Demonstração por Contradição

r	$\sim r$
V	F
F	V

$$\boldsymbol{r} \text{ é verdade} \Leftrightarrow \ \sim\boldsymbol{r} \text{ é falsa}$$

No caso em que r é uma senteça da forma $p \Rightarrow q$ obtemos então que

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

$$\boldsymbol{p \Rightarrow q} \text{ é verdade} \Leftrightarrow \ \sim(\boldsymbol{p \Rightarrow q}) \text{ é falsa}$$

$$\Leftrightarrow \ \boldsymbol{p} \wedge (\sim\boldsymbol{q}) \text{ é falsa}$$

$\sim q \Rightarrow \sim p$

$p \wedge (\sim q)$ é verdade

$$\left(2^{\frac{p}{q}}\right)^q = 5^q$$

https://meet.google.com/maz-hqtd-snn

https://docs.google.com/forms/d/1WSP4GhufBPpN1SmNUiPRFTc5rEoijAmRlzNVtTT2nWo/edit

$$2^{\frac{p}{\cancel{q}} \cdot \cancel{q}} = 5^q$$

Exemplo 1: Mostre que $\forall x \in \mathbb{R}$

$x > 0 \iff -x < 0$

a) Se $x > 0$, então $x + \frac{1}{x} \geq 2$

b) Se $x < 0$, então $x + \frac{1}{x} \leq -2$

$\sim(a < b) \equiv a \geq b$

a) Devemos mostrar que

$$x > 0 \implies x + \frac{1}{x} \geq 2$$

$c < d$

$(-3)c > (-3)d$

Suponha por absurdo que $x > 0$, mas que $x + \frac{1}{x} < 2$

Então,

$$x \cdot \left(x + \frac{1}{x}\right) < x \cdot 2$$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$$\implies x \cdot x + \cancel{x} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} < 2x$$

$$\implies x^2 + 1 < 2x$$

$$\implies x^2 - 2x + 1 < 0$$

$$\iff x^2 - 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2 < 0$$

$$\iff (x-1)^2 < 0$$

$$\implies \text{Absurdo!}$$

Exemplo 2: Sejam a, b dois números reais quaisquer diferentes de zero. Mostre que

a) Se a, b têm mesmo sinal então $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$

b) Se a, b têm sinais opostos então $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \leq -2$

Exemplo 3: Mostre que $\sqrt{2}$ é irracional.

Assuma por absurdo que $\sqrt{2}$ é racional

Então existem inteiros p, q, com $q \neq 0$ tais que

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \qquad \frac{6}{9} = \frac{2 \cdot \cancel{3}}{3 \cdot \cancel{3}} = \frac{2}{3}$$

e podemos supor sem perda de generalidade (S.P.G.) que a fração $\frac{p}{q}$ é irredutível

(isto é, p, q não têm fatores em comum)

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Rightarrow \sqrt{2} \cdot q = p$$

$$\Rightarrow (\sqrt{2}\, q)^2 = p^2$$

$$\Rightarrow (\cancel{\sqrt{2}})^{\cancel{2}} q^2 = p^2$$

$$\Rightarrow 2q^2 = p^2 \quad (*)$$

$$\Rightarrow p^2 \text{ é par}$$

$$\Rightarrow p \text{ é par} \quad (p \text{ ímpar} \Rightarrow p^2 \text{ ímpar})$$

$$\Rightarrow p = 2k, \; \exists\, k \in \mathbb{Z}$$

$\Rightarrow p = 2k, \exists k \in \mathbb{Z}$

Por $(*)$, teremos que

$$2q^2 = p^2$$
$$= (2k)^2$$
$$= 2^2 k^2$$

$\Rightarrow \cancel{2}^{1} q^2 = \cancel{4}^{2} k^2$

$\Rightarrow q^2 = 2k^2$

$\Rightarrow q^2$ é par

$\Rightarrow q$ é par (q ímpar $\Rightarrow q^2$ ímpar)

$\Rightarrow p, q$ têm 2 como fator em comum

$\Rightarrow \frac{p}{q}$ não é irredutível

$\Rightarrow$ Absurdo!

Exemplo 4: Mostre que

$\sqrt{2} = \sqrt{2.1}$ é irracional

a) $\sqrt{6}$ é irracional.

$\sqrt{6} = \sqrt{2.3}$ "

$\sqrt{10} = \sqrt{2.5}$ "

b) $\sqrt{10}$ é irracional.

a) Assuma por absurdo que $\sqrt{6}$ é racional.
Então existem inteiros p, q, com $q \neq 0$
tais que

$$\sqrt{6} = \frac{p}{q}$$

SPG, podemos assumir que $\frac{p}{q}$ é irredutível

$$\sqrt{6} = \frac{p}{q} \Rightarrow \sqrt{6}\, q = p$$

$r \wedge (\sim r) \equiv F$

$$\Rightarrow (\sqrt{6}\, q)^2 = p^2$$

$$\Rightarrow (\sqrt{6})^2 q^2 = p^2$$

$$\Rightarrow 6q^2 = p^2 \quad (*)$$

$$\Rightarrow 2(3q^2) = p^2$$

$\Rightarrow p^2$ é par

$\Rightarrow p$ é par

$\Rightarrow p = 2k, \ \exists k \in \mathbb{Z}$

Por (*), teremos que

$$6q^2 = p^2$$
$$= (2k)^2$$
$$= 2^2 k^2$$

$\Rightarrow \overset{3}{\cancel{6}}q^2 = \overset{2}{\cancel{4}}k^2$

$\Rightarrow 3q^2 = 2k^2$

$\Rightarrow q^2$ é par (pois q^2 ímpar $\Rightarrow 3q^2$ é ímpar
$\Rightarrow 2k^2$ é ímpar
$\Rightarrow$ Absurdo!)

$\Rightarrow q$ é par

$\Rightarrow p, q$ têm 2 como fator em comum

$\Rightarrow \frac{p}{q}$ não é irredutível

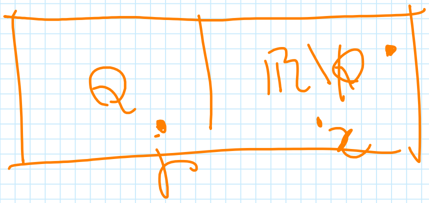
$\Rightarrow$ Absurdo!

Exemplo 5: Use o exercício anterior para mostar que

a) $\sqrt{24}$ é irracional. $\sqrt{24} = \sqrt{4 \cdot 6} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{6} = 2\sqrt{6}$ é irracional

(pois 2 é racional e $\sqrt{6}$ é irracional - vide exercício passado)

b) $\sqrt{40}$ é irracional.



$2\sqrt{6}$ é racional $\Rightarrow 2\sqrt{6} = \frac{p}{q}$, $\exists\, p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$

$\Rightarrow \sqrt{6} = \frac{p}{2q}$ é racional

$\Rightarrow$ Absurdo

Exemplo 6: Mostre que

a) $\sqrt[3]{2}$ é irracional.

b) $\sqrt[3]{4}$ é irracional.

Exemplo 7: Mostre que

a) $\sqrt[3]{6}$ é irracional.

b) $\sqrt[3]{12}$ é irracional.

Exemplo 8: Use o exercício anterior para mostrar que

a) $\sqrt[3]{48}$ é irracional.

b) $\sqrt[3]{96}$ é irracional.