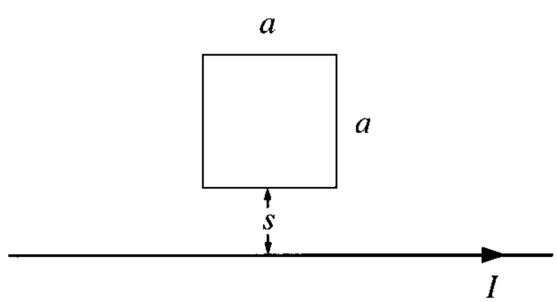
Jataí, 10/12/14. Universidade Federal de Goiás - Regional Jataí.

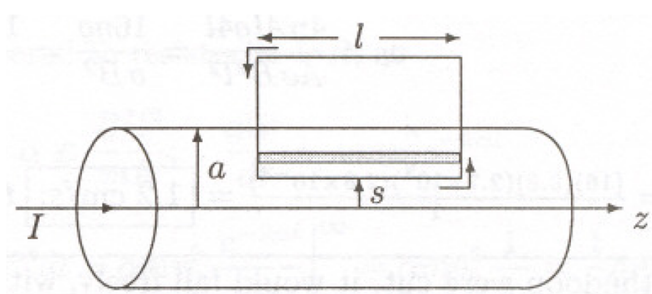
Prova 4. Curso: Física. Eletromagnetismo. Prof. Paulo Freitas Gomes.

Nome Completo: ____ Matrícula:_____________

1) Uma espira quadrada de lado a repousa sobre uma mesa, a uma distância s de um fio reto muito longo, que carrega uma corrente I no sentido $+z$ como mostrado na figura 1(a). a) Encontre o fluxo de $\vec{B}$ através da espira. b) Se alguém puxar a espira para longe do fio (aumentando s), com uma velocidade v, qual a tensão induzida na espira? Qual o sentido da corrente induzida? c) Qual a tensão induzida na espira se ela se move paralelamente ao fio (mantendo s constante)?



a)



b)

Figura 1: *(a) Circuito referente ao problema 1. (b) Geometria referente ao problema 2.*

2) Uma corrente alternada $I(t) = I_0 \cos \omega t$ flui ao longo de um longo fio retilíneo e volta ao longo de uma casca cilíndrica coaxial de raio a. a) Haverá campo elétrico induzido $\vec{E}$? Por que? b) Qual a direção (não o sentido) desse campo elétrico: radial, longitudinal ou circumferencial? c) Calcule $\vec{E}(s,t)$ assumindo que esse campo tende a zero quando $s \to \infty$. Dica: veja figura 1(b).

3) A corrente em um longo solenóide aumenta linearmente com o tempo, de forma que o fluxo é proporcional ao tempo: $\Phi(t) = \varepsilon_0 t$. Dois voltímetros são conectados em pontos diametralmente opostos (A e B) em um circuito externo ao solenóide, com resistores (R_1 e R_2), como mostrado na figura 2. a) Haverá corrente induzida passando pelos resistores no circuito externo? Explique sua resposta. b) Calcule essa corrente induzida. Qual seu sentido? c) Calcule as leituras nos voltímetros V_1 e V_2. d) Por que o voltímetro V_1 lê a tensão no resistor R_1, e não no resistor R_2? Explique didaticamente. Dica: o voltímetro lê a tensão $\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$ entre seus terminais.

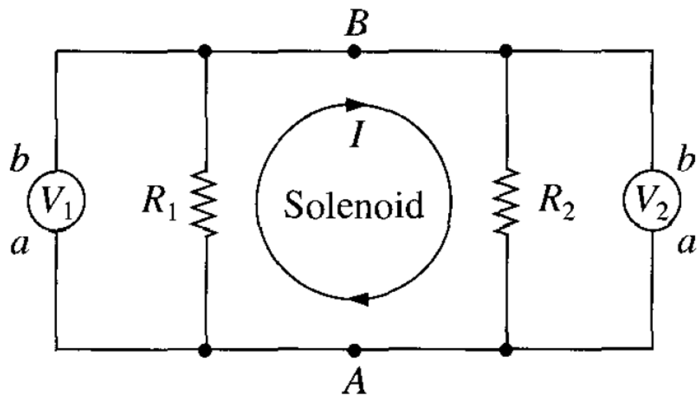


Figura 2: *Circuito referente ao problema 2.*

Fórmulas para consulta

$$\frac{d}{dx} \ln f = \frac{1}{f} \frac{df}{dx} \qquad \int_a^b \frac{dx}{x} = \ln b - \ln a$$

Gabarito

Questão 1

1a) 1 ponto. O fluxo magnético através da espira é definido como

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{a}$$

onde a superfície S de integração é exatamente a superfície englobada pela espira quadrada. O campo magnético em questão é gerado pelo fio retilíneo com corrente I no sentido $+z$, que da Lei de Ampère é calculado como:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi s}\hat{\phi} \tag{1}$$

onde s, ϕ, z são as coordenadas cilíndricas assumindo como eixo z o fio retilíneo. O plano da espira quadrada é paralelo ao fio retilíneo (eixo z), logo $d\vec{a} = dzds\hat{\phi}$. Assim, o fluxo será:

$$\Phi = \int_S \frac{\mu_0 I}{2\pi s}\hat{\phi} \cdot dzds\hat{\phi} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_0^a dz \int_s^{s+a} \frac{ds'}{s'} = \boxed{\frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln\left(\frac{s+a}{s}\right)} \tag{2}$$

1b) 1 ponto. Se a espira se afasta do fio com velocidade v significa que s aumenta nessa velocidade:

$$v = \frac{ds}{dt}$$

A tensão induzida na espira é dada pela Lei de Faraday:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln \frac{s+a}{s}\right) = -\frac{\mu_0 I a}{2\pi}\frac{d}{dt}[\ln(s+a) - \ln(s)] = -\frac{\mu_0 I a}{2\pi}\left(\frac{1}{s+a}\frac{ds}{dt} - \frac{1}{s}\frac{ds}{dt}\right) \\ &= -\frac{\mu_0 I a v}{2\pi}\left(\frac{1}{s+a} - \frac{1}{s}\right) = \boxed{-\frac{\mu_0 I v a^2}{2\pi(s+a)}} \end{aligned}$$

A medida que a espira se afasta do fio, o campo do fio na espira diminui, o que diminui o fluxo. Assim, o campo induzido irá tentar aumentar o fluxo reforçando o campo, logo o campo induzido será paralelo ao campo original: saindo da página. Logo, a corrente induzida (que gera o campo induzido) será anti-horária.

1c) 1 ponto. Quando a espira se move paralelamente ao fio, s não muda. Além disso, os outros parâmetros que definem o fluxo Φ (veja eq. 2) também não mudam. Logo, o fluxo é constante para esse movimento, não havendo portando nenhuma tensão induzida na espira:

$$\boxed{\varepsilon = 0}$$

Questão 2

2a) 1 ponto. A corrente é alternada e assim muda de sentido, fazendo o campo magnético também alternado. O campo elétrico induzido é dado pela Lei de Faraday:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt} \tag{3}$$

Como $\vec{B}$ é alternado, sua derivada temporal será diferente de zero, criando um campo elétrico induzido que também será alternado:

$$\frac{d\vec{B}}{dt} \neq 0 \qquad \Rightarrow \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E} \neq 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\vec{E} \neq 0}$$

2b) 1 ponto. Como $\vec{E}$ será alternado, seu sentido irá alternar uma vez definido sua direção. Para encontrar essa direção, utilizamos a Lei de Faraday (eq. 3) novamente. Porém, é difícil obter diretamente a direção de $\vec{E}$ a partir da direção de $\vec{B}$ usando essa lei. Assim, faço uma analogia com a Lei de Ampère:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

Nessa lei, dado $\vec{J}$ encontramos $\vec{B}$ pela regra da mão direita. Faremos o mesmo na eq. 3: dado $-\frac{d\vec{B}}{dt}$ encontraremos $\vec{E}$ pela regra da mão direita. Temos que a corrente é retilínea, logo $\vec{B}$ é circular. $-\frac{d\vec{B}}{dt}$ é paralelo a $\vec{B}$, logo $\vec{E}$ será *longitudinal* (paralelo a corrente). Novamente, o sentido será alternado.

2c) 1 ponto. Para calcular $\vec{E}$, vamos usar a forma integral da Lei de Faraday:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{a} \tag{4}$$

Como já sabemos que $\vec{E}$ é longitudinal, vou escolher uma curva C que explore essa simetria. Além disso, fora da casca cilíndrica temos que $\vec{B} = 0$ implicando em $\vec{E} = 0$. Escolho então uma curva retangular com um dos lados dentro da casca e outro fora, como indicado na figura 1(b). O elemento $d\vec{l}$ será tangente a essa curva. Fora da casca $\vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$. Nos dois lados perpendiculares ao eixo da casca temos também $\vec{E} \cdot d\vec{l} = Edl \cos \frac{\pi}{2} = 0$. Resta então apenas o lado paralelo ao eixo dentro da casca. A circulação fica:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = E \int_0^l dl' = El \tag{5}$$

O campo magnético em questão é o campo gerado por uma corrente retilínea (veja eq. 1) e o elemento de área é $d\vec{a} = dzds\hat{\phi}$. O lado direito da eq. 4 fica então:

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B} \cdot d\vec{a} &= -\frac{d}{dt}\left(\int \frac{\mu_0 I}{2\pi s}\hat{\phi} \cdot dzds\hat{\phi}\right) = -\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{dI}{dt}\int_0^l dz \int_s^a \frac{ds'}{s'} \\ &= -\frac{\mu_0 l}{2\pi}\frac{dI}{dt}\ln\left(\frac{a}{s}\right) = \frac{\mu_0 l \omega I_0}{2\pi}\sin(\omega t)\ln\left(\frac{a}{s}\right) \end{aligned} \tag{6}$$

uma vez que a variação temporal da corrente foi dada:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{d}{dt}(I_0 \cos \omega t) = -I_0 \omega \sin \omega t$$

Igualando as eqs. 5 e 6, temos:

$$\vec{E}(s,t) = \boxed{\frac{\mu_0 \omega I_0}{2\pi}\sin(\omega t)\ln\left(\frac{a}{s}\right)\hat{z}}$$

Questão 3

3a) 1 ponto. Haverá corrente induzida no circuito externo se o fluxo Φ_e criado pelo solenóide nesse circuito variar com o tempo. A partir da Lei de Faraday, a fem induzida será:

$$\varepsilon(t) = -\frac{d\Phi_e}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B} \cdot d\vec{a} = -\frac{d}{dt}(\varepsilon_0 t) = -\varepsilon_0$$

Logo, haverá corrente induzida. A área S é a área englobada pelo circuito externo, que resume-se a área do solenóide onde $\vec{B} \neq 0$.

3b) Como a corrente no solenóide aumenta com o tempo, seu campo também. Na figura 2, a corrente é no sentido horário, de forma que $\vec{B}$ estará então entrando no plano da página. Assim, dado que o fluxo também aumenta o campo induzido irá se opor à essa variação sendo então contrário ao campo original. Logo o campo induzido está saindo do plano da página, o que implica que a corrente induzida no circuito externo será anti-horária.

Para encontrar o valor da corrente I aplicamos a Lei das malhas no circuito externo (contendo os resistores R_1 e R_2) percorrento no sentido anti-horário:

$$-R_1 I - R_2 I = \Delta V = 0$$

Porém, a fem induzida é exatamente a variação do potencial no ciclo completo do circuito:

$$-\varepsilon_0 = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \Delta V$$

Igualando as últimas duas equações:

$$-R_1 I - R_2 I = -\varepsilon_0$$

Logo a corrente será:

$$\boxed{I = \frac{\varepsilon_0}{R_1 + R_2}}$$

3c) Do circuito temos que em módulo:

$$|V_1| = R_1 I \qquad \therefore \qquad |V_2| = R_2 I$$

O voltímetro sempre mede a diferença de tensão entre seus terminais. Vamos supor então que os voltímetros 1 e 2 meçam:

$$V_1 = (V_A - V_B)_{C_1} \qquad \therefore \qquad V_2 = (V_A - V_B)_{C_2}$$

ou seja, V_1 é a diferença ao longo do caminho C_1 e V_2 ao longo do caminho C_2 (veja figura 3). No caso do voltímetro 2, temos que $V_A > V_B$, já que a corrente vem de A e vai para B. Logo sua tensão será positiva:

$$\boxed{V_2 = R_2 I = \frac{R_2 \varepsilon_0}{R_1 + R_2}} \tag{7}$$

No caso do voltímetro 1, temos que $V_B > V_A$, já que a corrente vem de B e vai para A. Logo sua tensão será negativa:

$$\boxed{V_1 = R_1 I = -\frac{R_1 \varepsilon_0}{R_1 + R_2}} \tag{8}$$

Se considerássemos que os voltímetros lessem $V_B - V_A$, encontraríamos $V_1 > 0$ e $V_2 < 0$, o que fisicamente é idêntico.

3d) 1 ponto. Seja C_1 o caminho contendo o voltímetro 1 e C_1' o caminho contendo o resistor 1, como ilustrado na figura 3. Logo, o voltímetro lê a tensão V_1 enquanto que a tensão no resistor 1 é V_{R1}, definidos a seguir:

$$V_1 = \underset{C_1}{\int_A^B} \vec{E} \cdot d\vec{l} \qquad \therefore \qquad V_{R1} = \underset{C_1'}{\int_A^B} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Em ambos os casos, a variação da tensão é a integral de $\vec{E} \cdot d\vec{l}$ ao longo do trajeto contendo o dispositivo onde se quer medir a tensão. Por isso, a integral de V_1 é ao longo de C_1 enquanto que a integral do resistor 1 é ao longo de C_1'. Vemos então que a definição de ambos é diferente. Da mesma forma, as tensões no voltímetro 2 e no resistor 2 são:

$$V_2 = \underset{C_2}{\int_A^B} \vec{E} \cdot d\vec{l} \qquad \therefore \qquad V_{R2} = \underset{C_2'}{\int_A^B} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Assim, o uso das eqs. 7 e 8 implica que:

$$V_1 = V_{R1} \qquad \therefore \qquad V_2 = V_{R2} \tag{9}$$

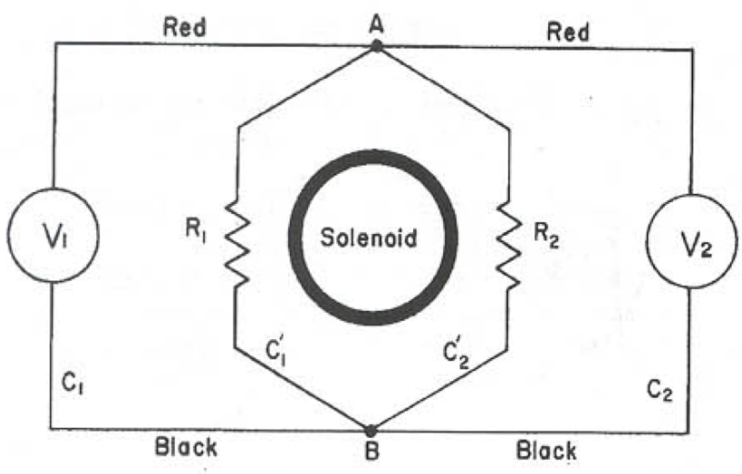


Figura 3: *Circuito referente ao problema 2.*

Primeiro vou mostrar que essas eqs. são verdadeiras. Consideremos o circuito fechado formado pelas curvas C_1 e C_1' (veja figura 3). A variação total do potencial neste circuito é:

$$\varepsilon_1 = \underset{C_1+C_1'}{\oint} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \underset{C_1}{\int_A^B} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \underset{C_1'}{\int_B^A} \vec{E} \cdot d\vec{l} = V_1 - V_{R1} \tag{10}$$

Seja S_1 a área englobada pela curva fechada $C_1 + C_1'$ com área infinetisimal $A_1 = \int_{S_1} d\vec{a}_1$ contendo um campo magnético $\vec{B}_1$. Porém, como não há campo magnético dentro desse circuito $\vec{B}_1 = 0$, a tensão induzida a pela Lei de Faraday é:

$$\varepsilon_1 = -\frac{d\Phi_1}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_{S_1} \vec{B}_1 \cdot d\vec{a}_1 = 0 \tag{11}$$

A análise para o circuito contendo o voltímetro 2 e o resistor 2 é análoga:

$$\varepsilon_2 = \oint\limits_{C_2+C_2'} \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int\limits_{\substack{A\\C_2}}^{B} \vec{E}\cdot d\vec{l} + \int\limits_{\substack{B\\C_2'}}^{A} \vec{E}\cdot d\vec{l} = V_2 - V_{R2} \tag{12}$$

Aplicando a Lei de Faraday:

$$\varepsilon_2 = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_{S_2} \vec{B}_2 \cdot d\vec{a}_2 = 0 \tag{13}$$

já que também não há campo nesse circuito $\vec{B}_2 = 0$. Assim, das eqs. 10, 11, 12 e 13 recuperamos as eqs. 9.

Agora, resta apenas mostrar que

$$V_1 \neq V_{R2} \qquad \therefore \qquad V_2 \neq V_{R1} \tag{14}$$

Consideremos o circuito formado pelas curvas C_1 e C_2' (contendo o voltímetro 1 e o resistor 2). A variação total da tensão será:

$$\varepsilon_{12} = \oint\limits_{C_1+C_2'} \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int\limits_{\substack{A\\C_1}}^{B} \vec{E}\cdot d\vec{l} + \int\limits_{\substack{B\\C_2'}}^{A} \vec{E}\cdot d\vec{l} = V_1 - V_{R2}$$

Porém, agora há campo dentro desse circuito, exatamente o campo gerado pelo solenóide. Logo, da Lei de Faraday:

$$\varepsilon_{12} = -\frac{d\Phi_{12}}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_{S_{12}} \vec{B}_{12} \cdot d\vec{a}_{12} = -\varepsilon_0$$

Igualando as últimas duas equações:

$$\boxed{V_1 = V_{R2} - \varepsilon_0}$$

Uma análise inteiramente análoga mostra que:

$$\boxed{V_2 = V_{R1} - \varepsilon_0}$$

As duas últimas eqs. mostram então que a eq. 14 é verdadeira, como queríamos demonstrar.