Lista 1 - MAC0320

Paulo Henrique Albuquerque, NUSP = 12542251

E1. Seja G um grafo simples com n vértices. Se G tem exatamente $n-1$ vértices de grau ímpar, quantos vértices de grau ímpar (dê o valor em função de n) há em $\bar{G}$ (o complemento de G)? Justifique.

Solução. Sejam V_I o conjunto de $n-1$ vértices de G que tem grau ímpar e u o único vértice de grau par. Sabemos que $\sum_{v \in V} g_G(v) = 2|A(G)|$, então

$$\sum_{v \in V_I} g_G(v) = 2|A(G)| - g_G(u)$$

Como cada termo do somatório acima é ímpar e o lado direito da equação é par, segue que a quantidade de termos $n-1$ do somatório é par.

Agora, perceba que, como G é simples, temos para todo vértice x

$$g_G(x) + g_{\bar{G}}(x) = n - 1$$

Então, $g_{\bar{G}}(x) = (n-1) - g_G(x)$. Portanto, como $n-1$ é par, $g_{\bar{G}}(x)$ é ímpar para todo $x \in V_I$ e é par para $x = u$. Ou seja, a quantidade de vértices de grau ímpar em $\bar{G}$ é $n-1$.

E2. (a) Afirmação A: "Num grupo com n pessoas, $n \geq 2$, há pelo menos duas com o mesmo número de amigos" (Considerar que a relação de amizade é simétrica.) Escreva afirmação A na linguagem de grafos (justifique a construção) e prove-a.

Solução. Na linguagem de grafos, a afirmação a ser provada é a seguinte.

Proposição 1. Se G é um grafo simples com pelo menos 2 vértices, há pelo menos dois vértices de mesmo grau.

Prova. Observe que, como G é simples, $g(v) \in \{0, 1, 2, \ldots, |V| - 1\}$. Mas, se existir um vértice de grau $|V|-1$ não pode haver um vértice de grau 0. De fato, se $g(v) = n-1$, v é adjacente a todos os outros vértices do grafo, o que implica a não existência de vértices isolados. A recíproca também é verdadeira: se existir um vértice de grau 0 não pode haver um vértice de grau $|V|-1$. Ou seja, de qualquer forma, existem somente $|V|-1$ valores que os graus dos $|V|$ vértices de G podem assumir. Pelo princípio da cada dos pombos, segue que há pelo menos dois vértices de mesmo grau.

$\square$

(b) Afirmação B: "Em qualquer grupo de 5 pessoas, se quaisquer duas delas têm exatamente um amigo em comum, então existe uma pessoa que é amiga de todos". Escreva a afirmação B na linguagem de grafos (justifique a construção) e prove-a.

Solução. Na linguagem de grafos, a afirmação a ser provada é a seguinte.

Proposição 2. Se G é um grafo simples com 5 vértices e quaisquer dois vértices têm exatamente um vértice adjacente em comum, então existe um vértice que é adjacente a todos os outros, ou seja, que tem grau 4.

Prova. Para todos os $\binom{5}{2} = 10$ pares de vértices, existe exatamente um vértice que é adjacente aos dois. Então, pelo princípio da casa dos pombos, existe um vértice z que é o único vértice adjacente a pelo menos dois pares distintos de vértices. Sejam $\{u, v\}$ e $\{x, y\}$ dois desses pelos menos dois pares distintos. Temos dois casos: *(i)* $u \neq x, v \neq y$, *(ii)* $u = x, v \neq y$, que representam, sem perda de generalidade, os dois casos possíveis referentes a interseção entre $\{u, v\}$ e $\{x, y\}$: há um ou zero elementos comuns. No primeiro caso, $g(z) = 4$, pois é adjacente a quatro vértices distintos u, v, x e y.

O segundo caso é um pouco mais complicado. A priori, z é adjacente a 3 vértices distintos u, v, y. Seja r o vértice restante do grafo. r deve ser adjacente a exatamente um vértice do conjunto $\{u, v, y\}$. Caso fosse vizinho de mais de um vértice desse conjunto, ou até mesmo se não fosse vizinho de nenhum deles, a condição de que dois vertices tem exatamente vizinho em comum não seria satisfeita. Suponha, sem perda de generalidade, r vizinho a u. Para satisfazer a condição citada, r deve ser vizinho de z (este é o vizinho comum entre r e v). Conclusão: z é vizinho de todos os outros 4 vértices.

$\square$

E3. Caracterize (descreva como são) os grafos bipartidos de diâmetro 2. Prove sua afirmação.

Solução. Sejam X e Y as partições de um grafo bipartido de diâmetro 2. Além disso, sejam x um vértice de X e y um vértice de Y. Se x e y não são adjacentes, segue que a distância entre x e y é pelo menos 3. De fato, como não há conexão entre vértices de um mesma partição, um caminho de x a y deve primeiro passar por outro vértice de Y, depois por algum outro vértice em X. Portanto, como $diam(G) = 2$, segue que x e y são adjacentes. Como x e y são arbitrários, todo vértice de X deve ser adjacente a todos os vértices de Y. Então, os grafos bipartidos de diâmetro 2 são na verdade grafos bipartidos completos.

E4. Um grafo é *auto-complementar* se é simples e é isomorfo ao seu complemento. Mostre que, se G é um grafo *auto-complementar* de ordem n, então $n \equiv 0(mod4)$ ou $n \equiv 1(mod4)$. (Os resultados usados em cada passagem que não sobre grafos deverão ser enunciados.)

Solução. $G \cup \bar{G} = K_n$. Como G e $\bar{G}$ não tem arestas em comum, segue que

$$|A(G)| + |A(\bar{G})| = |A(K_n)| = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Agora, usamos o fato de G ser auto-complementar para concluir que $|A(G)| = |A(\bar{G})|$. Isso é verdade pois se um grafo é isomorfo ao outro eles têm o mesmo número de arestas.

Segue que

$$4|A(G)| = n(n-1) \to n(n-1) \equiv 0(mod4)$$

Daí, concluímos que $n \equiv 0(mod4)$ ou $n - 1 \equiv 0(mod4) \to n \equiv 1(mod4)$.

$\square$

E5. É possivel que um grafo auto-complementar de ordem 100 tenha exatamente um vértice de grau 50? Justifique.

Solução.

Bônus 1. Dizemos que um grafo é ig2 se é simples e tem exatamente dois vértices de mesmo grau (terminologia para fins deste exercício).

(a) Prove que, para todo $n \geq 2$, existe um grafo ig2 de ordem n. Desenhe exemplos de tais grafos para $n \in \{2, 3, 4, 5, 7\}$.

Solução.

(b) O que se pode afirmar sobre o complemento de grafos que são ig2, relativamente à propriedade de ser ig2? Justifique.

Solução. O complemento de um grafo ig2 também é ig2. Isso é verdade pois, $g_{\bar{G}}(v) = (n-1) - g_G(v) = g_{\bar{G}}(u) \iff g_G(v) = g_G(u)$.