- Tarefa - Parte 1
- Ciência da computação
- *Resumo* - capítulo IV - *Relações*
- Estudate - Paulo Henrique Diniz de Lima Alencar

Relações -

Definição -

Par - chama-se par todo conjunto formado por dois elementos. Assim $\{1,2\}$, $\{3,-1\}$, $\{a,b\}$, indicam pares.

Exemplos: $\{4,2\}$, $\{3,8\}$ ...

OBS: Lembrando do conceito de igualdade de conjuntos, fica notório que inverter a ordem dos elementos não produz um novo par. Assim, $\{4,2\} = \{2,4\}$

Definição -

Par ordenado - vamos considerar a noção de par ordenado como conceito primitivo (*). Assim, para cada elemento **a** e cada elemento **b**, admitiremos a existência de um terceiro elemento (a, b)

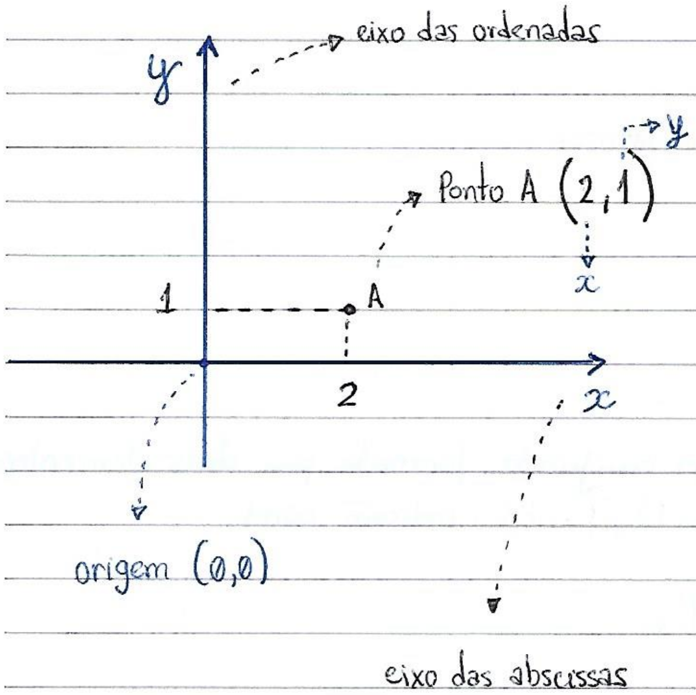
Exemplos: $(1,2)$, $(3,7)$

$$\boxed{(a,b) = (c,d) \iff a = c \text{ e } b = d}$$

Representação gráfica -

OBS.

- plano cartesiano :



a) abscissa – é uma coordenada horizontal num plano cartesiano retangular. Corresponde ao eixo X

b) ordenada – é uma coordenada vertical num plano cartesiano retangular. Corresponde ao eixo Y

c) coordenadas – são números reais, geralmente indicados na forma de um par ordenado

d) eixo das abscissas – é o eixo X

e) eixo das ordenadas – é o eixo Y

f) origem – representado pelo par ordenado $(0,0)$

Produto cartesiano

Definição -

Produto cartesiano – Seja A e B dois conjuntos não vazios. Denominamos produto cartesiano de A por B o conjunto $A \times B$ cujos elementos são todos pares ordenados (x, y) em que o primeiro elemento pertence a A e o segundo elemento pertence a B.

Assim,
$$\boxed{A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ e } y \in B\}}$$

* OBS Lê-se a notação $A \times B$ assim: "A cartesiano B" ou "produto cartesiano de A por B".

OBS: Se A ou B for conjunto vazio, definiremos o produto cartesiano de A por B com sendo o conjunto vazio.

Assim, $A \times \emptyset = \emptyset$

$\emptyset \times B = \emptyset$

$\emptyset \times \emptyset = \emptyset$

Exemplos:

1º) Se $A = \{1, 3, 4\}$ e $B = \{-2, 1\}$

Resolução

$A \times B = \{1, 3, 4\} \times \{-2, 1\}$, $A \times B = \{(1,-2), (1,1), (3,-2), (3,1), (4,-2), (4,1)\}$

$B \times A = \{-2, 1\} \times \{1, 3, 4\} = \{(-2,1), (-2,3), (-2,4), (1,1), (1,3), (1,4)\}$

2º) Se $A = \{2, 3\}$, então o conjunto $A \times A$

Resolução

$A \times A = \{(2,2), (2,3), (3,2), (3,3)\}$

3º) Se $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 3\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 2\}$

Resolução

$A \times B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 3$ e $-2 \leq y \leq 2\}$

$B \times A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \leq x \leq 2$ e $1 \leq y \leq 3\}$

4º) Se $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x \leq 1\}$ e $B = \{3\}$

temos, $A \times B = \{(x, 3) \mid x \in A\}$

Observações -

a) Se $A \neq B$, então $A \times B \neq B \times A$, isto é, o produto cartesiano de dois conjuntos não goza da propriedade comutativa.

b) Se A e B são conjuntos finitos com m e n elementos respectivamente, então $A \times B$ é um conjunto finito com $m \cdot n$ elementos

c) Se A ou B for infinito e nenhum deles for vazio, então $A \times B$ é um conjunto infinito.

Relação binária

Definição -

relação binária de A em B - Dados dois conjuntos A e B, chama-se relação binária de A em B todo subconjunto de R de $A \times B$.

$$\boxed{R \text{ é relação binária de } A \text{ em } B \iff R \subset A \times B.}$$

OBS

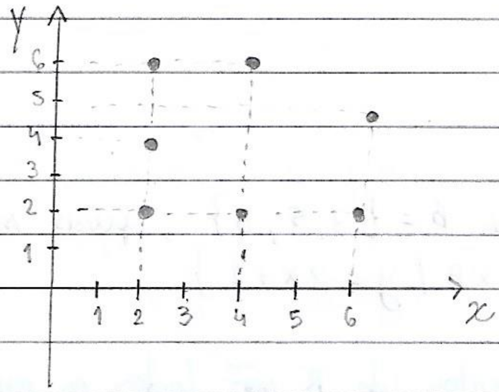
Exemplo ;

Dado o conjunto $A = \{1,2,3,4,5,6\}$, enumere os pares ordenados e construa o gráfico cartesiano da Relação R em A dada por:

$$R = \{(x,y) \in A^2 \mid mdc(x,y) = 2\}$$

Resolução:

$$R = \{(2,2), (2,4), (2,6), (4,2), (4,6)\ (6,2), (6,4)\}$$



Se, eventualmente, os conjuntos A e B forem iguais, todo subconjuntos de $A \times A$ é chamado de relação binária em A.

$$\boxed{R \text{ é relação binária em } A \iff R \subset A \times A}$$

nomenclaturas -

A = conjunto de partida da relação R

B = conjunto de chegada ou contradomínio da relação R.

• Quando o par (X,Y) pertence à relação R, escrevemos xRy

Lê-se: "x erre y"

OBS.

$$\boxed{(X,Y) \in R \iff XRx}$$

• Se o par (x,y) não pertence à relação R, escrevemos $x \not{R} y$

Lê-se "x não erre y"

$$\boxed{(x,y) \notin R \iff x \not{R} y}$$

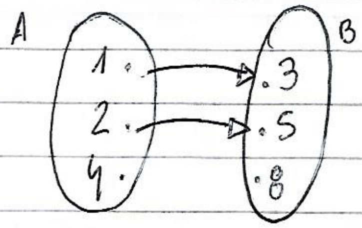
Exemplos:

1º) Se $A = \{1, 2, 4\}$ e $B = \{3, 5, 8\}$, quais são os elementos de relação $R = \{(x,y) \in A \times B \mid y = 2x + 1\}$

Resolução: os elementos de R são todos os pares ordenados de $A \times B$ tais que $x \in A$, $y \in B$ e $y = 2x + 1$

Assim,

$$R = \{(1,3), (2,5)\}$$



$y = 2x + 1$

$\rightarrow y = 2 \cdot 1 + 1 = 3 \quad \therefore (1,3)$

$\rightarrow y = 2 \cdot 2 + 1 = 5 \quad \therefore (2,5)$

$\rightarrow y = 2 \cdot 4 + 1 = 9$

2º) Se $A = \{-1, 0, 1, 2\}$, quais são os elementos de relação $R = \{(x,y) \in A^2 \mid x^2 = y^2\}$?

Resolução: $R = \{(0,0), (1,1), (1,-1), (-1,-1), (-1,1), (2,2)\}$

Domínio e imagem -

Definição -

Domínio - Seja R uma relação de A em B. Chama-se domínio de R o conjunto D de todos os primeiros elementos dos pares ordenados pertencente a R

$$x \in D \Leftrightarrow \exists y, y \in B \mid (x, y) \in R$$

* Decorre da definição de que $D \subset A$.

Definição -

Imagem - chama-se imagem de R o conjuto Im de todos os segundos elementos dos pares ordenados pertencentes à R.

$$y \in Im \Leftrightarrow \exists x, x \in A \mid (x, y) \in R$$

* Decorre da definição que $Im \subset B$

Exemplos:

1º) Sejam os conjuntos $A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ e R a relação binária de A em B definida por:

$$xRy \Leftrightarrow x = y^2$$

Enume os elementos do domínio e da imagem de R:

Resolução -

Seguindo o critério que $xRy \iff x = y^2$, vamos pegar os pares ordenados para R que satisfaça ---- --4

$$R = \{ (1,-1), (0,0) (1,1) (4,2) (4,-2) \}$$

$\therefore$ $D(R) = \{0, 1, 4\}$ ⇝ são os 1°s elementos dos pares ordenados $\in R$

$Im(R = \{-2,-1,0,1\}$ ⇝ são os 2°s elementos dos pares ordenados $\in R$.

2°) Se $A = \{0,2,3,4\}$ e $B = \{1,2,3,5,6\}$, qual o domínio e a imagem da relação $R = \{(x,y) \in A \times B \mid y$ é multiplo de $x\}$?

Resolução -

$$A \times B = \{ (0,1)\ (0,2)\ (0,3)\ (0,5)\ (0,6)$$
$$(2,1)\ (2,2)\ (2,3)\ (2,5)\ (2,6)$$
$$(3,1)\ (3,2)\ (3,3)\ (3,5)\ (3,6)$$
$$(4,1)\ (4,2)\ (4,3)\ (4,5)\ (4,6) \}$$

Assim $R = \{ (2,2); (2,6); (3,3); (3,6) \}$

logo, $\begin{cases} D(R) = \{2,3\} \\ Im(R) = \{2,3,6\} \end{cases}$

Relação inversa -

Definição -

Relação inversa -

OBS

Dada uma relação binária de A em B, consideremos o conjunto

$$R^{-1} = \{ (y, x) \in B \times A \mid (x, y) \in R \}$$

como R^{-1} é subconjunto de $B \times A$, então R^{-1} é uma relação binária de B em A, à qual daremos o nome de Relação inversa de R

$$\boxed{(y, x) \in R^{-1} \iff (x, y) \in R}$$

decorre dessa definição que R^{-1} é o conjunto dos pares ordenados obtidos a partir dos pares ordenados de R invertendo-se a ordem dos termos em cada par.

Exemplos:

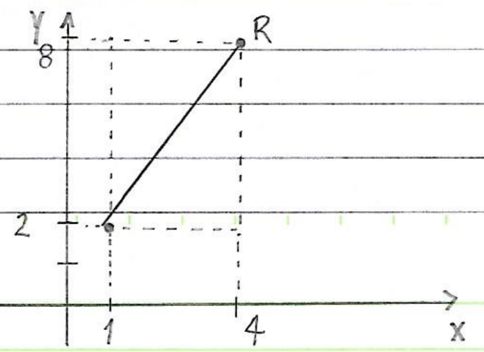
1º) Se $R = \{(1,2), (3,1), (2,3)\}$

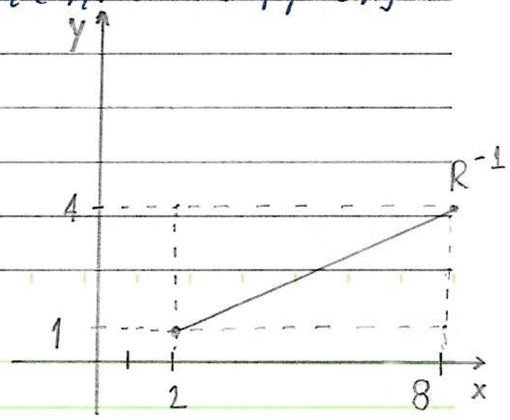
então $R^{-1} = ?$

Resolução: * Basta inverter a ordem dos termos de cada par para obter R^{-1}

Assim, $R^{-1} = \{(2,1), (1,3), (3,2)\}$

2º) Se $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 4\}$ e $B = \{y \in \mathbb{R} \mid 2 \leq y \leq 8\}$, representar no plano cartesiano as relações $R = \{(x,y) \in A \times B \mid y = 2x\}$ e sua inversa R^{-1}.





Propriedades das relações -

1ª) $D(R^{-1}) = Im(R)$, isto é, o domínio de R^{-1} é igual à imagem de R;

2ª) $Im(R^{-1}) = D(R)$, isto é, a imagem de R^{-1} é igual ao domínio R;

3ª) $(R^{-1})^{-1} = R$, isto é, a relação inversa de R^{-1} é a relação de R.