Cálculo de Programas
Trabalho Prático
MiEI+LCC — 2018/19

Departamento de Informática
Universidade do Minho

Junho de 2019

Grupo nr.	99 (preencher)
a11111	Nome1 (preencher)
a22222	Nome2 (preencher)
a33333	Nome3 (preencher)

1 Preâmbulo

A disciplina de Cálculo de Programas tem como objectivo principal ensinar a programação de computadores como uma disciplina científica. Para isso parte-se de um repertório de *combinadores* que formam uma álgebra da programação (conjunto de leis universais e seus corolários) e usam-se esses combinadores para construir programas *composicionalmente*, isto é, agregando programas já existentes.

Na sequência pedagógica dos planos de estudo dos dois cursos que têm esta disciplina, restringe-se a aplicação deste método à programação funcional em Haskell. Assim, o presente trabalho prático coloca os alunos perante problemas concretos que deverão ser implementados em Haskell. Há ainda um outro objectivo: o de ensinar a documentar programas, validá-los, e a produzir textos técnico-científicos de qualidade.

2 Documentação

Para cumprir de forma integrada os objectivos enunciados acima vamos recorrer a uma técnica de programação dita "literária" [1], cujo princípio base é o seguinte:

> *Um programa e a sua documentação devem coincidir.*

Por outras palavras, o código fonte e a documentação de um programa deverão estar no mesmo ficheiro.

O ficheiro `cp1819t.pdf` que está a ler é já um exemplo de programação literária: foi gerado a partir do texto fonte `cp1819t.lhs`[1] que encontrará no material pedagógico desta disciplina descompactando o ficheiro `cp1819t.zip` e executando

```
$ lhs2TeX cp1819t.lhs > cp1819t.tex
$ pdflatex cp1819t
```

em que `lhs2tex` é um pre-processador que faz "pretty printing" de código Haskell em LaTeX e que deve desde já instalar executando

```
$ cabal install lhs2tex
```

Por outro lado, o mesmo ficheiro `cp1819t.lhs` é executável e contém o "kit" básico, escrito em Haskell, para realizar o trabalho. Basta executar

```
$ ghci cp1819t.lhs
```

[1] O suffixo 'lhs' quer dizer *literate Haskell*.

Abra o ficheiro `cp1819t.lhs` no seu editor de texto preferido e verifique que assim é: todo o texto que se encontra dentro do ambiente

```
\begin{code}
...
\end{code}
```

vai ser seleccionado pelo GHCi para ser executado.

3 Como realizar o trabalho

Este trabalho teórico-prático deve ser realizado por grupos de três alunos. Os detalhes da avaliação (datas para submissão do relatório e sua defesa oral) são os que forem publicados na página da disciplina na *internet*.

Recomenda-se uma abordagem participativa dos membros do grupo de trabalho por forma a poderem responder às questões que serão colocadas na *defesa oral* do relatório.

Em que consiste, então, o *relatório* a que se refere o parágrafo anterior? É a edição do texto que está a ser lido, preenchendo o anexo D com as respostas. O relatório deverá conter ainda a identificação dos membros do grupo de trabalho, no local respectivo da folha de rosto.

Para gerar o PDF integral do relatório deve-se ainda correr os comando seguintes, que actualizam a bibliografia (com BibTEX) e o índice remissivo (com `makeindex`),

```
$ bibtex cp1819t.aux
$ makeindex cp1819t.idx
```

e recompilar o texto como acima se indicou. Dever-se-á ainda instalar o utilitário QuickCheck, que ajuda a validar programas em Haskell e a biblioteca Gloss para geração de gráficos 2D:

```
$ cabal install QuickCheck gloss
```

Para testar uma propriedade QuickCheck *prop*, basta invocá-la com o comando:

```
> quickCheck prop
+++ OK, passed 100 tests.
```

Qualquer programador tem, na vida real, de ler e analisar (muito!) código escrito por outros. No anexo C disponibiliza-se algum código Haskell relativo aos problemas que se seguem. Esse anexo deverá ser consultado e analisado à medida que isso for necessário.

Problema 1

Um compilador é um programa que traduz uma linguagem dita de *alto nível* numa linguagem (dita de *baixo nível*) que seja executável por uma máquina. Por exemplo, o GCC compila C/C++ em código objecto que corre numa variedade de arquitecturas.

Compiladores são normalmente programas complexos. Constam essencialmente de duas partes: o *analisador sintático* que lê o texto de entrada (o programa *fonte* a compilar) e cria uma sua representação interna, estruturada em árvore; e o *gerador de código* que converte essa representação interna em código executável. Note-se que tal representação intermédia pode ser usada para outros fins, por exemplo, para gerar uma listagem de qualidade (*pretty print*) do programa fonte.

O projecto de compiladores é um assunto complexo que será assunto de outras disciplinas. Neste trabalho pretende-se apenas fazer uma introdução ao assunto, mostrando como tais programas se podem construir funcionalmente à custa de cata/ana/hilo-morfismos da linguagem em causa.

Para cumprirmos o nosso objectivo, a linguagem desta questão terá que ser, naturalmente, muito simples: escolheu-se a das expressões aritméticas com inteiros, *eg.* $1+2$, $3*(4+5)$ etc. Como representação interna adopta-se o seguinte tipo polinomial, igualmente simples:

$$\mathbf{data}\ Expr = Num\ Int \mid Bop\ Expr\ Op\ Expr$$
$$\mathbf{data}\ Op = Op\ String$$

1. Escreva as definições dos {cata, ana e hilo}-morfismos deste tipo de dados segundo o método ensinado nesta disciplina (recorde módulos como *eg.* BTree etc).

2. Como aplicação do módulo desenvolvido no ponto 1, defina como {cata, ana ou hilo}-morfismo a função seguinte:

   - $calcula :: Expr \to Int$ que calcula o valor de uma expressão;

     Propriedade QuickCheck 1 *O valor zero é um elemento neutro da adição.*

     $$\begin{aligned}&prop\_neutro1 :: Expr \to Bool\\&prop\_neutro1 = calcula \cdot addZero \equiv calcula \textbf{ where}\\&\quad addZero\ e = Bop\ (Num\ 0)\ (Op\ \texttt{"+"})\ e\\&prop\_neutro2 :: Expr \to Bool\\&prop\_neutro2 = calcula \cdot addZero \equiv calcula \textbf{ where}\\&\quad addZero\ e = Bop\ e\ (Op\ \texttt{"+"})\ (Num\ 0)\end{aligned}$$

     Propriedade QuickCheck 2 *As operações de soma e multiplicação são comutativas.*

     $$\begin{aligned}&prop\_comuta = calcula \cdot mirror \equiv calcula \textbf{ where}\\&\quad mirror = cataExpr\ [Num, g2]\\&\quad g2 = \widehat{\widehat{Bop}} \cdot (swap \times id) \cdot assocl \cdot (id \times swap)\end{aligned}$$

3. Defina como {cata, ana ou hilo}-morfismos as funções

   - $compile :: String \to Codigo$ - trata-se do compilador propriamente dito. Deverá ser gerado código posfixo para uma máquina elementar de stack. O tipo $Codigo$ pode ser definido à escolha. Dão-se a seguir exemplos de comportamentos aceitáveis para esta função:

     ```
     Tp4> compile "2+4"
     ["PUSH 2", "PUSH 4", "ADD"]
     Tp4> compile "3*(2+4)"
     ["PUSH 3", "PUSH 2", "PUSH 4", "ADD", "MUL"]
     Tp4> compile "(3*2)+4"
     ["PUSH 3", "PUSH 2", "MUL", "PUSH 4", "ADD"]
     Tp4>
     ```

   - $show' :: Expr \to String$ - gera a representação textual de uma $Expr$ pode encarar-se como o *pretty printer* associado ao nosso compilador

     Propriedade QuickCheck 3 *Em anexo, é fornecido o código da função $readExp$, que é "inversa" da função $show'$, tal como a propriedade seguinte descreve:*

     $$\begin{aligned}&prop\_inv :: Expr \to Bool\\&prop\_inv = \pi_1 \cdot head \cdot readExp \cdot show' \equiv id\end{aligned}$$

Valorização Em anexo é apresentado código Haskell que permite declarar $Expr$ como instância da classe $Read$. Neste contexto, $read$ pode ser vista como o analisador sintático do nosso minúsculo compilador de expressões aritméticas.

Analise o código apresentado, corra-o e escreva no seu relatório uma explicação **breve** do seu funcionamento, que deverá saber defender aquando da apresentação oral do relatório.

Exprima ainda o analisador sintático $readExp$ como um anamorfismo.

Problema 2

Pretende-se neste problema definir uma linguagem gráfica "brinquedo" a duas dimensões (2D) capaz de especificar e desenhar agregações de caixas que contêm informação textual. Vamos designar essa linguagem por $L2D$ e vamos defini-la como um tipo em Haskell:

$$\textbf{type } L2D = X\ Caixa\ Tipo$$

onde X é a estrutura de dados

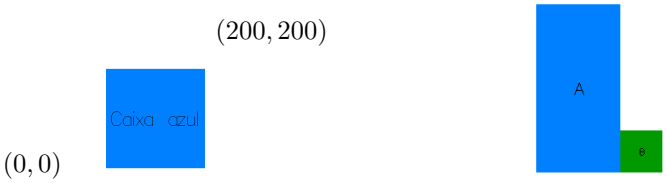


Figura 1: Caixa simples e caixa composta.

$$\textbf{data}\ X\ a\ b = Unid\ a \mid Comp\ b\ (X\ a\ b)\ (X\ a\ b)\ \textbf{deriving}\ Show$$

e onde:

$$\textbf{type}\ Caixa = ((Int, Int), (Texto, G.Color))$$
$$\textbf{type}\ Texto = String$$

Assim, cada caixa de texto é especificada pela sua largura, altura, o seu texto e a sua côr.[2] Por exemplo,

$$((200, 200), (\texttt{"Caixa azul"}, col\_blue))$$

designa a caixa da esquerda da figura 1.

O que a linguagem $L2D$ faz é agregar tais caixas tipográficas umas com as outras segundo padrões especificados por vários "tipos", a saber,

$$\textbf{data}\ Tipo = V \mid Vd \mid Ve \mid H \mid Ht \mid Hb\ \textbf{deriving}\ Show$$

com o seguinte significado:

V - agregação vertical alinhada ao centro

Vd - agregação vertical justificada à direita

Ve - agregação vertical justificada à esquerda

H - agregação horizontal alinhada ao centro

Hb - agregação horizontal alinhada pela base

Ht - agregação horizontal alinhada pelo topo

Como $L2D$ instancia o parâmetro b de X com $Tipo$, é fácil de ver que cada "frase" da linguagem $L2D$ é representada por uma árvore binária em que cada nó indica qual o tipo de agregação a aplicar às suas duas sub-árvores. Por exemplo, a frase

$$ex2 = Comp\ Hb\ (Unid\ ((100, 200), (\texttt{"A"}, col\_blue)))\ (Unid\ ((50, 50), (\texttt{"B"}, col\_green)))$$

deverá corresponder à imagem da direita da figura 1. E poder-se-á ir tão longe quando a linguagem o permita. Por exemplo, pense na estrutura da frase que representa o *layout* da figura 2.

É importante notar que cada "caixa" não dispõe informação relativa ao seu posicionamento final na figura. De facto, é a posição relativa que deve ocupar face às restantes caixas que irá determinar a sua posição final. Este é um dos objectivos deste trabalho: *calcular o posicionamento absoluto de cada uma das caixas por forma a respeitar as restrições impostas pelas diversas agregações*. Para isso vamos considerar um tipo de dados que comporta a informação de todas as caixas devidamente posicionadas (i.e. com a informação adicional da origem onde a caixa deve ser colocada).

[2] Pode relacionar $Caixa$ com as caixas de texto usadas nos jornais ou com *frames* da linguagem HTML usada na Internet.

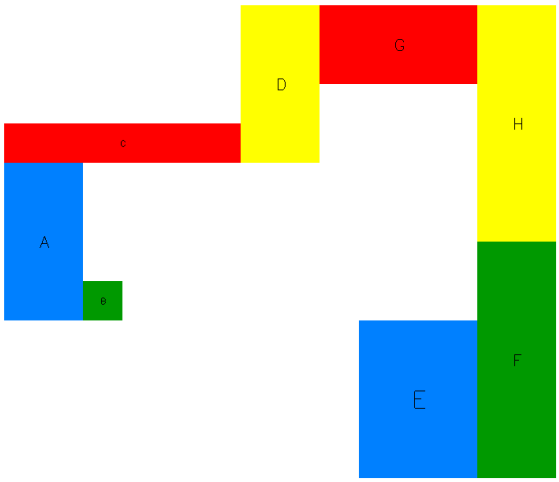


Figura 2: *Layout* feito de várias caixas coloridas.

$$\textbf{type } Fig = [(Origem, Caixa)]$$
$$\textbf{type } Origem = (Float, Float)$$

A informação mais relevante deste tipo é a referente à lista de "caixas posicionadas" (tipo $(Origem, Caixa)$). Regista-se aí a origem da caixa que, com a informação da sua altura e comprimento, permite definir todos os seus pontos (consideramos as caixas sempre paralelas aos eixos).

1. Forneça a definição da função $calc\_origems$, que calcula as coordenadas iniciais das caixas no plano:

   $$calc\_origems :: (L2D, Origem) \rightarrow X\ (Caixa, Origem)\ ()$$

2. Forneça agora a definição da função $agrup\_caixas$, que agrupa todas as caixas e respectivas origens numa só lista:

   $$agrup\_caixas :: X\ (Caixa, Origem)\ () \rightarrow Fig$$

Um segundo problema neste projecto é *descobrir como visualizar a informação gráfica calculada por* $desenho$. A nossa estratégia para superar o problema baseia-se na biblioteca Gloss, que permite a geração de gráficos 2D. Para tal disponibiliza-se a função

$$crCaixa :: Origem \rightarrow Float \rightarrow Float \rightarrow String \rightarrow G.Color \rightarrow G.Picture$$

que cria um rectângulo com base numa coordenada, um valor para a largura, um valor para a altura, um texto que irá servir de etiqueta, e a cor pretendida. Disponibiliza-se também a função

$$display :: G.Picture \rightarrow \mathsf{IO}\ ()$$

que dado um valor do tipo $G.picture$ abre uma janela com esse valor desenhado. O objectivo final deste exercício é implementar então uma função

$$mostra\_caixas :: (L2D, Origem) \rightarrow \mathsf{IO}\ ()$$

que dada uma frase da linguagem $L2D$ e coordenadas iniciais apresenta o respectivo desenho no ecrã. **Sugestão**: Use a função $G.pictures$ disponibilizada na biblioteca Gloss.

Problema 3

Nesta disciplina estudou-se como fazer programação dinâmica por cálculo, recorrendo à lei de recursividade mútua.[3]

Para o caso de funções sobre os números naturais ($\mathbb{N}_0$, com functor $\mathsf{F}\ X = 1 + X$) é fácil derivar-se da lei que foi estudada uma *regra de algibeira* que se pode ensinar a programadores que não tenham estudado Cálculo de Programas. Apresenta-se de seguida essa regra, tomando como exemplo o cálculo do ciclo-for que implementa a função de Fibonacci, recordar o sistema

$$\begin{aligned}&fib\ 0 = 1\\&fib\ (n+1) = f\ n\\&f\ 0 = 1\\&f\ (n+1) = fib\ n + f\ n\end{aligned}$$

Obter-se-á de imediato

$$\begin{aligned}&fib' = \pi_1 \cdot \mathsf{for}\ loop\ init\ \mathbf{where}\\&\quad loop\ (fib, f) = (f, fib + f)\\&\quad init = (1, 1)\end{aligned}$$

usando as regras seguintes:

- O corpo do ciclo *loop* terá tantos argumentos quanto o número de funções mutuamente recursivas.
- Para as variáveis escolhem-se os próprios nomes das funções, pela ordem que se achar conveniente.[4]
- Para os resultados vão-se buscar as expressões respectivas, retirando a variável n.
- Em *init* coleccionam-se os resultados dos casos de base das funções, pela mesma ordem.

Mais um exemplo, envolvendo polinómios no segundo grau a $x^2 + bx + c$ em $\mathbb{N}_0$. Seguindo o método estudado nas aulas[5], de $f\ x = ax^2 + bx + c$ derivam-se duas funções mutuamente recursivas:

$$\begin{aligned}&f\ 0 = c\\&f\ (n+1) = f\ n + k\ n\\&k\ 0 = a + b\\&k\ (n+1) = k\ n + 2\ a\end{aligned}$$

Seguindo a regra acima, calcula-se de imediato a seguinte implementação, em Haskell:

$$\begin{aligned}&f'\ a\ b\ c = \pi_1 \cdot \mathsf{for}\ loop\ init\ \mathbf{where}\\&\quad loop\ (f, k) = (f + k, k + 2 * a)\\&\quad init = (c, a + b)\end{aligned}$$

Qual é o assunto desta questão, então? Considerem fórmula que dá a série de Taylor da função coseno:

$$cos\ x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i)!} x^{2i}$$

Pretende-se o ciclo-for que implementa a função $cos'\ x\ n$ que dá o valor dessa série tomando i até n inclusivé:

$$cos'\ x = \cdots \cdot \mathsf{for}\ loop\ init\ \mathbf{where}\ \cdots$$

Sugestão: Começar por estudar muito bem o processo de cálculo dado no anexo B para o problema (semelhante) da função exponencial.

Propriedade QuickCheck 4 *Testes de que $cos'\ x$ calcula bem o coseno de π e o coseno de π / 2:*

$$\begin{aligned}&prop\_cos1\ n = n \geqslant 10 \Rightarrow abs\ (cos\ \pi - cos'\ \pi\ n) < 0.001\\&prop\_cos2\ n = n \geqslant 10 \Rightarrow abs\ (cos\ (\pi\ /\ 2) - cos'\ (\pi\ /\ 2)\ n) < 0.001\end{aligned}$$

[3] Lei (3.94) em [2], página 98.
[4] Podem obviamente usar-se outros símbolos, mas numa primeiraleitura dá jeito usarem-se tais nomes.
[5] Secção 3.17 de [2].

Valorização Transliterar cos' para a linguagem C; compilar e testar o código. Conseguia, por intuição apenas, chegar a esta função?

Problema 4

Pretende-se nesta questão desenvolver uma biblioteca de funções para manipular *sistemas de ficheiros* genéricos. Um sistema de ficheiros será visto como uma associação de *nomes* a ficheiros ou *directorias*. Estas últimas serão vistas como sub-sistemas de ficheiros e assim recursivamente. Assumindo que a é o tipo dos identificadores dos ficheiros e directorias, e que b é o tipo do conteúdo dos ficheiros, podemos definir um tipo indutivo de dados para representar sistemas de ficheiros da seguinte forma:

$$\mathbf{data}\ FS\ a\ b = FS\ [(a, Node\ a\ b)]\ \mathbf{deriving}\ (Eq, Show)$$
$$\mathbf{data}\ Node\ a\ b = File\ b \mid Dir\ (FS\ a\ b)\ \mathbf{deriving}\ (Eq, Show)$$

Um caminho (*path*) neste sistema de ficheiros pode ser representado pelo seguinte tipo de dados:

$$\mathbf{type}\ Path\ a = [a]$$

Assumindo estes tipos de dados, o seguinte termo

```
FS [("f1", File "Ola"),
  ("d1", Dir (FS [("f2", File "Ole"),
    ("f3", File "Ole")
    ]))
  ]
```

representará um sistema de ficheiros em cuja raíz temos um ficheiro chamado *f1* com conteúdo `"Ola"` e uma directoria chamada `"d1"` constituída por dois ficheiros, um chamado `"f2"` e outro chamado `"f3"`, ambos com conteúdo `"Ole"`. Neste caso, tanto o tipo dos identificadores como o tipo do conteúdo dos ficheiros é *String*. No caso geral, o conteúdo de um ficheiro é arbitrário: pode ser um binário, um texto, uma colecção de dados, etc.

A definição das usuais funções $inFS$ e $recFS$ para este tipo é a seguinte:

$$inFS = FS \cdot \mathsf{map}\ (id \times inNode)$$
$$inNode = [File, Dir]$$
$$recFS\ f = baseFS\ id\ id\ f$$

Suponha que se pretende definir como um *catamorfismo* a função que conta o número de ficheiros existentes num sistema de ficheiros. Uma possível definição para esta função seria:

$$conta :: FS\ a\ b \to Int$$
$$conta = cataFS\ (sum \cdot \mathsf{map}\ ([\underline{1}, id] \cdot \pi_2))$$

O que é para fazer:

1. Definir as funções $outFS$, $baseFS$, $cataFS$, $anaFS$ e $hyloFS$.
2. Apresentar, no relatório, o diagrama de $cataFS$.
3. Definir as seguintes funções para manipulação de sistemas de ficheiros usando, obrigatoriamente, catamorfismos, anamorfismos ou hilomorfismos:
   (a) Verificação da integridade do sistema de ficheiros (i.e. verificar que não existem identificadores repetidos dentro da mesma directoria).
   $check :: FS\ a\ b \to Bool$

   Propriedade QuickCheck 5 *A integridade de um sistema de ficheiros não depende da ordem em que os últimos são listados na sua directoria:*

   $$prop\_check :: FS\ String\ String \to Bool$$
   $$prop\_check = check \cdot (cataFS\ (inFS \cdot reverse)) \equiv check$$

(b) Recolha do conteúdo de todos os ficheiros num arquivo indexado pelo *path*.
$tar :: FS\ a\ b \to [(Path\ a, b)]$

Propriedade QuickCheck 6 *O número de ficheiros no sistema deve ser igual ao número de ficheiros listados pela função* tar.

$$
\begin{aligned}
&prop\_tar :: FS\ String\ String \to Bool\\
&prop\_tar = \mathsf{length}\ \cdot tar \equiv conta
\end{aligned}
$$

(c) Transformação de um arquivo com o conteúdo dos ficheiros indexado pelo *path* num sistema de ficheiros.
$untar :: [(Path\ a, b)] \to FS\ a\ b$
Sugestão: Use a função $joinDupDirs$ para juntar directorias que estejam na mesma pasta e que possuam o mesmo identificador.

Propriedade QuickCheck 7 *A composição* $tar \cdot untar$ *preserva o número de ficheiros no sistema.*

$$
\begin{aligned}
&prop\_untar :: [(Path\ String, String)] \to Property\\
&prop\_untar = validPaths \Rightarrow ((\mathsf{length}\ \cdot tar \cdot untar) \equiv \mathsf{length}\ )\\
&validPaths :: [(Path\ String, String)] \to Bool\\
&validPaths = (\equiv 0) \cdot \mathsf{length}\ \cdot (filter\ (\lambda(a, \_) \to \mathsf{length}\ \ a \equiv 0))
\end{aligned}
$$

(d) Localização de todos os *paths* onde existe um determinado ficheiro.
$find :: a \to FS\ a\ b \to [Path\ a]$

Propriedade QuickCheck 8 *A composição* $tar \cdot untar$ *preserva todos os ficheiros no sistema.*

$$
\begin{aligned}
&prop\_find :: String \to FS\ String\ String \to Bool\\
&prop\_find = curry\ \$\\
&\quad \mathsf{length}\ \cdot \widehat{find} \equiv \mathsf{length}\ \cdot \widehat{find} \cdot (id \times (untar \cdot tar))
\end{aligned}
$$

(e) Criação de um novo ficheiro num determinado *path*.
$new :: Path\ a \to b \to FS\ a\ b \to FS\ a\ b$

Propriedade QuickCheck 9 *A adição de um ficheiro não existente no sistema não origina ficheiros duplicados.*

$$
\begin{aligned}
&prop\_new :: ((Path\ String, String), FS\ String\ String) \to Property\\
&prop\_new = ((validPath \wedge notDup) \wedge (check \cdot \pi_2)) \Rightarrow\\
&\quad (checkFiles \cdot \widehat{\widehat{new}})\ \mathbf{where}\\
&\quad validPath = (\not\equiv 0) \cdot \mathsf{length}\ \cdot \pi_1 \cdot \pi_1\\
&\quad notDup = \neg \cdot \widehat{elem} \cdot (\pi_1 \times ((\mathsf{fmap}\ \pi_1) \cdot tar))
\end{aligned}
$$

Questão: *Supondo-se que no código acima se substitui a propriedade* $checkFiles$ *pela propriedade mais fraca* $check$*, será que a propriedade* $prop\_new$ *ainda é válida? Justifique a sua resposta.*

Propriedade QuickCheck 10 *A listagem de ficheiros logo após uma adição nunca poderá ser menor que a listagem de ficheiros antes dessa mesma adição.*

$$
\begin{aligned}
&prop\_new2 :: ((Path\ String, String), FS\ String\ String) \to Property\\
&prop\_new2 = validPath \Rightarrow ((\mathsf{length}\ \cdot tar \cdot \pi_2) \leqslant (\mathsf{length}\ \cdot tar \cdot \widehat{\widehat{new}}))\ \mathbf{where}\\
&\quad validPath = (\not\equiv 0) \cdot \mathsf{length}\ \cdot \pi_1 \cdot \pi_1
\end{aligned}
$$

(f) Duplicação de um ficheiro.
$cp :: Path\ a \to Path\ a \to FS\ a\ b \to FS\ a\ b$

Propriedade QuickCheck 11 *A listagem de ficheiros com um dado nome não diminui após uma duplicação.*

$$
\begin{aligned}
&prop\_cp :: ((Path\ String, Path\ String), FS\ String\ String) \to Bool\\
&prop\_cp = \mathsf{length}\ \cdot tar \cdot \pi_2 \leqslant \mathsf{length}\ \cdot tar \cdot \widehat{\widehat{cp}}
\end{aligned}
$$

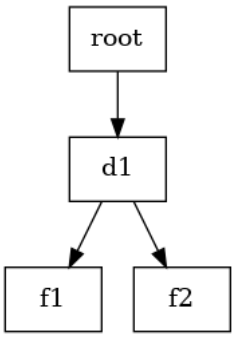


Figura 3: Exemplo de um sistema de ficheiros visualizado em Graphviz.

(g) Eliminação de um ficheiro.
$rm :: Path\ a \to FS\ a\ b \to FS\ a\ b$
Sugestão: Construir um anamorfismo $nav :: (Path\ a, FS\ a\ b) \to FS\ a\ b$ que navegue por um sistema de ficheiros tendo como base o $path$ dado como argumento.

Propriedade QuickCheck 12 *Remover duas vezes o mesmo ficheiro tem o mesmo efeito que o remover apenas uma vez.*

$$prop\_rm :: (Path\ String, FS\ String\ String) \to Bool$$
$$prop\_rm = \widehat{rm} \cdot \langle \pi_1, \widehat{rm} \rangle \equiv \widehat{rm}$$

Propriedade QuickCheck 13 *Adicionar um ficheiro e de seguida remover o mesmo não origina novos ficheiros no sistema.*

$$prop\_rm2 :: ((Path\ String, String), FS\ String\ String) \to Property$$
$$prop\_rm2 = validPath \Rightarrow ((\mathsf{length} \cdot tar \cdot \widehat{rm} \cdot \langle \pi_1 \cdot \pi_1, \widehat{\widehat{new}} \rangle)$$
$$\leqslant (\mathsf{length} \cdot tar \cdot \pi_2))\ \textbf{where}$$
$$validPath = (\not\equiv 0) \cdot \mathsf{length} \cdot \pi_1 \cdot \pi_1$$

Valorização Definir uma função para visualizar em Graphviz a estrutura de um sistema de ficheiros. A Figura 3, por exemplo, apresenta a estrutura de um sistema com precisamente dois ficheiros dentro de uma directoria chamada `"d1"`.

Para realizar este exercício será necessário apenas escrever o anamorfismo

$$cFS2Exp :: (a, FS\ a\ b) \to (Exp\ ()\ a)$$

que converte a estrutura de um sistema de ficheiros numa árvore de expressões descrita em Exp.hs. A função $dotFS$ depois tratará de passar a estrutura do sistema de ficheiros para o visualizador.

Anexos

A Como exprimir cálculos e diagramas em LaTeX/lhs2tex

Estudar o texto fonte deste trabalho para obter o efeito:[6]

$$
\begin{array}{ll}
& id = \langle f, g\rangle \\
\equiv & \quad \{\ \text{universal property}\ \} \\
& \left\{ \begin{array}{l} \pi_1 \cdot id = f \\ \pi_2 \cdot id = g \end{array} \right. \\
\equiv & \quad \{\ \text{identity}\ \} \\
& \left\{ \begin{array}{l} \pi_1 = f \\ \pi_2 = g \end{array} \right. \\
\Box &
\end{array}
$$

Os diagramas podem ser produzidos recorrendo à *package* LaTeX xymatrix, por exemplo:

$$
\begin{array}{ccc}
\mathbb{N}_0 & \xleftarrow{\ \mathsf{in}\ } & 1 + \mathbb{N}_0 \\
{\scriptstyle (\!|g|\!)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle id + (\!|g|\!)} \\
B & \xleftarrow[g]{} & 1 + B
\end{array}
$$

B Programação dinâmica por recursividade múltipla

Neste anexo dão-se os detalhes da resolução do Exercício 3.30 dos apontamentos da disciplina[7], onde se pretende implementar um ciclo que implemente o cálculo da aproximação até $i = n$ da função exponencial $exp\ x = e^x$ via série de Taylor:

$$exp\ x \quad = \quad \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} \tag{1}$$

Seja $e\ x\ n = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!}$ a função que dá essa aproximação. É fácil de ver que $e\ x\ 0 = 1$ e que $e\ x\ (n+1) = e\ x\ n + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$. Se definirmos $h\ x\ n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ teremos $e\ x$ e $h\ x$ em recursividade mútua. Se repetirmos o processo para $h\ x\ n$ etc obteremos no total três funções nessa mesma situação:

$$
\begin{array}{l}
e\ x\ 0 = 1 \\
e\ x\ (n+1) = h\ x\ n + e\ x\ n \\
h\ x\ 0 = x \\
h\ x\ (n+1) = x\ /\ (s\ n) * h\ x\ n \\
s\ 0 = 2 \\
s\ (n+1) = 1 + s\ n
\end{array}
$$

Segundo a *regra de algibeira* descrita na página 3 deste enunciado, ter-se-á, de imediato:

$$
\begin{array}{l}
e'\ x = prj \cdot \mathsf{for}\ loop\ init\ \mathbf{where} \\
\quad init = (1, x, 2) \\
\quad loop\ (e, h, s) = (h + e, x\ /\ s * h, 1 + s) \\
\quad prj\ (e, h, s) = e
\end{array}
$$

[6] Exemplos tirados de [2].
[7] Cf. [2], página 102.

C Código fornecido

Problema 1

Tipos:

```
data Expr = Num Int
  | Bop Expr Op Expr deriving (Eq, Show)
data Op = Op String deriving (Eq, Show)
type Codigo = [String]
```

Functor de base:

```
baseExpr f g = id + (f × (g × g))
```

Instâncias:

```
instance Read Expr where
  readsPrec _ = readExp
```

Read para Exp's:

```
readOp :: String → [(Op, String)]
readOp input = do
  (x, y) ← lex input
  return ((Op x), y)
readNum :: ReadS Expr
readNum = (map (λ(x, y) → ((Num x), y))) · reads
readBinOp :: ReadS Expr
readBinOp = (map (λ((x, (y, z)), t) → ((Bop x y z), t))) ·
  ((readNum `ou` (pcurvos readExp))
    `depois` (readOp `depois` readExp))
readExp :: ReadS Expr
readExp = readBinOp `ou` (
  readNum `ou` (
  pcurvos readExp))
```

Combinadores:

```
depois :: (ReadS a) → (ReadS b) → ReadS (a, b)
depois _ _ [] = []
depois r1 r2 input = [((x, y), i2) | (x, i1) ← r1 input,
  (y, i2) ← r2 i1]
readSeq :: (ReadS a) → ReadS [a]
readSeq r input
  = case (r input) of
    [] → [([], input)]
    l → concat (map continua l)
      where continua (a, i) = map (c a) (readSeq r i)
        c x (xs, i) = ((x : xs), i)
ou :: (ReadS a) → (ReadS a) → ReadS a
ou r1 r2 input = (r1 input) ++ (r2 input)
senao :: (ReadS a) → (ReadS a) → ReadS a
senao r1 r2 input = case (r1 input) of
  [] → r2 input
  l  → l
readConst :: String → ReadS String
readConst c = (filter ((≡ c) · π1)) · lex
pcurvos = parentesis '(' ')'
```

```
prectos = parentesis '[' ']'
chavetas = parentesis '{' '}'
parentesis :: Char → Char → (ReadS a) → ReadS a
parentesis _ _ _ [] = []
parentesis ap pa r input
  = do
    ((_, (x, _)), c) ← ((readConst [ap]) `depois` (
      r `depois` (
      readConst [pa]))) input
    return (x, c)
```

Problema 2

Tipos:

```
type Fig = [(Origem, Caixa)]
type Origem = (Float, Float)
```

"Helpers":

```
col_blue = G.azure
col_green = darkgreen
darkgreen = G.dark (G.dark G.green)
```

Exemplos:

```
ex1Caixas = G.display (G.InWindow "Problema 4" (400, 400) (40, 40)) G.white $
  crCaixa (0, 0) 200 200 "Caixa azul" col_blue
ex2Caixas = G.display (G.InWindow "Problema 4" (400, 400) (40, 40)) G.white $
  caixasAndOrigin2Pict ((Comp Hb bbox gbox), (0.0, 0.0)) where
  bbox = Unid ((100, 200), ("A", col_blue))
  gbox = Unid ((50, 50), ("B", col_green))
ex3Caixas = G.display (G.InWindow "Problema 4" (400, 400) (40, 40)) G.white mtest where
  mtest = caixasAndOrigin2Pict $ (Comp Hb (Comp Ve bot top) (Comp Ve gbox2 ybox2), (0.0, 0.0))
  bbox1 = Unid ((100, 200), ("A", col_blue))
  bbox2 = Unid ((150, 200), ("E", col_blue))
  gbox1 = Unid ((50, 50), ("B", col_green))
  gbox2 = Unid ((100, 300), ("F", col_green))
  rbox1 = Unid ((300, 50), ("C", G.red))
  rbox2 = Unid ((200, 100), ("G", G.red))
  wbox1 = Unid ((450, 200), ("", G.white))
  ybox1 = Unid ((100, 200), ("D", G.yellow))
  ybox2 = Unid ((100, 300), ("H", G.yellow))
  bot = Comp Hb wbox1 bbox2
  top = (Comp Ve (Comp Hb bbox1 gbox1) (Comp Hb rbox1 (Comp H ybox1 rbox2)))
```

A seguinte função cria uma caixa a partir dos seguintes parâmetros: origem, largura, altura, etiqueta e côr de preenchimento.

```
crCaixa :: Origem → Float → Float → String → G.Color → G.Picture
crCaixa (x, y) w h l c = G.Translate (x + (w / 2)) (y + (h / 2)) $ G.pictures [caixa, etiqueta] where
  caixa = G.color c (G.rectangleSolid w h)
  etiqueta = G.translate calc_trans_x calc_trans_y $
    G.Scale calc_scale calc_scale $ G.color G.black $ G.Text l
  calc_trans_x = (−((fromIntegral (length l)) ∗ calc_scale) / 2) ∗ base_shift_x
  calc_trans_y = (−calc_scale / 2) ∗ base_shift_y
  calc_scale = bscale ∗ (min h w)
  bscale = 1 / 700
```

$$base\_shift\_y = 100$$
$$base\_shift\_x = 64$$

Função para visualizar resultados gráficos:

$$display = G.display\ (G.InWindow\ \texttt{"Problema 4"}\ (800, 800)\ (40, 40))\ G.white$$

Problema 4

Funções para gestão de sistemas de ficheiros:

$$concatFS = inFS \cdot \widehat{(+\!\!+)} \cdot (outFS \times outFS)$$
$$mkdir\ (x, y) = FS\ [(x, Dir\ y)]$$
$$mkfile\ (x, y) = FS\ [(x, File\ y)]$$
$$joinDupDirs :: (Eq\ a) \Rightarrow (FS\ a\ b) \to (FS\ a\ b)$$
$$joinDupDirs = anaFS\ (prepOut \cdot (id \times proc) \cdot prepIn)\ \textbf{where}$$
$$\quad prepIn = (id \times (\mathsf{map}\ \ (id \times outFS))) \cdot sls \cdot (\mathsf{map}\ \ distr) \cdot outFS$$
$$\quad prepOut = (\mathsf{map}\ \ undistr) \cdot \widehat{(+\!\!+)} \cdot ((\mathsf{map}\ \ i_1) \times (\mathsf{map}\ \ i_2)) \cdot (id \times (\mathsf{map}\ \ (id \times inFS)))$$
$$\quad proc = concat \cdot (\mathsf{map}\ \ joinDup) \cdot groupByName$$
$$\quad sls = \langle lefts, rights \rangle$$
$$joinDup :: [(a, [b])] \to [(a, [b])]$$
$$joinDup = cataList\ [nil, g]\ \textbf{where}\ g = return \cdot \langle \pi_1 \cdot \pi_1, concat \cdot (\mathsf{map}\ \ \pi_2) \cdot \widehat{(:)} \rangle$$
$$createFSfromFile :: (Path\ a, b) \to (FS\ a\ b)$$
$$createFSfromFile\ ([a], b) = mkfile\ (a, b)$$
$$createFSfromFile\ (a : as, b) = mkdir\ (a, createFSfromFile\ (as, b))$$

Funções auxiliares:

$$checkFiles :: (Eq\ a) \Rightarrow FS\ a\ b \to Bool$$
$$checkFiles = cataFS\ (\widehat{(\wedge)} \cdot \langle f, g \rangle)\ \textbf{where}$$
$$\quad f = nr \cdot (\mathsf{fmap}\ \pi_1) \cdot lefts \cdot (\mathsf{fmap}\ distr)$$
$$\quad g = and \cdot rights \cdot (\mathsf{fmap}\ \pi_2)$$
$$groupByName :: (Eq\ a) \Rightarrow [(a, [b])] \to [[(a, [b])]]$$
$$groupByName = (groupBy\ (curry\ p))\ \textbf{where}$$
$$\quad p = \widehat{(\equiv)} \cdot (\pi_1 \times \pi_1)$$
$$filterPath :: (Eq\ a) \Rightarrow Path\ a \to [(Path\ a, b)] \to [(Path\ a, b)]$$
$$filterPath = filter \cdot (\lambda p \to \lambda(a, b) \to p \equiv a)$$

Dados para testes:

- Sistema de ficheiros vazio:

$$efs = FS\ []$$

- Nível 0

$$f1 = FS\ [(\texttt{"f1"}, File\ \texttt{"hello world"})]$$
$$f2 = FS\ [(\texttt{"f2"}, File\ \texttt{"more content"})]$$
$$f00 = concatFS\ (f1, f2)$$
$$f01 = concatFS\ (f1, mkdir\ (\texttt{"d1"}, efs))$$
$$f02 = mkdir\ (\texttt{"d1"}, efs)$$

- Nível 1

$$f10 = mkdir\ (\texttt{"d1"}, f00)$$
$$f11 = concatFS\ (mkdir\ (\texttt{"d1"}, f00), mkdir\ (\texttt{"d2"}, f00))$$
$$f12 = concatFS\ (mkdir\ (\texttt{"d1"}, f00), mkdir\ (\texttt{"d2"}, f01))$$
$$f13 = concatFS\ (mkdir\ (\texttt{"d1"}, f00), mkdir\ (\texttt{"d2"}, efs))$$

- Nível 2

$$
\begin{aligned}
&f20 = mkdir\ (\texttt{"d1"}, f10)\\
&f21 = mkdir\ (\texttt{"d1"}, f11)\\
&f22 = mkdir\ (\texttt{"d1"}, f12)\\
&f23 = mkdir\ (\texttt{"d1"}, f13)\\
&f24 = concatFS\ (mkdir\ (\texttt{"d1"}, f10), mkdir\ (\texttt{"d2"}, f12))
\end{aligned}
$$

- Sistemas de ficheiros inválidos:

$$
\begin{aligned}
&ifs0 = concatFS\ (f1, f1)\\
&ifs1 = concatFS\ (f1, mkdir\ (\texttt{"f1"}, efs))\\
&ifs2 = mkdir\ (\texttt{"d1"}, ifs0)\\
&ifs3 = mkdir\ (\texttt{"d1"}, ifs1)\\
&ifs4 = concatFS\ (mkdir\ (\texttt{"d1"}, ifs1), mkdir\ (\texttt{"d2"}, f12))\\
&ifs5 = concatFS\ (mkdir\ (\texttt{"d1"}, f1), mkdir\ (\texttt{"d1"}, f2))\\
&ifs6 = mkdir\ (\texttt{"d1"}, ifs5)\\
&ifs7 = concatFS\ (mkdir\ (\texttt{"d1"}, f02), mkdir\ (\texttt{"d1"}, f02))
\end{aligned}
$$

Visualização em Graphviz:

$$
\begin{aligned}
&dotFS :: FS\ String\ b \to \mathsf{IO}\ ExitCode\\
&dotFS = dotpict \cdot bmap\ \underline{\texttt{""}}\ id \cdot (cFS2Exp\ \texttt{"root"})
\end{aligned}
$$

Outras funções auxiliares

Lógicas:

$$
\begin{aligned}
&\textbf{infixr}\ 0 \Rightarrow\\
&(\Rightarrow) :: (Testable\ prop) \Rightarrow (a \to Bool) \to (a \to prop) \to a \to Property\\
&p \Rightarrow f = \lambda a \to p\ a \Rightarrow f\ a\\
&\textbf{infixr}\ 0 \Leftrightarrow\\
&(\Leftrightarrow) :: (a \to Bool) \to (a \to Bool) \to a \to Property\\
&p \Leftrightarrow f = \lambda a \to (p\ a \Rightarrow property\ (f\ a))\ .\&\&.\ (f\ a \Rightarrow property\ (p\ a))\\
&\textbf{infixr}\ 4 \equiv\\
&(\equiv) :: Eq\ b \Rightarrow (a \to b) \to (a \to b) \to (a \to Bool)\\
&f \equiv g = \lambda a \to f\ a \equiv g\ a\\
&\textbf{infixr}\ 4 \leqslant\\
&(\leqslant) :: Ord\ b \Rightarrow (a \to b) \to (a \to b) \to (a \to Bool)\\
&f \leqslant g = \lambda a \to f\ a \leqslant g\ a\\
&\textbf{infixr}\ 4 \wedge\\
&(\wedge) :: (a \to Bool) \to (a \to Bool) \to (a \to Bool)\\
&f \wedge g = \lambda a \to ((f\ a) \wedge (g\ a))
\end{aligned}
$$

Compilação e execução dentro do interpretador:[8]

$$
run = \textbf{do}\ \{system\ \texttt{"ghc cp1819t"}; system\ \texttt{"./cp1819t"}\}
$$

D Soluções dos alunos

Os alunos devem colocar neste anexo as suas soluções aos exercícios propostos, de acordo com o "layout"que se fornece. Não podem ser alterados os nomes ou tipos das funções dadas, mas pode ser adicionado texto e/ou outras funções auxiliares que sejam necessárias.

[8] Pode ser útil em testes envolvendo Gloss. Nesse caso, o teste em causa deve fazer parte de uma função $main$.

Problema 1

O problema 1 tem como tema a construção de um programa de compiladores com base numa linguagem funcional, recorrendo a cata/ana/hilo-morfismos da linguagem em causa.

De modo a resolvê-lo tivemos de definir algumas funções que nos ajudaram a implementar as soluções das respetivas alíneas.

$$
\begin{aligned}
&inExpr :: Int + (Op, (Expr, Expr)) \to Expr\\
&inExpr = [Num, bop']\\
&\quad \textbf{where } bop'\ (o, (e_1, e_2)) = Bop\ e_1\ o\ e_2\\
&outExpr :: Expr \to Int + (Op, (Expr, Expr))\\
&outExpr\ (Num\ a) = i_1\ (a)\\
&outExpr\ (Bop\ e_1\ o\ e_2) = i_2\ (o, (e_1, e_2))\\
&recExpr\ f = id + (id \times (f \times f))\\
&cataExpr\ g = g \cdot (recExpr\ (cataExpr\ g)) \cdot outExpr\\
&anaExpr\ g = inExpr \cdot recExpr\ (anaExpr\ g) \cdot g\\
&hyloExpr\ h\ g = cataExpr\ h \cdot anaExpr\ g
\end{aligned}
$$

Estas funções, nomeadamente $inExpr$, $outExpr$, $recExpr$, $cataExpr$, $anaExpr$ e $hyloExpr$, podem ser deduzidas a partir do Tipo de Dados em questão, com o auxílio dos conhecimentos adquiridos na unidade curricular de Cálculo de Programas, bem como de alguns diagramas específicos.

Uma vez que uma Expr é um $Num\ Int$ ou $Bop\ Expr\ Op\ Expr$ sabemos que o $inExpr$ e o $outExpr$ deverão "construir"ou "desconstruir"a Expr, respetivamente, logo, conseguimos representar os diagramas:

$$Expr \xleftarrow[inExpr]{} Int + (Op \times (Expr \times Expr))$$

$$Expr \xrightarrow[outExpr]{} Int + (Op \times (Expr \times Expr))$$

Assim, conseguimos concluir que as definições das referidas funções são:

$$inExpr = [Num, bop']\textbf{where } bop'\ (o, (e_1, e_2)) = Bop\ e_1\ o\ e_2$$

$$
\begin{aligned}
&outExpr\ (Num\ a) = i_1\ (a)\\
&outExpr\ (Bop\ e_1\ o\ e_2) = i_2\ (o, (e_1, e_2))
\end{aligned}
$$

Quanto às restantes funções, $recExpr$, $cataExpr$, $anaExpr$ e $hyloExpr$, estas foram deduzidas através do diagrama que podemos observar infra.

$$
\begin{array}{ccc}
Expr & \xrightarrow{\quad g \quad} & Int + (Op \times (Expr \times Expr)) \\
{\scriptstyle anaExpr\ g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle recExpr\ (anaExpr\ g)} \\
Expr & \underset{inExpr}{\overset{outExpr}{\longleftarrow}} & Int + (Op \times (Expr \times Expr)) \\
{\scriptstyle cataExpr\ h}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle recExpr\ (cataExpr\ h)} \\
Expr & \xleftarrow[h]{} & Int + (Op \times (Expr \times Expr))
\end{array}
$$

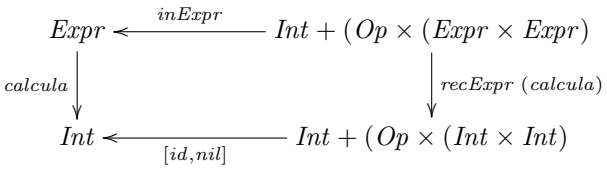
Pelo que, definimos cada uma dessas funções como:

$$
\begin{aligned}
&recExpr\ f = id + (id \times (f \times f))\\
&cataExpr\ h = h \cdot (recExpr\ (cataExpr\ h)) \cdot outExpr\\
&anaExpr\ g = inExpr \cdot (recExpr\ (anaExpr\ g)) \cdot g\\
&hyloExpr\ h\ g = cataExpr\ h \cdot anaExpr\ g
\end{aligned}
$$

Na resolução das questões seguintes deste problema recorremos a alguns diagramas, através dos quais retiramos a definição de cada uma das funções que se pede.

1. Função *calcula*

   O objetivo da função *calcula* é calcular o valor de uma expressão, pelo que o seu diagrama é:



   O objetivo é descobrir o gene g, para assim termos a definição final com algo do género $calcula = cataExpr\ g$.

   Observando a expressão que obtemos após a aplicação do functor *recExpr* e sabendo que o resultado final terá de ser o calculo da expressão em causa, deduzimos que o g terá que ser um "either", $g = [id, junta]$. Assim, do lado direito irá devolver o *Int* e do outro tratar $(Op \times (Int \times Int)$, consoante a operação aritmética em causa. Desta feita, a função *calcula* é:

```
calcula :: Expr → Int
calcula e = cataExpr [id, junta] e
  where junta (Op op, (n1 , n2)) | op ≡ "+" = n1 + n2
    | op ≡ "-" = n1 − n2
    | op ≡ "∗" = n1 ∗ n2
    | op ≡ "/" = n1 `div` n2
```

2. Função *compile*

   Esta função trata-se efetivamente de um compilador, em que é gerado código posfixo para uma stack. Na verdade, a stack calcula o valor da string, devolvendo a lista de todas as operações que são feitas e a quais algaritmos por uma ordem posfixa. Para podermos definir esta função como um catamorfismo de *Expr* tivemos de transformar a *String* que nos foi passada como parâmetro para a função *compile* numa *Expr*. Essa alteração de tipos só foi conseguida graças à função *readExp* fornecida no Anexo C. Com efeito, para obtermos uma *Expr* a partir de uma String dada aplicamos à nossa *String* a função *readExp* e ao retorno desta última aplicamos o referido catamorfismo de *Expr* que adiante explicitaremos. Ademais, criamos uma função auxiliar que denominamos de *calculation*, a qual transforma todas as possíveis operações aritméticas em listas de *Strings*, conforme podemos verificar infra.

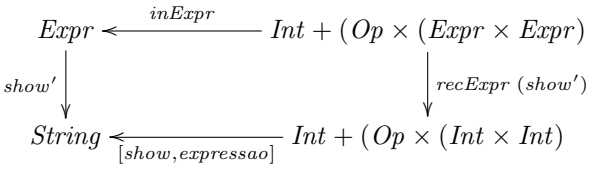
```
calculation :: String → Codigo
calculation "+" = ["ADD"]
calculation "∗" = ["MULT"]
calculation "-" = ["MINUS"]
calculation "/" = ["DIV"]
```

   Finalmente, passamos a construir a nossa função compile enquanto um catamorfismo de *Expr*. Na verdade, o referido catamorfismo recebe como parâmetro a função g, cuja definição é um $[inteiro, op]$. Por um lado, *inteiro* "faz um push de um número", por exemplo,`["PUSH 4"]`, para stack, por outro lado, o *op* "empurra" para a stack a operação aritmética correspondente. Face ao exposto, a nossa função compile definida como um catamorfismo de *Expr* fica desta forma:

```
compile :: String → Codigo
compile = cataExpr [inteiro, op] · strings
  where strings = π1 · head · readExp
    inteiro x = ["PUSH" ++ show x]
    op (Op x, (y, z)) = y ++ z ++ (calculation x)
```

3. Função $show'$

   Esta função gera a representação textual de uma $Expr$, sendo o seu retorno uma $String$ que representa uma expressão aritmética. Para definir a nossa função $show'$ utilizamos um catamorfismo, cujo gene é definido como um 'either", em particular, $g = [show, expressao]$. O catamorfismo da função $cataExpr$ é definido como uma sucessão de funções, no caso, é aplicada a função g após a aplicação do $Functor$ das $Expr$ ao retorno da função $outExpr$. Assim, apesar da função $show'$ receber como parâmetro uma $Expr$, quando a função $cataExpr$ é aplicada, o seus tipos de entrada são $(Int + (Op \times (Int \times Int)))$. Esta descrição é melhor compreendida através da visualização do diagrama do referido catamorfismo que de seguida se apresenta.

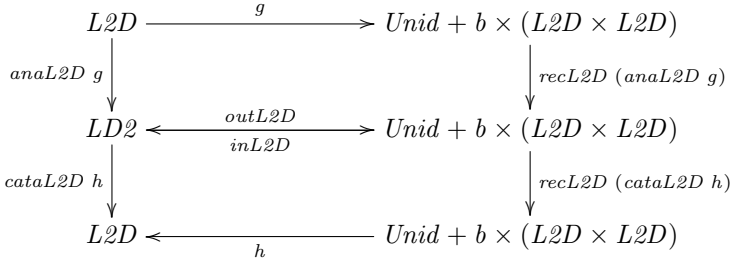


   Assim, caso a entrada para a nossa função gene do catamorfismo,g, seja um número inteiro aplicamos a função $show$, já definida nas bibliotecas do Haskell, na hipótese de ser do tipo $(Op \times (Int \times Int)$ geramos uma expressão aritmética, ficando $(Int\ Op\ Int)$. Desta feita, a nossa função $show'$ fica assim definida:

```
show' :: Expr → String
show' = cataExpr [show, expressao]
  where expressao (Op op, (a, b)) = "(" ++ a ++ "  " ++ op ++ "  " ++ b ++ ")"
```

Problema 2

Para a resolução do nosso problema 2 como cata/ana/hilo-morfismos aprendidos na disciplina de Cálculo de Programas, definimos as funções $inL2D$, $outL2D$, $recL2D$, $cataL2D$, $anaL2D$ e $hyloL2D$. De facto, são as corretas composições destas funções que permitem resolver este problema como um cata, ana ou hilomorfismo. Com efeito, o diagrama genérico destes três sistemas de composição de funções é:



Contudo, por falta de tempo não conseguimos responder inteiramente a esta questão, tendo apenas conseguido gerar o seguinte programa em linguagem Haskell sem nos socorrermos de nenhum cata/ana ou hilomorfismo. Todavia, isso não nos impediu de demonstrar que sabemos deduzir as funções $inL2D$, $outL2D$, $recL2D$, $cataL2D$, $anaL2D$ e $hyloL2D$. Estas funções foram alcançadas através do diagrama supra representado.

```
inL2D :: a + (b, (X a b, X a b)) → X a b
inL2D = [Unid, uncurryComp]
  where uncurryComp (b, (x1, x2)) = Comp b x1 x2
outL2D :: X a b → a + (b, (X a b, X a b))
outL2D (Unid a) = i1 (a)
outL2D (Comp b x1 x2) = i2 (b, (x1, x2))
recL2D f = id + (id × (f × f))
```

```
cataL2D g = g · (recL2D (cataL2D g)) · outL2D
anaL2D g = inL2D · (recL2D (anaL2D g)) · g
hyloL2D h g = cataL2D h · anaL2D g
collectLeafs :: X a b → [a]
collectLeafs (Unid a) = [a]
collectLeafs (Comp b x1 x2) = collectLeafs x1 ++ collectLeafs x2
myex1, myex2, myex3, myex4 :: L2D
myex1 = Unid ((100, 300), ("F", col_green))
myex2 = Comp Ve b1 b2
  where b1 = Unid ((100, 300), ("F", col_green))
        b2 = Unid ((200, 300), ("H", col_green))
myex3 = Comp Hb (Comp Ve b1 b2) (Comp Ve b3 b4)
  where b1 = Unid ((100, 300), ("F", col_green))
        b2 = Unid ((200, 300), ("H", col_green))
        b3 = Unid ((300, 300), ("E", col_green))
        b4 = Unid ((400, 300), ("G", col_green))
myex4 = Comp Hb (Comp Ve b1 b2) (b3)
  where b1 = Unid ((100, 300), ("F", col_green))
        b2 = Unid ((200, 300), ("H", col_green))
        b3 = Unid ((300, 300), ("G", col_green))
ex3 :: L2D
ex3 = Comp Hb (Comp Ve bot top) (Comp Ve gbox2 ybox2)
  where bbox1 = Unid ((100, 200), ("A", col_blue))
        bbox2 = Unid ((150, 200), ("E", col_blue))
        gbox1 = Unid ((50, 50), ("B", col_green))
        gbox2 = Unid ((100, 300), ("F", col_green))
        rbox1 = Unid ((300, 50), ("C", col_green))
        rbox2 = Unid ((200, 100), ("G", col_green))
        wbox1 = Unid ((450, 200), ("", col_green))
        ybox1 = Unid ((100, 200), ("D", col_green))
        ybox2 = Unid ((100, 300), ("H", col_green))
        bot = Comp Hb wbox1 bbox2
        top = (Comp Ve (Comp Hb bbox1 gbox1) (Comp Hb rbox1 (Comp H ybox1 rbox2)))
  -- é o ponto final do LD2, i e, o ponto onde começa a ultima caixa
  --
```

A função

```
v :: Int → Int → Int
v l1 l2 | l1 ⩾ l2 = l1
  | otherwise = l1 + (l2 `div` 2)
calcAux :: Tipo → (Int, Int) → (Int, Int) → (Int, Int)
calcAux V (l1, a1) (l2, a2) = (v l1 l2, a1 + a2)
calcAux Vd (l1, a1) (l2, a2) = (max l1 l2, a1 + a2)
calcAux Ve (l1, a1) (l2, a2) = (max l1 l2, a1 + a2)
calcAux Hb (l1, a1) (l2, a2) = (l1 + l2, max a1 a2)
calcAux Ht (l1, a1) (l2, a2) = (l1 + l2, a1 + a2)
calcAux H (l1, a1) (l2, a2) = (l1 + l2, v a1 a2)
dimen :: X Caixa Tipo → (Int, Int)
dimen (Unid ((largura, altura), _)) = (largura, altura)
dimen (Comp tipo esq dir) = calcAux tipo (dimen esq) (dimen dir)
pprint :: X (Caixa, Origem) () → String
pprint (Unid (((_, (x, _))), origem)) = "// Caixa: " ++ x ++ "  " ++ show origem ++ "  |  -  |  "
pprint (Comp tipo esq dir) = pprint esq ++ pprint dir
calcOrigins :: ((X Caixa Tipo), Origem) → X (Caixa, Origem) ()
calcOrigins (Unid caixa, origem) = Unid (caixa, origem)
```

```
calcOrigins ((Comp tipo esq (Unid ((largura, altura), x))), origem) = (Comp () esq' dir')
  where
    esq' = calcOrigins (esq, origem)
    dir' = calcOrigins ((Unid ((largura, altura), x)), calc tipo origem (fromIntegral largura, fromIntegral altura))
calcOrigins ((Comp tipo esq dir), origem) = (Comp () esq' dir')
  where
    esq' = calcOrigins (esq, origem)
    dir' = calcOrigins (dir, calc tipo origem (0, 0))
  -- O princípio base é que a origem de um rectangulo corresponde ao seu canto inferior
  -- esquerdo: a partir disto, dados dois rectangulos (a,b)
  -- Quanto à função calc: considere duas caixas a) e b). Sabendo a posição absoluta
  -- da caixa a), as suas dimensões, e a posição relativa da caixa b) em relação
  -- à caixa a), a função, calc :: Tipo -¿ Origem -¿ (Float, Float) -¿ Origem,
  -- determina onde colocar a caixa b), i.e. a sua posição absoluta.
  -- (Float, Float) deveria ser (Int, Int)
calc :: Tipo → Origem → (Float, Float) → Origem
calc Hb (x, y) (largura, altura) = (x + largura, y)
calc Ht (x, y) (largura, altura) = (x + largura, y + altura)
calc H (x, y) (largura, altura) = (x + largura, y + (altura / 2))
calc Vd (x, y) (largura, altura) = (x + largura, y + altura)
calc Ve (x, y) (largura, altura) = (x, y + altura)
calc V (x, y) (largura, altura) = (x + (largura / 2), y + altura)
  -- agrupa as caixas numa lista com as origens e caixas
agrup_caixas :: X (Caixa, Origem) () → Fig
agrup_caixas (Unid (caixa, origem)) = [(origem, caixa)]
agrup_caixas (Comp () esq dir) = agrup_caixas esq ++ agrup_caixas dir
fl :: (Float, Float)
fl = (1.0, 1.0)
sfl :: Float
sfl = 1.0
```

Segundo problema

Função display é dada pelo professor a Funcao caixasAndOrigin2Pict e após isso usa o diplay para apresentar a imagem em formato gráfico

```
mostra_caixas :: (L2D, Origem) → IO ()
mostra_caixas = display · caixasAndOrigin2Pict
```

auxiliar da função mostra$_caixasCalculainicialmenteasorignesdecadaumadasimagensusandoafuncaocalcOrigins$
$seafunçãoajudantequecolocatodasascaixaseorigensnumalistadepicturesusandoaSugestãodeutilizaraG.pictures, tra$
$sedepoisalistaretornadapela"ajudante"[Pictures]numaPicture$

```
caixasAndOrigin2Pict :: (X Caixa Tipo, Origem) → G.Picture
caixasAndOrigin2Pict = G.Pictures · ajudante · agrup_caixas · calcOrigins
```

Funcao que recebe uma lista de caixas com origens Para cada elemento da lista (Caixa,Origem), usamos a funcao dada "crCaixa"

```
ajudante [] = []
ajudante ((o, ((w, h), (t, c))) : xs)
   = crCaixa o (fromIntegral w) (fromIntegral h) t c : ajudante xs
```

Problema 3

O objetivo deste problema é implementar o ciclo for que implementa a função $cos'\ x\ n$ usando várias funções mutuamente recursivas. No caso em concreto, utilizamos quatro funções recursivas: e, h, s e a t, as quais foram derivadas a partir da série de Taylor da função cosseno apresentada. Assim, com base nas regras e métodos estudados na disciplina, deduzimos a seguinte implementação em Haskell:

cos' x = prj . for loop init where
loop (e, h, s, t) = (e + h, h * ((-1) * x^2) /s, s + t, t + 8)
init = (1, -1/2 * x^2, 12, 18)
prj(e, h, s, t) = e

A forma como encontramos estas funções foi calculando, a partir da função $cos\ x\ n$ derivamos as quatro funções que se seguem.

$$e\ x0 = \sum_{n=0}^{0} \frac{(-1)^0}{(2*0)!} x^{2*0}$$

$$e\ x(n+1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + \frac{(-1)^{(n+1)}}{(2(n+1))!} * x^{2(n+1)}$$

Se definirmos h x n como

$$hxn = x^{2(n+1)} * \frac{(-1)^{(n+1)}}{(2(n+1))!}$$

temos $e\ x$ e $h\ x$ em recursividade mútua,

$$h\ x0 = \frac{-1}{2} * x^2$$

$$h\ x(n+1) = hxn * \frac{(-1) * x^2}{((2n+3) * (2n+4)}$$

Aplicando o mesmo raciocínio e definindo $s\ n$ como

$$s\ n = (2n+3) * (2n+4)$$

temos três funções em recursividade mútua, sendo que

$$s\ 0 = 12$$
$$s\ (n+1) = s\ n + 8\ n + 18$$

Finalmente, se fixarmos que

$$t\ n = 8n + 18$$

então,

$$t\ 0 = 18$$
$$t\ (n+1) = tn + 18$$

Daqui resulta que obtemos as seguintes quatro funções recursivas:

$$e\ 0 = 1$$
$$e\ (n+1) = +\ h\ n$$

$$h\ 0 = -1\ /\ 2 * (x * x)$$
$$h\ (n+1) = +\ s\ n$$

$$s\ 0 = 12$$
$$s\ (n+1) = s\ n + 8\ n + 18$$

$$t\ 0 = 18$$
$$t\ (n+1) = t\ n + 8$$

cuja definição, em linguagem Haskell, será implementada como:

```
cos' x = prj . for loop init where
loop (e,h,s,t) = (e + h, h * ((-1) * x ↑ 2) / s, s + t, t + 8)
init = (1, -1 / 2 * x ↑ 2, 12, 18)
prj (e,h,s,t) = e
```

Problema 4

Triologia "ana-cata-hilo":

O último problema prende-se com o desenvolvimento de uma biblioteca de funções que manipula ficheiros. Esta

1. Definição das funções $outFS$, $baseFS$, $cataFS$, $anaFS$ e $hyloFS$

   Para definirmos estas funções começamos por analisar o tipo de dados $FS\ a\ b$ e $Node\ a\ b$, sendo que cada um dos tipos de dados depende do outro. A função $outFS$ transforma FS em $[(a, (b + FS\ a\ b))]$ e a função $outNode$ devolve o conteúdo de um ficheiro ou uma diretoria. Os respetivos diagramas destas funções são:

$$FS \xrightarrow[outFS]{} [a \times (b + FS)]$$

$$Node\ a\ b \xrightarrow[outNode]{} A + FS\ a\ b$$

```
outFS (FS l) = map x l
  where
    x (a, File b) = (a, i1 b)
    x (a, Dir b) = (a, i2 b)
outNode (File conteudo) = i1 conteudo
outNode (Dir b) = i2 b
baseFS f g h = map (f × (g + h))
cataFS :: ([(a, b + c)] → c) → FS a b → c
cataFS g = g . (baseFS id id (cataFS g)) . outFS
anaFS :: (c → [(a, b + c)]) → c → FS a b
anaFS g = inFS . (baseFS id id (anaFS g)) . g
```

2. *Diagrama de cataFS*

   O diagrama do cataFS é representado infra. De acordo com o referido diagrama o tipo de dados FS quando serve de entrada à função

$$\begin{array}{ccc} FS\ a\ b & \xleftarrow{inFS} & [(A \times (B + FS\ a\ b))] \\ \Big\downarrow{\scriptstyle cataFS\ g} & & \Big\downarrow{\scriptstyle baseFS\ id\ id\ (g)} \\ C & \xleftarrow[g]{} & [(A \times (B + C))] \end{array}$$

Outras funções pedidas: A nossa função check não foi definida como um catamorfismo. Esta função vai verifica se em cada diretoria existe identificadores de ficheiros repetidos.

$$
\begin{aligned}
&check :: (Eq\ a) \Rightarrow FS\ a\ b \rightarrow Bool \\
&check\ (FS\ [\,]) = True \\
&check\ (FS\ ((x, File\ y) : t)) = checkFiles\ (FS\ ((x, File\ y) : t)) \wedge \\
&\qquad check\ (FS\ t) \\
&check\ (FS\ ((x, Dir\ diretoria) : t)) = checkFiles\ (FS\ ((x, Dir\ diretoria) : t)) \wedge \\
&\qquad checkFiles\ diretoria \wedge \\
&\qquad check\ (FS\ t)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&tar :: FS\ a\ b \rightarrow [(Path\ a, b)] \\
&tar = \bot
\end{aligned}
$$

A função novoFich pega numa lista de identificadores do ficheiro e diretorias e e coloca o ficheiro dentro da mesma. A função auxUntar devolve o caso nil, como tal apenas devolve o caso vazio. Através do catamorfismo de listas a função untar cria uma $FS\ \ a\ \ b$ e usando joinDupDirs para juntar directorias que estejam na mesma pasta e que possuam o mesmo identificador.

$$
\begin{aligned}
&untar :: (Eq\ a) \Rightarrow [(Path\ a, b)] \rightarrow FS\ a\ b \\
&untar = joinDupDirs \cdot cataList\ [auxUntar, novoFich] \\
&novoFich :: (([a], b), FS\ a\ b) \rightarrow FS\ a\ b \\
&novoFich\ (([x], b), FS\ l) = FS\ ((x, File\ b) : l) \\
&novoFich\ (((h : t), b), FS\ l) = FS\ (singl\ (h, Dir\ (novoFich\ ((t, b), FS\ l)))) \\
&auxUntar :: () \rightarrow FS\ a\ b \\
&auxUntar\ () = FS\ [\,] \\
&find :: (Eq\ a) \Rightarrow a \rightarrow FS\ a\ b \rightarrow [Path\ a] \\
&find\ a = \bot \\
&new :: (Eq\ a) \Rightarrow Path\ a \rightarrow b \rightarrow FS\ a\ b \rightarrow FS\ a\ b \\
&new = \bot \\
&cp :: (Eq\ a) \Rightarrow Path\ a \rightarrow Path\ a \rightarrow FS\ a\ b \rightarrow FS\ a\ b \\
&cp = \bot \\
&rm :: (Eq\ a) \Rightarrow (Path\ a) \rightarrow (FS\ a\ b) \rightarrow FS\ a\ b \\
&rm = \bot \\
&auxJoin :: ([(a, b + c)], d) \rightarrow [(a, b + (d, c))] \\
&auxJoin = \bot \\
&cFS2Exp :: a \rightarrow FS\ a\ b \rightarrow (Exp\ ()\ a) \\
&cFS2Exp = \bot
\end{aligned}
$$

Índice

Referências

[1] D.E. Knuth. *Literate Programming*. CSLI Lecture Notes Number 27. Stanford University Center for the Study of Language and Information, Stanford, CA, USA, 1992.

[2] J.N. Oliveira. *Program Design by Calculation*, 2018. Draft of textbook in preparation. viii+297 pages. Informatics Department, University of Minho.