2º Avaliação de M. discreta

• Discente: Paulo Henrique Diniz de Lima Alencar.

• Ciência da Computação

• matrícula – 494837.

① – Resolução:

* Base de indução:

$$n=1: \quad 1\cdot(1+1)(1+2) = \frac{1(1+1)(1+2)(1+3)}{4} \iff 6 = \frac{2\cdot 3\cdot \cancel{4}}{\cancel{4}} \iff 6 = 6 \quad [\text{True}]$$

* Hipótese de Indução:

$$n=k: \quad 1\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot 3\cdot 4 + 3\cdot 4\cdot 5 + \dots + k\cdot(k+1)\cdot(k+2) = \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4} \quad [\text{True}]$$

* Tese de Indução:

$$n=k+1: \quad 1\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot 3\cdot 4 + 3\cdot 4\cdot 5 + \dots + k(k+1)(k+2) + (k+1)(k+2)(k+3) = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{4}$$

Se $1\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot 3\cdot 4 + 3\cdot 4\cdot 5 + \dots + k\cdot(k+1)\cdot(k+2) = \dfrac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4}$ Hipotese de indução

então: $\underbrace{1\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot 3\cdot 4 + 3\cdot 4\cdot 5 + \dots + k\cdot(k+1)\cdot(k+2)} + (k+1)(k+2)(k+3) = \dfrac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{4}$

$$\underbrace{\frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4} + (k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{4} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{k(k+1)(k+2)(k+3) + 4(k+1)(k+2)(k+3)}{4} = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{4} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{(k+1)(k+2)(k+3)\cdot[k+4]}{4} = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{4} \quad ///$$

Provado que funciona para $n=1$, em seguida, se funciona para $n=k$ e por fim, que funciona para $n=k+1$.

② Resolução :

* Base de indução :

$n=1: \quad \frac{2\cdot 1-1}{2\cdot 1} \leq \frac{1}{\sqrt{3\cdot 1+1}} \iff \frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{2}$ [True]

---

* Hipótese de indução :

$$n=k: \quad \frac{1\cdot 3\cdot 5 \cdots (2k-1)}{2\cdot 4\cdot 6 \cdots (2k)} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3k+1}}$$

---

* Tese de indução :

$$n=k+1: \quad \frac{1\cdot 3\cdot 5 \cdots (2k-1)\cdot(2k+1)}{2\cdot 4\cdot 6 \cdots (2k)\cdot(2k+2)} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3k+4}}$$

(???) Preciso verificar isso!

$$\underbrace{\frac{1\cdot 3\cdot 5 \cdots (2k-1)}{2\cdot 4\cdot 6 \cdots (2k)}\cdot\frac{(2k+1)}{(2k+2)}}_{\text{Gerou o lado esquerdo da Tese.}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3k+1}}\cdot\frac{(2k+1)}{(2k+2)} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3k+4}}$$

OBS: a seta indica o sentido dos cálculos

* É suficiente, portanto mostrarmos que:

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{3k+1}}\cdot\frac{(2k+1)}{(2k+2)} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3k+4}}} \iff \frac{(2k+1)}{(2k+2)} \leqslant \frac{\sqrt{3k+1}}{\sqrt{3k+4}} \iff$$

$$\frac{(2k+1)^2}{(2k+2)^2} \leqslant \left(\cancel{\sqrt{\frac{3k+1}{3k+4}}}\right)^{\cancel{2}} \iff \frac{4k^2+4k+1}{4k^2+8k+4} \leqslant \frac{3k+1}{3k+4} \iff$$

$$4k^2+4k+1 \leqslant \frac{(3k+1)}{3k+4}\cdot 4k^2+8k+4 \iff 4k^2+4k+1 \leqslant \frac{12k^3+24k^2+12k+4k^2+8k+4}{3k+4} \iff$$

$$4k^2+4k+1 \leqslant \frac{12k^3+28k^2+20k+4}{3k+4} \iff (3k+4)\cdot(4k^2+4k+1) \leqslant 12k^3+28k^2+20k+4$$

$$12k^3+12k^2+3k+16k^2+16k+4 \leqslant 12k^3+28k^2+20k+4 \iff 12k^3+12k^2+3k+16k^2+16k+4 \leqslant 12k^3+28k^2+20k+4$$

$$\cancel{12k^3}+\cancel{28k^2}+19k+4 \leqslant \cancel{12k^3}+\cancel{28k^2}+20k+4 \iff 19k+4 \leqslant 20k+4$$ [True] //

$\therefore$ Por transitividade :

[True]

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k)}\cdot\frac{(2k+1)}{(2k+2)} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3k+1}}\cdot\frac{(2k+1)}{(2k+2)} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3k+4}} \Longrightarrow$$

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)\cdot(2k+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k)\cdot(2k+2)} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3k+4}}$$ (Tese de indução) //

[True]

Próximas questões

(5) - Resolução:

Então é para mostrar que $\forall n \geq 64$, existem $x, y \in \mathbb{Z}_+$ $(x, y \in \mathbb{Z}, x, y \geq 0)$ tal que:

$$\boxed{n = 5x + 17y}$$

* Base de indução:

$$64 = 5 \cdot 6 + 17 \cdot 2 \iff 64 = 30 + 34 \iff 64 = 64 \quad [\text{True}]$$

---

* Hipótese de indução:

$$64 = 5x_{64} + 17y_{64}, \exists x_{64}, y_{64} \in \mathbb{Z}_+ \quad (V)$$

$$65 = 5x_{65} + 17y_{65}, \exists x_{65}, y_{65} \in \mathbb{Z}_+ \quad (V)$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$(*) \quad K-4 = 5x_{K-4} + 17y_{K-4}, \exists x_{K-4}, y_{K-4} \in \mathbb{Z}_+ \quad (V)$$

$$K-3 = 5x_{K-3} + 17y_{K-3}, \exists x_{K-3}, y_{K-3} \in \mathbb{Z}_+ \quad (V)$$

$$K-2 = 5x_{K-2} + 17y_{K-2}, \exists x_{K-2}, y_{K-2} \in \mathbb{Z}_+ \quad (V)$$

$$K-1 = 5x_{K-1} + 17y_{K-1}, \exists x_{K-1}, y_{K-1} \in \mathbb{Z}_+ \quad (V)$$

$$K = 5x_K + 17y_K, \exists x_K, y_K \in \mathbb{Z}_+ \quad (V)$$

---

* Tese de indução:

$$K+1 = 5x_{K+1} + 17y_{K+1}, \exists x_{K+1}, y_{K+1} \in \mathbb{Z} \quad (??)$$

Preciso verificar se é válido!

Sabendo que:

$K+1 = n_1 + n_2$, $\begin{cases} n_1 = 5x + 17y \\ n_2 = 5x' + 17y' \end{cases}$

$\therefore K+1 = (5x + 17y) + (5x' + 17y')$

$= 5(x + x') + 17(y + y')$

Fazendo uso da propriedade.

diminuir e somar 5

$$K+1 = \underbrace{(K+1 \boxed{-5})}\boxed{+5}$$

$$= \underbrace{(K-4)} + 5$$

$$= \underbrace{(5x_{K-4} + 17y_{K-4})}_{(*)} + 5 \cdot 1$$

$$= 5\underbrace{(x_{K-4} + 1)}_{x_{K+1}} + 17\underbrace{y_{K-4}}_{y_{K+1}}$$

$$\Rightarrow K+1 = 5x_{K+1} + 17y_{K+1}$$

Onde $x_{K+1} = x_{K-4} + 1 \in \mathbb{Z}_+$, $y_{K+1} = y_{K-4} \in \mathbb{Z}_+$

⑥ - resoluções :

a) $a | 0$ Se $a | 0 \Rightarrow 0 = a \cdot q$, com $(q = 0)$, isso implica a poder ser qualquer inteiro, afinal irá satisfazer $0 = a \cdot q$, com $(q = 0)$. Portanto, $a | 0$ (a divide 0). //

---

b) $1 | a$ se $1 | a \Rightarrow a = \boxed{1} \cdot q$, com $q \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ a é multiplo de 1 ou 1 divide a

$\Rightarrow 1 | a$ //

---

c) $a | 1 \Rightarrow a = \pm 1$, se $a | 1 \Rightarrow 1 = a \cdot q$, com $q \in \{-1, 1\}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 = a \cdot (-1) \Rightarrow a = -1 \text{ //} \\ \text{ou} \\ 1 = a \cdot 1 \Rightarrow a = 1 \text{ //} \end{cases}$$

---

d) $a | a$, se $a | a \Rightarrow a = a \cdot q$, com $(q = 1)$

$\Rightarrow a = \boxed{a} \cdot 1$

$\Rightarrow a | a$, a divide a //

---

e) $a | b \Rightarrow a | k \cdot b, \forall k \in \mathbb{Z}$, Se $a | b \Rightarrow b = a \cdot q_1, \exists q_1 \in \mathbb{Z}$

Se $a | k \cdot b \Rightarrow k \cdot b = a \cdot q_2, \exists q_2 \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow k \cdot b = \boxed{a} \cdot q_1 \cdot k, \forall k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ a divide $k \cdot b \Rightarrow a | k \cdot b$

---

f) $a | b$, $b | a \Rightarrow a = \pm b$, Se $a | b \Rightarrow b = a \cdot q_1$

Se $b | a \Rightarrow a = b \cdot q_2$

$\Rightarrow a = a \cdot q_1 \cdot q_2$

$\Rightarrow q_1 = q_2 = 1$ ou $q_1 = q_2 = -1$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = a \cdot 1 \cdot 1 \Rightarrow a = a \ (V) \\ \text{ou} \\ a = a \cdot (-1)(-1) \Rightarrow a = a \ (V) \end{cases}$$

Logo: $b = a \cdot q_1 \Rightarrow b = a \cdot 1 \Rightarrow b = a$, Além disso, $a = b \cdot q_2 \Rightarrow a = b \cdot 1 \Rightarrow a = b$

$b = a \cdot (-1)$ // $\Rightarrow b = -a$ // ou $\Rightarrow a = b \cdot (-1) \Rightarrow a = -b$

g) $a|b$, $b|c \Rightarrow a|c$

Se $a|b \Rightarrow b = a \cdot q_1, \exists q_1 \in \mathbb{Z}$

Se $b|c \Rightarrow c = b \cdot q_2, \exists q_2 \in \mathbb{Z}$

Se $a|c \Rightarrow c = a \cdot q_3, \exists q_3 \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow c = \frac{b}{q_1} \cdot q_3$

$\Rightarrow b \cdot q_2 = \frac{b}{q_1} \cdot q_3 \Rightarrow b = \frac{\frac{b}{q_1} \cdot q_3}{q_2} \Rightarrow b = \frac{b}{q_1} \Rightarrow b = \frac{a}{\frac{a}{b}} \Rightarrow b = \cancel{a} \cdot \frac{b}{\cancel{a}} \Rightarrow b = b$ (V)

---

h) $a|b$, $c|d \Rightarrow a \cdot c | b \cdot d$

* Se $a|b \Rightarrow b = a \cdot q_1$, $\exists q_1 \in \mathbb{Z}$
* Se $c|d \Rightarrow d = c \cdot q_2$, $\exists q_2 \in \mathbb{Z}$

Então $b \cdot d = \underbrace{a \cdot q_1}_{b} \cdot \underbrace{c \cdot q_2}_{d}$

$\Rightarrow b \cdot d = \boxed{a \cdot c} \cdot q_1 \cdot q_2$, com base no algoritmo da divisão, isto é, $b = a \cdot q$

$\Rightarrow a \cdot c | b \cdot d$ $\therefore$ $a \cdot c$ divide $b \cdot d$

---

i) $a|b$, $b \neq 0 \Rightarrow |a| \leq |b|$

Se $a|b \Rightarrow b = a \cdot q$, $\exists q \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow |b| = |a \cdot q|$

$\Rightarrow |b| = |a| \cdot |q|$

$\Rightarrow \frac{|b|}{|q|} = |a|$ (I)

Como $\frac{|b|}{|q|} \leq |b|$ e $\overset{(I)}{\frac{|b|}{|q|} = |a|}$, temos : $|a| \leq |b|$

7 - Resolução:

uso do item e)

$2n+1 \mid 3n^2+3$ uso do item d)

$2n+1 \mid 2n+1$ (um número divide ele mesmo)

$\Rightarrow \begin{cases} 2n+1 \mid (3n^2+3) \times 2 \\ 2n+1 \mid (2n+1) \times 3n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2n+1 \mid 6n^2+6 \\ 2n+1 \mid 6n^2+3n \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2n+1 \mid (\cancel{6n^2}+6) - (\cancel{6n^2}+3n) \Rightarrow 2n+1 \mid 6-3n \Rightarrow \begin{matrix} 2n+1 \mid (6-3n) \times 2 \\ 2n+1 \mid (2n+1) \times 3 \end{matrix}$

uso do item j)

$\Rightarrow 2n+1 \mid (-\cancel{6n}+12) + (\cancel{6n}+3) \Rightarrow 2n+1 \mid 15 \Rightarrow 2n+1 \in D^+(15) = \{1,3,5,15\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cdot\ 2n+1 = 1 \Rightarrow n = 0 & \times \\ \cdot\ 2n+1 = 3 \Rightarrow n = 1 & \checkmark \\ \cdot\ 2n+1 = 5 \Rightarrow n = 2 & \checkmark \\ \cdot\ 2n+1 = 15 \Rightarrow n = 7 & \checkmark \end{cases}$$

(não faz parte da solução, pois a questão quer os $n \in \mathbb{Z}_+$)

São soluções!

---

8 - Resolução:

2 primos que quando × dão 15

$\frac{n^3}{3} + \frac{n^5}{5} + \frac{7n}{15} \iff \frac{5n^3+3n^5+7n}{15} \in \mathbb{Z} \Rightarrow 15 \mid 5n^3+3n^5+7n \iff \begin{cases} 3 \mid 5n^3+3n^5+7n \\ 5 \mid 5n^3+3n^5+7n \end{cases}$

Como o 6 é múltiplo de 3, mantém a equivalência.

$\iff \begin{cases} 3 \mid 5n^3+7n \iff 3 \mid 5n^3+7n \overbrace{-6n^3-6n} \iff 3 \mid -n^3+n \iff 3 \mid n^3-n \\ 5 \mid 3n^5+7n \iff 5 \mid 3n^5+7n-5n^5-5n \iff 5 \mid -2n^5+2n \iff 5 \mid 2n^5-2n \end{cases}$

$\boxed{\begin{array}{l} \cdot \text{ Como } 3 \mid n(n-1)(n+1) \\ \text{Temos que } n = 3\cdot q + r, \quad r \in \{0,1,2\} \end{array}}$

* Com $n = 3q \quad (r=0)$

Então $n^3 - n = n(n-1)(n+1)$

$= 3q(n-1)(n+1)$

[OK] $= 3\cdot C, \quad C = q\cdot(n-1)(n+1)$

$\Rightarrow 3 \mid n^3-n$

* Com $n = 3q+1, \quad (r=1)$

Então $n^3-n = n(n-1)(n+1)$

$= n(3q+\cancel{1}-\cancel{1})(n+1)$

$= n(3q)\cdot(n+1)$

$= 3\cdot C, \quad C = n\cdot q\cdot(n+1)$

$\Rightarrow 3 \mid n^3-n$

[OK]

* Com $n = 3q + 2$, $(r = 2)$

Então $n^3 - n = n(n-1)(n+1)$

$$= n(n-1)(3q+2+1)$$

$$= n(n-1)(3q+3)$$

$$= n(n-1)\cdot 3 \cdot (q+1)$$

$$= 3 \cdot C \ , \quad c = n \cdot (n-1) \cdot (q+1)$$

$\Rightarrow 3 \mid n^3 - n$ [OK]

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Como } \quad 5 \mid 2n(n^2-1)(n^2+1) \\ \text{temos que } n = 5q + r, \quad r = \{0, 1, 2, 3, 4\}\end{array}}$$

* Com $n = 5q$, $(r = 0)$

Então $2n^5 - 2n = 2n(n^2-1)(n^2+1)$

$$= 2 \cdot 5q\,(n^2-1)(n^2+1)$$

$$= 5 \cdot C \ , \quad C = 2 \cdot q\,(n^2-1)(n^2+1)$$

$\Rightarrow 5 \mid 2n^5 - 2n$ [OK]

* Com $n = 5q + 1$, $(r = 1)$

Então $2n^5 - 2n = 2n(n^2-1)(n^2+1)$

$$= 2 \cdot n\left[(5q+1)^2 - 1\right] \cdot (n^2+1)$$

$$= 2 \cdot n\,(25q^2 + 10q + \cancel{1} - \cancel{1})(n^2+1)$$

$$= 2 \cdot n\,(25q^2 + 10q)(n^2+1)$$

$$= 2 \cdot n \cdot 5(5q^2 + 2q)(n^2+1)$$

$$= 5 \cdot C \ , \quad C = 2 \cdot n \cdot (5 \cdot q^2 + 2q) \cdot (n^2+1)$$

$\Rightarrow 5 \mid 2n^5 - 2n$ [OK]

* Com $n = 5q + 2$, $(r = 2)$

Então $2n^5 + 2n = 2n(n^2-1)(n^2+1)$

$$= 2n(n^2-1)\left[(5q+2)^2 + 1\right]$$

$$= 2n(n^2-1)\left[25q^2 + 20q + 4 + 1\right]$$

$$= 2n(n^2-1)(25q^2+20q+5)$$
$$= 2n(n^2-1)\cdot 5\cdot(5q^2+4q+1)$$
$$= 5\cdot C, \quad c = 2\cdot n(n^2-1)(5q^2+4q+1)$$

$$\Rightarrow 5 \mid 2n^5 - 2n \quad [OK]$$

* Com $n = 5q+3$, $(r = 3)$

Então
$$2n^5 - 2n = 2n(n^2-1)(n^2+1)$$
$$= 2\cdot n(n^2-1)\cdot[(5q+3)^2+1]$$
$$= 2n\cdot(n^2-1)[25q^2+30q+9+1]$$
$$= 2n\cdot(n^2-1)\cdot(25q^2+30q+10)$$
$$= 2n\cdot(n^2-1)\cdot 5(5q^2+6q+2)$$
$$= 5\cdot C, \quad c = 2n\cdot(n^2-1)(5q^2+6q+2)$$
$$\Rightarrow 5 \mid 2n^5 - 2n \quad [OK]$$

* Com $n = 5q+4$

Então
$$2n^5 - 2n = 2n(n^2-1)(n^2+1)$$
$$= 2n[(5q+4)^2-1]\cdot(n^2+1)$$
$$= 2n[25q^2+20q+16-1]\cdot(n^2+1)$$
$$= 2n\cdot(25q^2+20q+15)\cdot(n^2+1)$$
$$= 2n\cdot 5(5q^2+4q+3)\cdot(n^2+1)$$
$$= 5\cdot C, \quad C = 2n\cdot(5q^2+4q+3)\cdot(n^2+1)$$
$$\Rightarrow 5 \mid 2n^2 - 2n \quad [OK]$$

---

9 – Resolução:

Fazendo uso do algorítmo da divisão: $b = a\cdot q + r$

Temos: $b = a\cdot q + r$, $r \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$

• Com $b = 9q$ e $(r=0)$ então Se $b = 9q \Rightarrow b^3 = (9q)^3$
$$= 9^3\cdot q^3$$
$$= 9\cdot(81\cdot q^3)$$
$$= 9\cdot K, \quad K = 81\cdot q^3$$

• Com $b = 9q+1$ e $(r=1)$ então Se
$$b = 9q+1 \Rightarrow b^3 = (9q+1)^3$$
$$= (81q^2+18q+1)(9q+1)$$
$$= 729q^3+243q^2+27q+1$$
$$= 9(81q^3+27q^2+3)+1$$
$$= 9\cdot K + 1, \quad K = 81q^3+27q^2+3$$

• Com $n = 9q + 2$, $(r = 2)$ então se $n = 9q + 2 \Rightarrow n^3 = (9q+2)^3$

$$= (81q^2 + 36q + 4) \cdot (9q + 2)$$

$$= 729q^3 + 162q^2 + 324q^2 + 72q + 36q + 8$$

$$= 729q^3 + 486q^2 + 108q + 8$$

$$= 9(81q^3 + 54q^2 + 12q) + 8$$

$$= \underline{9 \cdot K + 8}, \quad K = 81q^3 + 54q^2 + 12q$$

$\therefore$ Foi mostrado que o cubo de qualquer inteiro é da forma: $9K$, $9K+1$ ou $9K+8$.