Jataí, 24/03/2015. ICET - UFG - Jataí.

Prova 1, Curso: Física.

Disciplina: Métodos Matemáticos. Prof. Paulo Freitas Gomes.

Nome Completo: ____ Matrícula:__________

Em todos os exercícios considere $i = \sqrt{-1}$ e $z = x + iy = re^{i\theta}$ com $z \in \mathbb{C}$ e $x, y, r, \theta \in \mathbb{R}$.

1. (2.0 pontos) Seja as seguintes funções vetoriais $\vec{V_1} = x^2\hat{x} + 3xyz\hat{y} + 2x^2\sqrt{z}\hat{z}$ e $\vec{V_2} = \ln x\hat{x} + z\cos y\hat{y} + 2xe^z\hat{z}$. Calcule: a) $\vec{\nabla} \cdot \vec{V_1}$, b) $\vec{\nabla} \cdot \vec{V_2}$.

2. (1.5 pontos) Seja a função escalar $f_1 = \cos x + 3\dfrac{xz^2}{y}$. Calcule $\nabla^2 f_1$.

3. (2.0 pontos) Seja a função $p = yx^3 + x\sin y + ye^z$. Calcule $\nabla^2\left[\nabla \cdot \left(\vec{\nabla} p\right)\right]$.

4. (2.0 pontos) Seja $z = x + iy = re^{i\theta}$. a) Escreva as equações relacionando x e y em função de r e θ. b) Inverta essas equações encontrando r e θ em função de x e y. c) Defina o complexo conjugado $\bar{z}$ de z. Prove que $|z|^2 = z\bar{z}$. d) Mostre que $Re(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ e $Im(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$.

5. (2.5 pontos) Encontre as parte real $\mathrm{Re}(z)$ e imaginária $\mathrm{Im}(z)$ dos seguintes números: a) $z_1 = (1 - i)^8$, b) $z_2 = \cos(i\pi)$, c) $z_3 = \ln(-e)$, d) $z_4 = (i - 1)^{i+1}$, e) $z_5 = 2^i$.

Fórmulas para consulta

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \frac{dV_x}{dx} + \frac{dV_y}{dy} + \frac{dV_z}{dz} \qquad \vec{\nabla} f = \hat{i}\frac{df}{dx} + \hat{j}\frac{df}{dy} + \hat{k}\frac{df}{dz} \qquad \nabla^2 g = \frac{d^2g}{dx^2} + \frac{d^2g}{dy^2} + \frac{d^2g}{dz^2}$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)} \qquad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)} \qquad z^n = r^n e^{in\theta} = r^n\left(\cos n\theta + i\sin n\theta\right) \qquad e^{\ln a} = a$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad \ln z = \ln(re^{i\theta}) = i\theta + \ln r \qquad a^b = e^{b\ln a}$$