Esses pares ordenados constituirão uma **relação binária**.

Relação binária é um subconjunto do produto cartesiano.

**Exemplo:**

Conjunto $A = \{1;\ 3;\ 4\}$

Conjunto $B = \{2;\ 5\}$

## • Relação binária

Dado o produto cartesiano $A \times B$, selecionamos alguns dos seus pares ordenados de tal maneira que estes respeitem uma condição preestabelecida.
Esses pares ordenados constituirão uma **relação binária**.

Relação binária é um subconjunto do produto cartesiano.

**Exemplo:**

Conjunto $A = \{1;\ 3;\ 4\}$

Conjunto $B = \{2;\ 5\}$

$A \times B = \{(1; 2); (1; 5); (3; 2); (3; 5); (4; 2); (4; 5)\}$

## • Relação binária

Dado o produto cartesiano $A \times B$, selecionamos alguns dos seus pares ordenados de tal maneira que estes respeitem uma condição preestabelecida.
Esses pares ordenados constituirão uma **relação binária**.

Relação binária é um subconjunto do produto cartesiano.

**Exemplo:**

Conjunto $A = \{1;\ 3;\ 4\}$

Conjunto $B = \{2;\ 5\}$

$A \times B = \{(1;\ 2);\ (1;\ 5);\ (3;\ 2);\ (3;\ 5);\ (4;\ 2);\ (4;\ 5)\}$

$$R = \{(x;\ y) \in A \times B \mid x < y\}$$

## • Relação binária

Dado o produto cartesiano A × B, selecionamos alguns dos seus pares ordenados de tal maneira que estes respeitem uma condição preestabelecida.
Esses pares ordenados constituirão uma **relação binária**.

Relação binária é um subconjunto do produto cartesiano.

**Exemplo:**

Conjunto $A = \{1;\ 3;\ 4\}$

Conjunto $B = \{2;\ 5\}$

$$A \times B = \{(\underline{1;\ 2});\ (\underline{1;\ 5});\ (3;\ 2);\ (\underline{3;\ 5});\ (4;\ 2);\ (\underline{4;\ 5})\}$$

$$R = \{(x;\ y) \in A \times B \mid x < y\}$$

## • Relação binária

Dado o produto cartesiano A × B, selecionamos alguns dos seus pares ordenados de tal maneira que estes respeitem uma condição preestabelecida.
Esses pares ordenados constituirão uma **relação binária**.

Relação binária é um subconjunto do produto cartesiano.

**Exemplo:**

Conjunto $A = \{1;\ 3;\ 4\}$

Conjunto $B = \{2;\ 5\}$

$$A \times B = \{(\underline{1;\ 2});\ (\underline{1;\ 5});\ (3;\ 2);\ (\underline{3;\ 5});\ (4;\ 2);\ (\underline{4;\ 5})\}$$

$$R = \{(x;\ y) \in A \times B \mid x < y\}$$

$$R = \{(1;\ 2);\ (1;\ 5);\ (3;\ 5);\ (4;\ 5)\}$$

## • Relação binária

Dado o produto cartesiano A × B, selecionamos alguns dos seus pares ordenados de tal maneira que estes respeitem uma condição preestabelecida.
Esses pares ordenados constituirão uma **relação binária**.

Relação binária é um subconjunto do produto cartesiano.

**Exemplo:**

Conjunto $A = \{1;\ 3;\ 4\}$

Conjunto $B = \{2;\ 5\}$

$A \times B = \{(1;\ 2);\ (1;\ 5);\ (3;\ 2);\ (3;\ 5);\ (4;\ 2);\ (4;\ 5)\}$

$$R = \{(x;\ y) \in A \times B \mid x < y\}$$

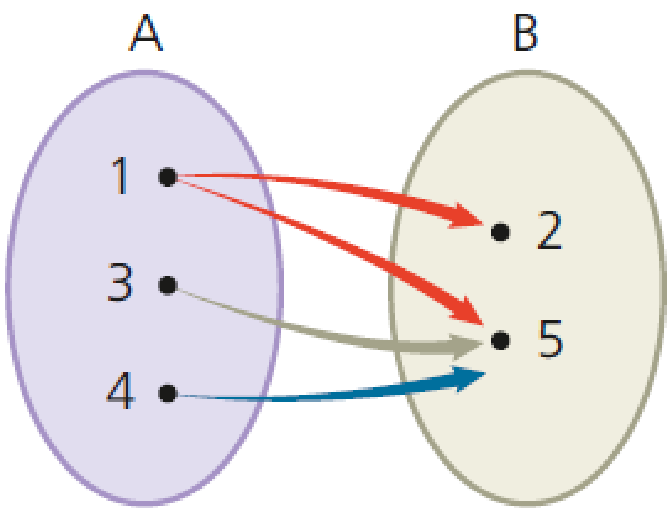
$$R = \{(1;\ 2);\ (1;\ 5);\ (3;\ 5);\ (4;\ 5)\}$$

**Listagem dos elementos**

- **Relação binária**

Por um **diagrama de flechas:**

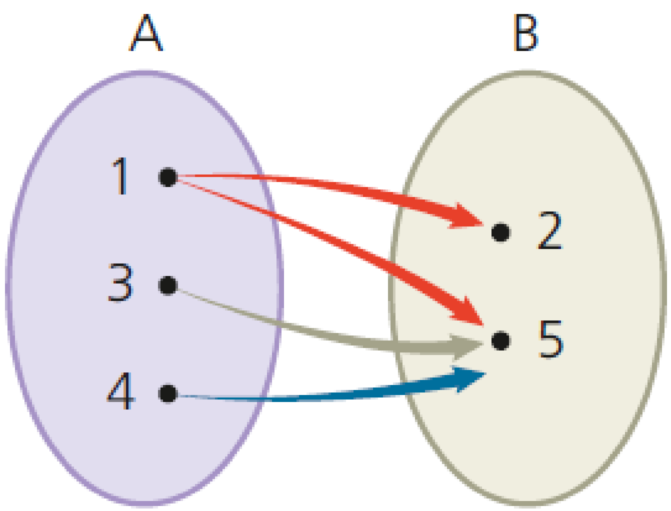
R = {(1; 2); (1; 5); (3; 5); (4; 5)}



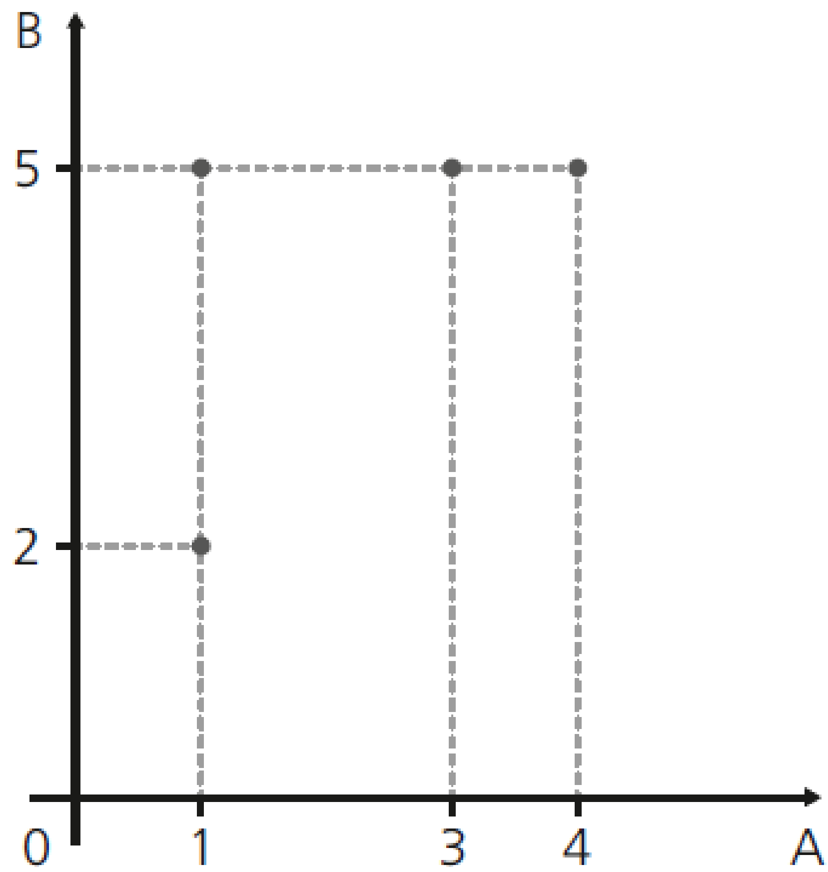
- ## Relação binária

Por um **diagrama de flechas:**

R = {(1; 2); (1; 5); (3; 5); (4; 5)}



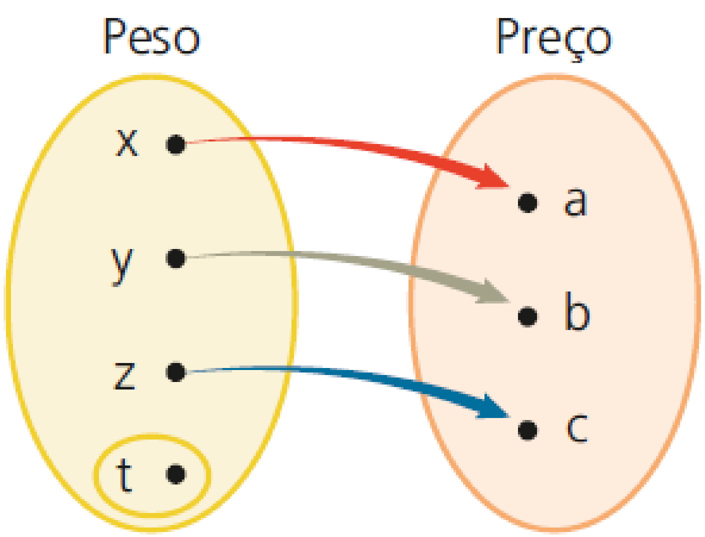

No **plano cartesiano:**



## • Função

Algumas relações binárias de um conjunto A em um conjunto B são especiais. Nelas, **cada** elemento do conjunto A corresponde a **um único** elemento do conjunto B. Esse tipo de relação é chamada de **função**.

### Exemplos




Essa relação **não é** uma função!

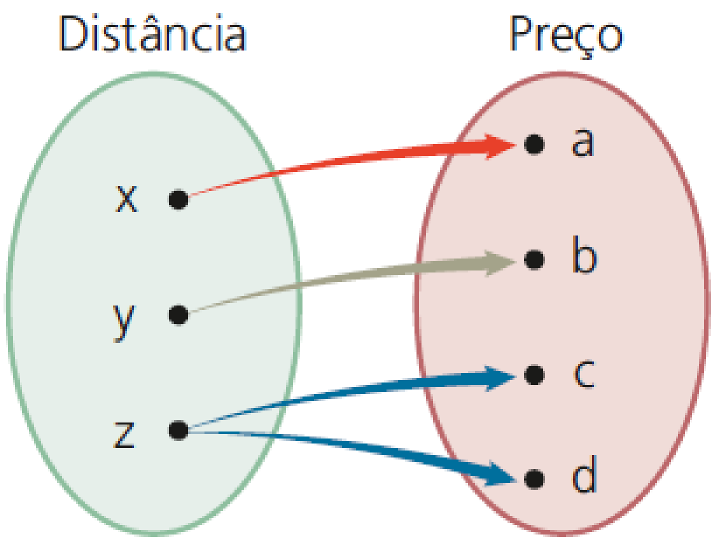
- **Função**

Algumas relações binárias de um conjunto A em um conjunto B são especiais. Nelas, **cada** elemento do conjunto A corresponde a **um único** elemento do conjunto B. Esse tipo de relação é chamada de **função**.

## • Função

Algumas relações binárias de um conjunto A em um conjunto B são especiais. Nelas, **cada** elemento do conjunto A corresponde a **um único** elemento do conjunto B. Esse tipo de relação é chamada de **função**.

### Exemplos

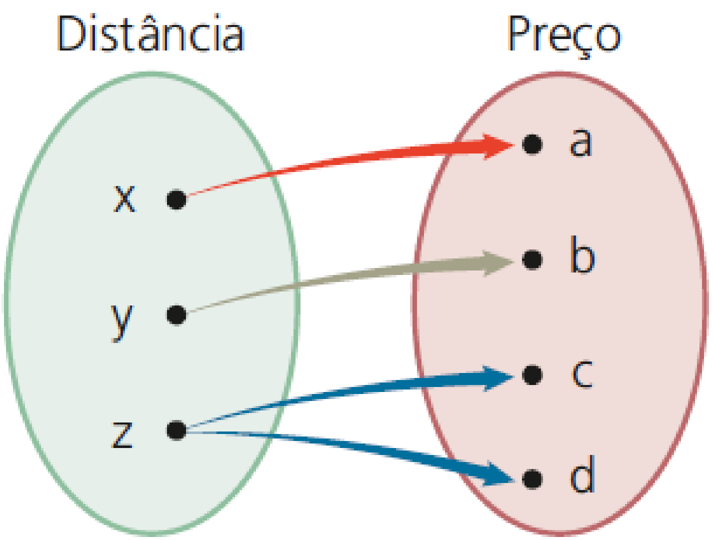



Essa relação **não é** uma função!

# • Função

Algumas relações binárias de um conjunto A em um conjunto B são especiais. Nelas, **cada** elemento do conjunto A corresponde a **um único** elemento do conjunto B. Esse tipo de relação é chamada de **função**.

## Exemplos



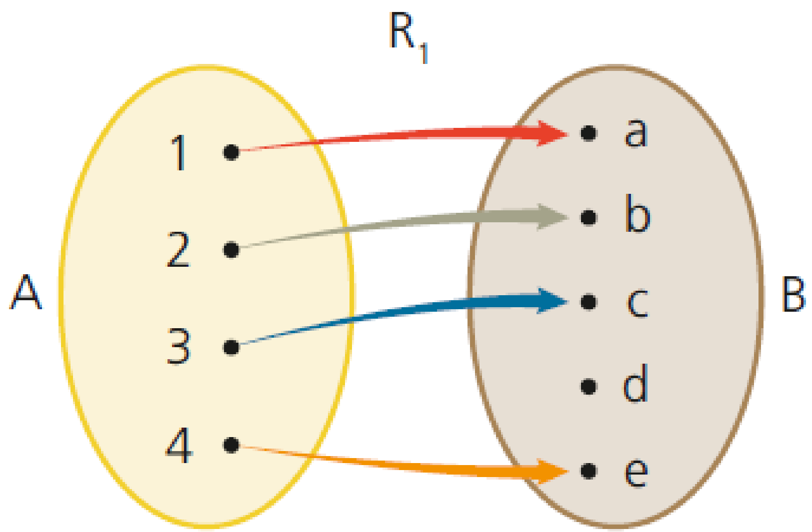

Essa relação **não é** uma função!

Dados dois conjuntos não vazios, A e B, definimos função como uma relação binária de A em B, tal que para todo elemento **x** pertencente a A existe, em correspondência a ele, um único elemento **y** pertencente a B.

## • Função

Dados os conjuntos A = {1; 2; 3; 4} e B = {a; b; c; d; e}, observe as relações.

Pelo **diagrama de flechas**:

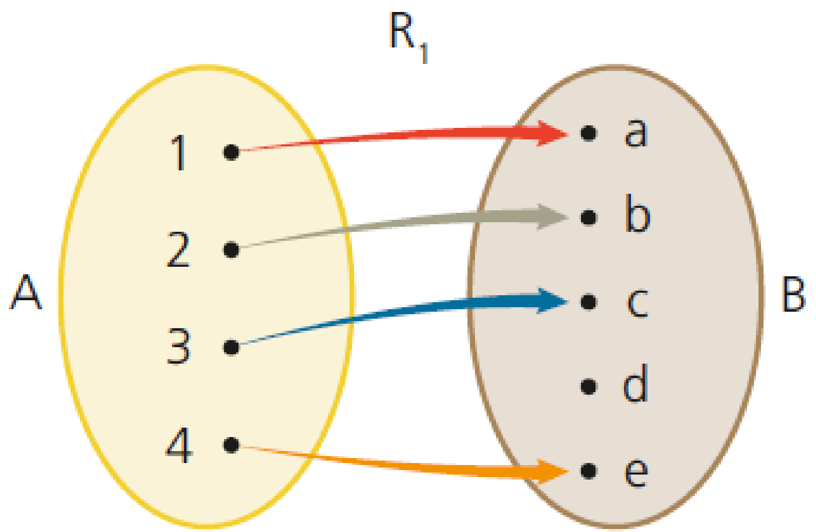



É função de A em B.

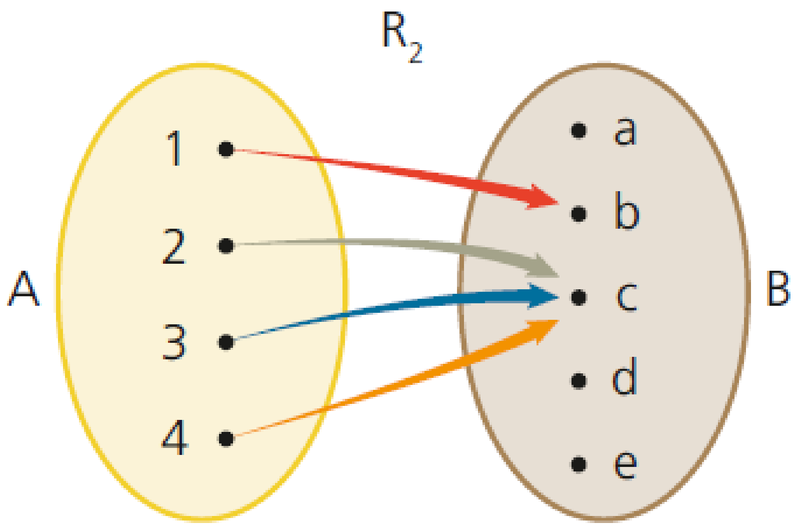
## • Função

Dados os conjuntos A = {1; 2; 3; 4} e B = {a; b; c; d; e}, observe as relações.

Pelo **diagrama de flechas**:




É função de A em B.

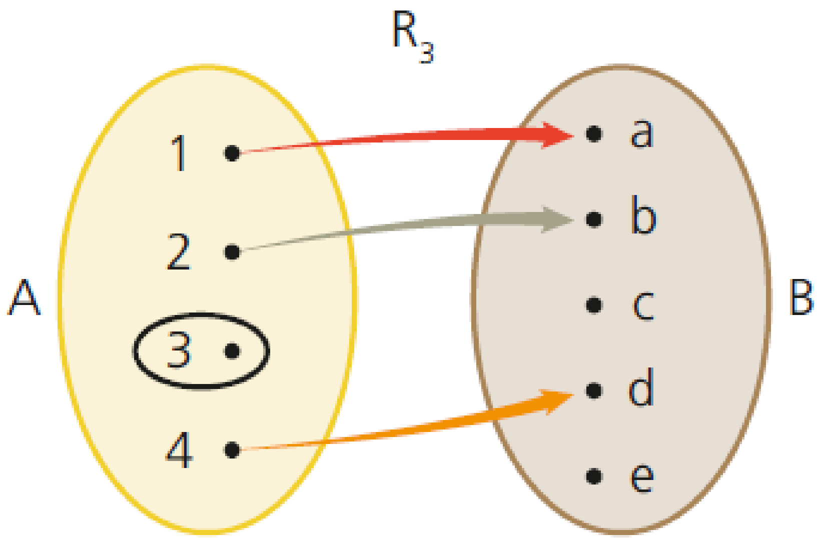



É função de A em B.

- **Função**

Dados os conjuntos $A = \{1; 2; 3; 4\}$ e $B = \{a; b; c; d; e\}$, observe as relações.

Pelo **diagrama de flechas**:

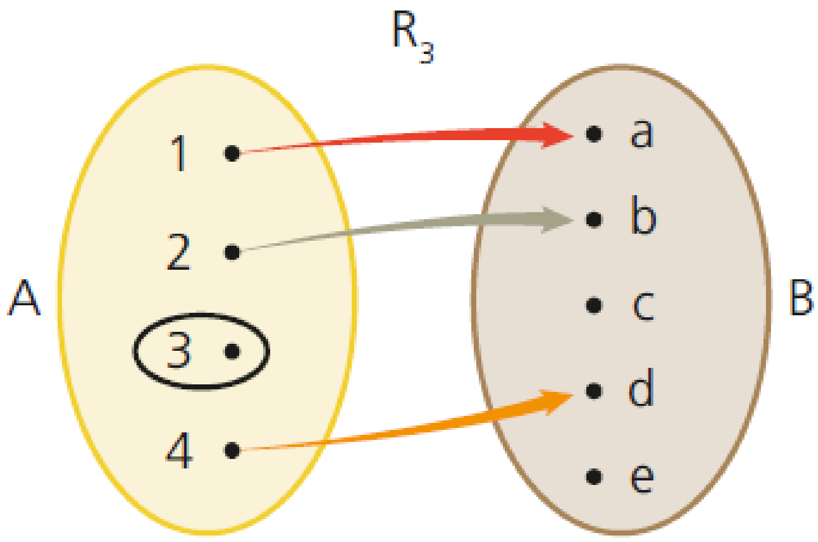



Não é função de A em B.

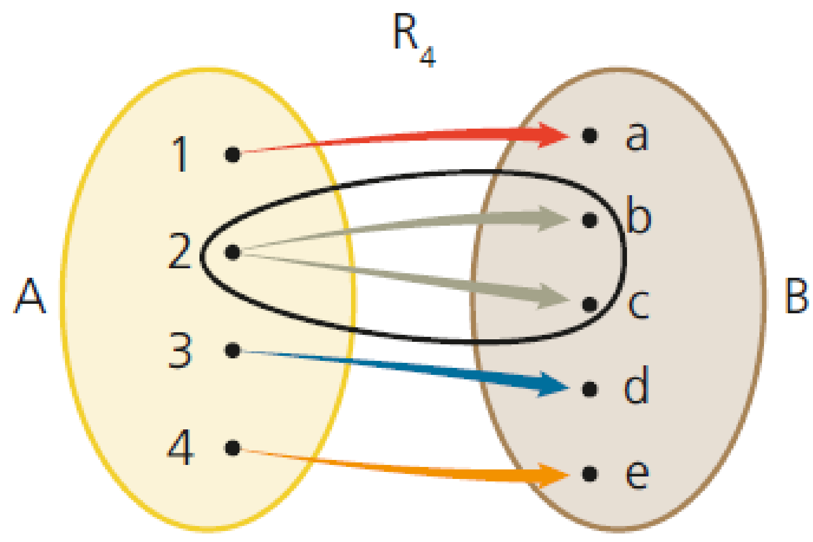
## • Função

Dados os conjuntos A = {1; 2; 3; 4} e B = {a; b; c; d; e}, observe as relações.

Pelo **diagrama de flechas**:




Não é função de A em B.

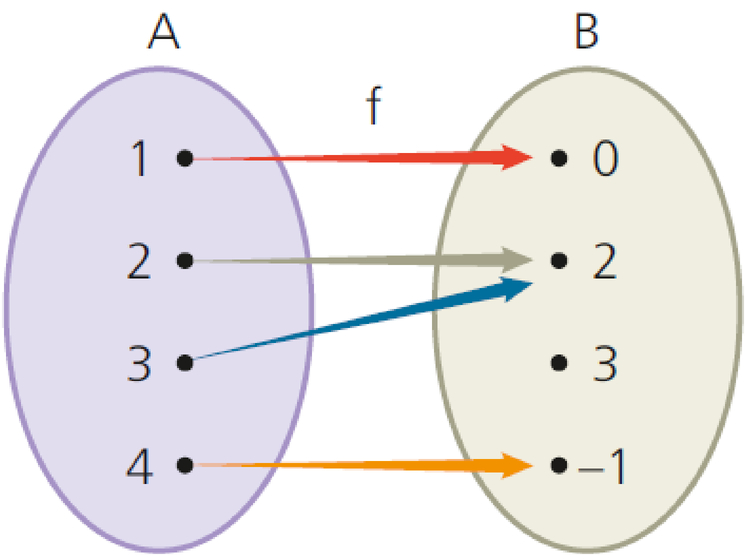



Não é função de A em B.

## • Função

### Notação

Na linguagem algébrica representamos uma função destacando seu nome e os conjuntos envolvidos:

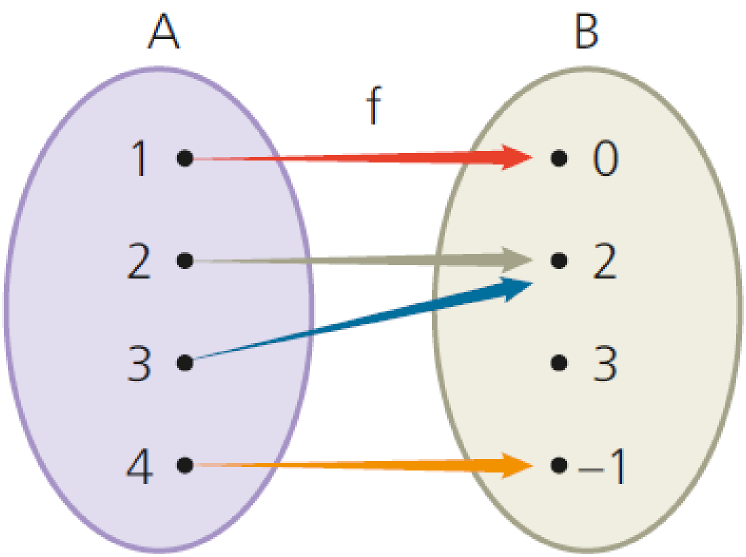



$$f: A \to B$$
$$x \mapsto y;\ y = f(x)$$

- **Função**

  Notação

Na linguagem algébrica representamos uma função destacando seu nome e os conjuntos envolvidos:




$$f: A \to B$$
$$x \mapsto y;\ y = f(x)$$

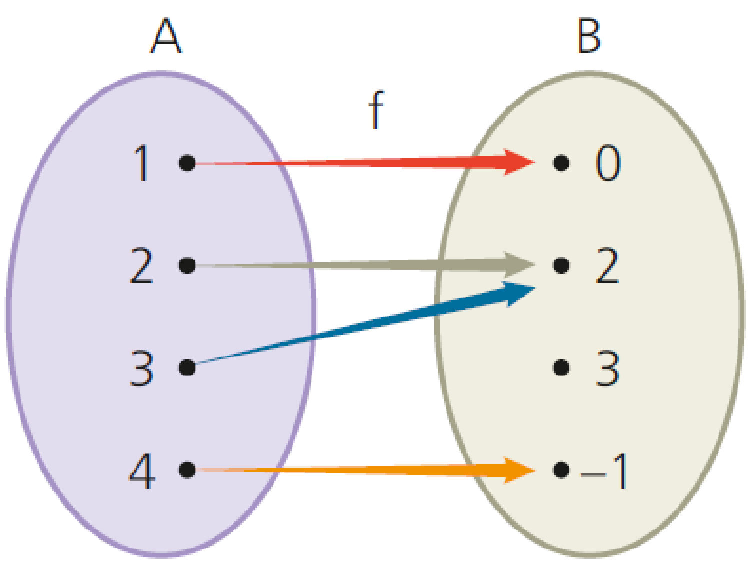
O conjunto de partida A é chamado domínio da função;

$$\boxed{Df = A}$$

## • Função

### Notação

Na linguagem algébrica representamos uma função destacando seu nome e os conjuntos envolvidos:




$f: A \rightarrow B$

$x \mapsto y;\ y = f(x)$

O conjunto de partida A é chamado domínio da função;

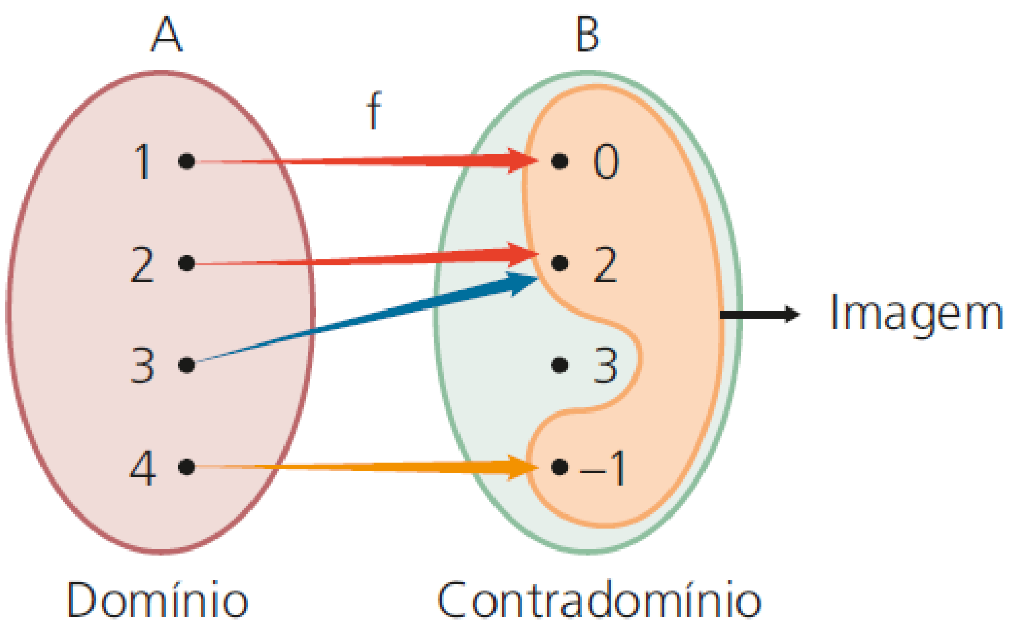
$Df = A$

O conjunto de chegada B é o seu contradomínio.

$CDf = B$

## • Função
### Notação

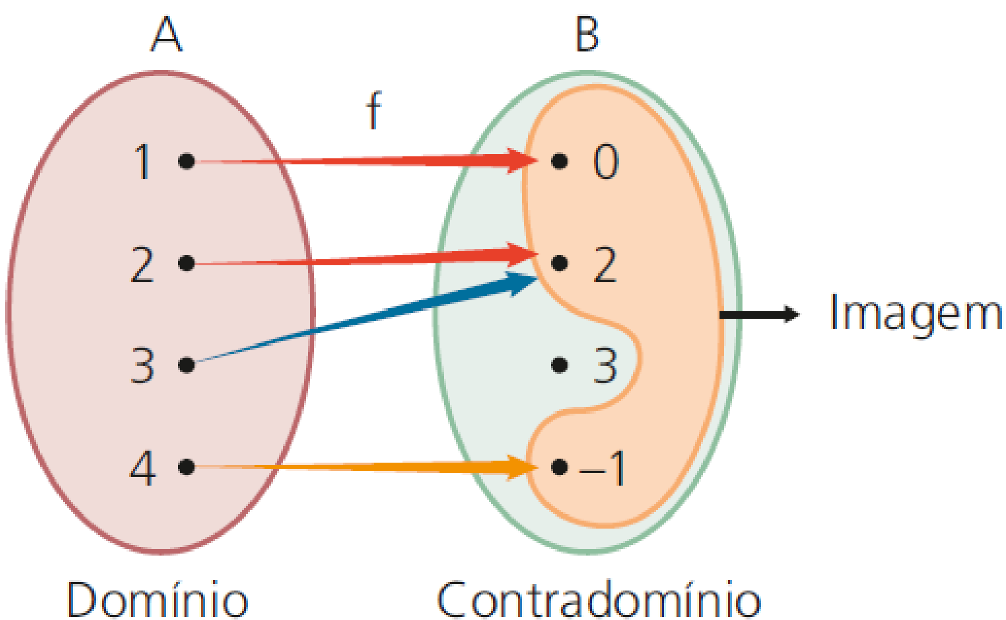
O subconjunto do contradomínio B, que contém apenas os elementos associados a algum elemento de A, é chamado de imagem da função e representado por Imf.



## • Função

### Notação

O subconjunto do contradomínio B, que contém apenas os elementos associados a algum elemento de A, é chamado de imagem da função e representado por Imf.



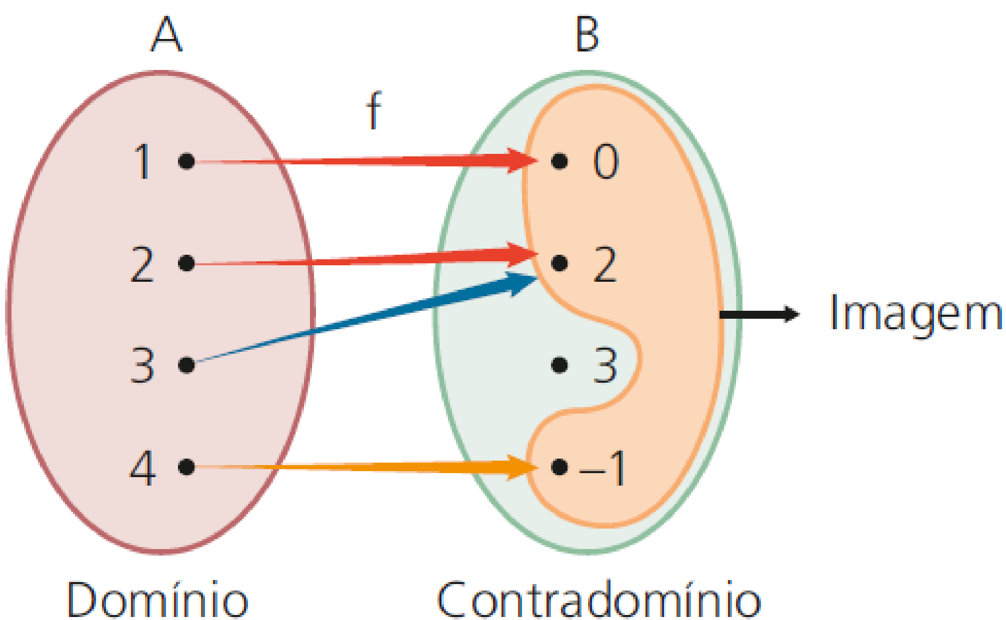

Na função **f** representada pelo diagrama de flechas, temos:

- $Df = A = \{1;\ 2;\ 3;\ 4\}$

- **Função**

  Notação

O subconjunto do contradomínio B, que contém apenas os elementos associados a algum elemento de A, é chamado de imagem da função e representado por Imf.



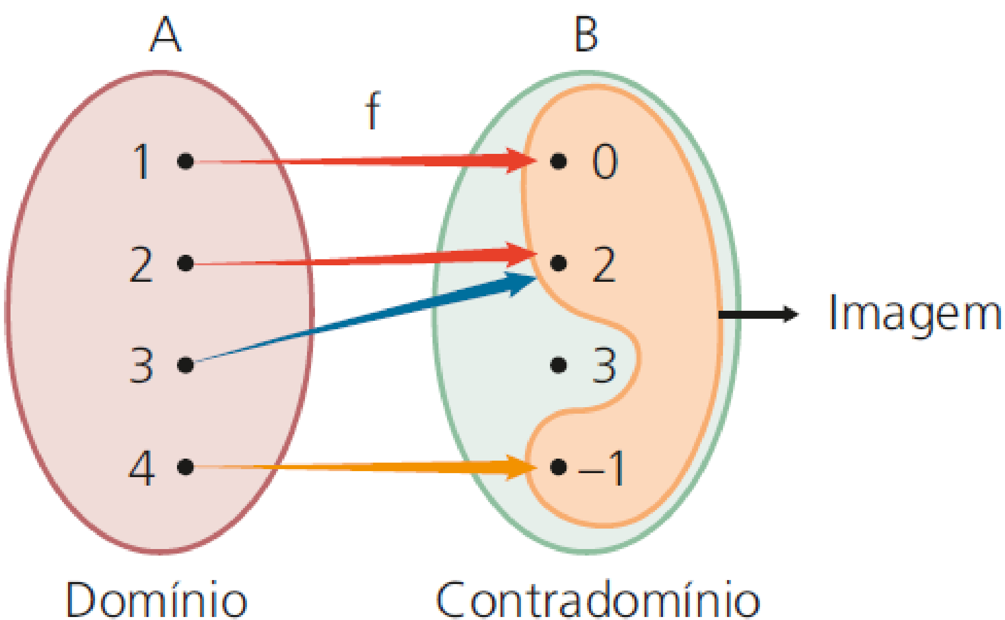

Na função **f** representada pelo diagrama de flechas, temos:

- $Df = A = \{1;\ 2;\ 3;\ 4\}$
- $CDf = B = \{-1;\ 0;\ 2;\ 3\}$

- **Função**

  Notação

O subconjunto do contradomínio B, que contém apenas os elementos associados a algum elemento de A, é chamado de imagem da função e representado por Imf.




Na função **f** representada pelo diagrama de flechas, temos:

- Df = A = {1; 2; 3; 4}
- CDf = B = {–1; 0; 2; 3}
- Imf = {–1; 0; 2}

- **Função**

  Valor numérico de uma função

Considere a função **f** a seguir.

Sejam $A = \{-1; 0; 2; \pi\}$, $B = \{-2; 0; 4; 2\pi\}$ e a função f, tal que:

- **Função**

  Valor numérico de uma função

Considere a função **f** a seguir.

Sejam $A = \{-1; 0; 2; \pi\}$, $B = \{-2; 0; 4; 2\pi\}$ e a função f, tal que:

$$f: A \to B$$

$$x \mapsto y;\ y = 2x \quad \text{ou} \quad f(x) = 2x$$

- **Função**

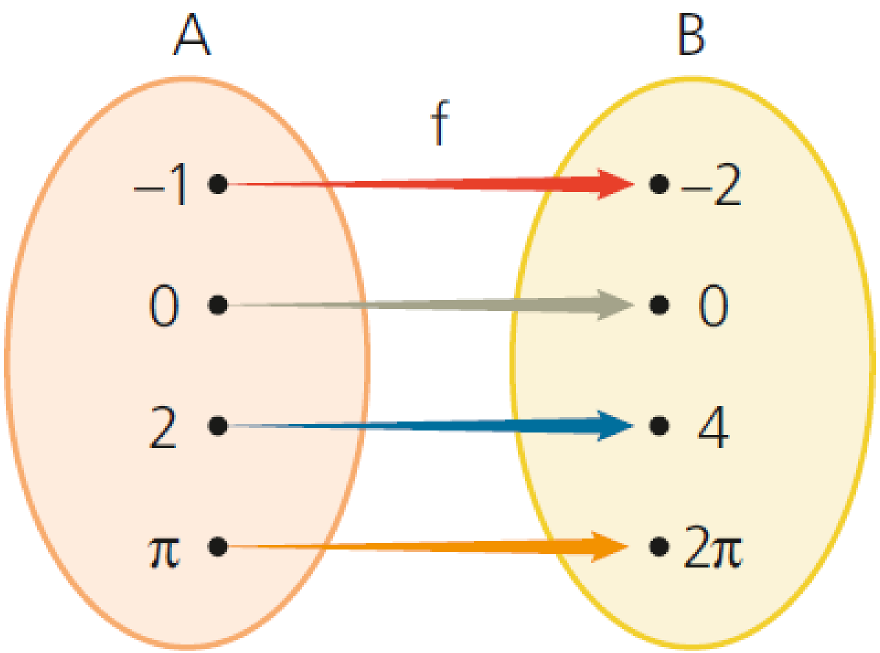
## Valor numérico de uma função

Considere a função **f** a seguir.

Sejam $A = \{-1; 0; 2; \pi\}$, $B = \{-2; 0; 4; 2\pi\}$ e a função f, tal que:

$$f: A \to B$$

$$x \mapsto y;\ y = 2x \quad \text{ou} \quad f(x) = 2x$$



- **Função**

  Valor numérico de uma função

$$f: A \to B$$

$$x \mapsto y;\ y = 2x \quad \text{ou} \quad f(x) = 2x$$

| x | f(x) = 2x | Valor numérico de f(x) |
|---|---|---|
| $-1$ | $f(-1) = 2(-1) = -2$ | $f(-1) = -2$ |
| $0$ | $f(0) = 2(0) = 0$ | $f(0) = 0$ |
| $2$ | $f(2) = 2(2) = 4$ | $f(2) = 4$ |
| $\pi$ | $f(\pi) = 2(\pi) = 2\pi$ | $f(\pi) = 2\pi$ |

## • Função

### Valor numérico de uma função

$$f: A \to B$$

$$x \mapsto y;\ y = 2x \quad \text{ou} \quad f(x) = 2x$$

| x | f(x) = 2x | Valor numérico de f(x) |
|---|---|---|
| $-1$ | $f(-1) = 2(-1) = -2$ | $f(-1) = -2$ |
| $0$ | $f(0) = 2(0) = 0$ | $f(0) = 0$ |
| $2$ | $f(2) = 2(2) = 4$ | $f(2) = 4$ |
| $\pi$ | $f(\pi) = 2(\pi) = 2\pi$ | $f(\pi) = 2\pi$ |

Dizemos que o valor numérico de $f(x)$, para $x = -1$ é $y = -2$. Nesse exemplo, a função associa, a cada valor **x** do domínio, um número do contradomínio igual ao dobro de **x**.

## • Domínio da função real

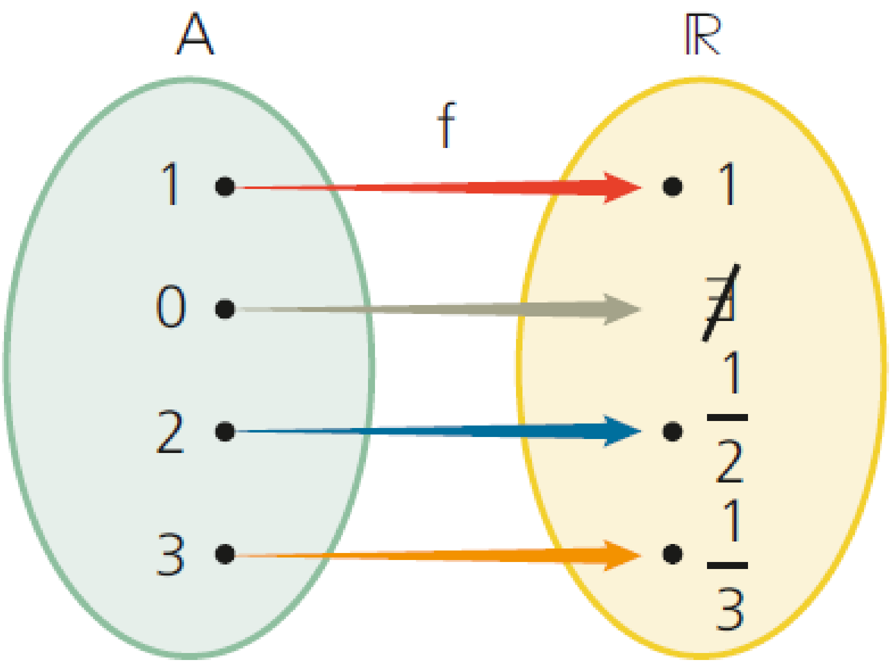
Examinando a expressão matemática da função para determinar o seu domínio.

**I.** $f(x) = \dfrac{1}{x}$

Observe que não foram especificados domínio ou contradomínio de f. Mesmo assim, $Df \neq \mathbb{R}$, pois não é possível determinar o valor de f(0).

Temos: $x \neq 0$

$\therefore Df = \mathbb{R}^*$



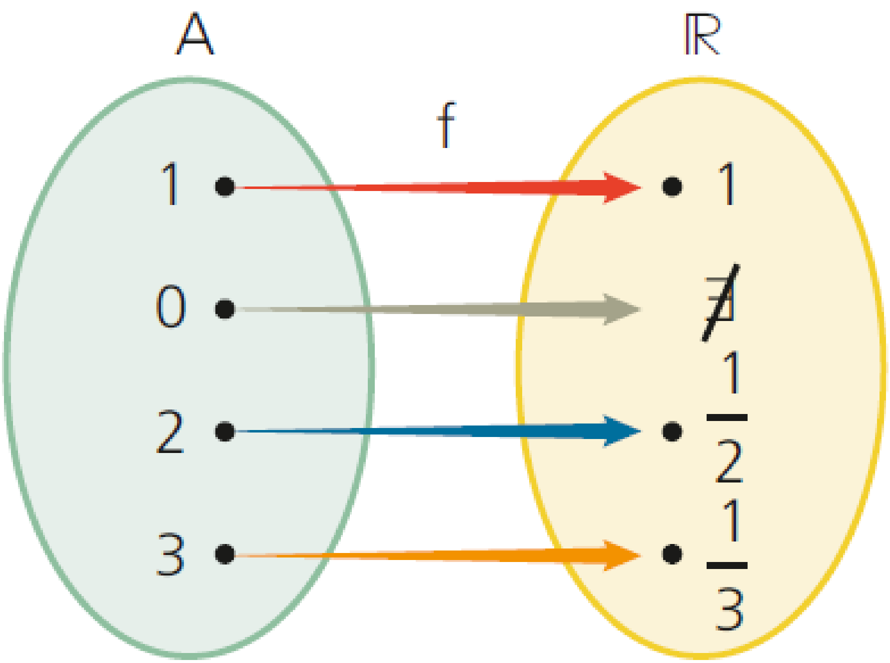
## • Domínio da função real

Examinando a expressão matemática da função para determinar o seu domínio.

**II.** $f(x) = \sqrt{x}$

Temos: $x \geqslant 0$

$\therefore Df = \mathbb{R}_+$



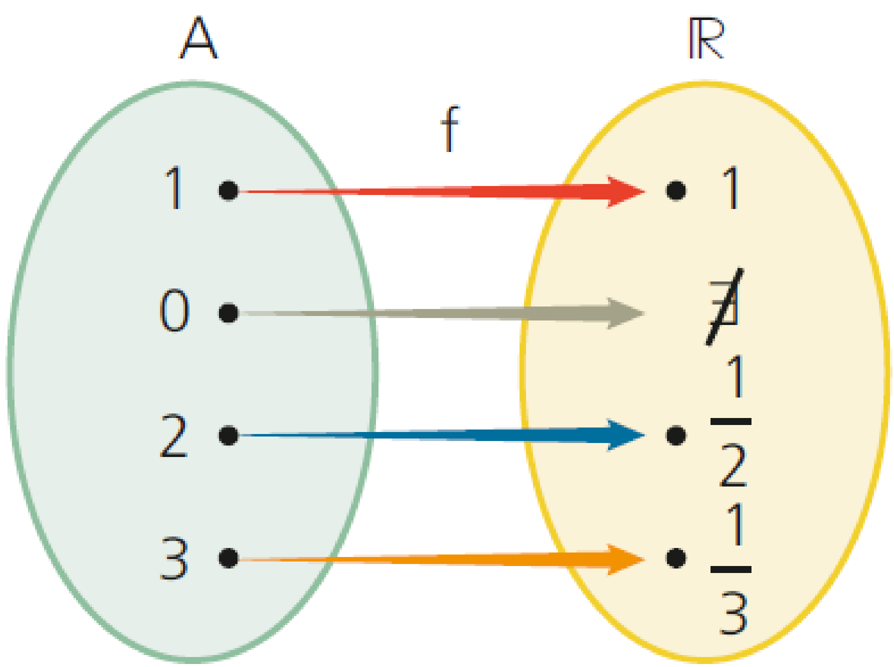
## • Domínio da função real

Examinando a expressão matemática da função para determinar o seu domínio.

**III.** $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$

Temos: $x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2$

$\therefore\ Df = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$



- **Gráfico de função**

I. Sejam os conjuntos:
$A = \{0; 1; 2; 3\}$ e $B = \{1; 2; 3; 4\}$.

- **Gráfico de função**

I. Sejam os conjuntos:
$A = \{0; 1; 2; 3\}$ e $B = \{1; 2; 3; 4\}$.

Construiremos o gráfico da função $f: A \rightarrow B$, definida por $f(x) = x + 1$.

## • Gráfico de função

I. Sejam os conjuntos:
$A = \{0; 1; 2; 3\}$ e $B = \{1; 2; 3; 4\}$.

Construiremos o gráfico da função $f: A \to B$, definida por $f(x) = x + 1$.

$$Df(x) = \{0; 1; 2; 3\}$$

$$Imf(x) = \{1; 2; 3; 4\}$$

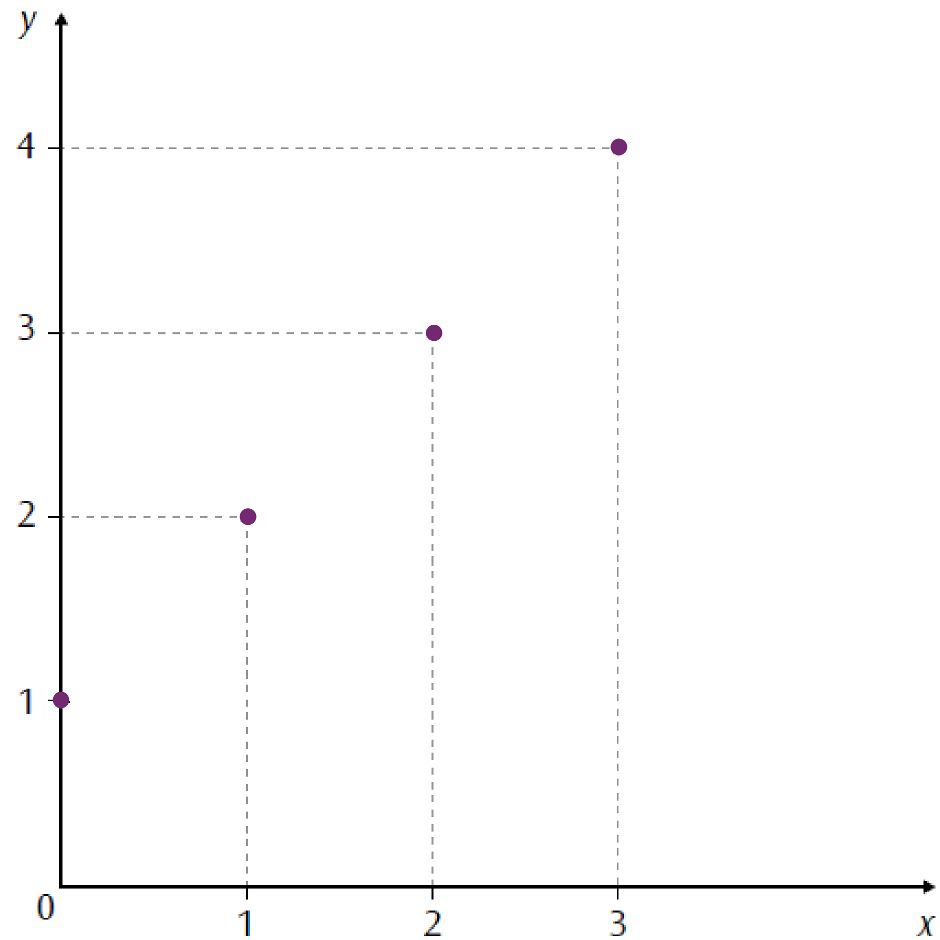
- **Gráfico de função**

I. Sejam os conjuntos:
$A = \{0; 1; 2; 3\}$ e $B = \{1; 2; 3; 4\}$.

Construiremos o gráfico da função $f: A \to B$, definida por $f(x) = x + 1$.

$Df(x) = \{0; 1; 2; 3\}$

$Imf(x) = \{1; 2; 3; 4\}$



- **Gráfico de função**

**II**. Sejam os conjuntos:
$A = [0; 3]$ e $B = [1; 4]$.

- **Gráfico de função**

**II**. Sejam os conjuntos:
$A = [0; 3]$ e $B = [1; 4]$.

Construiremos o gráfico da função
$f: A \to B$, definida por $f(x) = x + 1$.

- **Gráfico de função**

**II.** Sejam os conjuntos:
$A = [0; 3]$ e $B = [1; 4]$.

Construiremos o gráfico da função
$f: A \rightarrow B$, definida por $f(x) = x + 1$.

$Df(x) = [0; 3]$

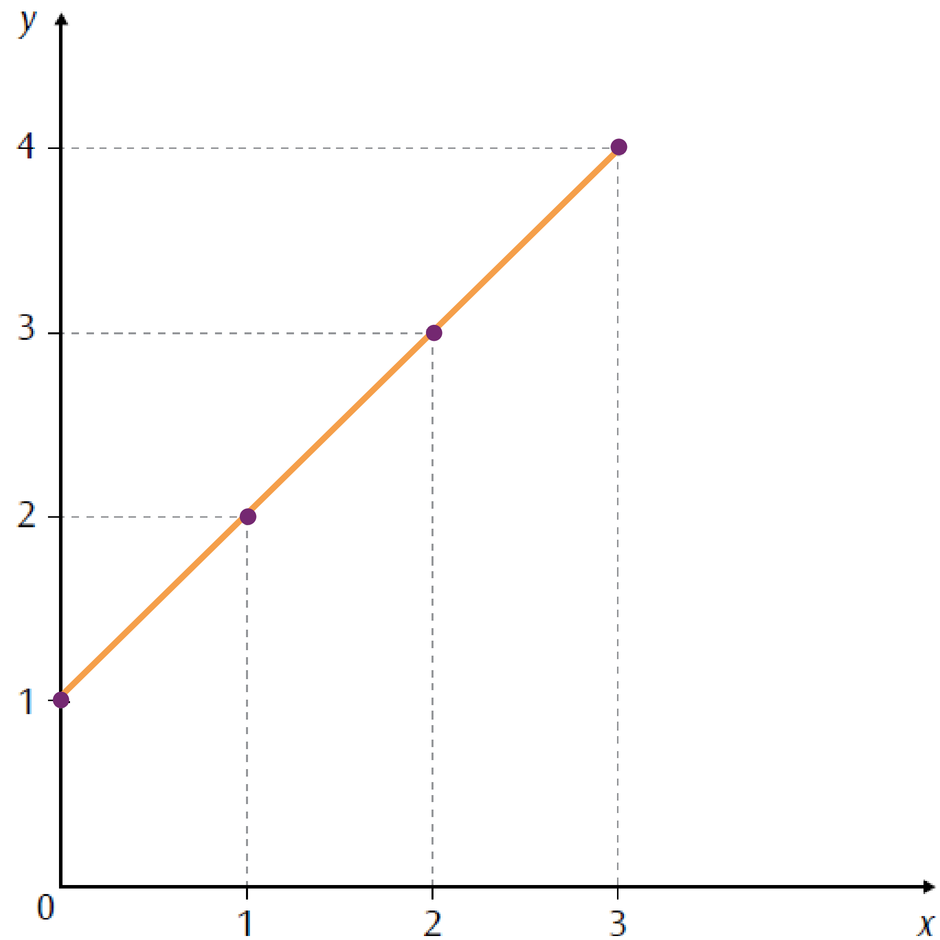
$Imf(x) = [1; 4]$

## • Gráfico de função

**II**. Sejam os conjuntos:
$A = [0; 3]$ e $B = [1; 4]$.

Construiremos o gráfico da função $f: A \to B$, definida por $f(x) = x + 1$.

| |
|---|
| $Df(x) = [0; 3]$ |
| $Imf(x) = [1; 4]$ |



- **Gráfico de função**

  Reconhecimento gráfico de uma função

Toda função tem um gráfico que a representa, mas nem todo gráfico representa uma função.

Apresentado um gráfico, para que ele represente uma função, é preciso que:

- **Gráfico de função**

  Reconhecimento gráfico de uma função

Toda função tem um gráfico que a representa, mas nem todo gráfico representa uma função.

Apresentado um gráfico, para que ele represente uma função, é preciso que:

- toda reta vertical passando por um dos elementos do domínio, representado no eixo horizontal, intercepte, necessariamente, o gráfico uma única vez;

- **Gráfico de função**

  Reconhecimento gráfico de uma função

Toda função tem um gráfico que a representa, mas nem todo gráfico representa uma função.

Apresentado um gráfico, para que ele represente uma função, é preciso que:

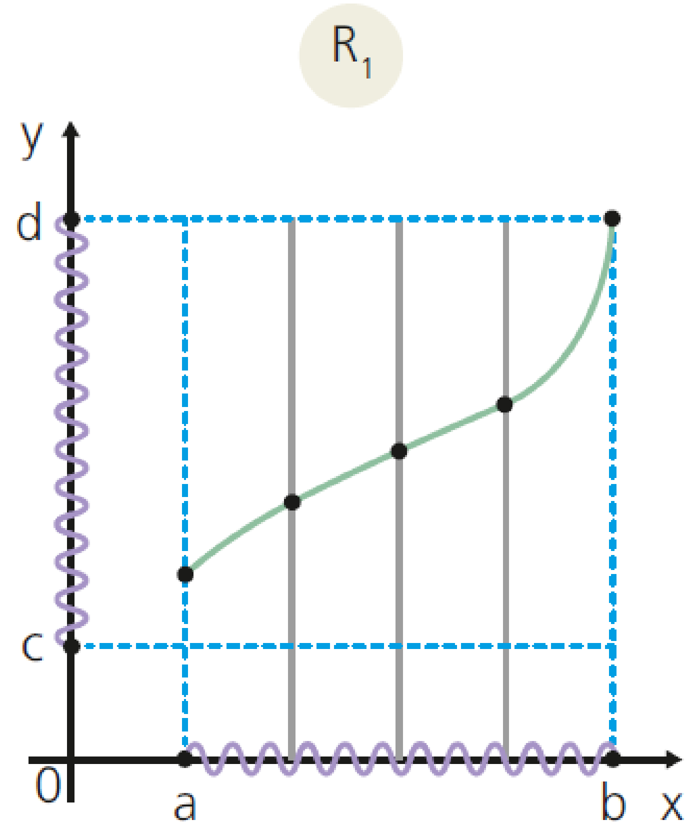
- toda reta vertical passando por um dos elementos do domínio, representado no eixo horizontal, intercepte, necessariamente, o gráfico uma única vez;

- não haja reta vertical passando por um dos elementos do domínio que não intercepte o gráfico ou o faça mais que uma vez.

## • Gráfico de função

### Reconhecimento gráfico de uma função

Dados os conjuntos A = [a; b] e B = [c; d], observe os gráficos a seguir, que representam relações de A em B.




**$R_1$**: essa relação caracteriza uma função, pois toda reta vertical que passa por um dos elementos do conjunto A intercepta o gráfico uma única vez.

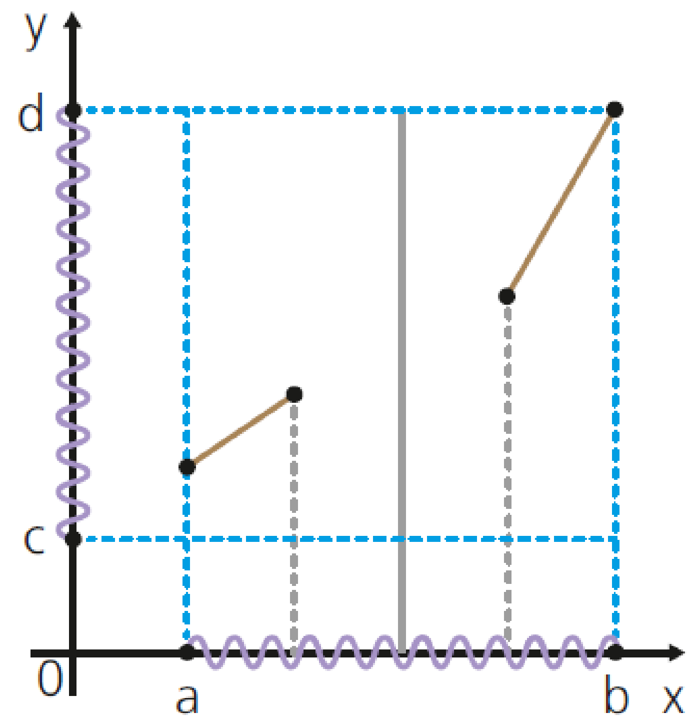
## • Gráfico de função

### Reconhecimento gráfico de uma função

Dados os conjuntos A = [a; b] e B = [c; d], observe os gráficos a seguir, que representam relações de A em B.

**$R_2$**: essa relação não caracteriza função, pois existe reta vertical que passa por elemento pertencente ao conjunto A e que não intercepta o gráfico.

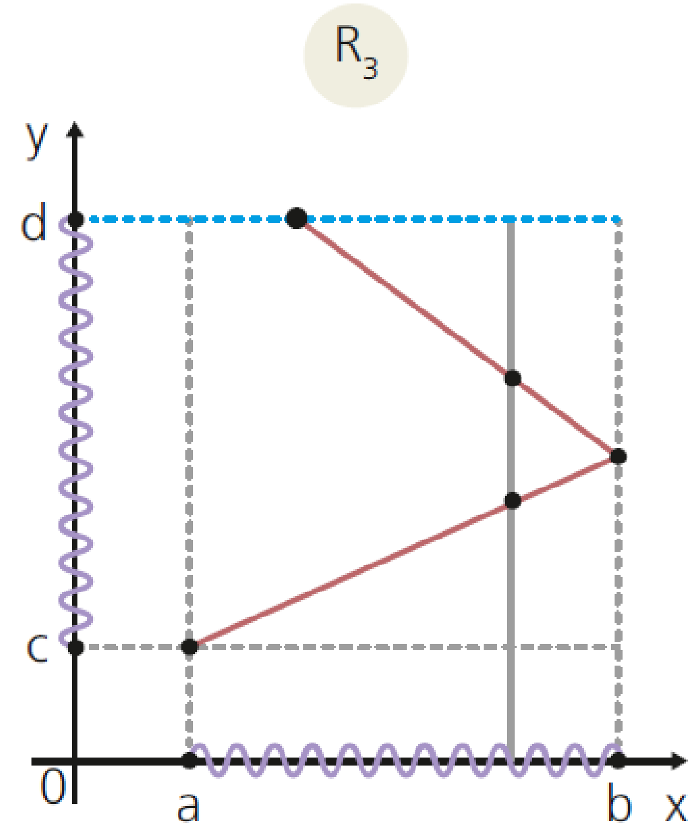
$R_2$



## • Gráfico de função

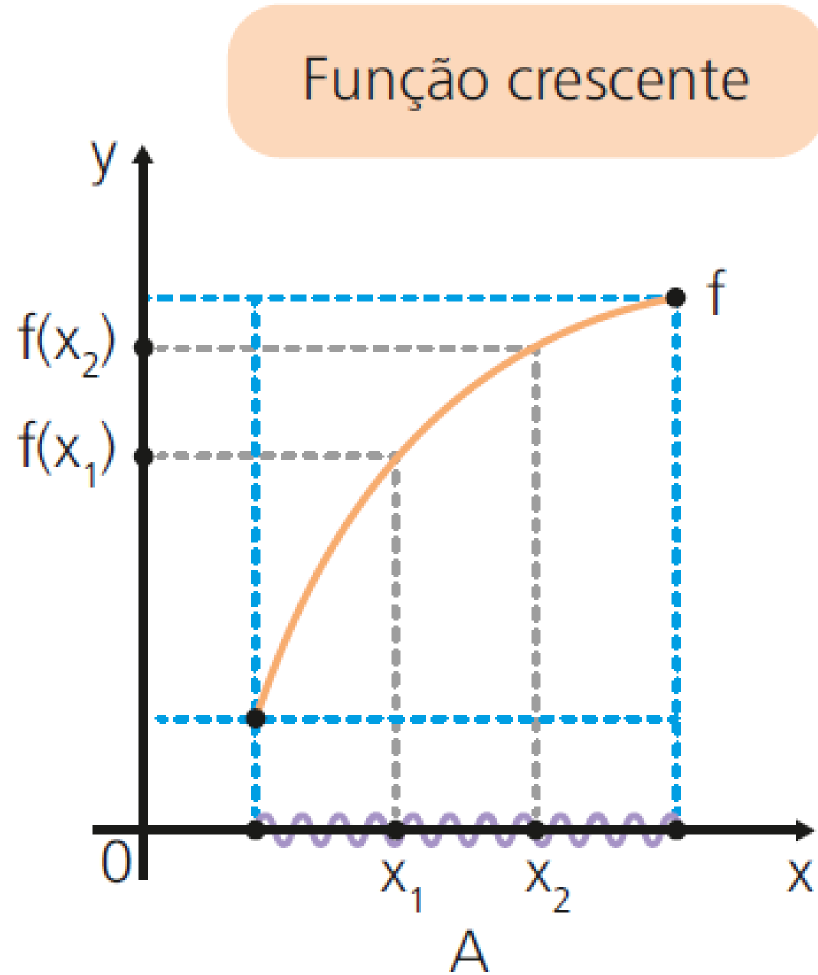
### Reconhecimento gráfico de uma função

Dados os conjuntos A = [a; b] e B = [c; d], observe os gráficos a seguir, que representam relações de A em B.




**$R_3$:** essa relação não caracteriza função, pois existe reta que passa por elemento pertencente ao conjunto A e que intercepta o gráfico mais de uma vez.

• **Funções crescentes, decrescentes e constantes**

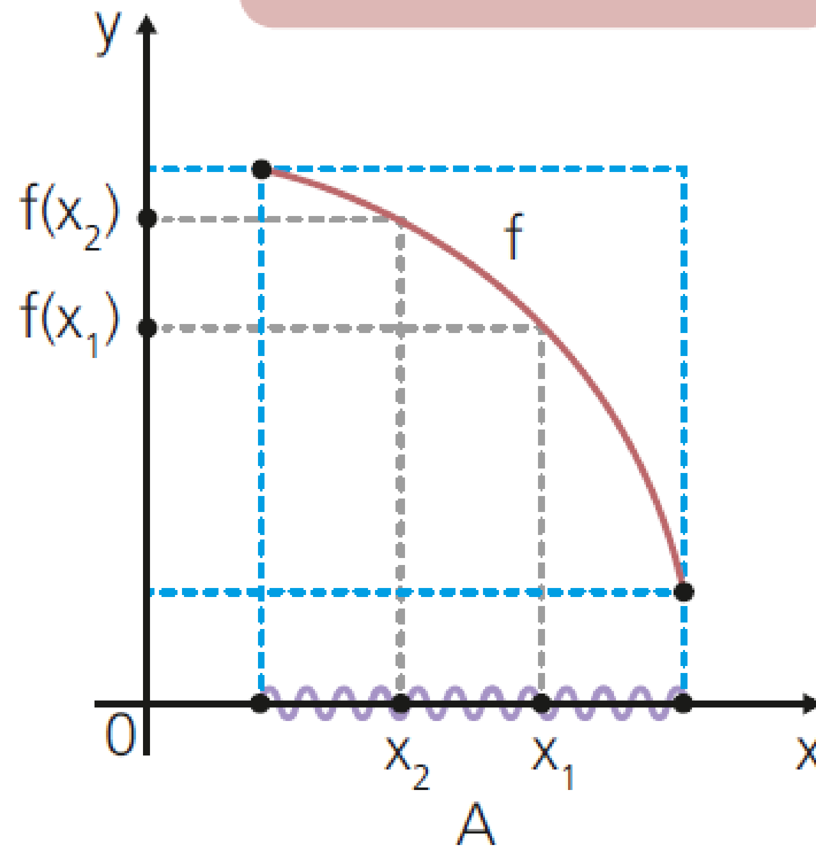



Dada a função **f**, de domínio D, dizemos que ela e **crescente** no intervalo A, com A contido em D, se, para quaisquer que sejam os elementos $x_1$ e $x_2$, pertencentes a A, se $x_2 > x_1$, então $f(x_2) < f(x_1)$, ou seja, quanto maior e o valor do elemento, maior o valor da imagem correspondente.

## • Funções crescentes, decrescentes e constantes

Função decrescente

Dada a função **f**, de domínio D, dizemos que ela é **decrescente** no intervalo A, com A contido em D, se, para quaisquer que sejam os elementos $x_1$ e $x_2$, pertencentes a A, se $x_1 > x_2$, então $f(x_1) < f(x_2)$, ou seja, quanto maior for o valor do elemento, menor será o valor da imagem correspondente.



## • Funções crescentes, decrescentes e constantes

Dada a função **f**, de domínio D, dizemos que ela é **constante** no intervalo A, com A contido em D, se, para quaisquer que sejam os elementos $x_1$ e $x_2$, pertencentes a A, se $x_1 \neq x_2$, então $f(x_1) = f(x_2)$, quaisquer que sejam $x_1$ e $x_2$ pertencentes a A, ou seja, elementos diferentes têm a mesma imagem.

Função decrescente