Demonstração por Contraposição

$$(\sim p \Rightarrow \sim q) \not\equiv (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$$

V V

F F

$$\big(\underbrace{x=2}_{p} \Rightarrow \underbrace{x^2=4}_{q}\big) \equiv V$$

$$\equiv \big(x^2 \neq 4 \Rightarrow x \neq 2\big) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$$

$$\big(\overbrace{x \neq 2}^{\sim p} \Rightarrow \overbrace{x^2 \neq 4}^{\sim q}\big) \quad F$$

$x = -2$

$$\big(-2 \neq 2 \Rightarrow (-2)^2 \neq 4\big) \equiv F$$

https://meet.google.com/maz-hqtd-snn

https://docs.google.com/forms/d/1WSP4GhufBPpN1SmNUiPRFTc5rEoijAmRlzNVtTT2nWo/edit https://meet.google.com/maz-hqtd-snn

Exemplo 1: Mostre que se n^2 é ímpar, então n é ímpar

OBS: como já provamos que "n ímpar $\Rightarrow$ $\overset{n^3}{n^2}$ é ímpar", este exemplo exemplo nos permite concluir na verdade que

$$n \text{ é ímpar} \Leftrightarrow n^2 \text{ é ímpar}$$

$n^2 = 9 \Rightarrow n = \pm 3$

Devemos mostrar que

n^2 é ímpar $\Rightarrow$ n é ímpar

$\Downarrow$

$n^2 = 2k+1, \exists k \in \mathbb{Z}$

$\Downarrow$

$n = \pm\sqrt{2k+1} \overset{?}{\Longrightarrow} n = 2l+1, \quad \exists l \in \mathbb{Z}$

$\sim(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge (\sim q)$

ou equilentemente,

$\sim$(n é ímpar) $\Rightarrow$ $\sim$(n^2 é ímpar)

isto é,

n é par $\Rightarrow$ n^2 é par

$p \Longrightarrow q$

$\not\equiv \ \sim p \Longrightarrow \sim q$

n é par $\Rightarrow$ $n = 2k, \ \exists k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow n^2 &= (2k)^2 \\ &= 2^2 k^2 \\ &= 4k^2 \\ &= 2.\underbrace{(2k^2)}_{c} \end{aligned}$$

$\Rightarrow n^2 = 2c \quad , \quad c = 2k^2$

$\Rightarrow n^2$ é par

Exemplo 2: Mostre as seguintes implicações

a) n^2 é par $\Rightarrow$ n é par

b) n^3 é ímpar $\Rightarrow$ n é ímpar

c) n^3 é par $\Rightarrow$ n é par

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$n=5 \rightarrow k=2$

$n=7 \rightarrow k=3$

$(ab)^n = a^n \cdot b^n$

n é ímpar $\Rightarrow$ n^3 é ímpar

$(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b)$

$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

n é ímpar $\Rightarrow n = 2k+1, \ \exists k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow n^3 = (2k+1)^3$

$= (2k)^3 + 3.(2k)^2.1 + 3.(2k)1^2 + 1^3$

$= 2^3k^3 + 3.2^2.k^2 + 6k + 1$

$= 8k^3 + 12k^2 + 6k + 1$

$= 2.4k^3 + 2.6k^2 + 2.3k + 1$

$= 2(\underbrace{4k^3 + 6k^2 + 3k}_{c}) + 1$

$\Rightarrow n^3 = 2c + 1, \quad c = 4k^3 + 6k^2 + 3k$

$\Rightarrow n^3$ é ímpar

Exemplo 3: Mostre que se $3n^3 + 2$ é ímpar, então n é ímpar.

$3n^3+2$ é ímpar $\Rightarrow 3n^3+2 = 2k+1, \exists k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow 3n^3 = 2k-1$

$\Rightarrow n^3 = \dfrac{2k-1}{3}$

$\Rightarrow n = \sqrt[3]{\dfrac{2k-1}{3}}$

$\overset{?}{\Rightarrow} n = 2l+1, \quad \exists l \in \mathbb{Z}$

De fato, devemos mostrar que

$3n^3+2$ ímpar $\Rightarrow n$ é ímpar

ou equivalentemente

$\sim(n$ é ímpar$) \Rightarrow \sim(3n^3+2$ é ímpar$)$

isto é,

n é par $\Rightarrow \underbrace{\underbrace{3\overset{\text{par}}{n^3}}_{\text{par}}+2}_{\text{é par}}$ é par

n é par $\Rightarrow n^3$ é par (exercício passado)

$\Rightarrow 3n^3$ é par (exercício passado)

$\Rightarrow 3n^3 + 2$ é par, pois é a soma de dois números pares

n é par $\Rightarrow n = 2k, \exists k \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow 3n^3 + 2 = 3(2k)^3 + 2$$

$$= 3 \cdot 2^3 \cdot k^3 + 2$$

$$= 24k^3 + 2$$

$$= 2 \cdot 12k^3 + 2 \cdot 1$$

$$= 2 \cdot \underbrace{(12k^3 + 1)}_{c}$$

$$\Rightarrow 3n^3 + 2 = 2c, \quad c = 12k^3 + 1$$

$$\Rightarrow 3n^3 + 2 \text{ é par}$$

Exemplo 4: Mostre que se $5n^3 - 3n^2 + 7n + 2$ é par, então n é par.

Exemplo 5: Mostre que se para certos inteiros x, y, z, o número $8x^{2020} + 7y^3 + 5z^2$ for um número par então $y + z$ é par.

$8x^{2020} + 7y^3 + 5z^2$ é par $\Longrightarrow y + z$ é par

$\Downarrow$

$8x^{2020} + 7y^3 + 5z^2 = 2k, \ \exists k \in \mathbb{Z}$

$\Downarrow$

$$7y^3 + 5z^2 = 2k - 8x^{2020}$$
$$= 2(k - 4x^{2020})$$

$\Longrightarrow 7y^3 + 5z^2$ é par

Devemos mostrar que

$8x^{2020} + 7y^3 + 5z^2$ é par $\Longrightarrow y + z$ é par

ou equivalentemente,

$y + z$ é ímpar $\Longrightarrow 8x^{2020} + 7y^3 + 5z^2$ é ímpar

$\Downarrow$

$y + z = 2k + 1, \ \exists k \in \mathbb{Z}$

- $y = 2k + 1 - z$
- $z^2 = (2k + 1 - y)^2$

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

$(\cancel{8x^{2020}} + 7y^3 + 5z^2) - \underbrace{\cancel{8x^{2020}}}_{2(4x^{2020})}$ é par

$\Longrightarrow 7y^3 + 5z^2$ é par

$(7y^3 + 5z^2) - (6y^3 + 4z^2)$ é par

$\Rightarrow (7y^3+5z^2) - \underbrace{(6y^3+4z^2)}_{2(3y^3+2z^2)}$ é par

$\Rightarrow y^3+z^2$ é par

2

$\Rightarrow y^3, z^2$ têm mesma paridade
(exercício passado)

$\Rightarrow y, z$ têm mesma paridade
(pois y, y^3 têm mesma paridade
z, z^2 têm mesma paridade)

$\Rightarrow y+z$ é par (exercício passado)

$y+z$ é ímpar $\Rightarrow$ y, z têm paridades distintas

$\Rightarrow y^3, z^2$ têm paridades distintas

$\Rightarrow y^3+z^2$ é ímpar

$\Rightarrow \underbrace{(y^3+z^2)}_{\text{ímpar}} + \underbrace{(6y^3+4z^2+8x^{2020})}_{\text{par}}$ é ímpar

$\Rightarrow 8x^{2020}+7y^3+5z^2$ é ímpar

Exemplo 6: Mostre que se para certos inteiros x, y, z, w o número $2021x^3 - 2020y^2 + 2021z^3 + 2020w^2$ for um número ímpar então $x + z$ é ímpar.

5. Demonstre que se $m + n$ e $n + p$ são números inteiros pares, em que m, n e p são números inteiros, então $m + p$ é par. Que tipo de demonstração você utilizou?

$$\begin{cases} m + n = 2k \\ n + p = 2l \end{cases}$$

Exemplo 7: Mostre que se $n = ab$ então $a \leq \sqrt{n}$ ou $b \leq \sqrt{n}$ $(a, b, n > 0)$

OBS: este exemplo será útil mais na frente para provarmos o seguinte critério sobre números primos: '' Se nenhum dos primos $\leq \sqrt{n}$ dividir o n, então ele tem que ser um número primo.''

$n = 113$

$1 < a < 113, \quad a \mid 113$

$p \mid a \Rightarrow p \mid 113$

$1 < p < 113$

$10^2 = 100 < 113 < 121 = 11^2$

$\sqrt{100} < \sqrt{113} < \sqrt{121}$

$10 < \sqrt{113} < 11$

$p \leq 10 < \sqrt{113} = 10, *$

$2, 3, 5, 7$

$113 \div 7 = 16$, resto (1) ($113 - 7 \cdot 1 = 43$)

$\sim(p \vee q) \equiv (\sim p) \wedge (\sim q)$

Devemos mostrar que

$n = ab \Rightarrow a \leq \sqrt{n}$ ou $b \leq \sqrt{n}$

ou equivalentemente

$\sim(\underbrace{a \leq \sqrt{n}}_{p}$ ou $\underbrace{b \leq \sqrt{n}}_{q}) \Rightarrow \sim(n = ab)$

ou seja

$a > \sqrt{n}$ e $b > \sqrt{n} \implies n \neq ab$

Com efeito:

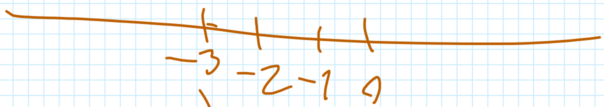
$a > \sqrt{n}$ e $b > \sqrt{n} \implies a.b > \sqrt{n}.\sqrt{n}$

$\implies ab > (\sqrt{n})^2$

$\implies a.b > n$

$\implies ab \neq n$ ($\iff ab < n$ ou $ab > n$)

$$\begin{cases} a > b \\ c > d \\ a,b,c,d > 0 \end{cases} \implies a.c > b.d$$



$3 > 2 \quad \times(-1)$

$\not\Rightarrow (-1)3 > (-1)2$

$-3 > -2$

Exemplo 8: Mostre as seguintes implicações

a) se $n = abc$ então $a \geq \sqrt[3]{n}$ ou $b \geq \sqrt[3]{n}$ ou $c \geq \sqrt[3]{n}$

b) se $n = \frac{a+b+c}{3}$ então $a \leq n$ ou $b \leq n$ ou $c \leq n$

Exemplo 9: Fixado um número racional r não nulo mostre que

$\sqrt{2}$

a) Se x é irracional, então $r \pm x$ é irracional

$1+\sqrt{2}$ é irracional

b) Se x é irracional, então $r.x$ é irracional

$2+\sqrt{2}$ //

c) Se x é irracional, então $\frac{r}{x}$ é irracional

$3+\sqrt{2}$ //

$\vdots$

$n+\sqrt{2}$ // , $\forall n \in \mathbb{Z}$

a) Devemos mostrar que

x é irracional $\Longrightarrow$ $r+x$ é irracional

ou equivalentemente,

$r+x$ é racional $\Longrightarrow$ x é racional

De fato,

$r+x$ é racional $\Rightarrow$ $(\cancel{r}+x)-\cancel{r}$ é racional (diferença de racionais é racional)

$\Longrightarrow x$ é racional