Gabarito

Prova 3, 03/10/2014, Prof. Paulo Freitas Gomes

Eletromagnetismo. Curso: Física

1a) 1 ponto. A grande vantagem dos CDs é que eles não tem o chiado devido ao ruído existente nos LPs. Já quando a música é convertida para os mp3, as faixas de frequência nos extremos é eliminada, de modo a diminuir o tamanho do arquivo final. Porém, esse corte de frequências diminui a qualidade do som. Assim, os LPs ainda tem uma qualidade superior ao dos arquivos mp3.

1b) 1 ponto. Da definição, a densidade superficial de corrente é

$$\vec{K} = \sigma\vec{v} = \frac{di}{dl_\perp}\hat{v} \tag{1}$$

onde $l_\perp$ é o comprimento perpendicular a direção de propagação da corrente. Seja o eixo z perpendicular ao plano do disco, logo a velocidade de cada elemeto de massa do disco é tangencial ao disco, no plano xy:

$$\vec{v}(r) = \omega r\hat{\phi}$$

Assim, temos:

$$\vec{K}(r) = \sigma\omega r\hat{\phi}$$

1c) 2 pontos. $\vec{m} =$? Seja $\vec{\omega} = \omega\hat{z}$. Supondo que o disco seja uma soma de espiras infinitesimais, o momento resultante é a soma dos momentos de todas as espiras. Cada espira tem seu momento na direção perpendicular ao plano da espira. Supondo uma espira no plano xy, seu momento estará na direção z. Logo, o momento final do disco estará na direção z também: $\vec{m} = m\hat{z}$. Uma vez definida a direção, vamos calcular seu módulo. Da definição: $\vec{m} = I\vec{A}$. No caso de uma espira circular, A é a área englobada pela espira. Seja uma espira genérica de raio r cotendo um diferencial de momento dm. Temos que:

$$dm = Adi \tag{2}$$

onde $A = \pi r^2$ é a área englobada pela espira e di sua corrente. O diferencial é na corrente pois a área englobada pela espira não é pequena, indo de zer até a área total da superfície do disco. Da eq. 1, temos:

$$di = Kdl_\perp = Kdr = \sigma\omega rdr \tag{3}$$

O momento fica então:

$$dm = \pi r^2\sigma\omega rdr = \pi r^3\sigma\omega dr$$

Integrando

$$\vec{m} = \hat{z}\int dm = \hat{z}\pi\sigma\omega\int_0^R r^3dr = \boxed{\frac{1}{4}\pi\sigma\omega R^4\hat{z}}$$

Outra forma de calcular di é considerar a carga na espira:

$$di = \frac{dq}{T} = \frac{\sigma da}{T}$$

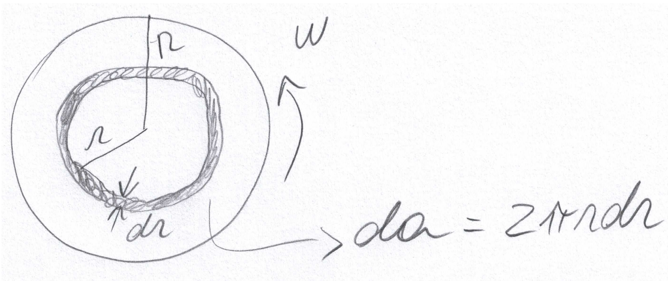

Figura 1: *Área da que contém da carga dq em rotação gerando a corrente di da espira de raio r.*

Agora, da é a área que contém a carga dq que gira, gerando a corrente di. Da figura 1, esta área é a diferença de área entre o círculo de raio r e o círculo de raio $r + dr$. Como dr é muito pequeno, essa área pode ser aproximada pela área de um retângulo onde um dos lados é a circunferência do círculo menor e o outro é dr: $da = 2\pi r dr$. Logo:

$$di = \frac{2\pi}{T}\sigma r dr = \omega\sigma r dr$$

Veja que este resultado é idêntico ao da eq. 3.

2a) 1 ponto. O disco de cima flutua pois a resultante das forças atuando nele é zero. A força peso $\vec{P}_2$ o puxa para baixo enquanto que a repulsão magnética $\vec{F}_{12}$ do disco 1 o empurra para cima. Esta repulsão depende da distância entre os dois discos. Assim, há uma certa distância onde o módulo das forças se iguala, anulando a força resultante. O diagrama de corpo livre está na figura 2.

2b) 2 pontos. A lei de Newton é: $\sum_i \vec{F}_i = m\vec{a} = 0$, já que o disco está em repouso. Do diagrama de corpo livre do item a), temos:

$$\vec{F}_{12} + \vec{P}_2 = 0$$

Logo, em módulo teremos:

$$F_{12} = P_2 \tag{4}$$

A força peso é $P_2 = m_d g$, onde g é a aceleração da gravidade e m_d a massa do disco. Já a força magnética é devido a interação entre o campo magnético $\vec{B}_1$ gerado pelo disco 1 com o momento de dipolo magnético $\vec{m}_2$ do disco 2. Como trata-se de um campo magnético não uniforme, a força é dada por:

$$\vec{F}_{12} = \vec{\nabla}(\vec{m}_2 \cdot \vec{B}_1) \tag{5}$$

O campo de um dipolo magnético ao longo de z ($\vec{m}_1 = m\hat{z}$) localizado na origem é dado por:

$$\vec{B}_1(\vec{r}) = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3}(2\hat{r}\cos\theta + \hat{\theta}\sin\theta)$$

Antes de procedermos ao cálculo da força, precisamos calcular o campo na posição do dipolo $\vec{m}_2$, que também está no eixo z a uma distância z da origem. Isso implica em $\theta = 0$, o que por sua vez implica em $r = z$ e

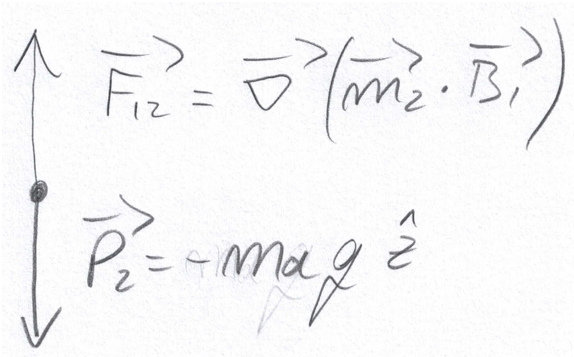

Figura 2: *Diagrama de corpo livre do disco 2, referente ao item 2a).*

$\hat{r} = \hat{z}$. Assim, o campo pode ser simplificado para:

$$\vec{B}_1(z) = \frac{\mu_0 m}{2\pi z^3}\hat{z}$$

Calculando agora o produto escalar da eq. 5, temos:

$$\vec{m}_2 \cdot \vec{B}_1(z) = (-m\hat{z}) \cdot \frac{\mu_0 m}{2\pi z^3}\hat{z} = -\frac{\mu_0 m^2}{2\pi z^3}$$

lembrando que $\vec{m}_2 = -m\hat{z}$. A força fica:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{\nabla}\left(\frac{\mu_0 m^2}{2\pi z^3}\right) = -\frac{\mu_0 m^2}{2\pi}\vec{\nabla}\left(z^{-3}\right) = -\frac{\mu_0 m^2}{2\pi}\hat{z}\frac{\partial z^{-3}}{\partial z} = \frac{3\mu_0 m^2}{2\pi z^4}\hat{z}$$

Veja que como esperado, $\vec{F}_{12}$ aponta para cima, balanceando a força peso que puxa para baixo. Igualando o módulo de $\vec{F}_{12}$ com o módulo de $\vec{P}_2$ (eq. 4):

$$\frac{3\mu_0 m^2}{2\pi z^4} = m_d g \qquad \therefore \qquad \boxed{z = \sqrt[4]{\frac{3\mu m^2}{2\pi m_d g}}}$$

2c) 1 ponto. Sendo os dipolos paralelos $\vec{m}_1 = \vec{m}_2 = \vec{m}_3 = m\hat{z}$, a força entre eles será de atração, fazendo com que um encoste no outro. Dessa forma, a distância entre discos sucessivos é zero.

2d) 2 pontos. Da mesma forma que no item a), a forma para se encontrar a distância é escrever a soma vetorial das forças atuando no disco 2 e 3, que estando em equilíbrio, deve ser igual a zero. No disco 2, as forças atuando são: força peso $\vec{P}_2$ apontando para baixo, repulsão com o disco 1 $\vec{F}_{12}$ apontado para cima e repulsão com o disco 3 $\vec{F}_{32}$ apontando para baixo (veja figura 3):

$$\vec{P}_2 = -m_d g\hat{z} \qquad \therefore \qquad \vec{F}_{12} = \frac{3\mu_0 m^2}{2\pi x^4}\hat{z} \qquad \therefore \qquad \vec{F}_{32} = -\frac{3\mu_0 m^2}{2\pi y^4}\hat{z}$$

Da Lei de Newton, a soma dessas forças deve ser zero, logo seus módulos satisfazem:

$$\frac{3\mu_0 m^2}{2\pi x^4} - m_g d - \frac{3\mu_0 m^2}{2\pi y^4} = 0 \tag{6}$$

As forças atuando no disco 3 são: força peso $\vec{P}_3$ apontando para baixo, força de atração com o disco 1 $\vec{F}_{13}$ apontando para baixo e força de repulsão com o disco 2 $\vec{F}_{23}$ apontando para cima (veja figura 3).

$$\vec{P}_3 = -m_d g\hat{z} \qquad \therefore \qquad \vec{F}_{13} = -\frac{3\mu_0 m^2}{2\pi(x+y)^4}\hat{z} \qquad \therefore \qquad \vec{F}_{32} = \frac{3\mu_0 m^2}{2\pi y^4}\hat{z}$$

Como no disco 2, seus módulos satisfazem

$$\frac{3\mu_0 m^2}{2\pi y^4} - m_g d - \frac{3\mu_0 m^2}{2\pi(x+y)^4} = 0 \tag{7}$$

Para encontrar uma relação entre x e y, isolo $m_g d$ das eqs. 6 e 7:

$$\begin{aligned} m_g d &= \frac{3\mu_0 m^2}{2\pi}\left(\frac{1}{x^4} - \frac{1}{y^4}\right) \\ m_g d &= \frac{3\mu_0 m^2}{2\pi}\left(\frac{1}{y^4} - \frac{1}{(x+y)^4}\right) \end{aligned}$$

Dividindo uma eq. pela outra, teremos

$$\frac{1}{x^4} - \frac{1}{y^4} = \frac{1}{y^4} - \frac{1}{(x+y)^4}$$

que pode ser reescrita como

$$\boxed{\frac{1}{x^4} - \frac{2}{y^4} + \frac{1}{(x+y)^4} = 0} \qquad\qquad \textit{c.q.d.}$$

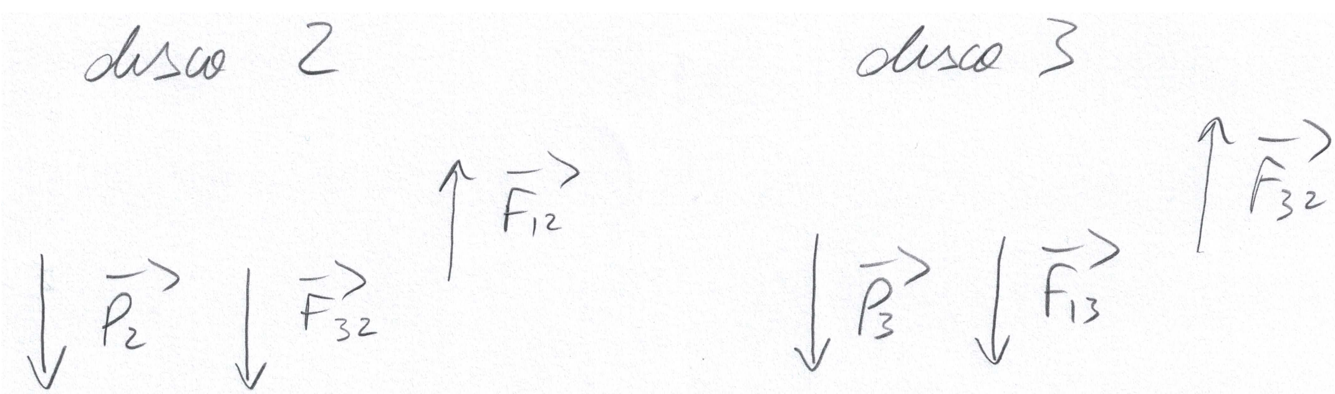

Figura 3: *Forças atuantes nos discos 2 e 3, referente ao item 2d.*