Lista 2 - MAC0320

Paulo Henrique Albuquerque, NUSP = 12542251

E6. Seja G um grafo conexo. Prove que quaisquer dois caminhos mais longos em G possuem (pelo menos) um vértice em comum.

Solução. A prova será por contradição. Suponha que existam dois caminhos mais longos S_1 e S_2 em G sem nenhum vértice em comum. Sejam u e v vértices quaisquer de S_1 e S_2, respectivamente. O caminho S_1 pode ser particionado em dois caminhos. Um que vai de uma extremidade até o vértice anterior a u em S_1 e outro que vai do vértice posterior a u em S_1 até a outra extremidade. Esses caminhos têm comprimentos $x-1$ e $y-1$, respectivamente (x e y são as quantidades de vértices nesses caminhos). Podemos definir uma partição análoga para S_2, com caminhos de comprimento w e z. Seja S o tamanho de um caminhos mais longo em G, como S_1 e S_2 são caminhos mais longos, eles têm comrprimento S:

$$(x-1)+1+1+(y-1) = S \to x+y = S$$

$$(w-1)+1+1+(z-1) = S \to w+z = S$$

Agora, podemos formar 4 caminhos a partir de S_1 e S_2: dois que começam numa extremidade de S_1 e vai até u, depois de u a v e de v a uma das extremidades de S_2. Outros dois são formados de forma análoga, começando a partir da outra extremidade de S_1. Os comprimentos desses 4 caminhos são: $x+w+1$, $x+z+1$, $y+z+1$, $y+w+1$. A soma desse quatro comprimentos é $2(x+y)+2(w+z)+4 = 2S+2S+4 = 4(S+1)$. Segue, portanto, que pelo menos um deles tem comprimento $S+1$. Caso contrário, a soma dos comprimentos seria, no máximo, $4S$. Isso é uma contradição da premissa que um caminho mais longo em G tem comprimento S. Segue, então, que dois caminhos mais longos em G tem pelo menos um vértice em comum.

E7. Seja G um grafo simples. E possível que ambos G e sejam desconexos? Justifique.

Solução. Não. Suponha G desconexo. Provaremos que $\bar{G}$ deve ser conexo. Sejam u um vértice da componente C_i de G e v um vértice da componente C_j. Em $\bar{G}$, u e v são vizinhos, logo, há um caminho entre eles nesse grafo. Além disso, para qualquer outro vértice x de C_i, v é vizinho de x. Logo, $u-v-x$ é um caminho em $\bar{G}$. Portanto, em $\bar{G}$, u está conectado com qualquer vértice v de qualquer outra componente C_j de G e com qualquer outro vértice x na mesma componente C_i. Ou seja, u está conectado com todos os vértices de $\bar{G}$. Como u é um vértice qualquer, segue que a afirmação acima é válida para todos os vértices do grafo G, ou seja, $\bar{G}$ é conexo.