UFC

Universidade Federal do Ceará

Nome: **Matricula:**
Curso: **Nota:**

1ª **Avaliação Parcial de Matemática Discreta**

Orientações:
1. A soluções da prova devem ser feitas a mão (**Soluções digitadas serão desconsideradas**).
2. O aluno deverá escolher 5 das 8 questoes a seguir para resolver.
3. Soluções **idênticas** em provas distintas serão consideradas cópias, e portanto serão **anuladas**.
4. A prova teve início às 08h do dia 29/01/2021 e o aluno terá até às 07h59 do dia 01/02/2021 para resolver, escanear e anexar na atividade postada no SIGAA.

1. Fixados m, n inteiros quaisquer mostre que

(a) (0,5 Ponto) Se m é par, então mn é par.

(b) (0,5 Ponto) Se m, n são ímpares, então mn é ímpar.

(c) (0,5 Ponto) Se m, n têm mesma paridade (isto é, ambos são números pares ou ambos são números ímpares), então $m \pm n$ é par.

(d) (0,5 Ponto) Se m, n têm paridades distintas (isto é, um deles é par, e o outro é ímpar), então $m \pm n$ é ímpar.

2. (2 Pontos) Prove que potências com expoentes inteiros positivos até 5 preservam paridade. Mais precisamente, mostre que $\forall n \in \mathbb{Z}$, e para qualquer $k \in \{2, 3, 4, 5\}$

n é um número par (respect. um número ímpar) $\Longrightarrow n^k$ é um número par (respect. um número ímpar

3. (2 Pontos) Use os exercícios anteriores, demonstração por contradição e demostração exaustiva para mostrar que a equação.

$$9x^5 + 2x^4 - 3x^3 + 2x - 7 = 0$$

não admite solução no conjunto dos números racionais.

4. Resolva os itens a seguir.

(a) (1,5 Ponto) Mostre por contradição que $\sqrt[3]{36}$ é irracional.

(b) (0,5 Ponto) Use o item anterior para provar que $\sqrt[3]{972}$ também é irracional.

5. (2 Pontos) Use contradição e demostração exaustiva para provar que a equação

$$x^6 + y^6 + z^6 = 1000$$

não admite soluções inteiras.

6. Resolva os itens a seguir.

(a) (1 Ponto) Prove que se m, n são inteiros quaisquer tais que $m.n = 5$ então ($m = 1$ e $n = 5$) ou ($m = 5$ e $n = 1$) ou ($m = -1$ e $n = -5$) ou ($m = -5$ e $n = -1$).
OBS: não é permido usar que 5 é um número primo.

(b) (1 Pontos) Use o item anterior para provar que se n e $n + 5$ são quadrados perfeitos, então $n = 4$

6. (2 Pontos) Use demonstração exaustiva para mostar que fixado um irracional x existe um **único** inteiro n tal que

$$|x - n| < \frac{1}{2}$$

7. (2 Pontos) Mostre que existem 2020 números inteiros positivos consecutivos que não são potências de ordem 4.

8. (2 Pontos) Usando demonstração por contradição e exaustão, mostre o seguinte caso particular do Último Teorema de Fermat: não existem inteiros x, y, z tais que a equação

$$x^4 + y^4 = z^4$$

seja satisfeita no caso em que $x = y$.

Boa Prova!