Gabarito

Prova 2, 03/10/2014, Prof. Paulo Freitas Gomes

Eletromagnetismo. Curso: Física

1a) Solução: Dados: esfera de raio R e potencial na sua superfície $V_0(\theta) = k\cos 3\theta$. Pede-se o potencial em todo o espaço $V(r,\theta)$. O potencial é obtido através da eq. de Laplace, cuja solução geral (considerando separação de variáveis) é:

$$V(r,\theta) = \begin{cases} V_d(r,\theta) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos\theta), & \text{se } r \leq R \\ \\ V_f(r,\theta) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{B_n}{r^{n+1}} P_n(\cos\theta), & \text{se } r \geq R \end{cases} \tag{1}$$

Os termos $P_n(\cos\theta)$ são os conhecidos polinômios de Legendre. A forma dentro e fora da esfera é resultado das condições de contorno, na qual o potencial tem que ir a zero tanto para r pequeno quanto para r no infinito. Resta então encontrar os coeficientes A_n e B_n. Para isso, precisamos impor as condições de continuidade no potencial ao longo da superfície da esfera em $r = R$. Isso por que o potencial é contínuo ao longo de uma superfície mesmo quando há densidade de carga (Lei de Gauss). Assim, impondo continuidade no intervalo $0 \leq r \leq R$ na eq. 1, implica que V_d deve ser contínuo desde $r = 0$ até $r = R$, onde o potencial é dado. Logo:

$$V_d(R,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n R^n P_n(\cos\theta) = V_0(\theta) \tag{2}$$

Multiplicando os dois lados desta equação por $P_m(\cos\theta)\sin\theta$ e integrando em $d\theta$, teremos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\pi} A_n R^n P_n(\cos\theta) P_m(\cos\theta)\sin\theta d\theta = \int_0^{\pi} V_0(\theta) P_m(\cos\theta)\sin\theta d\theta$$

A integral é resolvida considerando que os polinômios de Legendre formam um conjunto ortogonal:

$$\int_0^{\pi} P_n(\cos\theta) P_m(\cos\theta)\sin\theta d\theta = \begin{cases} 0, & \text{se } n \neq m \\ \\ \dfrac{2}{2n+1}, & \text{se } n = m \end{cases} \tag{3}$$

Assim, a integral é zero para todos os termos no qual $m \neq n$, ficando apenas o termo $n = m$. Isolando A_m da eq. resultante temos:

$$A_m = A_n = \frac{2n+1}{2R^n} \int_0^{\pi} V_0(\theta) P_n(\cos\theta)\sin\theta d\theta \tag{4}$$

Esse é o procedimento normal de obtenção dos coeficientes em uma série.

Para encontrar B_n, podemos usar o mesmo procedimento: impor a continuidade no intervalo $r \geq R$

$$V_f(R,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{R^{n+1}} P_n(\cos\theta) = V_0(\theta) \tag{5}$$

resultando em uma integral. Porém, há um meio mais simples, também impondo a continuidade. Das eqs. 2 e 5, temos:

$$V_d(R,\theta) = V_f(R,\theta)$$

Abrindo as expressões de V_d e V_f, obtemos uma igualdade de séries de P_n.

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n R^n P_n(\cos\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{R^{n+1}} P_n(\cos\theta)$$

Assim, a igualdade apenas será verdade se os respectivos termos de cada P_n forem iguais:

$$A_n R^n = \frac{B_n}{R^{n+1}} \qquad \Longrightarrow \qquad B_n = A_n R^{2n+1} \tag{6}$$

Uma vez escrito os coeficientes em função de V_0, vamos encontrá-los. Para facilitar o cálculo de A_n, vamos escrever V_0 em função de P_n:

$$V_0(\theta) = k\cos 3\theta = \frac{k}{5}\left[8P_3(\cos\theta) - 3P_1(\cos\theta)\right]$$

Analisando a ortogonalidade de P_n (eq. 3), vemos que apenas os coeficientes A_1 e A_3 vão ser diferentes de zero. De fato, calculando:

$$\begin{aligned}
A_0 &= \frac{k}{5}\int_0^{\pi}\left[8P_3(\cos\theta) - 3P_1(\cos\theta)\right]P_0(\cos\theta)\sin\theta d\theta = 0 \\
A_1 &= \frac{3}{2R}\frac{k}{5}\int_0^{\pi}\left[8P_3(\cos\theta) - 3P_1(\cos\theta)\right]P_1(\cos\theta)\sin\theta d\theta = -\frac{9k}{10}\int_0^{\pi} P_1P_1\sin\theta d\theta = -\frac{3k}{5R} \\
A_2 &= \frac{5}{2R^2}\frac{k}{5}\int_0^{\pi}\left[8P_3(\cos\theta) - 3P_1(\cos\theta)\right]P_2(\cos\theta)\sin\theta d\theta = 0 \\
A_3 &= \frac{7}{2R^3}\frac{k}{5}\int_0^{\pi}\left[8P_3(\cos\theta) - 3P_1(\cos\theta)\right]P_3(\cos\theta)\sin\theta d\theta = 8\frac{7k}{10R^3}\int_0^{\pi} P_3P_3\sin\theta d\theta = \frac{8k}{5R^3} \\
A_4 &= A_5 = A_6 = ... = 0
\end{aligned}$$

Agora podemos encontrar B_n a partir da eq. 6:

$$B_1 = A_1R^3 = -\frac{3}{5}kR^2 \qquad \therefore \qquad B_3 = A_3R^7 = \frac{8}{5}kR^4 \qquad \therefore \qquad A_0 = A_2 = A_4 = A_5 = ... = 0$$

Assim, a solução fica então:

$$V(r,\theta) = \begin{cases} A_1 r P_1(\cos\theta) + A_3 r^3 P_3(\cos\theta) = \boxed{-\frac{3k}{5R} r P_1(\cos\theta) + \frac{8k}{5R^3} r^3 P_3(\cos\theta)}, & \text{se } r \leq R \\ \\ \frac{B_1}{r^2}P_1(\cos\theta) + \frac{B_3}{r^4}P_3(\cos\theta) = \boxed{-\frac{3kR^2}{5r^2}P_1(\cos\theta) + \frac{8kR^4}{5r^4}P_3(\cos\theta)}, & \text{se } r \geq R \end{cases}$$

Para o potencial dado, apenas 2 termos na expansão foram necessários.

1b) Solução: Para calcular a densidade de carga, devemos usar mais uma condição de continuidade do potencial. Ainda da Lei de Gauss, a derivada na direção normal a superfície do potencial é descontínua em uma superfície com carga:

$$\left(\frac{\partial V_d}{\partial r} - \frac{\partial V_f}{\partial r}\right)\Bigg|_{r=R} = -\frac{\sigma(\theta)}{\varepsilon_0}$$

Repare que a derivada normal do potencial é exatamente negativo do campo elétrico. No caso, r é a coordenada normal a superfície da esfera. Substituindo a solução geral (eq. 1) nesta eq. e já usando os coeficientes encontrado, teremos:

$$\begin{aligned} \sigma(\theta) &= \varepsilon_0 \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) A_n R^{n-1} P_n(\cos\theta) = \varepsilon_0 \left[(2+1)A_1 R^0 P_1(\cos\theta) + 7A_n R^2 P_3(\cos\theta)\right] \\ &= \boxed{\frac{\varepsilon_0 k}{5R}\left[56 P_3(\cos\theta) - 9P_1(\cos\theta)\right]} \end{aligned} \tag{7}$$

---

2) Solução: A primeira vista parece um problema simples de movimento uniformemente variado. O detalhe que impede isso é que a força não é constante, pois depende da posição. Dessa forma não podemos usar as equações do MUV. Precisamos então encontrar a solução do problema $z(t)$, que é a posição em função do tempo. Para isso devemos usar a Lei de Newton. Consideremos a carga na posição $(0, 0, d)$ no eixo z, e o plano em questão sendo o plano xy. Dessa forma a força que a carga sente (dada na prova) é:

$$\vec{F} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{(2z)^2}\hat{z}$$

Queremos o tempo necessário para a partícula se deslocar de uma posição inicial $(0, 0, d) = d\hat{z}$ até uma posição final $(0, 0, 0)$. A única força atuante na partícula é a força elétrica. Escrevendo a Lei de Newton em módulo teremos:

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{(2z)^2} \qquad \therefore \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{A}{z^2} \tag{8}$$

onde $A = \dfrac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 m}$. Queremos encontrar $z(t)$ a partir desta equação diferencial. Porém a eq. 8 não está escrita em uma forma na qual podemos integrar duas vezes e encontrar $z(t)$, pois a força também depende de z. Precisamos então de artifícios matemáticos para reescrever esta equação em uma forma mais direta, na qual possamos integrar. Temos então que mudar a variável de integração. Uma tática é multiplicar a eq. 8 pela velocidade da partícula $v = \dfrac{dz}{dt}$:

$$\frac{dz}{dt}\frac{dv}{dt} = -\frac{A}{z^2}\frac{dz}{dt}$$

O lado esquerdo e o lado direito desta equação são respectivamente:

$$\frac{dz}{dt}\frac{dv}{dt} = v\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{2}\right) \qquad \therefore \qquad -\frac{A}{z^2}\frac{dz}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{A}{z}\right)$$

Logo, ambos os termos são na verdade a derivada temporal de algo:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{2}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{A}{z}\right)$$

Se uma função monotônica avaliada em dois pontos retorna valores iguais, é por que os dois pontos são na verdade iguais:

$$f(a) = f(b) \qquad \Longrightarrow \qquad a = b$$

O mesmo vale para a derivada, que também é uma função: quando a derivada de uma coisa é igual a derivada de outra coisa, as duas coisas são iguais, somada uma constante C. Logo:

$$\frac{v^2}{2} = \frac{A}{z} + C$$

já que a derivada de qualquer constante é zero. Além disso, essa constante é importante para satisfazer a condição inicial. No instante inicial $t = 0$, temos $v = 0$ e $z = d$. Usando isto na eq. anterior teremos $C = -\frac{A}{d}$. Usando esse valor de C na eq. 9 teremos:

$$v^2 = 2A\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{d}\right) = \frac{2A}{d}\frac{d-z}{z}$$

Agora isolamos $v = dz/dt$ para enfim podermos escrever a equação anterior

$$v = \frac{dz}{dt} = -\sqrt{\frac{2A}{d}\frac{(d-z)}{z}}$$

O sinal negativo é permitido, já que $(\pm\sqrt{b})^2 = b$ para qualquer b. Porém, aqui a solução negativa é escolhida pois z diminui com o tempo, saindo de d até zero. Agora sim a eq. anterior é direta o suficiente permitindo sua integral. Rearranjando os termos e montando a integral:

$$\int_d^0 \sqrt{\frac{z}{d-z}}dz = -\sqrt{\frac{2A}{d}}\int_0^t dt$$

A integral em t é direta enquanto que integral em z é resolvida usando a fórmula dada na prova. Logo $-d\frac{\pi}{2} = -\sqrt{\frac{2A}{d}}t$. Rearranjando:

$$t = d\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{d}{2A}} = d\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{d}{2}\frac{16\pi\varepsilon_0 m}{q^2}} = \frac{d\pi}{q}\sqrt{2\pi d\varepsilon_0 m} = \boxed{\sqrt{\frac{2\pi^3 d^3\varepsilon_0 m}{q^2}}}$$