UFC

Universidade Federal do Ceará

Nome: **Matricula:**
Curso: **Nota:**

$2^{\underline{a}}$ Avaliação Parcial de Matemática Discreta

Orientações:
1. A soluções da prova devem ser feitas a mão (**Soluções digitadas serão desconsideradas**).
2. A prova tem um total de 14,8 pontos, dos quais o aluno deverá fazer 10 pontos.
3. Soluções **idênticas** em provas distintas serão consideradas cópias, e portanto serão **anuladas**.
4. A prova teve início às 08h do dia 05/03/2021 e o aluno terá até às 07h59 do dia 15/03/2021 para resolver, escanear e anexar na atividade postada no SIGAA.

1. (1,6 Pontos) Use indução fraca para mostrar que $\forall n \in \mathbb{N}$

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \cdots + n \cdot (n+1) \cdot (n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

2. (1,6 Pontos) Use indução fraca para mostrar que $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$$

3. (1,6 Pontos) Para $j \in \mathbb{N}$, considere a sequência

$$H_j = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{j}$$

Use indução fraca para mostrar que $H_{2^n} \leq 1 + n$, $\forall n \in \mathbb{N}$

4. (1,6 Pontos) Use indução forte para mostrar que a sequência de Fibonacci definida por

$$\begin{cases} F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, & n \geq 3 \\ F_1 = 1; \ F_2 = 1 \end{cases}$$

satisfaz a fórmula

$$F_n = \frac{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

5. (1,6 Pontos) Use indução forte para mostrar que qualquer valor postal maior ou igual a 64 unidades monetárias pode ser obtido usando-se somente selos com valor de 5 e 17.

6. (2 Pontos) Mostre que para quaisquer inteiros a, b, c

a) (0,2 Pontos) $a|0$

b) (0,2 Pontos) $1|a$

c) (0,2 Pontos) $a|1 \Rightarrow a = \pm 1$

d) (0,2 Pontos) $a|a$

e) (0,2 Pontos) $a|b \Rightarrow a|kb$, $\forall k \in \mathbb{Z}$

f) (0,2 Pontos) $a|b$, $b|a \Rightarrow a = \pm b$

g) (0,2 Pontos) $a|b$, $b|c \Rightarrow a|c$

h) (0,2 Pontos) $a|b$, $c|d \Rightarrow ac|bd$

i) (0,2 Pontos) $a|b$, $b \neq 0 \Rightarrow |a| \leq |b|$

j) (0,2 Pontos) $a|b$, $a|c \Rightarrow a|cx + dy$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{Z}$

7. (1,6 Pontos) Use os itens $d)$, $e)$ e $j)$ da questão anterior para encontrar todos os inteiros positivos n tais que

$$2n + 1 | 3n^2 + 3$$

8. (1,6 Pontos) Use indução fraca, ou o algoritmo da divisão para mostrar que

$$\frac{n^3}{3} + \frac{n^5}{5} + \frac{7n}{15}$$

é um inteiro positivo $\forall n \in \mathbb{N}$

9. (1,6 Pontos) Use o algoritmo da divisão para mostrar que o cubo de qualquer inteiro é da forma $9k$, $9k + 1$, ou $9k + 8$.

Boa Prova!