Jataí, 08/04/16. Universidade Federal de Goiás, ICET, Jataí.

Prova 5, Física 3, Física. Prof. Paulo Freitas Gomes.

Nome Completo: ____ Matrícula:______________

Raciocínio, e não resultados. Para saber física é necessário decorar inúmeras fórmulas? Não. O importante é saber como as leis (expressas nas fórmulas) funcionam. Não é preciso decorar resultados, mas sim saber o que eles significam e como chegar neles. Nesta prova o importante é você estudante mostrar que consegue raciocinar como um físico, partindo de uma lei física e chegando em um resultado, usando sua base matemática e sua intuição física. Não importa se você errar um sinal ou esquecer uma constante, o importante aqui é você mostrar que consegue pensar como um físico.

Números Complexos. O número complexo é definido como $j = \sqrt{-1}$[1]. Veja na figura 1(a) a divisão dos números conhecidos pelo homem. Representamos um número complexo qualquer da forma: $z = x + jy$ onde x e y são reais. A parte real de z é definida como $x = \Re[z]$ e a parte imaginária por $y = \Im[z]$. Além disso, função $\Re[z]$ é uma função linear, de forma que:

$$\Re\left[\frac{dz_1}{dt}\right] = \frac{d}{dt}\Re[z_1] \qquad \therefore \qquad \Re[z_1 + z_2] = \Re[z_1] + \Re[z_2]$$

para quaisquer duas funções complexas z_1 e z_2.

Uma definição importante é o módulo e a fase de um número complexo. Representando a parte real no eixo x e a parte imaginária no eixo y (veja figura 1(b)), podemos definir um módulo $|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$ e uma fase cuja tangente é $\tan\varphi = \dfrac{y}{x}$ para qualquer número complexo $z = x + iy$.

Outro resultado importante é a fórmula de Euler: $e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\sin\varphi$. O que significa pegarmos um número irracional e elevarmos a uma potência complexa? Não sabemos. Melhor ainda: não importa! O importante é que essas relações formam uma teoria matemática sólida, coerente e poderosa o suficiente para facilitar a solução de problemas em vários campos da física, como por exemplo, circuitos elétricos. Usando essa Fórmula de Euler podemos representar qualquer número complexo da forma $z = re^{i\varphi}$.

Circuito RLC alternado. Considere o circuito RLC alternado da figura 1(c) onde a fonte alternada gera uma tensão da forma $v(t) = V_0 \cos\omega t$.

a) Aplique a Lei das Malhas e encontre a equação diferencial que governa o comportamento da corrente elétrica em função do tempo. Além disso, mostre que $v(t) = \Re\left[V_0 e^{j\omega t}\right]$.

b) Suponha que $i(t) = \Re[\alpha(t)]$ para alguma função complexa $\alpha(t)$. Substitua essa suposição na Eq. diferencial obtida acima e encontre uma equação diferencial complexa para $\alpha(t)$. Lembre-se que a função $\Re[\alpha]$ é uma função linear. Qual o ganho de ter uma equação diferencial agora em $\alpha(t)$ ao invés de $i(t)$?

c) Agora você tem de resolver essa equação diferencial complexa. Suponha por exemplo $\alpha(t) = I_0 e^{j\omega t}$, onde I_0 é um número complexo. Encontre as expressões para a derivada $d\alpha/dt$ e sua integral $\int \alpha dt$.

[1] Em matemática, quando não sabemos o que algo significa, damos um nome para esse algo.

d) Substitua tudo agora na equação complexa usando as reatâncias indutiva $X_L = \omega L$ e capacitiva $X_C = 1/(\omega C)$ e obtenha uma expressão para I_0. Lembre-se que $j = -1/j$ (você consegue provar isso?).

e) Usando o resultado do item anterior, defina a impedância complexa $Z_c = Me^{i\theta}$ de forma que a relação envolvendo V_0, I_0 e Z_c siga a Lei de Ohm. Encontre o módulo M e a fase θ em função de X_L, R, X_C e ω).

f) Encontre agora a solução real para a corrente $i(t)$. Qual sua amplitude?

g) A corrente $i(t)$ está defasada em relação a tensão $v(t)$? Calcule essa defasagem?

h) O que significa a corrente estar defasada em relação a tensão?

i) Mostre que $e^{2\pi i} = 1$.

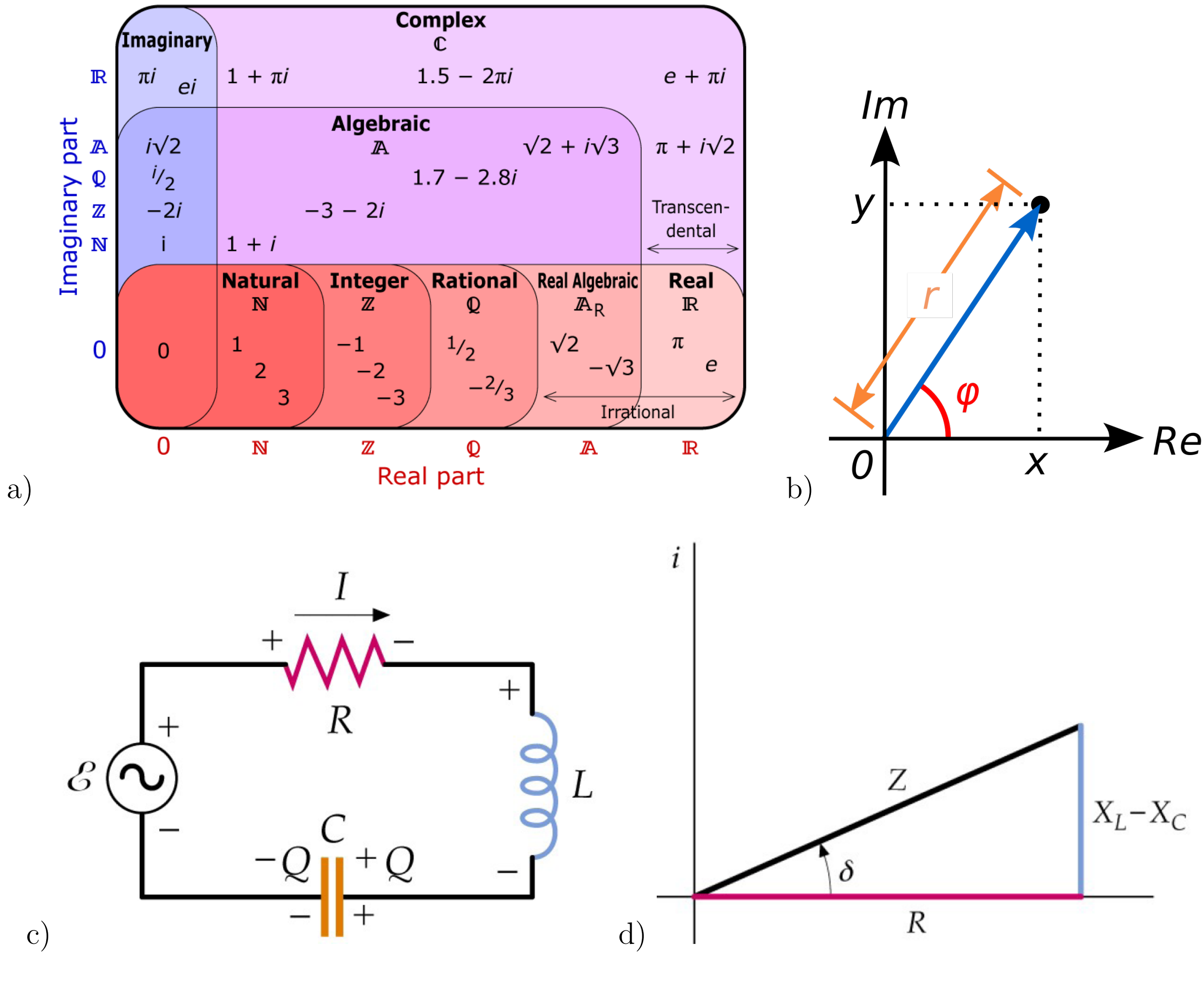

Figura 1: *(a) Divisão dos números conhecidos pelo Homem. (b) Representação no plano complexo da parte real x, da parte imaginária y, do módulo r e da fase φ do número complexo $z = x + iy$. (c) Circuito RLC alternado. (d) Impedância complexa Z_c no plano complexo.*