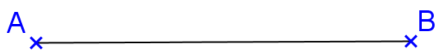
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE EXPRESSÃO GRÁFICA
Professores: Deise Maria Bertholdi Costa, Luzia Vidal de Souza e Paulo Henrique Siqueira.
Disciplina: Expressão Gráfica I
Versão 2020.1

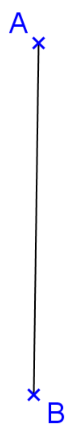
PARTE I
DESENHO GEOMÉTRICO

1. CONSTRUÇÕES FUNDAMENTAIS

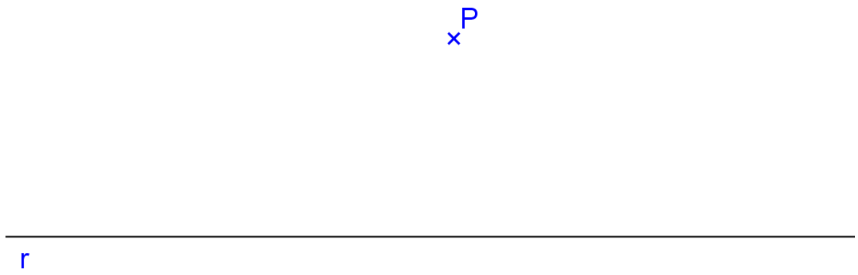
Os problemas em Desenho Geométrico resumem-se em encontrar pontos. E para determinar um ponto, basta obter o cruzamento entre duas linhas, que podem ser retas ou circunferências.

01. Construir a mediatriz do segmento dado AB. Definição da mediatriz: é uma reta perpendicular ao segmento e que passa pelo seu ponto médio. Propriedade da mediatriz: qualquer ponto dela é equidistante das extremidades do segmento AB.





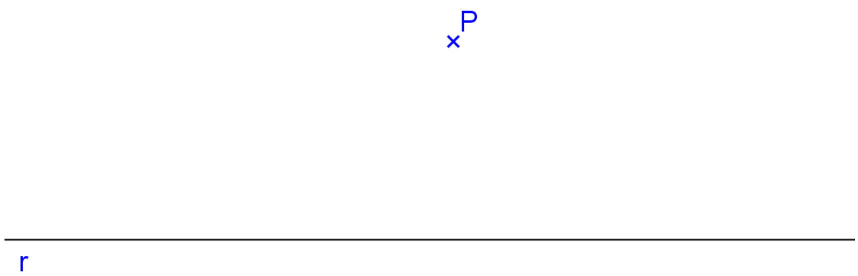
02. Traçar por um ponto dado P, uma paralela a uma reta dada r. Definição da paralela: é uma reta coplanar com a reta dada e que não possui pontos em comum. Propriedade da paralela: qualquer ponto dela é equidistante da reta dada.



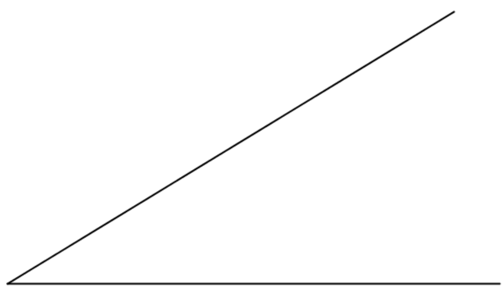
03. Traçar por um ponto dado P, uma reta perpendicular a uma reta dada r.

a) $P \in r$;

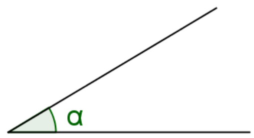
b) $P \notin r$.

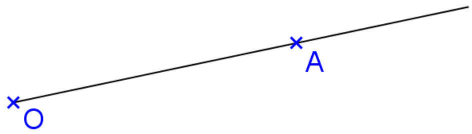


04. Construir a bissetriz do ângulo dado. Definição da bissetriz: é uma reta que divide o ângulo em duas partes congruentes. Propriedade da bissetriz: qualquer ponto dela é equidistante das laterais do ângulo



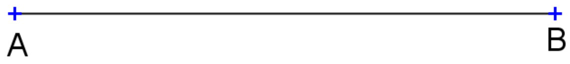
05. Transportar o ângulo dado, para a reta r, com vértice no ponto P.



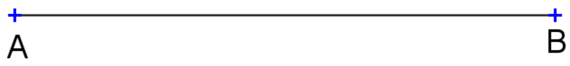


06. Construir os ângulos de 30°, 45°, 60°, 75°, 90°, 120°, 135°.

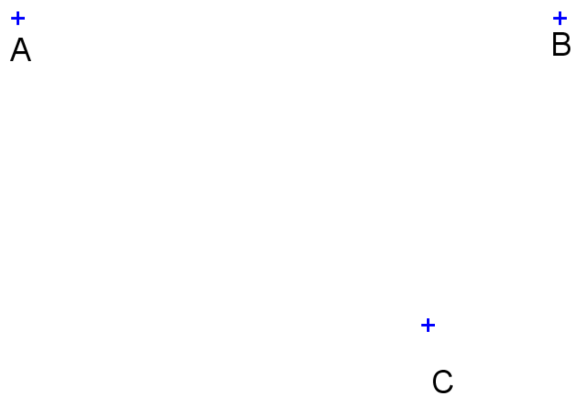
07. Dividir um segmento AB em 5 partes iguais.



08. Dividir o segmento AB em partes proporcionais a números dados: m=2, n=4,2 e p=5,3.

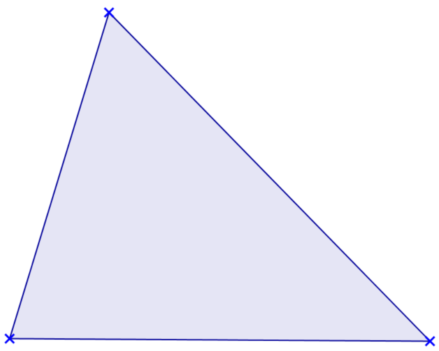


09. Construir, utilizando régua e compasso a circunferência pertencente aos pontos dados A, B e C.

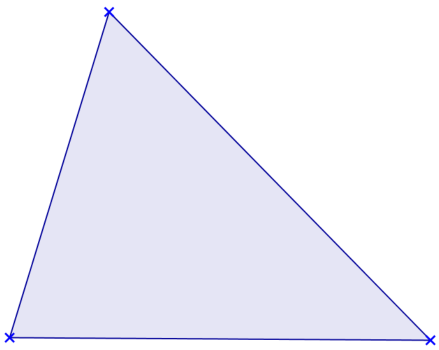


10. Construir o triângulo ABC, dados os lados: a=7cm, b=6cm e c=9cm. Obter o circuncentro O (encontro das mediatrizes).

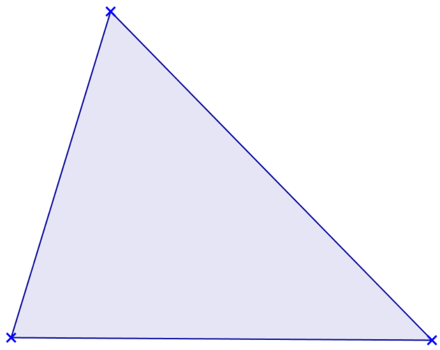
11. Obter o baricentro G (encontro das medianas) do triângulo dado.



12. Obter o incentro I (encontro das bissetrizes) do triângulo dado.

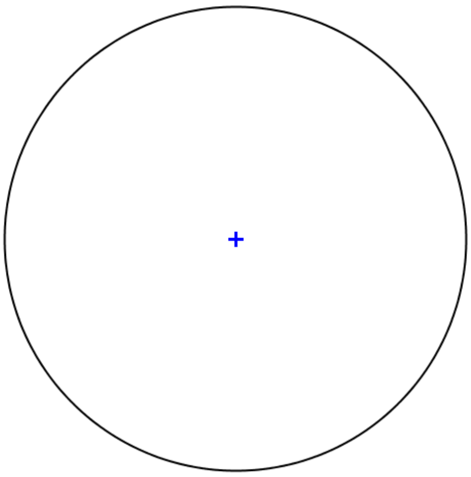


13. Obter o ortocentro H (encontro das alturas) do triângulo dado.

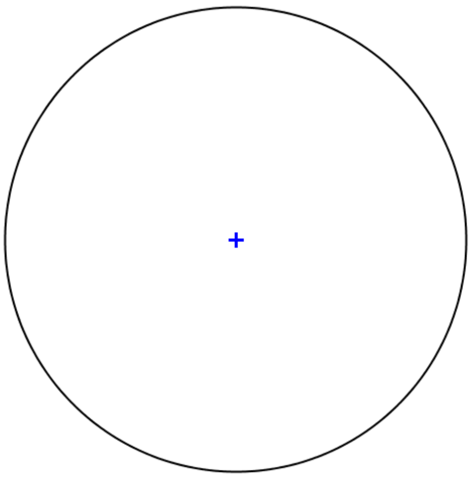


14. Dividir a circunferência dada em 3, 4, 6, 8, 10 e 5 partes iguais, utilizando métodos exatos.

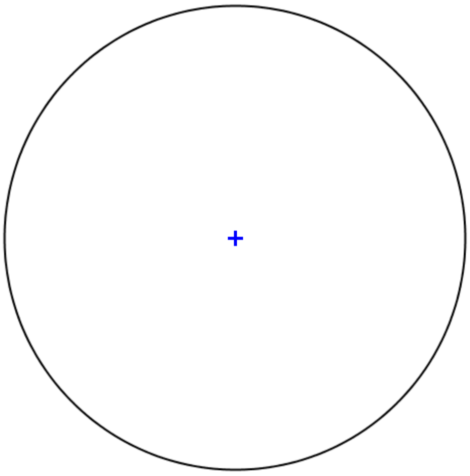
a) 3 partes - Triângulo



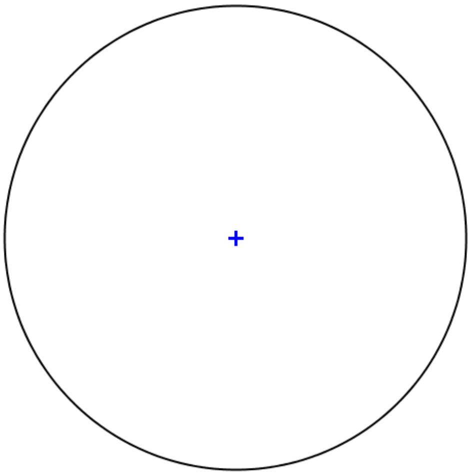
b) 4 partes - Quadrado



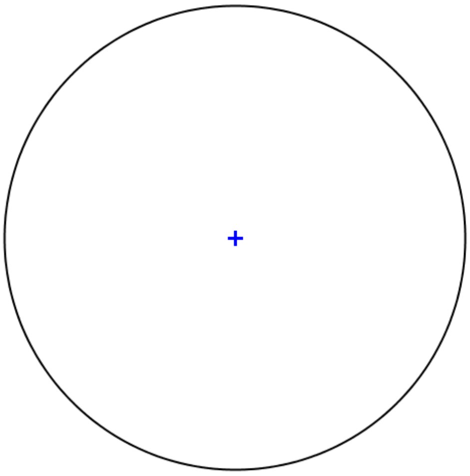
c) 6 partes - Hexágono



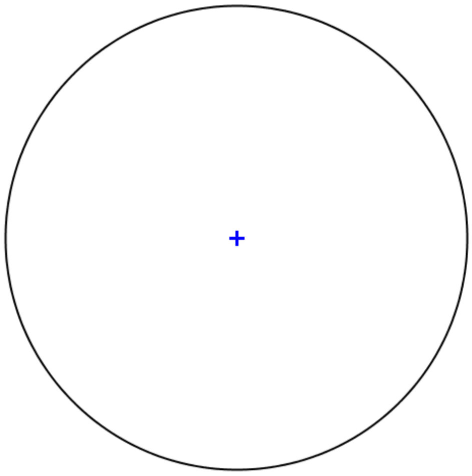
d) 8 partes – Octógono



e) 10 partes - Decágono



f) 5 partes - Pentágono



15. Construir os polígonos regulares de 3, 4, 5, 6, 8, 10 lados iguais, dado a medida l do lado.

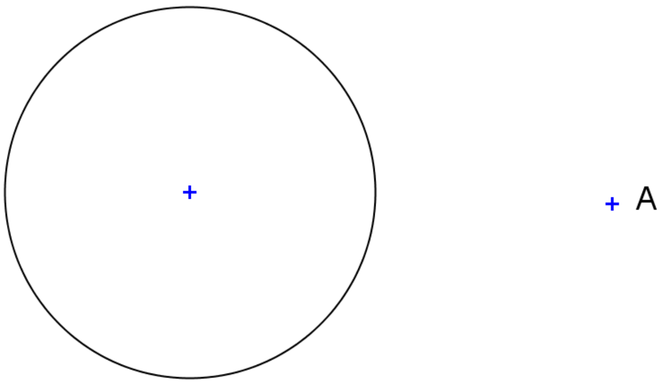
a) Triângulo equilátero, l = 4cm

b) Quadrado, l = 4cm

c) Pentágono Regular, l = 3cm

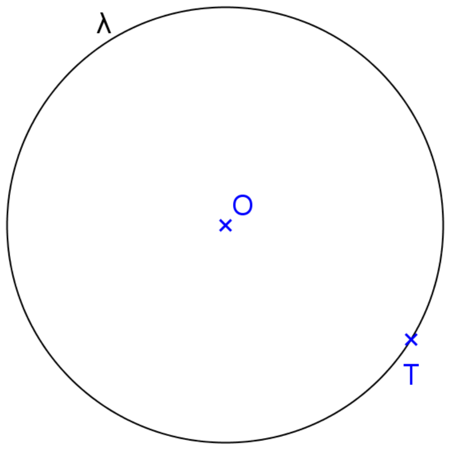
d) Hexágono Regular, l = 2,5cm

16. Traçar a reta tangente à circunferência dada que passe pelo ponto A.



17. Construir uma circunferência de raio r = 2cm, dado tangente à reta t no ponto T.

18. Construir uma reta tangente à circunferência dada no ponto T.



PARTE II
SISTEMAS DE PROJEÇÃO

1. MÉTODOS DE REPRESENTAÇÃO

Para se representar os objetos graficamente utilizam-se vários métodos.

Existem aqueles que utilizam apenas um Plano de Projeção, como o Método de Projeção Central (de Brook Taylor), o qual utiliza um Sistema de Projeção Cônico; o Método de Projeção Cotada (de Felipe Büache) que utiliza um Sistema de Projeção Cilíndrico Ortogonal; o Método de Projeção Axonométrica (de Polke) que utiliza um Sistema de Projeção Cilíndrico; e Métodos Especiais utilizados em Representações Cartográficas.

Existe também um Método de Representação que utiliza dois ou mais Planos de Projeção em conjunto com um Sistema de Projeção Cilíndrico Ortogonal denominado de Método de Monge ou Mongeano ou Método da Dupla Projeção Ortogonal (de Gaspard Monge).

Num Sistema de Projeção devem ser definidos os seus elementos principais que são:

- Objeto a ser projetado
- Centro de Projeção
- Plano de projeção

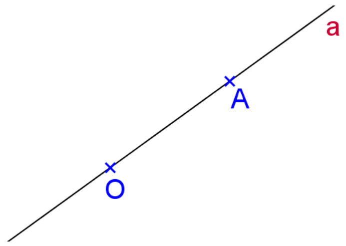
2. TIPOS DE PROJEÇÕES

$$
\begin{cases}
\text{um só plano} & \begin{cases}
\text{cônica} & \rightarrow \text{perspectiva cônica} \\
\text{cilíndrica} & \begin{cases}
\text{oblíquas} & \rightarrow \text{perspectiva cavaleira} \\
\text{ortogonais} & \rightarrow \begin{cases} \text{perspectiva axonométrica} \\ \text{projeção cotada} \end{cases}
\end{cases} \\
\text{especiais} & \rightarrow \text{projeções cartográficas}
\end{cases} \\
\text{dois ou mais planos} & \rightarrow \text{Dupla Projeção Ortogonal (ou Método Mongeano ou de Monge)}
\end{cases}
$$

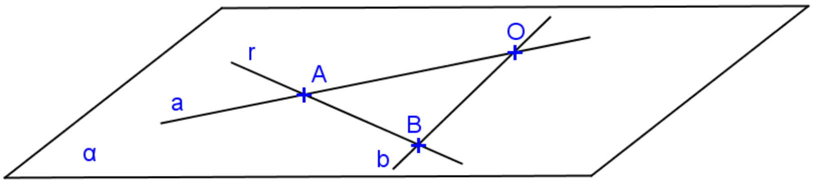
3. OPERAÇÕES FUNDAMENTAIS DO DESENHO PROJETIVO

3.1 Conceito de Projetar

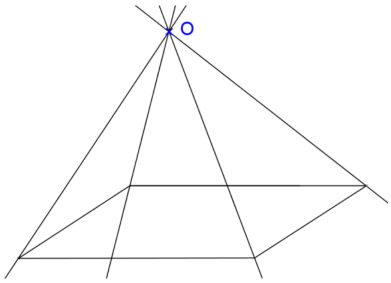
a. Projetar um ponto A a partir de um outro ponto O, distinto de A, significa determinar a reta pertencente aos dois pontos. A reta OA é denominada projetante do ponto A, e o ponto O é denominado de centro de projeção.



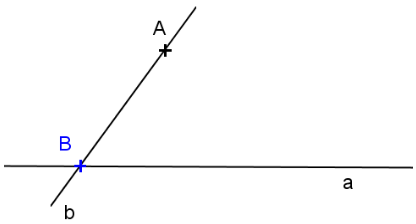
b. Projetar uma reta r partir de um ponto O, não pertencente a essa reta, significa determinar o plano pertencente ao ponto e à reta. Esse plano, α, é denominado plano projetante da reta r.



c. Projetar um objeto a partir de um ponto O significa determinar as projetantes de todos os pontos desse objeto. Quando se quer projetar um sólido, normalmente são projetados somente os elementos necessários e suficientes que o determinam.

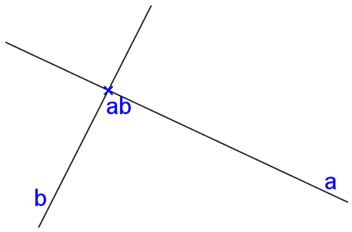


<u>Observação</u>: Sejam uma reta a e um ponto A fixos e b uma reta móvel passando por A, que rotaciona em torno do ponto A. Em apenas uma posição não há interseção física entre as duas retas, convencionamos então que existe um ponto de interseção denominado de Ponto Impróprio e denotado por B_∞.

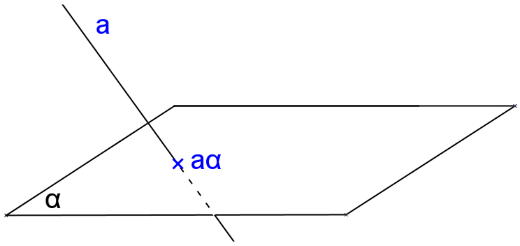


3.2 Conceito de Cortar

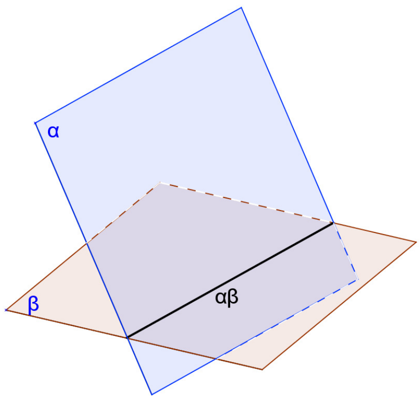
a. Cortar uma reta a por outra b, significa obter o ponto (ab) comum às duas retas. O ponto considerado pode ser próprio ou impróprio, conforme as retas sejam concorrentes ou paralelas.



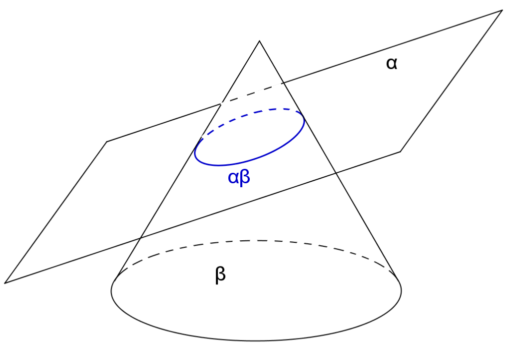
b. Cortar um plano α por uma reta a, ou uma reta a por um plano α, significa obter o ponto (aα) comum à reta e ao plano.



c. Cortar um plano α por outro β significa encontrar a reta ($\alpha\beta$) comum a ambos os planos.



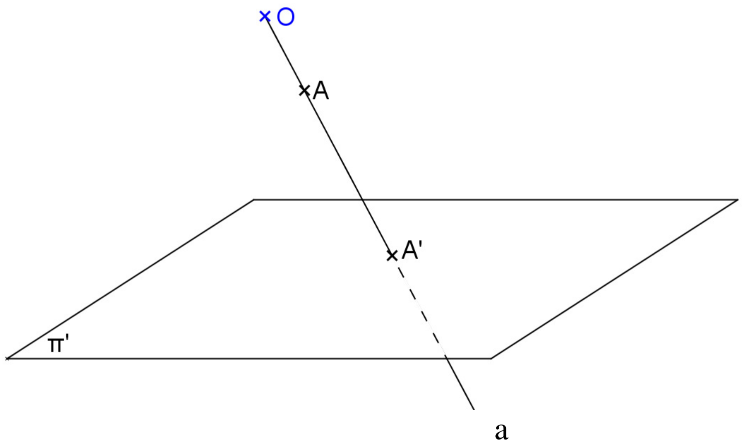
d. Cortar um objeto por um plano significa encontrar a seção plana produzida por este plano no sólido considerado.



Observação: o ponto ou a reta ou a curva quando determinados por cortes chamam-se *traços*.

4. CONCEITO DE PROJEÇÃO CÔNICA OU CENTRAL

Considere um plano π' e um ponto fixo O não pertencente ao plano considerado. Denomina-se projeção central ou cônica, no plano π', de um ponto A, distinto de O, ao traço A', produzido sobre o plano, pela reta projetante do ponto A.



O plano π' é denominado plano de projeção e o ponto O é denominado centro, polo ou vértice de projeção.

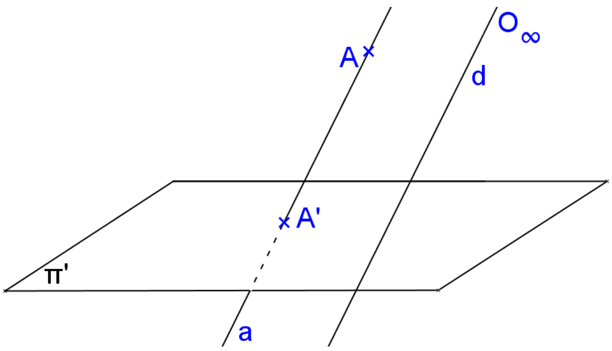
A projeção central ou cônica é também denominada perspectiva cônica, ou perspectiva linear exata do ponto A.

Observações:

- Plano de projeção não é o mesmo que plano projetante.
- O sistema é chamado de projeção cônica, pois as projetantes descrevem uma superfície cônica.

5. CONCEITO DE PROJEÇÃO CILÍNDRICA (oblíqua ou ortogonal)

Denomina-se *projeção cilíndrica* de um ponto A, no plano π' a partir de O_∞, ao traço A' produzido sobre π', pela reta projetante do ponto A.

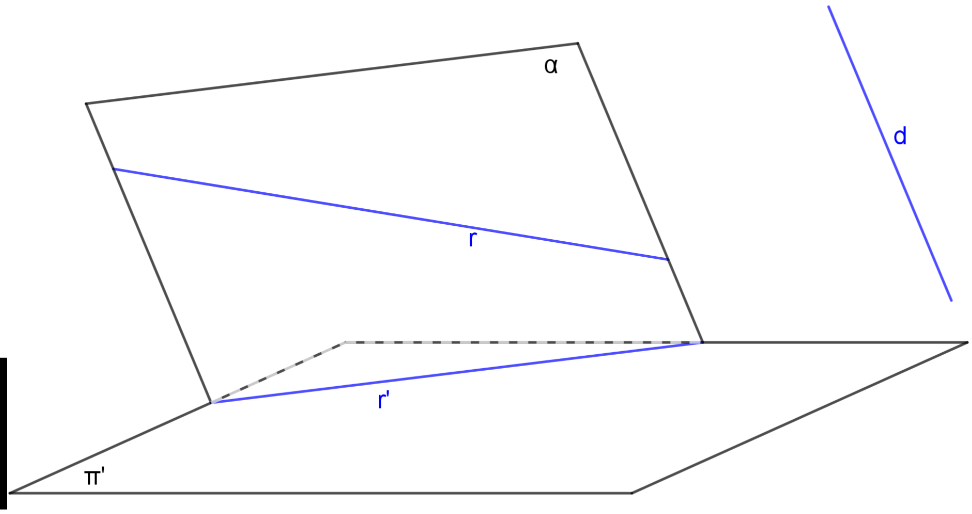


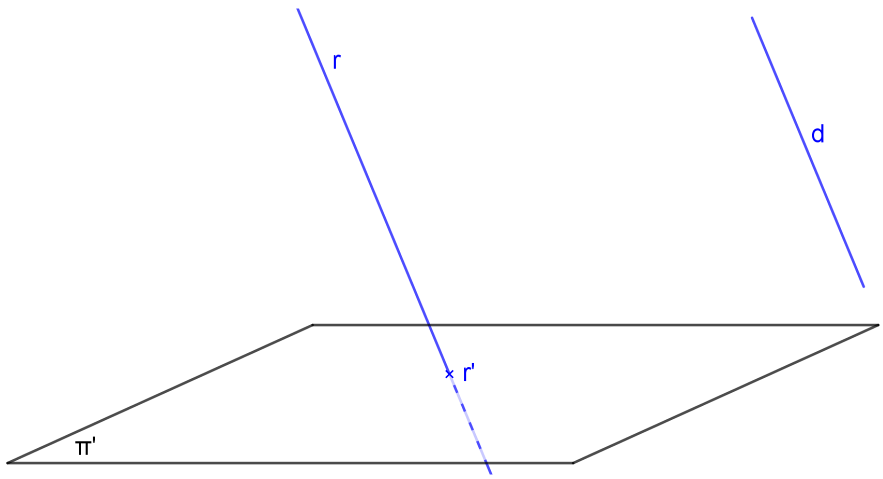
Observações:

- Dado o ponto A, A' é único, porém dado somente A' sabe-se que o ponto A pertence à reta projetante;
- O sistema é denominado projeção cilíndrica, pois as projetantes descrevem uma superfície cilíndrica;
- Os pontos do plano de projeção coincidem com suas projeções;
- Se a direção das projetantes for oblíqua ao plano de projeções tem-se o sistema de projeção Cilíndrica Oblíqua;
- Se a direção das projetantes for perpendicular ao plano de projeções tem-se o Sistema de Projeção Cilíndrica Ortogonal.

6. PROPRIEDADES DAS PROJEÇÕES CILÍNDRICAS (oblíquas ou ortogonais)

Propriedade 1: A projeção cilíndrica de uma reta não paralela à direção das projetantes é uma reta. A projeção cilíndrica de uma reta paralela à direção das projetantes é um ponto.





Observações:

a) Se a projeção cilíndrica de uma reta é uma reta, então a reta objetiva não é paralela a direção das projetantes;

b) Se a projeção cilíndrica de uma reta é um ponto, então a reta é paralela à direção das projetantes;

c) Se uma reta é perpendicular ao plano de projeção, sua projeção cilíndrica-ortogonal sobre o mesmo será o seu traço no plano de projeção considerado. Reciprocamente, se a projeção ortogonal de uma reta sobre um plano reduzir-se a um ponto, então a reta será perpendicular ao plano de projeção, ou o que é equivalente, a reta será paralela à direção das projetantes.

d) Uma reta r, não paralela à direção das projetantes, e sua projeção cilíndrica r' são coplanares; logo, pode ocorrer entre a reta e sua projeção uma das seguintes condições:

- r e r' são concorrentes, neste caso a reta corta o plano de projeção;
- São paralelas, neste caso a reta será paralela ao plano de projeção;
- São coincidentes, neste caso a reta estará contida no plano de projeção.

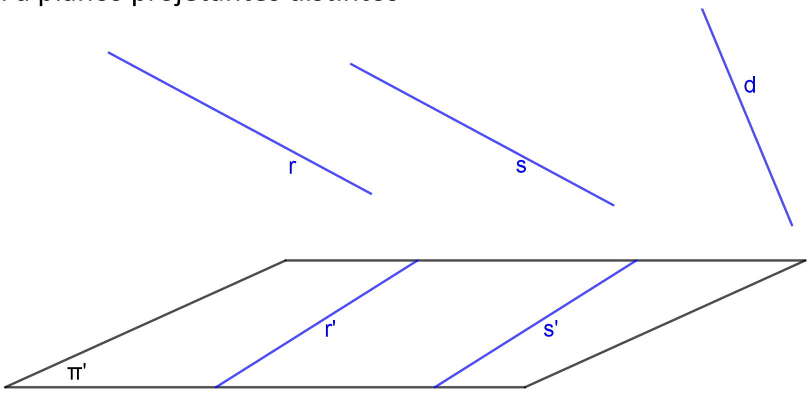
Realidade Virtual: paulohscwb.github.io/cotadas/

Realidade Aumentada: paulohscwb.github.io/cotadas/ra.html

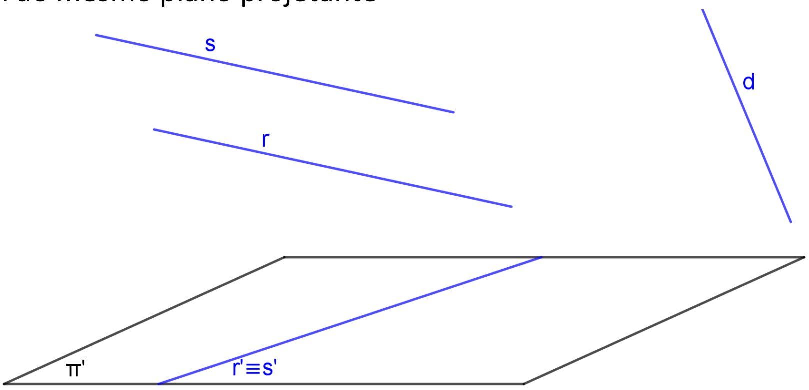
Scan me

Propriedade 2: Se duas retas r e s são paralelas então as suas projeções cilíndricas ou são paralelas, ou são coincidentes ou são pontuais.

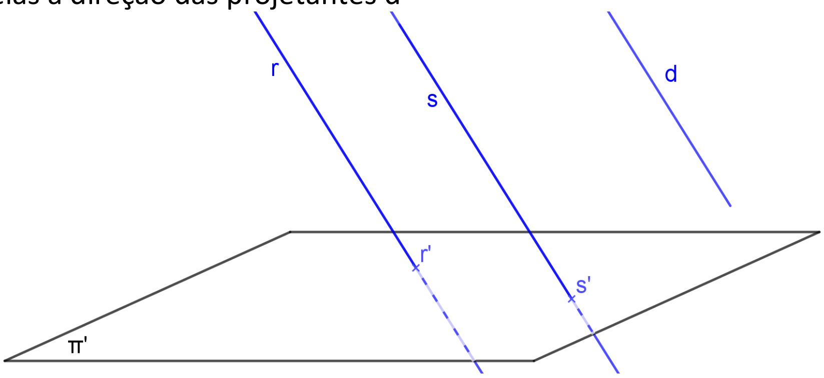
a) r e s pertencem a planos projetantes distintos



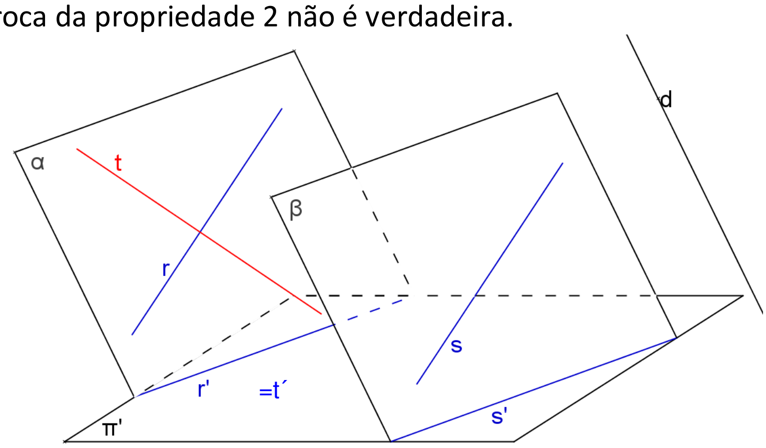
b) r e s pertencem ao mesmo plano projetante



c) r e s são paralelas à direção das projetantes d



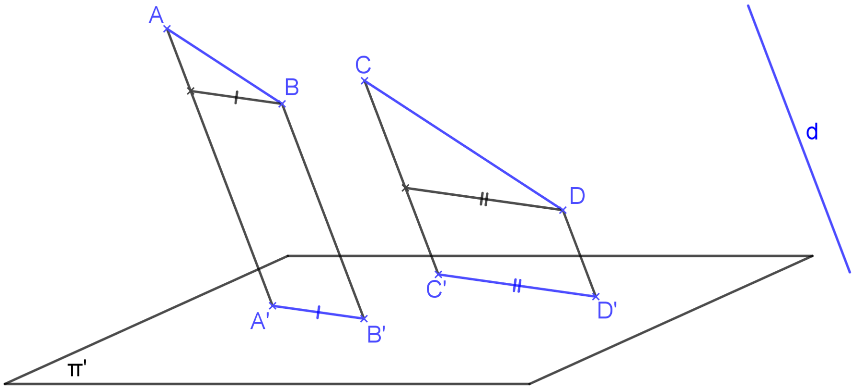
Observação: A recíproca da propriedade 2 não é verdadeira.



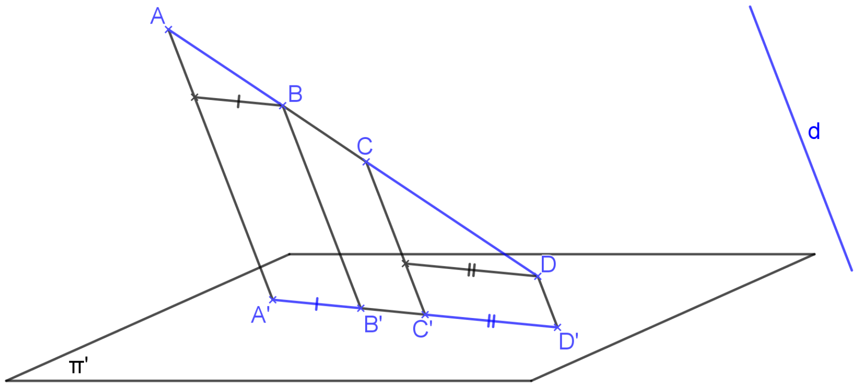
Propriedade 3: Se dois segmentos são paralelos ou são colineares, então a razão entre eles no espaço conserva-se na projeção cilíndrica, desde que a direção dos segmentos não seja paralela à direção das projetantes.

$$\text{Se}\begin{cases}\overline{AB} \,//\, \overline{CD} \\ \text{ou} \\ \text{colineares}\end{cases} \text{e não paralelos a } d \Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}}$$

a) AB//CD

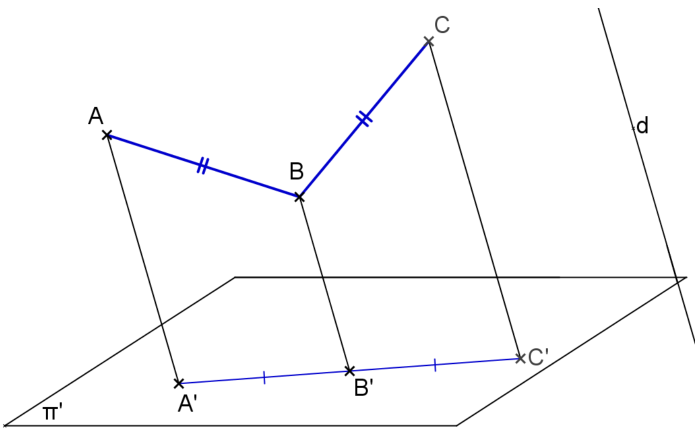


b) AB e CD colineares

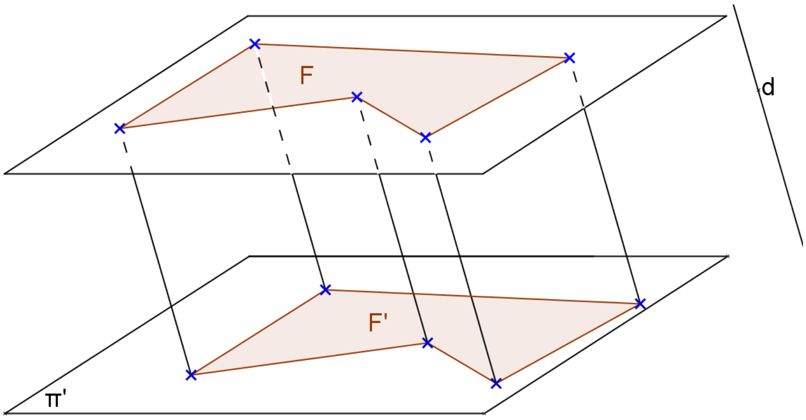


Consequência: Se M é ponto médio do segmento AB então M’ é ponto médio da projeção do segmento AB (A’B’).

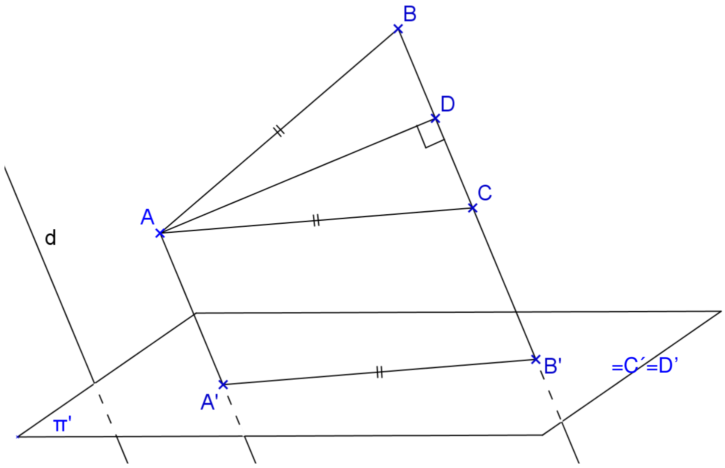
Observação: A recíproca não é verdadeira. Ou seja, se AB/CD=A’B’/C’D’ não implica que AB//CD ou colineares.



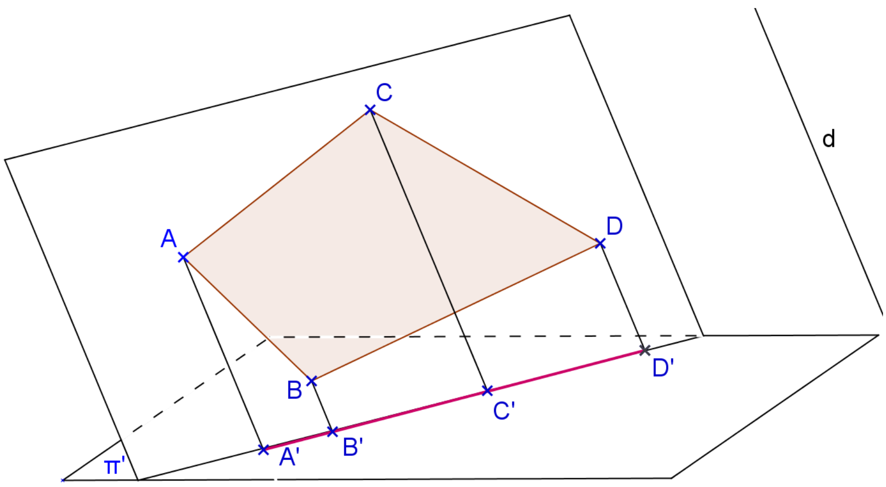
Propriedade 4: Se uma figura está contida num plano paralelo ao plano de projeção, então essa figura será congruente à sua projeção cilíndrica, isto é, a projeção cilíndrica desta figura está em verdadeira grandeza (V.G.).



Observação: A recíproca não é verdadeira em projeção oblíqua, porém é verdadeira em projeção ortogonal.



Propriedade 5: Qualquer figura contida num plano paralelo a direção das projetantes tem para projeção um segmento que está contido no traço do plano dessa figura sobre o plano de projeção.



Observação: A recíproca da Propriedade 5 é verdadeira.

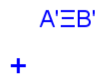
Exercícios:

Considere um sistema de projeção cilíndrica com somente um plano de projeção π'. Escreva ao lado de cada exercício as propriedades geométricas e as propriedades das projeções cilíndricas utilizadas.

1. Representar o ponto médio M do segmento dado AB.

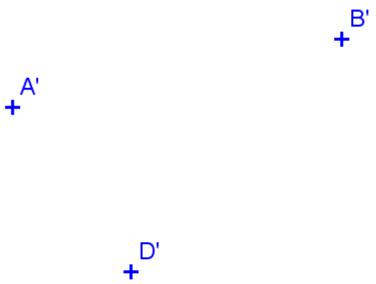
a)

b)

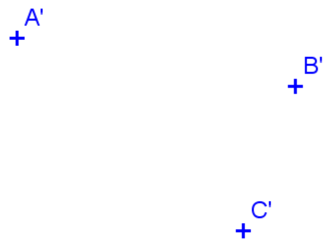


2. Representar o paralelogramo ABCD sendo dados três de seus vértices.

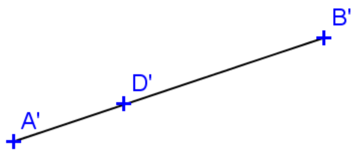
a)



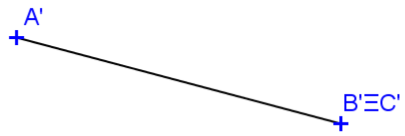
b)



c)



d)

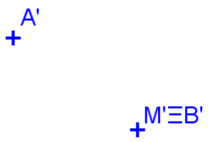


3. Representar o paralelogramo ABCD sendo dados os pontos A e B e o ponto M de interseção das diagonais.

a)

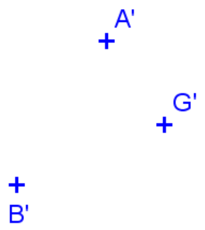
b)

c)

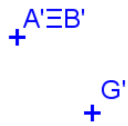


4. Representar o triângulo ABC sendo dados os vértices A e B e o baricentro G.

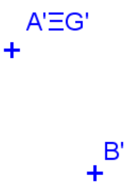
a)



b)

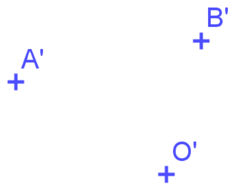


c)

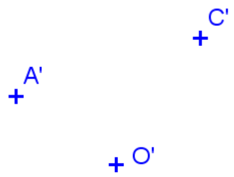


5. Representar o hexágono regular ABCDEF sendo dados dois vértices e o centro O da circunferência circunscrita.

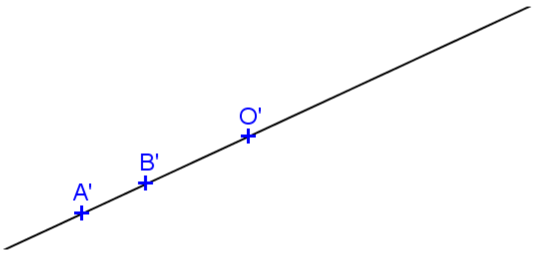
a)



b)

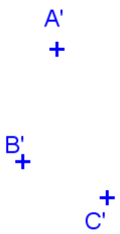


c)

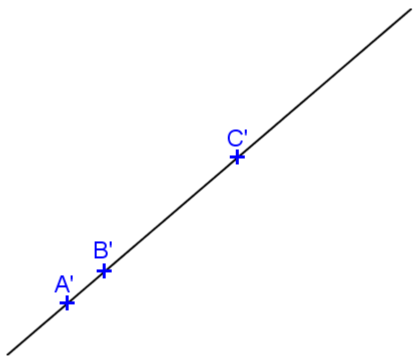


6. Representar o hexágono regular ABCDEF sendo dados A, B e C.

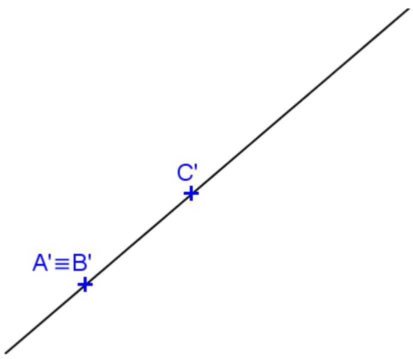
a)



b)

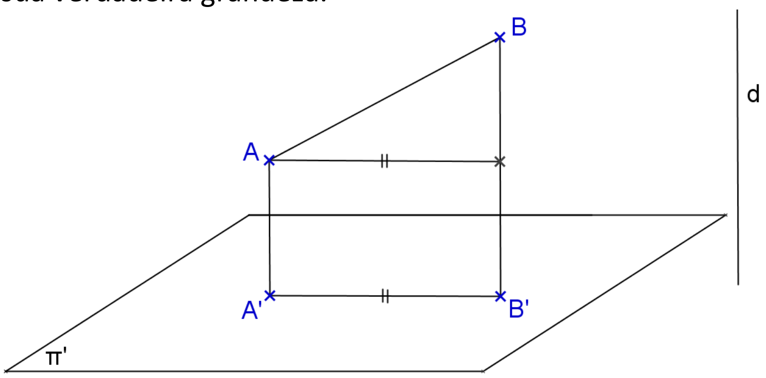


c)



7. PROPRIEDADES DAS PROJEÇÕES CILÍNDRICAS

Propriedade 6: Se um segmento é oblíquo ao plano de projeção π' então sua projeção ortogonal é menor que a sua verdadeira grandeza.

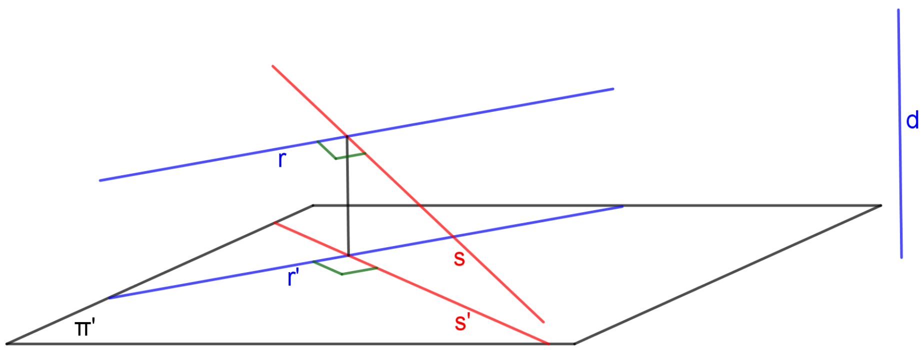


Observação: A recíproca da Propriedade 6 é verdadeira.

Propriedade 7: Se duas retas são perpendiculares ou ortogonais entre si, sendo uma delas paralela ou pertencente ao plano de projeção e a outra não perpendicular a esse plano, então as projeções ortogonais dessas retas são perpendiculares entre si.

Resumindo:

$$\text{Se} \quad \begin{array}{ll} r \perp s \text{ ou } r \perp s & (1) \\ r \,//\, \pi' \text{ ou } r \subset \pi' & (2) \\ s \not\perp \pi' & (3) \end{array} \quad \Rightarrow \quad r' \perp s' \quad (4)$$



Observação: As recíprocas da propriedade 7 são verdadeiras. São elas:

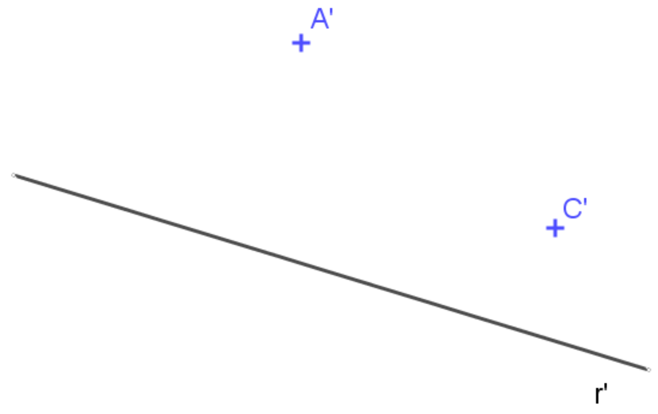
Recíproca 1: (2) + (3) +(4) $\Rightarrow$ (1)

Recíproca 2: (1) + (4) $\Rightarrow$ (2) + (3)

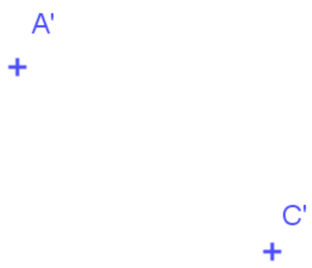
Exercícios

Considere um sistema de projeção cilíndrica com somente um plano de projeção π'. Escrever ao lado de cada exercício as propriedades geométricas e as propriedades das projeções cilíndricas utilizadas.

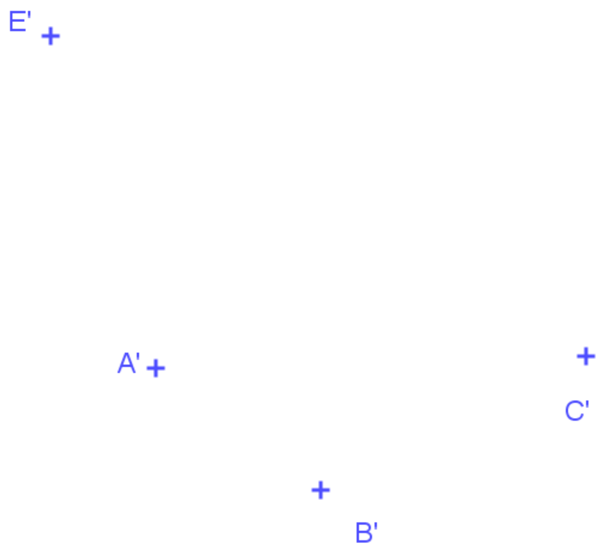
1. Representar a projeção cilíndrica ortogonal de um losango ABCD, sabendo-se que a diagonal AC está paralela a π', dada a projeção da reta r que é o lugar geométrico do ponto B



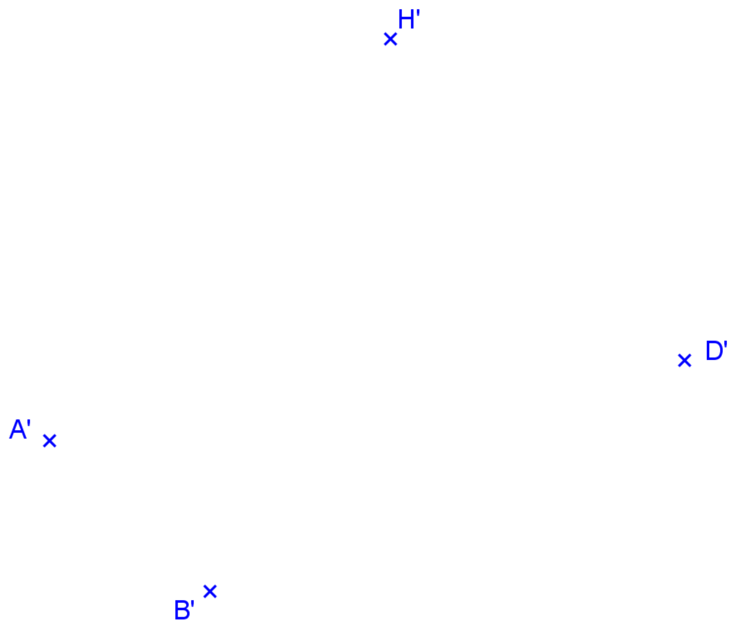
2. Representar a projeção cilíndrica ortogonal de um retângulo ABCD, dadas as projeções dos vértices A e C, sabendo-se que o lado AB é paralelo a π' e mede 3cm.



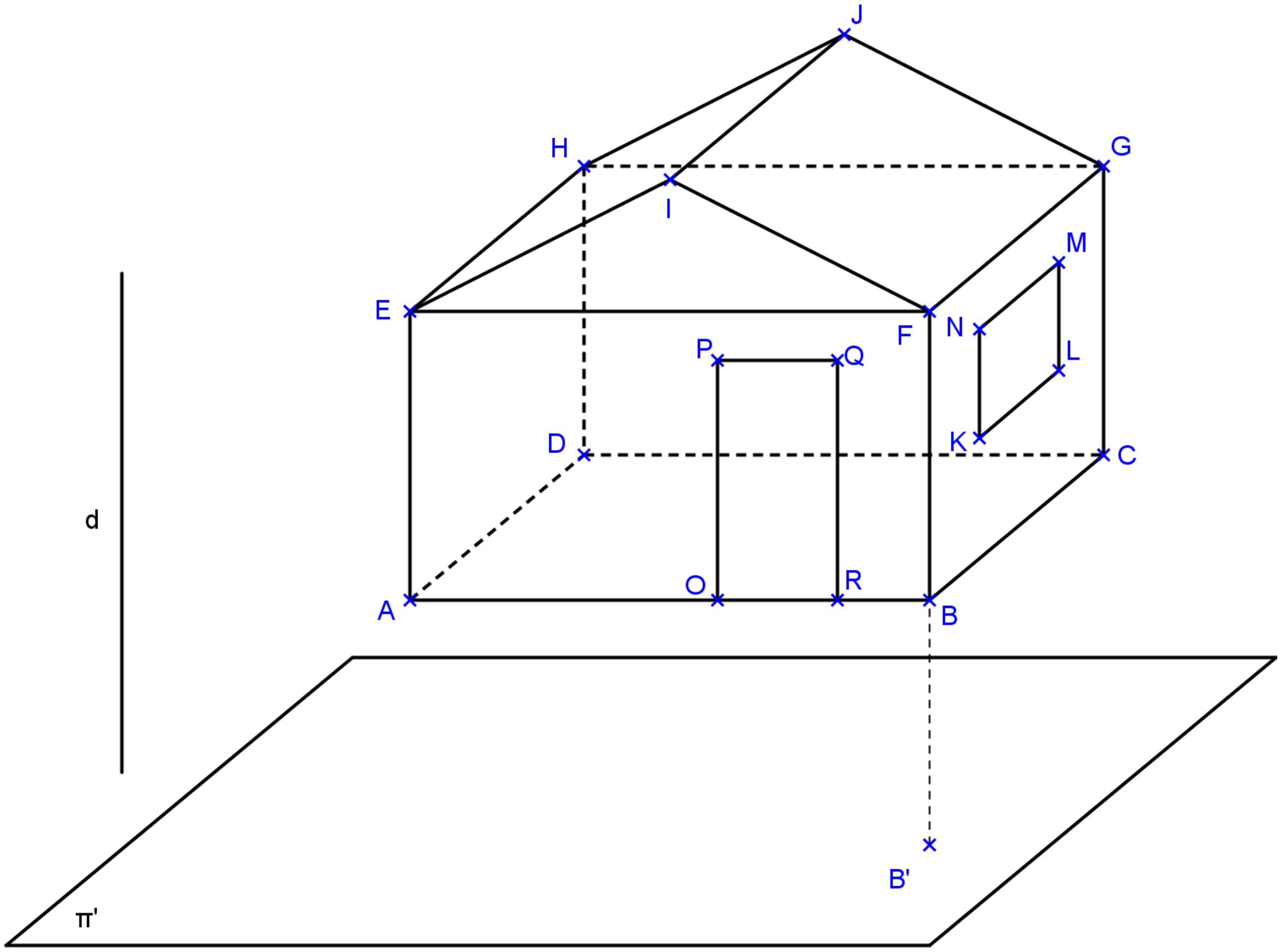
3. Representar a projeção cilíndrica do paralelepípedo ABCDEFGH sendo dadas as projeções de A, B, C e E.



4. Representar a projeção cilíndrica do prisma ABCDEF-GHIJKL de base hexagonal regular, dadas as projeções dos vértices A, B, D e H.



5. Usando as propriedades de projeções cilíndricas, concluir as projeções da casa no plano π’ dado abaixo, usando a direção de projeções d. Considerar que a base ABCD é paralela a π’.



Os segmentos AB, AE, HJ e JG ficam projetados em verdadeira grandeza em π’? Por quê?

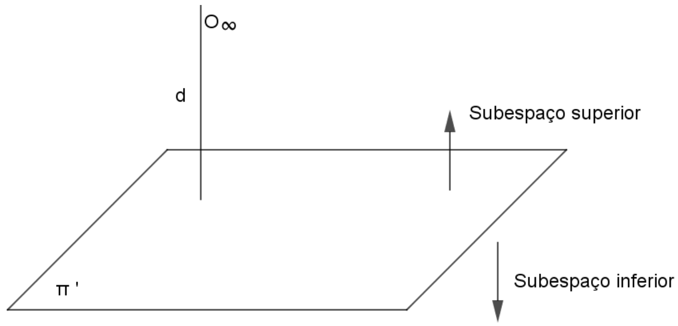
PARTE III
O MÉTODO DAS PROJEÇÕES COTADAS

O Método das Projeções Cotadas foi idealizado por Fellipe Büache em 1737 para o levantamento da carta hidrográfica do Canal da Mancha. Em 1830 o método foi sistematizado pelos militares franceses. É bastante utilizado na solução de coberturas e como base para o Desenho Topográfico.

O método das projeções cotadas é um sistema gráfico-analítico que utiliza somente uma projeção cilíndrica ortogonal do objeto estudado. Cada projeção é acompanhada de um número que representa a distância do ponto ao plano de projeção.

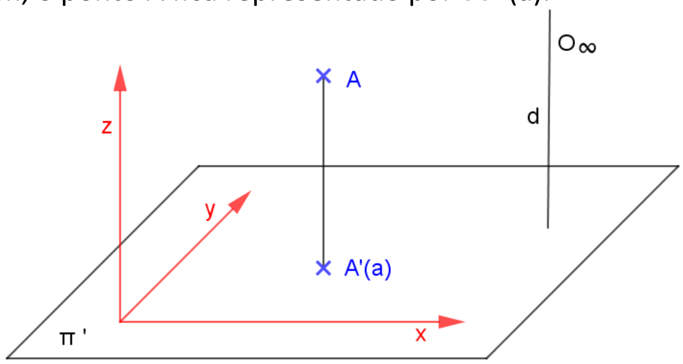
1. O PLANO DE REPRESENTAÇÃO

O plano π' situado na posição horizontal denomina-se Plano (ou Quadro) de Representação ou Plano de Projeção ou Plano de Comparação. Este plano divide o espaço em dois subespaços: superior e inferior. O centro de projeções, O_∞, é impróprio, pois a projeção é cilíndrica ortogonal.



2. REPRESENTAÇÃO DO PONTO

Seja o ponto A, considere sua projeção cilíndrica ortogonal A' sobre o plano π'. O ponto A não fica individualizado somente por sua projeção A', é necessário mais um elemento, utiliza-se a cota do ponto. Assim, o ponto A fica representado por A' (a).



O método de projeção cotada é um sistema gráfico-algébrico, pois envolve uma projeção gráfica e um número.

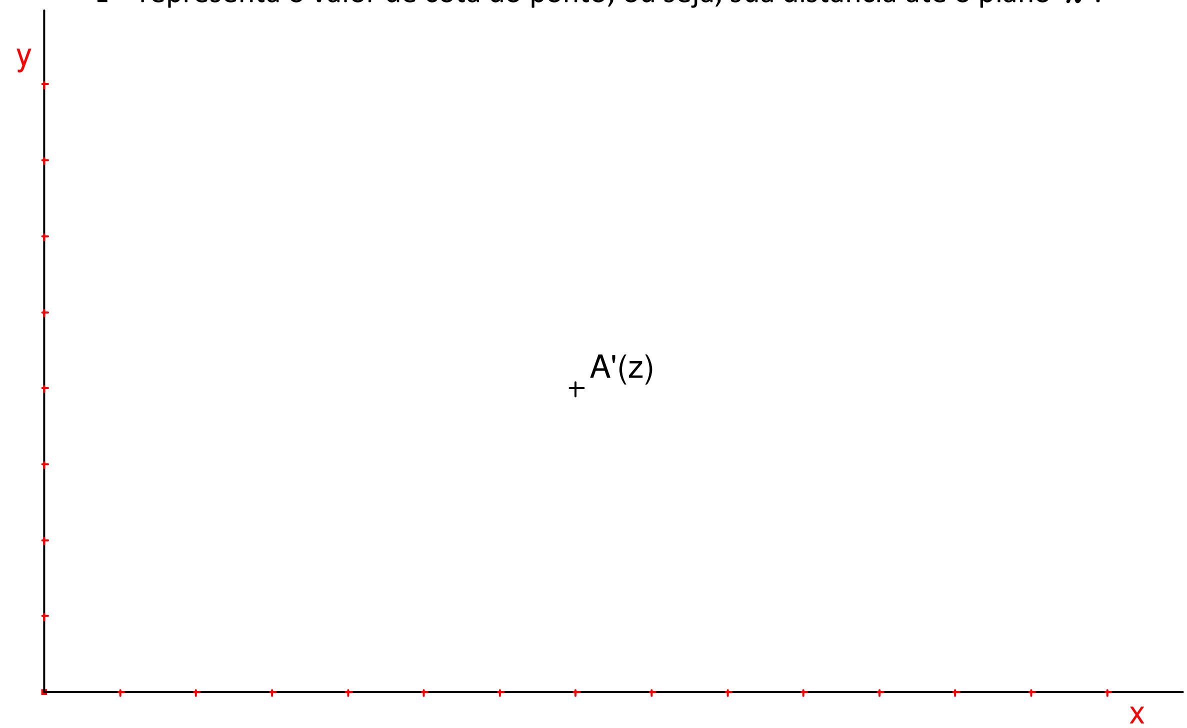
A cota de um ponto é o número que expressa a distância do ponto P ao plano de projeção.

- Cota positiva = altura ou altitude
- Cota negativa = profundidade ou depressão
- π' é o lugar geométrico dos pontos de cota nula
- Os pontos de mesma cota constituem um plano paralelo ao π'.

2.1 Épura do Ponto

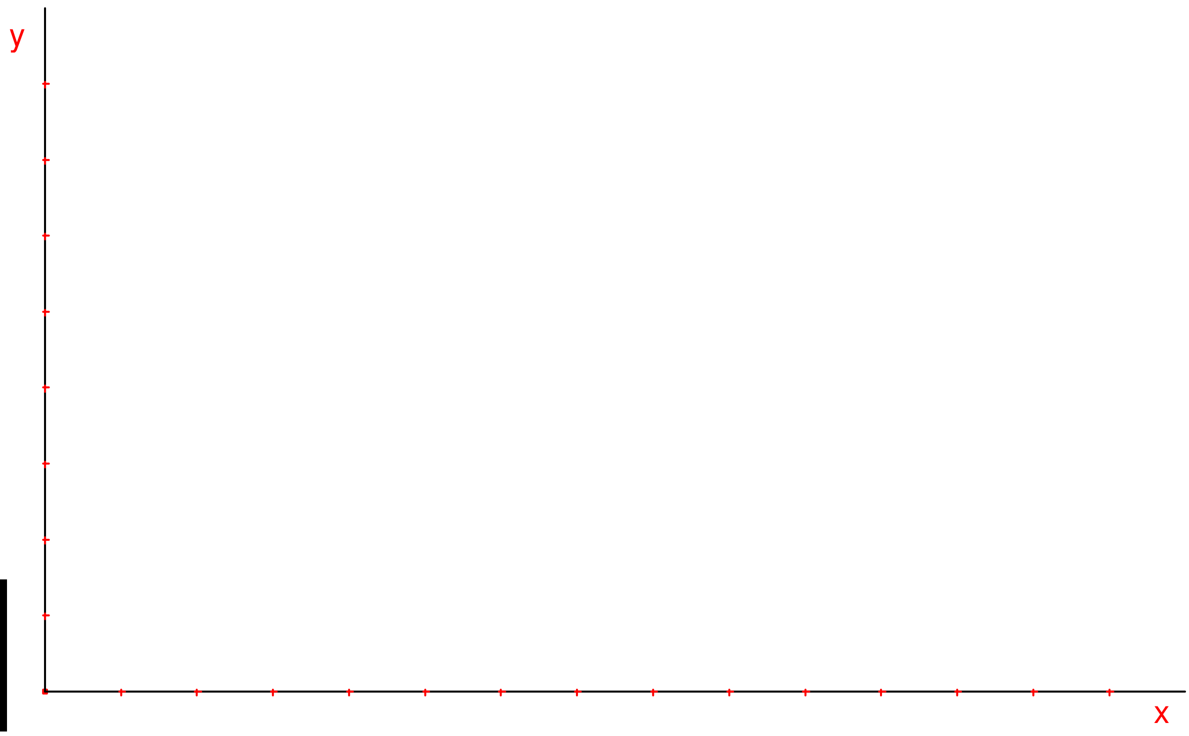
A épura do ponto é a representação plana da figura espacial, conforme apresentado na figura. O ponto fica determinado no sistema cartesiano, pelas suas coordenadas cartesianas, A(x, y, z), onde:

x – representa o valor no eixo das abscissas;
y – representa o valor no eixo das ordenadas;
z – representa o valor de cota do ponto, ou seja, sua distância até o plano π'.



Exercício

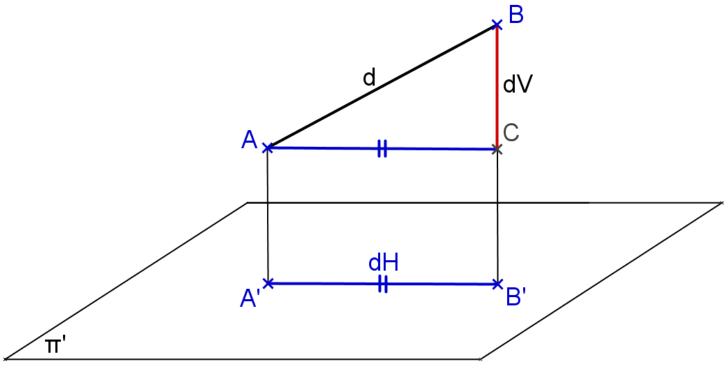
A(40,30,20), B(20,60,-30), C(90,70,40), D(90,70,10), E(80,40,0)



paulohscwb.github.io/cotadas/ra.html

2.2 Distância entre dois pontos

Para obter a distância *d* entre os dois pontos A e B, ou seja, a verdadeira grandeza (VG) do segmento AB, pode-se utilizar o processo gráfico ou o algébrico.



Distância vertical:
dV = |b-a|
Distância horizontal:
dH = A'B'
Distância
$d^2 = dV^2 + dH^2$

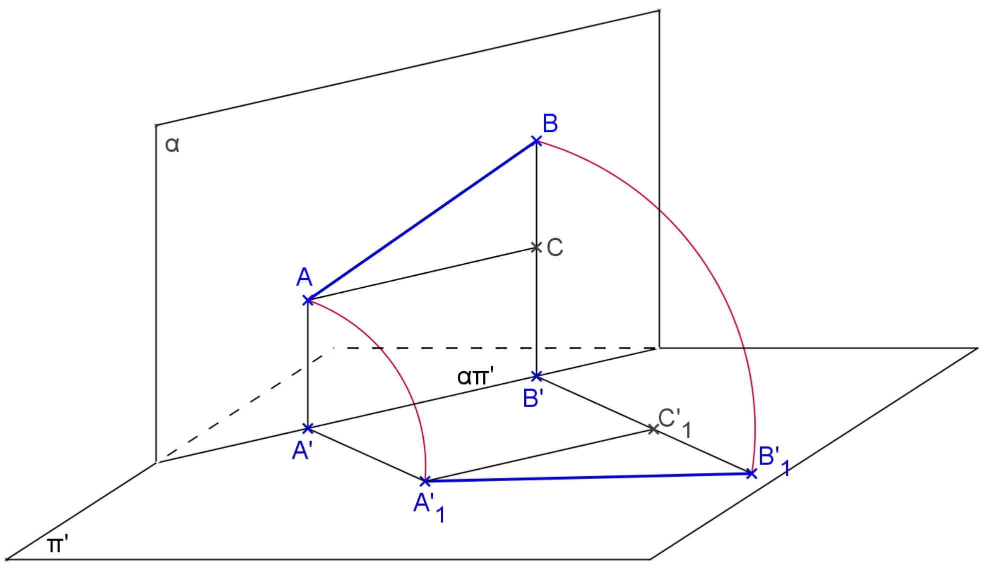
No processo algébrico, caso as cotas sejam diferentes, basta aplicar o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo; se os pontos possuem a mesma cota, então a distância entre eles é d=dH e se possuem a mesma reta projetante, então a distância entre eles é d=dV.

No processo gráfico, se os pontos possuem cotas distintas e projetantes distintas aplica-se o rebatimento; se os pontos possuem a mesma cota então a VG do segmento AB é A'B'; e se pertencem a uma mesma reta projetante, então basta encontrar a diferença entre cotas dos pontos.

2.3 Rebatimento do plano projtetante α sobre π'

Basta rebater o plano projetante α do segmento AB em torno do eixo $\alpha\pi'$, obtendo-se a verdadeira grandeza (VG) da distância *d* entre A e B, bem como a distância horizontal dH e a vertical dV.

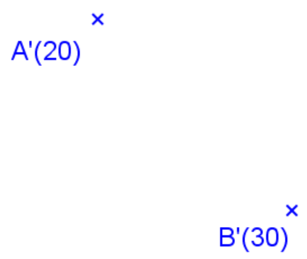
No espaço:



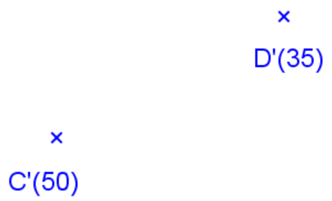
Exercício

Encontrar as VGs dos segmentos dados.

a)



b)

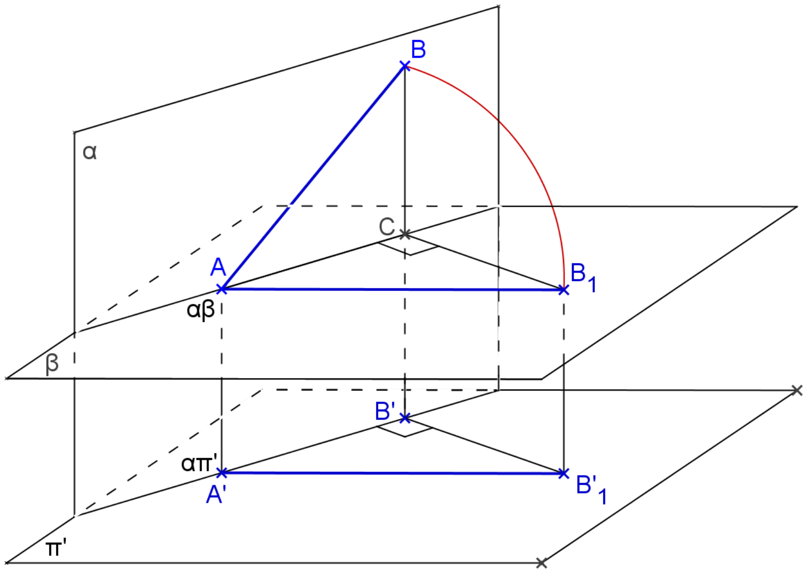


c)

2.4 Rebatimento do Plano α sobre β Horizontal

Basta rebater o plano projetante α do segmento AB em torno do eixo αβ obtendo o segmento A_1B_1, cuja VG é o segmento $A'_1B'_1$.

No espaço:



Exercício

Encontrar a VG do segmento dado rebatendo sobre um plano β paralelo ao π' AB.

a)

A'(20)

B'(30)

b)

D'(35)

C'(50)

c)

E'(-10)

F'(35)

Exercícios propostos

1. Representar a distância entre os pontos dados.
unidade: mm

a) A(50,40,100) e B(100,80,60)

b) C(40,70,20) e D(60,30,-30)

c) E(30,60,100) e F(30,60,80)

d) Dados em posição G e H

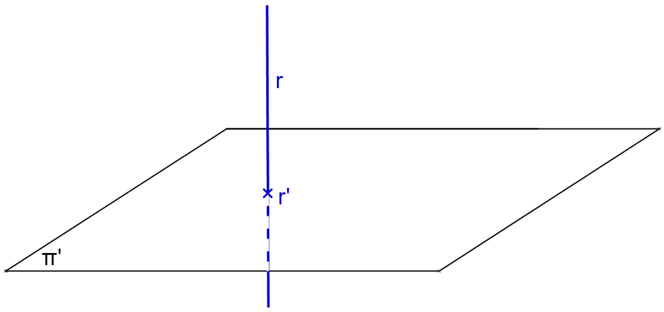
2. Na planta de um terreno foram assinalados dois pontos, um de cota 26m e outro de cota 17m. Sabendo-se que o desenho está na escala 1:100 e que em planta a distância entre os pontos é de 8cm, determinar a distância entre os pontos.

3. REPRESENTAÇÃO DA RETA

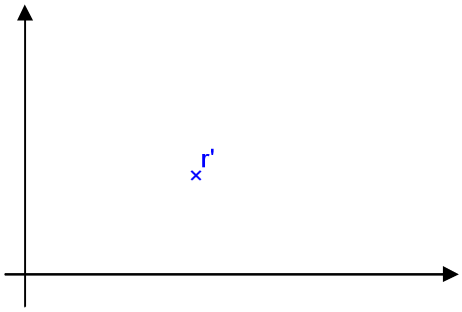
<u>Propriedade já vista</u>: Se r é uma reta então r' ou é uma reta (se r não for paralela à direção das projetantes *d*) ou um ponto (se r for paralela a direção das projetantes d)

Reta vertical

Característica espacial:______________________



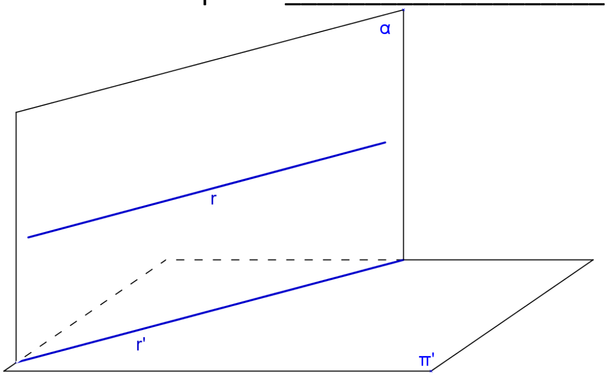
Épura:



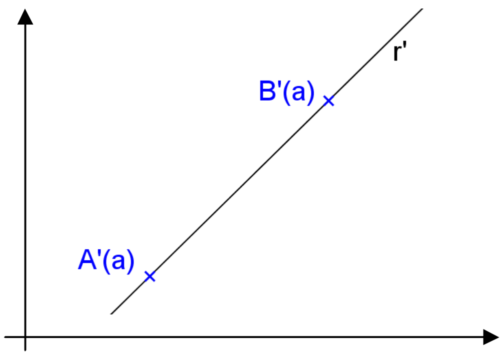
Exercício: Representar a reta vertical que passa pelo ponto A.

Reta horizontal ou de nível

Característica espacial:______________________



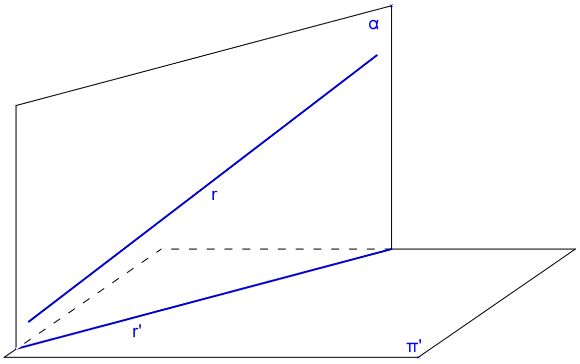
Épura:

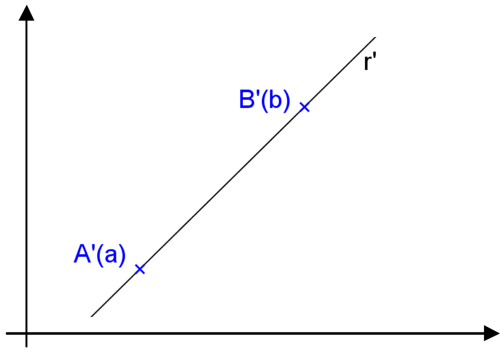


Exercício: Representar a reta horizontal que passa pelos pontos A e B.

Reta qualquer

Característica espacial:______________________ Épura:

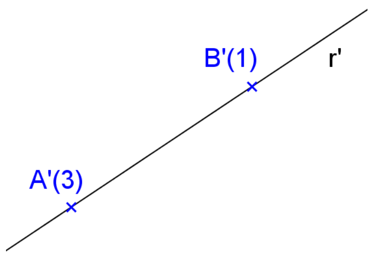




Exercício: Representar a reta qualquer que passa pelos pontos A e B.

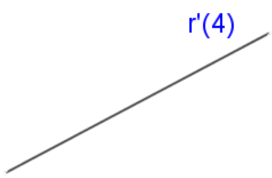
Exercício Proposto: Identificar o tipo da reta em cada épura dada a seguir.

a)

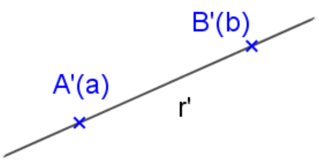


b)

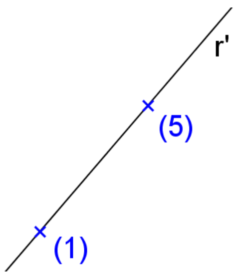
c)



d)

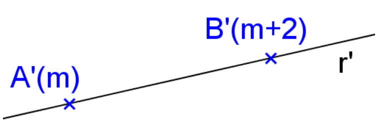


e)

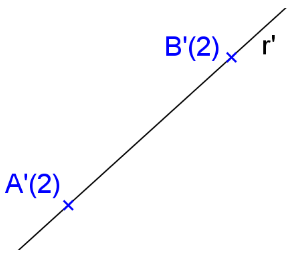


f)

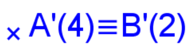
g)



h)



i)



3.1 Elementos de uma reta qualquer

1º Inclinação de uma reta é o menor ângulo θ que essa reta forma com o plano de representação.

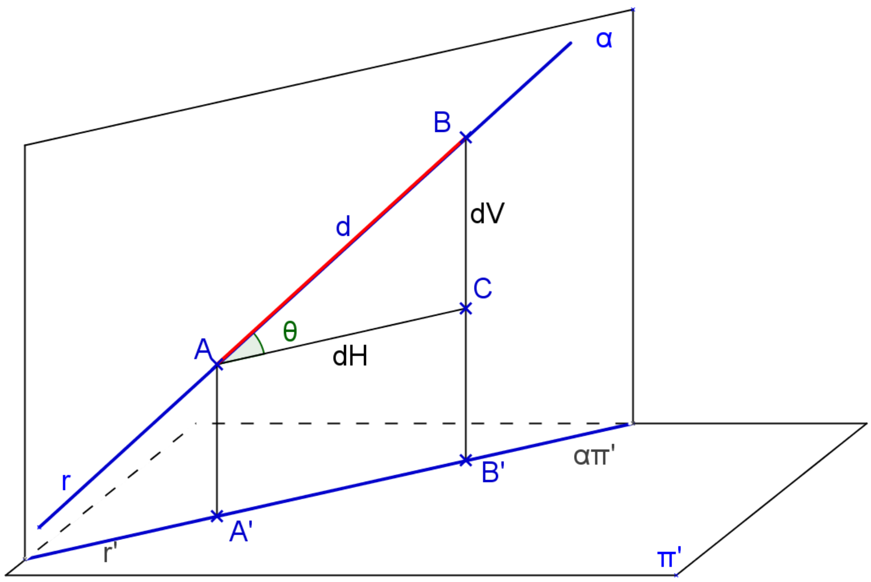
A inclinação pode ser obtida:

Ou algebricamente, da seguinte forma:

como $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{dV}{dH}$, onde dV = |b – a| (diferença de cotas dos pontos) e dH=A'B' (projeção de AB)

então $\theta = \operatorname{arc\,tg}\dfrac{dV}{dH}$.

Ou graficamente pelo rebatimento do plano projetante α da reta r.



2º Coeficiente de redução é dado por $\rho = \cos\theta = \dfrac{dH}{d}$.

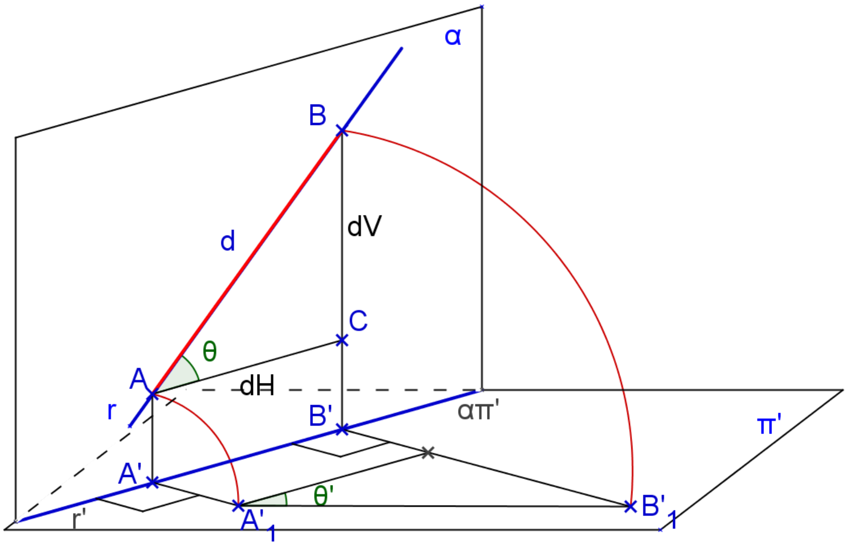
3º Declive de uma reta é a tangente da sua inclinação, ou seja, de = tg θ = $\dfrac{dV}{dH}$.

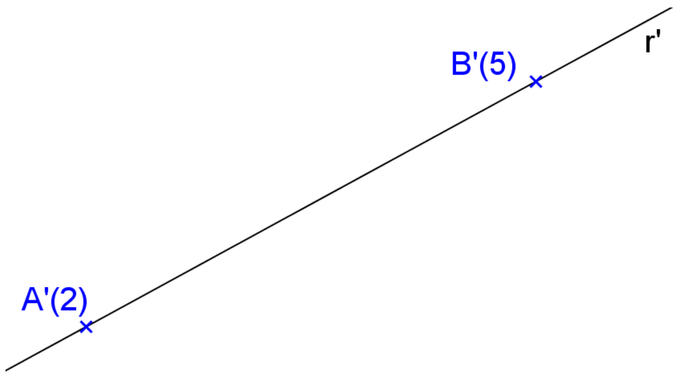
É comum exprimir o declive em porcentagem em vez de uma fração ou de um número decimal. Assim, em vez de se dizer, por exemplo, declive igual a 3/5 ou 0,6, usa-se dizer declive igual a 60%. Para inclinação zero não há declive. Para inclinação 90^o o declive é infinito. E para inclinação 45^o o declive é 100%.

O declive também é chamado de declividade ou rampa.

Exercício

Obter a inclinação da reta r(A,B) e a VG do segmento AB. Obter seu coeficiente de redução e seu declive.

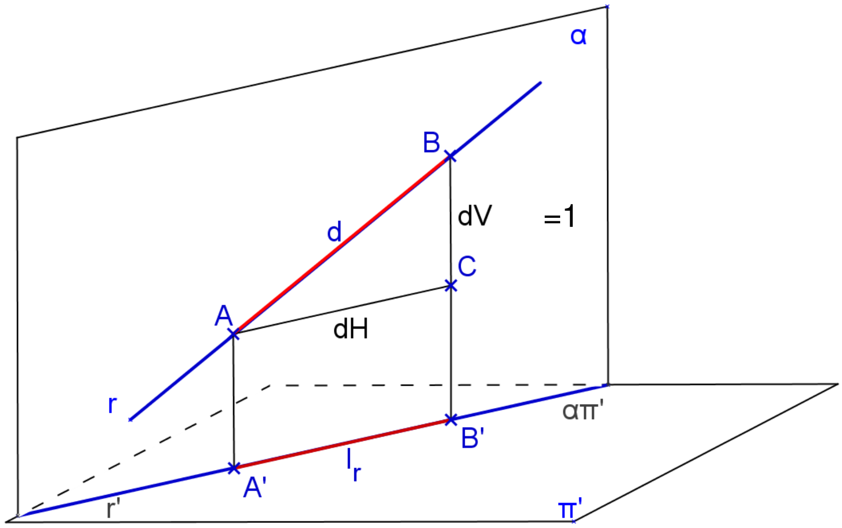




4º Intervalo

O intervalo é uma distância horizontal de dois pontos de uma reta tais que a diferença de suas cotas seja igual a unidade.

Sejam A e B tais que |b – a| = 1 unidade, sendo a e b as cotas dos pontos, respectivamente, então o intervalo I = dH = A’B’.



O declive é o inverso do intervalo unitário, pois:

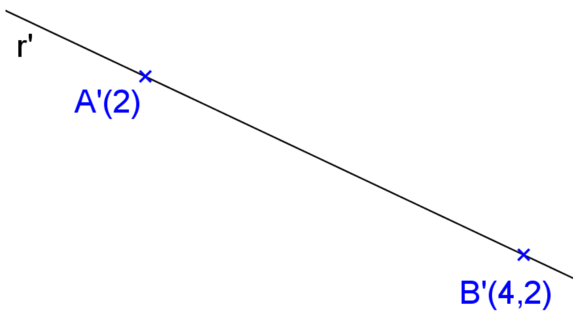
$$\text{tg}\,\theta = \frac{dV}{dH} = \frac{b-a}{A'B'} = \frac{1}{A'B'} \;\therefore\; \text{tg}\,\theta = \frac{1}{A'B'} \Rightarrow A'B' = \frac{1}{\text{tg}\,\theta}$$

A equidistância é um múltiplo do intervalo.

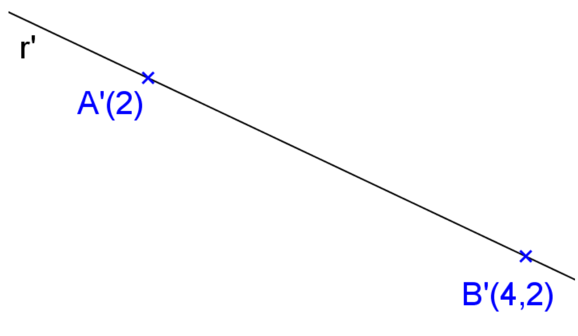
Exercício

Represente o intervalo da reta dada r(A,B)

a) por rebatimento



b) por Thales



5º Escala de declive – Graduar uma reta

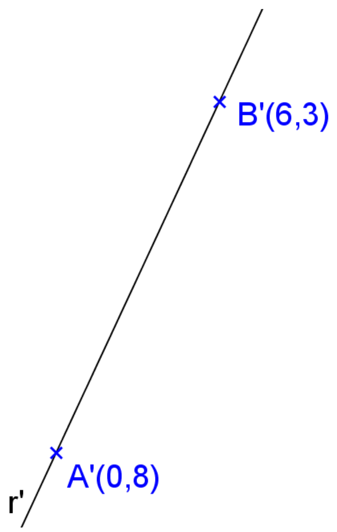
A escala de declive de uma reta r é a figura que se obtém representando sobre sua projeção r' os pontos de cotas inteiras. Graduar uma reta é obter a escala de declive.

- Marcando os pontos de cotas inteiras e consecutivas teremos o intervalo da reta.
- Representamos por g_r a graduação da reta r (pontos de cotas inteiras).

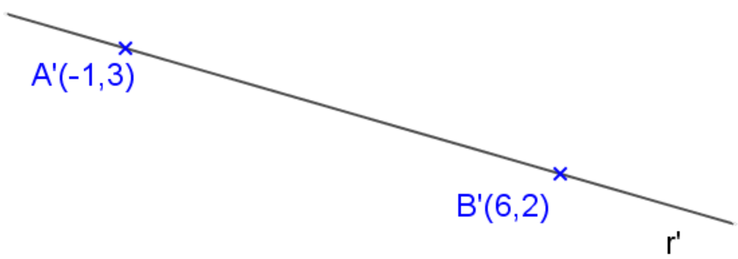
Exercício

Graduar a reta r definida pelos pontos A e B. A unidade é o cm.

a)



b)



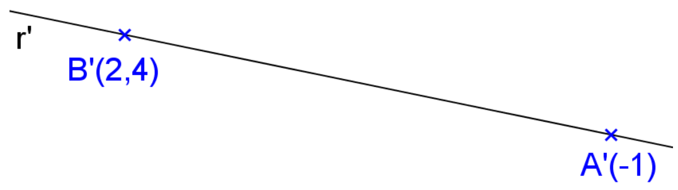
Exercícios Propostos:

1. Complete:

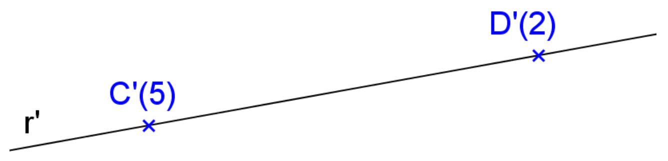
	Reta		
	qualquer	vertical	horizontal
Inclinação θ			
Coeficiente de redução ρ			
Declive *de*			
dH			
dV			
Intervalo *I*			

2. Encontre o traço de r sobre π'.
u = cm

a) r(A,B)



b) r(C,D)

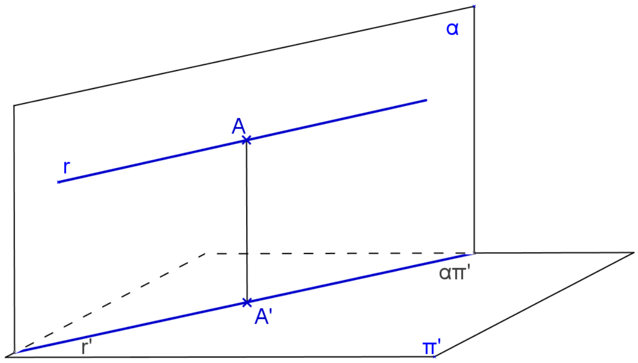


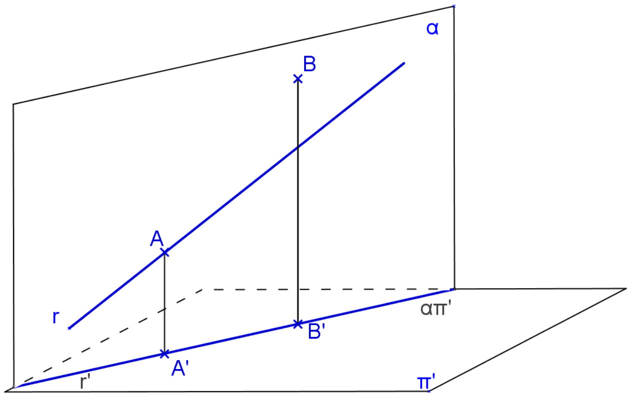
3. Dada a reta r definida por A(2; 4; 3) e B(4; 2; 7,5) obter sua inclinação, seu intervalo, seu coeficiente de redução e sua declividade. A unidade é o centímetro.

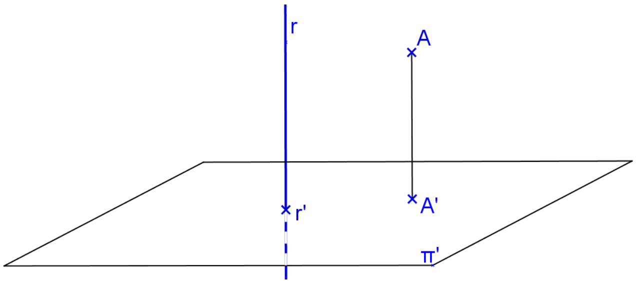
4. Representar a reta r que passe pelos pontos dados A(4,3,2) e B(6,5,?) e forme ângulo dado $\theta=60^o$ com π‘. Obter a cota do ponto B. A unidade é o centímetro.

3.2 Pertinência de ponto à reta

A condição para que um ponto pertença a uma reta é que sua projeção pertença à projeção da reta e que sua cota seja a cota de um ponto da reta.





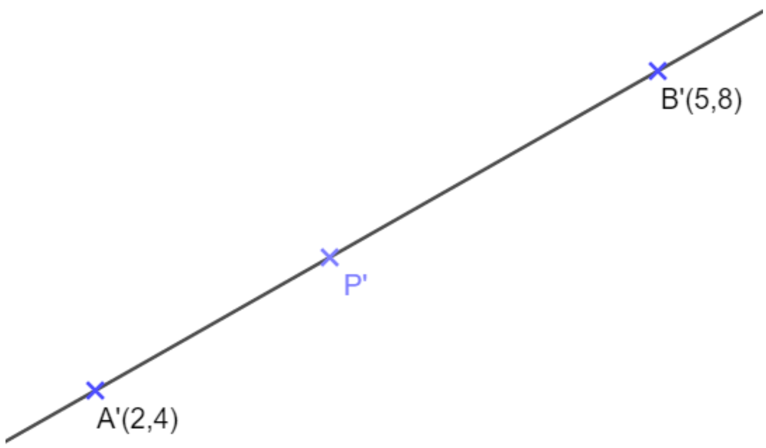


Exercícios

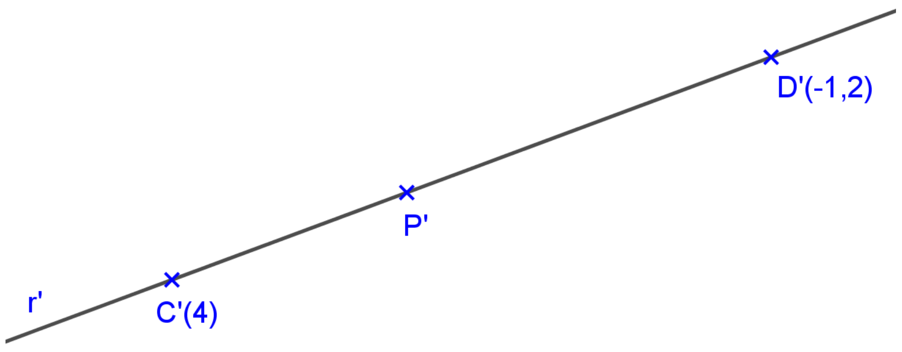
1. Obtenha a cota de um ponto P pertencente a uma reta dada r, sendo dada a sua projeção P'. Obtenha pontos de cotas inteiras da reta.

u = cm

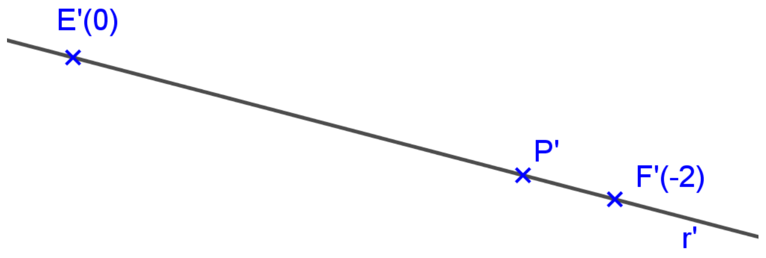
a) r(A,B)



b) r(C, D)

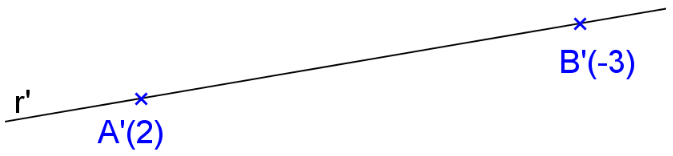


c) r(E, F)

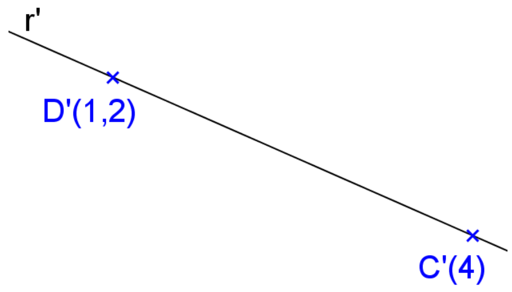


2. Represente um ponto P da reta dada r sendo dada a sua cota p.
u=cm

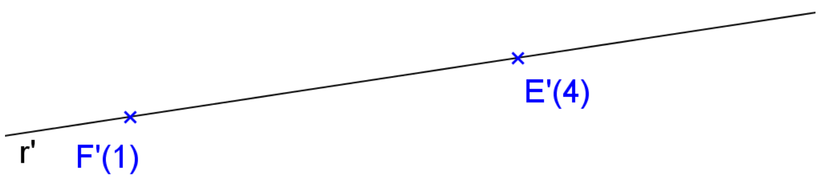
a) r(A,B) p=0,7cm



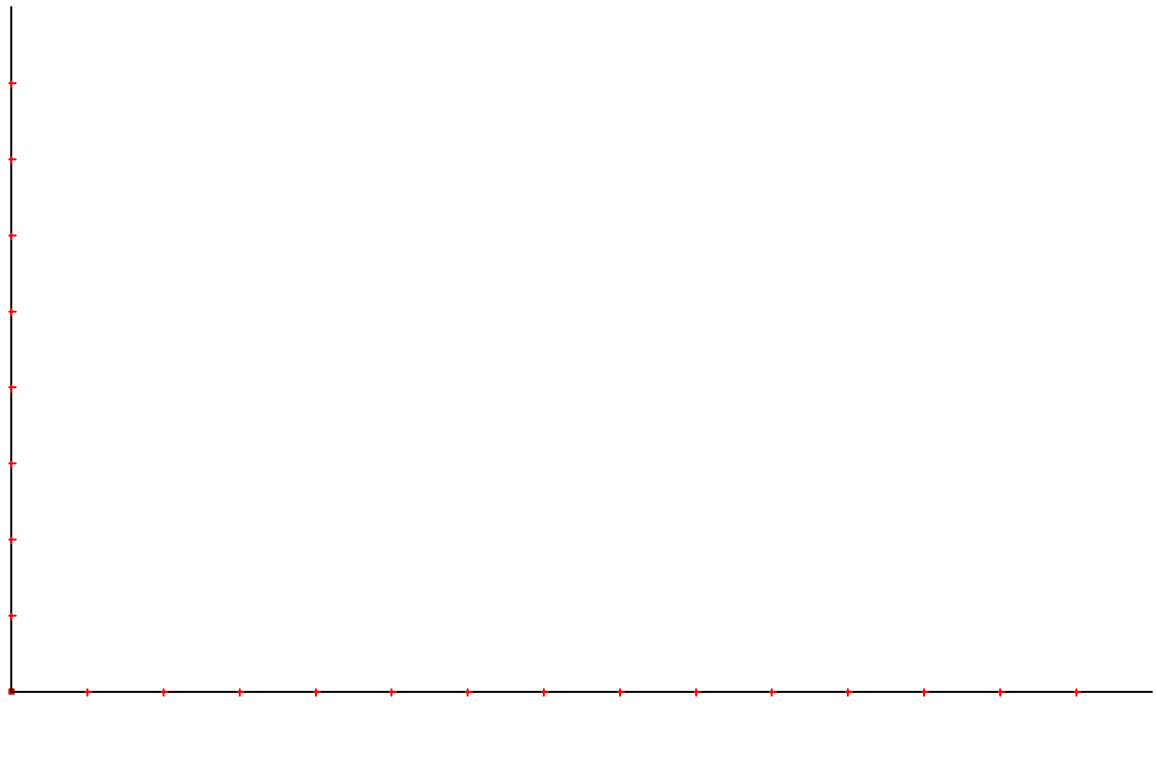
b) r(C,D) p=2,5cm



c) r(E,F) p=5cm



d) r(G,H) G(4,5,4), H(8,2,2) e p=1,5cm



3.3 Posições relativas entre duas retas

$$\text{r e s podem ser}\begin{cases}\text{coplanares} & \begin{cases}\text{paralelas}\\ \text{concorrentes}\\ \text{coincidentes}\end{cases}\\ \text{não – coplanares ou reversas}\end{cases}$$

<u>Relembrando a propriedade 2</u>: Se r//s então r’//s’ ou r’≡s’ ou são pontuais.

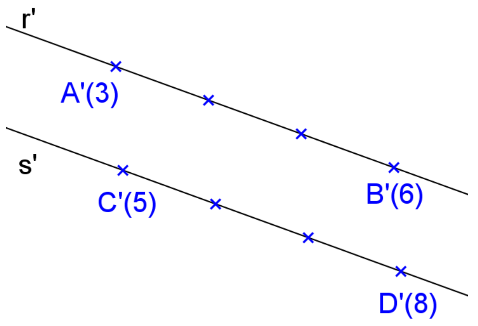
3.4 Condições de paralelismo

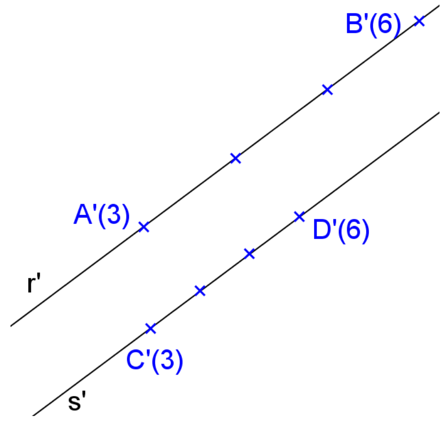
1º Retas verticais
r e s verticais sempre serão paralelas ou coincidentes.

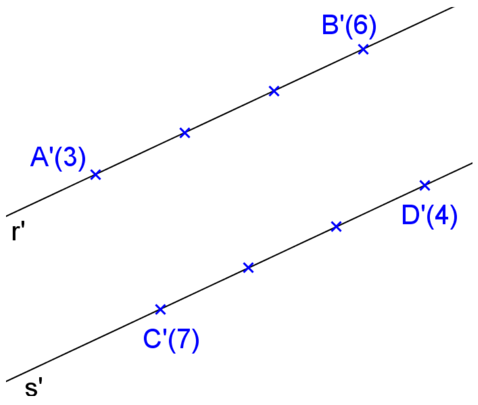
2º Retas horizontais
r // s, ambas horizontais ⇔ r’//s’

3º Retas quaisquer

$$r\ //\ s,\ \text{ambas quaisquer} \Leftrightarrow \begin{cases} r' // s' \text{ ou } r' \equiv s' \text{ e}\\ I_r = I_s \text{ e}\\ g_r \text{ e } g_s \text{ crescem no mesmo sentido}\end{cases}$$



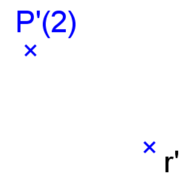




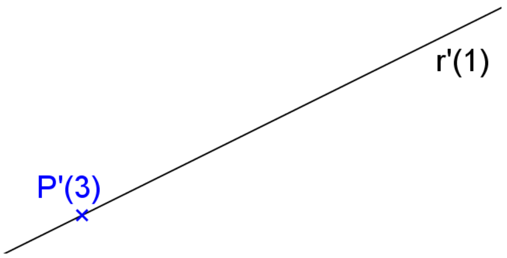
Exercício

Representar a reta s pertencente a um ponto dado P e paralela a uma reta dada r.

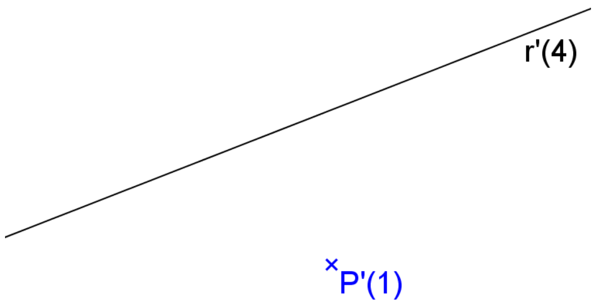
a)



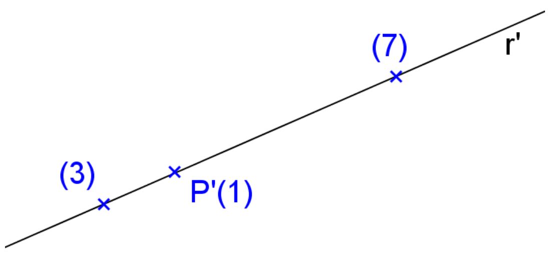
b)



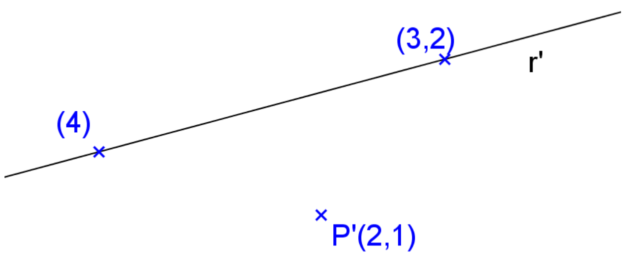
c)



d)



e)



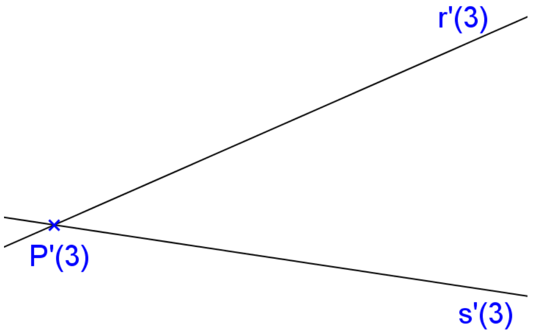
3.5 Condições de incidência

Sejam r(A,B) e s(C,D)

$$r \text{ pode ser } \begin{cases} \text{horizontal} \\ \text{vertical} \\ \text{qualquer} \end{cases} \quad \text{e s pode ser } \begin{cases} \text{horizontal} \\ \text{vertical} \\ \text{qualquer} \end{cases}$$

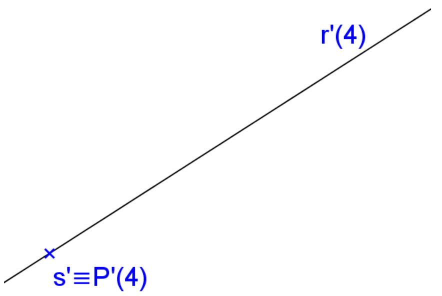
1. r horizontal e s horizontal

r X s ⇔ Cotas iguais e projeções concorrentes.



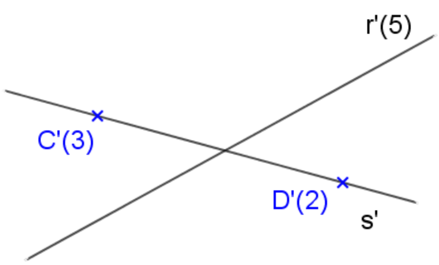
2. r horizontal e s vertical

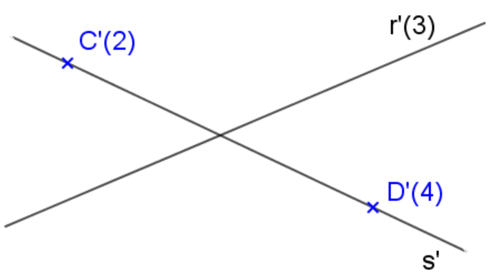
r X s ⇔ s’ ∈ r’



3. r horizontal e s qualquer

$$\text{r X s} \Leftrightarrow \begin{cases} -\, r' \text{ X } s' \\ -\, \text{(rs) tem mesma cota quando} \\ \quad \text{considerado de r e de s} \end{cases}$$



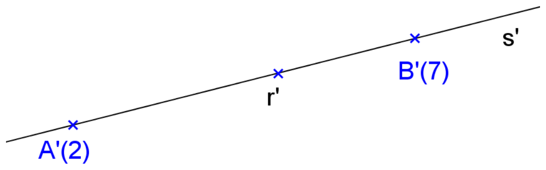


4. r vertical e s vertical

Serão paralelas ou coincidentes.

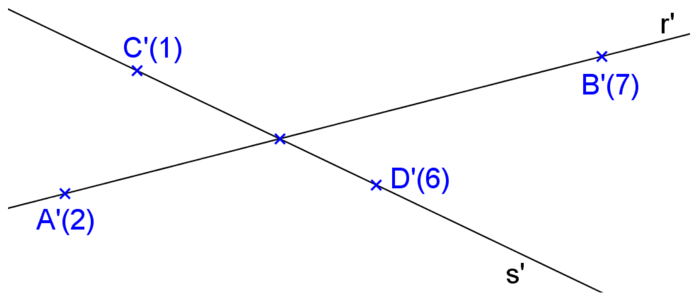
5. r vertical e s qualquer

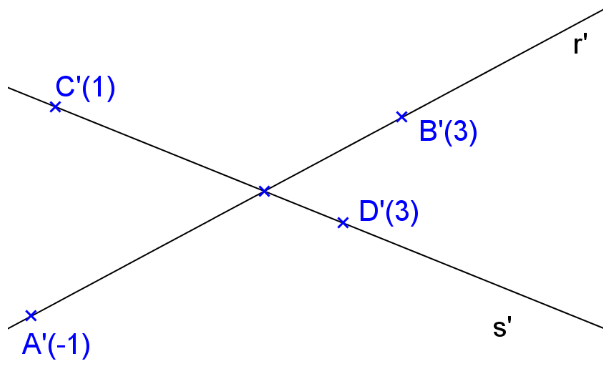
r X s ⇔ r' ∈ s'



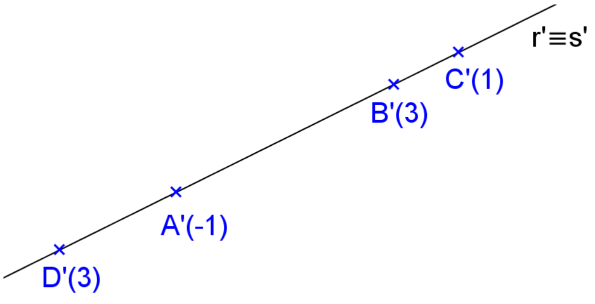
6. r qualquer e s qualquer

a) Planos projetantes distintos e não paralelos – podem ser concorrentes ou reversas





b) Mesmo plano projetante – podem ser concorrentes ou paralelas ou coincidentes



3.6 Retas perpendiculares ou ortogonais

Relembrando a Propriedade 7 de projeções ortogonais:

Se (1) $r \perp s$ (ou $r \perp s$)
(2) $r \,//\, \pi'$ (ou $r \subset \pi'$)
(3) $s \not\perp \pi'$
$\Rightarrow$ (4) $r' \perp s'$

As recíprocas são válidas:

Se (2) $r \,//\, \pi'$ (ou $r \subset \pi'$)
(3) $s \not\perp \pi'$
(4) $r' \perp s'$
$\Rightarrow$ (1) $r \perp s$ (ou $r \perp s$)

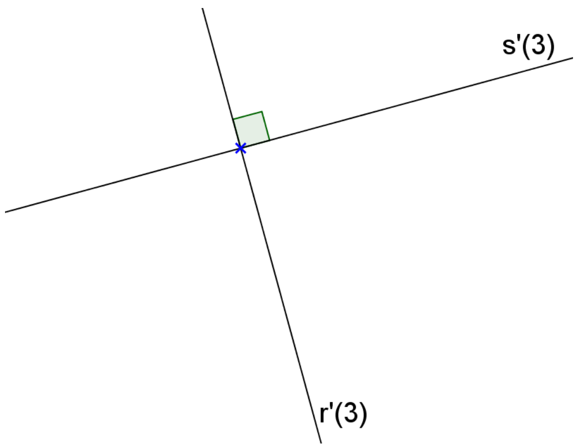
Se (1) $r \perp s$ (ou $r \perp s$)
(4) $r' \perp s'$
$\Rightarrow$ (3) $s \not\perp \pi'$
(2) $r \,//\, \pi'$ (ou $r \subset \pi'$)

Na projeção cilíndrica ortogonal tem-se que um ângulo não reto somente se projeta em VG quando dois lados forem paralelos ao plano de projeção. Porém, se o ângulo for reto, basta um só lado ser paralelo (ou estar contido) e o outro ser não perpendicular ao plano de projeção para que ele tenha projeção ortogonal em VG.

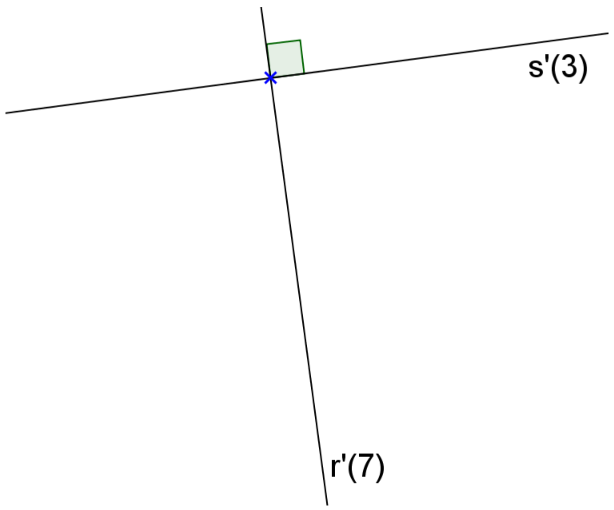
Sejam as retas r e s. Então podemos ter:

1. r horizontal e s horizontal

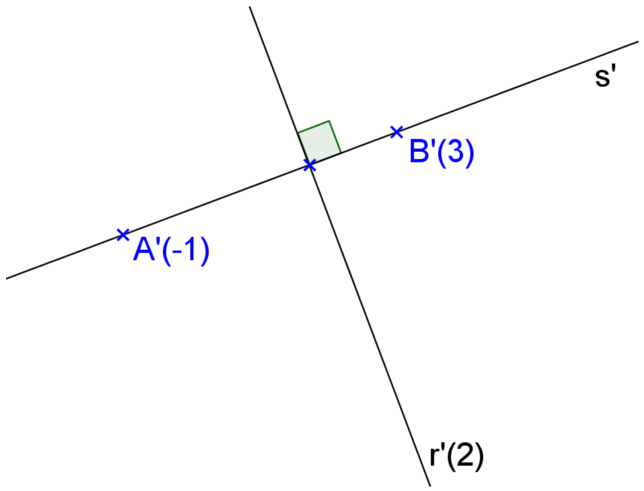
Perpendiculares – ângulo reto e cotas iguais



Ortogonais – ângulo reto e cotas diferentes



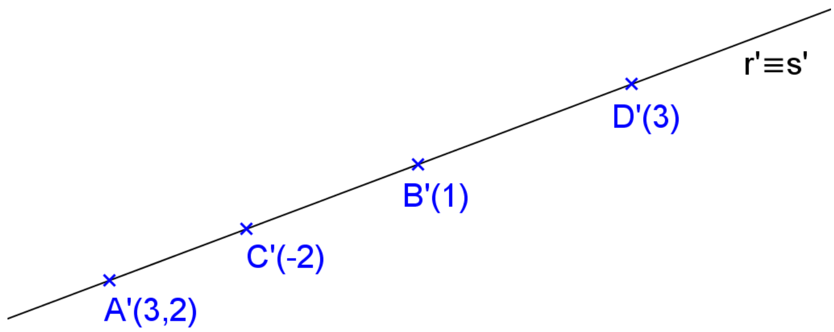
2. r horizontal e s qualquer



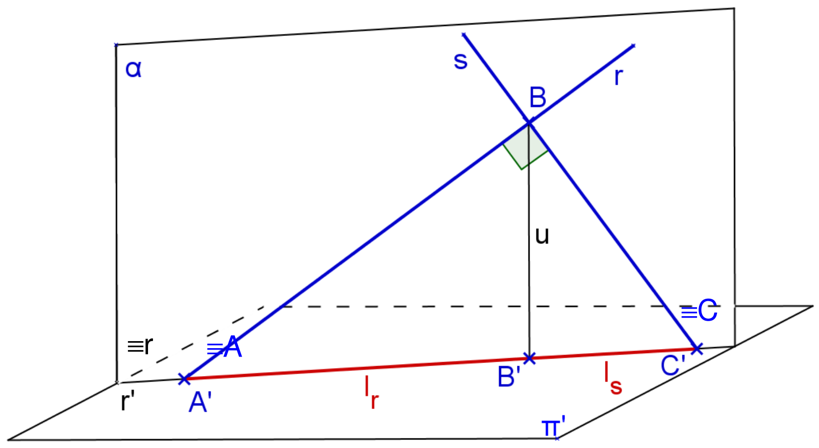
3. r qualquer e s qualquer

E pertencentes ao mesmo plano projetante ou a planos projetantes paralelos

Solução 1: rebater o plano projetante



Solução 2: trabalhar com o intervalo (ou a equidistância) delas

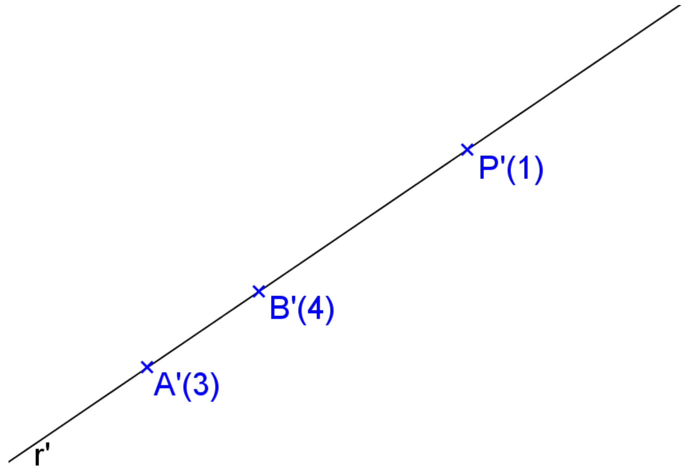


$$\begin{cases} r' // s' \text{ ou } r' \equiv s' \\ l_r = \dfrac{1}{l_s} \\ g_r \uparrow \; g_s \downarrow \end{cases}$$

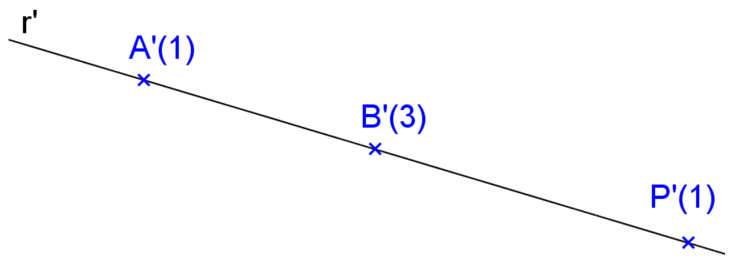
Exercícios

1. Representar a reta s pertencente ao ponto dado P e perpendicular a uma reta dada r(A,B) sabendo-se que seus planos projetantes são coincidentes.

a)

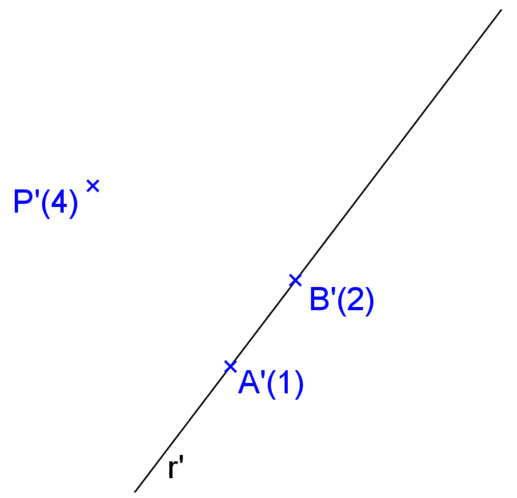


b)

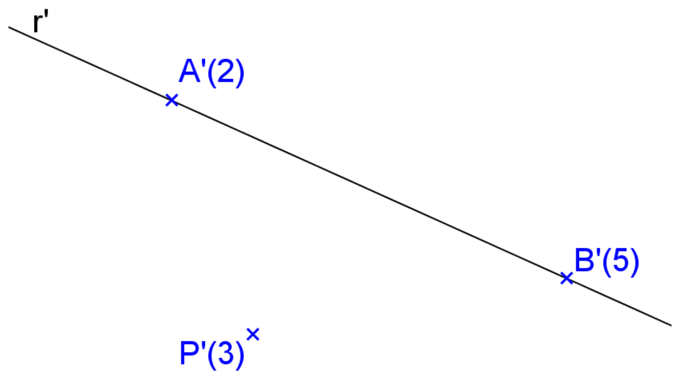


2. Representar a reta s pertencente ao ponto dado P e ortogonal a uma reta dada r(A,B), sabendo-se que seus planos projetantes são paralelos.

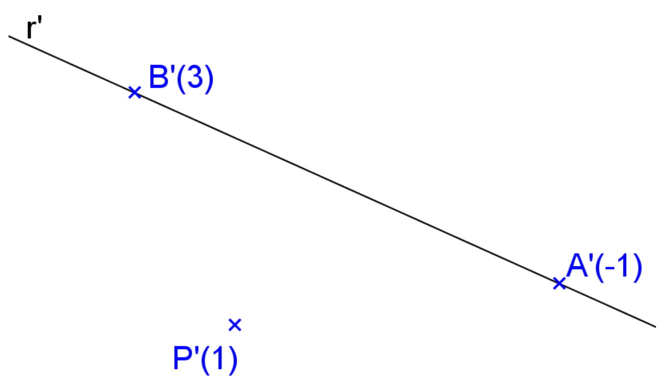
a)



b)



c)



4. REPRESENTAÇÃO DO PLANO

Um plano fica determinado por:

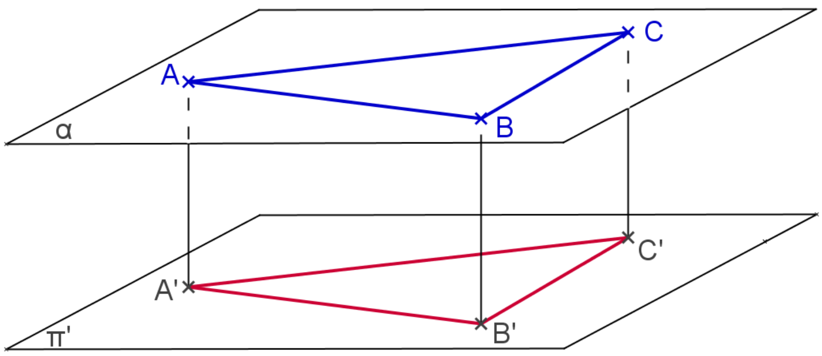
- Três pontos não colineares;
- Um ponto e uma reta que não se pertencem;
- Duas retas concorrentes ou paralelas.

4.1 Posições relativas de um plano em relação ao Plano de Projeção

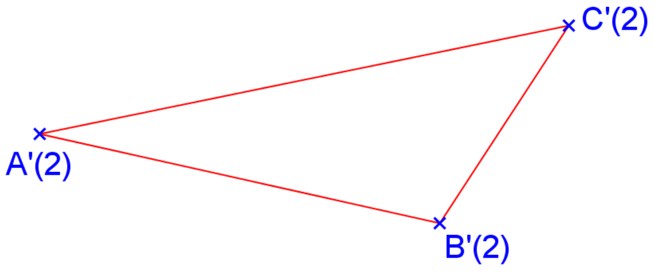
$$\alpha \text{ e } \pi' \text{ podem ser } \begin{cases} \text{paralelos} \\ \text{perpendiculares (projetantes)} \\ \text{oblíquos} \end{cases}$$

4.1.1 Plano horizontal (ou de nível)

Espaço:



Épura:



<u>Propriedades</u>:

a) Cota constante
b) Quantidade de pontos que determinam o plano:
c) Retas contidas no plano:
d) VG:
e) Reta perpendicular:
f) Pertinência de ponto ao plano:
g) Traço:

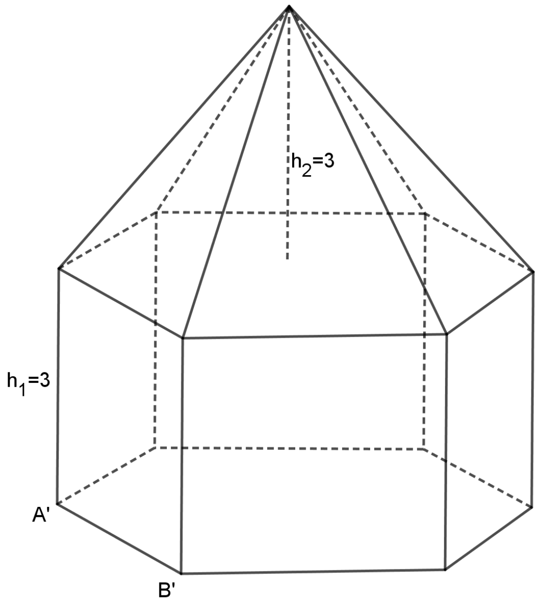
Exercícios

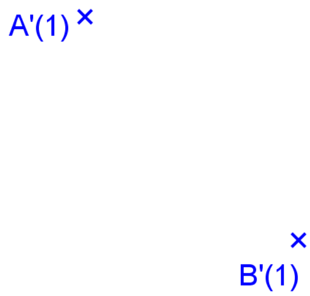
1. Representar a projeção cotada de uma pirâmide V-ABCD regular, com a base contida no plano horizontal α(A,B) e altura de 4,3cm.

2. Representar a projeção cotada de uma pirâmide V-ABCDEF, com a base hexagonal regular contida no plano horizontal α(A,B), dados os pontos A, B e V.

Realidade Virtual: paulohscwb.github.io/cotadas/
Realidade Aumentada: paulohscwb.github.io/cotadas/ra.html

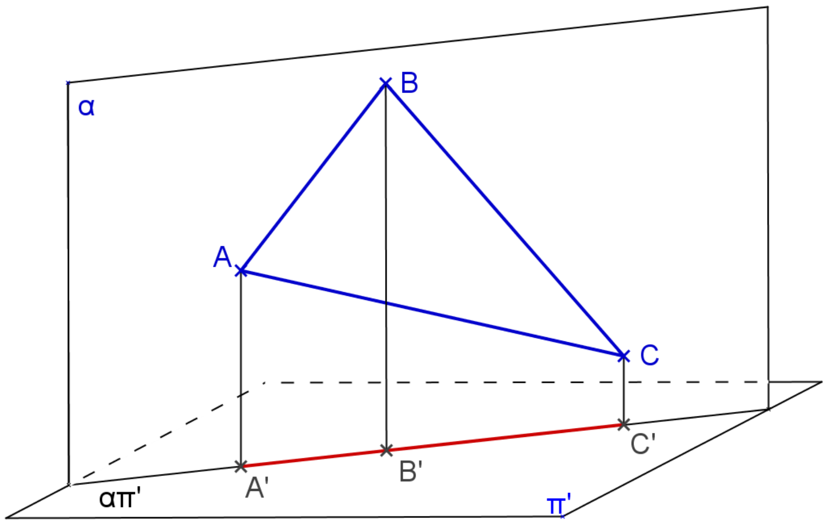
3. Represente a projeção cotada do sólido abaixo (pirâmide e prisma retos de bases hexagonais), com a base contida no plano horizontal α(A,B), dados os pontos A e B.



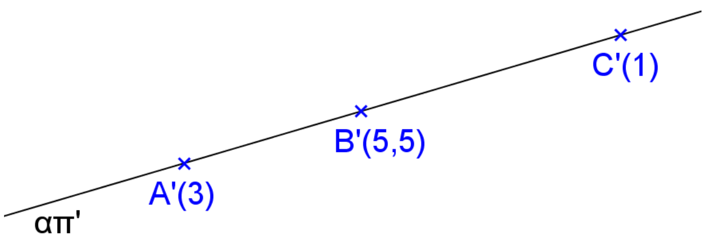


4.1.2 Plano vertical (ou projetante)

Espaço:



Épura:



<u>Propriedades</u>:

a) Plano projetante: qualquer figura contida neste plano tem sua projeção reduzida a um segmento ou a uma reta. Assim, r pertence a $\alpha \Leftrightarrow$ r' pertence a $\alpha\pi'$.

b) Quantidade de pontos que determinam o plano:

c) Retas contidas no plano:

d) VG:

e) Reta perpendicular:

f) Pertinência de ponto ao plano:

g) Traço:

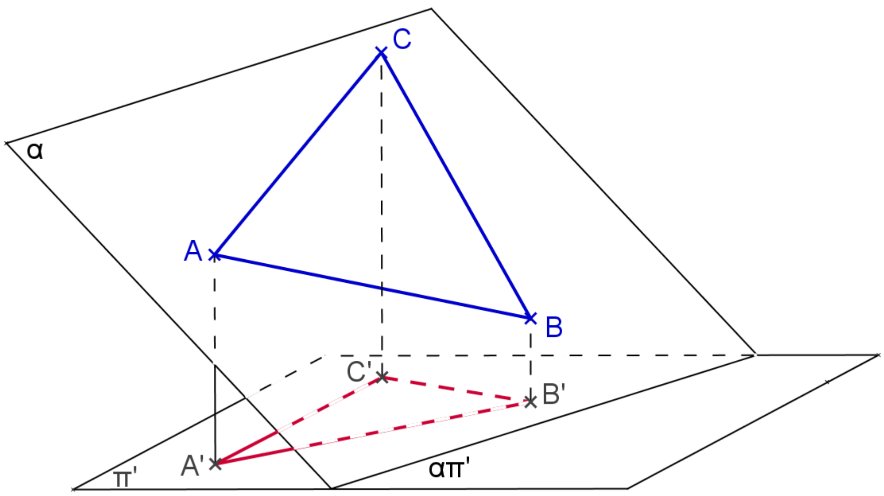
Exercícios

1. Represente as projeções da pirâmide regular V-ABCD, com a base contida no plano vertical α(A,B) e altura h = 4cm.

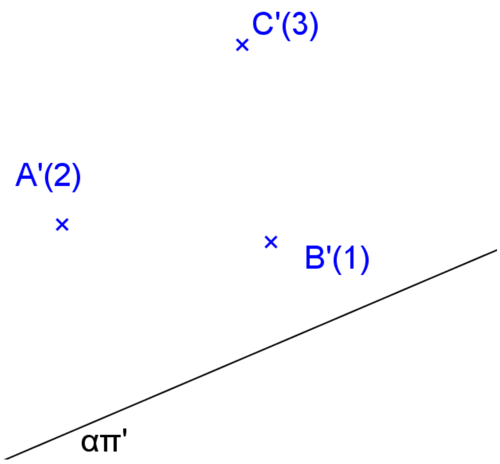
2. Represente as projeções do prisma reto de base hexagonal regular ABCDEF - GHIJKL, com uma base contida no plano vertical α(A,B) e altura h = 4cm.

4.1.3 Plano qualquer

Espaço:



Épura:

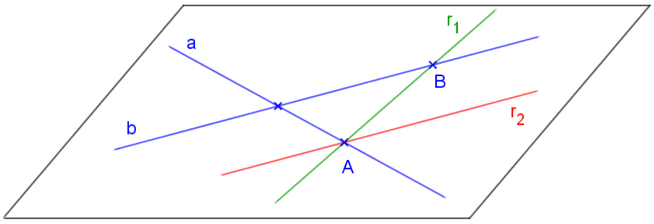


<u>Propriedades</u>:

a) Quantidade de pontos que determinam o plano:
b) Retas contidas no plano:
c) VG:
d) Reta perpendicular:
e) Pertinência de ponto ao plano:
f) Traço:

4.2 Pertinência de reta a um plano qualquer

$$r \subset \alpha \iff \begin{cases} r \, X \, a, r \, X \, b, \text{ onde } a,b \subset \alpha \\ r \, X \, a, r \, // \, b, \text{ onde } a,b \subset \alpha \end{cases}$$



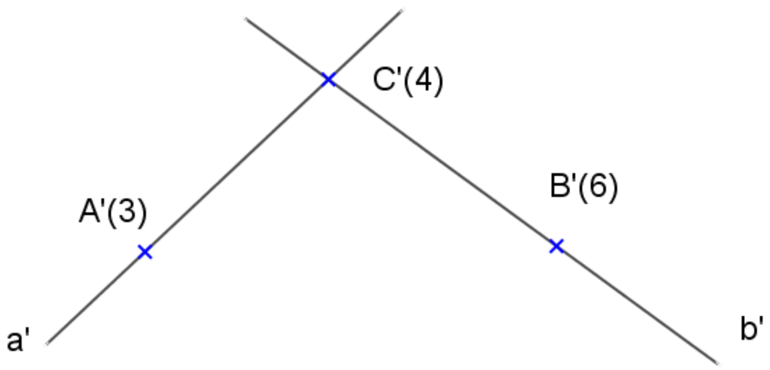
4.3 Pertinência de ponto a um plano qualquer

$$P \in \alpha \iff P \in r \text{ e } r \subset \alpha$$

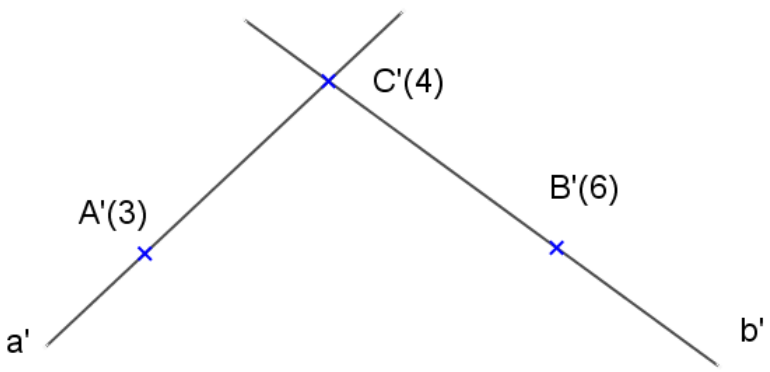
Exercícios

1. Representar uma reta r pertencente ao plano dado α(a,b)

a) considerar rXa e rXb

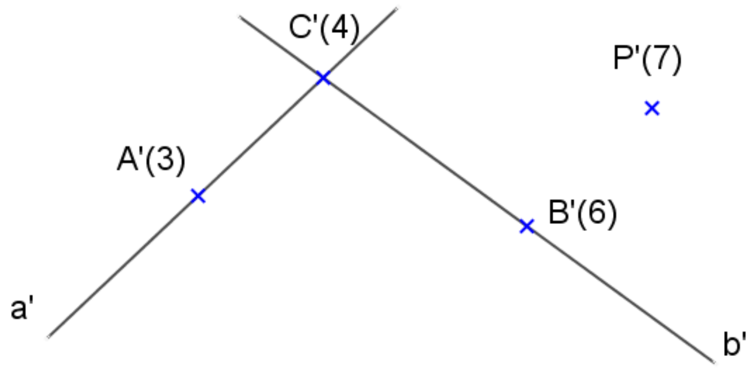


b. considerar rXa e r//b

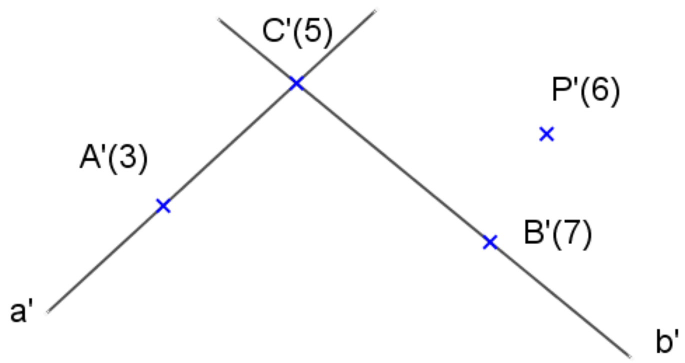


2. Verificar se o ponto P pertence ao plano α(a,b)

a)

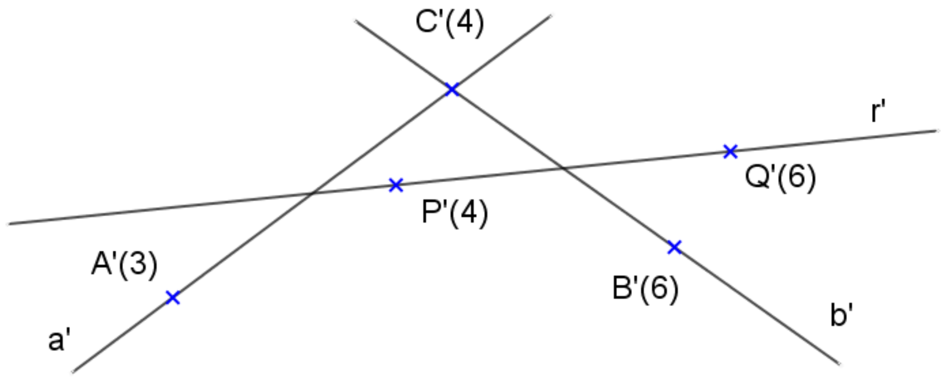


b)

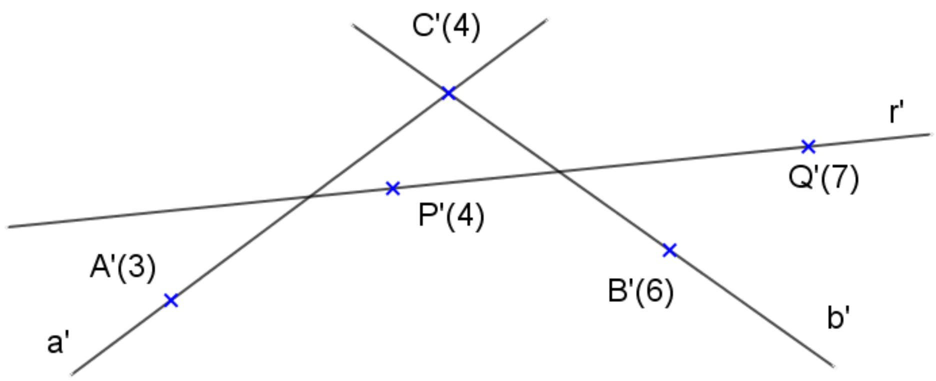


3. Verificar se a reta dada r(P,Q) pertence ao plano dado α(a,b)

a)



b)

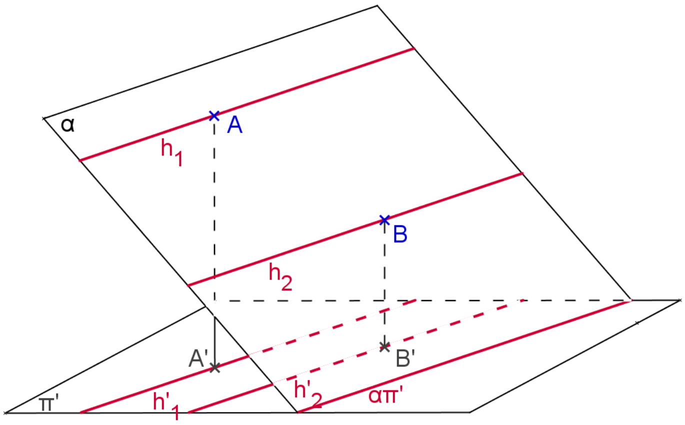


4.4 Horizontais de um plano

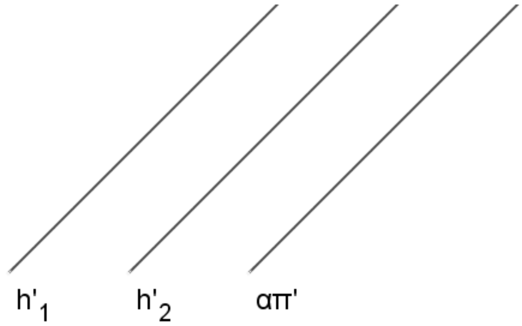
As horizontais de um plano qualquer são as retas de cota constante, ou seja, são as retas horizontais que estão contidas no plano.

Propriedade: As horizontais de um plano qualquer são sempre paralelas entre si.

Espaço:

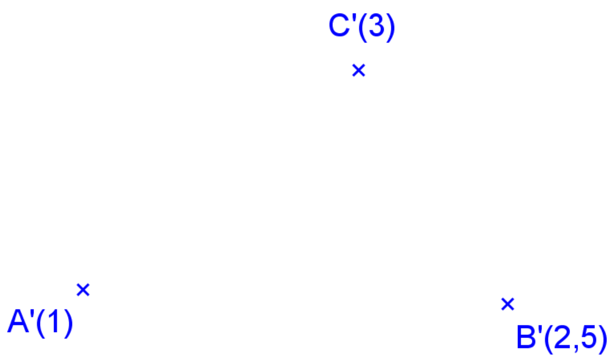


Épura:

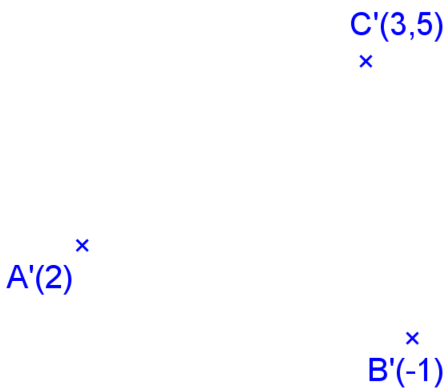


Exercícios

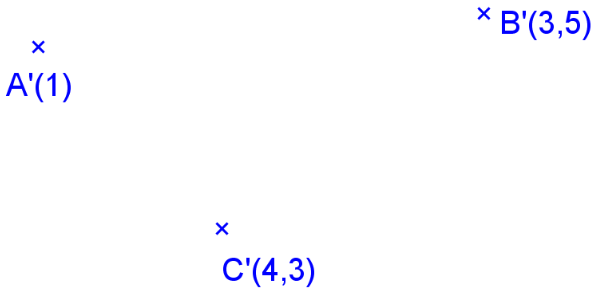
1. Dado o plano α(A,B,C) encontrar a projeção cotada da horizontal do plano conduzida pelo ponto B.



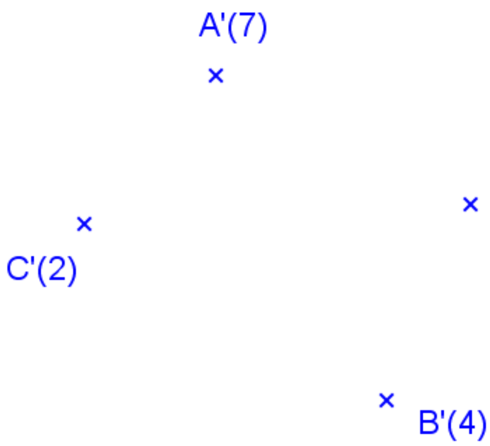
2. Determinar o traço do plano α(A,B,C) sobre o plano π´ (απ´).



3. Representar a horizontal de α(A,B,C) de cota c=2.



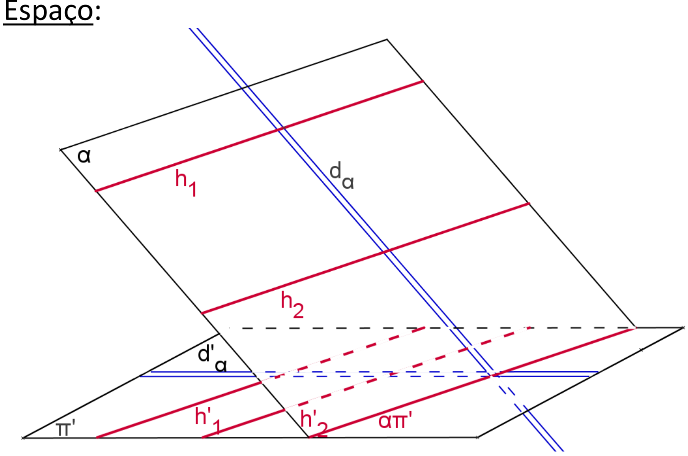
4. Obter a cota do ponto P pertencente a um plano α(A,B,C) qualquer, sendo dada a sua projeção P'.



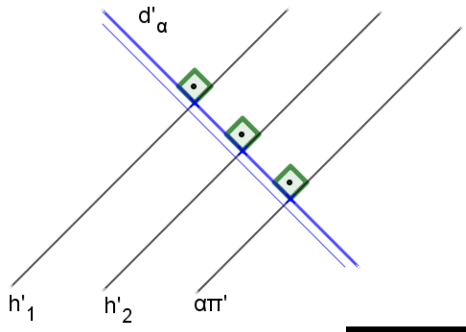
4.5 Reta de declive de um plano

A reta de declive de um plano é a reta que é perpendicular às horizontais desse plano.

Espaço:



Épura:

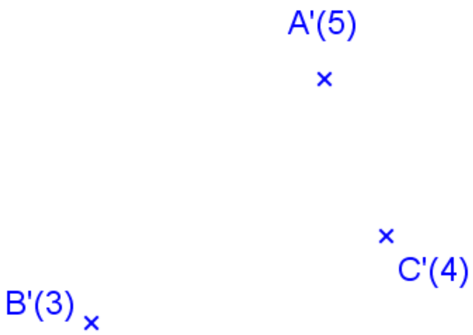


Propriedades:

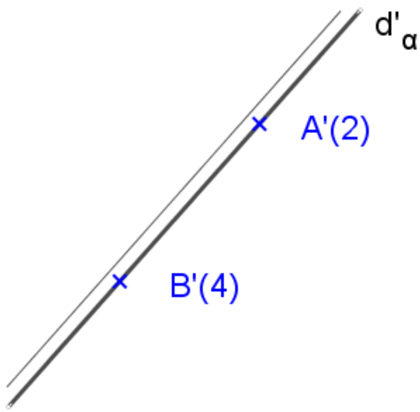
1. O ângulo entre α e π´ é o ângulo formado por d e π´.
2. Todas as retas de declive de α são paralelas entre si.
3. A reta de declive de um plano é a escala de declive desse plano.
4. Uma reta de declive de um plano qualquer é suficiente para representá-lo.
5. A inclinação de um plano é a inclinação de uma de suas retas de declive.

Exercícios

1. Represente uma reta de declive do plano α(A,B,C).



2. Dado o plano qualquer α por uma reta d_α de declive, represente outras retas deste plano.



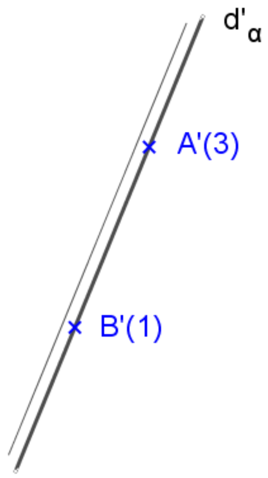
4.6 Inclinação de um plano

A inclinação de um plano qualquer é o ângulo que o mesmo forma com π'.

O ângulo que um plano qualquer forma com π' é dado pela inclinação de suas retas de declive.

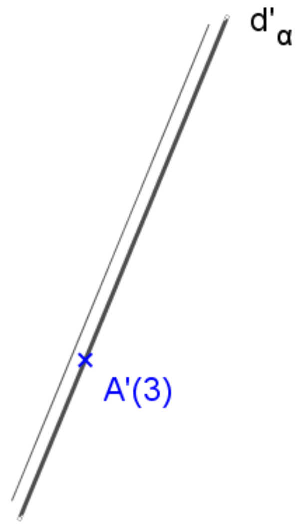
Exercícios

1. Encontrar o ângulo θ que o plano $\alpha(d_\alpha)$ forma com π'.

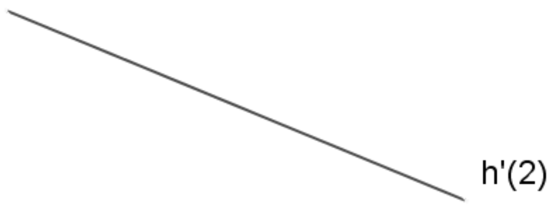


2. Encontrar o ângulo θ que o plano α (A, B, C) forma com o plano π'.

3. Representar o plano α(d) que forma 30° com o plano π'.



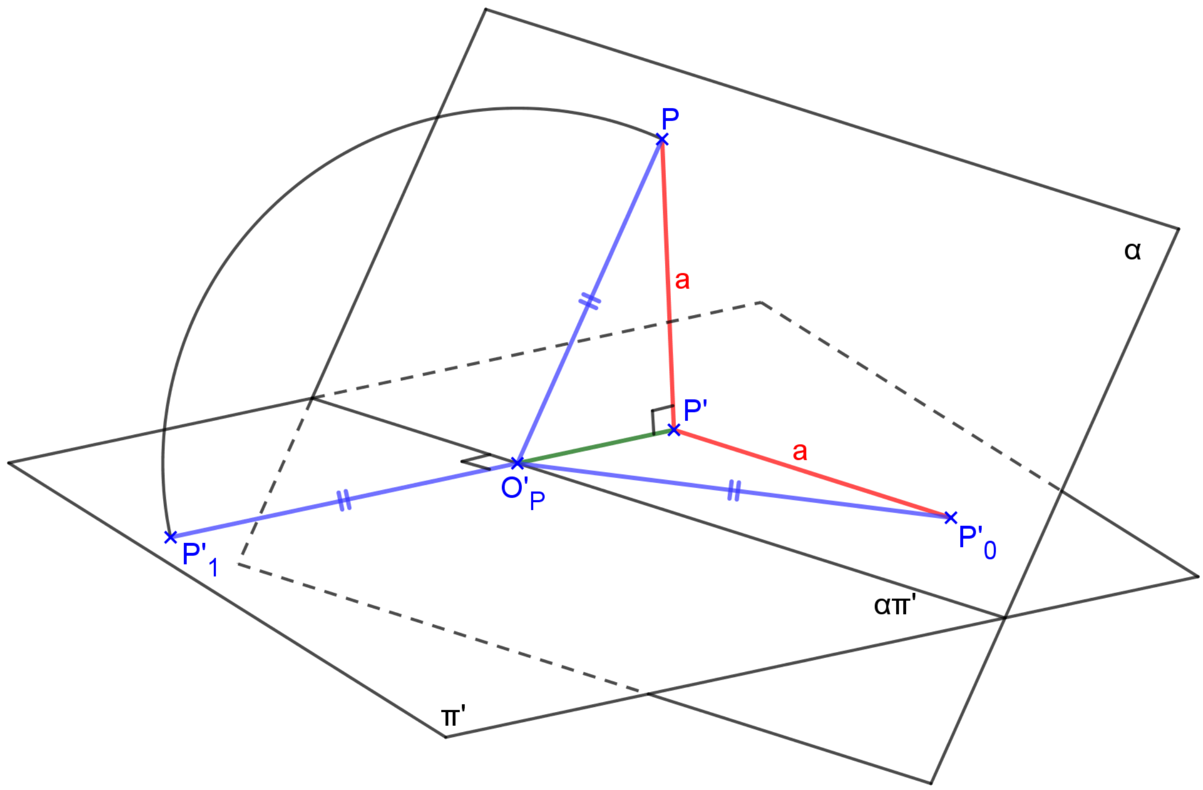
4. Representar um plano α que contém a reta dada h e forma ângulo de 60° com π'.



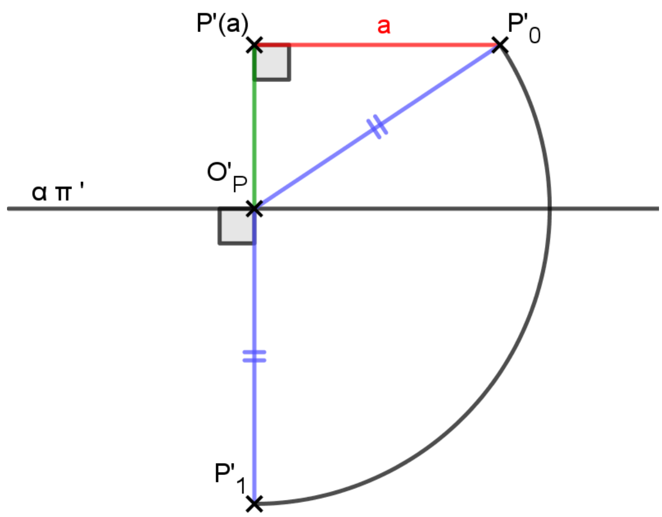
4.7 Rebatimento do plano qualquer

Para determinar a verdadeira grandeza de uma figura contida num plano qualquer, deve-se efetuar o rebatimento do mesmo sobre o plano horizontal π', ou sobre um outro plano paralelo à π'. O plano α é rotacionado em torno do eixo $\alpha\pi'$, que é o eixo de rotação do plano α até coincidir com o plano π'. O movimento do plano α em torno do eixo, descreve um arco de circunferência que está contido num plano γ perpendicular ao plano π' e, portanto a projeção deste arco será um segmento de reta contido no traço do plano γ sobre o plano π'. Para determinar a verdadeira grandeza deste arco, o plano vertical, γ que contém o arco é rebatido em torno de seu eixo $\gamma\pi'$. O_PPP' é o triângulo fundamental do rebatimento, sua verdadeira grandeza é representada em épura pelo triângulo $O'_PP'P'_0$.

Espaço:



Épura:



Exercícios:

1. Encontrar a Verdadeira Grandeza (VG) do triângulo ABC.
   Dados: A (30, 70, 0) B(80, 40, 0) C(80, 80, 40)

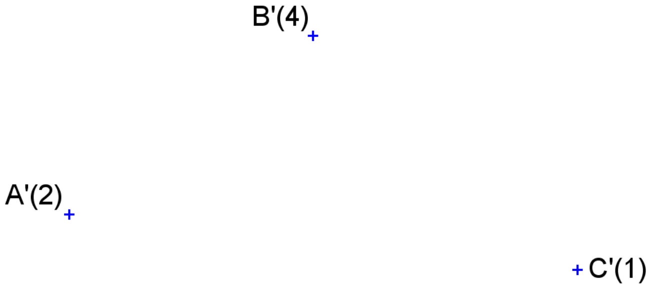
2. Encontrar a Verdadeira Grandeza (VG) do triângulo ABC.
   Dados: A (10,50,70) B(40,30,30) C(60,70,10)

3. Representar um triângulo equilátero ABC, contido num plano qualquer α (A, B, P)
Dados: A(40,60,60) B(50,90,80) P(100,80,30

4. Representar um quadrado ABCD contido num plano qualquer α(A,B,P).
Dados: A(60,20,50) B(70,0,70) P(100,10,20)

Exercícios Propostos:

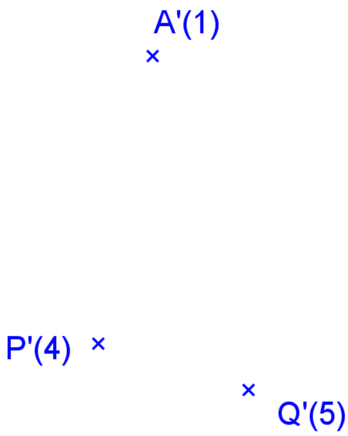
1. Dado o plano α (A, B, C), encontrar a Verdadeira Grandeza (VG) do triângulo ABC. Encontre também a projeção cotada do ortocentro deste triângulo.



2. Construir a projeção cotada do quadrado ABCD contido no plano α (A, B, P).

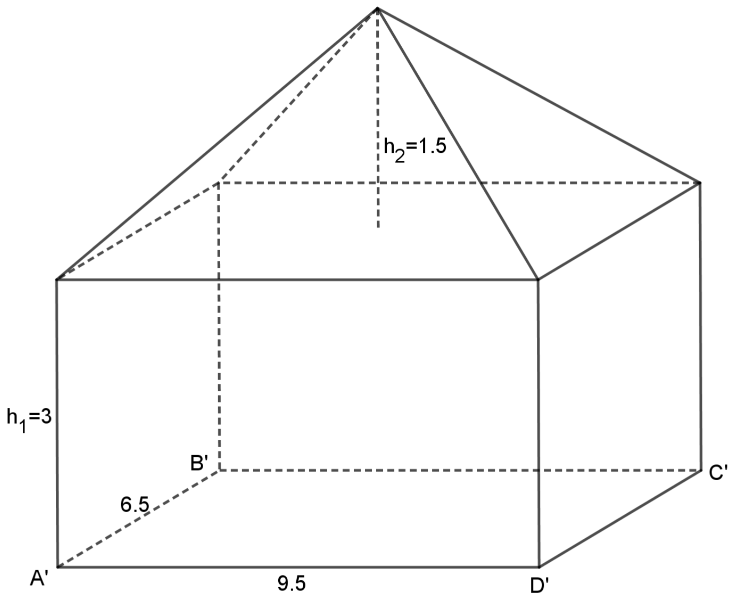
3. Encontrar projeção cotada de um triângulo equilátero inscrito na circunferência definida pelos pontos A, B e C, sendo A um de seus vértices.

4. Represente um quadrado ABCD de lado l=4cm, contido no plano α(A, P, Q), sabendo-se que o lado AB é horizontal.



5. Representar a projeção cotada de uma pirâmide regular de base quadrada V-ABCD contida em um plano horizontal, dados os vértices da base A e B, e a altura h=4,5. Encontre a VG de uma face lateral usando o rebatimento.

6. Representar a projeção cotada do sólido abaixo (prisma de base retangular com uma pirâmide reta com bases em planos horizontais), dado o vértice A e a reta suporte de AB. Encontrar as VGs das faces laterais da pirâmide usando rebatimento.



4.8 Posições relativas entre dois planos

Dados dois planos quaisquer α e β no espaço, eles podem ser:

$$\alpha \text{ e } \beta \text{ podem ser} \begin{cases} \text{coincidentes} \\ \text{paralelos} \\ \text{secantes } (\perp \text{ ou } \angle) \end{cases}$$

Condições de paralelismo de dois planos

Sejam α e β dois planos distintos, então:

1. $\alpha // \beta$, α e β horizontais

   Serão paralelos ou coincidentes, dependendo dos valores de suas cotas.

2. $\alpha // \beta$, α e β verticais

   Serão paralelos quando $\alpha\pi' // \beta\pi'$.

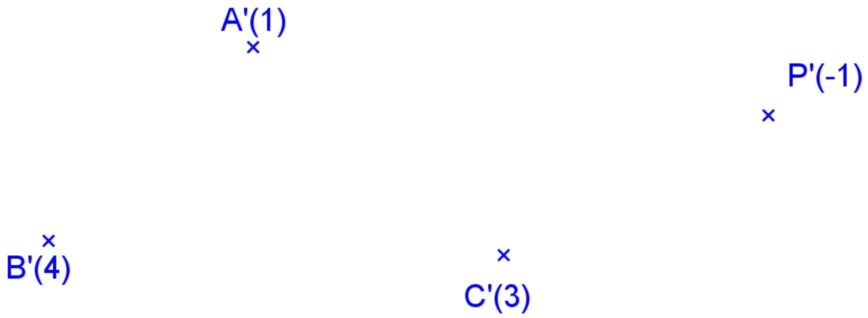
3. $\alpha // \beta$, α e β quaisquer

   Serão paralelos se:

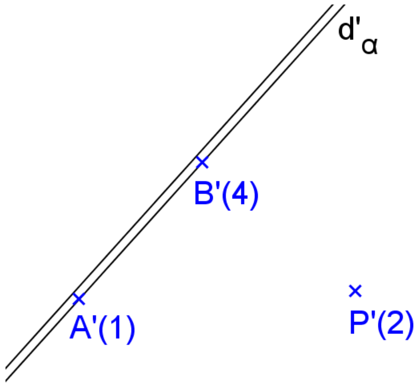
   - as escalas de declive são paralelas: $d_\alpha // d_\beta$
   - ou a//r e b//s onde aXb $\in \alpha$ e rXs $\in \beta$

Exercícios

1. Conduza pelo ponto P, um plano β paralelo ao plano α(A, B, C).



2. Conduza pelo ponto P, um plano β paralelo ao plano α(d_α).



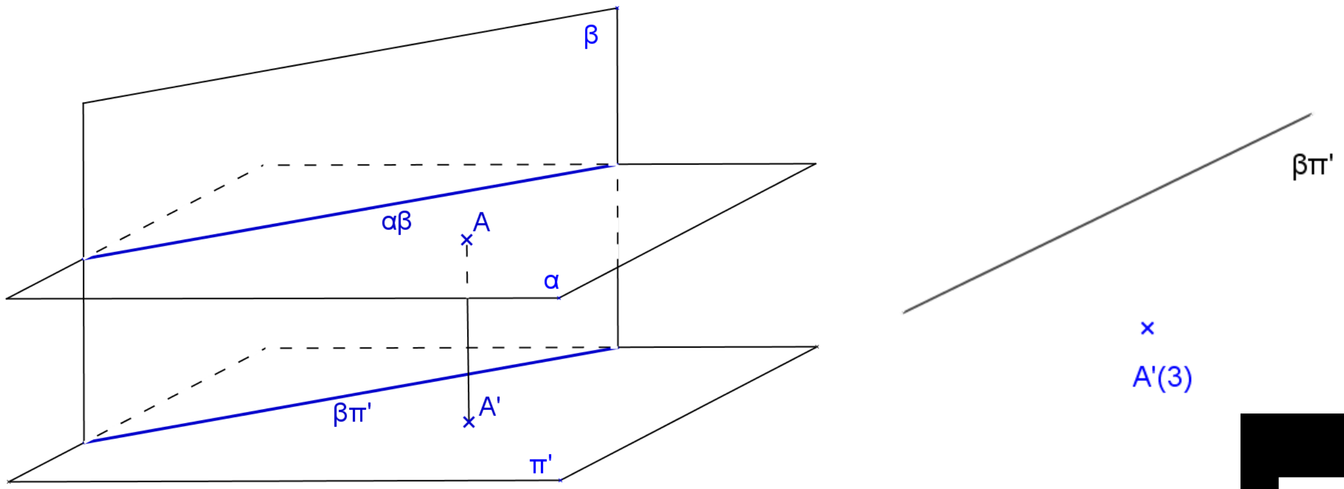
Planos Não paralelos: Interseção de planos

- Dois planos não paralelos α e β são concorrentes quando possuem uma reta comum $(\alpha\beta)$.
- O traço de um plano horizontal α sobre um plano vertical β é uma reta horizontal $(\alpha\beta)$ que possui a mesma cota do plano horizontal α.
- Para determinar o traço entre dois planos quaisquer, utilizam-se planos auxiliares, geralmente horizontais, que facilitam a resolução do problema.

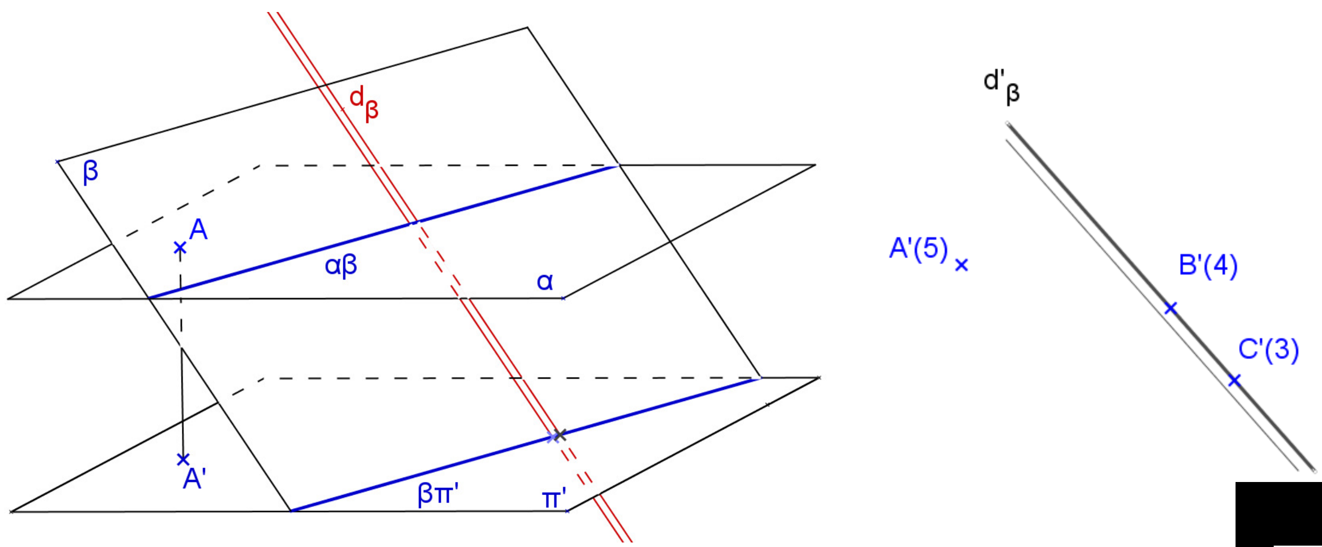
Podem ser considerados os seguintes casos:

1. $\underline{\alpha \,//\, \pi' \text{ e } \beta \,//\, \pi'}$: neste caso o traço $(\alpha\beta)_\infty$ ou não existe.

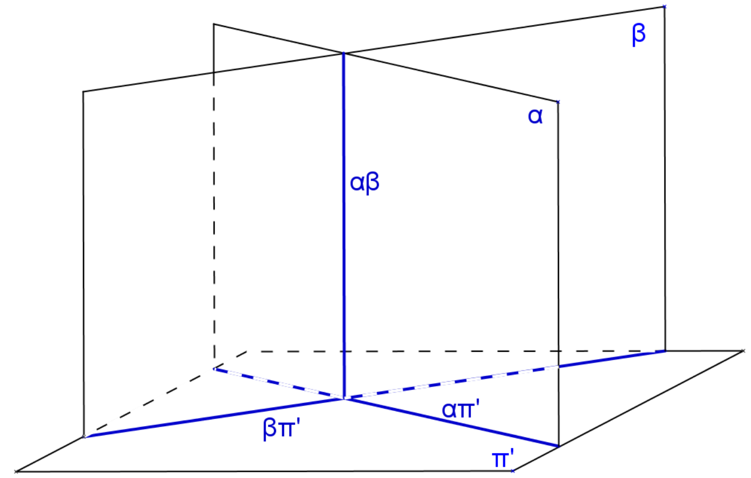
2. $\underline{\alpha \,//\, \pi' \text{ e } \beta \perp \pi'}$: neste caso $(\alpha\beta)' \equiv \beta\pi'$ onde $(\alpha\beta)'_{(\alpha)}$.

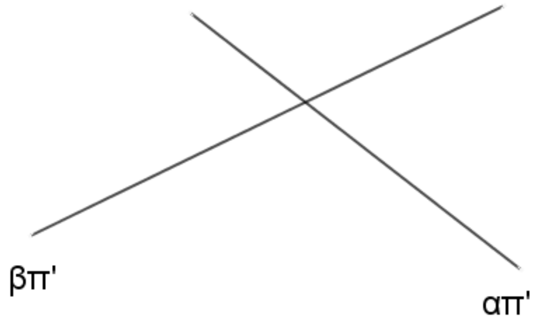


3. $\underline{\alpha \,//\, \pi' \text{ e } \beta \not\perp \pi'}$: neste caso $\alpha\beta \,//\, \pi'$.

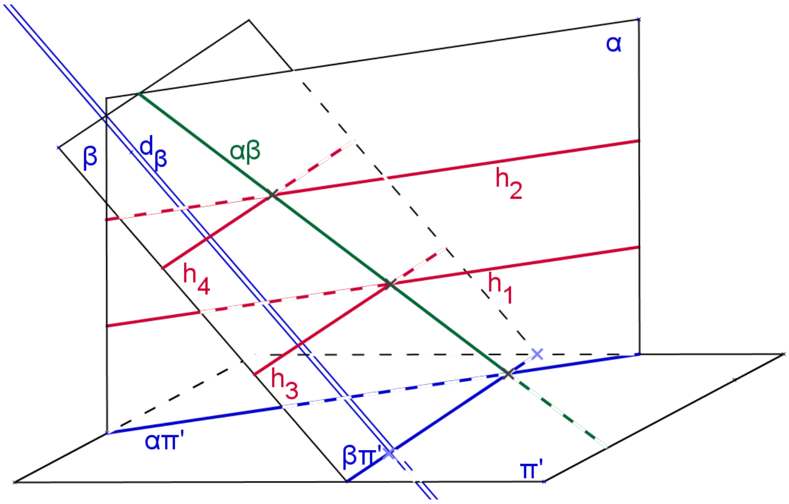


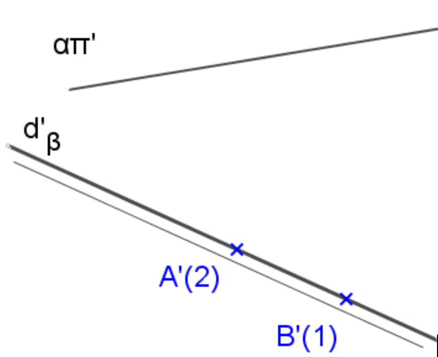
4. $\alpha \perp \pi'$ e $\beta \perp \pi'$: neste caso $\alpha\beta \perp \pi'$, ou seja, $\alpha\beta$ é uma reta vertical.



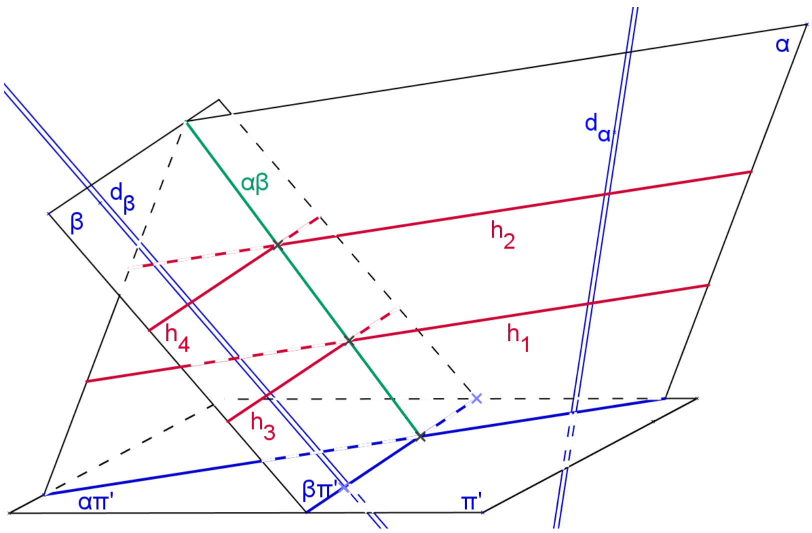


5. $\alpha \perp \pi'$ e $\beta \not\perp \pi'$:

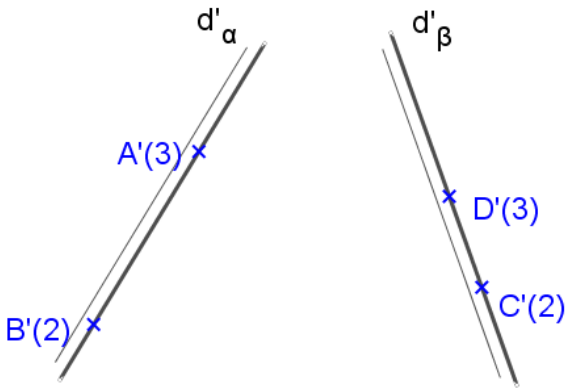




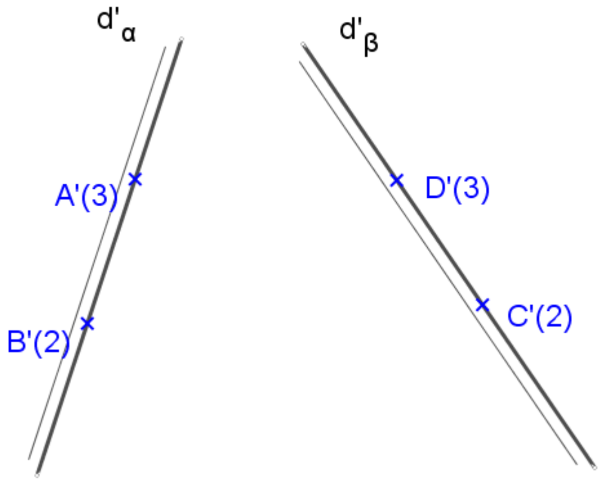
6. $\alpha \not\perp \pi'$ e $\beta \not\perp \pi'$: Sejam $\alpha(d_\alpha)$ e $\beta(d_\beta)$



a) α e β são dados por suas retas de declive.

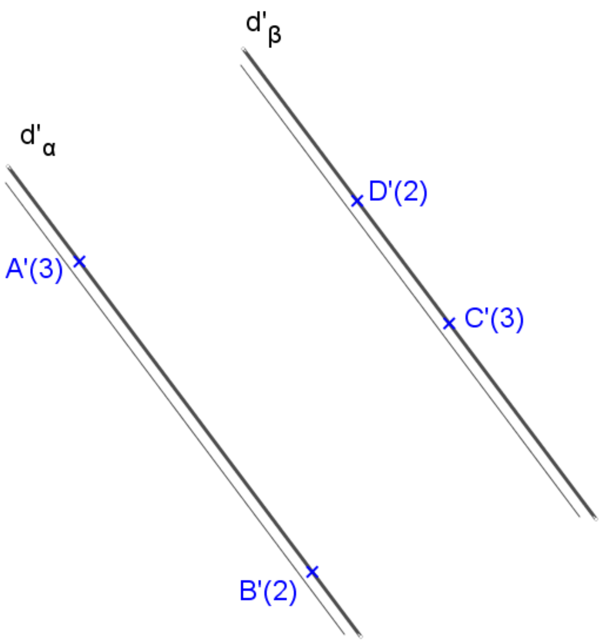


b) Os intervalos de α e β são iguais



Observação: Quando dois planos estão igualmente inclinados então eles se cortam segundo uma reta que é a bissetriz do ângulo formado pelas suas horizontais.

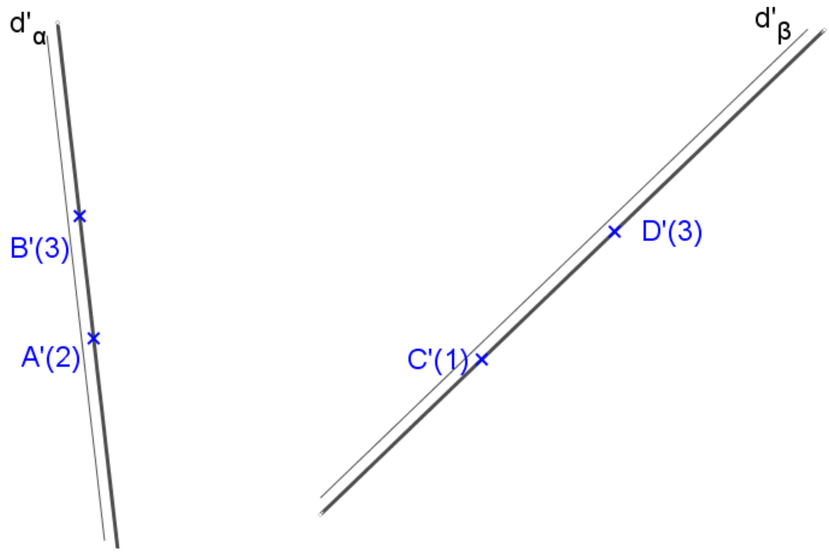
c) As projeções de d_α e d_β são paralelas.



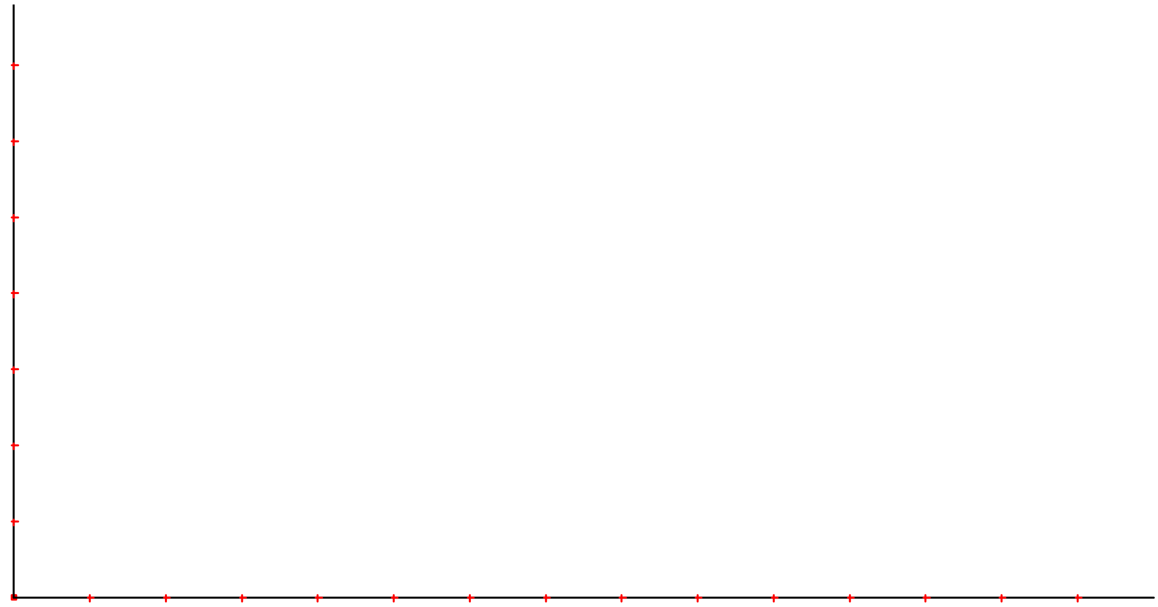
Exercícios Propostos:

Representar a projeção cotada da reta $\alpha\beta$, interseção dos planos quaisquer $\alpha(d_\alpha)$ e $\beta(d_\beta)$.

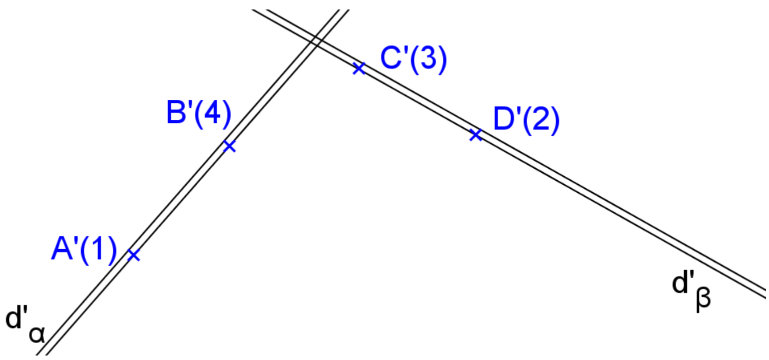
a)



b) $\alpha(d_\alpha)$, $\beta(d_\beta)$, $d_\alpha(A,B)$, d_β (C,D). Dados: A(5,7,6) B(2,3,1) C(7,6,4) D(9,4,2)



c)



PARTE IV
INTRODUÇÃO AO ESTUDO DOS TELHADOS

Em geral chama-se telhado qualquer tipo de cobertura em uma edificação. Porém, o telhado, rigorosamente, é apenas uma categoria de cobertura, em geral caracterizado por possuir um ou mais planos inclinados em relação à linha horizontal (diferente, por exemplo, das lajes planas ou das cúpulas). A cada um destes planos inclinados, dá-se o nome de água.

As coberturas se apóiam em uma estrutura chamada *armação*, que pode ser de madeira, ferro ou concreto.

A maioria das coberturas é formada de material comercial chamado *telha*, existindo, também, as *chapas onduladas*.

Não só para guiar o escoamento das águas das chuvas, mas também para aumentar a resistência, as telhas e chapas onduladas, geralmente, não são planas. Ainda assim, praticamente, esse material é considerado como se fosse plano, e as coberturas feitas com dito material são chamadas *coberturas planas*.

Como a maioria das coberturas é feita de telhas, na prática costuma-se chamar uma cobertura de *telhado*, mesmo que o material seja outro.

1. TERMINOLOGIA

Embora não seja objetivo detalhar a terminologia de todos os elementos de uma cobertura, citam-se algumas explicações indispensáveis à compreensão do estudo a ser feito.

A terminologia usada em coberturas planas nem sempre pode ser aplicada com exatidão em algumas coberturas especiais, sendo sua aplicação feita por extensão ou analogia.

a) **Respaldo** – a parte elevada de uma parede onde deve assentar a cobertura é arrematada para definir sua altura. Essa parte final é chamada *respaldo*. Estes podem estar todos no mesmo nível ou não, como podem ser horizontais ou inclinados.

b) **Planta** – é a projeção ortogonal de uma cobertura em um plano horizontal. Na planta se desenha a poligonal da cobertura, o sentido do escoamento das águas das chuvas, e outros elementos que definam a cobertura. A planta serve também como base para o cálculo do material a ser empregado.

c) **Água** – cada parte de uma cobertura que conduz uma determinada porção das águas da chuva, chama-se *água*.

d) **Cumeeira** – Quando as águas de uma cobertura são separadas por uma linha horizontal comum, essa linha se chama cumeeira.

e) Espigão – Quando as águas de uma cobertura são separadas por uma linha inclinada comum, essa linha se chama espigão.

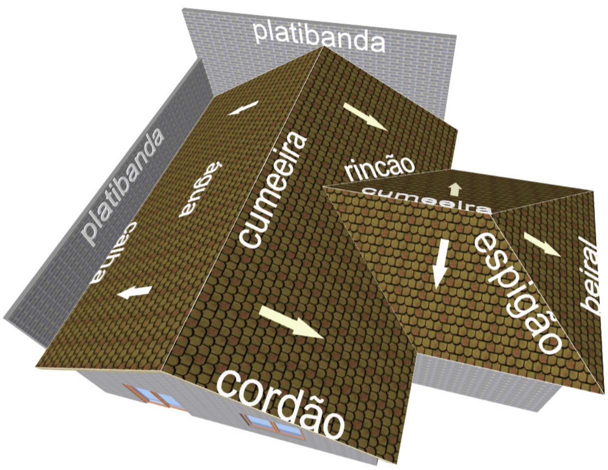
f) Rincão - Quando as águas de uma cobertura se reúnem em uma linha inclinada comum que lhes dão escoamento em conjunto, essa linha chama-se rincão.

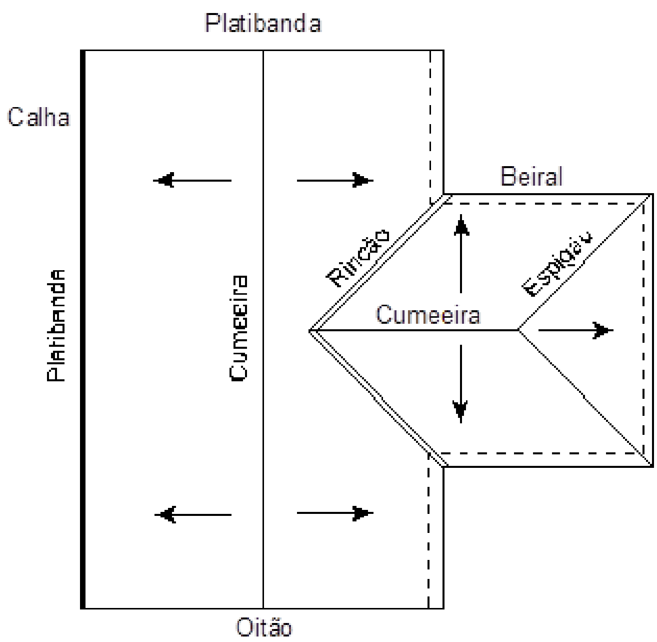
g) Calha – Quando as águas que se escoam numa cobertura caem diretamente numa peça que as conduz, essa peça se chama calha.

h) Beiral – As coberturas nunca devem ser executadas de modo que as águas das chuvas caiam em cima de paredes, pelos inconvenientes que causam. Assim, as águas ou são recolhidas em calhas ou são deixadas cair diretamente no solo. Este último caso é obtido fazendo-se com que a cobertura seja saliente. A distância entre a extremidade da parede e a cobertura chama-se beiral. Em planta, indica-se a construção em linha pontilhada para mostrar a existência de beiral. Há casos em que mesmo havendo beiral, coloca-se uma calha na extremidade da cobertura.

i) Platibanda – Quando as águas de uma cobertura são limitadas por parede de maior altura do que essas águas, a diferença entre a altura do respaldo e a da parede chama-se platibanda. Se as águas das chuvas ao descerem pela cobertura incidirem na platibanda, coloca-se uma calha entre a cobertura e a platibanda.

j) Inclinação – Chama-se inclinação das águas de uma cobertura o menor ângulo que cada uma dessas águas faz com o plano horizontal. A inclinação de cada água de uma cobertura é, portanto, a inclinação da sua linha de maior declive. Assim, a inclinação sempre é perpendicular às cumeeiras e oblíqua aos rincões e espigões. As águas de uma cobertura podem ter todas a mesma inclinação ou terem inclinações diferentes.





Realidade Virtual: paulohscwb.github.io/cotadas/
Realidade Aumentada: paulohscwb.github.io/cotadas/telhados.html

2. REPRESENTAÇÃO

A representação de uma cobertura é feita por meio de sua planta que é determinada por uma poligonal. Os respaldos das paredes podem estar na mesma altura ou em alturas diferentes. Portanto, pode-se considerar os seguintes casos:

- Respaldos no mesmo nível
- Respaldos em níveis diferentes (são somente usadas em casos especiais, quando há indicação, podem se tornar antiestéticas e onerosas)

Além disso, nem sempre as águas de uma cobertura têm a mesma inclinação, logo, cada um dos casos anteriores pode ser subdividido em:

- Águas com mesma inclinação.
- Águas com inclinações diferentes.

Qualquer que seja o caso, o problema se resume na procura da interseção de superfícies; essa interseção pode ser uma cumeeira, um espigão ou um rincão. As superfícies são as águas da cobertura, e tratando-se de coberturas planas, a linha comum sempre será uma reta.

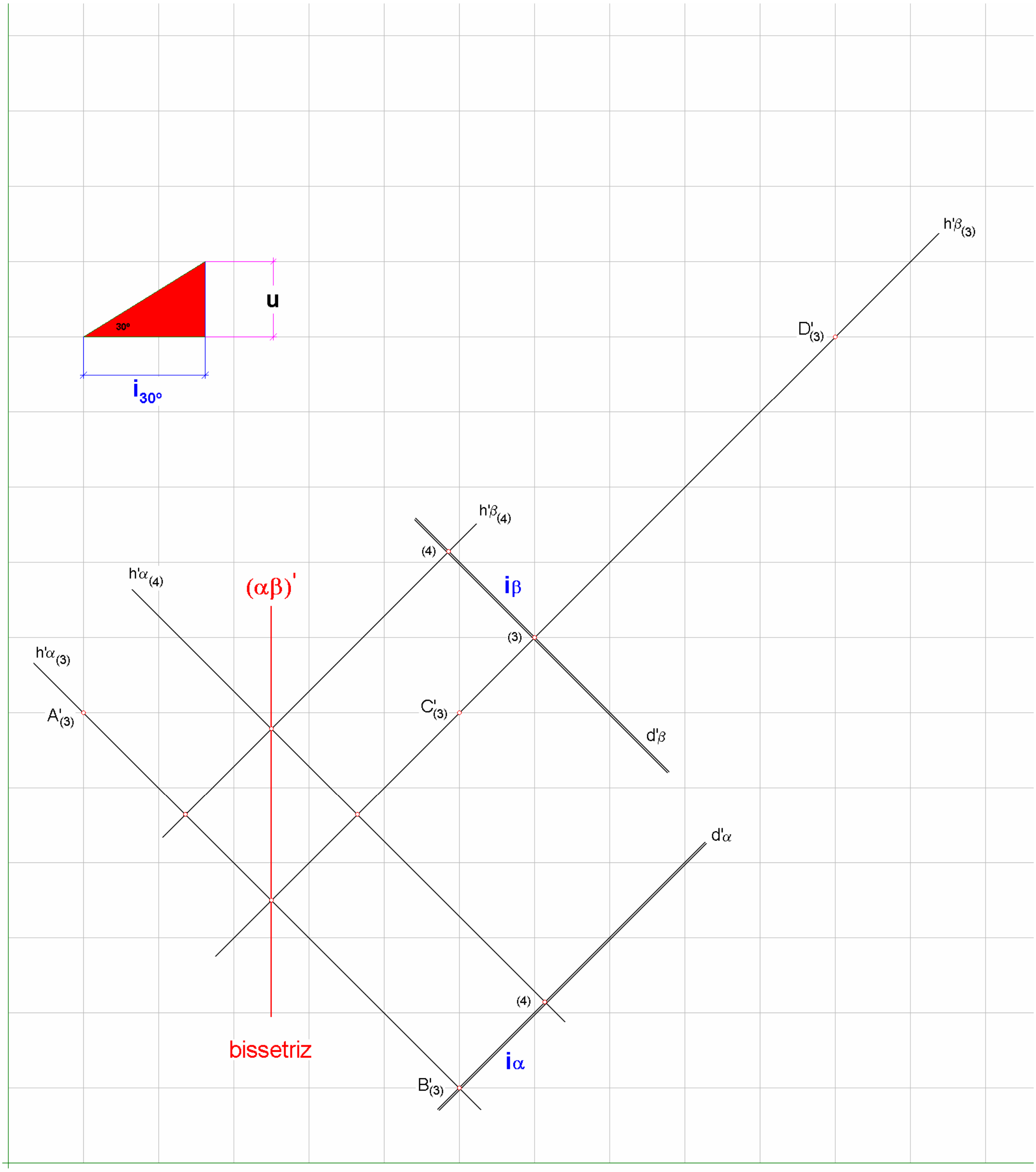
O processo geral para a determinação das interseções consiste em achar os pontos comuns das horizontais de mesma cota, que são, evidentemente, pontos da interseção procurada.

No caso de águas de mesma inclinação em respaldos de mesmo nível tem-se o seguinte processo: como as horizontais de mesma cota distam igualmente dos lados da poligonal, as interseções procuradas são as bissetrizes desses lados. Assim, este processo consiste na determinação de bissetrizes, e é chamado *processo das bissetrizes*.

3. REPRESENTAÇÃO DE TELHADOS – ÁGUAS COM MESMA INCLINAÇÃO

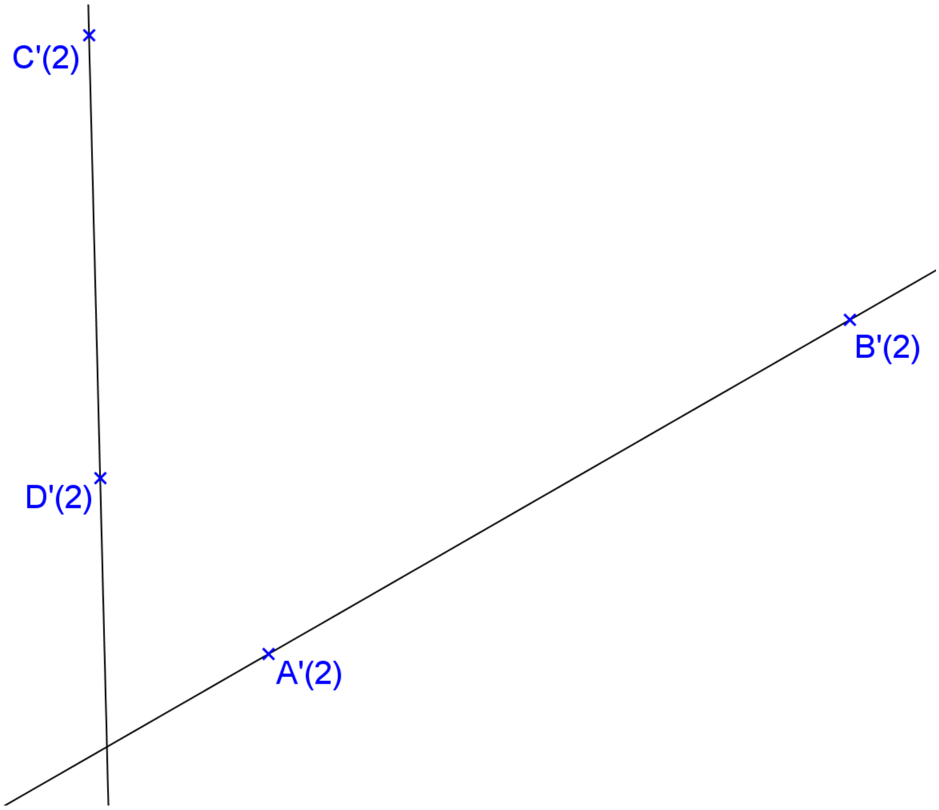
3.1 Dadas as projeções cotadas das retas r(A, B) e s(C, D), encontre a interseção (αβ) dos dois planos, sabendo-se que:

- As retas r e s pertencem respectivamente aos planos α e β;
- O plano α e o plano β fazem ângulo de 30° com o plano horizontal de projeção;
- Dados: A, B, C e D;
- u = unidade de cota = 1m / escala = 1:100.



3.2 Dadas as projeções cotadas das retas r(A, B) e s(C, D), encontre a interseção ($\alpha\beta$) dos dois planos, sabendo-se que:

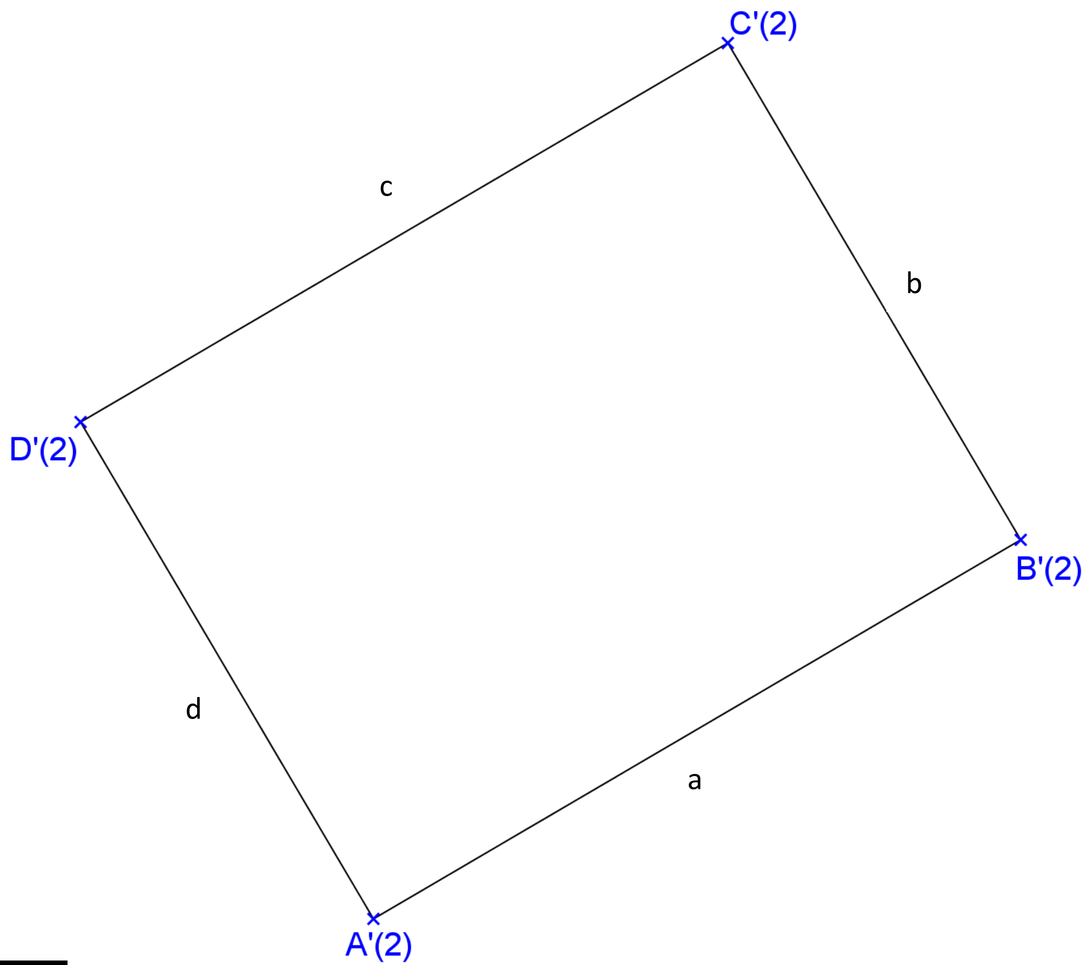
- As retas r e s pertencem respectivamente aos planos α e β;
- O plano α e o plano β fazem ângulo de 30° com o plano horizontal de projeção;
- Dados: A, B, C, D;
- u = unidade de cota = 1m / escala = 1:100.



3.3 São dadas as projeções cotadas das retas a(A,B), b(B,C), c(C,D) e d(D,A). Considerando a poligonal ABCD como sendo a linha de beiral de um telhado, todas no mesmo nível, pede-se achar as interseções das águas do mesmo, sabendo-se que:

- As águas que contém as linhas de beiral a, b, c e d possuem a mesma inclinação de 30° com o plano horizontal de projeção;
- Dados: A, B, C e D;
- u = unidade de cota = 1m / escala = 1:100.

Indicar o sentido de escoamento das águas.
Obter a cota da cumeeira principal (a de maior cota).
Indicar a declividade do espigão (bc).
Obter a área da água “a”.

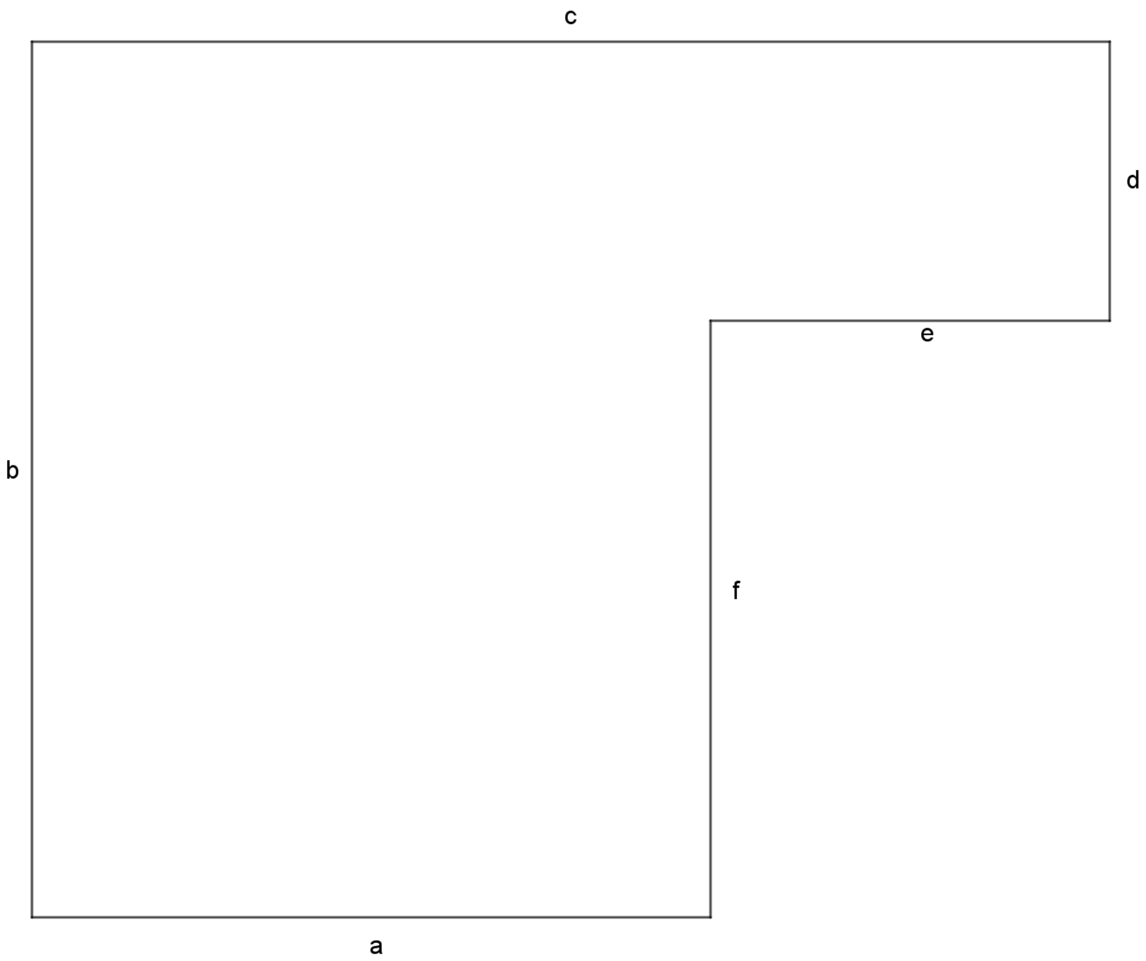


paulohscwb.github.io/cotadas/telhados.html

3.4 Considerando-se a poligonal abaixo como sendo a linha de beiral de um telhado, todas no mesmo nível (com cota = 2,20m), encontre as projeções horizontais das interseções das águas do mesmo, sabendo-se que as águas têm todas a mesma inclinação de 30º.

Indicar o sentido de escoamento das águas, achar a cota da cumeeira principal e indicar a declividade do rincão (ef).

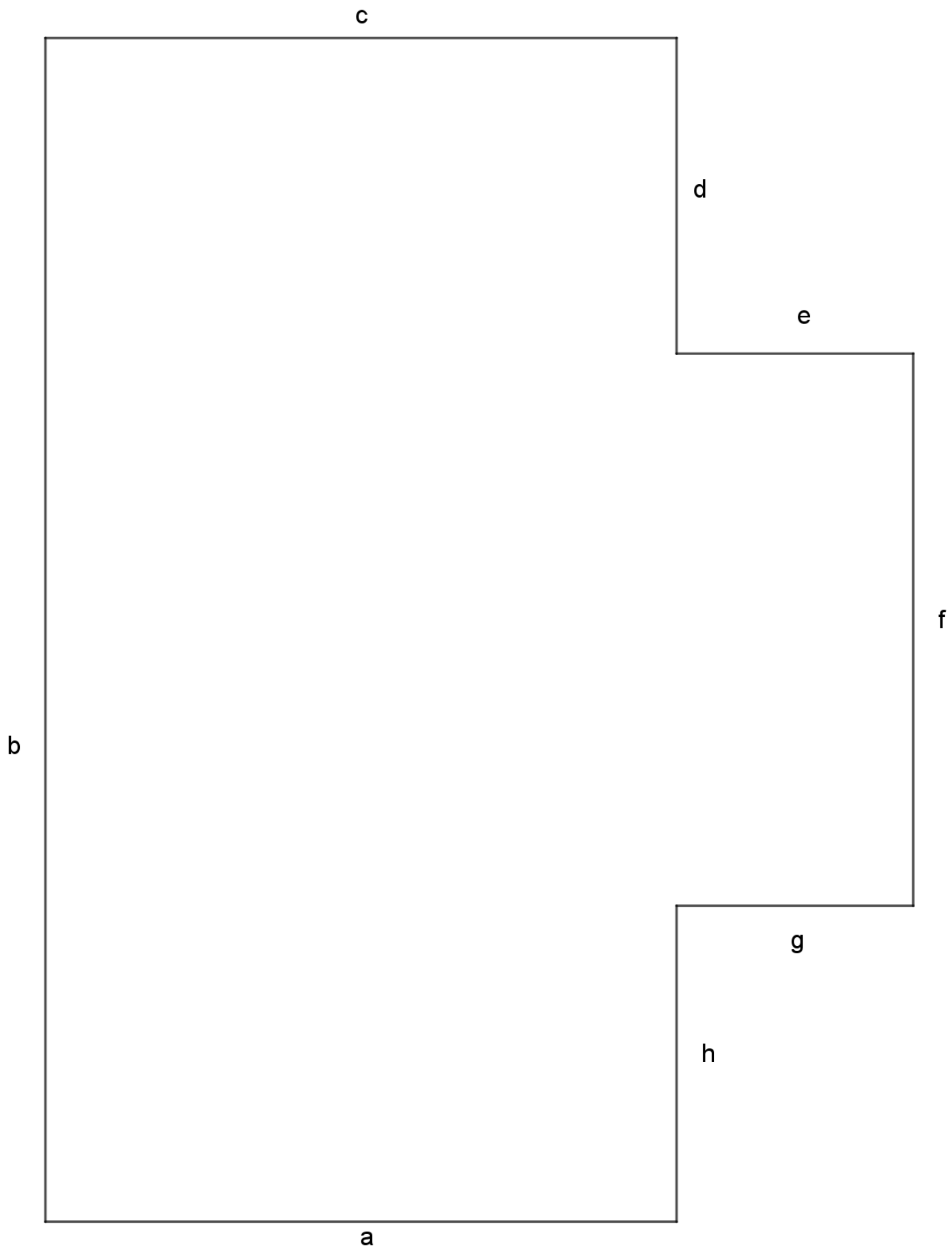
u = unidade de cota = 1m / escala = 1:100



3.5 Considerando-se a poligonal abaixo como sendo a linha de beiral de um telhado, todas no mesmo nível (com cota = 2,20m), encontre as projeções horizontais das interseções das águas do mesmo, sabendo-se que as águas têm todas a mesma declividade de 60%.

Indicar o sentido de escoamento das águas, achar a cota da cumeeira principal e indicar a declividade do espigão (bc).

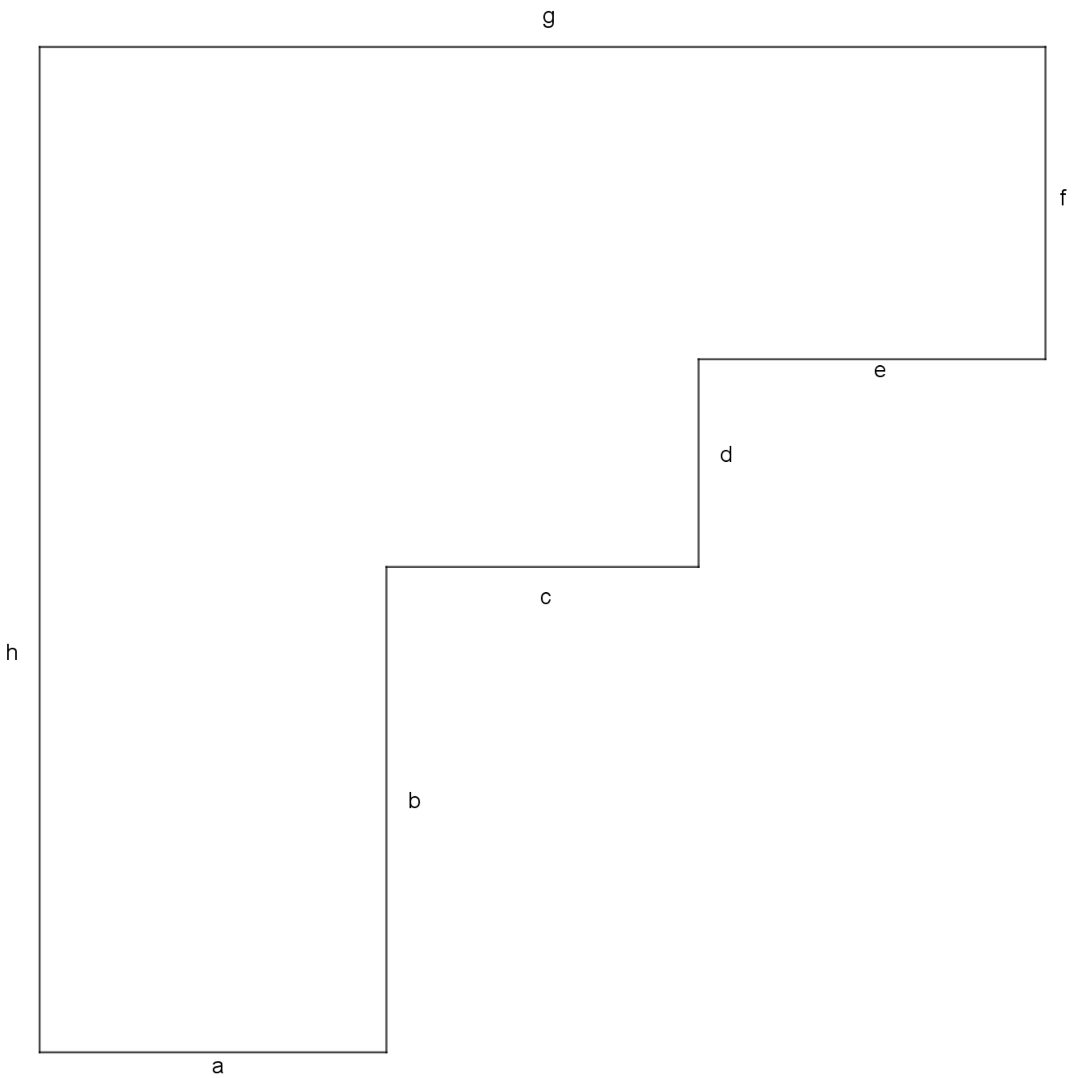
u = unidade de cota = 1m / escala = 1:100



3.6 Considerando-se a poligonal abaixo como sendo a linha de beiral de um telhado, todas no mesmo nível (com cota = 2,20m), encontre as projeções horizontais das interseções das águas do mesmo, sabendo-se que as águas têm todas a mesma inclinação de 30°.

Indicar o sentido de escoamento das águas, achar a cota da cumeeira principal e indicar a declividade do rincão (bc).

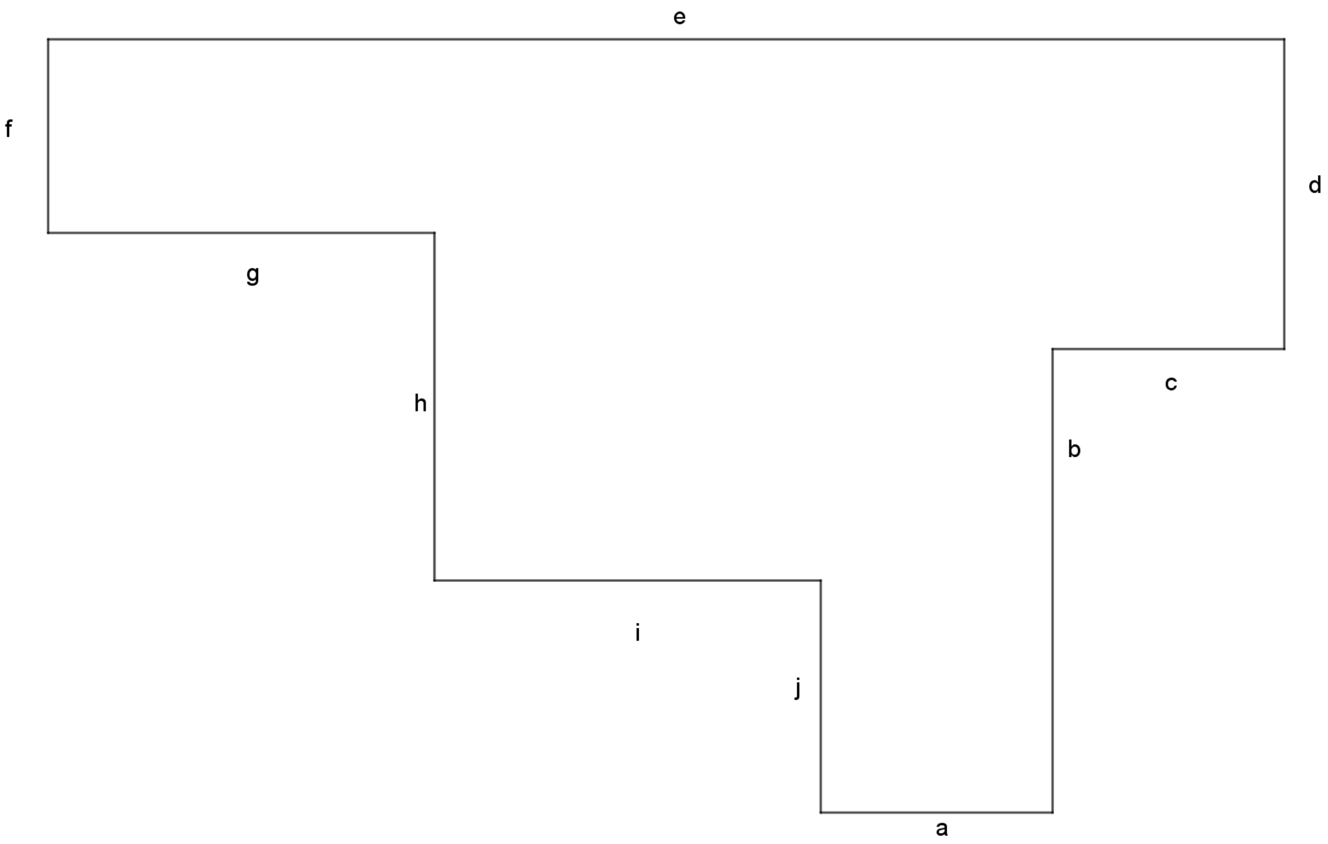
u = unidade de cota = 1m / escala = 1:100



3.7 Considerando-se a poligonal abaixo como sendo a linha de beiral de um telhado, todas no mesmo nível (com cota = 2,20m), encontre as projeções horizontais das interseções das águas do mesmo, sabendo-se que as águas têm todas a mesma inclinação de 30°.

Indicar o sentido de escoamento das águas, achar a cota da cumeeira principal e indicar a declividade do espigão (hi).

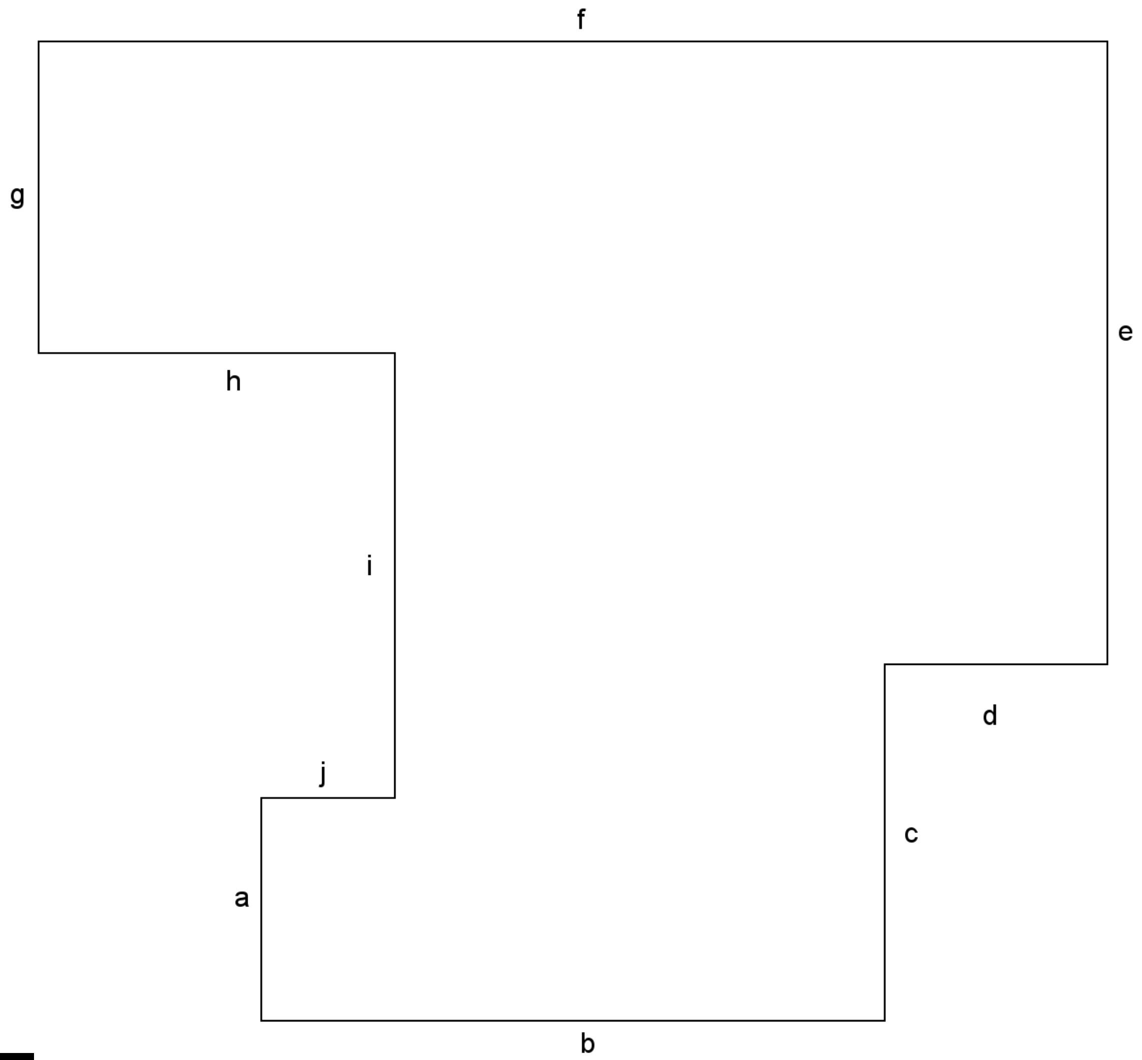
u = unidade de cota = 1m / escala = 1:100



3.8 Considerando-se a poligonal abaixo como sendo a linha de beiral de um telhado, todas no mesmo nível (com cota = 2,20m), encontre as projeções horizontais das interseções das águas do mesmo, sabendo-se que as águas têm todas a mesma declividade de 60%.

Indicar o sentido de escoamento das águas, achar a cota da cumeeira principal e indicar a declividade do espigão (bc).

u = unidade de cota = 1m / escala = 1:100

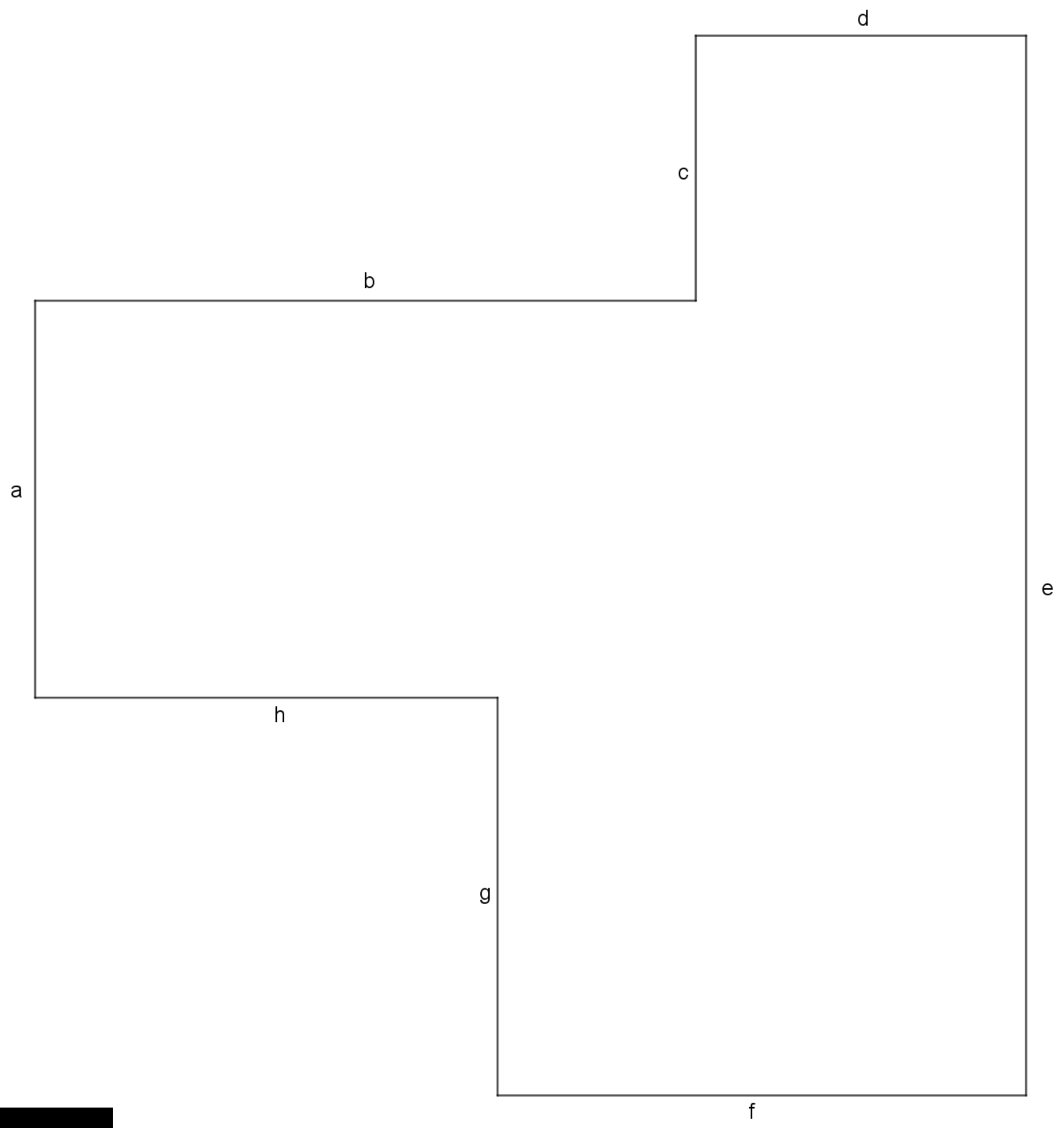


3.9 Considerando-se a poligonal como sendo a linha de beiral de um telhado, todas no mesmo nível, pede-se:

- as projeções horizontais das interseções das águas do mesmo;
- indicar o sentido de escoamento das águas;
- achar a cota da cumeeira principal;
- a declividade do espigão (ah) e seu comprimento.

Sabendo-se que:

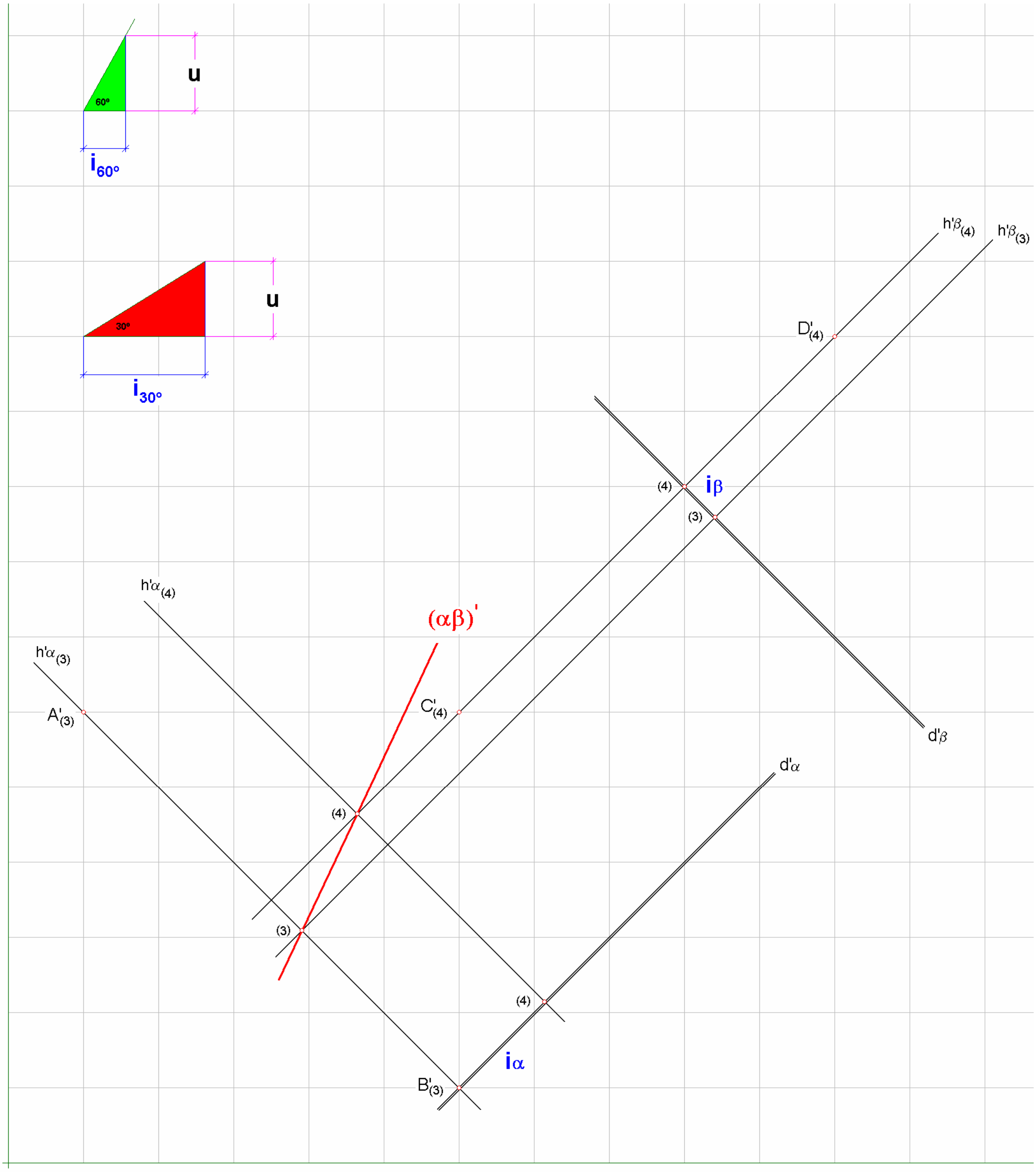
- todas as linhas de beiral tem cota 2,80m;
- todas as águas tem declividade de 50%;
- u = 1m (unidade de cota);
- escala 1:100.



4. REPRESENTAÇÃO DE TELHADOS – ÁGUAS COM INCLINAÇÕES DIFERENTES

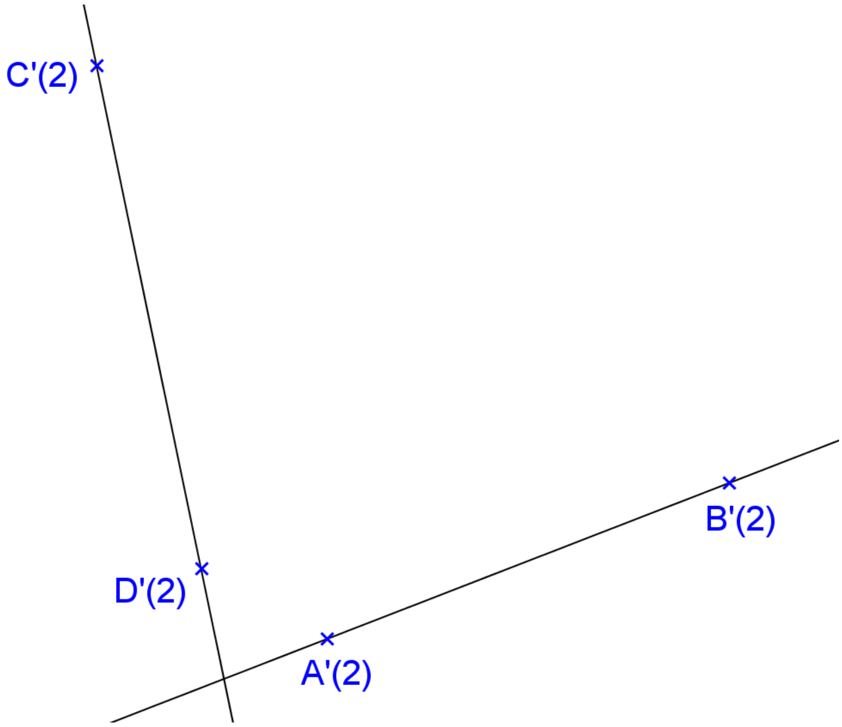
4.1. Dadas as projeções cotadas das retas r(A, B) e s(C, D), encontre a interseção (αβ) dos dois planos, sabendo-se que:

- As retas r e s pertencem respectivamente aos planos α e β;
- O plano α faz ângulo de 30° com o plano horizontal de projeção e o plano β faz ângulo de 60° com o plano horizontal de projeção;
- Dados: A, B, C e D;
- u = unidade de cota = 1m / escala = 1:100



4.2. Dadas as projeções cotadas das retas r(A, B) e s(C, D), encontre a interseção ($\alpha\beta$) dos dois planos, sabendo-se que:

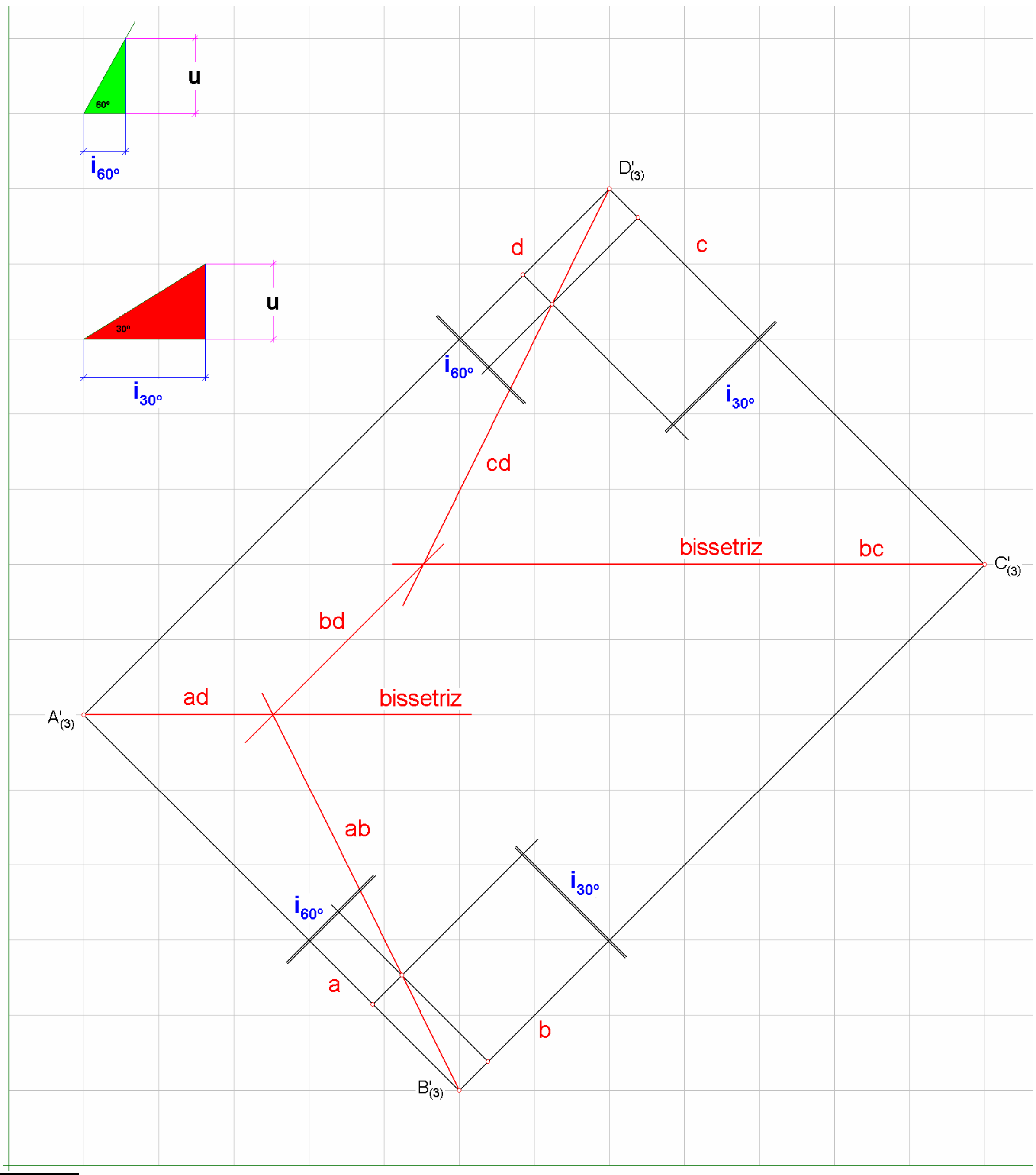
- As retas r e s pertencem respectivamente aos planos α e β;
- O plano α faz ângulo de 30° com o plano horizontal de projeção e o plano β faz ângulo de 45° com o plano horizontal de projeção;
- Dados: A, B, C e D;
- u = unidade de cota = 1m / escala = 1:100.



4.3. Dadas as projeções cotadas das retas a(A, B), b(B, C), c(C, D) e d(D, A), considerando-se a poligonal como sendo a linha de beiral de um telhado, todas no mesmo nível, encontre as projeções horizontais das interseções das águas do mesmo, sabendo-se que:

- As águas que contém as linhas de beiral a e d têm inclinação igual a 60°;
- As águas que contém as linhas de beiral b e c têm inclinação igual a 30°;
- Dados: A, B, C e D;
- u = unidade de cota = 1m / escala = 1:100.

Indicar o sentido de escoamento das águas, achar a cota da cumeeira e indicar a declividade do espigão bc.

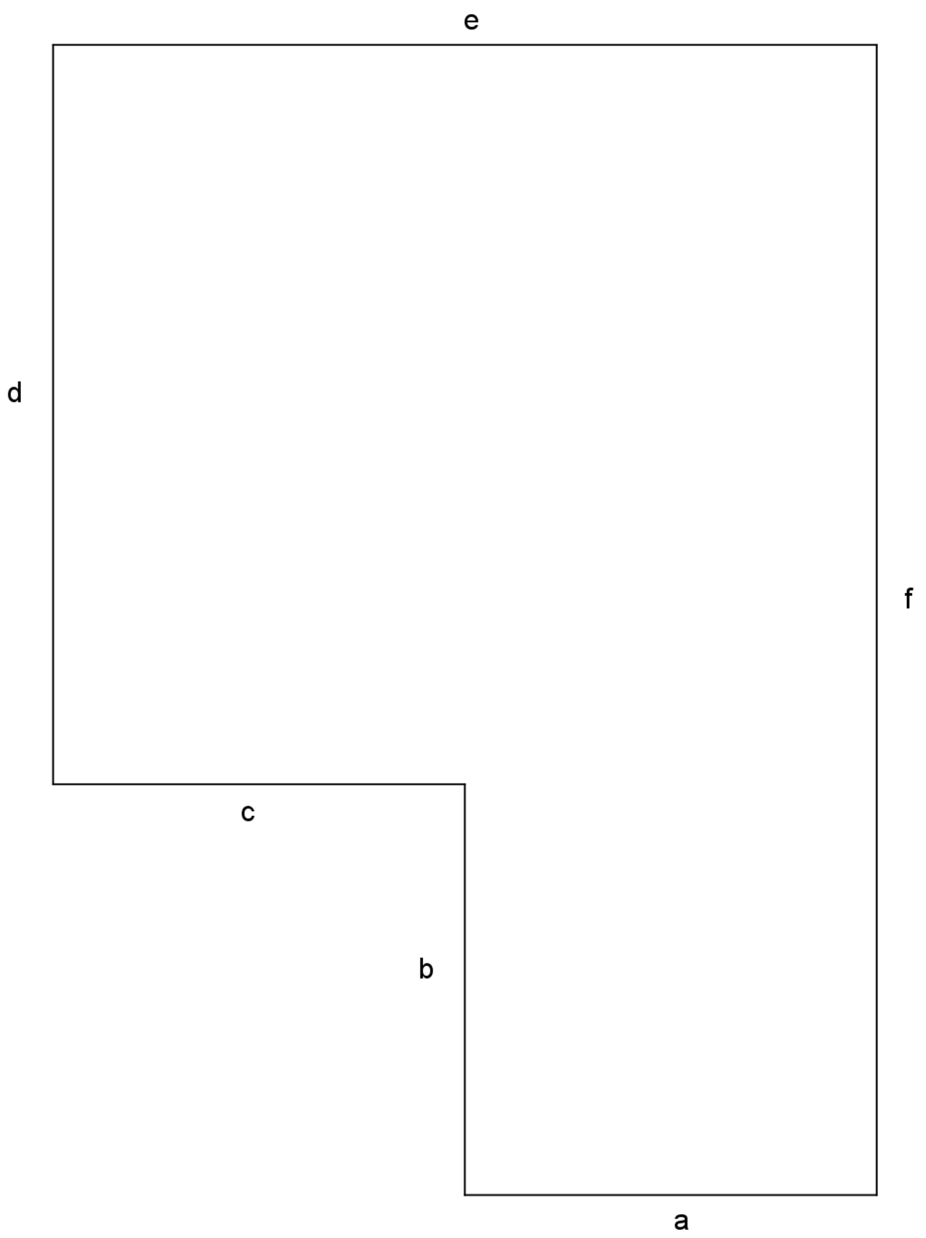


4.4. Considerando-se a poligonal como sendo a linha de beiral de um telhado, todas na cota 2,2m, encontre as projeções horizontais das interseções das águas do mesmo, sabendo-se que:

- As águas que contém as linhas de beiral "a" e "d" têm inclinação igual a 60°;
- As outras águas têm inclinação igual a 30°.

Indicar o sentido de escoamento das águas, achar a cota da cumeeira principal e indicar a declividade de (cb). Obter a área da água f.

u = unidade de cota = 1m / escala = 1:100

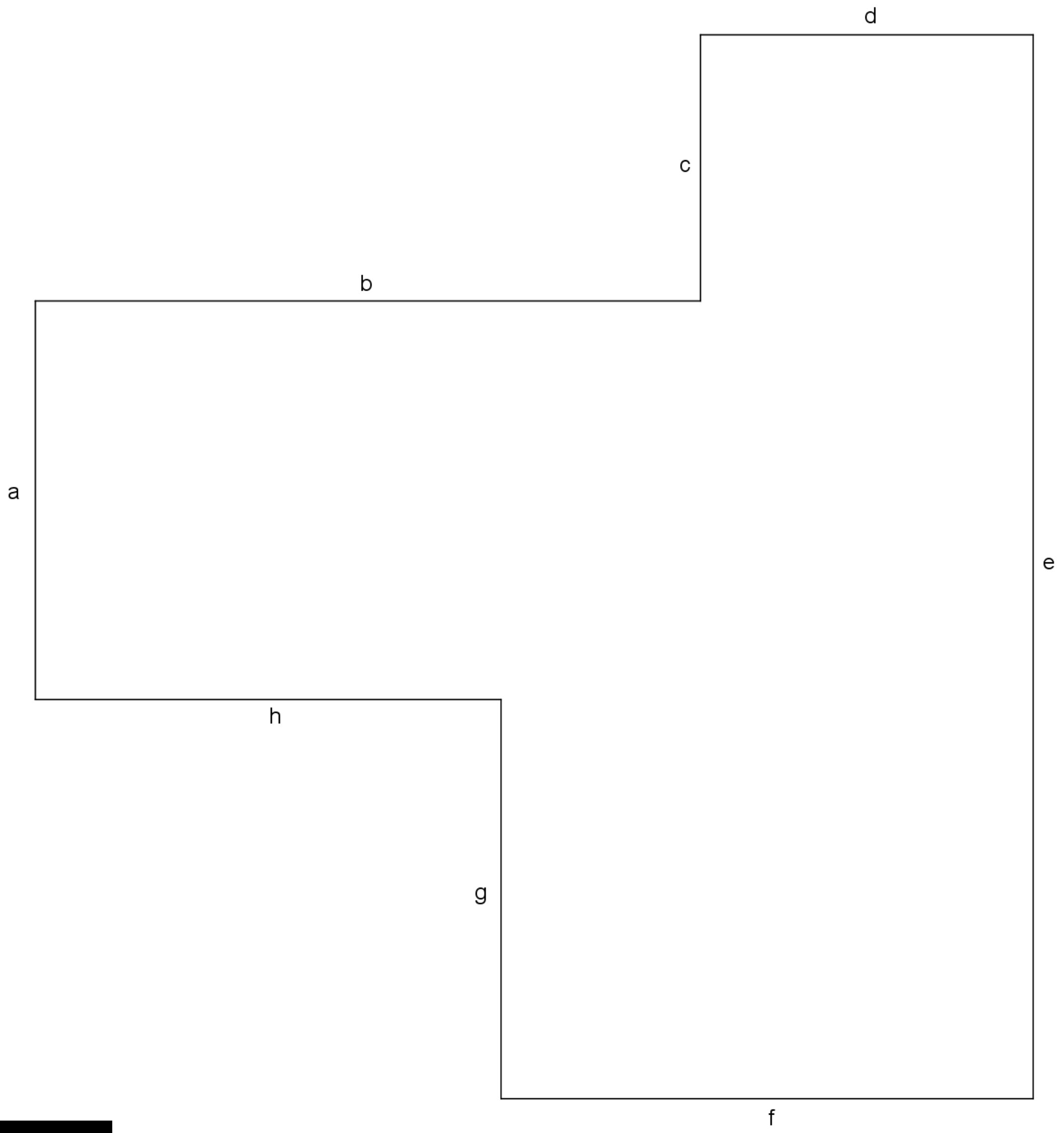


4.5. Considerando-se a poligonal como sendo a linha de beiral de um telhado, todas no mesmo nível, pede-se:

- as projeções horizontais das interseções das águas do mesmo;
- indicar o sentido de escoamento das águas;
- achar a cota da cumeeira principal;
- a declividade do espigão (ah) e seu comprimento.

Sabendo-se que:

- todas as linhas de beiral tem cota 2,80m;
- a água que tem a linha de beiral “g” tem inclinação de 60° e todas as outras têm inclinação igual a 45°;
- a linha de beiral e possui platibanda e as demais possuem calhas;
- u = 1m (unidade de cota);
- escala 1:100.

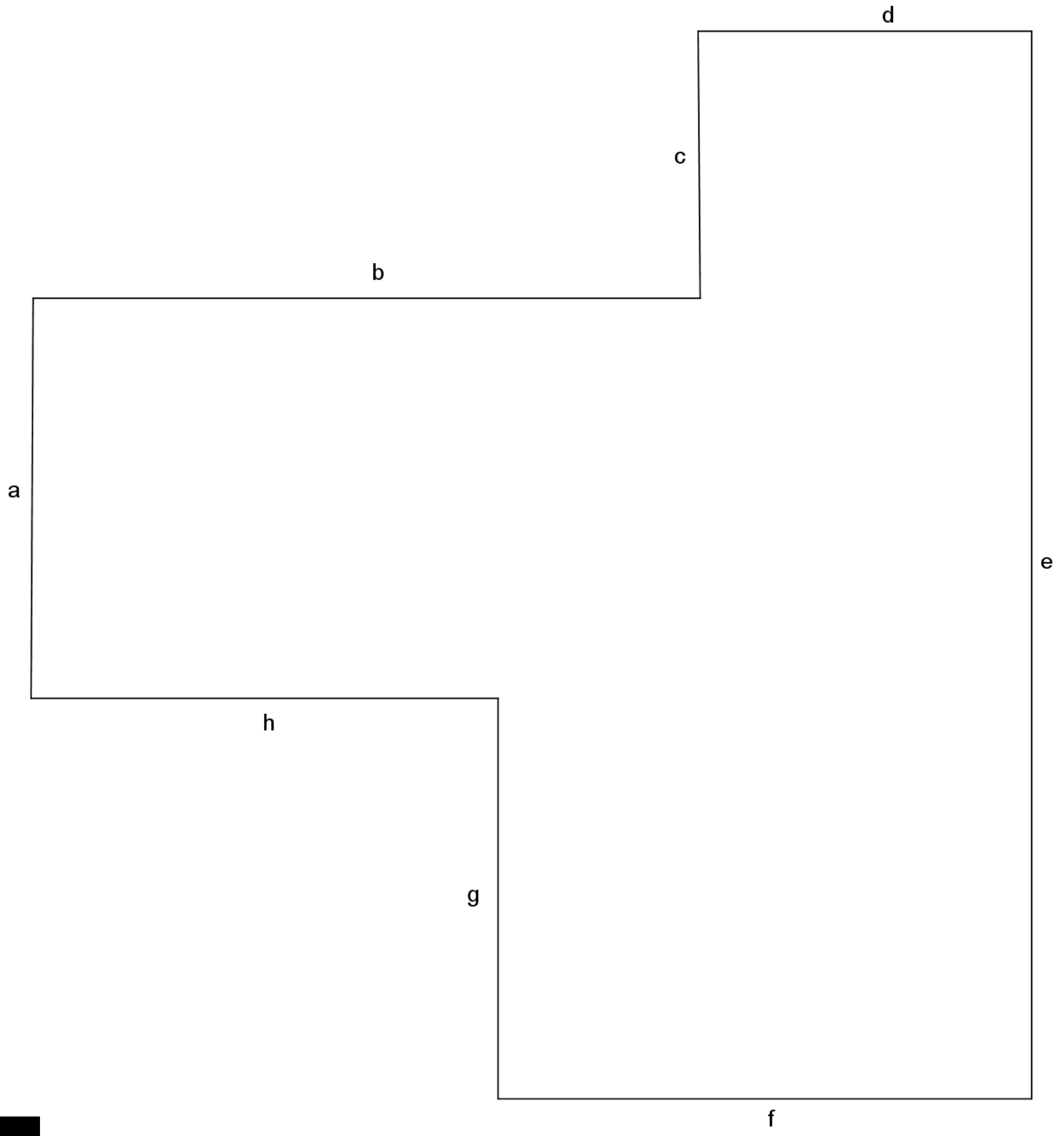


4.6. Considerando-se a poligonal como sendo a linha de beiral de um telhado pede-se:

- as projeções horizontais das interseções das águas do mesmo;
- indicar o sentido de escoamento das águas;
- achar a cota da cumeeira principal;
- a declividade do espigão (ah) e seu comprimento.

Sabendo-se que:

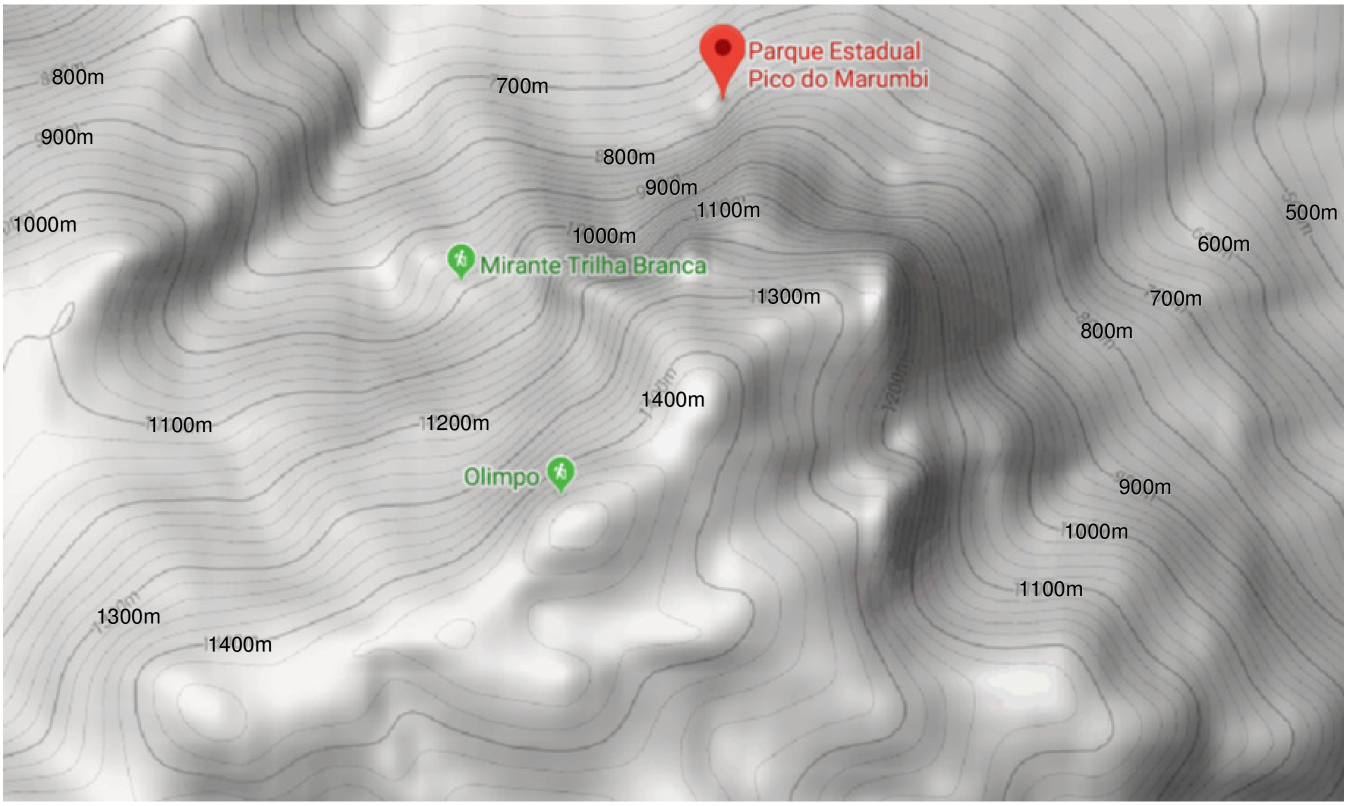
- as linhas de beiral a, b e h têm cota 2,20m e todas as demais têm cota 2,80m;
- a água que tem a linha de beiral g tem inclinação igual a 60° e todas as outras têm inclinação igual a 45°;
- a linha de beiral d é um oitão;
- u = 1m (unidade de cota);
- escala 1:100.



PARTE V
REPRESENTAÇÃO DE UMA SUPERFÍCIE TOPOGRÁFICA

Uma superfície é denominada topográfica quando não pode ser determinada por meio de uma equação, ou seja, sua forma não é geometricamente determinada. Assim, as soluções dos problemas que envolvam uma superfície topográfica não são exatas.

Numa planta topográfica, uma curva de nível caracteriza-se como uma linha imaginária que une todos os pontos de igual altitude de uma região representada. É chamada de "curva", pois normalmente a linha que resulta do estudo das altitudes de um terreno são, em geral, obtidas através de curvas associadas a valores de altitude em metros (m). A curva de nível serve para identificar e unir todos os pontos de igual altitude de uma determinada região. Um exemplo de representação das curvas de nível é apresentado na figura seguinte.



As curvas de nível são resultantes da seção plana feita por vários planos paralelos, horizontais (ou de nível) com uma superfície da terra. Nelas são indicadas as distâncias verticais acima, ou abaixo, de um plano de referência de nível. Começando no nível médio dos mares, que é a curva de nível zero, cada curva de nível tem um determinado valor. A distância vertical entre as curvas de nível é conhecida como equidistância, cujo valor é encontrado nas informações marginais da carta topográfica.

1. LEVANTAMENTO

O levantamento é uma operação pela qual são obtidos os elementos necessários aos cálculos e respectivas representações de obras ou porções de superfícies.

O levantamento pode ser:

2.1 Planimétrico – visa a representação sem a preocupação com o relevo, ou seja, a representação preocupa-se apenas com a representação dos pontos sem a representação das cotas.

2.2 Altimétrico – é o levantamento que visa a representação do relevo mostrando as altitudes, portanto representando as cotas dos pontos.

2.3 Planta Topográfica – a planta topográfica é a representação dos pontos de igual altitude sobre um plano horizontal, sua escala é superior a 1:100.000

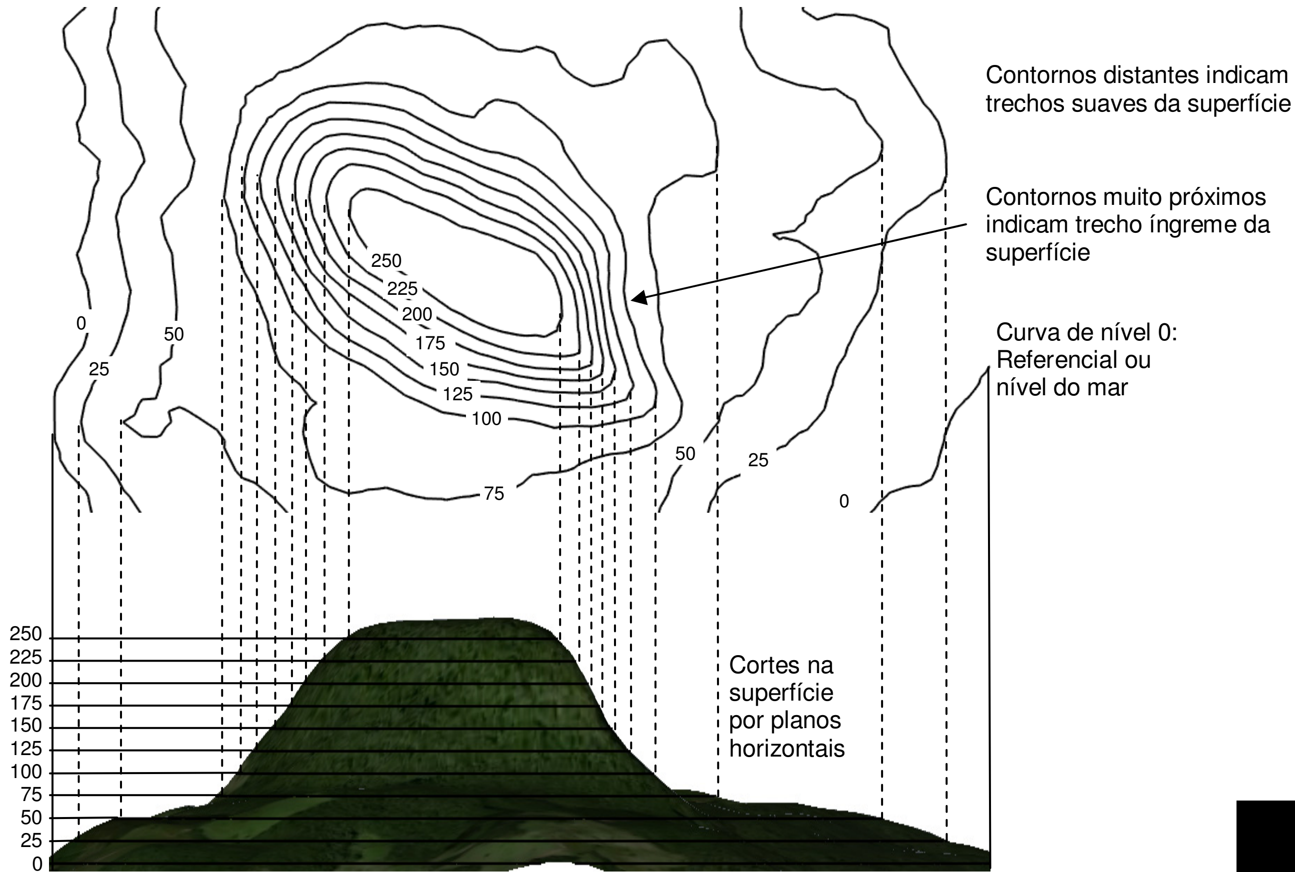
2.4 Planta Geográfica ou carta – é a planta cuja escala é inferior a 1:100.000.

Em geral, nas plantas topográficas não é necessário especificar a unidade que representa as cotas, pois salvo indicação em legenda, a unidade utilizada é sempre o metro.

2. PRINCÍPIO DA REPRESENTAÇÃO TOPOGRÁFICA

Uma das aplicações práticas do método das projeções cotadas consiste em representar sobre um plano uma porção da superfície da terra, levando em conta seu relevo. Esta representação é feita através de linhas horizontais que contém o conjunto de pontos de mesma cota.

Ao seccionar uma superfície da terra por planos de nível equidistantes entre si, esta interseção gera linhas horizontais de mesma cota, que são as curvas de nível. Na figura a seguir os planos de cotas 0, 25, 50,...., 250 são planos de nível equidistantes e os pontos representados sobre eles formam curvas de nível.

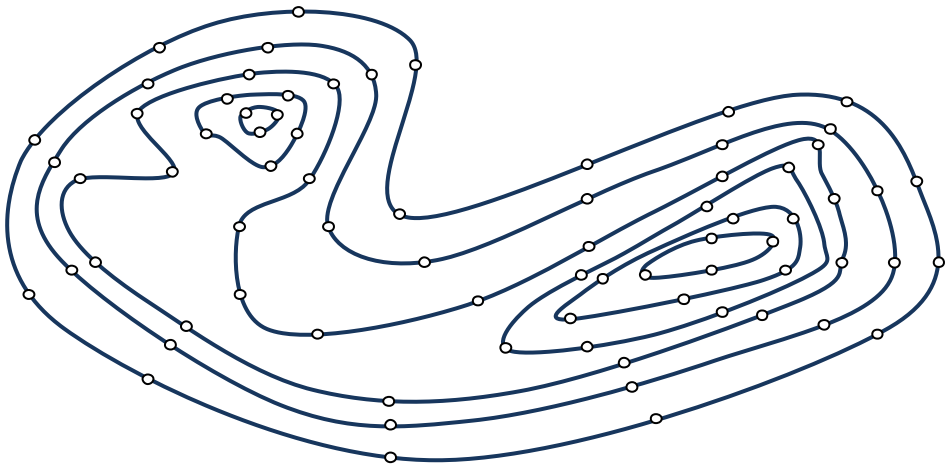


Realidade Virtual: paulohscwb.github.io/cotadas/
Realidade Aumentada: paulohscwb.github.io/cotadas/superficies.html

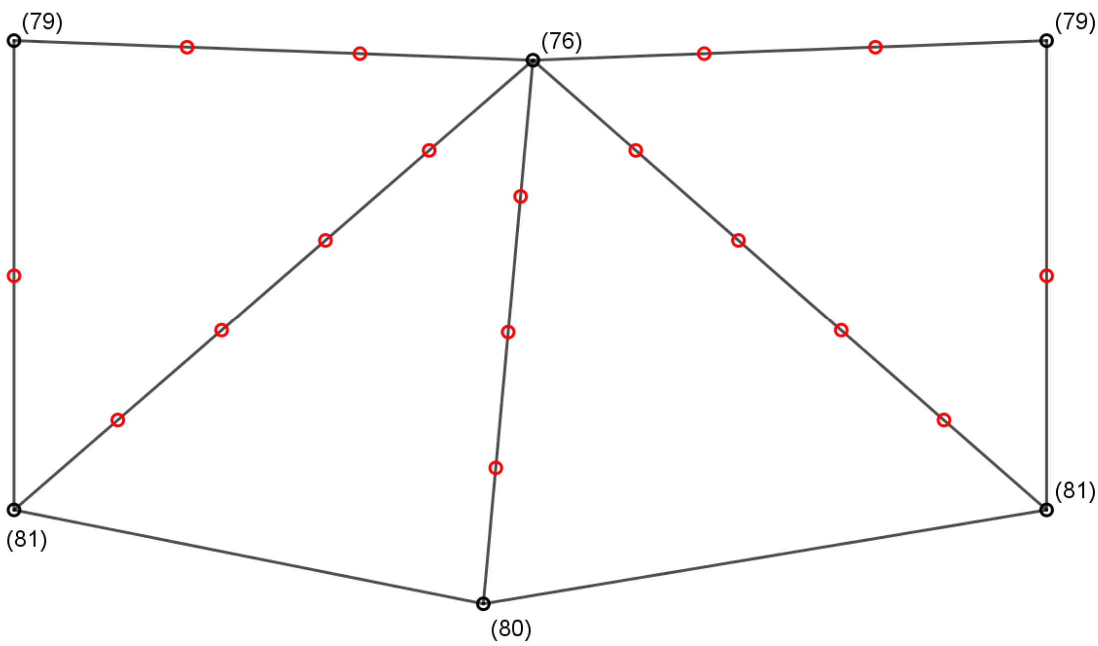
2.1 Traçado das curvas de

O traçado das curvas de nível é feito considerando pontos de cotas inteiras e de acordo com a natureza do trabalho. Sobre cada segmento, determina-se o ponto de cota inteira, a união dos pontos de mesma cota gera a curva de nível.

A superfície topográfica assemelha-se a vários troncos de cone superpostos onde cada base inferior de um é a base superior do outro. Na figura a seguir é apresentado um exemplo da representação das curvas de nível.

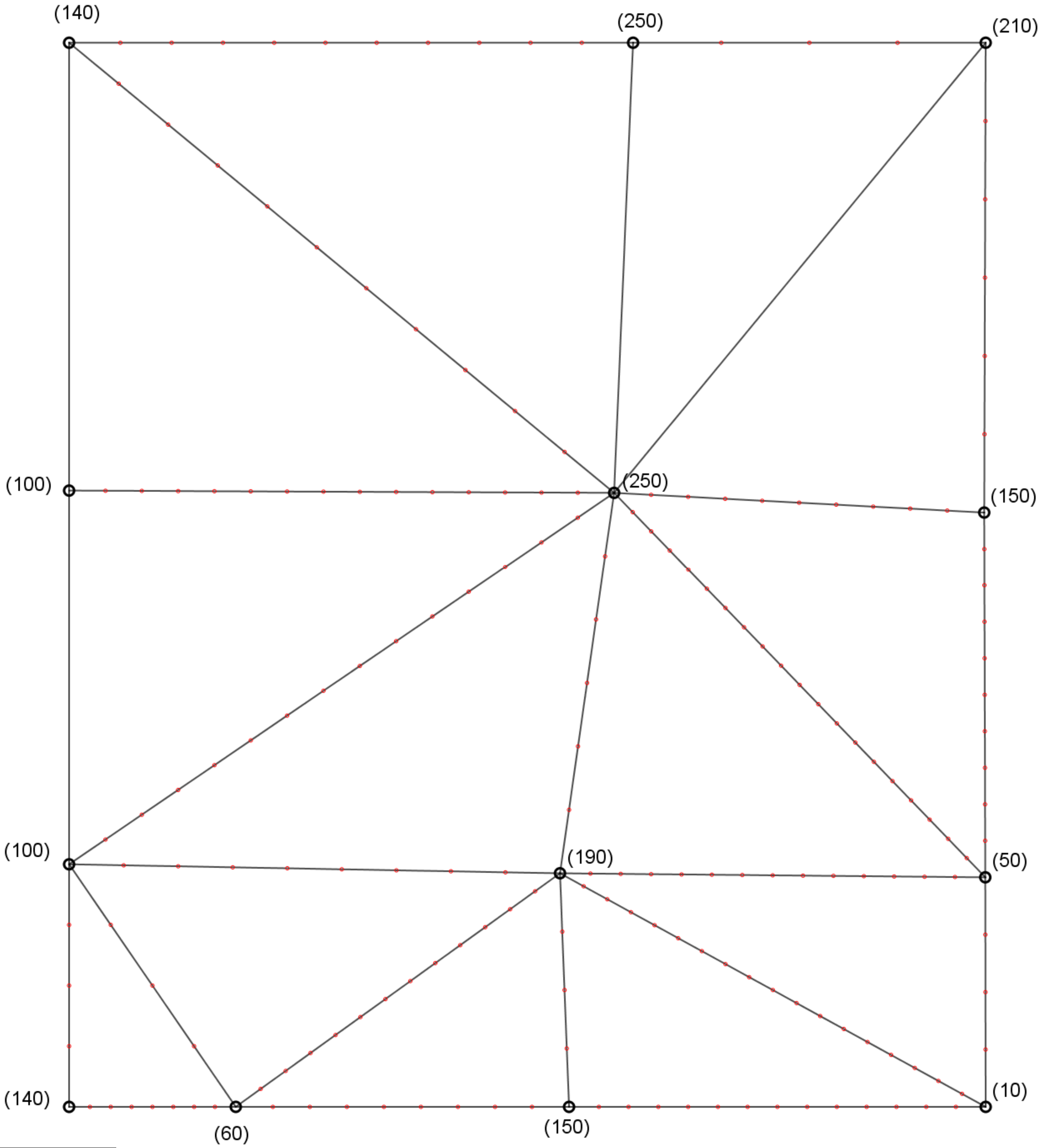


Para encontrar os pontos de cotas inteiras, utiliza-se o método da triangularização, ou seja, na malha onde será representada a planta contendo as curvas de nível, os segmentos são divididos de forma a representar os pontos de cotas inteiras. Um exemplo é apresentado na figura a seguir.

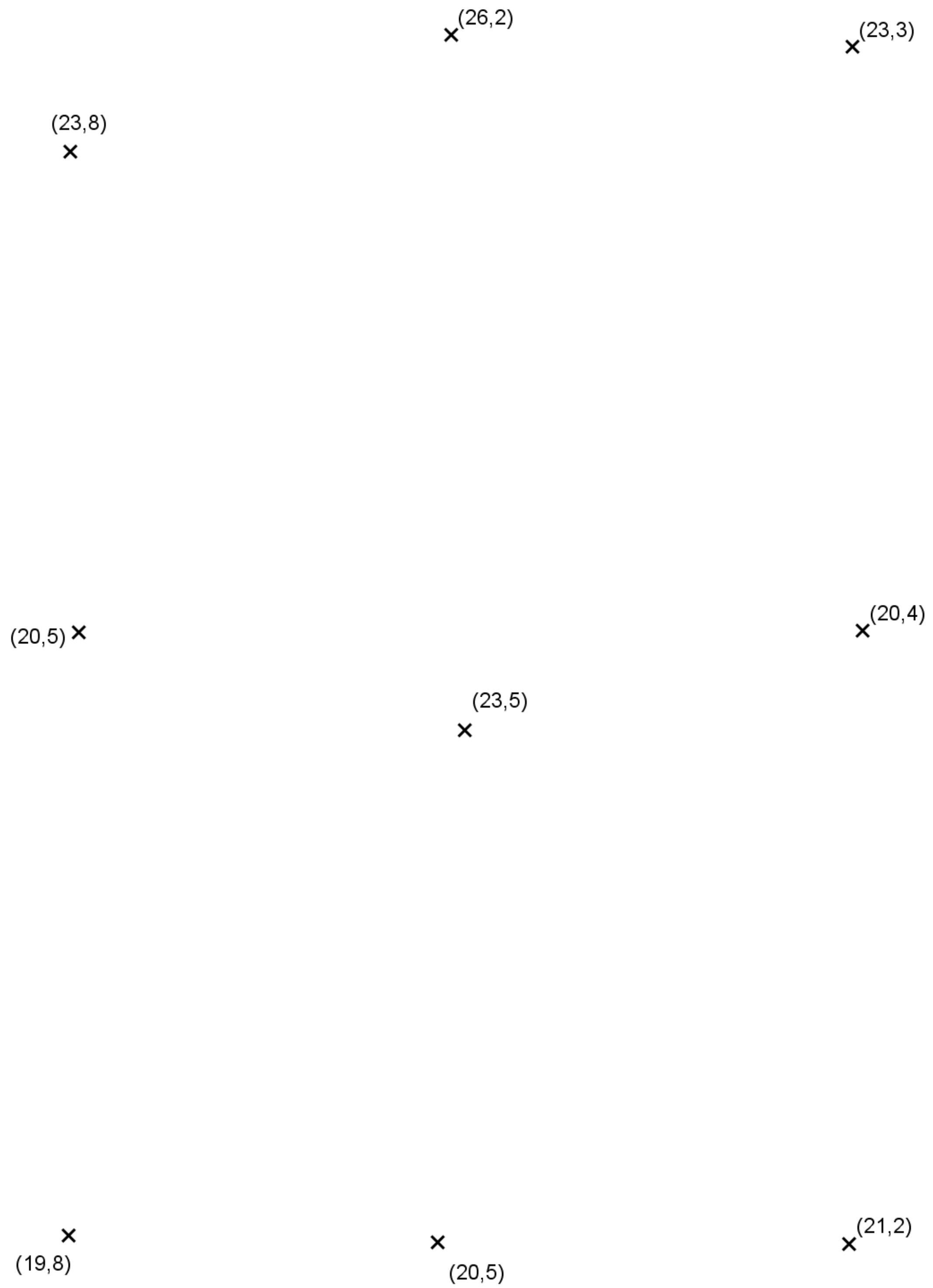


Exercícios

1. Os pontos correspondem a uma superfície topográfica, representá-la através de curvas de nível, com equidistância de 10 metros, considerando a unidade de cota como sendo o metro.

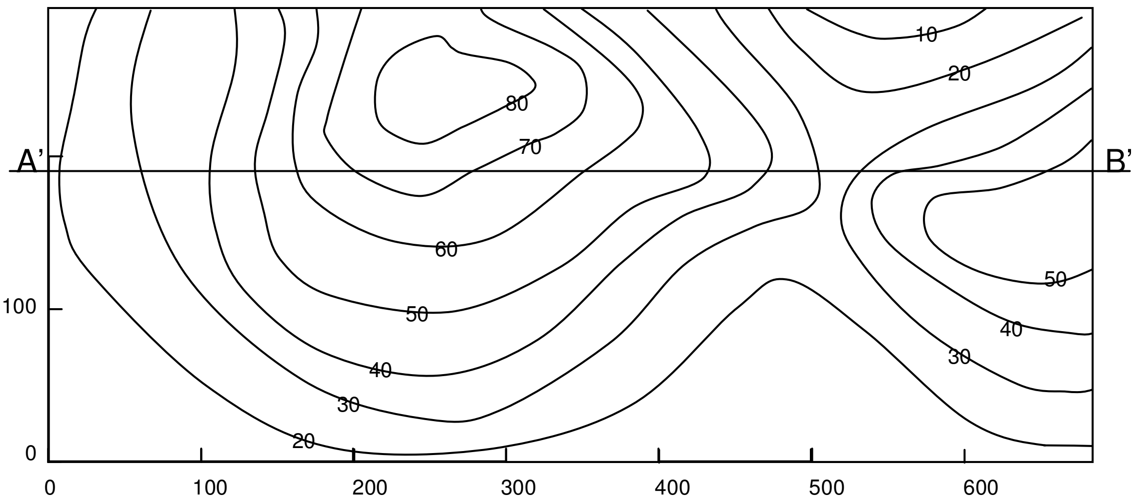


2. Os pontos correspondem a uma superfície topográfica, representá-la através de curvas de nível, com equidistância de 1 metro, considerando a unidade de cota como sendo o metro.



2.2 Perfil Topográfico

Considere uma superfície topográfica cortada por um plano vertical, representado pelo seu traço (AB) no plano π'. Este plano corta o plano de projeção segundo a reta A'B'.



Considere que a superfície topográfica tenha seu corte pelo plano vertical representado nos eixos cartesianos *x* e *y*.

Sobre o eixo *x* marcam-se os pontos de interseção da reta A'B' com as curvas de nível e sobre o eixo *y* marcam-se as cotas das extremidades desses segmentos. Unindo-se os pontos tem-se o perfil da superfície.

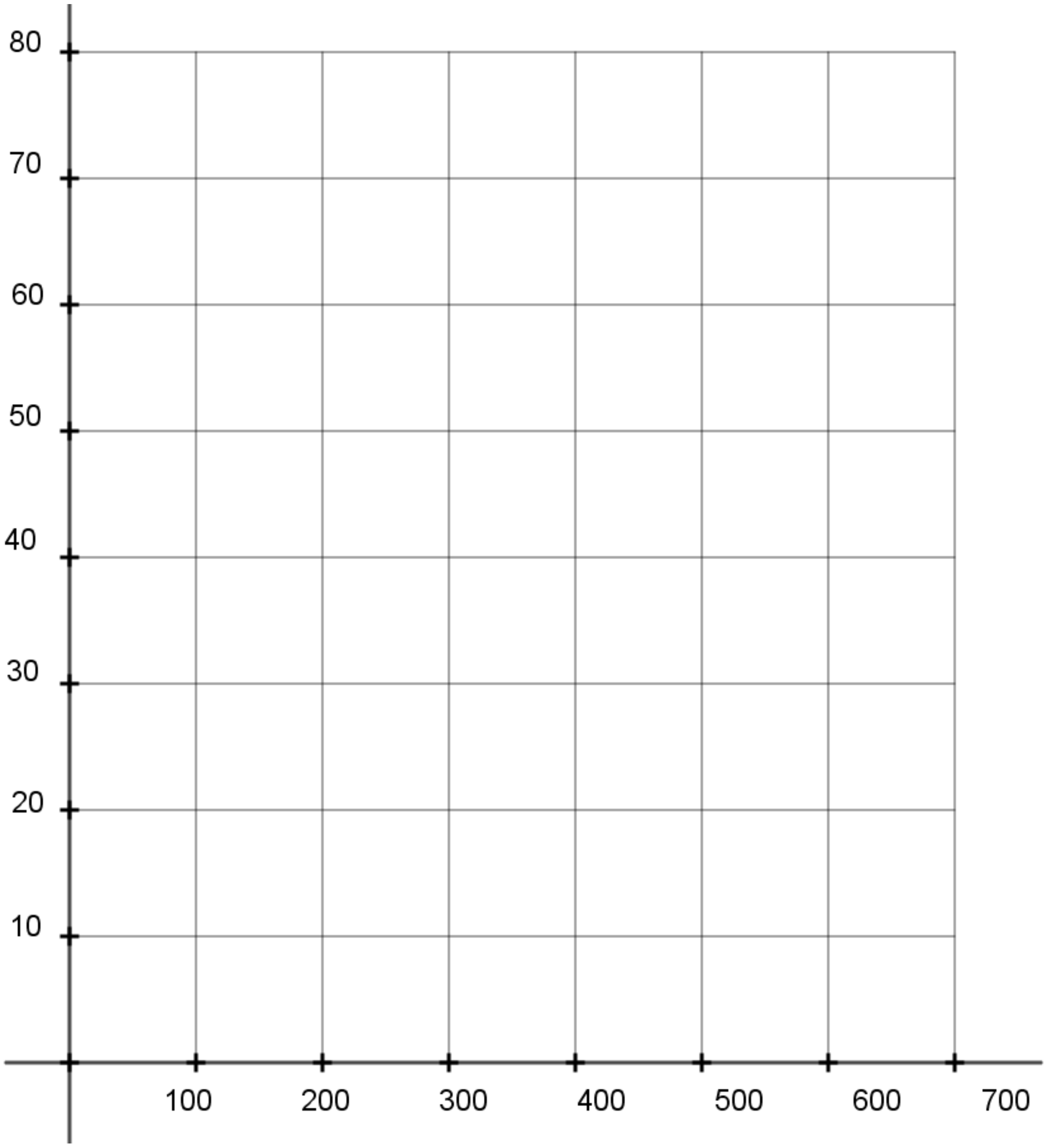
Em geral, utiliza-se no perfil uma escala tal que o valor da ordenada (*y*) seja dez vezes o valor da abscissa (*x*). Este procedimento é adotado para acentuar o relevo, já que as alturas são normalmente pequenas em relação à planta da região.

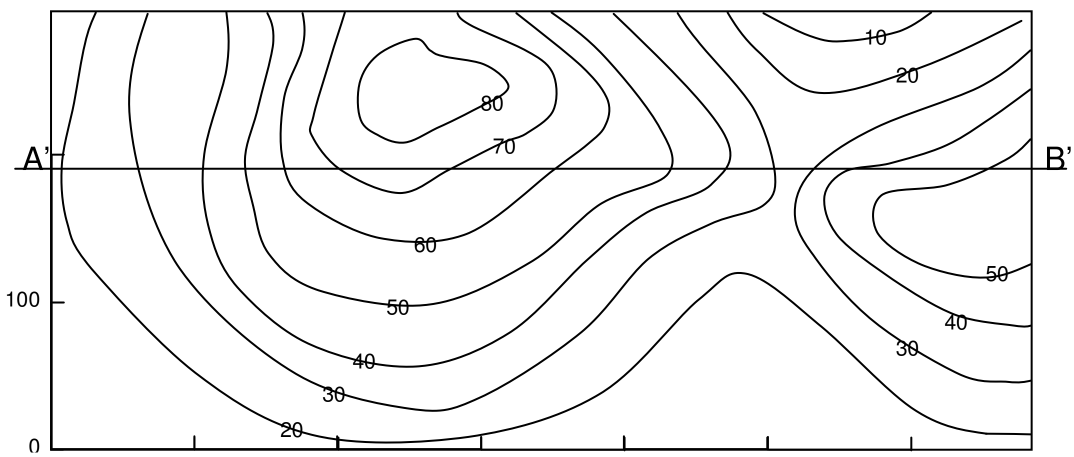
As escalas mais utilizadas são:

Vertical	Horizontal
1:100	1:1000
1:200	1:2000
1:500	1:5000

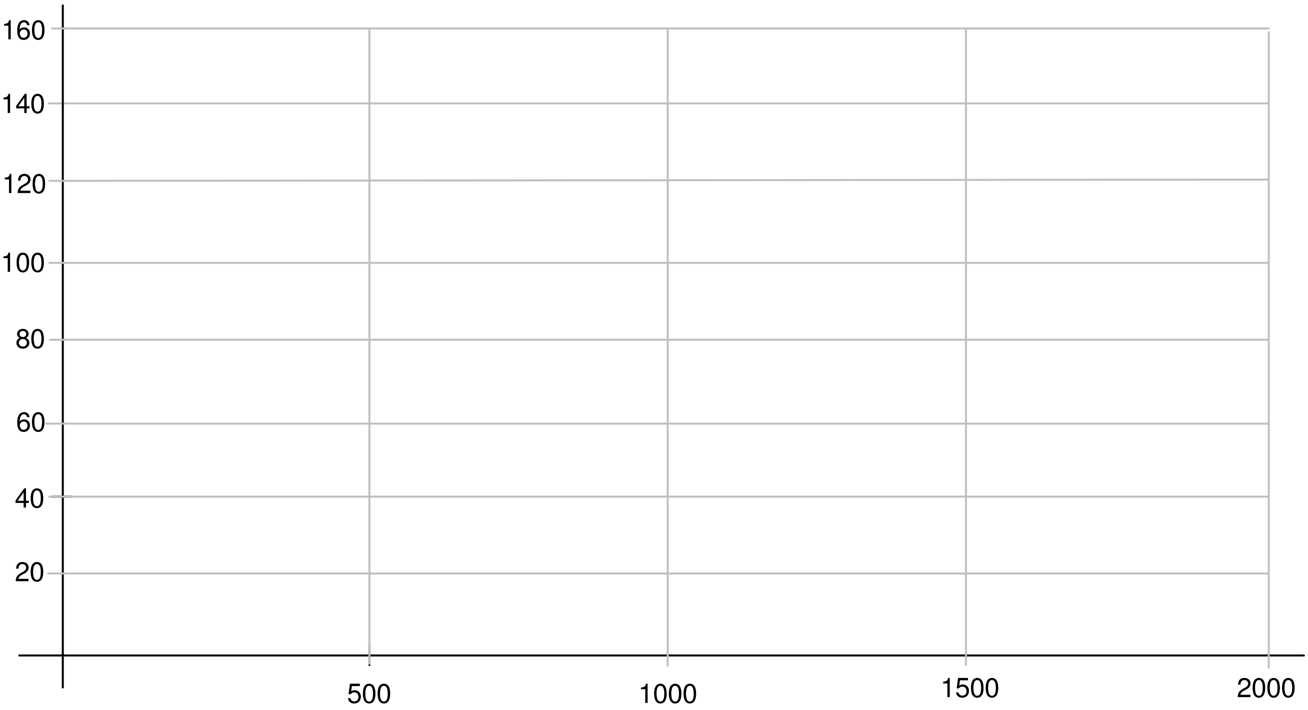
6. Exercícios

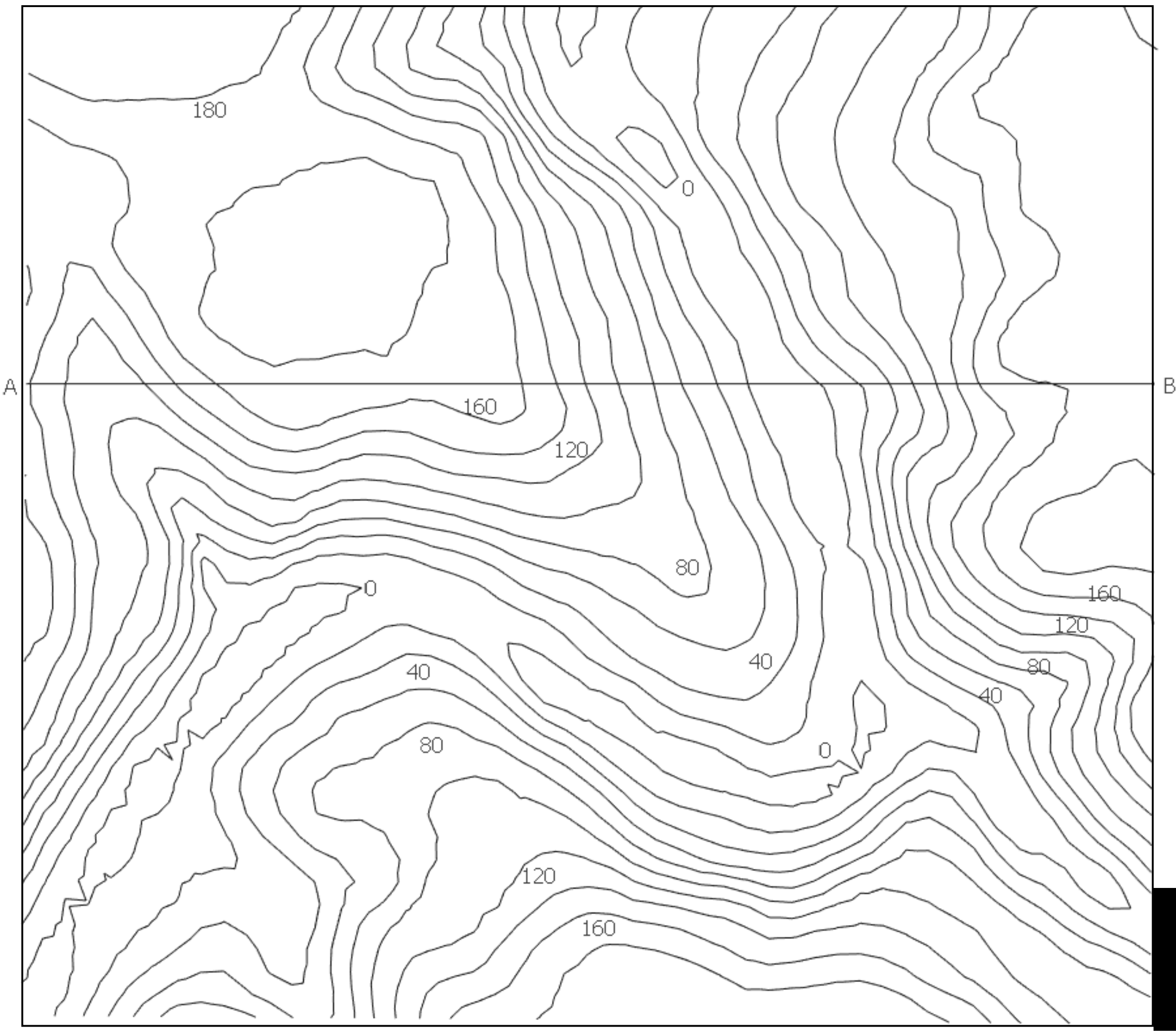
1. Representar o perfil topográfico da seção determinada pelo plano definido pelos pontos A e B, utilizando a escala vertical dez vezes maior que a horizontal.



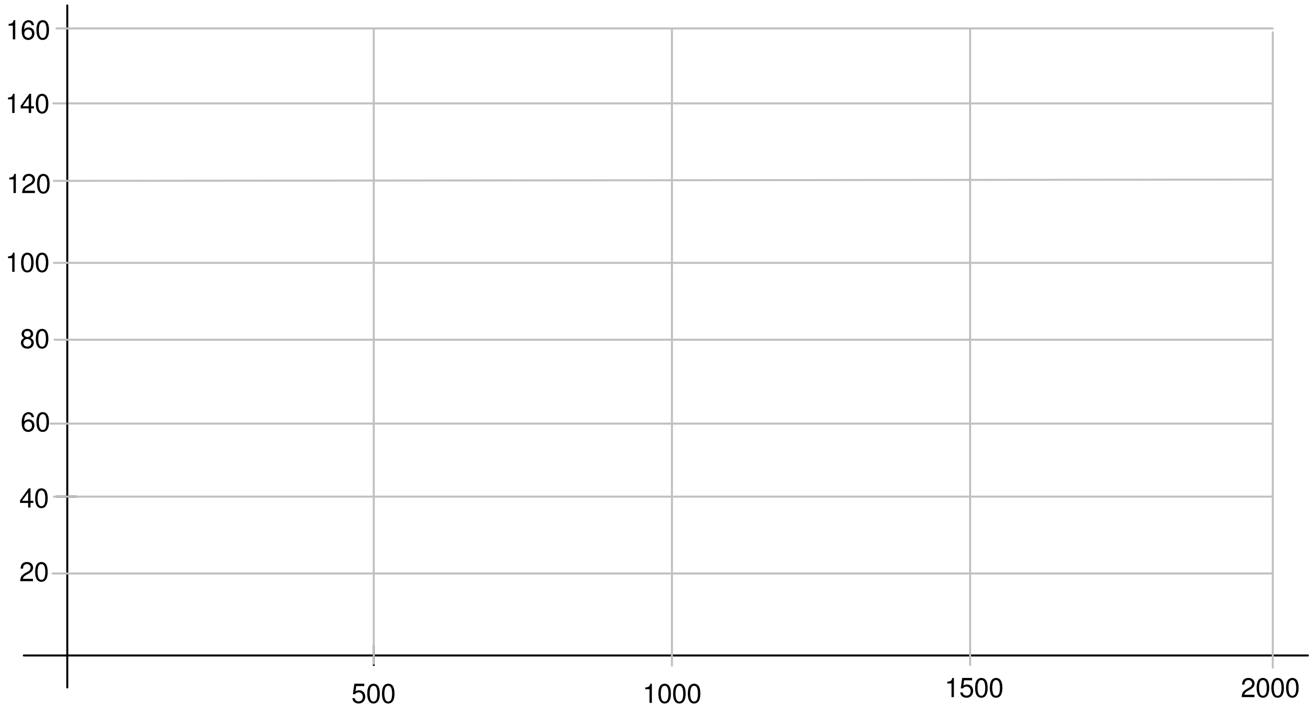


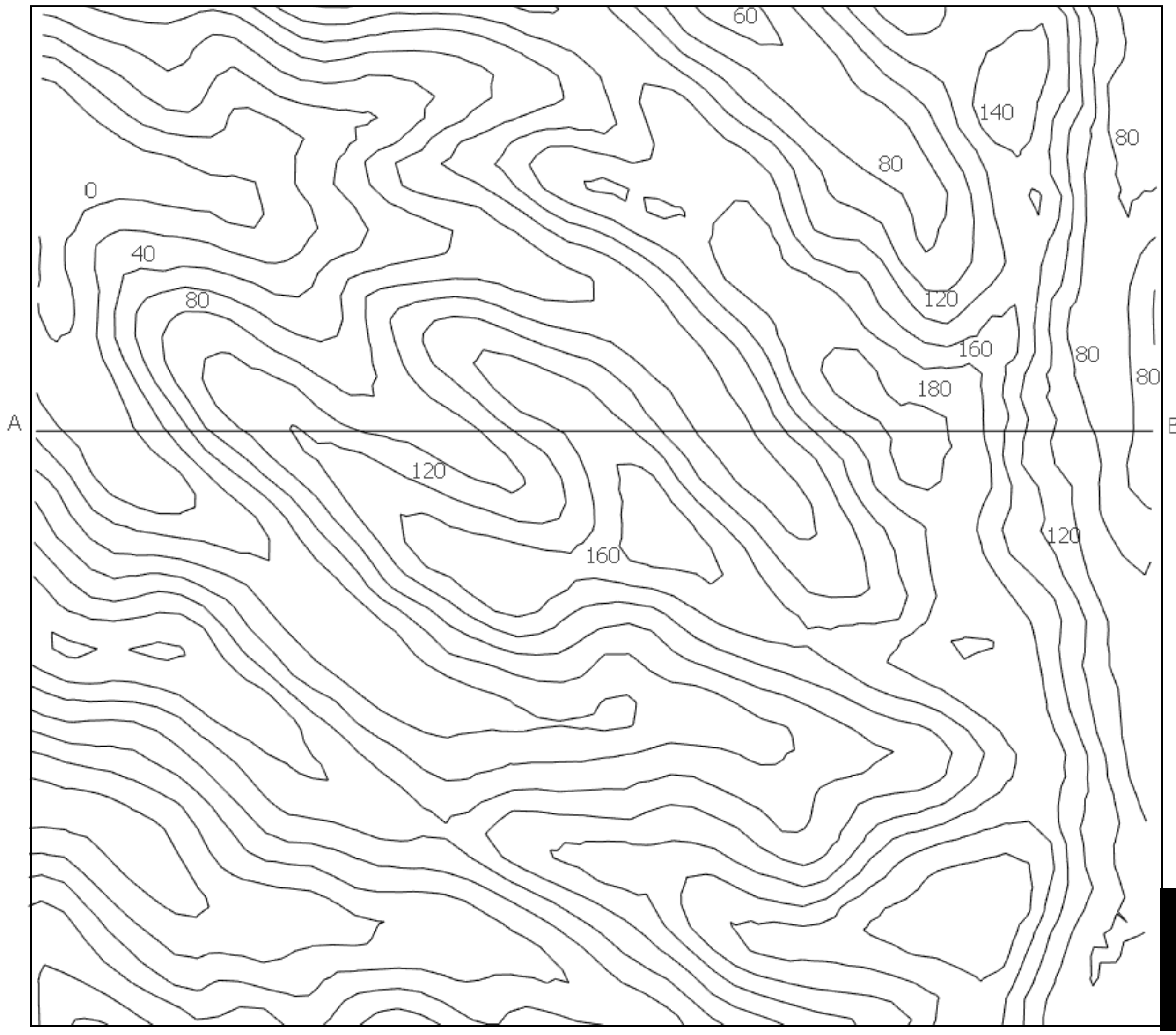
2. Representar o perfil topográfico da seção determinada pelo plano definido pelos pontos A e B.





3. Representar o perfil topográfico da seção determinada pelo plano definido pelos pontos A e B.





2.3 Seção Plana

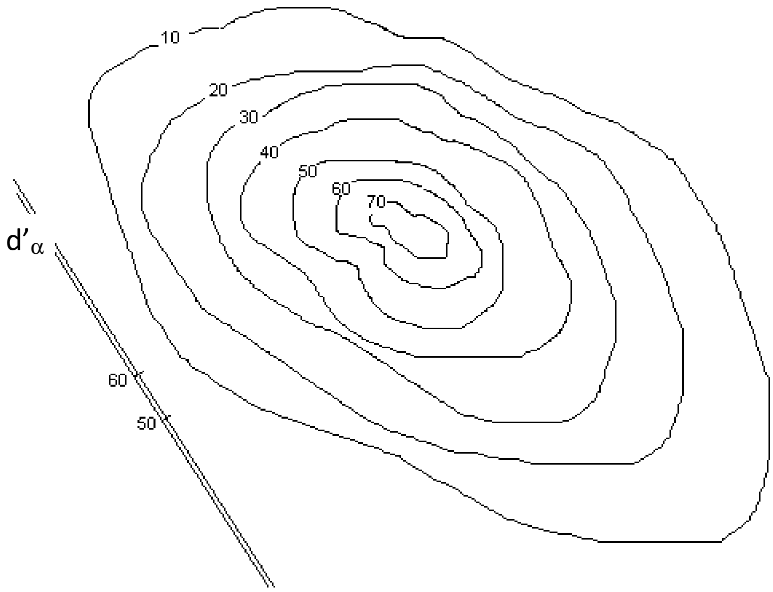
A interseção de um plano qualquer com uma superfície topográfica é sempre feita com o auxílio de planos horizontais. Cada plano horizontal considerado corta o plano dado segundo uma reta horizontal e corta a superfície segundo uma curva de nível, os pontos comuns da horizontal com a curva de nível são pontos da interseção. A ligação dos pontos assim obtidos resulta na interseção procurada.

Para a resolução do problema considera-se para planos horizontais auxiliares os próprios planos das curvas de nível dadas. A horizontal do plano dado cuja cota seja a mesma que a da curva de nível considerada, tem com esta, pontos comuns que são pontos da interseção.

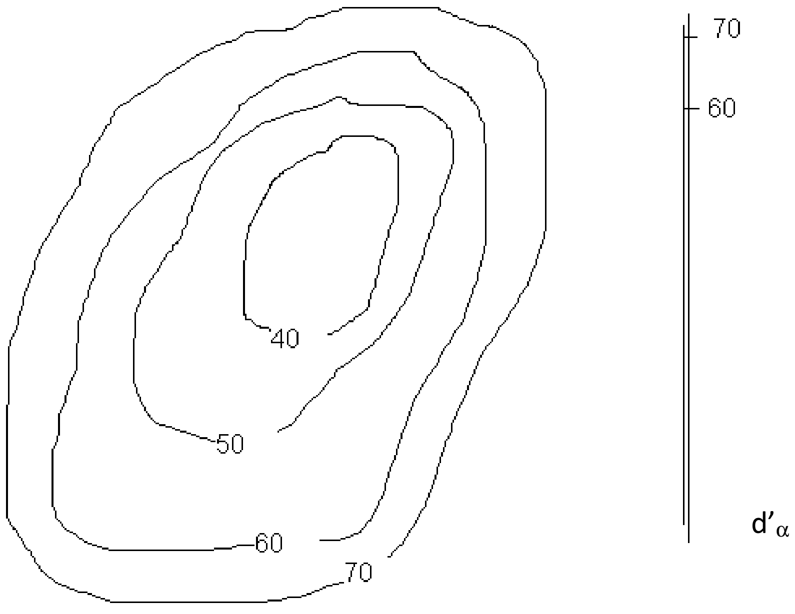
Exercício

Dados o plano α por sua reta de declive e as curvas de nível da superfície topográfica, determinar a interseção do plano com a superfície (seção plana).

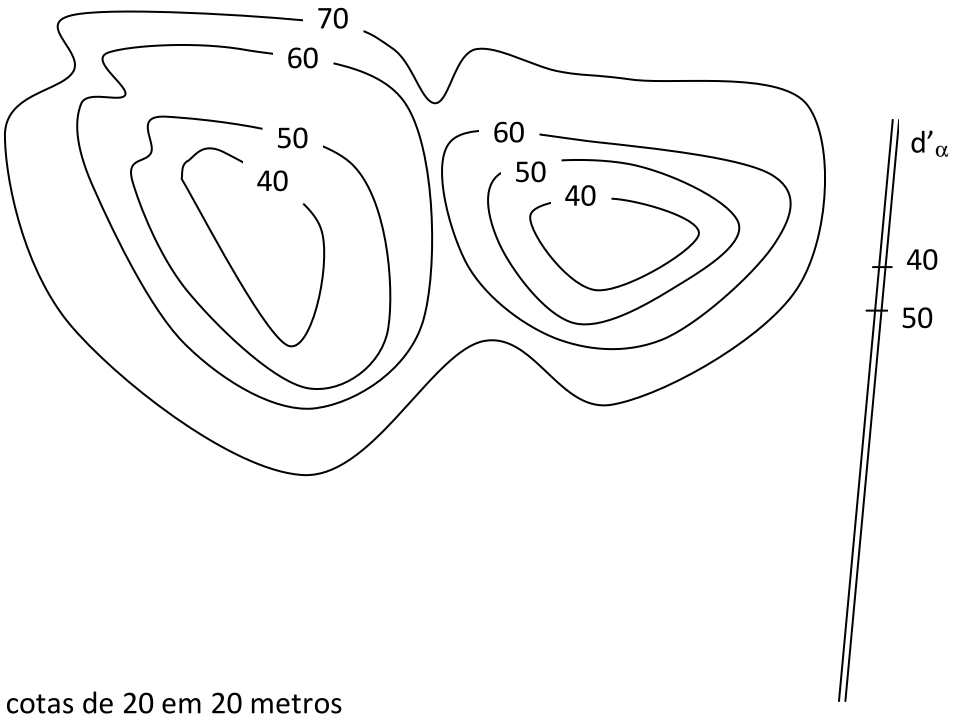
a)



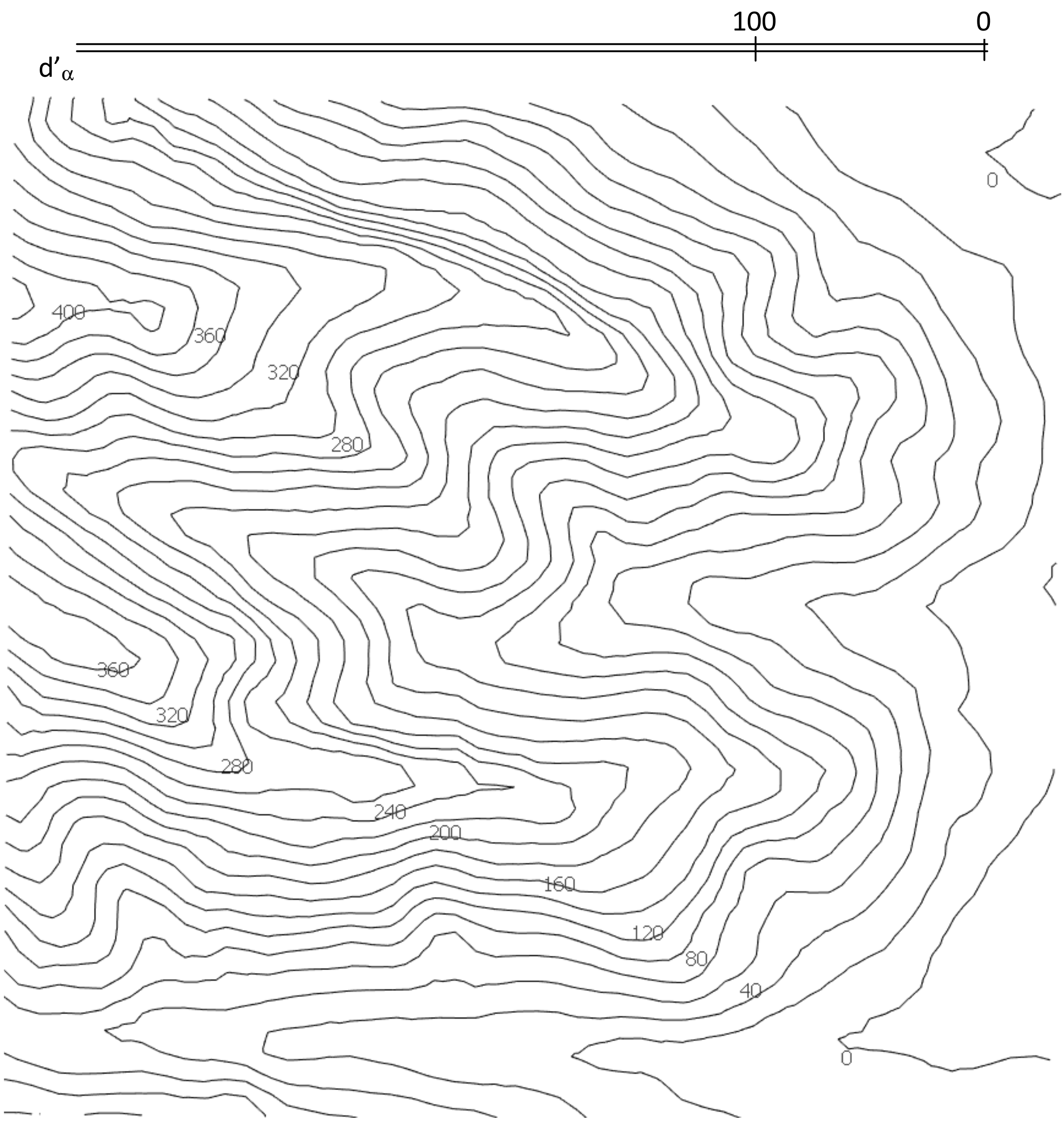
b)



c)

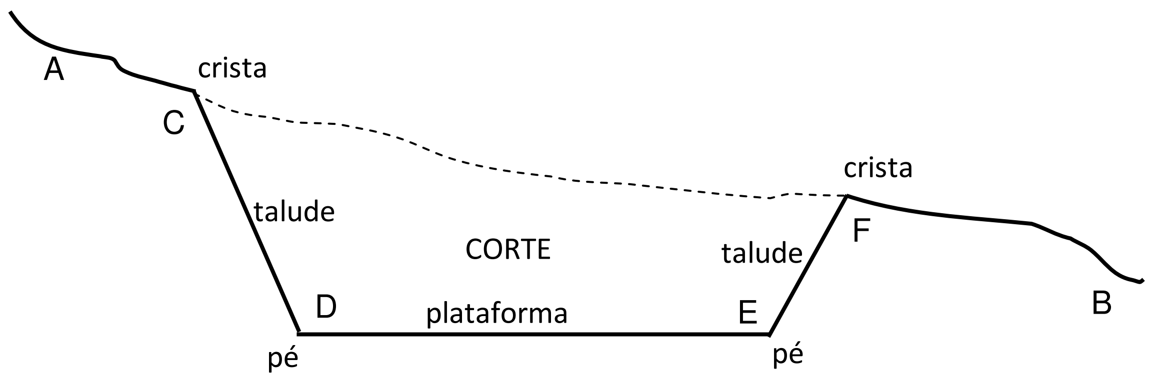


d) cotas de 20 em 20 metros



2.4 Cortes

Quando a construção que se quer executar tem cota menor que a da superfície natural do terreno, faz-se uma escavação que recebe o nome de corte.



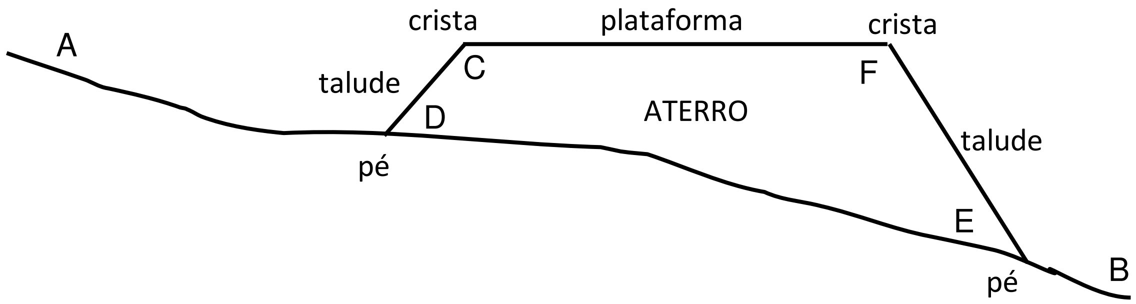
Admitindo-se que a linha AB da figura representa um perfil de um terreno, a área CDEF representa um corte. A superfície do terreno proveniente de um corte ou aterro chama-se **talude** ou **rampa,** a **crista** de um corte é chamada de ***offset***.

Os declives dos taludes variam de acordo com a natureza do terreno e da altura do corte. Os valores mais comumente utilizados são:

a) Terreno com possibilidade de desmoronamento: 1/1;
b) Terreno sem possibilidade de desmoronamento: 3/2;
c) Rocha: talude vertical.

2.5 Aterros

Quando a construção que se quer executar tem cota maior que a superfície natural do terreno, faz-se um preenchimento que é denominado aterro.



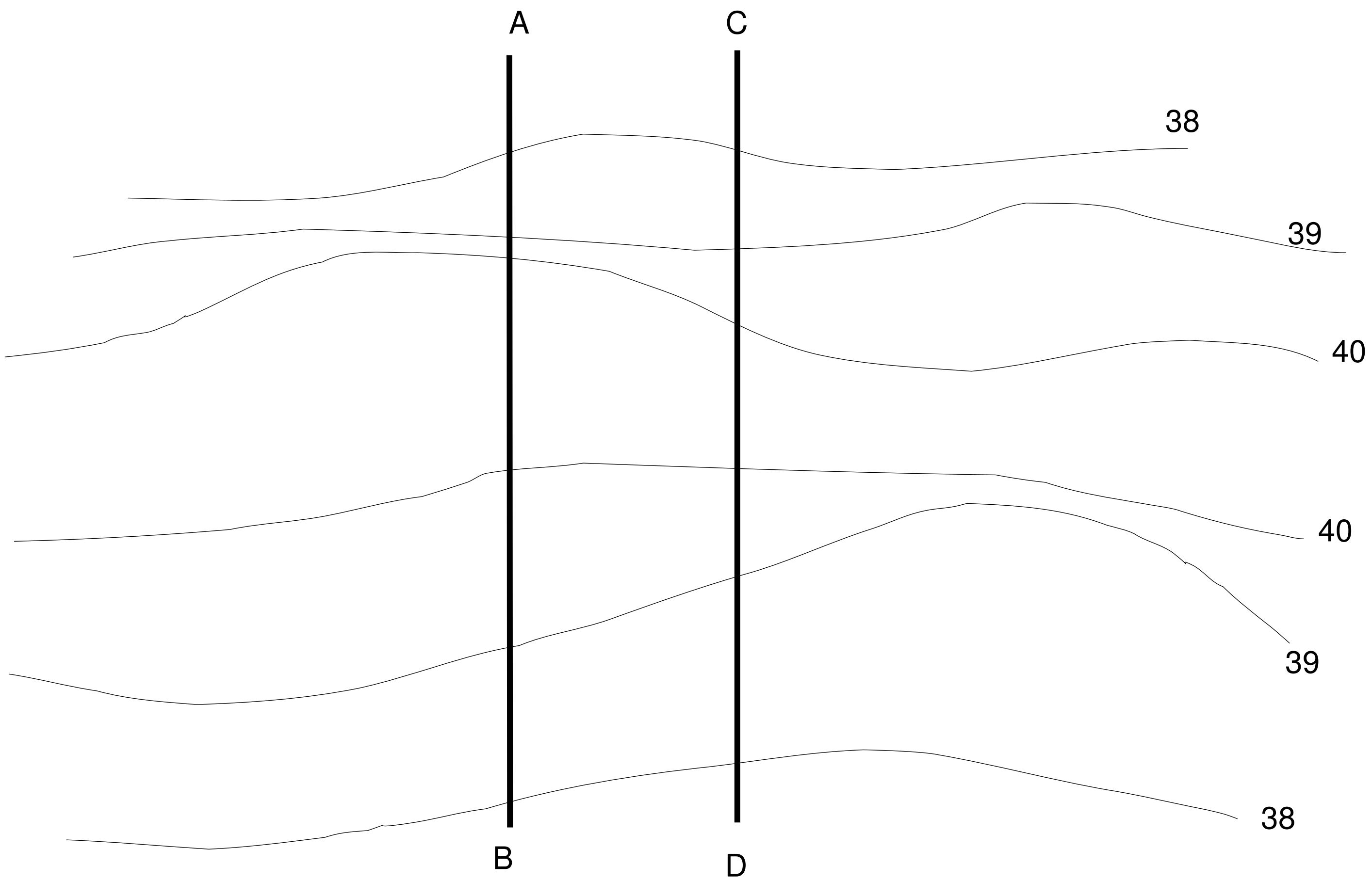
Admitindo-se que a linha AB da figura representa um perfil de um terreno, a área CDEF representa um aterro. O talude de um aterro também é chamado de **saia**. O pé de um aterro também é chamado de *offset*.

Os declives dos taludes dos aterros variam de acordo com as circunstâncias e principalmente com a altura. Os valores mais comumente utilizados são: 1/4, 1/3, 1/2 e 2/3.

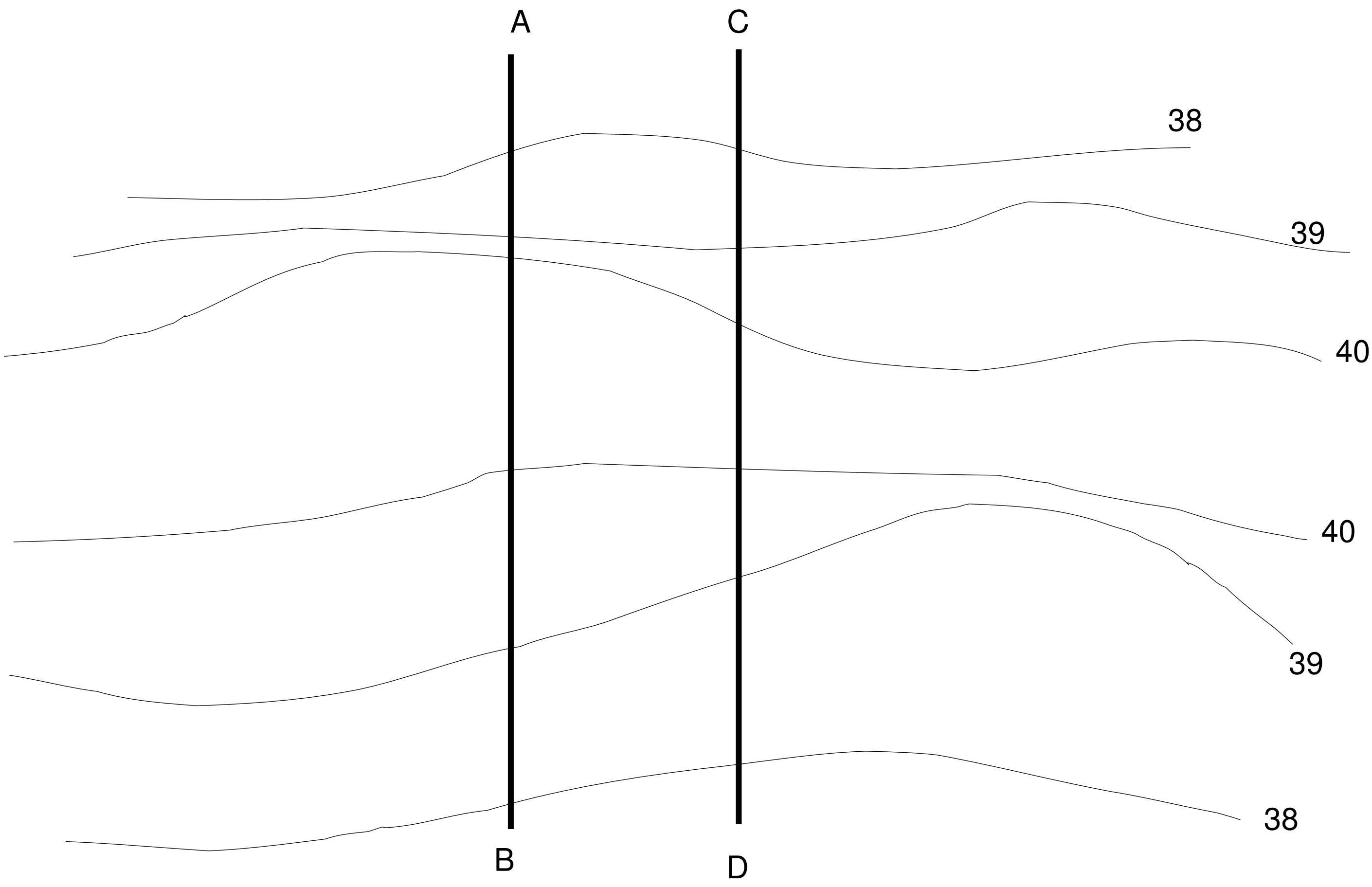
Exercício

Dada a superfície topográfica, representada pelas curvas de nível, determinar as linhas de *offset* para a construção da estrada representada pelas horizontais AB e CD de cota 38. Os dados fornecidos são referentes aos taludes de corte.
Fazer o novo desenho das curvas de nível. Indicar, para cada talude de corte, a inclinação θ, o declive de e o intervalo I.

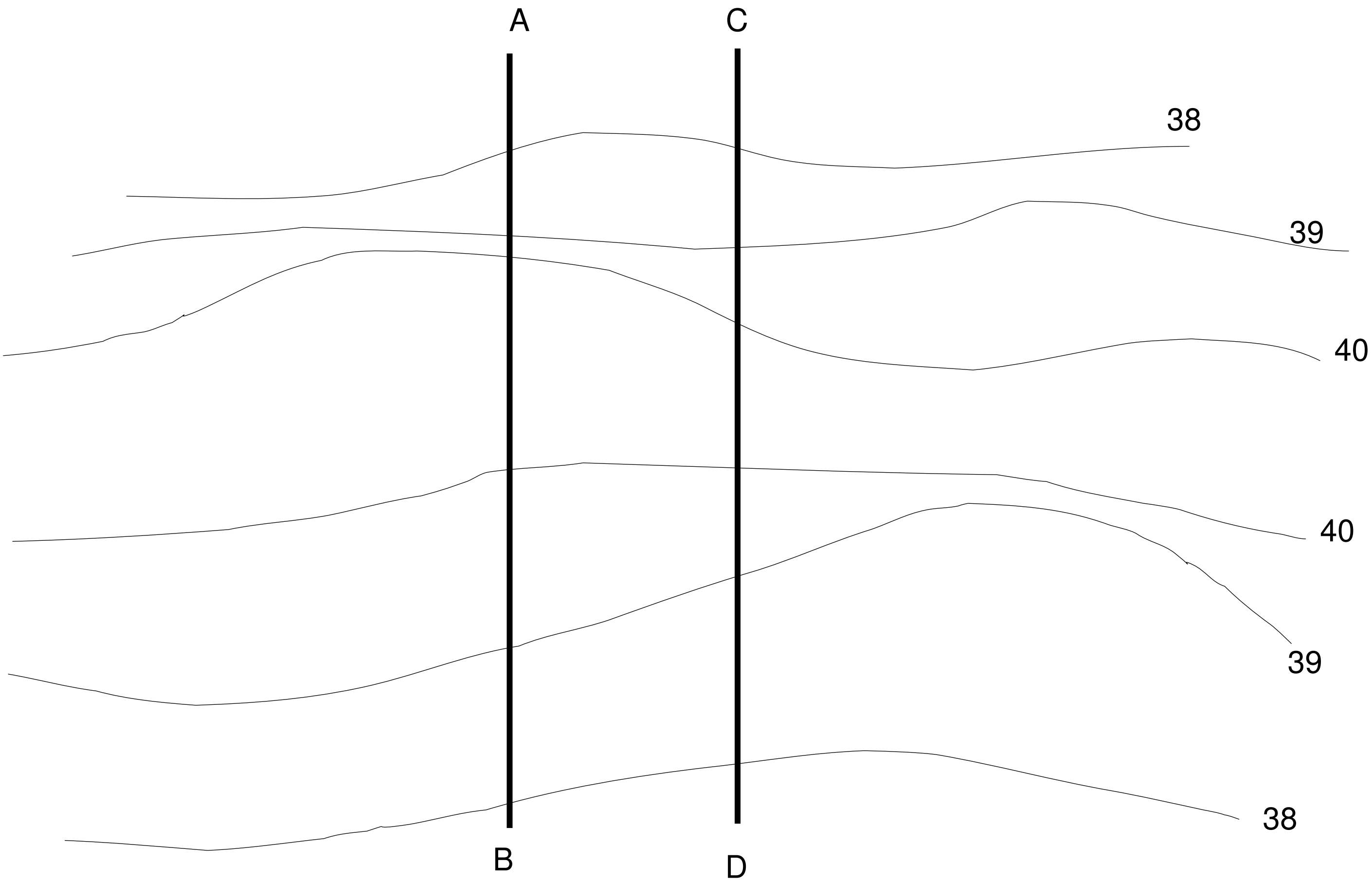
a) inclinações $\theta_E=45^o$ à esquerda de AB e $\theta_D=60^o$ à direita de CD.



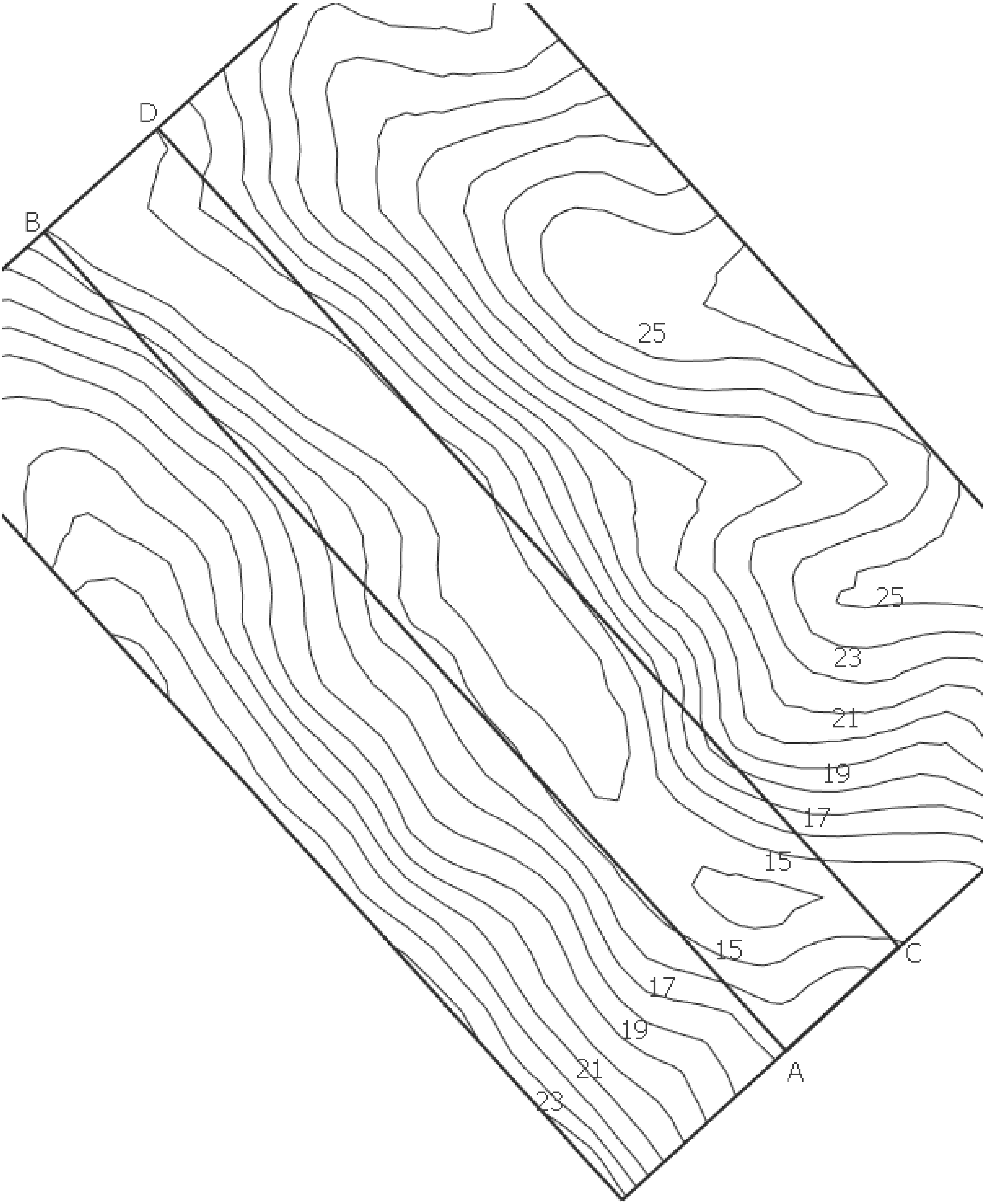
b) inclinações $\theta_E=30^o$ à esquerda de AB e $\theta_D=45^o$ à direita de CD.



c) declives de_E=2/3 à esquerda de AB e de_D=1 à direita de CD.

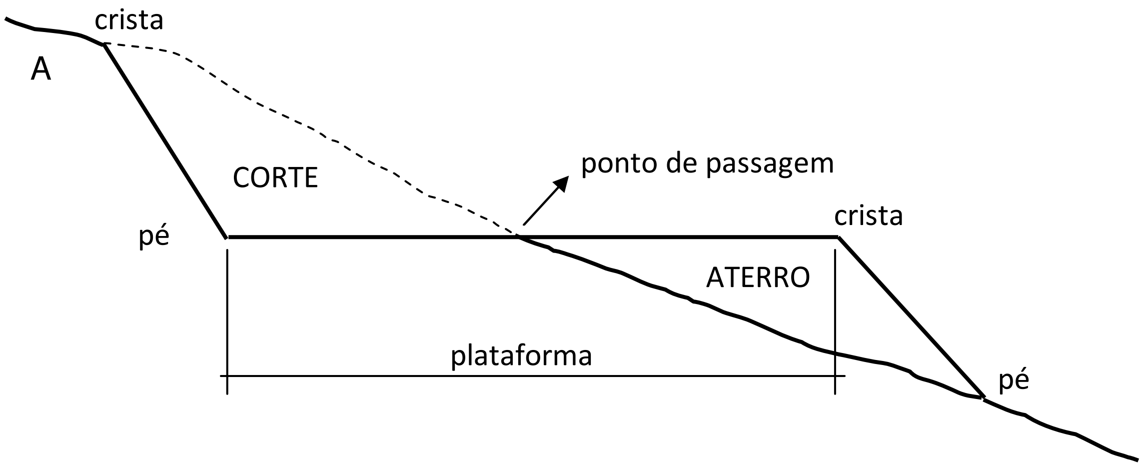


d) declives $de_E=45^o$ à esquerda de AB e $de_D=30^o$ à direita de CD, cotas de AB e CD iguais a 15, escala 1:4.



2.6 Seção Mista

A seção mista é constituída de parte em corte e de parte em aterro, como mostra figura a seguir.

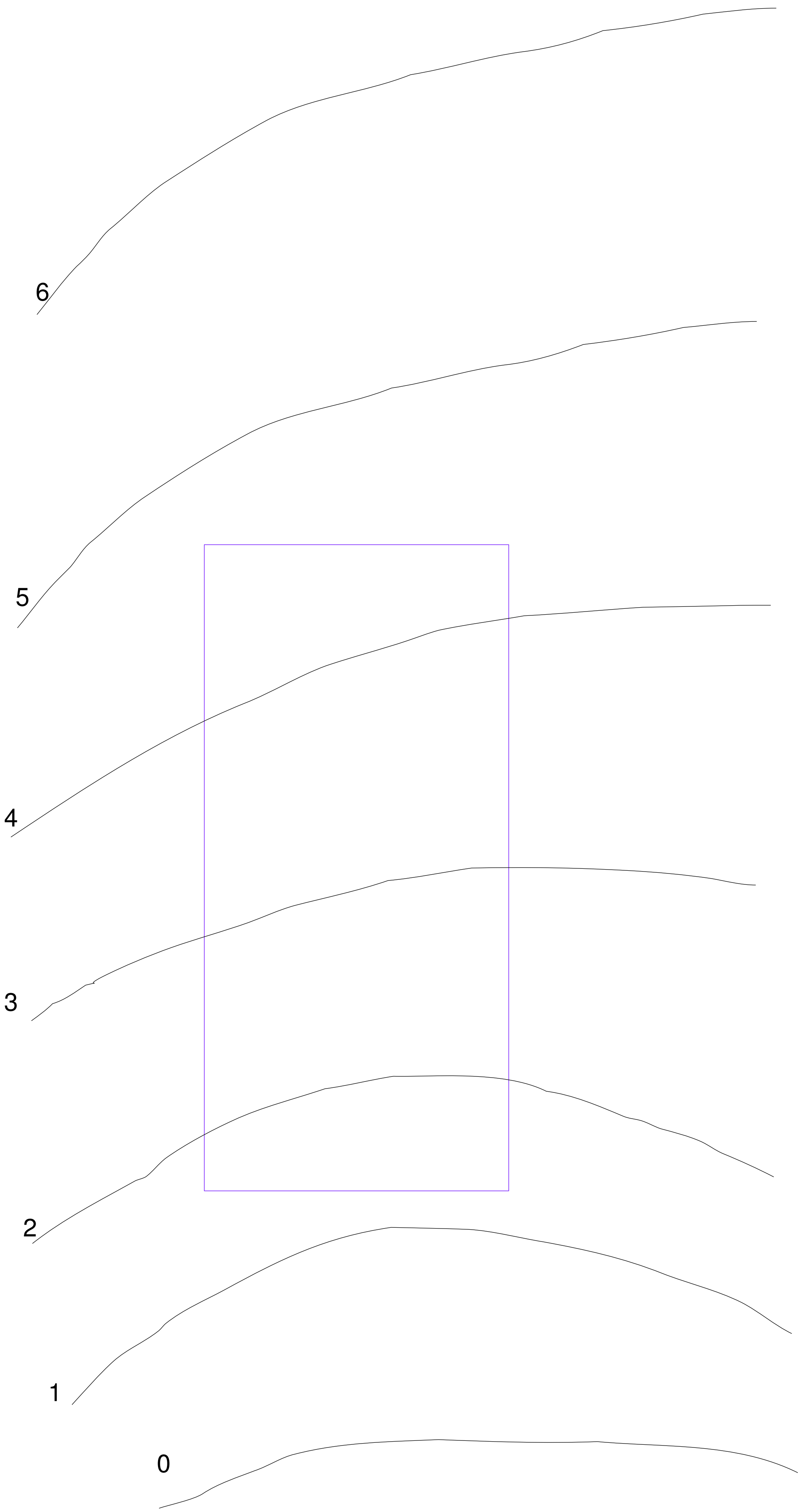


O ponto da superfície natural do terreno de mesma cota que a plataforma chama-se ponto de passagem, é nesse ponto que termina o corte e começa o aterro. A plataforma da seção mista é limitada de um lado pelo pé do corte e do outro pela crista do aterro.

Considerando-se uma seção transversal em um corte ou aterro, o ponto comum da linha natural do terreno com o talude chama-se ***offset***. Determinados os vários *offsets*, a união desses pontos fornece a curva chamada linha dos *offsets*.

Exercício

1. Dada a superfície topográfica, representada pelas suas curvas de nível, obter as linhas de *off-set* resultantes da execução de uma terraplenagem no terreno delimitado pelo retângulo, de maneira que se tenha toda a área em nível na cota 3. O talude de aterro tem declividade 5/6 e o de corte tem 1/1.


6
5
4
3
2
1
0

2. Dada a superfície topográfica, representada pelas suas curvas de nível, obter as linhas de *off-set* resultantes da execução de uma terraplenagem no terreno delimitado pelo retângulo, de maneira que se tenha toda a área em nível na cota 12. O talude de aterro tem declividade 45^o e o de corte tem 60^o. A escala é de 1:200.