**Jataí, 09/12/16. Curso: Física. UFG - Jataí.**

**Prova 2. Eletromagnetismo. Prof. Paulo Freitas Gomes.**

Nome: ______________________________________________ Matrícula: __________

1) a) Considere um disco de raio $R$ e com uma densidade de carga elétrica estática $\sigma$ girando com uma velocidade angular $\omega$. Calcule a densidade de corrente superficial $\vec{K}$ em uma distância $s$ do centro. b) Encontre o campo mangético em um ponto $z > R$ no eixo de simetria do disco.

2) a) Considere duas espiras 1 e 2, como na figura 1(a). Mostre que a força que a espira 2 sente devido a espira 1 é:

$$\vec{F}_2 = -\frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{\hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^2} d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2$$

b) A força magnética entre dois circuitos obedece a terceira Lei de Newton? Por que?

3) Um cilindro longo circular de raio $R$ tem uma magnetização $\vec{M} = ks^3\hat{\phi}$, onde $k$ é uma constante, $s$ é a distância até o eixo de simetria e $\hat{\phi}$ é o versor unitário azimutal (veja figura 1(b)). Encontre o campo magnético criado pela magnetização em todo o espaço.

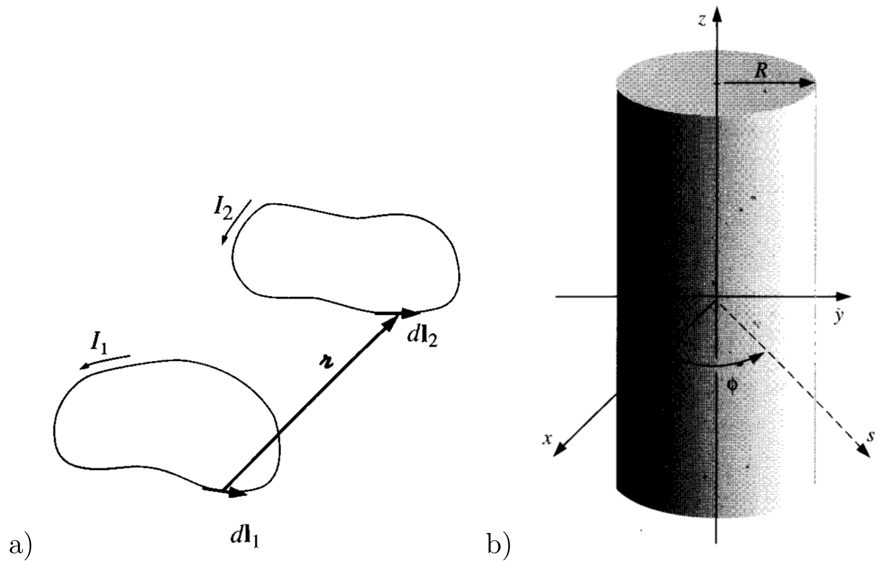


Figura 1: (a) Espiras 1 e 2. (b) Cilindro.

*O mundo não é apenas sol e arco-íris. É um lugar maldoso e asqueroso e não importa quão forte você seja, ele vai te bater até você ficar de joelhos e te deixar assim enquanto você permitir. Você, eu, e ninguém mais, irá bater tão forte quanto a vida. Mas o importante não é o quão forte você consegue bater. O importante é o quão forte você consegue aguentar e continuar andando de cabeça erguida. Isso é vitória. Se você sabe o seu valor, então corra atrás disso. Mas você tem que querer aguentar as pancadas da vida, e não apontar dedos culpando os outros. Covardes fazem isso e você não é um covarde. Você é melhor que isso.*

Rocky Balboa

# Gabarito

1a) Valor: 1 ponto. A definição de densidade superficial de corrente é: $\vec{K} = \frac{d\vec{I}}{dl_\perp} = \sigma\vec{v}$, onde $\vec{v}$ é a velocidade em função de $r$ de cada ponto no disco. Dado o movimento do disco, qualquer ponto nele terá uma velocidade na direção $\vec{v} = v\hat{\phi}$ ($\phi$ é coordenada cilíndrica angular, considerando o plano do disco no plano $xy$). Logo $\vec{K} = \sigma v\hat{\phi}$ (veja figura 2(b)). Como cada ponto no disco executa um movimento circular de raio $r$ temos que $v = \omega r$, logo:

$$\vec{K} = \boxed{\sigma\omega r\hat{\phi}}$$

1b) Valor: 2 pontos Vou usar o resultado do campo magnético criado por uma espira ao longo do eixo da mesma:

$$\vec{B}_e = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2+z^2)^{3/2}}\hat{z}$$

O campo total distando $z$ do disco será então a soma dos campos de cada espira diferencial: $\vec{B} = \int_0^R d\vec{B}_e$. Como $\vec{B}_e$ está no eixo $z$, o campo resultante do disco também será ao longo de $z$: $\vec{B} = \hat{z}\int_0^R dB_e$. A variável de integração será a grandeza extensiva na expressão de $B_e$, que no caso é a corrente:

$$dB_e = \frac{\mu_0 R^2}{2(R^2+z^2)^{3/2}}dI$$

A corrente será:

$$dI = \frac{dq}{T} = \frac{\sigma da}{T} = \frac{2\pi r\sigma dr}{2\pi/\omega} = \sigma\omega r dr$$

O elemento diferencial de carga $dq = \sigma da$ está na espessura da espira, como ilustrado na figura 2(a). Juntando as duas últimas equações temos:

$$\vec{B} = \hat{z}\int_0^R dB_e = \hat{z}\int_0^R \frac{\mu_0 r^2}{2(R^2+z^2)^{3/2}}\sigma\omega r dr = \frac{1}{2}\mu_0\sigma\omega\int_0^R \frac{r^3}{(r^2+z^2)^{3/2}}dr\hat{z}$$

Para fazer a integral fazemos a troca de variáveis $u = r^2$ e $du = 2rdr$. Logo:

$$\begin{aligned}
\vec{B} &= \hat{z}\frac{1}{4}\mu_0\sigma\omega\int_0^{R^2}\frac{udu}{(u+z^2)^{3/2}} = \hat{z}\frac{1}{4}\mu_0\sigma\omega\left[2\left(\frac{u+2z^2}{\sqrt{u+2z^2}}\right)\right]\Bigg|_0^{R^2} \\
&= \boxed{\frac{1}{2}\mu_0\sigma\omega\left[\frac{R^2+2z^2}{\sqrt{R^2+z^2}} - 2z\right]\hat{z}}
\end{aligned}$$

---

2a) Valor: 3 pontos A força magnética que a espira 2 sente é:

$$\vec{F}_2 = \int I_2 d\vec{l}_2 \times \vec{B}_1$$

onde $\vec{B}_1$ é o campo gerado pela espira 1, dado pela lei de Biot Savart:

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi}\int\frac{d\vec{l}_1\times\hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^2}$$

Usando a expressão de $\vec{B}_1$ a força fica:

$$\vec{F}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi}\int I_2 d\vec{l}_2 \times \int I_1\frac{d\vec{l}_1\times\hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}I_1 I_2\iint\frac{d\vec{l}_2\times d\vec{l}_1\times\hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^2}$$

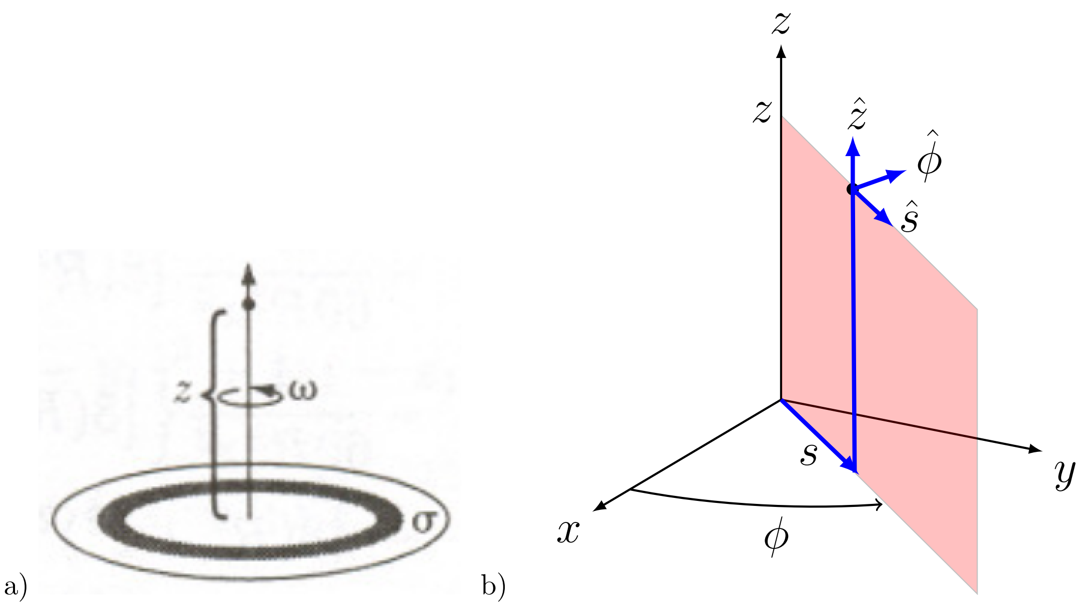


Figura 2: (a) Espira e o elemento de área para o cálculo de $dI$. (b) Sistema de coordenadas cilíndricas.

Usando propriedade $\vec{A}\times\vec{B}\times\vec{C}=\vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C})-\vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})$ podemos abrir o integrando:

$$d\vec{l_2}\times d\vec{l_1}\times\hat{\mathscr{r}}=d\vec{l_1}(d\vec{l_2}\cdot\hat{\mathscr{r}})-\hat{\mathscr{r}}(d\vec{l_1}\cdot d\vec{l_2})$$

A força fica então:

$$\vec{F_2}=\frac{\mu_0}{4\pi}I_1I_2\Gamma-\frac{\mu_0}{4\pi}I_1I_2\iint\frac{\hat{\mathscr{r}}(d\vec{l_1}\cdot d\vec{l_2})}{\mathscr{r}^2}$$

onde:

$$\Gamma=\iint\frac{d\vec{l_1}(d\vec{l_2}\cdot\hat{\mathscr{r}})}{\mathscr{r}^2}=\oint d\vec{l_1}\oint\frac{\hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^2}\cdot d\vec{l_2} \tag{1}$$

Temos que $\Gamma=0$, logo a força na espira 2 é:

$$\vec{F_2}=\boxed{-\frac{\mu_0}{4\pi}I_1I_2\iint\frac{\hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^2}d\vec{l_1}\cdot d\vec{l_2}} \tag{2}$$

como desejado mostrar.

Resta agora mostrar que de fato $\Gamma=0$. Primeiro, vou reescrever o vetor $\dfrac{\hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^2}$ na forma de um gradiente. Temos que:

$$\vec{\nabla}_2\frac{1}{\mathscr{r}}=\left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x_2}+\hat{j}\frac{\partial}{\partial y_2}+\hat{k}\frac{\partial}{\partial z_2}\right)\frac{1}{\mathscr{r}} \tag{3}$$

O vetor separação é dado por:

$$\begin{aligned}\vec{\mathscr{r}} &= \vec{r}_2-\vec{r}_1=(x_2-x_1)\hat{i}+(y_2-y_1)\hat{j}+(z_2-z_1)\hat{k}\\ \mathscr{r}^2 &= (x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2\end{aligned}$$

Calculando cada derivada parcial temos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{1}{\mathscr{r}}\right) &= \frac{\partial}{\partial x_2}\left\{\left[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2\right]^{-1/2}\right\}=-\frac{1}{2}\frac{1}{\mathscr{r}^3}2(x_2-x_1)\\ &= -\frac{x_2-x_1}{\mathscr{r}^3}\end{aligned}$$

Analogamente temos para as outras coordenadas:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y_2}\left(\frac{1}{\eta}\right) &= -\frac{y_2-y_1}{\eta^3}\\ \frac{\partial}{\partial z_2}\left(\frac{1}{\eta}\right) &= -\frac{z_2-z_1}{\eta^3}\end{aligned}$$

O gradiente da Eq. 3 fica então:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}_2\frac{1}{\eta} &= -\frac{1}{\eta^3}\left[(x_2-x_1)\hat{i}+(y_2-y_1)\hat{y}+(z_2-z_1)\hat{k}\right] = -\frac{\vec{\eta}}{\eta^3}\\ &= -\frac{\hat{\eta}}{\eta^2}\end{aligned}$$

Usando este resultado na Eq. 1 teremos então:

$$\Gamma = -\oint d\vec{l_1}\oint d\vec{l_2}\cdot\vec{\nabla}_2\frac{1}{\eta} \tag{4}$$

Mas o Teorema fundamental do cálculo diz que:

$$\int_{\vec{a}}^{\vec{b}}(\vec{\nabla}T)\cdot d\vec{l} = T(\vec{b}) - T(\vec{a})$$

Se aplicarmos este teorema na segunda integral da Eq. 4 teremos:

$$\oint d\vec{l_2}\cdot\vec{\nabla}_2\frac{1}{\eta} = \left.\frac{1}{\eta}\right|_{\vec{r}_f} - \left.\frac{1}{\eta}\right|_{\vec{r}_i} = \left.\frac{1}{\eta}\right|_{\vec{r}_f} - \left.\frac{1}{\eta}\right|_{\vec{r}_i} = 0$$

onde $\vec{r}_f$ e $\vec{r}_i$ são as posições final e inicial. Porém, como trata-se de uma integral fechada $\oint$, temos que $\vec{r}_f = \vec{r}_i$. Esta integral sendo zero, a Eq. 4 implica que $\Gamma = 0$, como queríamos demonstrar.

2b) Valor: 1 ponto A Terceira Lei de Newton forte diz que a força de um objeto 1 sobre outro objeto 2 tem mesmo módulo e direção porém sentido contrário que a força do objeto 2 sobre o 1: $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$. A força da espira 1 na espira 2 é dada pela Eq. 2. Analogamente a força da espira 2 na espira 1 é obtida trocando as seguintes variáveis: $I_1$ por $I_2$, $d\vec{l_1}$ por $d\vec{l_2}$ e vice-versa. Já o vetor separação inverte o sinal, pois a direção continua a mesma e apenas o sentido é alterado: $\hat{\eta} \to -\hat{\eta}$. Fazendo essas alterações na Eq. 2 temos:

$$\vec{F}_1 = \boxed{+\frac{\mu_0}{4\pi}I_2I_1\iint\frac{\hat{\eta}}{\eta^2}d\vec{l_2}\cdot d\vec{l_1}} \tag{5}$$

Das Eqs. 2 e 5 conclui-se que $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$, satisfazendo portanto a Terceira Lei de Newton.

---

3) Valor: 3 pontos Dado a simetria do problema, usaremos coordenadas cilíndricas $(s,\phi,z)$, veja figura 2(b). O campo magnético pode ser calculado tanto pela Lei de Biot-Savart quanto pela Lei de Ampére. A simetria espacial da densidade de corrente irá determinar qual lei é mais adequada. A densidade volumétrica de corrente criada pela magnetização $\vec{M} = ks^3\hat{\phi} = M_\phi\hat{\phi}$ será:

$$\begin{aligned}\vec{J}_b &= \vec{\nabla}\times\vec{M} = -\frac{\partial M_\phi}{\partial z}\hat{s} + \frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}(sM_\phi)\hat{z} = \frac{k}{s}\frac{\partial s^4}{\partial s}\hat{z}\\ &= 4ks^2\hat{z}\end{aligned} \tag{6}$$

Já a densidade superficial de corrente será:

$$\vec{K}_b = \vec{M} \times \hat{n} = ks^3\hat{\phi} \times \hat{s} = -kR^3\hat{z} \tag{7}$$

Há então uma densidade volumétrica de corrente $\vec{J}_b$ subindo e uma densidade superficial $\vec{K}_b$ descendo. A corrente volumétrica tem simetria radial e assim podemos usar a Lei de Ampére para calcular o campo criado dentro do cilindro. A Lei de Ampére é escrita como:

$$\oint_C \vec{B}_d \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_c \tag{8}$$

onde $I_c$ é a corrente total que atravessa a amperiana $C$ e $\vec{B}_d = \vec{B}(s < R)$ é o campo dentro do cilindro. Consideremos uma amperiana genérica de raio $s_1 < R$. Como a corrente está subindo, pela regra da mão direita, o campo estará na direção $\hat{\phi}$, paralelo ao elemento de comprimento $d\vec{l} = dl\hat{\phi}$ (veja figura 1(b)). O lado direito da Lei de Ampére (Eq. 8) será:

$$\oint_C \vec{B}_d \cdot d\vec{l} = \oint B_d dl = B_d \oint dl = 2\pi s_1 B_d \tag{9}$$

A corrente englobada será:

$$I_c(s_1) = \int \vec{J}_b \cdot d\vec{a} = \int J_b da\hat{z} \cdot \hat{z} = \int_0^{s_1} sds \int_0^{2\pi} d\phi 4ks^2 = 2\pi 4k \int_0^{s_1} s^3 ds = 2k\pi s_1^4 \tag{10}$$

onde o elemento de área em coordenadas cilíndricas é $da = sdsd\phi$. Substituindo as Eqs. 9 e 10 na Eq. 8, o campo dentro do cilindro será:

$$\vec{B}_d = \mu_0 \frac{2k\pi s^4}{2\pi s}\hat{\phi} = \mu_0 ks^3\hat{\phi} = \mu_0\vec{M}$$

onde trocamos $s_1$ por $s$.

Para o cálculo do campo fora do cilindro, precisamos da corrente superficial também. É de se esperar que a corrente total devida à magnetização apenas seja nula, já que a magnetização não cria corrente elétrica, apenas redistribui as correntes microscópicas. A corrente total é $I_t = I_c(R) + I_s$, onde $I_c(R)$ é a corrente volumétrica total dentro do cilindro. Da Eq. 10:

$$I_c(s_1 = R) = 8k\pi \int_0^R s^3 ds = 2k\pi R^4 \tag{11}$$

A definição de corrente superficial é $\vec{K} = \frac{d\vec{I}}{dl_\perp} = \frac{dI}{dl_\perp}\hat{n}$. Em nosso caso temos $\hat{n} = -\hat{z}$ (veja Eq. 7). Assim o comprimento perpendicular $l_\perp$ está no plano $xy$. Logo, a corrente total será:

$$I_s = \oint K_b dl_\perp = -kR^3 \oint dl_\perp = -2k\pi R^4 \tag{12}$$

O caminho de integração é uma circunferência na superfície lateral do cilindro. Das Eqs. 11 e 12 concluimos que a corrente total é zero: $I_t = 2k\pi R^4 - 2k\pi R^4 = 0$. Usando novamente a Lei de Ampére, o campo magnético fora $B_f$ será zero, pois não há corrente resultante atravessando a amperiana. A solução final para o campo magnético é:

$$\vec{B}(s) = \boxed{\begin{cases} 0 & \text{se } s > R \\ \mu_0 ks^3\hat{\phi} & \text{se } s < R \end{cases}}$$