Prova 1, 08/09/2014, Prof. Paulo Freitas Gomes

Eletromagnetismo. Curso: Física

Nome: ____ Matrícula:____________

Dados: $\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12}$ C^{2}N^{-1}m^{-2}, carga elementar do elétron $-e = -1,6 \times 10^{-19}$ C, volume da esfera $\frac{4}{3}\pi r^3$, área da esfera $4\pi r^2$. Use τ para o volume.

1) Seja um fio longo reto infinito com uma densidade linear de carga λ. O campo elétrico gerado por este fio é:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\lambda}{s}\hat{s}$$

Encontre o potencial $V(s)$ gerado pelo fio. Mostre que seu potencial satisfaz: $\vec{E} = -\vec{\nabla}V(s)$. As coordenadas cilíndricas são (s, ϕ, z) tais que $s^2 = x^2 + y^2$ e $\tan\phi = \frac{y}{x}$.

2) a) Seja uma esfera rígida sólida uniformemente carregada de raio R e carga q. Qual o campo elétrico fora da esfera ($r > R$)? b) Encontre a energia desta esfera que está armazenada no campo elétrico. Ajuda: dentro da esfera ($r < R$) o campo é:

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r}{R^3}\hat{r}$$

Fórmulas para consulta

$$V(s) = -\int_{\Re}^{s} \vec{E}\cdot d\vec{l} \qquad V(\Re) = 0 \qquad \int_a^b \frac{dx}{x} = \ln b - \ln a = \ln\frac{b}{a} \qquad W = \frac{1}{2}\varepsilon_0\int_\Omega E^2 d\tau$$

$$d\tau = dxdydz = sdsd\phi dz = r^2 dr\sin\theta d\theta d\phi \qquad \int_a^b x^n dx = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}$$

$$\vec{F} = \frac{Q_1Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \int_S \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{Q_S}{\varepsilon_0} \qquad W = \frac{1}{2}\int \rho V d\tau \qquad \vec{\nabla}\times\vec{E} = 0$$

$$\vec{\nabla} = \hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z} = \hat{s}\frac{\partial}{\partial s} + \frac{\hat{\phi}}{s}\frac{\partial}{\partial \phi} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z} \qquad Q = \int_\Omega \rho(r)d\tau$$

Gabarito

Prova 1, 08/09/2014, Prof. Paulo Freitas Gomes

Eletromagnetismo. Curso: Física

1) Solução: A trajetória do entre os limites é na direção perpendicular ao eixo do fio, logo $l = s$. Vamos supor que o referencial seja na posição $s = \Re = a$, de forma que $V(a) = 0$. O campo $\vec{E}$ do fio é perpendicular ao eixo do fio (eixo z), de forma que ele é paralelo ao vetor $d\vec{l} = d\vec{s}$. Sendo paralelo, temos que $\vec{E} \cdot d\vec{l} = Edl\cos\theta = Eds$, já que $\theta = 0$. Usando tudo isso, temos que da definição de potencial:

$$V(s) = -\int_{\Re}^{s} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_{a}^{s} Eds = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int_{a}^{s}\frac{ds}{s} = \boxed{-\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}(\ln s - \ln a)}$$

Usei também a integral de $\int_a^b \frac{dx}{x} = (\ln b - \ln a)$ dada no formulário da prova. Nesta expressão vemos por que não podemos assumir o referencial no infinito ($a = \infty$) ou na superfície do fio ($a = 0$), pois em ambos os casos $\ln a$ não está definido. 2,5 pontos.

Para a segunda pergunta, vou calcular o gradiente de $V(s)$, usando a definição do vetor $\vec{\nabla}$ em coordenadas cilíndricas dada na prova. Temos que:

$$\frac{\partial V(s)}{\partial \phi} = \frac{\partial V(s)}{\partial z} = 0$$

Logo:

$$-\vec{\nabla}V(s) = \hat{s}\frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}(\ln s - \ln a)\right] = \hat{s}\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial s}(\ln s - \ln a) = \boxed{\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 s}\hat{s}}$$

O último termo é exatamente o campo dado no enunciado. Usei nessa dedução $\frac{\partial}{\partial s}(\ln s) = \frac{1}{s}$. 2,5 pontos.

2a) Solução: O campo elétrico de uma esfera rígida, sólida, de raio R e carga q, fora da esfera ($r > R$) é igual ao campo de uma carga pontual q:

$$\boxed{\vec{E}_f = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}} \tag{1}$$

1 ponto.

2b) Solução: A densidade de energia armazenada no campo elétrico é $u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$, onde $E = |\vec{E}|$. Assim, para encontrar a energia total W devemos integrar a densidade de energia em todo o espaço, tanto dentro quanto fora da esfera. O campo fora da esfera é dado pela eq. 1 e o campo $\vec{E}_d$ dentro da esfera é dado no enunciado. Integrando nas coordenadas esféricas (r, θ, ϕ), teremos:

$$\begin{aligned}
W &= \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_\Omega E^2 d\tau = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{\infty} E^2 r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi \\
&= \frac{1}{2} 2\pi\varepsilon_0 \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \left(\int_0^R E_d^2 r^2 dr + \int_R^{\infty} E_f^2 r^2 dr \right) \\
&= 2\pi\varepsilon_0 \frac{q^2}{(4\pi\varepsilon_0)^2} \left(\int_0^R \frac{r^2}{R^6} r^2 dr + \int_R^{\infty} \frac{r^2 dr}{r^4} \right) = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0} \left(\int_0^R \frac{r^4}{R^6} dr + \int_R^{\infty} \frac{dr}{r^2} \right) \\
&= \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0} \left(\frac{r^5}{5R^6}\bigg|_0^R - \frac{1}{r}\bigg|_R^{\infty} \right) = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{5R} + \frac{1}{R} \right) = \boxed{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{3q^2}{5R}}
\end{aligned}$$

Quanto maior o raio R, menor a energia, pois maior é a distância final entre os elementos de carga que formam q. A integral em ϕ é direta e em θ é igual a 2, pois $\int \sin\theta d\theta = -\cos\theta$. Os campos dependem apenas de r, com expressões diferentes para dentro $(r < R)$ e fora $(r > R)$ da esfera. 4 pontos.