Demonstração por Exaustão

$$\underbrace{p \lor q \Rightarrow r}_{V} \quad \equiv \quad \underbrace{(p \Rightarrow r)}_{V} \land \underbrace{(q \Rightarrow r)}_{V}$$

Ou mais geralmente

$$p_1 \lor p_2 \lor \cdots \lor p_n \Rightarrow r \quad \equiv \quad (p_1 \Rightarrow r) \land (p_2 \Rightarrow r) \land \cdots \land (p_n \Rightarrow r)$$

Exemplo: Mostre que para todo inteiro n, tem-se $n^2 \geq n$.

Consideremos 2 casos

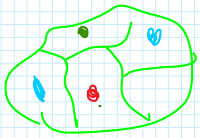
$p: n > 0$

$q: n \leq 0$

$r: n^2 \geq n$

$\left\{\begin{array}{l} \cdot\, n > 0 \\ \cdot\, n = 0 \\ \cdot\, n < 0 \end{array}\right. \Rightarrow n^2 \geq n$

1º Caso: $n > 0$



Então,

$n \geq 1 \Longrightarrow n \cdot n \geq n \cdot 1$

$\Longrightarrow n^2 \geq n$

$(n \in \mathbb{Z} \Longrightarrow r: n^2 \geq n)$ V

$(p \vee q \Longrightarrow r)$ V

$\equiv (p \Longrightarrow r) \wedge (q \Longrightarrow r)$

$\equiv \underbrace{(n > 0 \Rightarrow n^2 \geq n)}_{V} \wedge \underbrace{(n \leq 0 \Rightarrow n^2 \geq n)}_{V}$

2º Caso: $n \leq 0$

Então, como

$n^2 \geq 0$ e $0 \geq n$

temos por transitividade que $n^2 \geq n$.

Função Módulo

$|7| = 7$ $\qquad |-5| = -(-5) = 5$

$|3|^2 = 3^2$

$|x|^2 = x^2$

$$|x| = \begin{cases} x, x \geq 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}$$

$|-5|^2 = 5^2$

Ou equivalentemente,

$$|x| = \left(\sqrt{x^2}\right) = \max\{x, -x\} = dist(x, 0)$$

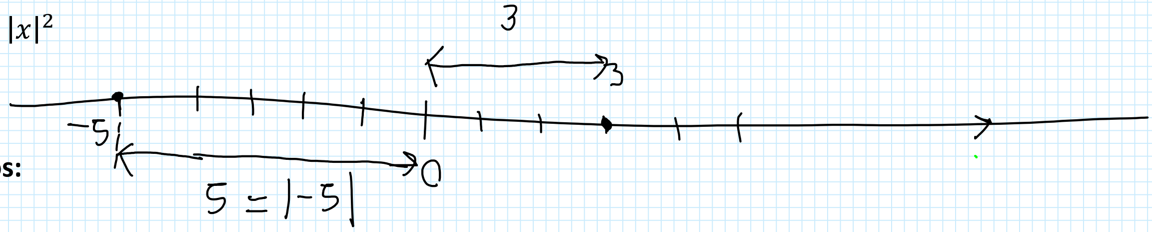
$\sqrt{3^2} = \sqrt{9} = 3 \qquad \sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5$

OBS: das identidades acima segue que $\forall x \in \mathbb{R}$

$\max\{5, -5\} = 5 = |5| = |-5|$

- $x \leq |x|, \qquad -x \leq |x|$
- $x^2 = |x|^2$

Exemplos:



$dis(x, y) = |x - y|$

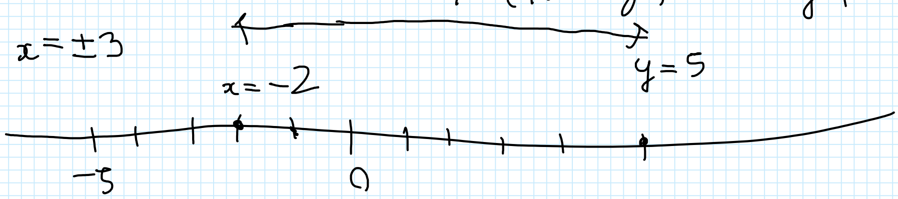
Propriedades: $\forall a > 0$,

1) $|x| = a \quad \Leftrightarrow \; x = a$ ou $x = -a$
2) $|x - x_0| < a \;\Leftrightarrow\; x_0 - a < x < x_0 + a$ $\qquad x$

$|x| = 3 \iff x = 3$ ou $x = -3$

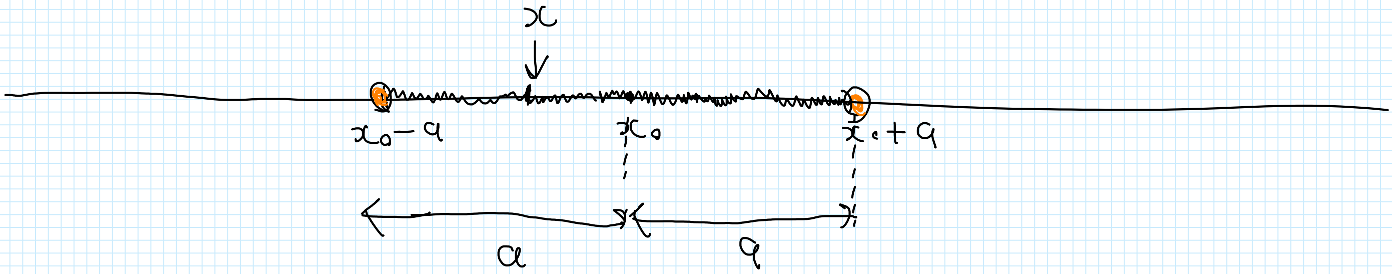
$\iff x = \pm 3$

$7 = dist(x, y) = |x - y|$



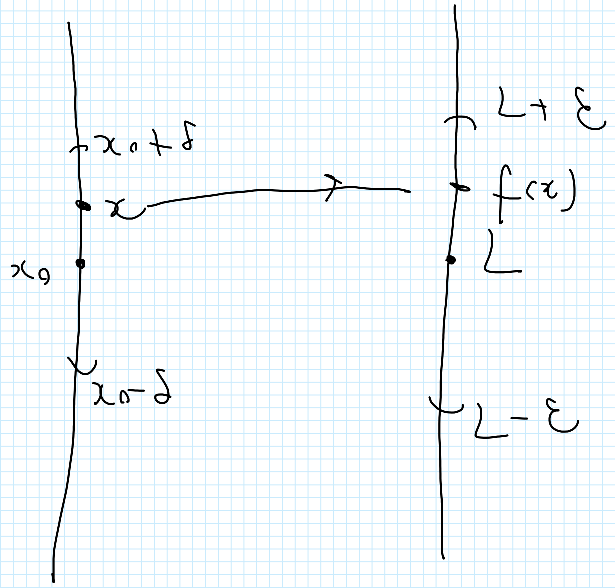
$dist(x, x_0) < a$

$|x - y| = |-2 - 5| = |-7| = 7$



$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon \qquad |y - L| < \varepsilon$

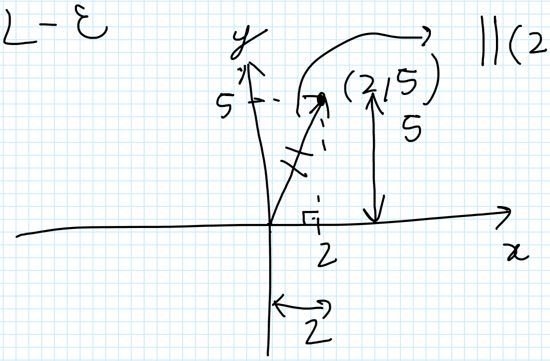
$L - \varepsilon < y < L + \varepsilon$



$L - \varepsilon < y < L + \varepsilon$

$$\lim_{x \to 1} \left(x^3 + 3x^2 + 3x - 1 \right)$$

$$= 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 3\,1 - 1$$



$\|(2,5)\|^2 = 2^2 + 5^2$

$\|(2,5)\| = \sqrt{2^2 + 5^2}$

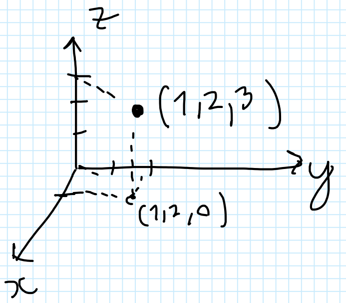
$|(x,y)|$ ✗

$|x| = \sqrt{x^2}$

$\quad\;\, = \text{dist}(x, 0)$

$\|(x,y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\quad\quad\;\, = \text{dist}((x,y), (0,0))$



$\|(x,y,z)\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$(1,2,3)$

Exemplo (Desigualdade Triangular): Mostre que para quaisquer inteiros $x,\ y$

$$|x+y| \leq |x| + |y|$$

OBS: Em dimensões maiores, usamos o conceito de norma, a qual mede o comprimento de um vetor v, e é denotada por $\|v\|$. Neste contexto, também vale a desigualdade triangular:

" Para quaisquer vetores v, w tem-se $\|\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}\| \leq \|\boldsymbol{v}\| + \|\boldsymbol{w}\|$ "

Consideremos 2 casos

$$\begin{cases} a \leq b \\ c \leq d \end{cases} \Rightarrow a + c \leq b + d$$

1º Caso: $x+y \geq 0$

Neste caso,

$$\begin{cases} x \leq |x| \\ y \leq |y| \end{cases}$$

$$|x+y| = x+y \leq |x|+|y|$$

$$\Rightarrow |x+y| \leq |x| + |y|$$

2º Caso: $x+y<0$

$$\begin{cases} -x \leq |x| \\ -y \leq |y| \end{cases}$$

$$|x+y| = -(x+y) = (-x)+(-y) \leq |x| + |y|$$

$$\Rightarrow |x+y| \leq |x| + |y|$$

$$p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

$a, b \geq 0$: $\quad b \geq a \Leftrightarrow b^2 \geq a^2$

$\Downarrow$

$$b^2 - a^2 \geq 0 \iff \underbrace{(b-a)}_{\geq 0}\underbrace{(b+a)}_{\geq 0} \geq 0$$

$$|x+y| \leq |x| + |y| \iff |x+y|^2 \leq (|x|+|y|)^2$$

$$(x+y)^2 \leq (|x|+|y|)^2$$

Exemplo: Mostre que para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$

$$\max\{x, y\} + \min\{x, y\} = x + y$$

Exemplo: Mostre que para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{R}$

a) $\min\{a, \min\{b, c\}\} = \min\{\min\{a, b\}, c\}$

b) $\max\{a, \max\{b, c\}\} = \max\{\max\{a, b\}, c\}$

Exemplo: Mostre que a equação

$$x^3+x+1=0$$

não admite solução nos racionais.

Assuma por absurdo que exista um racional x, digamos da forma $\frac{p}{q}$, $q \neq 0$, que é solução da equação acima. Então irredutível

$$\left(\frac{p}{q}\right)^3+\frac{p}{q}+1=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{p^3}{q^3}+\frac{p}{q}+1=0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{p^3}{q^3}+\frac{p}{q}+1\right)\times q^3=0\times q^3$$

$$\Rightarrow \frac{p^3}{\cancel{q^3}}\cdot\cancel{q^3}+\frac{p}{\cancel{q}}\cdot q^{\cancel{3}\,2}+1\cdot q^3=0$$

$$\boxed{\Rightarrow p^3+p\cdot q^2+q^3=0}$$

1º CASO: p é par e q é par

2º CASO: p é par e q é ímpar

3º CASO: p é ímpar e q é par

4º CASO: p é ímpar e q é ímpar

Percebe que o 1º caso não pode acontecer, pois não têm fatores em comum.

2º CASO:

P = par

I = ímpar

$$\boxed{\Rightarrow \underbrace{\underbrace{\underbrace{p^3}_{P} + \underbrace{p \cdot q^2}_{P}}_{P} + \underbrace{q^3}_{I}}_{I} = 0}_{P}$$

- Como p é par, temos que p^3 é par (1)
- Como p é par, temos que $p\,q^2$ é par (2)
- Como q é ímpar, temos que q^3 é ímpar (3)

Por (1) e (2) obtemos que

$$p^3+pq^2 \text{ é par } (4)$$

Por (3) e (4) obtemos então que

$$(p^3+pq^2)+q^3 \text{ é ímpar}$$

Absurdo, pois $p^3+pq^2+q^3=0$ que é um número par.

Exemplo: Mostre que a equação

$$5x^3 - 7x^2 + 4x - 9 = 0$$

não admite solução nos racionais.

Exemplo: Mostre que a equação

$$x^2 + 3y^2 = 8$$

não admite soluções inteiras

Exemplo: Mostre que a equação

$$x^2 + 3y^2 = 5$$

não admite soluções inteiras

Exemplo: Mostre que não exite um $n \in \mathbb{Z}$ tal que

$$n^2 + n^3 = 100$$

Exemplo: Mostre que a equação

$$2x^2 + 5y^2 = 14$$

não admite soluções inteiras

Exemplo: Mostre que não existem soluçoes inteiras e positivas x, y tais que

$$x^4 + y^4 = 625$$

Exemplo: Mostre que o último dígito decimal de um quadrado perfeito é 0, 1, 4, 5, 6, ou 9

Exemplo: Mostre que o último dígito decimal de uma quarta potência de um inteiro é 0, 1, 5 ou 6.

Exemplo: Mostre que a equação

$n \quad n \quad n$

$$x^3+y^3 = z^3$$

não admite soluções inteiras não triviais no caso em que $x = y$

Exemplo: Mostre que se $0 < r < 1$ então para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$ tem-se

$$(x+y)^r < x^r + y^r$$

Exemplo: Mostre que a equação

$$x^2 + y^2 = 6$$

não admite soluções inteiras

Exemplo: Mostre que se $1 = a \cdot b$ para certos inteiros a, b então $a = 1$ e $b = 1$ ou $a = -1$ e $b = -1$.

Exemplo: Mostre que se $2 = a \cdot b$ para certos inteiros a, b então $a = 2$ e $b = 1$ ou $a = 1$ e $b = 2$ ou $a = -2$ e $b = -1$ ou $a = -1$ e $b = -2$.

Exemplo: Mostre que se $3 = a \cdot b$ para certos inteiros a, b então $a = 3$ e $b = 1$ ou $a = 1$ e $b = 3$ ou $a = -3$ e $b = -1$ ou $a = -1$ e $b = -3$.