Discente - Paulo Henrique Diniz de Lima Alencar
Capítulo 5 - Introdução às funções.
Ciência da Computação.

* Conceito de função -

Quando temos 2 conjuntos e algum tipo de associação entre eles, que faça corresponder a todo elemento do primeiro conjunto a um único elemento do segundo, ocorre uma função.

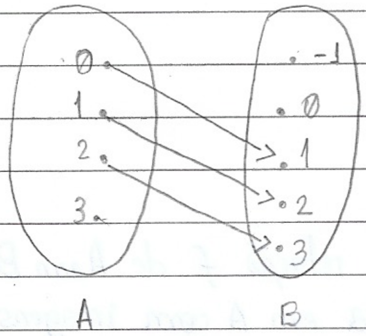
Vamos analisar alguns exemplos, para avaliar se o exemplo é uma função:

$$A = \{0, 1, 2, 3\} \qquad B = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$$

Analisando a seguinte relação temos:

- $R = \{(x,y) \in A \times B \mid y = x+1\}$

$R = \{(0,1), (1,2), (2,3)\}$

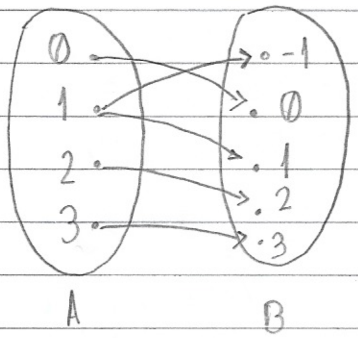


■ A relação ao lado **NÃO É** uma função, pois existe o elemento $3 \in A$, que não está associado a nenhum elemento do conjunto B.

Outro exemplo é o seguinte:

- $S = \{(x,y) \in A \times B \mid y^2 = x^2\}$

$S = \{(0,0), (1,1), (1,-1), (2,2), (3,3)\}$

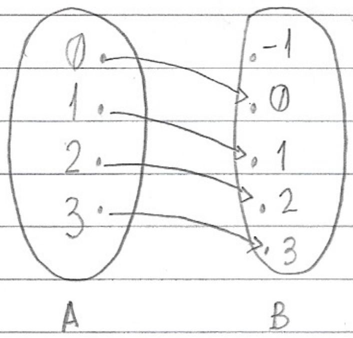


■ Essa relação também **NÃO É** uma função, pois o elemento 1 no conjunto A, está associado a mais de um elemento do conjunto B.

Agora observe o próximo exemplo:

- $T = \{(x,y) \in A \times B \mid y = x\}$

$T = \{(\emptyset,\emptyset), (1,1), (2,2), (3,3)\}$



■ Agora É UMA FUNÇÃO, pois todo elemento do conjunto A está associado a somente UM elemento do conjunto B.

* Definição de função -

Dados dois conjuntos A e B (*), não vazios, um relação f de A em B recebe o nome de aplicação A em B ou função definida em A com imagens em B se, e somente se, para todo $x \in A$ existe só um $y \in B$ tal que $(x,y) \in f$.

$$\therefore \quad f \text{ é aplicação de } A \text{ em } B \Leftrightarrow (\forall x \in A, \exists | y \in B \mid (x,y) \in f)$$

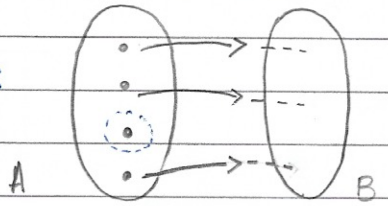
Esquema de flechas:

- condições que devem satisfazer uma relação de A em B para ser uma FUNÇÃO

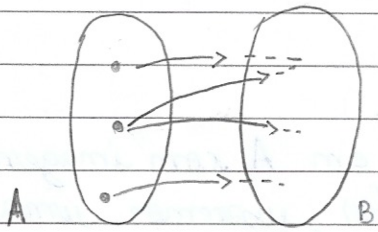
1º - É necessário que todo elemento $x \in A$ participe de pelo menos um par (x, y). Em resumo, deve existir uma flecha saindo do elemento $\in A$.

2º - É necessário que cada elemento $x \in A$ participe de apenas um único par (x, y). Em resumo, não podemos ter 2 flechas saindo de um $x \in A$.

Ex:



* não satisfaz a 1º condição
- não é função.



* não satisfaz a 2º condição
- não é função.

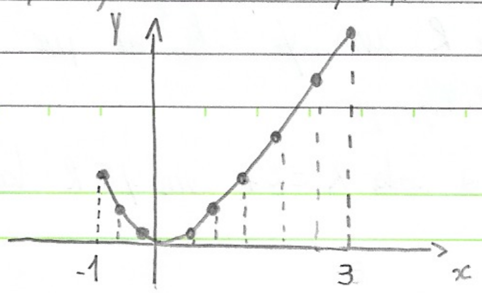
Gráfico cartesiano:

- Já observando gráficos, temos que nos atentar ao seguinte critério:

↳ para verificar pela representação cartesiana da relação f de A em B se f é ou não função: basta verificarmos se a RETA PARALELA ao eixo y conduzida pelo ponto $(x, 0)$, em que $x \in A$ "encontra sempre o gráfico f em um só ponto".

Exemplos:

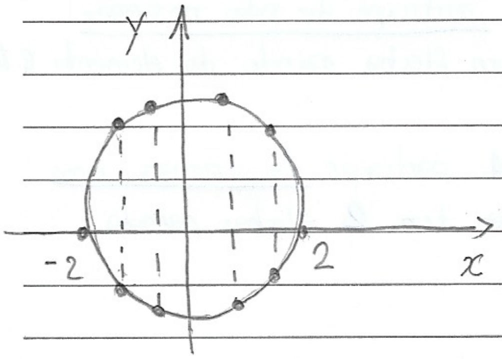
1º A relação f de A em R, com $A = \{x \in R \mid -1 \leq x \leq 3\}$



É FUNÇÃO: pois toda reta vertical conduzida pelos pontos de abscissa $x \in A$, tá encontrando sempre o gráfico em um só ponto.

2º A relação f de A em $\mathbb{R}$:

$A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 2\}$



NÃO É FUNÇÃO, pois há retas verticais que encontram o gráfico f em dois pontos.

* Notações das funções -

Observações:

- $f = \{(x,y) \mid x \in A,\ y \in B \text{ e } y = f(x)\}$.
- para indicarmos um função f, definida em A com imagens em B segundo a lei de correspondencia $y = f(x)$, usaremos uma das seguintes notações:

$f: A \to B$ $\quad$ $x \mapsto f(x)$

ou

$A \xrightarrow{f} B$ $\quad$ $x \mapsto f(x)$

ou

$f: A \to B$ $\quad$ $y = f(x)$

Exemplos:

1º $f: A \to B$ tal que $y = 2x$

* É um função que associa a cada x de A um y de B tal que $y = 2x$.

2º $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $y = x^2$

* é um funções que leva a cada x de $\mathbb{R}$ um y de $\mathbb{R}$ tal que $y = x^2$.

3º $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ tal que $y = \sqrt{x}$

* É um função que faz corresponder a cada $x \in \mathbb{R}_+$ um $y \in \mathbb{R}$ tal que $y = \sqrt{x}$.

- <u>Imagem de um elemento</u>

Se $(a, b) \in f$, o elemento **b** é chamado imagem de **a** pela aplicação f.

$$f(x) = Y$$

$$f(a) = b \rightarrow \text{Imagem de}$$

se lê "f de a é igual a b".

* Domínio e imagem

- <u>Domínio</u> - chamamos de <u>domínio</u> o conjunto **D** dos elementos $x \in A$ para os quais existe $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$. Como, pela definição de função, todo elemento de A tem essa propriedade, temos:

domínio = conjunto de partida.

$$D = A$$

- <u>Imagem</u> - chamamos de <u>imagem</u> o conjunto Im dos elementos $y \in B$ para os quais existe $x \in A$ tal que $(x, y) \in f$; Portanto:

imagem é subconjunto do contradomínio.

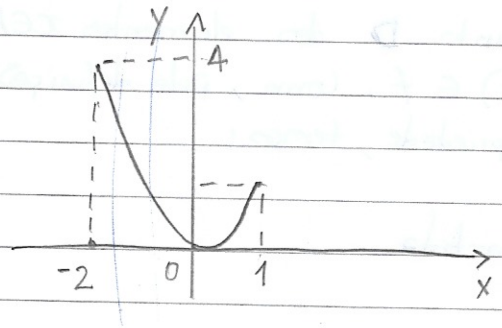
$$Im \subset B$$

domínio contradomínio

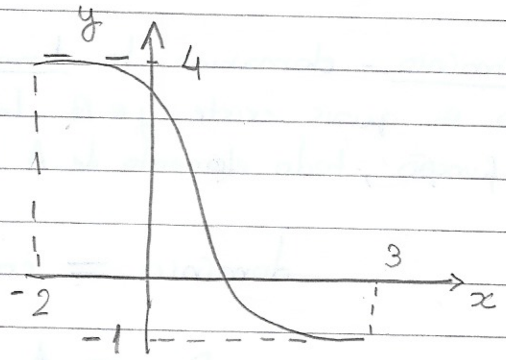
Quando estamos analizando um representação cartesiana de alguma função f temos:

- **Domínio** - (D) é o conjunto das abscissas dos pontos tais que as retas verticais conduzidas por esses pontos interceptam o gráfico de f, isto é, é um conjunto formado por todas as abscissas dos pontos do gráfico de f.
- **Imagem** - (Im) é o conjunto das ordenadas dos pontos tais que as retas horizontais conduzidas por esses pontos interceptam o gráfico de f.

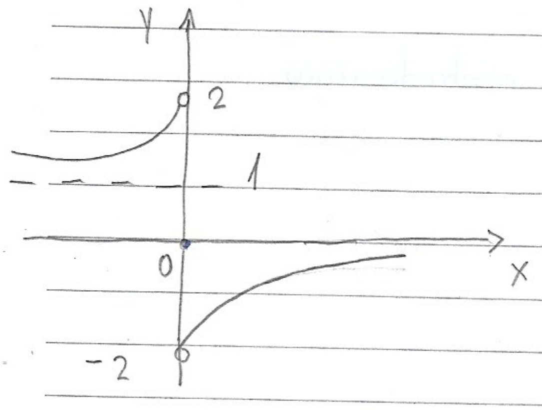
Exemplos:



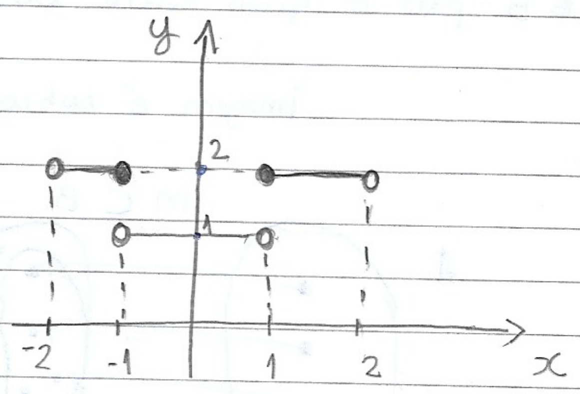
$D = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 1\}$
$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid 0 \leq y \leq 4\}$



$D = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 3\}$
$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 4\}$



$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$
$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid -2 < y < 0 \text{ ou } 1 < y < 2\}$



$D = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 2\}$
$Im = \{1, 2\}$

- Domínio da funções numéricas

- As funções numéricas são aquelas em que o domínio A e o contradomínio B são subconjuntos de $\mathbb{R}$.

Assim, quando nos referimos à função f e damos apenas a sentença aberta $y = f(x)$ que a define, subtendemos que D é o conjunto dos números reais x cujas imagens pela aplicação f são números reais, isto é, D é formado por todos os números reais x para os quais é possível calcular $f(x)$.

$$x \in D \Leftrightarrow f(x) \in \mathbb{R}$$

Exemplos:

1º) $y = 2x$, notando que $2x \in \mathbb{R}$ para todo $x \in \mathbb{R}$; temos:

$$D = \mathbb{R}$$

2º) $y = x^2$, notando que $x^2 \in \mathbb{R}$ para todo $x \in \mathbb{R}$, temos:

$$D = \mathbb{R}$$

3º) $y = 1/x$, notemos que $1/x \in \mathbb{R}$, se, e somente se, x é real e diferente de zero.

$$D = \mathbb{R}^*$$

* Funções iguais -

- Duas funções $f: A \to B$ e $g: C \to D$ são iguais se, e somente se, apresentarem:

* Domínios iguais $(A = C)$
* Contradomínios iguais $(B = D)$
* $f(x) = g(x)$ para todo x do domínio

Exemplos:

1º) Se $A = \{1,2,3\}$ e $B = \{-2,-1,0,1,2\}$, então as funções de A em B definidas por:

$$f(x) = x-1 \quad e \quad g(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$$

SÃO IGUAIS:

$\boxed{x=1} \Rightarrow f(1) = 1-1 = 0$ e $g(1) = \frac{1-1}{1+1} = \frac{0}{2} = 0$

$\boxed{x=2} \Rightarrow f(2) = 2-1 = 1$ e $g(2) = \frac{2^2-1}{2+1} = 1$

$\boxed{x=3} \Rightarrow f(3) = 3-1 = 2$ e $g(3) = \frac{3^2-1}{3+1} = \frac{8}{4} = 2$

notório que $f = g = \{(1,0),(2,1),(3,2)\}$

2º) As funções $f(x) = \sqrt{x^2}$ e $g(x) = |x|$ de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ são iguais pois $\sqrt{x^2} = |x|$

3º) As funções $f(x) = x$ e $g(x) = |x|$ de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ NÃO SÃO IGUAIS, pois $x \neq |x|$ para $x < 0$.