Métodos Numéricos e Otimização não Linear

⊗ não há faltas (mas há registo de faltas)

MATLAB (otimização)

- formulário, máquina de calcular

- 2 Testes teóricos Σ 7.25 (nota mínima) de 15 valores
- 2 Testes PL MATLAB 5 valores (2.5 cada)
  Σ 2.25 (nota mínima)

exame 15 7.25 (nota mínima)

Matemática	Matlab
$2x$	2*x
x^2	x^2
e^{-x}	exp(-x)
$\ln(x)$	log(x)
$\log(x)$	log10(x)
$\sqrt{x}$	sqrt(x)
$\sin(x)$	sin(x)
$\lvert x\rvert$	abs(x)
π	pi
1×10^{-5}	1e-5

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

A = [1 2 3 ; 4 5 6]

A = [1 2 3
4 5 6]

A.^2 ⇒ elementos da matriz A ao quadrado
⇕
A.*A

i = 1:20 ⇒ vetor de 1 a 20
j = 1:2:7 ⇒ 1 3 5 7
↳ incremento 2
k = 100:-1:1

⊗ ezplot ('sin(x)') ⇒ gráfico de linhas

⊗ ezsurf ('peaks') ⇒ gráfico (3D) de níveis

⊗ ezsurfc ⇒ dá também os contornos (máx e min)

⊗ ezcontour ('peaks') ⇒ só contornos

- clear ⇒ limpa variáveis
- clc ⇒ limpa ecrã

Ficha 1. Introdução ao MATLAB

1.1. c) m = 1:10

d) m = 2:2:12

1.2.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

a) B = A(2:3, 1:2)

linha 2 a 3 ↳ coluna 1 a 2 da matriz A

$$B = \begin{matrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{matrix}$$

b) C = A(:, 1:2)

↳ coluna 1 a 2 da matriz A

$$C = \begin{matrix} 2 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{matrix}$$

c) D = A[A; 4 4 4]

↳ adiciona linha 444 à matriz A

$$D = \begin{matrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 4 & 4 & 4 \end{matrix}$$

d) E = D([2, 4], :)

↳ linha 2 e 4 da matriz D

$$E = \begin{matrix} 4 & 5 & 6 \\ 4 & 4 & 4 \end{matrix}$$

e) F = [0:3:9, 2:2:8, 5:5:20]

$$F = \begin{matrix} 0 & 3 & 6 & 9 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 5 & 10 & 15 & 20 \end{matrix}$$

1.3. a) eye(5)
b) rand(3)
c) randi([-1 1], 3, 4)
d) zeros(2, 3)
e) ones(2)
f)
g) diag(diag(A))

1.4.

1.5.
```
function [s, p] = somme(a, b)
    s = a + b;
    p = a * b;
end
```

```
>> [soma, produto] = somme(10, 15)
   soma = 25
   produto = 150
```

⊗ $d_x = |\bar{x} - x|$ ⇒ Erro absoluto $\leq \delta_x$

valor exato ($\bar{x}$)

valor aproximado (x)

δ_x ⇒ limite superior do erro

$\bar{x} \in [x - \delta_x, x + \delta_x]$ ⇒ intervalo de incerteza

⊗ $r_x = \dfrac{|\bar{x} - x|}{|\bar{x}|}$ ⇒ Erro relativo

$r_x \simeq \dfrac{|\bar{x} - x|}{|x|} \leq \dfrac{\delta_x}{|x|}$ ($100\% r_x$ ⇒ percentagem)

⊗ Algarismos significativos ⇒ quais podemos confiar

1. Calcular limite superior do erro absoluto

Ex.: $x = 0.501234 \times 10^2$ $\quad\quad \delta_x = 0.5 \times 10^{-3}$

$x = \underbrace{50123.}_{\text{Algarismos significativos}}4 \times 10^{-3}$

$x = 0.0027604$ $\quad\quad$ 276 ⇒ algarismos significativos

$\delta_x = 0.0000050$

Ex1.

$f(x, y, z) = -x + y^2 + \operatorname{sen}(z)$

$x = 1.1$ $\quad\quad y = 2.04$ $\quad\quad z = 0.5$ rad

$\delta_x = 0.05$ $\quad\quad \delta_y = 0.005$ $\quad\quad \delta_z = 0.05$

$f(x, y, z) = -1.1 + 2.04^2 + \operatorname{sen}(0.5) = 3.5410255386$

$$I = \begin{cases} 1.05 \le \bar{x} \le 1.15 \\ 2.035 \le \bar{y} \le 2.045 \\ 0.45\,rad \le \bar{z} \le 0.55\,rad \end{cases}$$

$x = 1.1$ $\quad \delta x = 0.05$

$y = 2.04$ $\quad \delta y = 0.005$ $\qquad f = -x + y^2 + \sin(z)$

$z = 0.5$ $\quad \delta z = 0.05$

⇓

método da última casa decimal

$$\left|\frac{\delta f}{\delta x}\right| = |-1| \qquad M_x = 1$$

maior valor de y

$$\left|\frac{\delta f}{\partial y}\right| = |2y| \qquad M_y = 2 * 2.045 = 4.09$$

$$\left|\frac{\delta f}{\partial z}\right| = |\cos(z)| \qquad M_z = 0.90044712$$

- $\cos(0.45) = 0.90044710$ ⟵
- $\cos(0.55) = 0.85254522$

$$\delta f \le 1 * 0.05 + 4.09 \times 0.005 + 0.9004471 * 0.05$$
$$= 0.115472355 < 0.5$$

$$f = 3.5410255386$$
$$0.5$$

Apenas 3 é um algarismo significativo

Nota: caso $\delta f = 0.011 < 0.05$

comparavamos com 0.05

"" primeiro nº ≠ 0 passa para 5 ""

$$[A|b] = \left[\begin{array}{c|c} A & b \end{array}\right]$$ ⇒ matriz ampliada

Métodos

- direto ⇒ ~~nº~~ nº limitado de passos / solução exata
- iterativo ⇒ nº infinito de passos / solução aproximada / estimada

Nº soluções depende das características da matriz $c(A)$

⇓

nº linhas ou colunas linearmente independentes

⇓

Não é o resultado de uma multiplicação de uma outra linha/coluna

$$c(A) = n \begin{cases} \det(A) \neq 0 \\ A^{-1} \text{ existe} \\ \text{sistema possível determinado (solução única)} \end{cases}$$

$$c(A) < n \begin{cases} \det(A) = 0 \\ A^{-1} \text{ não existe} \\ c(A) = c(A|b) \Rightarrow \text{sistema possível indeterminado (infinidade de soluções)} \\ c(A) < c(A|b) \Rightarrow \text{sistema impossível (não tem solução)} \end{cases}$$

Eliminação de Gauss com pivotagem parcial (EGPP)

$$\left[A \,|\, b \right] \xrightarrow{EGPP} \left[U \,|\, c \right]$$

Pode-se
- ⊗ trocar duas linhas
- ⊗ multiplicar por $x \neq 0$

$$\downarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} - & - & - & - \\ 0 & - & - & - \\ 0 & 0 & - & - \end{array}\right]$$

pivôs ⇒ elemento de maior módulo

<u>Multiplicador</u>

$$m_{ji} = - \frac{a_{ji}}{pivot_i}$$

⊗ $\det(A) = \det(U) \times (-1)^t$

$\Downarrow$

multiplicar elementos da diagonal

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 22 \\ -5 & -2 & 1 & -6 \\ 2 & -10 & 2 & -12 \end{array}\right] \xrightarrow{l_1 \leftrightarrow l_2} \left[\begin{array}{ccc|c} -5 & -2 & 1 & -6 \\ 1 & 3 & 5 & 22 \\ 2 & -10 & 2 & -12 \end{array}\right] \xrightarrow[l_3 \to \frac{2}{5} l_1 + l_3]{l_2 \to \frac{1}{5} l_1 + l_2} \left[\begin{array}{ccc|c} -5 & -2 & 1 & -6 \\ 0 & 13/5 & 26/5 & 104/5 \\ 0 & -54/5 & 12/5 & -72/5 \end{array}\right]$$

$\cdot \ \frac{1}{5} \times (-5) + 1 = -1 + 1 = 0$

$\cdot \ \frac{2}{5} \times (-5) + 2 = 0$

$m_{21} = -\frac{1}{-5}$ ⇒ elemento linha 2 / ⇒ elemento linha 1 (pivo)

multiplicando linha 2 pela linha 1

$\boxed{\text{multiplicador} \leq 1}$

$m_{31} = -\frac{2}{-5} = \frac{2}{5}$

$$\xrightarrow{l_2 \leftrightarrow l_3} \left[\begin{array}{ccc|c} -5 & -2 & 1 & -6 \\ 0 & 54/5 & 12/5 & -72/5 \\ 0 & 13/5 & 26/5 & 104/5 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{13}{54} l_2 + l_3} \left[\begin{array}{ccc|c} -5 & -2 & 1 & -6 \\ 0 & -54/5 & 12/5 & -72/5 \\ 0 & 0 & 52/9 & 52/3 \end{array}\right]$$

$m_{32} = -\frac{13/5}{-54/5} = \frac{13}{54}$

$$\begin{cases} -5x - 2y + z = -6 \\ -\frac{54}{5} y + \frac{12}{5} z = -\frac{72}{5} \\ \frac{52}{9} z = \frac{52}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases} \qquad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = (-1)^2 \times \underbrace{(-5) \times (-54/5) \times (52/9)}_{*}$$

nº de trocas de linhas que se faz ao longo da EGPP

* ⇒ elementos da diagonal da matriz U

Inversa

$$(A \mid I) \xrightarrow{EGPP} (U \mid J)$$

identidade

100
010
001

Exercício 3.

$$f(x,y,z) = \frac{2xy}{x^2+z}$$

$x = 3.1416$ $\quad \partial x = 0.00005$
$y = 1.732$ $\quad \partial y = 0.0005$
$z = 1.4142$ $\quad \partial z = 0.00005$

$$f(3.1416,\ 1.732,\ 1.4142) = \frac{2 * 3.1416 * 1.732}{(3.1416)^2 + 1.4142} = 0.96443163$$

$$I = \begin{cases} 3.14155 \le \bar{x} < 3.14165 \\ 1.7315 \le \bar{y} < 1.7325 \\ 1.41415 \le \bar{z} < 1.41425 \end{cases}$$

$$\frac{2y(x^2+z) - 2xy(2x)}{(x^2+z)^2} = \frac{2y(x^2+z-2x^2)}{(x^2+z)^2} = \frac{2y(-x^2+z)}{(x^2+z)^2}$$

$$\left|\frac{\delta f}{\delta x}\right| = \left|\frac{2y(-x^2+z)}{(x^2+z)^2}\right|$$ lim sup / lim inf

$$M_x = \left|\frac{2 * 1.7325(-3.1465^2 + 1.41425)}{(3.14155^2 + 1.41415)^2}\right| = 0.230012666$$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = \left|\frac{2x}{x^2+z}\right|$$

$$M_y = \frac{2 * 3.14165}{(3.14155^2 + 1.41415)^2} = 0.556858029$$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial z}\right| = \left|-\frac{2xy}{(x^2+z)^2}\right|$$

$$M_z = \left|-\frac{2 * 3.14165 * 1.7325}{(3.14155^2 + 1.41425)^2}\right| = 0.08550$$

$$\delta f \le 0.23013 * 0.00005 + 0.55686 * 0.0005 + 0.08550 * 0.00005$$
$$= 0.00029421$$
$$\partial f < 0.0005$$

$f = 0.9644 \Rightarrow$ 3 algarismos significativos

Exercício 5.

a)

$$[A|b] = \left[\begin{array}{cccc|c} 2.4 & 6.0 & -2.7 & 5.0 & 14.6 \\ -2.1 & -2.7 & 5.9 & -4.0 & -11.4 \\ 3.0 & 5.0 & -4.0 & 6.0 & 14.0 \\ 0.9 & 1.9 & 4.7 & 1.8 & -0.9 \end{array}\right] \xrightarrow{l_1 \leftrightarrow l_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 3.0 & 5.0 & -4.0 & 6.0 & 14.0 \\ -2.1 & -2.7 & 5.9 & -4.0 & -11.4 \\ 2.4 & 6.0 & -2.7 & 5.0 & 14.6 \\ 0.9 & 1.9 & 4.7 & 1.8 & -0.9 \end{array}\right]$$

$$m_{21} = -\frac{-2.1}{3.0} = 0.7 \quad m_{31} = -\frac{2.4}{3.0} = -0.8 \quad m_{41} = -\frac{0.9}{3.0} = -0.3$$

$$\begin{array}{l} l_2 \leftarrow 0.7l_1 + l_2 \\ l_3 \leftarrow -0.8l_1 + l_3 \\ l_4 \leftarrow -0.3l_1 + l_4 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 3.0 & 5.0 & -4.0 & 6.0 & 14.0 \\ 0 & 0.8 & 3.1 & 0.2 & -1.6 \\ 0 & 2 & 0.5 & 0.2 & 3.4 \\ 0 & 0.4 & 5.9 & 0 & -5.1 \end{array}\right] \xrightarrow{l_2 \leftrightarrow l_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 3.0 & 5.0 & -4.0 & 6.0 & 14.0 \\ 0 & 2 & 0.5 & 0.2 & 3.4 \\ 0 & 0.8 & 3.1 & 0.2 & -1.6 \\ 0 & 0.4 & 5.9 & 0 & -5.1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{l} l_3 \leftarrow -0.4l_2 + l_3 \\ l_4 \leftarrow -0.2l_2 + l_4 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 3.0 & 5.0 & -4.0 & 6.0 & 14.0 \\ 0 & 2 & 0.5 & 0.2 & 3.4 \\ 0 & 0 & 2.9 & 0.12 & -2.96 \\ 0 & 0 & 5.8 & -0.04 & -5.78 \end{array}\right]$$

$$m_{32} = -\frac{0.8}{2} = -0.4$$

$$m_{42} = -\frac{0.4}{2} = -0.2$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3.0 & 5.0 & -4.0 & 6.0 & 14.0 \\ 0 & 2 & 0.5 & 0.2 & 3.4 \\ 0 & 0 & 2.9 & 0.12 & -2.96 \\ 0 & 0 & 5.8 & -0.04 & -5.78 \end{array}\right] \xrightarrow{\ell_3 \leftrightarrow \ell_4} \left[\begin{array}{cccc|c} 3.0 & 5.0 & -4.0 & 6.0 & 14.0 \\ 0 & 2 & 0.5 & 0.2 & 3.4 \\ 0 & 0 & 5.8 & -0.04 & -5.78 \\ 0 & 0 & 2.9 & 0.12 & -2.96 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\ell_4 \leftarrow 0.5\ell_3 + \ell_4} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} (x) & (y) & (z) & (w) \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 3.0 & 5.0 & -4.0 & 6.0 & 14.0 \\ 0 & 2 & 0.5 & 0.2 & 3.4 \\ 0 & 0 & 5.8 & -0.04 & -5.78 \\ 0 & 0 & 0 & 0.14 & -0.07 \end{array}\right] \end{array}$$

$m_{43} = -\dfrac{2.9}{5.8} = -0.5$

$$\begin{cases} 3.0x + 5.0y - 5.0z + 6.0w = 14.0 \\ 2y + 0.5z + 0.2w = 3.4 \\ 5.8z - 0.04w = -5.78 \\ 0.14w = -0.07 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \\ y = 2 \\ z = -1 \\ w = -0.5 \end{cases}$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -0.5 \end{bmatrix} \qquad \boxed{x = A\backslash b} \qquad \begin{array}{l} A = [\,-\,-\,-\,;\,-\,-\,-\,;\,-\,-\,-\,;\,-\,-\,-\,] \\ b = [\,-;\,-;\,-;\,-\,] \end{array}$$

b) $\det(A) = (-1)^3 \times 3.0 \times 2 \times 5.8 \times 0.14 = -4.872$

$\boxed{\det(A)}$

$m_{41} = -\dfrac{0.9}{3.0} = -0.3$

c) $\boxed{\operatorname{inv}(A)}$ $\qquad m_{21} = -\dfrac{-2.1}{3.0} = 0.7 \qquad m_{31} = -\dfrac{2.4}{3.0} = -0.8$

$$[A|I] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 2.4 & 6.0 & -2.7 & 5.0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2.1 & -2.7 & 5.9 & -4.0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3.0 & 5.0 & -4.0 & 6.0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0.9 & 1.9 & 4.7 & 1.8 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\ell_1 \leftrightarrow \ell_3 \left[\begin{array}{cccc|cccc} 3.0 & 5.0 & -4.0 & 6.0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2.1 & -2.7 & 5.9 & -4.0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2.4 & 6.0 & -2.7 & 5.0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.9 & 1.9 & 4.7 & 1.8 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ 0.7\ell_1 + \ell_2 \\ -0.8\ell_1 + \ell_3 \\ -0.3\ell_1 + \ell_4 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 3.0 & 5.0 & -4.0 & 6.0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.8 & 3.1 & 0.2 & 0 & 1 & 0.7 & 0 \\ 0 & 2 & 0.5 & 0.2 & 1 & 0 & -0.8 & 0 \\ 0 & 0.4 & 5.9 & 0 & 0 & 0 & -0.3 & 1 \end{array}\right]$$

$$\ell_3 \leftrightarrow \ell_2 \left[\begin{array}{cccc|cccc} 3.0 & 5.0 & -4.0 & 6.0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0.5 & 0.2 & 1 & 0 & -0.8 & 0 \\ 0 & 0.8 & 3.1 & 0.2 & 0 & 1 & 0.7 & 0 \\ 0 & 0.4 & 5.9 & 0 & 0 & 0 & -0.3 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ -0.4\ell_2 + \ell_3 \\ \end{array} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 3.0 & 5.0 & -4.0 & 6.0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0.5 & 0.2 & 1 & 0 & -0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 2.9 & 0.12 & -0.4 & 1 & 1.02 & 0 \end{array}\right]$$

$m_{32} = -\dfrac{0.8}{2} = -0.4$

$m_{42} = -\dfrac{0.4}{2} = -0.2$

$$l_3 \leftrightarrow l_4 \quad \left[\begin{array}{cccc|cccc} 3.0 & 5.0 & -4.0 & 6.0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0.5 & 0.2 & 1 & 0 & -0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 5.8 & -0.04 & -0.2 & 0 & -0.14 & 1 \\ 0 & 0 & 2.9 & 0.12 & -0.4 & 1 & 1.02 & 0 \end{array}\right] \qquad m_{43} = -\frac{2.9}{5.8} = -0.5$$

$$-0.5l_3+l_4 \quad \left[\begin{array}{cccc|cccc} 3.0 & 5.0 & -4.0 & 6.0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0.5 & 0.2 & 1 & 0 & -0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 5.8 & -0.04 & -0.2 & 0 & -0.14 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0.14 & -0.3 & 1 & 1.09 & -0.5 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3.0 & 5.0 & -4.0 & 6.0 & 0 \\ 0 & 2 & 0.5 & 0.2 & 1 \\ 0 & 0 & 5.8 & -0.04 & -0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0.14 & -0.3 \end{array}\right] \qquad x_1 = \begin{pmatrix} 3.00903 \\ 0.72660 \\ -0.04926 \\ -2.14286 \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3.0 & 5.0 & -4.0 & 6.0 & 0 \\ 0 & 2 & 0.5 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 5.8 & -0.04 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.14 & 1 \end{array}\right] \qquad x_2 = \begin{pmatrix} -13.00903 \\ -0.72660 \\ 0.04926 \\ 7.14286 \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3.0 & 5.0 & -4.0 & 6.0 & 1 \\ 0 & 2 & 0.5 & 0.2 & -0.8 \\ 0 & 0 & 5.8 & -0.04 & 0.16 \\ 0 & 0 & 0 & 0.14 & 0.94 \end{array}\right] \qquad x_3 = \begin{pmatrix} -13.22209 \\ -1.18596 \\ 0.02956 \\ 7.78571 \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3.0 & 5.0 & -4.0 & 6.0 & 1 \\ 0 & 2 & 0.5 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 5.8 & -0.04 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0.14 & -0.5 \end{array}\right] \qquad x_4 = \begin{pmatrix} 6.89624 \\ 0.32020 \\ 0.14778 \\ -3.57143 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3.00903 & -13.00903 & -13.22209 & 6.80624 \\ 0.72660 & -0.72660 & -1.18596 & 0.32020 \\ -0.04926 & 0.04926 & 0.02956 & 0.14778 \\ -2.14286 & 7.14286 & 7.78571 & -3.57143 \end{bmatrix}$$

⊛ Calcular zeros/raízes de uma função $\boxed{f(x) = 0}$

Método secante de Newton (métodos iterativos)

- $\lim_{k \to \infty} x_k = x^*$
- $e_k = |x^* - x_k|$
  erro de convergência
- $\lim_{k \to \infty} e_k = 0$
  erro tende para 0

Critério de paragem (CP) (em cada iteração)

⊗ $\boxed{\dfrac{|x_{k+1} - x_k|}{|x_{k+1}|} \le \varepsilon_1}$ ⊗ $\boxed{|f(x_{k+1})| \le \varepsilon_2}$

convergência local
pertence a uma vizinhança da solução

convergência global
pode tomar qualquer valor

convergência linear

$$\lim_{k \to \infty} \frac{|x^* - x_{k+1}|}{|x^* - x_k|} = L < 1$$

convergência superlinear

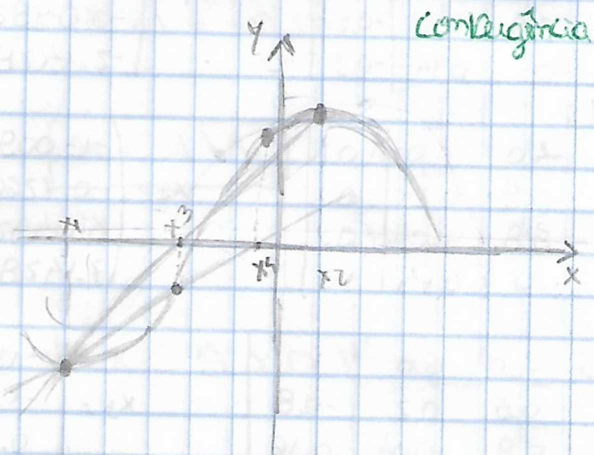
$$\lim_{k \to \infty} \frac{|x^* - x_{k+1}|}{|x^* - x_k|} = 0$$

convergência quadrática

$$\lim_{k \to \infty} \frac{|x^* - x_{k+1}|}{|x^* - x_k|^2} = L$$

Método da secante

convergência local superlinear



$\boxed{K=2}$

1. 2 valores x_1 e x_2
2. unir os dois pontos → reta y
3. x_3 = zero da reta y
5. calcular $f(x_3)$
6. unir $f(x_1)$ e $f(x_3)$
4. testar critério de paragem

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{(x_k - x_{k-1})\, f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})}}$$

⊗ Diverge quando $f(x_k) \approx f(x_{k+1})$

Método de Newton

convergência local quadrática

$\boxed{K=1}$

1. um ponto inicial
2. reta tangente nesse ponto → calcular $f'(x_1)$
3. x_2 = zero da reta
5. calcular $f(x_2)$
6. reta tangente = derivada
4. testar critério de paragem

⊗ Diverge quando $f'(x) = 0$

Quando a função diverge-se deve-se começar com outro valor inicial

Exercício 11

$f(x) = \frac{e^{-0.5x}}{\cosh(e^{0.5x})} - \sqrt{0.5L}$ $\qquad L = 0.088 \qquad [-1, 0]$

$\varepsilon_1 = 0.5$
$\varepsilon_2 = 0.1$
2 iterações

1ª iteração (k=2)

$x_1 = -1$
$x_2 = 0$

$x_3 = x_2 - \frac{(x_2 - x_1)\, f(x_2)}{f(x_2) - f(x_1)} = 0 - \frac{(0+1) \times 0.438293}{0.438293 - 1.176128} = 0.594026$

$f(x_1) = \frac{e^{-0.5\times(-1)}}{\cosh(e^{0.5\times(-1)})} - \sqrt{0.5 \times 0.088} = 1.176128$

$f(x_2) = \frac{e^{-0.5\times 0}}{\cosh(e^{0.5\times 0})} - \sqrt{0.5 \times 0.088} = 0.438293$

Testar CP

① $|f(x_3)| = |0.152943| \leq 0.1 \Rightarrow$ Falso

② $\frac{|x_3 - x_2|}{|x_3|} = 1 \leq 0.5 \Rightarrow$ Falso

$\Rightarrow$ Nova iteração

2ª iteração

$x_2 = 0$
$x_3 = 0.594026$

$x_4 = x_3 - \frac{(x_3 - x_2)\, f(x_3)}{f(x_3) - f(x_2)} = 0.594026 - \frac{0.594026 \times 0.152543}{0.152543 - 0.43893}$
$= 0.911137$

Testar CP

① $\frac{|x_4 - x_3|}{|x_4|} = 0.348039 \leq 0.5 \Rightarrow$ Verd

② $|f(x_4)| = |0.041495| \leq 0.1 \Rightarrow$ Verd

$\Rightarrow$ $\boxed{\begin{array}{c}\text{Solução} \\ x^* \approx 0.911137 \\ f(x^*) \approx 0.041495\end{array}}$

Exercício 15

$c(t) = 70\, e^{-1.5t} + 25\, e^{-0.075t} - 9$

$c'(t) = -1.5 \times 70\, e^{-1.5t} + 25 \times -0.075\, e^{-0.075t}$
$= -105\, e^{-1.5t} - 1.875\, e^{-0.075t}$

$t_1 = 5$
$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.05$
~~$n_{max} = 3$~~

1ª iteração

- $t_1 = 5$
- $c(t_1) = 8.220948$
- $c'(t_1) = -1.346741$

$t_2 = t_1 - \frac{c(t_1)}{c'(t_1)} = 5 - \frac{8.220948}{-1.346741} = 11.104327$

Testar CP

① $\frac{|t_2 - t_1|}{|t_2|} = 0.549728 \leq 0.05 \Rightarrow$ Falso

② $|c(t_2)| = 1.870489 \leq 0.05$
Falso

2ª iteração

⊗ $t_2 = 11.104327$
⊗ $c(t_2) = 1.870489$
⊗ $c'(t_2) = -0.815292$

⊗ $t_3 = t_2 - \frac{c(t_2)}{c'(t_2)} = 13.398584$

Testar CP

⊗ $|c(t_3)| = 0.152088 \leq 0.05 \Rightarrow$ Falso $\Rightarrow$ nova iteração

3ª iteração

⊗ $t_3 = 13.398584$
⊗ $c(t_3) = 0.152088$
⊗ $c'(t_3) = -0.686407$

⊗ $t_4 = t_3 - \frac{c(t_3)}{c'(t_3)} = 13.620155$

Testar CP

• $|c(t_4)| = |0.0012571 \leq 0.05 \Rightarrow$ Verdade

• $\frac{|t_4 - t_3|}{|t_4|} = 0.016537 \leq 0.05 \Rightarrow$ Verdade

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Solução} \\ x^* \approx 13.620155 \\ c(x^*) \approx 0.001257\end{array}}$$

Exercício 18

$$A = P\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$$

Método da Secante

• $20\,000€ = P$
• 6 anos $= n$
• $4000€ = A$
• $i = [0.05, 0.15]$

$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.05$ $\quad n\ max = 3$

$$f(x) = 20\,000\frac{x(1+x)^6}{(1+x)^6 - 1} - 4000$$

1ª iteração

$x_1 = 0.05$ $\quad f(x_1) = -59.65064$
$x_2 = 0.15$ $\quad f(x_2) = 1284.73813$

$$x_3 = x_2 - \frac{(x_2 - x_1)f(x_2)}{f(x_2) - f(x_1)} = 0.15 - \frac{(0.15-0.05)\times 1284.73813}{1284.73813 + 59.65064} = 0.05444$$

Testar CP

⊗ $|f(x_3)| = |-3.524921 \leq 0.05 \Rightarrow$ Falso

2ª iteração

$x_2 = 0.15$ $\quad f(x_2) = 1284.73813$
$x_3 = 0.05444$ $\quad f(x_3) = -3.52492$

$$x_4 = x_3 - \frac{(x_3 - x_2)\,f(x_3)}{f(x_3) - f(x_2)} = 0.05444 - \frac{(0.05444 - 0.15)(-3.52492)}{-3.52492 - 1284.73813}$$
$$= 0.05470$$

Testar CP

⊗ $|f(x_4)| = |-0.227381| \leq 0.05 \Rightarrow$ Falso

3ª iteração

$x_3 = 0.05444$ $\quad f(x_3) = -3.52492$
$x_4 = 0.05470$ $\quad f(x_4) = -0.22738$

$$x_5 = x_4 - \frac{(x_4 - x_3)\,f(x_4)}{f(x_4) - f(x_3)} = 0.05470 - \frac{(0.05470 - 0.05444)\times(-0.22738)}{-0.22738 + 3.52492}$$
$$= 0.05472$$

Testar CP

⊗ $|f(x_5)| = |0.02632| \leq 0.05 \Rightarrow$ Verd

⊗ $\frac{|x_5 - x_4|}{|x_5|} = 3.65497 \times 10^{-4} \leq 0.05 \Rightarrow$ Verd

Solução óptima

$x^* \approx 0.05472$
$f(x^*) \approx 3.65497 \times 10^{-4}$

Exercício 16 $\quad$ Método de Newton

$y(t) = 7(2 - 0.9^t)$ $\quad f(x) = 7(2 - 0.9^x) - 10$

$x_1 = 6h$

$f'(x) = 7 \times -0.9^x \ln(0.9)$

$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10^{-3}$
$n\ max = 3$

1ª iteração

$x_1 = 6$
$f(x_1) = 0.279913$
$f'(x_1) = +0.39195$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 6 - \frac{0.279913}{0.39195}$$
$$= 5.28585$$

Testar CP

⊗ $|f(x_2)| = |-0.010798| \leq 10^{-3} \Rightarrow$ falso

2ª iteração

$x_2 = 5.28585$
$f(x_2) = -0.010798$
$f'(x_2) = 0.42258$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 5.28585 - \frac{-0.010798}{0.42258}$$
$$= 5.31140$$

Testar CP

⊗ $|f(x_3)| = |-0.000016| \leq 0.001$ ⇒ Verd.

⊗ $\frac{|x_3 - x_2|}{|x_3|} = 0.00481 \leq 0.001$ ⇒ Falso

3ª iteração

$x_3 = 5.31140$
$f(x_3) = -0.000016$
$f'(x_3) = 0.42144$

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} = 5.31144$$

Testar CP

⊗ $|f(x_4)| = |1.07 \times 10^{-6}| \leq 10^{-3}$ ⇒ Verd

⊗ $\frac{|x_4 - x_3|}{x_4} = 7.53 \times 10^{-6} \leq 10^{-3}$ ⇒ Verd.

Solução ótima

$x^* \approx 5.31144$
$f(x^*) = 1.07 \times 10^{-6}$

MATLAB

```
function [f] = fun(x)
    f = 7*(2-0.9^x) - 10
end
```

```
x = fsolve('fun', 6)
x = 5.3114
```

```
[x, fval, exitflag, output] = fsolve('fun', 6)
```

fval ↓ $f(x)$ $-2.6978e^{-11}$

exitflag ↓ 1 (convergência)

output →
iterations = 3
funcCount = 8
algorithm = 'trust-region-dogleg'
firstorderopt = 1.1369e-11 → primeira derivada
message = ...

optimset ('fsolve')

TolFun ⇒ um dos casos de paragem
TolX ⇒ erro relativo

```
op = optimset ('tolfun', 1e-3, 'tolx', 1e-3, 'display', 'iter')
```

'display', 'iter' → mostra cada iteração

```
[x, fval, exitflag, output] = fsolve('fun', 6, op)
```

$f(x) = 0$

Secante ($K = 2$)
- não precisa derivada
- convergência superlinear

Newton ($K = 1$)
- exige derivada
- convergência quadrática

Método de Newton (sistema de equações)

$F(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f_1 = 0 \\ \vdots \\ f_m = 0 \end{cases}$

$\underbrace{F(x)}_{\text{não linear}} \approx \underbrace{L(x)}_{\text{linear}}$

⊗ aproximação de cada função (série de Taylor)

$$J(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m(x)}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_m} \end{bmatrix}$$

→ derivadas da primeira função

MATRIZ DO JACOBIANO

⊗ $F(x) \approx L_k(x) = F(x_k) + J(x_k)\overbrace{(x - x_k)}^{\text{perturbação}}$

⊗ $L_k(x) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{J(x_k)}_{\text{matriz do m°}} \underbrace{(x - x_k)}_{\Delta k} = \underbrace{-F(x_k)}_{\text{vetor coluna}}$ $- \begin{bmatrix} f_1(x_k) \\ \vdots \\ f_m(x_k) \end{bmatrix}$

(x_k é o valor de x em cada iteração)

$[\, J \mid -F \,]$

Sistema linear ⇒ resolver por EGPP

$x_{k+1} = x_k + \Delta x$ resultado de $L_k(x)$ adiciona-se a $F(x)$

Método de Newton ($K = 1$)

① $J(x_k)\,\Delta k = -f(x_k)$ → calcula-se Δk

② $x_{k+1} = x_k + \Delta k$

③ Testar CP

⊗ $\| f(x_{k+1}) \| \leq \varepsilon_2$ → valor da norma

⊗ $\frac{\| \Delta x \|}{\| x_{k+1} \|} \leq \varepsilon_1$ → estimativa do erro relativo

caso afirmativo

$x^* \approx x_{k+1}$

$\| \|_2 \Rightarrow \sqrt{}$ da $\oplus$ dos quadrados $\qquad \|(a,b)\|_2 = \sqrt{a^2+b^2}$

⊗ $J(x^*)$ tem de ter inversa (não singular) e ser limitada

⊗ $J(x)$ matriz Lipschitz é contínua na vizinhança de x^*

⊗ x_1 tem de estar na vizinhança de x^* - convergência local

$\Downarrow$

aproximação inicial

$\Downarrow$

Método de Newton tem convergência quadrática

Exercício 1

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 9 \\ x_2 = -x_1 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - 9 = 0 \\ x_1 + x_2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{x_1} & \frac{\partial f_1}{x_2} \\ \frac{\partial f_2}{x_1} & \frac{\partial f_2}{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

1ª iteração $(K=1)$

⊗ $x_1 = (0,0)$ $\qquad J\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

⊗ $f(0,0) \equiv f\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-9\\-1\end{pmatrix}$

Matriz ampliada $[J|-F]$ $\qquad \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 9 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 9 \end{array}\right]$

A matriz é singular, o sistema é impossível

→ Começando com a aproximação inicial $(0,0)$ o sistema é impossível

Começando com outra aproximação:

1ª iteração $(K=1)$

⊗ $x_1 = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ $\qquad J = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

⊗ $f\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5\\1\end{pmatrix}$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 4 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 4 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -9/4 \end{array}\right] \qquad \begin{pmatrix}\Delta x_1 \\ \Delta x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1.25\\-2.25\end{pmatrix}$$

$$x_2 = x_1 + \Delta x = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1.25 \\ -2.25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.25 \\ -2.25 \end{pmatrix}$$

$\varepsilon_1 = 0.1$
$\varepsilon_2 = 0.5$

Testar CP

$$\otimes \left\| f\begin{pmatrix} 3.25 \\ -2.25 \end{pmatrix} \right\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} 6.625 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_2 = \sqrt{6.625^2 + 0^2} = 6.625 \leq 0.5$$ Falso

$$\otimes \frac{\|\Delta x\|}{\|x_{k+1}\|} = \frac{\sqrt{1.25^2 + (-2.25)^2}}{\sqrt{3.25^2 + (-2.25)^2}} = 0.65119 \leq 0.1$$ Falso

2ª iteração

$$\otimes\ x_2 = \begin{pmatrix} 3.25 \\ -2.25 \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} 6.5 & -4.5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\otimes\ f(x_2) = \begin{pmatrix} 6.625 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 6.5 & -4.5 & -6.625 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 6.5 & -4.5 & -6.625 \\ 0 & 1.693 & 1.019 \end{array}\right]$$

$$\begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.602 \\ 0.602 \end{pmatrix} \qquad x_3 = x_2 + \Delta x = \begin{pmatrix} 3.25 \\ -2.25 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.602 \\ 0.602 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.648 \\ -1.648 \end{pmatrix}$$

Testar CP

$$\otimes \left\| f\begin{pmatrix} 2.648 \\ -1.648 \end{pmatrix} \right\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} 0.72781 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_2 = \sqrt{0.72781^2 + 0^2} = 0.7278 \leq 0.5$$ Falso

3ª iteração

$$\otimes\ x_3 = \begin{pmatrix} 2.648 \\ -1.648 \end{pmatrix} \qquad \otimes\ f(x_3) = \begin{pmatrix} 0.72781 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad J = \begin{bmatrix} 1.45562 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1.45562 & 0 & -0.72781 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1.45562 & 0 & -0.72781 \\ 0 & 1 & 1.63533 \end{array}\right]$$

$$\begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 1.63533 \end{pmatrix} \qquad x_4 = x_3 + \Delta x = \begin{pmatrix} 2.648 \\ -1.648 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.5 \\ 1.63533 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.148 \\ -0.01267 \end{pmatrix}$$

Testar CP

$$\otimes \left\| f\begin{pmatrix} 2.148 \\ -0.01267 \end{pmatrix} \right\| = \quad \ldots$$

Exercício 26

$x_1(t) = t$ $\qquad$ $y_1(t) = 1 - e^{-t}$

$x_2(t) = 1 - t\cos(\alpha)$ $\qquad$ $y_2(t) = -0.1t^2 + t\,\text{sen}(\alpha)$

$$\begin{cases} t = 1 - t\cos(\alpha) \\ 1 - e^{-t} = -0.1t^2 + t\,\text{sen}(\alpha) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t - 1 + t\cos(\alpha) = 0 \\ 1 - e^{-t} + 0.1t^2 - t\,\text{sen}(\alpha) = 0 \end{cases} \begin{array}{l} f_1(t,\alpha) = 0 \\ f_2(t,\alpha) = 0 \end{array}$$

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial t} & \frac{\partial f_1}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial f_2}{\partial t} & \frac{\partial f_2}{\partial \alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \cos(\alpha) & -t\,\text{sen}(\alpha) \\ e^{-t} + 0.2t - \text{sen}(\alpha) & -t\cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.015$

2 iterações (max)

1ª iteração

$\otimes\ x_1 = \begin{pmatrix} 4.3 \\ 2.4 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\otimes\ f(x_1) = \begin{pmatrix} 0.12921 \\ -0.06906 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\otimes\ J = \begin{pmatrix} 0.26261 & -2.90449 \\ 0.19811 & 3.17079 \end{pmatrix}$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0.26261 & -2.90449 & -0.12921 \\ 0.19811 & 3.17079 & +0.06906 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 0.26261 & -2.90449 & -0.12921 \\ 0 & 5.36190 & +0.16653 \end{array}\right]$$

$$\begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.148518 \\ 0.031058 \end{pmatrix} \qquad x_2 = x_1 + \Delta x = \begin{pmatrix} 4.3 \\ 2.4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.148518 \\ 0.031058 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.151482 \\ 2.431058 \end{pmatrix}$$

Testar CP

0.004608

$$\otimes\ \left\| f\begin{pmatrix} 4.151482 \\ 2.431058 \end{pmatrix} \right\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} 0.00794 \\ -1.73489 \end{pmatrix} \right\|_2 = 1.73491 \leq 0.015 \Rightarrow \text{Falso}$$

-0.6367×10^{-5}

2ª iteração

$\otimes\ x_2 = \begin{pmatrix} 4.151482 \\ 2.431058 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\otimes\ f(x_2) = \begin{pmatrix} 0.00793 \\ -1.73489 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\otimes\ J = \begin{pmatrix} 0.24199 & -2.70776 \\ 0.75494 & 3.14688 \end{pmatrix}$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0.24199 & -2.70776 & -0.00793 \\ 0.75494 & 3.14688 & 1.73489 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 0.24199 & -2.70776 & -0.00793 \\ 0 & 11.59432 & 1.75963 \end{array}\right]$$

-0.01124 $\qquad$ 4.14026

$$\begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.50780 \\ 0.13768 \end{pmatrix} \qquad x_3 = x_2 + \Delta x = \begin{pmatrix} 4.151482 \\ 2.43058 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1.50780 \\ 0.13768 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.659282 \\ 2.56826 \end{pmatrix}$$

0.0006973 $\qquad$ 2.43176

Testar CP

$$\otimes\ \left\| f\begin{pmatrix} 5.659282 \\ 2.56826 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} -0.09507 \\ 1.17947 \end{pmatrix} \right\| = 1.18346 \Rightarrow \text{Falso}$$

Era para dar certo, ...

Exercício 28

$$f(x_1, x_2) = 0.1 + 0.01\,x_1 x_2 + 0.15\,x_2^4 + 0.01\,x_1^4 - 0.25(x_1 + x_2 - 100)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{x_1} = 0 \\ \frac{\partial f}{x_2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0.01\,x_2 + 0.04\,x_1^3 - 0.25 = 0 \\ 0.01 x_1 + 0.6\,x_2^3 - 0.25 = 0 \end{cases}$$

$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.2$
1 iteração

1ª iteração

$$x_1 = \begin{pmatrix} 2.0 \\ 0.5 \end{pmatrix} \qquad f(x_1) = \begin{pmatrix} -0.165 \\ -0.155 \end{pmatrix} \qquad J(x_1) = \begin{pmatrix} 0.48 & 0.01 \\ 0.01 & 0.45 \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{x_1} & \frac{\partial f_1}{x_2} \\ \frac{\partial f_2}{x_1} & \frac{\partial f_2}{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.12x_1^2 & 0.01 \\ 0.01 & 1.8x_2^2 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0.48 & 0.01 & 0.165 \\ 0.01 & 0.45 & 0.155 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 0.48 & 0.01 & 0.165 \\ 0 & 0.44979 & 0.15156 \end{array}\right]$$

$$\begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.33673 \\ 0.33696 \end{pmatrix} \qquad x_2 = x_1 + \Delta x = \begin{pmatrix} 2.0 \\ 0.5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.33673 \\ 0.33696 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.33673 \\ 0.83696 \end{pmatrix}$$

Testar CP

$$\otimes \left\| f\begin{pmatrix} 2.33673 \\ 0.83696 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 0.26874 \\ 0.12514 \end{pmatrix} \right\| = 0.29645 \leq 0.2 \Rightarrow \text{Falso}$$

Acabo não porque encontrei a solução óptima, mas porque atingi o número máximo de iterações