Prova 3

Prof. Paulo Freitas Gomes, Física 1

6 de fevereiro de 2018

Problema 1. Centro de massa
Uma mulher de 45 kg fica em pé em uma canoa de 60 kg e 5 m de comprimento (veja figura 1(a)). Ela anda de um ponto a 1 metro de distância da extremidade até outro ponto a 1 metro da outra extremidade. Ignore a resistência da água na canoa. a) Qual o deslocamento da canoa durante o caminhar da moça? b) Qual a distância que a mulher percorreu em relação a água? c) Quem (ou o que) exerceu a força na canoa que a fez se mover?

Problema 2. Colisão Inelástica
Duas massas idênticas são liberadas do repouso em uma superfície hemisférica de raio R (veja figura 1(b)). Despreze o atrito entre as massas e a superfície. a) Supondo uma colisão totalmente inelástica, qual a altura que as massas alcançam? b) E se a colisão for elástica, o que acontece?

Problema 3. Colisão em duas dimensões
Em uma transportadora de carga, um carrinho aberto com massa de 50 kg roda da direita para a esquerda com velocidade escalar de 5 m/s (veja figura 1(c)). Despreze o atrito entre o carrinho e o piso. Um pacote de 15 kg desliza de cima para baixo por uma calha que está inclinada de 37 graus do plano horizontal e deixa o final da calha com velocidade de 3 m/s. O pacote cai dentro do carrinho e eles rodam juntos. Considerando que o final da calha está a uma altura de 4 m acima do fundo do carrinho, quais são a) a velocidade escalar do pacote pouco antes de cair dentro do carrinho e b) a velocidade escalar final do carrinho?

Problema 4. Colisão elástica com mola
Um bloco de massa $m_1 = 1.6$ kg se move para a direita com uma velocidade de 4 m/s em uma superfície horizontal sem atrito. Ele colide com uma mola leve presa em um segundo bloco de massa $m_2 = 2.1$ kg inicialmente se movendo para a esquerda com velocidade de 2.5 m/s (veja figura 1(d)). A constante de mola é 600 N/m. a) Calcule a velocidade dos dois blocos após a colisão. b) Quando os blocos começam a comprimir a mola, eles perdem velocidade. Calcule a velocidade do bloco 2 durante a colisão no instante que o bloco 1 está se movendo para a direita com velocidade 3 m/s, como na figura 1(e). c) Calcule a compressão da mola nesse instante. d) Suponha que a mola seja real (tendo uma certa massa). Explique se energia total é conservada ou não.

Problema 5. Salto em altura
Na Olimpíada de 1968 o saltador Dick Fosbury introduziu uma nova técnica de salto em altura, a qual permitiu que o recorde mundial subisse cerca de 30 cm. Javier Sotomayor é o atual detentor do recorde mundial: 2.45 metros, marca obtida em 1993! Nesta técnica, o saltador passa sobre a barra com o rosto

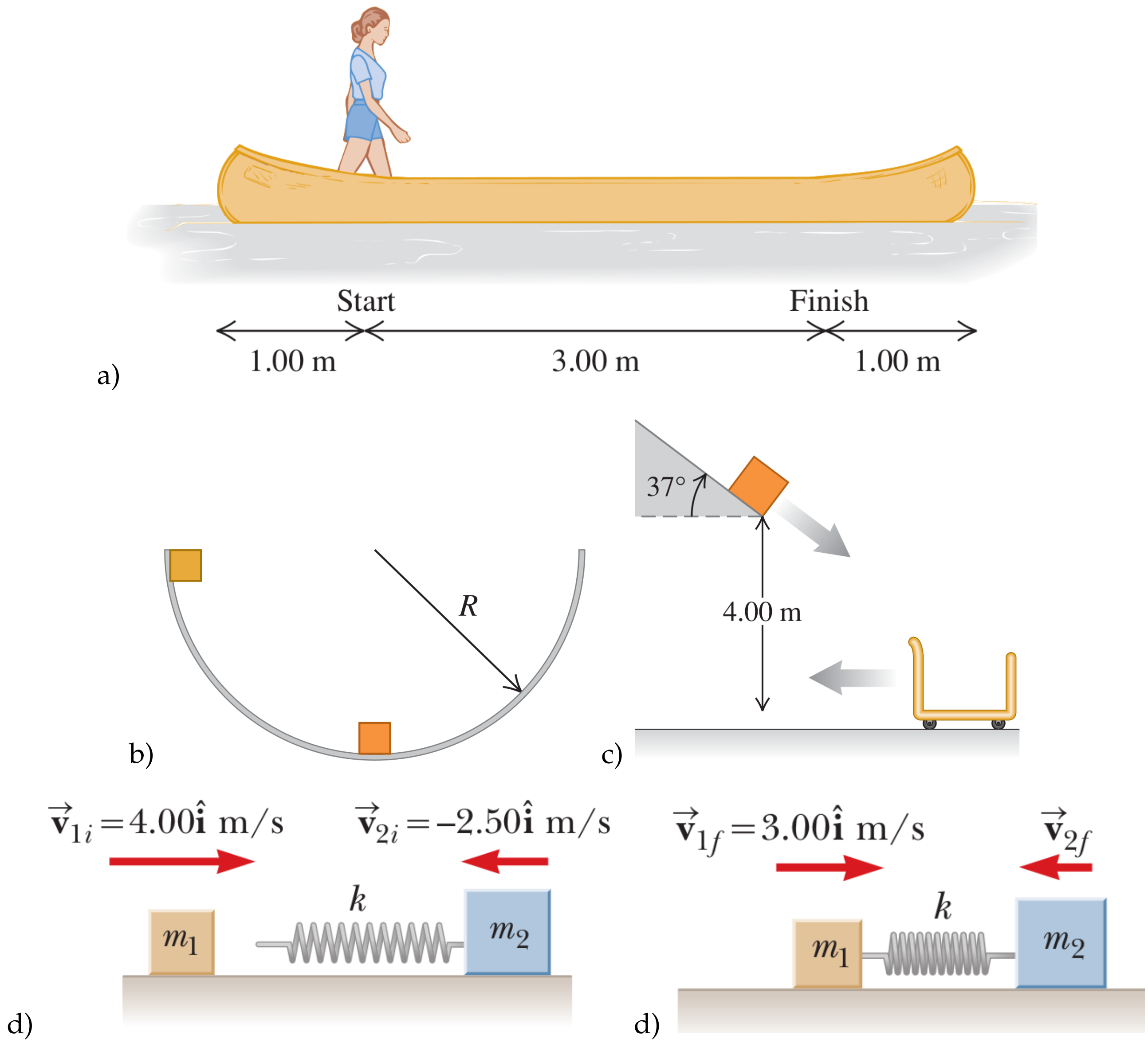

Figura 1: *(a) Problema 1. (b) Problema 2. (c) Problema 3. (d) Problema 4. (e) Problema 4.*

virado para cima enquanto arqueia suas costas (veja figura[1] 2(a)). a) Considere o saltador como sendo uma barra uniforme e fina de comprimento L e curvada sob um ângulo de $\theta = 90$ graus (veja figura 2(b)). Onde está o centro de massa da barra? Faça um desenho cuidadoso e indique a posição com boa aproximação. b) Por que esta técnica permite uma altura maior? c) Qual a relação da técnica de Fosbury com o famoso movimento de ballet chamado *Grand Jeté*?.

Inspiração: *Você não pode ligar os pontos olhando pra frente, você só pode conectá-los olhando para o passado. Então, você tem que confiar que os pontos vão se ligar no seu futuro de alguma forma. Você tem que confiar em algo - seu instinto, destino, vida, carma, o que quer que seja. Porque acreditar que os pontos vão se ligar lá na frente vai lhe dar a confiança para seguir seu coração, mesmo quando ele lhe guiar para fora do caminho seguro e confortável. E isto fará toda a diferença.*

Steve Jobs

[1] http://www.athleticsweekly.com/iaaf-world-championships/world-championships-womens-high-jump-30993.

a) b)

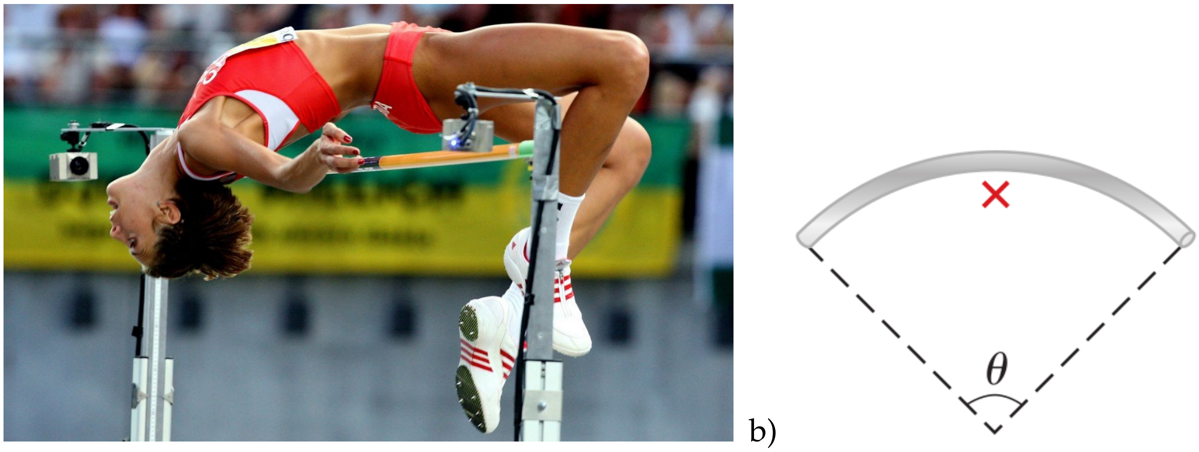

Figura 2: *Figuras referente ao problema 5. (a) Momento em que uma saltador passa sobre a barra. (b) Barra uniforme curva fazendo um ângulo de 90 graus.*

Gabarito

Problema 1. a) Não há força externa então o centro de massa do sistema canoa + mulher deve permanecer em repouso. Quando a mulher caminha sobre a canoa, sua posição muda. Para que o centro de massa do sistema continue na mesma posição a canoa deve se mover em sentido contrário. Seja a mulher o corpo A e a canoa o corpo B. Logo $m_A = 45$ kg e $m_B = 60$ kg e o comprimento da canoa é $L = 5$ m. Vamos considerar a canoa como tendo toda sua massa localizada em seu centro de massa, que fica em seu centro geométrico. Seja o eixo x apontando para a direita com a origem na extremidade esquerda da canoa. As posições iniciais da mulher e da canoa são: $x_{a1} = 1$ m e $x_{b1} = L/2 = 2.5$ m. A posição do centro de massa antes é:

$$x_1 = \frac{m_A x_{a1} + m_B x_{b1}}{m_A + m_B}.$$

Depois que a mulher anda as novas posições são: $x_{a2} = x_{b2} + d$ com $d = 1.5$ m (já que agora ela está a 1 m da extremidade direita da canoa) onde x_{b2} é a nova posição do centro de massa da canoa. O centro de massa do sistema agora é:

$$x_2 = \frac{m_A x_{a2} + m_B x_{b2}}{m_A + m_B}.$$

Fazendo $x_1 = x_2$ temos:

$$m_A x_{a1} + m_B x_{b1} = m_A x_{a2} + m_B x_{b2}.$$

A única variável desconhecida é x_{b2}:

$$x_{b2} = \frac{m_A x_{a1} + m_B x_{b1} - m_A d}{m_A + m_B} = 1.21 \quad \text{m}.$$

O deslocamento da canoa é então $x_{b2} - x_{b1} = 1.21 - 2.5 = -1.29$ m.

b) A mulher caminha 3 metros para a direita em relação a canoa que se desloca 1.29 metros para a esquerda. Logo a mulher caminha $3 - 1.29 = 1.71$ m em relação a água para a direita.

c) A canoa se move devido a força de contato com os pés da mulher: a mulher empurra a canoa para trás enquanto a canoa empurra de volta a mulher para frente. Como essas forças são internas, não há deslocamento efetivo (da mesma forma que não há quando andamos de carro).

Problema 2. a) Quando as duas massas após a colisão sobem a rampa elas ganham energia potencial gravitacional que deve ser igual a energia cinética imediatamente após a colisão: $2mgy = \frac{1}{2}2mv_d^2$ onde m é a massa de cada partícula, y é a altura desejada e v_d é a velocidade das massas após a colisão. Para achar v_d aplicamos a conservação de momento antes e depois da colisão: $mv_a = 2mv_d$, o que implica em $v_d = v_a/2$. Para achar v_a devemos lembrar que a energia cinética que a massa adquiriu vem da energia potencial gravitacional: $mgR = \frac{1}{2}mv_a$, logo $v_a = \sqrt{2gR}$. Substituindo tudo de volta temos:

$$y = \frac{v_d^2}{2g} = \frac{v_a^2}{8g} = \frac{2gR}{8g} = \frac{R}{4}.$$

b) Se a colisão for elástica teremos o chamado pêndulo de Newton. Após a colisão o bloco da esquerda fica parado e o da direita se desloca com a mesma velocidade, subindo até uma altura idêntica a altura inicial do bloco da esquerda. Depois ele retorna e colide com o bloco da esquerda que sobe e desce, colide com o da direita que sobe e desce... e assim sucessivamente. O pêndulo de Newton consiste do mesmo fenômeno, porém com mais de uma massa e sendo todas elas suspensas.

Problema 3. a) Vamos usar a conservação da energia mecânica total: $K_1 + U_1 = K_2 + U_2$. Instante antes: momento em que o pacote deixa a calha com $v_1 = 3$ m/s e $h = 4$ m. Instante depois: momento imediatamente antes do pacote atingir o carrinho. Vamos assumir o referencial de altura no carrinho de forma que $U_2 = 0$. Logo:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + mgh = \frac{1}{2}mv_2^2.$$

A quantidade desejada é v_2:

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 + 2gh} = \sqrt{3^2 + 2 \cdot 9.8 \cdot 4} = 9.35 \quad \text{m/s}.$$

b) Quando o pacote atinge o carrinho o momento é conservado apenas na horizontal (pois na vertical há uma força normal do chão no carrinho). Seja a direção $+x$ para a direita, o pacote designado por A e o carrinho por B. Como a colisão é totalmente inelástica, a conservação do momento nos dá:

$$m_a v_{a1} + m_b v_{b1} = (m_a + m_b) v_f,$$

onde $v_{b1} = -5$ m/s e $v_{a1} = v_1 \cos\theta$ é a velocidade horizontal do pacote (constante durante a queda). O ângulo que o vetor velocidade faz com a horizontal é $\theta = 37$ graus. A quantidade desejada é v_f:

$$v_f = \frac{m_a v_{a1} + m_b v_{b1}}{m_a + m_b} = \frac{15 \cdot 3 \cdot \cos(37) - 50 \cdot 5}{15 + 50} = -3.29 \quad \text{m/s}.$$

Problema 4. a) As velocidades iniciais são: $v_{1i} = 4$ m/s e $v_{2i} = -2{,}5$ m/s. Como não há forças externas o momento é conservado:

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}. \tag{1}$$

Como a colisão é elástica a energia cinética também é conservada:

$$\frac{1}{2}m_1v_{1i}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2i}^2 = \frac{1}{2}m_1v_{1f}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2f}^2.$$

Temos então duas equações e duas incógnitas: v_{1f} e v_{2f}, de modo que é possível resolver o problema. Porém, é trabalhoso. Uma forma mais simples é usar a conservação da velocidade relativa:

$$v_{1i} - v_{2i} = -(v_{1f} - v_{2f}). \tag{2}$$

no lugar da conservação de energia cinética. Multiplicando a Eq. 2 por m_1 e somando com a Eq. 1 temos:

$$2m_1v_{1i} + (m_2 - m_1)v_{2i} = (m_1 + m_2)v_{2f}.$$

Logo:

$$v_{2f} = \frac{2m_1v_{1i} + (m_2 - m_1)v_{2i}}{m_1 + m_2} = 3,12 \quad \text{m/s}.$$

Agora voltamos na conservação da velocidade relativa (Eq. 2) para achar v_{1f}:

$$v_{1f} = v_{2f} - v_{1i} + v_{2i} = 3,12 - 4,0 + (-2,5) = -3,38 \quad \text{m/s}.$$

b) Para achar v_{2f} aplicamos novamente a conservação do momento mas agora considerando $v_{1f} = 3$ m/s. Isolando temos v_{2f} da Eq. 1, temos:

$$v_{2f} = \frac{m_1v_{1i} + m_2v_{2i} - m_1v_{1f}}{m_2} = -1,74 \quad \text{m/s}.$$

O sinal negativo indica que o bloco 2 ainda está se movendo para a esquerda. O fato da mola estar comprimida não influi na conservação do momento, já que estamos assumindo uma mola sem massa (leve, como dita no enunciado).

c) Vamos usar a conservação da energia cinética. Escolhemos como momento antes a situação inicial antes da colisão, com energia total:

$$E_i = \frac{1}{2}m_1v_{1i}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2i}^2.$$

Já no instante em questão (o mesmo do item b) a mola guarda energia potencial elástica. A energia total nesse instante é:

$$E_f = \frac{1}{2}m_1v_{1f}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2f}^2 + \frac{1}{2}kx^2,$$

onde v_{1f} e v_{2f} são os mesmos do item b). Fazendo $E_i = E_f$ e isolando x temos:

$$x = \sqrt{\frac{1}{k}\left[m_1(v_{1i}^2 - v_{1f}^2) + m_2(v_{2i}^2 - v_{2f}^2)\right]} = 0,173 \quad \text{m}.$$

d) Sendo a mola real a energia mecânica total não será conservada pois parte dela irá se transformar em calor quando a mola for comprimida. Além disso a conservação do momento usada no item b) deve incluir o termo de momento da mola (que é bem trabalhoso de calcular!!).

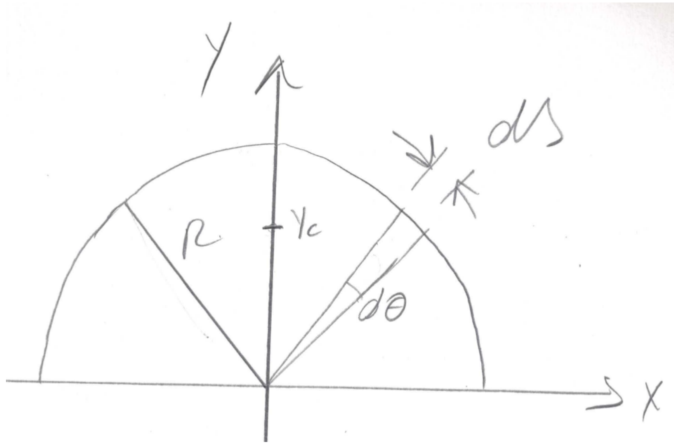

Figura 3: *Figura referente a solução do item 5a).*

Problema 5. a) A definição das coordenadas do centro de massa são:

$$x_c = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i}, \qquad y_c = \frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i}.$$

Considere a geometria no plano xy como mostrado na figura 3. Pela simetria temos que $x_c = 0$ já que há uma quantidade igual de massa em ambos os lados do eixo y. Para calcular y_c transformamos o somatório em uma integral já que a barra é uma distribuição contínua de massa:

$$y_c = \frac{1}{M}\int y dm,$$

onde $M = \sum_i m_i$ é a massa da barra e dm é o elemento infinitesimal de massa. A densidade linear de massa é $\lambda = M/L$ onde $L = \pi R$ é o seu comprimento e R o raio. Supondo uma distribuição uniforme de massa podemos escrever $\lambda = dm/ds$ onde ds é o elemento de comprimento. Porém da definição de radiano e olhando a figura 3 temos que $ds = Rd\theta$. Além disso temos também que $y = R\sin\theta$. Usando tudo isso:

$$\begin{aligned} y_c &= \frac{R^2\lambda}{M}\int_0^{\pi} \sin\theta d\theta = -\frac{R^2\lambda}{M}\cos\theta\Big|_0^{\pi} = 2\frac{R^2\lambda}{M} = \frac{R^2\lambda}{\pi R\lambda} \\ &= \frac{2}{\pi}R \sim 0.64R. \end{aligned}$$

A integral é de 0 a π pois engloba a metade do círculo. A posição y_c está indicada na figura 3.

b) Esta técnica faz com que o centro de massa do corpo fique abaixo do mesmo. O impulso que o atleta faz para saltar é proporcional a altura do centro de massa. Assim ele consegue uma altura maior com o mesmo esforço já que seu corpo fica acima do centro de massa.

c) O mesmo princípio é aplicado pelas Bailarinas no movimento Grand Jeté. A diferença é que agora as bailarinas moldam o corpo para que o mesmo fique abaixo do centro de massa. O objetivo é que o corpo se propague em uma linha reta. Como o centro de massa faz uma trajetória parabólica (lançamento oblíquo) a bailarina se movimenta para que o corpo não siga essa trajetória.