Equivalências Lógicas

$$\mathbf{p \Leftrightarrow q \quad \equiv \quad (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)}$$

Ou mais geralmente,

$$\mathbf{p_1 \Leftrightarrow p_2 \Leftrightarrow p_3 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow p_n \quad \equiv \quad (p_1 \Rightarrow p_2) \wedge (p_2 \Rightarrow p_3) \wedge \cdots \wedge (p_{n-1} \Rightarrow p_n) \wedge (p_n \Rightarrow p_1)}$$

Exemplo: Mostre que para quaisquer números reais

a) $b \geq a \Leftrightarrow b^2 \geq a^2$

$5 \geq 3 \Rightarrow 5^2 = 25 > 3^2 = 9$

$-5 > -7 \Rightarrow (-5)^3 > (-7)^3$

$64 > 49 \xRightarrow{a,b \geq 0} \underset{8}{\sqrt{64}} > \underset{7}{\sqrt{49}}$

b) $b \geq a \Leftrightarrow b^3 \geq a^3$

$b^3 - a^3 = (b-a)(b^2 + ba + a^2)$

OBS: Valem as mesmas desigualdades acima de trocarmos o " $\geq$ " por " $>$ "

$p \Leftrightarrow q$

$p \Rightarrow q$

$q \Rightarrow p$

$\begin{cases} a \geq 0 \\ b \geq 0 \end{cases} \Rightarrow a + b \geq 0 + 0 = 0$

$p \Leftrightarrow p_1 \Leftrightarrow p_2 \Leftrightarrow p_3 \Leftrightarrow \quad \Leftrightarrow p_n = q$

$+$

$\underbrace{b^2 \geq a^2}_{p} \Leftrightarrow \underbrace{b^2 - a^2 \geq 0}_{p_1} \Leftrightarrow \underbrace{(b-a)\overbrace{(b+a)}^{\oplus} \geq 0}_{p_2}$

≥ 0

$\Leftrightarrow \underbrace{\overbrace{b-a}^{\oplus} \geq 0}_{p_3}$ (pois $b + a \geq 0$)

$\begin{cases} b + a = 7 \\ b - a = -3 \end{cases} \Rightarrow (b-a)(b+a) = -21 < 0$

b

$\Leftrightarrow \underbrace{b \geq a}_{q}$

---

1) $b \geq a \Rightarrow b^2 \geq a^2$

2) $b^2 \geq a^2 \Rightarrow b \geq a$

Prova de (1)

$b \geq a \Rightarrow b - a \geq 0 \Rightarrow (b-a).(b+a) \geq 0.(b+a)$

$\Rightarrow b^2 - a^2 \geq 0$

$$\Rightarrow b^2 \geq a^2$$

prova de (2)

$$b^2 \geq a^2 \Rightarrow b^2 - a^2 \geq 0 \Rightarrow \underbrace{(b-a)\overbrace{(b+a)}^{\oplus}}_{\oplus} \geq 0$$

$$\Rightarrow b - a \geq 0$$

$$\Rightarrow b \geq a$$

$$b^n - a^n = (b-a)(b^{n-1} + b^{n-2} \cdot a^1 + b^{n-3} \cdot a^2 + \cdots b^1 \cdot a^{n-2} + a^{n-1})$$

Exemplo: Mostre que $\forall n \in \mathbb{Z}$

a) n é par $\Leftrightarrow 3n + 2$ é par

b) n é par $\Leftrightarrow 7n + 4$ é par

c) n é ímpar $\Leftrightarrow 5n + 6$ é ímpar

(a) Devemos mostrar que

(1) n é par $\Longrightarrow 3n+2$ é par

(2) $3n+2$ é par $\Longrightarrow n$ é par

Prova de (1):

P = par

I = ímpar

n é par $\Longrightarrow n = 2k, \ \exists k \in \mathbb{Z}$

$$\Longrightarrow \underbrace{\underbrace{3\overset{\downarrow}{n}}_{P} + \overset{\downarrow}{2}}_{P} = 3(2k) + 2$$

$$= 6k + 2$$

$$= 2(3k+1)$$

$\Longrightarrow 3n+2 = 2.C, \quad C = 3k+1 \in \mathbb{Z}$

$\Longrightarrow 3n+2$ é par

Prova de (2):

$(p \Longrightarrow q) \equiv (\sim q \Longrightarrow \sim p)$

$\underbrace{3n+2 \text{ é par}}_{p} \Downarrow \Longrightarrow \underbrace{n \text{ é par}}_{q}$

$3n+2 = 2k \Longrightarrow 3n = 2k - 2 \Longrightarrow n = \dfrac{2k-2}{3}$

ou equivalentemente,

n é ímpar $\Longrightarrow 3n+2$ é ímpar

De fato

n é ímpar $\Longrightarrow n = 2k+1, \ \exists k \in \mathbb{Z}$

De fato

n é ímpar $\Rightarrow n = 2k+1, \; \exists k \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow 3n+2 = 3(2k+1) + 2$$

$$\underbrace{\underbrace{I \cdot I}_{I} \quad P}_{I}$$

$$= 6k + 3 + 2$$

$$= 6k + 5 \overset{?}{=} 2C + 1$$

$$= (6k+4) + 1$$

$$= 2(3k+2) + 1$$

$$\Rightarrow 3n+2 = 2C + 1, \quad C = 3k+2 \in \mathbb{Z}$$

$\Rightarrow 3n+2$ é ímpar

$$\underbrace{3n+2}_{I} = \underbrace{(2n+2)}_{P} + \underset{I}{n}$$

Exemplo: Mostre que as sentenças a seguir são equivalentes

a) $3n + 2$ é par

b) $n + 5$ é ímpar

c) n^2 é par

Exemplo: Mostre que as sentenças a seguir são equivalentes

a) n é par

b) $n + 1$ é ímpar

c) $3n + 1$ é ímpar

d) $3n$ é par

Exemplo: Mostre que as sentenças a seguir são equivalentes

a) n^2 é ímpar

b) $1 - n$ é par

c) n^3 é ímpar

d) $n^2 + 1$ é par

Exemplo: Mostre que as sentenças a seguir são equivalentes

a) x é racional

b) $\frac{x}{2}$ é racional

c) $3x - 1$ é racional

Exemplo: Mostre que as sentenças a seguir são equivalentes

a) x é irracional

b) $3x + 2$ é irracional

c) $\frac{x}{2}$ é irracional