Jataí, 18/11/16. Universidade Federal de Goiás - Regional Jataí.

Curso: Física. Eletromagnetismo. Prof. Paulo Freitas Gomes.

Nome: ____. Matrícula: ____________

Prezado aluno, seja didático e organizado. Explique os pontos importantes de sua solução e use quantas folhas forem necessárias. Lembre-se dos objetivos: (1) fazer o que foi pedido; (2) mostrar ao corretor que você tem o conhecimento necessário para o objetivo (1). Ao terminar sua prova, faça uma pequena revisão. Boa sorte!

---

1) A solução genérica em coordenadas esféricas (r, θ) para o potencial elétrico da Eq. de Laplace, considerando um potencial independente de ϕ, é:

$$V(r,\theta) = \begin{cases} V_d(r,\theta) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos\theta) & \text{se } r \leq R \\ \\ V_f(r,\theta) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{B_n}{r^{n+1}} P_n(\cos\theta) & \text{se } r \geq R \end{cases},$$

onde V_d e V_f são o potencial dentro e fora da esfera. Considere uma esfera de raio R cujo potencial na superfície é dado por:

$$V_0(\theta) = k\cos 3\theta = \frac{k}{5}\left[8P_3(\cos\theta) - 3P_1(\cos\theta)\right]$$

onde k é uma constante e $P_1(\cos\theta) = \cos\theta$ e $P_3(\cos\theta) = \frac{1}{2}(5\cos^3\theta - 3\cos\theta)$ são os polinômios de Legendre de ordem 1 e 3.

a) Mostre que, no caso geral, os coeficientes A_n são dados por:

$$A_n = \frac{2n+1}{2R^n}\int_0^{\pi} V_0(\theta) P_n(\cos\theta)\sin\theta d\theta.$$

Dica: escreva a continuidade da expressão do potencial dentro da esfera $V_d(r,\theta)$ para $r = R$. Multiplique por $\int_0^{\pi} P_q(\cos\theta)\sin\theta d\theta$ em ambos os lados e use a condição de conjunto completo dos polinômios de Legendre.

b) Mostre que os coeficientes do potencial fora da esfera podem ser escritos como:

$$B_n = A_n R^{2n+1}.$$

Dica 1: Escreva a relação de continuidade envovendo $V_d(r,\theta)$ e $V_f(r,\theta)$ em $r = R$. Dica 2: quando duas séries de polinômios de Legendre são iguais, é por que os respectivos coeficientes de $P_n(\cos\theta)$ são iguais.

c) Mostre que o potencial em todo o espaço é:

$$V(r,\theta) = \begin{cases} -\dfrac{3k}{5R} r P_1(\cos\theta) + \dfrac{8k}{5R^3} r^3 P_3(\cos\theta) & \text{se } r \leq R \\ \\ -\dfrac{3kR^2}{5r^2} P_1(\cos\theta) + \dfrac{8kR^4}{5r^4} P_3(\cos\theta) & \text{se } r \geq R \end{cases}$$

d) A densidade de carga pode ser encontrada através das condições de contorno do potencial:

$$\left(\frac{\partial V_d}{\partial u} - \frac{\partial V_f}{\partial u}\right)\bigg|_S = -\frac{\sigma(\theta)}{\varepsilon_0}, \tag{1}$$

onde u é a coordenada cuja direção é perpendicular a superfície onde está a densidade de carga. O símbolo $\Big|_S$ significa que a expressão entre parênteses deve ser avaliada na superfície em questão. Assumindo que não há carga nem dentro nem fora da esfera, mostre que a densidade de carga na superfície é:

$$\sigma(\theta) = \frac{\varepsilon_0 k}{5R}\left[56P_3(\cos\theta) - 9P_1(\cos\theta)\right].$$

---

2) Uma esfera de raio R, centrada na origem, carrega uma densidade de carga dada por:

$$\rho(r,\theta) = k\frac{R}{r^2}(R-2r)\sin\theta,$$

onde k é uma constante.

a) Mostre que o termo de monopolo da expansão de multipolos para o potencial elétrico desta distribuição é zero.

b) Mostre que o termo de dipolo também é zero.

c) Mostre que o termo de quadrupolo é:

$$V_q(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\frac{k\pi^2 R^5}{48}.$$

Fórmulas para consulta

$$\int \sin^2\theta\cos\theta d\theta = \frac{1}{3}\sin^3\theta, \qquad \int_0^\pi (3\cos^2\theta - 1)\sin^2\theta d\theta = -\frac{\pi}{8}$$

$$\int_0^\pi P_n(\cos\theta)P_m(\cos\theta)\sin\theta d\theta = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq m \\ \dfrac{2}{2n+1} & \text{se } n = m \end{cases}$$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{r^{n+1}}\int (r')^n P_n(\cos\theta)\rho(\vec{r}')d\tau'$$

O inconveniente das pessoas é a esperança de encontrar soluções fáceis. Sem dificuldade não há desafios. Sem desafios não há mérito, a vida é uma rotina. É na crise que aparece o melhor de cada um. Falar de crise é promovê-la, calar-se é exaltar o conformismo. Em vez disso, trabalhemos duro. A única crise ameaçadora é a tragédia de não querer superá-la.

Albert Einstein.