

\* Discente - Paulo Henrique Diniz de Lima Alencar.

\* 1ª prova de matemática discreta → ciência da computação. matrícula: 494837

### 1- Resolução :

a) Se  $m$  é par, então  $m \cdot n$  é par

Devemos mostrar que

$$m \text{ é par} \Rightarrow m \cdot n \text{ é par}$$

De fato,

$$m \text{ é par} \Rightarrow m = 2K, \exists K \in \mathbb{Z} \quad \text{e} \quad n = 2l, \exists l \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow m \cdot n = 2K \cdot 2l$$

$$\Rightarrow m \cdot n = 2(Kl)$$

$$\Rightarrow m \cdot n = 2 \cdot c, \quad c = Kl \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow m \cdot n \text{ é par} \quad \text{///}$$

b) Se  $m, n$  são ímpares, então  $m \cdot n$  é ímpar

Devemos mostrar que

$$m, n \text{ são ímpares} \Rightarrow m \cdot n \text{ é ímpar}$$

De fato,

$$m, n \text{ são ímpares} \Rightarrow \begin{cases} m = 2K + 1, \exists K \in \mathbb{Z} \\ n = 2l + 1, \exists l \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Rightarrow m \cdot n = (2K + 1) \cdot (2l + 1)$$

$$\Rightarrow m \cdot n = 4Kl + 2K + 2l + 1$$

$$\Rightarrow m \cdot n = 2(Kl + K + l) + 1$$

$$\Rightarrow m \cdot n = 2 \cdot c + 1, \quad c = Kl + K + l \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow m \cdot n \text{ é ímpar} \quad \text{///}$$

c) \* Se  $m, n$  são pares então  $m+n$  é par

Devemos mostrar que

$m, n$  são pares  $\Rightarrow m+n$  é par

De fato,

$$m, n \text{ são pares} \Rightarrow \begin{aligned} m &= 2k, \exists k \in \mathbb{Z} \\ n &= 2l, \exists l \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow m+n = 2k+2l$$

$$\Rightarrow m+n = 2(k+l)$$

$$\Rightarrow m+n = 2 \cdot c, c = k+l \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow m+n \text{ é par}$$

\* Se  $m, n$  são ímpares então  $m+n$  é par

Devemos mostrar que

$m, n$  são ímpares  $\Rightarrow m+n$  é par

De fato,

$$m, n \text{ são ímpares} \Rightarrow \begin{aligned} m &= 2k+1, \exists k \in \mathbb{Z} \\ n &= 2l+1, \exists l \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow m+n = (2k+1) + (2l+1)$$

$$\Rightarrow m+n = 2k+2l+2$$

$$\Rightarrow m+n = 2(k+l+1)$$

$$\Rightarrow m+n = 2 \cdot c, c = k+l+1 \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow m+n \text{ é par} //$$



\* Se  $m, n$  são pares então  $m-n$  é par

Devemos mostrar que

$m, n$  são pares  $\Rightarrow m-n$  é par

De fato,

$$m, n \text{ são pares} \Rightarrow \begin{aligned} m &= 2k, \exists k \in \mathbb{Z} \\ n &= 2l, \exists l \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow m-n = 2k-2l$$

$$\Rightarrow m-n = 2(k-l)$$

$$\Rightarrow m-n = 2 \cdot c, \quad c = k-l \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow m-n \text{ é par} //$$

\* Se  $m, n$  são ímpares então  $m-n$  é par

Devemos mostrar que

$m, n$  são ímpares  $\Rightarrow m-n$  é par

De fato,

$$m, n \text{ são ímpares} \Rightarrow \begin{aligned} m &= 2k+1, \exists k \in \mathbb{Z} \\ n &= 2l+1, \exists l \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow m-n = (2k+1) - (2l+1)$$

$$\Rightarrow m-n = 2k-2l+1-1$$

$$\Rightarrow m-n = 2k-2l$$

$$\Rightarrow m-n = 2(k-l)$$

$$\Rightarrow m-n = 2 \cdot c, \quad c = k-l \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow m-n \text{ é par} //$$

d) Devemos mostrar que:

$m, n$  tem paridades distintas  $\Rightarrow m+n$  é ímpar

De fato,

$$m \text{ é par e } n \text{ é ímpar} \Rightarrow m=2k, \exists k \in \mathbb{Z}$$

$$n=2l+1, \exists l \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow m+n = 2k + 2l + 1$$

$$\Rightarrow m+n = 2(k+l) + 1$$

$$\Rightarrow m+n = 2 \cdot c + 1, c = k+l \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow m+n \text{ é ímpar} //$$

Devemos mostrar que:

$m, n$  tem paridades distintas  $\Rightarrow m-n$  é ímpar

De fato,

$$m \text{ é par e } n \text{ é ímpar} \Rightarrow m=2k, \exists k \in \mathbb{Z}$$

$$n=2l+1, \exists l \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow m-n = 2k - (2l+1)$$

$$\Rightarrow m-n = 2k - 2l - 1$$

$$\Rightarrow m-n = 2(k-l) - 1$$

$$\Rightarrow m-n = 2 \cdot c - 1, c = k-l \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow m-n \text{ é ímpar} //$$



## 2 - Resolução:

• Com  $k=2$

\* Devemos mostrar que

$$n \text{ é par} \Rightarrow n^2 \text{ é par}$$

De fato,

$$n \text{ é par} \Rightarrow n = 2k, \exists k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow n^2 = (2k)^2$$

$$\Rightarrow n^2 = 4k^2$$

$$\Rightarrow n^2 = 2(2k^2)$$

$$\Rightarrow n^2 = 2 \cdot C, \quad C = 2k^2 \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow n^2 \text{ é par} //$$

• Com  $k=3$

\* Devemos mostrar que

$$n \text{ é par} \Rightarrow n^3 \text{ é par}$$

De fato,

$$n \text{ é par} \Rightarrow n = 2k, \exists k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow n^3 = (2k)^3$$

$$\Rightarrow n^3 = 8k^3$$

$$\Rightarrow n^3 = 2(4k^3)$$

$$\Rightarrow n^3 = 2 \cdot C, \quad C = 4k^3 \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow n^3 \text{ é par} //$$

• Com  $k=4$

\* Devemos mostrar que

$$n \text{ é par} \Rightarrow n^4 \text{ é par}$$

De fato,

$$n \text{ é par} \Rightarrow n = 2k, \exists k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow n^4 = (2k)^4$$

$$\Rightarrow n^4 = 16k^4$$

$$\Rightarrow n^4 = 2(8k^4)$$

$$\Rightarrow n^4 = 2 \cdot C, \quad C = 8k^4 \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow n^4 \text{ é par} //$$

• com  $K=5$

\* Devemos mostrar que

$n$  é par  $\Rightarrow n^5$  é par

De fato,

$n$  é par  $\Rightarrow n=2k, \exists k \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow n^5 = (2k)^5$$

$$\Rightarrow n^5 = 32k^5$$

$$\Rightarrow n^5 = 2(16k^5)$$

$$\Rightarrow n^5 = 2 \cdot c, \quad c = 16k^5 \in \mathbb{Z}$$

$\Rightarrow n^5$  é par ///

• com  $K=2$

\* Devemos mostrar que

$n$  é ímpar  $\Rightarrow n^2$  é ímpar

De fato,

$n$  é ímpar  $\Rightarrow n=2k+1, \exists k \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow n^2 = (2k+1)^2$$

$$\Rightarrow n^2 = 4k^2 + 4k + 1$$

$$\Rightarrow n^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

$$\Rightarrow n^2 = 2 \cdot c + 1, \quad c = 2k^2 + 2k \in \mathbb{Z}$$

$\Rightarrow n^2$  é ímpar ///

• com  $K=3$

\* Devemos mostrar que

$n$  é ímpar  $\Rightarrow n^3$  é ímpar

De fato

$n$  é ímpar  $\Rightarrow n=2k+1, \exists k \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow n^3 = (2k+1)^3$$

$$\Rightarrow n^3 = (4k^2 + 4k + 1) \cdot (2k+1)$$

$$\Rightarrow n^3 = 8k^3 + 4k^2 + 8k^2 + 4k + 2k + 1$$

$$\Rightarrow n^3 = 8k^3 + 12k^2 + 6k + 1$$

$$\Rightarrow n^3 = 2(4k^3 + 6k^2 + 3k) + 1$$

$$\Rightarrow n^3 = 2 \cdot c + 1, \quad c = 4k^3 + 6k^2 + 3k \in \mathbb{Z}$$

$\Rightarrow n^3$  é ímpar ///



• com  $k=4$  e  $k=5$

\* Devemos mostrar que

$n$  é ímpar  $\Rightarrow n^4$  é ímpar

De fato,

• Se  $n$  é ímpar  $\Rightarrow n^3$  é ímpar (provei na exercício anterior)\*  
 $\Rightarrow n^4 = n^3 \cdot n$  é ímpar (produto de ímpares resulta em ímpar)\*

$\downarrow$   
 $\rightarrow$  ímpar

$\downarrow$   
 $\rightarrow$  ímpar

• Como  $n^4$  é ímpar  $\Rightarrow n^5 = n^4 \cdot n$  é ímpar (produto de ímpares resulta em ímpar)\*

$\downarrow$   
 $\rightarrow$  ímpar

$\downarrow$   
 $\rightarrow$  ímpar

Logo  $n^5$  é ímpar.

3 - Resolução:

Assuma por absurdo que exista um  $x$ , digamos na forma  $\frac{a}{b}$  onde  $b \neq 0$ , que é solução da equação  $9x^5 + 2x^4 - 3x^3 + 2x - 7 = 0$ .

Então, sem perda de generalidade podemos supor que a fração  $\frac{a}{b}$  é irredutível, isto é,  $a$  e  $b$  não tem fatores em comum.

$$9 \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^5 + 2 \left(\frac{a}{b}\right)^4 - 3 \left(\frac{a}{b}\right)^3 + 2 \left(\frac{a}{b}\right) - 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{9a^5}{b^5} + \frac{2a^4}{b^4} - \frac{3a^3}{b^3} + \frac{2a}{b} - 7 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{9a^5}{\cancel{b^5}} \cdot \cancel{b^5} + \frac{2a^4}{\cancel{b^4}} \cdot \cancel{b^4}^1 - \frac{3a^3}{\cancel{b^3}} \cdot \cancel{b^3}^2 + \frac{2a}{\cancel{b}} \cdot \cancel{b^4}^4 - 7 \cdot \cancel{b^5}^5 = 0$$

$$9a^5 + 2a^4 \cdot b - 3a^3 \cdot b^2 + 2a \cdot b^4 - 7b^5 = 0$$



\* Separando em casos:

1º CASO:  $a$  é par e  $b$  é par.

2º CASO:  $a$  é par e  $b$  é ímpar.

3º CASO:  $a$  é ímpar e  $b$  é par.

4º CASO:  $a$  é ímpar e  $b$  é ímpar.

\* 1º CASO: É um absurdo, ele não pode acontecer, pois  $a$  e  $b$  não têm fatores em comum. E esse caso considera que  $a$  e  $b$  possuem 2 como fator comum.

\* 2º CASO:  $a$  é par e  $b$  é ímpar.

$$9a^5 + 2a^4 \cdot b - 3a^3 \cdot b^2 + 2a \cdot b^4 - 7b^5 = 0$$

• Como  $a$  é par, temos  $\begin{cases} a^5 \text{ é par (1)} \\ a^4 \text{ é par (2)} \\ a^3 \text{ é par (3)} \end{cases}$

• Como  $b$  é ímpar, temos  $\begin{cases} b^2 \text{ é ímpar (4)} \\ b^5 \text{ é ímpar (5)} \\ b^4 \text{ é ímpar (6)} \end{cases}$

• Se  $a^5$  é par (1), temos que  $9 \cdot a^5$  é par (7)

• Se  $a^4$  é par (2), temos que  $2 \cdot a^4$  é par (8)

• Então se  $2 \cdot a^4$  é par (8) e  $b$  é ímpar, temos que  $2 \cdot a^4 \cdot b$  é par. (9)

• Se  $a^3$  é par (3), então  $3 \cdot a^3$  é par (10)

Então se  $3 \cdot a^3$  é par (10), temos  $3 \cdot a^3 \cdot b^2$  é par (11)

• Se  $a$  é par, então  $2 \cdot a$  é par (12)

Então se  $2 \cdot a$  é par (12), temos que  $2 \cdot a \cdot b^4$  é par (13)



• Se  $b^5$  é ímpar (5), então  $7 \cdot b^5$  é ímpar (14)

Por (7), (9), obtemos:

$$\underline{9a^5 + 2a^4 \cdot b} \text{ é par (15)}$$

Por (15) e (11), obtemos:

$$\underline{9a^5 + 2a^4 \cdot b - 3a^3 \cdot b^2} \text{ é par (16)}$$

Por (16) e (13), obtemos:

$$\underline{9a^5 + 2a^4 \cdot b - 3a^3 \cdot b^2 + 2a \cdot b^4} \text{ é par (17)}$$

Por fim, por (17) e (14), obtemos

$$\underbrace{\underline{9a^5 + 2a^4 \cdot b - 3a^3 \cdot b^2 + 2a \cdot b^4}}_{\text{par}} - \underbrace{7 \cdot b^5}_{\text{ímpar}} = 0$$

ímpar

\* Absurdo ! pois  $9a^5 + 2a^4 \cdot b - 3a^3 \cdot b^2 + 2a \cdot b^4 - 7 \cdot b^5 = 0$ ,  
e 0 é par.

---

\* 3º CASO :  $a$  é ímpar e  $b$  é par

$$9a^5 + 2a^4 \cdot b - 3a^3 \cdot b^2 + 2a \cdot b^4 - 7b^5 = 0$$

• Como  $a$  é ímpar, temos  $\begin{cases} a^5 \text{ é ímpar (1)} \\ a^4 \text{ é ímpar (2)} \\ a^3 \text{ é ímpar (3)} \end{cases}$



• Como  $b$  é par, temos  $\begin{cases} b^2 \text{ é par (4)} \\ b^5 \text{ é par (5)} \\ b^4 \text{ é par (6)} \end{cases}$

• Se  $a^5$  é ímpar (1), então  $9 \cdot a^5$  é ímpar (7)

• Se  $a^4$  é ímpar (2), então  $2 \cdot a^4$  é par (8)

Então, se  $2 \cdot a^4$  é par, temos  $2 \cdot a^4 \cdot b$  é par (9)

• Se  $a^3$  é ímpar (3), então  $3 \cdot a^3$  é ímpar (10)

Então, se  $3 \cdot a^3$  é ímpar, temos  $3 \cdot a^3 \cdot b^2$  par (11)

• Se  $a$  é ímpar, então  $2 \cdot a$  é par (12)

Então se  $2 \cdot a$  é par (12) temos que  $2 \cdot a \cdot b^4$  é par (13)

• Se  $b^5$  é par, então  $7 \cdot b^5$  é par (14)

Por (7) e (9), obtemos:

$$\underline{9 \cdot a^5} + \underline{2 \cdot a^4 \cdot b} \text{ é ímpar (15)}$$

Por (15) e (11), obtemos:

$$\underline{9 \cdot a^5 + 2 \cdot a^4 \cdot b} - \underline{3a^3 \cdot b^2} \text{ é ímpar (16)}$$

Por (16) e (13), obtemos:

$$\underline{9 \cdot a^5 + 2 \cdot a^4 \cdot b - 3a^3 \cdot b^2} + \underline{2 \cdot a \cdot b^4} \text{ é ímpar (17)}$$

Por fim, por (14) e (17) obtemos

$$\underline{9a^5 + 2a^4 \cdot b - 3a^3 \cdot b^2 + 2a \cdot b^4} - \underline{7b^5} \text{ é ímpar}$$

Absurdo!



É absurdo, pois  $9a^5 + 2a^4 \cdot b - 3a^3 \cdot b^2 + 2a \cdot b^4 - 7b^5 = 0$ , e  
o 0 é um número par.

4º CASO:  $a$  é ímpar e  $b$  é ímpar.

$$9a^5 + 2a^4 \cdot b - 3a^3 \cdot b^2 + 2a \cdot b^4 - 7b^5 = 0$$

• Como  $a$  é ímpar, temos  $\begin{cases} a^5 \text{ é ímpar (1)} \\ a^4 \text{ é ímpar (2)} \\ a^3 \text{ é ímpar (3)} \end{cases}$

• Com  $b$  é ímpar, temos  $\begin{cases} b^2 \text{ é ímpar (4)} \\ b^5 \text{ é ímpar (5)} \\ b^4 \text{ é ímpar (6)} \end{cases}$

• Se  $a^5$  é ímpar (1), então  $9 \cdot a^5$  é ímpar (7)

• Se  $a^4$  é ímpar (2), então  $2 \cdot a^4$  é par (8)

Então, se  $2 \cdot a^4$  é par, temos  $2 \cdot a^4 \cdot b^2$  par (9)

• Se  $a^3$  é ímpar (3), então  $3 \cdot a^3$  é ímpar (10)

Então, se  $3 \cdot a^3$  é ímpar (10), temos  $3 \cdot a^3 \cdot b^2$  ímpar (11)

• Se  $a$  é ímpar, então  $2 \cdot a$  é par (12)

Então, se  $2 \cdot a$  é par (12), temos que  $2 \cdot a \cdot b^4$  é par (13)

• Se  $b^5$  é ímpar (5), então  $7 \cdot b^5$  é ímpar (14)

Por (7) e (9), obtemos:

$$\underline{9a^5 + 2a^4 \cdot b} \text{ é ímpar (15)}$$

Por (15) e (11), obtemos

$$\underline{9a^5 + 2a^4 \cdot b - 3a^3 \cdot b^2} \text{ é par (16)}$$



Por (16) e (13), obtemos:

$$\underline{9a^5 + 2a^4 \cdot b - 3a^3 \cdot b^2 + 2a \cdot b^4} \text{ é Par (17)}$$

Por fim, por (17) e (14), obtemos

$$\underline{9a^5 + 2a^4 \cdot b - 3a^3 \cdot b^2 + 2a \cdot b^4} - \underline{7 \cdot b^5} \text{ é ímpar}$$

Absurdo!

Pois,  $9a^5 + 2a^4 \cdot b - 3a^3 \cdot b^2 + 2a \cdot b^4 - 7 \cdot b^5 = 0$ ,  
e o 0 é um número Par.

---



#### 4 - Resolução:

a)

Devemos mostrar que  $\sqrt[3]{36}$  é irracional

Suponha por absurdo que  $\sqrt[3]{36}$  é RACIONAL, então existem  $a, b$  inteiros, com  $b \neq 0$ , tal que  $\sqrt[3]{36} = \frac{a}{b}$ .

E podemos supor sem perda de Generalidade que a fração  $\frac{a}{b}$  é irredutível, isto é,  $a$  e  $b$  não possuem fatores em comum.

$$\sqrt[3]{36} = \frac{a}{b} \Rightarrow b \cdot \sqrt[3]{36} = a$$

$$\Rightarrow (b \cdot \sqrt[3]{36})^3 = a^3$$

$$\Rightarrow b^3 \cdot (\sqrt[3]{36})^3 = a^3$$

$$\Rightarrow b^3 \cdot 36 = a^3$$

$$\Rightarrow a^3 = 36 \cdot b^3 \quad (*)$$

$$\Rightarrow a^3 = 2(18b^3)$$

$$\Rightarrow a^3 \text{ é par}$$

$$\Rightarrow a \text{ é par}$$

$$\Rightarrow a = 2K, \exists K \in \mathbb{Z}$$

Por meio de (\*) temos

$$a^3 = 36 \cdot b^3$$

$$\Rightarrow (2K)^3 = 36 \cdot b^3$$

$$\Rightarrow 8K^3 = 36 \cdot b^3$$

$$\Rightarrow 2K^3 = 9 \cdot b^3$$

$$\Rightarrow b^3 \text{ é par}$$

pois se  $b^3$  é ímpar  $\Rightarrow 9 \cdot b^3$  é ímpar (produto de número ímpares resulta em ímpar)

$$\Rightarrow 2K^3 \text{ é ímpar}$$

$$\Rightarrow \text{Absurdo!}$$

Assim, com  $a$  e  $b$  possuem o 2 como fator comum, pois  $a$  é par e  $b$  é par

$$\Rightarrow a \text{ e } b \text{ não são irredutíveis}$$

$$\Rightarrow \text{Absurdo!}$$



b) Devemos mostrar que  $\sqrt[3]{972}$  é irracional

$$\text{Sabemos que } \sqrt[3]{972} = \sqrt[3]{36 \cdot 27} = \sqrt[3]{36} \cdot \sqrt[3]{27} =$$

$3 \cdot \sqrt[3]{36}$  é irracional

É irracional (exercício anterior)

→ Racional

\* logo, produto de racional \* irracional resulta em um número irracional (prova abaixo)

Fixando um número racional  $r$  não nulo mostre que

Se  $x$  é irracional, então  $r \cdot x$  é irracional

Devemos mostrar que

Se  $x$  é irracional  $\Rightarrow r \cdot x$  é irracional  
ou equivalentemente:

$$\sim (r \cdot x \text{ é irracional}) \Rightarrow \sim (x \text{ é irracional})$$

isto é,

$$\underbrace{r \cdot x \text{ é racional}}_{\text{hipótese}} \Rightarrow \underbrace{x \text{ é racional}}_{\text{tese}}$$

\* quociente de dois racionais é racional.

De fato, se  $x \cdot r$  é racional  $\Rightarrow \underline{(r \cdot x)}$  é racional

$\Rightarrow x$  é racional



## 6. Resolução -

a) Sabemos que:  $m \cdot n = 5 \iff |m \cdot n| = |5|$

$$\Rightarrow |m| \cdot |n| = 5$$

• Como  $m \neq 0$  (isso porque, se  $m=0 \Rightarrow 0 \cdot n = 5 \Rightarrow$  Absurdo) temos  $|m| > 0$ . Logo,  $|m| \geq 1$  (pois  $|m| \in \mathbb{Z}$ ).

• Com  $n \neq 0$  (isso porque, se  $n=0 \Rightarrow m \cdot 0 = 5 \Rightarrow$  Absurdo) temos  $|n| > 0$ . Logo,  $|n| \geq 1$  (pois  $|n| \in \mathbb{Z}$ ).

• Sabemos que  $|m| \cdot |n| = 5 \iff |m| = \frac{5}{|n|}$

• Porém, sabemos que  $|n| \geq 1$ , então  $5 \geq \frac{5}{|n|}$  ou  $\frac{5}{|n|} \leq 5$

• Portanto  $|m| = \frac{5}{|n|} \leq 5 \Rightarrow |m| \leq 5$

• Como  $|m| \geq 1$  e  $|m| \leq 5$  então,  $1 \leq |m| \leq 5$ . Logo  $|m| = 1$  ou  $|m| = 2$  ou  $|m| = 3$  ou  $|m| = 4$  ou  $|m| = 5$ .

\* Se  $|m| = 1$   $\begin{cases} m=1 \Rightarrow 1 \cdot n = 5 \Rightarrow n=5 & (m=1 \text{ e } n=5) \\ \text{ou} \\ m=-1 \Rightarrow -1 \cdot n = 5 \Rightarrow n=-5 & (m=-1 \text{ e } n=-5) \end{cases}$

\* Se  $|m| = 2$   $\begin{cases} m=2 \Rightarrow 2 \cdot n = 5 \Rightarrow n = \frac{5}{2} \notin \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ m=-2 \Rightarrow -2 \cdot n = 5 \Rightarrow n = -\frac{5}{2} \notin \mathbb{Z} \end{cases}$

\* Se  $|m| = 3$   $\begin{cases} m=3 \Rightarrow 3 \cdot n = 5 \Rightarrow n = \frac{5}{3} \notin \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ m=-3 \Rightarrow -3 \cdot n = 5 \Rightarrow n = -\frac{5}{3} \notin \mathbb{Z} \end{cases}$



$$* \text{ Se } |m| = 4 \begin{cases} m = 4 \Rightarrow 4 \cdot n = 5 \Rightarrow n = \frac{5}{4} \notin \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ m = -4 \Rightarrow -4 \cdot n = 5 \Rightarrow n = -\frac{5}{4} \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$* \text{ Se } |m| = 5 \begin{cases} m = 5 \Rightarrow 5 \cdot n = 5 \Rightarrow n = 1 \quad (m = 5 \text{ e } n = 1) \\ \text{ou} \\ m = -5 \Rightarrow -5 \cdot n = 5 \Rightarrow n = -1 \quad (m = -5 \text{ e } n = -1) \end{cases}$$

b) Provar que se  $n$  e  $n+5$  são quadrados perfeitos, então  $n=4$ .

• Se  $n$  e  $n+5$  são quadrados perfeitos, então  $\begin{cases} n = a^2 \\ n+5 = b^2 \end{cases}$

•  $n+5 = b^2 \Leftrightarrow b^2 = n+5$

$\Rightarrow b^2 = a^2 + 5$

$\Rightarrow b^2 - a^2 = 5 \Rightarrow (b-a)(b+a) = 5$

• Como  $b^2 = n+5$ , temos que  $b^2 = a^2 + 5 \Rightarrow \underbrace{a^2 + 5}_{b^2} > a^2$   
 $b^2 > a^2 \Rightarrow b > a$

• Se  $b > a$ , então  $(b+a) > (b-a)$ . Assim, SPG, assumimos que  $a > 0$  e  $b > 0$ . Com isso e com o item anterior podemos concluir os seguintes pontos:

$$\begin{matrix} >0 & & >0 \\ (b-a) \cdot (b+a) = 5 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} b-a = 1 \text{ e } b+a = 5 \quad [\text{OK}] \\ b-a = -1 \text{ e } b+a = -5 \quad \text{Não pode, pois } a > 0 \text{ e } b > 0 \\ b-a = 5 \text{ e } b+a = 1 \quad \text{Não pode, pois } (b+a) > (b-a) \\ b-a = -5 \text{ e } b+a = -1 \quad \text{Não pode, pois } a > 0 \text{ e } b > 0 \end{cases}$$



• Assim, como  $b - a = 1$  e  $b + a = 5$ , temos:

$$\textcircled{+} \begin{cases} b - a = 1 \\ b + a = 5 \end{cases}$$

---

$$2b = 6$$
$$b = 3$$

\* Se  $b = 3$  e  $b^2 = n + 5$   
temos:  $3^2 = n + 5 \Rightarrow 9 = n + 5$   
 $\Rightarrow n = 4$  ///