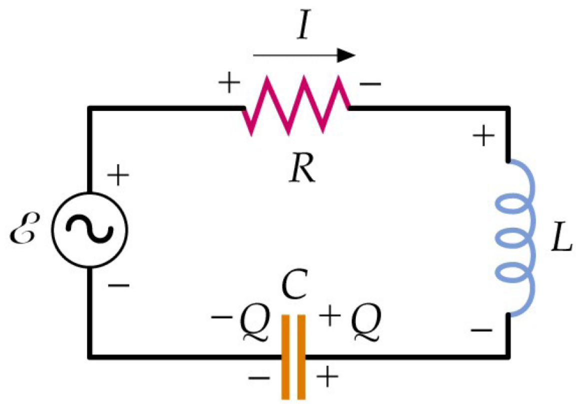

Figura 1: *Impedância complexa $\bar{Z}$ no plano complexo.*

1 Números complexos

Vamos usar então a notação complexa, na qual:

$$j = \sqrt{-1} \tag{1}$$

Assim, qualquer número complexo z pode ser escrito da forma:

$$z = a + jb \tag{2}$$

Os números a e b são reais e são chamados de partes real e imaginária de z:

$$a = Re[z] \qquad \therefore \qquad b = Im[z] \tag{3}$$

Vamos usar tambem a fórmula de Euler:

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta \tag{4}$$

2 Circuito RLC com tensão alternada: descrição complexa

Iremos descrever e resolver as equações das tensões em um circuito RLC em série com uma tensão alternada (veja figura 1), utilizando números complexos.

Aplicando a Lei das Malhas de Kirchhoff no circuito teremos:

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C} = V_0 \cos\omega t \tag{5}$$

Da definição de corrente $i = \dfrac{dq}{dt}$ temos que $q = \int \dfrac{dq}{dt}dt = \int i(t)dt$, logo:

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int i(t)dt = V_0 \cos\omega t \tag{6}$$

Da fórmula de Euler (eq. 4):

$$e^{j\omega t} = \cos\omega t + j\sin\omega t \tag{7}$$

Assim, a tensão da fonte pode ser escrita como:

$$v(t) = V_0\cos\omega t = Re[V_0 e^{j\omega t}] \tag{8}$$

Agora vamos montar a estratégia para encontrarmos a solução. E para isso vamos utilizar a notação complexa, que apesar de não ser intuitiva, deixará tudo simples e direto. Para isso, suponhamos que:

$$i(t) = Re[z(t)] \tag{9}$$

onde $z(t)$ é uma função complexa. Substituindo esta suposição na eq. 6 temos que:

$$L\frac{dRe[z]}{dt} + RRe[z] + \frac{1}{C}\int Re[z]dt = Re[V_0 e^{j\omega t}] \tag{10}$$

Porém, a função $Re[z]$ é uma função linear e temos que:

$$Re\left[\frac{dz_1}{dt}\right] = \frac{dRe[z_1]}{dt} \qquad \therefore \qquad Re[z_1 + z_2] = Re[z_1] + Re[z_2] \tag{11}$$

para quaisquer duas funções complexas z_1 e z_2[1]. Das eqs 11 reescrevemos a eq. 10 como:

$$Re\left[L\frac{dz}{dt} + Rz + \frac{1}{C}\int zdt\right] = Re[V_0 e^{j\omega t}] \tag{12}$$

Vamos considerar então a equação diferencial complexa:

$$L\frac{dz}{dt} + Rz + \frac{1}{C}\int zdt = V_0 e^{j\omega t} \tag{13}$$

A solução da eq. 12 é a parte real da solução da eq. 13, ou seja, a corrente real $i(t)$ é a parte real de $z(t)$, exatamente a suposição da eq. 9. Assim, basta resolvermos a eq. 13, encontrarmos $z(t)$ e tirarmos a parte real. A vantagem desta estratégia é que a equação a ser resolvida é mais fácil de resolver.

3 Solução tentativa

Como solução vamos fazer a tentativa:

$$z(t) = I_0 e^{j\omega t} \tag{14}$$

[1] Não acredita? Suponha $z_1(t) = a_1(t) + jb_1(t)$ e $z_2 = a_2 + jb_2$ e prove você mesmo.

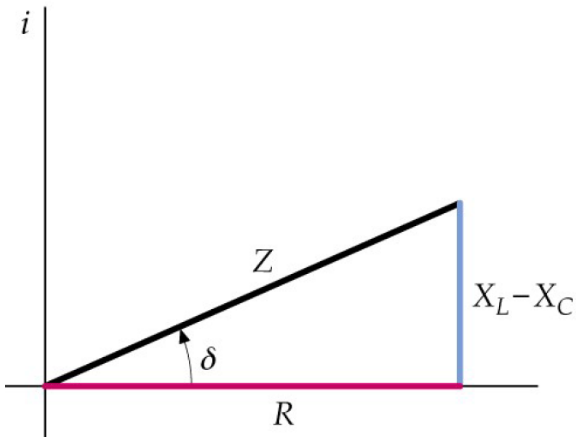

Figura 2: *Impedância complexa $\bar{Z}$ no plano complexo. Considere $\delta = \theta$.*

Derivando e integrando:

$$\frac{dz}{dt} = j\omega I_0 e^{j\omega t} = j\omega z(t) \qquad \therefore \qquad \int z dt = \frac{z}{j\omega}$$

Substituindo estes resultados na eq. 13:

$$j\omega L z + Rz + \frac{z}{j\omega C} = V_0 e^{j\omega t} = \frac{V_0}{I_0} z \tag{15}$$

Vamos usar os resultados e definições:

$$j = -\frac{1}{j} \qquad \therefore \qquad X_L = \omega L \qquad \therefore \qquad X_C = \frac{1}{\omega C} \tag{16}$$

Dividindo a eq. 15 por z temos:

$$\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) j + R = \frac{V_0}{I_0} \tag{17}$$

A amplitude complexa da corrente é então:

$$I_0 = \frac{V_0}{R + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) j} = \frac{V_0}{R + j(X_L - X_C)} = \frac{V_0}{\bar{Z}} \tag{18}$$

onde o número complexo $\bar{Z} = Ze^{j\theta}$ (veja figura 2) tem módulo Z e fase θ dados por:

$$\begin{aligned} Z &= \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \\ \tan\theta &= \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{1}{R}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \end{aligned} \tag{19}$$

A amplitude da corrente fica:

$$I_0 = \frac{V_0}{Ze^{j\theta}} = \frac{V_0}{Z} e^{-j\theta} \tag{20}$$

A solução complexa final será:

$$z(t) = \frac{V_0}{Z} e^{(j\omega t - j\theta)} \tag{21}$$

Das eqs. 4 e 21 a corrente real é:

$$i(t) = \frac{V_0}{Z} \cos(\omega t - \theta) = I \cos(\omega t - \theta) \tag{22}$$