Demonstração por Contradição

r	$\sim r$
V	F
F	V

$$\boldsymbol{r} \text{ é verdade} \Leftrightarrow \ \sim\boldsymbol{r} \text{ é falsa}$$

No caso em que r é uma senteça da forma $p \Rightarrow q$ obtemos então que

$$\boldsymbol{p \Rightarrow q} \text{ é verdade} \Leftrightarrow \ \sim(\boldsymbol{p \Rightarrow q}) \text{ é falsa}$$

$$\Leftrightarrow \ \boldsymbol{p} \wedge (\sim \boldsymbol{q}) \text{ é falsa}$$

$(a^m)^n = a^{mn}$

$\sim q \Rightarrow \sim p$

$p \wedge (\sim q)$ é verdade

$\left(2^{\frac{p}{q}}\right)^q = 5^q$

$2^{\frac{p}{\cancel{q}} \cdot \cancel{q}} = 5^q$

https://meet.google.com/maz-hqtd-snn

https://docs.google.com/forms/d/1WSP4GhufBPpN1SmNUiPRFTc5rEojjAmRlzNVtTT2nWo/edit

Exemplo 1: Mostre que $\forall x \in \mathbb{R}$

$x > 0 \iff -x < 0$

a) Se $x > 0$, então $x + \frac{1}{x} \geq 2$

b) Se $x < 0$, então $x + \frac{1}{x} \leq -2$

$\sim(a < b) \equiv a \geq b$

a) Devemos mostrar que

$$x > 0 \Rightarrow x + \frac{1}{x} \geq 2$$

$c < d$

$(-3)c > (-3)d$

Suponha por absurdo que $x > 0$, mas que $x + \frac{1}{x} < 2$

Então,

$$x \cdot \left(x + \frac{1}{x}\right) < x \cdot 2$$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$$\Rightarrow x \cdot x + \cancel{x} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} < 2x$$

$$\Rightarrow x^2 + 1 < 2x$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 < 0$$

$$\iff x^2 - 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2 < 0$$

$$\iff (x-1)^2 < 0$$

$\Rightarrow$ Absurdo!

Exemplo 2: Sejam a, b dois números reais quaisquer diferentes de zero. Mostre que

a) Se a, b têm mesmo sinal então $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$

b) Se a, b têm sinais opostos então $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \leq -2$

Exemplo 3: Mostre que $\sqrt{2}$ é irracional.

Assuma por absurdo que $\sqrt{2}$ é racional

Então existem inteiros p, q, com $q \neq 0$

tais que

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

$$\frac{6}{9} = \frac{2 \cdot \cancel{3}}{3 \cdot \cancel{3}} = \frac{2}{3}$$

e podemos supor sem perda de generalidade (S.P.G.) que a fração $\frac{p}{q}$ é irredutível

(isto é, p, q não têm fatores em comum)

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Rightarrow \sqrt{2} \cdot q = p$$

$$\Rightarrow (\sqrt{2}\, q)^2 = p^2$$

$$\Rightarrow (\cancel{\sqrt{}}2)^{\cancel{2}} q^2 = p^2$$

$$\Rightarrow 2\overset{3}{q}{}^2 = \overset{3}{p}{}^2 \quad (*)$$

$$\Rightarrow p^2 \text{ é par}$$

$\Rightarrow p$ é par (p ímpar $\Rightarrow p^2$ ímpar)

$$\Rightarrow p = 2k, \ \exists\, k \in \mathbb{Z}$$

$\Rightarrow p = 2k, \exists k \in \mathbb{Z}$

Por (*), teremos que

$$2q^2 = p^2$$
$$= (2k)^2$$
$$= 2^2 k^2$$

$\Rightarrow \cancel{2}^{1} q^2 = \cancel{4}^{2} k^2$

$\Rightarrow q^2 = 2k^2$

$\Rightarrow q^2$ é par

$\Rightarrow q$ é par (q ímpar $\Rightarrow q^2$ ímpar)

$\Rightarrow p, q$ têm 2 como fator em comum

$\Rightarrow \frac{p}{q}$ não é irredutível

$\Rightarrow$ Absurdo!

Exemplo 4: Mostre que

$\sqrt{2} = \sqrt{2.1}$ é irracional

a) $\sqrt{6}$ é irracional.

$\sqrt{6} = \sqrt{2.3}$ "

$\sqrt{10} = \sqrt{2.5}$ "

b) $\sqrt{10}$ é irracional.

a) Assuma por absurdo que $\sqrt{6}$ é racional.
Então existem inteiros p, q, com $q \neq 0$
tais que

$$\sqrt{6} = \frac{p}{q}$$

SPG, podemos assumir que $\frac{p}{q}$ é irredutível

$$\sqrt{6} = \frac{p}{q} \Rightarrow \sqrt{6}\, q = p$$

$r \wedge (\sim r) \equiv F$

$$\Rightarrow (\sqrt{6}\, q)^2 = p^2$$

$$\Rightarrow (\sqrt{6})^2 q^2 = p^2$$

$$\Rightarrow 6q^2 = p^2 \quad (*)$$

$$\Rightarrow 2(3q^2) = p^2$$

$\Rightarrow p^2$ é par

$\Rightarrow p$ é par

$\Rightarrow p = 2k, \ \exists k \in \mathbb{Z}$

Por (*), teremos que

$$6q^2 = p^2$$
$$= (2k)^2$$
$$= 2^2 k^2$$

$\Rightarrow \cancel{6}^{3} q^2 = \cancel{4}^{2} k^2$

$\Rightarrow 3q^2 = 2k^2$

$\Rightarrow q^2$ é par (pois q^2 ímpar $\Rightarrow 3q^2$ é ímpar
$\Rightarrow 2k^2$ é ímpar
$\Rightarrow$ Absurdo!)

$\Rightarrow q$ é par

$\Rightarrow p, q$ têm 2 como fator em comum

$\Rightarrow \frac{p}{q}$ não é irredutível

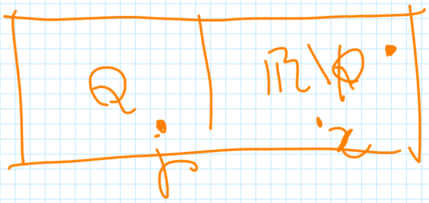
$\Rightarrow$ Absurdo!

Exemplo 5: Use o exercício anterior para mostar que

a) $\sqrt{24}$ é irracional. $\sqrt{24} = \sqrt{4.6} = \sqrt{4}.\sqrt{6} = 2\sqrt{6}$ é irracional

(pois 2 é racional e $\sqrt{6}$ é irracional – vide exercício passado)

b) $\sqrt{40}$ é irracional.



$2\sqrt{6}$ é racional $\Rightarrow 2\sqrt{6} = \frac{p}{q}$, $\exists\, p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$

$\Rightarrow \sqrt{6} = \frac{p}{2q}$ é racional

$\Rightarrow$ Absurdo

Exemplo 6: Mostre que

a) $\sqrt[3]{2}$ é irracional.

b) $\sqrt[3]{4}$ é irracional.

Exemplo 7: Mostre que

a) $\sqrt[3]{6}$ é irracional.

b) $\sqrt[3]{12}$ é irracional.

Exemplo 8: Use o exercício anterior para mostrar que

a) $\sqrt[3]{48}$ é irracional.

b) $\sqrt[3]{96}$ é irracional.

Exemplo 9: Mostre que os números a seguir são irracionais

a) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$

b) $\sqrt{2}+\sqrt{5}$

c) $\sqrt{8}+\sqrt{3}$

d) $\sqrt{8}+\sqrt{7}$

e) $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$

f) $\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}$

$$\mathbb{Q} \ni (\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 = 2 + 2\sqrt{6} + 3 = 5 + 2\sqrt{6}$$

$$\sqrt{6} = \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 - 5}{2} \in \mathbb{Q}$$

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = \frac{p^2}{q^2} \qquad (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

a) Assuma por absurdo que $x = \sqrt{2}+\sqrt{3}$ é racional

Então $\qquad \sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{a.b}$

$x^2 = (\sqrt{2}+\sqrt{3})^2$ é racional $\qquad 2k$

$\qquad 2k+1$

$\Rightarrow x^2 = (\sqrt{2})^2 + 2\sqrt{2}\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2$

$\qquad 3k$

$\qquad 3k+1$

$= 2 + 2\sqrt{2.3} + 3 \qquad 3k+2$

$x^2 = \underline{5 + 2\sqrt{6}}$ é racional $\qquad \sqrt{2} \quad (-\sqrt{2})$

$\Rightarrow x^2 - 5 = 2\sqrt{6}$ é racional (diferença de racionais é racional)

$\Rightarrow \dfrac{x^2-5}{2} = \sqrt{6}$ é racional (quociente de racionais é racional)

$\Rightarrow$ Absurdo, pois $\sqrt{6}$ é irracional!

Absurdo, pois

$\sqrt{6}$ irracional $\Rightarrow 2\sqrt{6}$ é irracional

$\Rightarrow 5 + 2\sqrt{6}$ é irracional

$\Rightarrow x^2$ é irracional

$\Rightarrow$ Absurdo

Assuma por absurdo que $x = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$ é racional. Então $\qquad (\sqrt[m]{a})^n = \sqrt[m]{a^n}$

cional. Então $\left(\sqrt[m]{a}\right)^n = \sqrt[m]{a^n}$

$x^2 = \left(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}\right)^2$ é racional $\quad \sqrt[m]{a}\,\sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{a.b}$

$$= \left(\sqrt[3]{2}\right)^2 + 2\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{4} + \left(\sqrt[3]{4}\right)^2$$

$$= \sqrt[3]{2^2} + 2\sqrt[3]{2.4} + \sqrt[3]{4^2}$$

$$= \sqrt[3]{4} + 2\sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{16}$$

$$= \sqrt[3]{4} + 2.2 + \sqrt[3]{2.8}$$

$$= \sqrt[3]{4} + 4 + \sqrt[3]{2}.\sqrt[3]{8}$$

$$= \sqrt[3]{4} + 4 + \sqrt[3]{2}.2 \qquad y \qquad 2 = \sqrt[\cancel{x}]{2^{\cancel{3}}} = \sqrt[3]{8}$$

$$= \sqrt[3]{4} + 4 + \left(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2}\right) \qquad y.2 = 2y = y + y$$

$$= \left(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}\right) + 4 + \sqrt[3]{2}$$

$$= x + 4 + \sqrt[3]{2}$$

é racional //

$\Rightarrow x^2 = x + 4 + \sqrt[3]{2}$ é racional

$\Rightarrow x^2 - x = 4 + \sqrt[3]{2}$ é racional (diferença de racionais é racional) //

$\Rightarrow x^2 - x - 4 = \sqrt[3]{2}$ é racional

$\Rightarrow$ Absurdo, pois $\sqrt[3]{2}$ é irracional.

Exemplo 10: Mostre que os números a seguir são irracionais

a) $\log_2 3$

b) $\log_2 12 = \log_2(4 \cdot 3)$

c) $\log_2 9$

d) $\log_3 2$

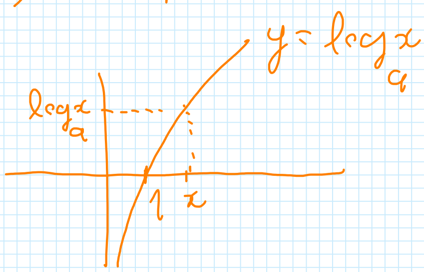
e) $\log_6 15$

$\log_2 4 + \log_2 3 = 2 + \log_2 3$

• $\log_a b = y \iff b = a^y$

• $\log_a b > 0 \iff b > 1$

$f(x) = \log_a x$



$n = 2k+1 \Rightarrow n^3 = (2k+1)^3$ é ímpar

n ímpar $\Rightarrow n^k$ é ímpar $\forall k \geq 1$

$\Rightarrow n^4 = \underbrace{n^3}_{\text{ímpar}} \cdot \underbrace{n}_{\text{ímpar}}$ é ímpar

$\Rightarrow n^5 = \underbrace{n^4}_{\text{ímpar}} \cdot \underbrace{n}_{\text{ímpar}}$ é ímpar

a) Assuma por absurdo que $\log_2 3$ é racional.

Então existem inteiros p, q, $q \neq 0$ tais que

$$0 < \log_2 3 = \frac{p}{q} \quad (3 > 1)$$

$$\frac{3}{-7} = -\frac{3}{7}$$

Como $3 > 1$, temos que $\log_2 3 > 0$. Logo $\frac{p}{q} > 0$

Daí, $\begin{cases} p > 0 \text{ e } q > 0 \\ \text{ou} \\ p < 0 \text{ e } q < 0 \end{cases}$

$$\log_2 3 = \frac{-5}{-8} = \frac{5}{8}$$

$p<0$ e $q<0$

SPG, podemos supor que $p>0$ e $q>0$ (pois se $p<0$ e $q<0$, trocamos p, q por $-p, -q$ respectivamente).

$$(a^{\alpha})^{\beta} = a^{\alpha \cdot \beta}$$

$$\log_2^3 = \frac{p}{q} \Rightarrow 3 = 2^{\frac{p}{q}}$$

$$\Rightarrow 3^q = \left(2^{\frac{p}{q}}\right)^q$$

$$\Rightarrow 3^q = 2^{\frac{p}{\cancel{q}} \cdot \cancel{q}}$$

$$\Rightarrow 3^q = 2^p$$

$\Rightarrow$ Absurdo, pois

$$\begin{cases} 3 \text{ é ímpar} \Rightarrow 3^q \text{ é ímpar} \\ 2 \text{ é par} \Rightarrow 2^p \text{ é par} \end{cases}$$

Exemplo: Mostre que se n e $n+1$ são quadrados perfeitos então $n = 0$.

$$\underbrace{0}_{}\overset{1}{,}1\overset{3}{,}4\overset{5}{,}9\overset{7}{,}16\overset{9}{,}25\overset{11}{,}36\overset{13}{,}49, \dots$$

Suponhamos que n e $n+1$ são quadrados perfeitos. Então existem $a, b \geq 0$ tais que

$$\begin{cases} \cancel{n} = a^2 \\ \cancel{n}+1 = b^2 \end{cases} \Longrightarrow 1 = (n+1) - n = b^2 - a^2$$

$9 = (-3)^2$
$= 3^2$

$$\Downarrow$$

$$\Longrightarrow 1 = b^2 - a^2$$

$$\Longrightarrow 1 = (b-a)(b+a)$$

$$\begin{cases} b-a=-1 \text{ e } b+a=-1 \times \\ \text{ou} \\ b-a=1 \text{ e } b+a=1 \end{cases}$$

$b^2 = n+1$
$= a^2 + 1 \geq 1 \Rightarrow b > 0 \Rightarrow b \geq 1 \Rightarrow a+b \geq a+1 \geq 0+1 = 1$

Como $a \geq 0$ e $b \geq 0$, temos que $a+b \geq 0$. Como $1 = (b-a)(b+a)$, não podemos ter $a+b=0$. Logo $a+b>0$, e como $1 = (b-a)(b+a)$, concluimos que $b-a>0$. Logo

$$\begin{cases} b-a \geq 1 \\ \text{e} \\ b+a \geq 1. \end{cases}$$

$f(x) = x^{-1}$

$\frac{a}{b} \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{b} \geq \frac{1}{a}$

$a \geq b \Rightarrow \frac{1}{a} \leq \frac{1}{b}$

$a, b > 0$

$$1 = \underbrace{(b-a)}_{1}(b+a) \;\; (*) \Longrightarrow b-a = \frac{1}{b+a} \leq \frac{1}{1} = 1$$

$\Longrightarrow b-a=1$ e substituindo em

$(*)$ obtemos $b+a=1$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} b+a=1 \\ b-a=1 \end{array} \right\} (+)$$

$$\Rightarrow 2b=2 \Rightarrow b=1 \Rightarrow a=0$$

$$\Rightarrow n=a^2=0^2=0$$

$1=c \cdot d \quad , \; c,d \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow (c=1$ e $d=1)$ ou $(c=-1$ e $d=-1)$

Exemplo: Mostre se n é um quadrado perfeito então $n + 2$ não pode ser um quadrado perfeito.

$2 = c \cdot d, \quad c, d \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow \begin{cases} c = 2 \text{ e } d = 1 \\ \text{ou} \\ c = 1 \text{ e } d = 2 \\ \text{ou} \\ c = -2 \text{ e } d = -1 \\ \text{ou} \\ c = -1 \text{ e } d = -2 \end{cases}$$

Exemplo: Mostre que se n e $n+3$ são quadrados perfeitos então $n=1$.

$$1 = c \cdot d \Rightarrow \begin{cases} c = 1 \text{ e } d = 1 \\ \text{ou} \\ c = -1 \text{ e } d = -1 \end{cases}$$

Exemplo: Mostre que se n e $n + 4$ são quadrados perfeitos então $n = 0$.

Exemplo: Mostre que se n e $n + 5$ são quadrados perfeitos então $n = 4$.

Exemplo: Mostre se n é um quadrado perfeito então $n + 6$ não pode ser um quadrado perfeito.

Exemplo: Mostre que se n e $n+1$ são cubos perfeitos então $n=0$, ou $n=-1$