Breve Ementa

- **Técnicas de Demonstração**
- **Princípio da Indução**
- **Teoria dos Números**

https://meet.google.com/maz-hqtd-snn

Demonstração Direta

- p =hipótese
- q =tese

$$\boldsymbol{p \Rightarrow q}$$

k	$2k$
0	$2.0=0$
-1	$2(-1)=-2$
-2	$2(-2)=-4$
-3	$2(-3)=-6$

Definição 1: Dizemos que um número $n \in \mathbb{Z}$ é par se existir um inteiro k tal que

$$\boldsymbol{n = 2k}$$

Definição 2: Dizemos que um número $n \in \mathbb{Z}$ é ímpar se existir um inteiro k tal que

$$\boldsymbol{n = 2k + 1} = 2(k+1) - 1$$

$$= 2k + 2 - 1 = 2k + 1$$

Exemplos:

k	$2k+1$
0	$2.0+1=1=2.1-1$
1	$2.1+1=3=2.2-1$
2	$2.2+1=5=2.3-1$

Exemplo 1 : Mostre que se n é par, então n^2 também é par.

n	n^2
0	$0^2=0$
2	$2^2=4$
4	$4^2=16$
6	$6^2=36$

$$(ab)^n = a^n b^n$$

Devemos mostrar que

$$n \text{ é par} \Longrightarrow n^2 \text{ é par}$$

(Se n é par então n^2 é par) $\forall$

De fato (Com efeito)

n é par $\Longrightarrow n=2K$, $\exists K \in \mathbb{Z}$ $\Longleftrightarrow \exists K \in \mathbb{Z}, n=2K$

$$\Longrightarrow n^2=(2K)^2$$

$$\Longrightarrow n^2 = 2^2 K^2$$

$$\Longrightarrow n^2 = 4K^2$$

$$\Longrightarrow n^2 = 2\underbrace{(2K^2)}_{C}$$

$$\Longrightarrow n^2 = 2C, \quad C = 2K^2$$

$$\Longrightarrow n^2 \text{ é par}$$

Exemplo 2 : Mostre que se n é ímpar, então n^2 também é ímpar.

$n = 2k+1 \longrightarrow n^2 = 2C+1$

Exemplo 3: Seja m um inteiro qualquer. Mostre que

a) Se m é par então m^3 é par.

b) Se m é ímpar então m^3 é ímpar.

Exemplo 4: Prove que se m, n são ímpares então $m \cdot n$ também é ímpar

$a.b + a.c + a.d = a(b+c+d)$

Devemos mostrar que

m, n são ímpares $\Longrightarrow$ $m.n$ é ímpar

$m+n \to 2(*)+1$

De fato (Com efeito)

m, n são ímpares $\Longrightarrow$ $m = 2k+1$, $\exists\, k \in \mathbb{Z}$

$n = 2\ell+1$, $\exists\, \ell \in \mathbb{Z}$

$\Longrightarrow m.n = (2k+1)(2\ell+1)$

$\Longrightarrow m.n = (2k)(2\ell) + (2k).1 + 1.(2\ell) + 1.1$

$\Longrightarrow m.n = 4k\ell + 2k + 2\ell + 1$

$\Longrightarrow m.n = 2.(2k\ell) + 2k + 2\ell + 1$

$\Longrightarrow m\,n = 2\underbrace{(2k\ell + k + \ell)}_{C} + 1$

$\Longrightarrow m\,n = 2C + 1$, $C = 2k\ell + k + \ell$

$\Longrightarrow m.n$ é ímpar

$\underset{\text{ímpar}}{m = n} \Longrightarrow \underbrace{m.n}_{n^2}$ é ímpar

$n^2 + n + 41$ é primo $\forall n \geq 0$

n	n^2+n+41
0	$0^2 + 0 + 41 = 41$ é primo
1	$1^2 + 1 + 41 = 43$ é primo
2	$2^2 + 2 + 41 = 47$ é primo

2	$2^2+2+41 = 47$ é primo
$\vdots$	
39	$39^2+39+41$ é primo
40	$40^2+40+41 = 40.40+40.1+41$

$$= 40.(40+1)+41$$

$$= 40.41+1.41$$

$$= 41.(40+1)$$

$= 41^2$ não é primo

Exemplo 5: Se m é um inteiro par, então $\forall n \in \mathbb{Z}, m \cdot n$ também é um número par.

Exemplo 6: Mostre que para quaisquer inteiros a, b

a) Se a, b são pares então $a + b$ é par.

b) Se a, b são ímpares então $a + b$ também é par.

c) Se a é par e b é ímpar então $a + b$ é ímpar

OBS: Nos intens a) e b) dizemos que a, b **têm mesma paridade**, enquanto que no item c) falamos que a, b **têm paridades distintas.**

Definição: Dizemos que um número $a \in \mathbb{Z}$ é um quadrado perfeito, se existir um inteiro k tal que

$$a = k^2$$

Exemplos:

$1 = 1^2$

$4 = 2^2$

$9 = 3^2$

$16 = 4^2$

$25 = 5^2$

Exemplo 7: Mostre que se a, b são quadrados perfeitos, então $a \cdot b$ também é um quadrado perfeito

Devemos mostrar que

a, b são quadrados perfeitos $\Longrightarrow$ $a.b$ é quadrado perfeito

$$a^n . b^n = (a.b)^n$$

De fato,

a, b são quadrados perfeitos $\Longrightarrow$ $a = k^2, \; \exists k \in \mathbb{Z}$

$b = l^2, \; \exists l \in \mathbb{Z}$

$$\Longrightarrow a.b = k^2 . l^2$$

$$\Longrightarrow a.b = (\underbrace{k.l}_{c})^2$$

$$\Longrightarrow a.b = c^2, \quad c = k.l$$

$\Longrightarrow$ $a.b$ é quadrado perfeito

7. Use uma demonstração direta para mostrar que todo número inteiro ímpar é a diferença de dois quadrados.

$$1 = 1^2 - 0^2 = 2.0 + 1$$
$$3 = 2^2 - 1^2 = 2.1 + 1$$
$$5 = 3^2 - 2^2 = 2.2 + 1$$
$$7 = 4^2 - 3^2 = 2.3 + 1$$

$\ldots$

$= 2k + 1$

Definição: Dizemos que um número r é racional se existiem inteiros p, q com $q \neq 0$ tais que

$$r = \frac{p}{q}$$

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$$

Notação: $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

$\mathbb{Q}$ = conjunto dos números racionais

$$= \left\{ \frac{p}{q} \;/\; p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$$

Exemplos:

$$\frac{2}{7}, \frac{5}{8}, \frac{1}{9}$$

Exemplo 8: Sejam r, s dois racionais quaiquer. Mostre que os números a seguir também são racionais

a) $r \pm s$

b) $r \cdot s$

c) $\frac{r}{s}$ se $s \neq 0$

$s = \frac{c}{d} \to c \neq 0$

$r = \frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$

$b \cdot d = 0$

$s = \frac{c}{d}$, $c, d \in \mathbb{Z}$, $d \neq 0$

$\Rightarrow b = 0$ ou $d = 0$

$r + s = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$

$ad + bc = p \in \mathbb{Z}$

$b \cdot d = q \in \mathbb{Z}$, $\underbrace{b \cdot d}_{q} \neq 0$

$\frac{1}{3} + \frac{2}{7} = \frac{1 \cdot 7 + 2 \cdot 3}{3 \cdot 7} = \frac{7 + 6}{21} = \frac{13}{21}$

$r - s = \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{b \cdot d} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$

$p = a \cdot d - bc \in \mathbb{Z}$

$q = b \cdot d \in \mathbb{Z}$

$\neq 0$

$r \cdot s = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$

$\frac{2}{7} \cdot \frac{14}{5} = \frac{2 \cdot \cancel{14}^{\,2}}{\cancel{7}_{\,1} \cdot 5} = \frac{4}{5}$

$= \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$

$p = a \cdot c \in \mathbb{Z}$

$q = b \cdot d \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$

$\frac{r}{s} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} = \frac{p}{q}$

$p = a \cdot d \in \mathbb{Z}$

$q = b \cdot c \in \mathbb{Z}$

$\neq 0$

$\in \mathbb{Q}$

5 $\frac{c}{d}$ b c $b.c$ $7 \in \mathbb{Q}$ $q = b.c \in \mathbb{Z}$ $\neq 0$