

## Méthodes et outils de l'IA et de la RO

Intervenants : B. Escoffier, N. Maudet, N. Bredèche

3I025, Licence d'informatique, Sorbonne Université

### Contenu de l'UE

Décision collective et optimisation:

Principe de stabilité, équité, efficacité

Modélisation et méthodes de résolution (algorithmes et initiation à la PL)

Méthodes de l'IA:

recherche heuristiques dans des graphes;

algorithmes de jeux;

apprentissage par renforcement

Décisions situées et distribuées:

dynamiques des systèmes multi-agents;

émergence de comportements collectifs;

comportements réactifs et passage sur robots réels;

### Déroulement de l'UE

11 semaines (+décalage cours-TD):

2h cours, 2h TD, 2h TP

ou

2h cours, 4h TP

### Contrôle des connaissances :

Examen final : 60 %

CC : 40 %, composé de 2 notes (mini-projets/rendus TP)

comptant respectivement pour 15 % et 25 %

Documents : sur Moodle (a priori)

### Fil conducteur : partage de ressources entre agents

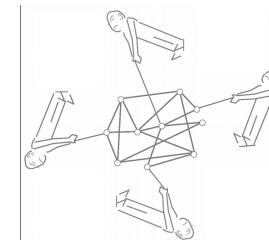
Décision collective

Quels objectifs ?

Quelles méthodes ?

(optimisation, RO, algo)

Vue centralisée



Comportement des agents

Stratégie

individuelle/collective

Méthodes de l'IA

(apprentissage, jeux)

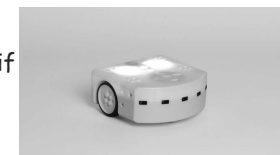
Vue décentralisée

Mise en situation

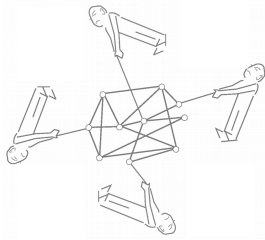
Comportement collectif

Aspects temporels,

spatialisation



Décision collective  
Quels objectifs ?  
Quelles méthodes ?  
(optimisation, RO, algo)  
Vue centralisée



Comportement des agents  
Stratégie  
individuelle/collective  
Méthodes de l'IA  
(apprentissage, jeux)  
Vue décentralisée

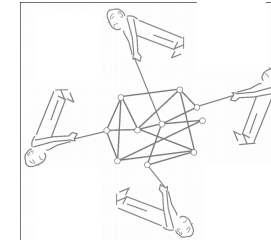
Mise en situation  
Comportement collectif  
Aspects temporels,  
spatialisation



Des thématiques du parcours **ANDROIDE** :  
AgeNts Distribués, Robotique, Recherche  
Opérationnelle, Interaction, DEcision

## Première partie, semaines 1 à 4

Décision collective  
Quels objectifs ?  
Quelles méthodes ?  
(optimisation, RO, algo)  
Vue centralisée



## Première partie, semaines 1 à 4

### Chapitre 1 : Le problème du mariage stable !

#### I. Introduction



Etats-Unis, années 40



© Can Stock Photo - clip12164140

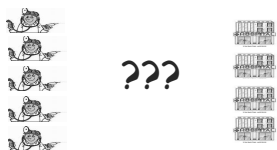
## Affectation des internes aux hôpitaux



???



## Affectation des internes aux hôpitaux



### Problèmes :

→ Compétition entre hôpitaux + complexité de mise en œuvre à 'grande' échelle

RV pris pour signature du contrat 2 ans avant la fin des études !

Problème de l'attente : délai de réponse : 12h !!

→ Affectation obtenue potentiellement mauvaise

vision locale, intérêt individuel vs vision globale, collective

Cf Théorie des jeux, prix de l'anarchie (M1 DJ, M2 AOTJ)

→ Nécessité d'une procédure coordonnée/centralisée

## Affectation des internes aux hôpitaux



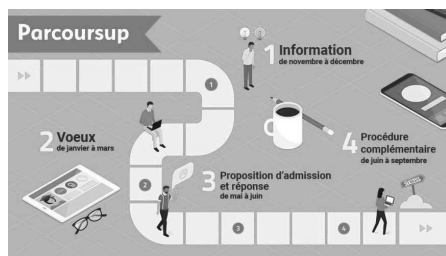
→ Nécessité d'une procédure coordonnée/centralisée

### Que doit-on avoir en entrée ?

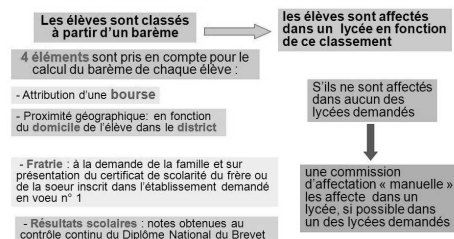
→ des informations sur les préférences des internes, et sur celles des hôpitaux

- Internes : fournir une liste ordonnée d'hôpitaux

- Hôpitaux : fournir une liste ordonnée d'internes



### Affectation en lycée: une procédure informatisée (logiciel AFFELNET)



Cf séminaire de J. Grenet (2017) : « La transparence et l'obstacle : les algorithmes d'affectation des élèves aux établissements d'enseignement »

<http://codesource.hypotheses.org/243>

## Affectation des internes aux hôpitaux

- Internes : fournir une liste ordonnée d'hôpitaux
- Hôpitaux : fournir une liste ordonnée d'internes

Algorithme

Affectation des internes

Quel algorithme ??

Quel(s) objectifs ?

Des situations à éviter ?

## Affectation des internes aux hôpitaux

Quel algorithme ? Quel(s) objectifs ? Des situations à éviter ?

→ **Une situation à proscrire :**

- J'ai classé l'hôpital H1 en premier
- L'hôpital H1 m'a classé en premier
- Quelqu'un est affecté à l'hôpital H1
- ... mais pas moi : je suis affecté ailleurs!!!

Plus généralement :

- J'ai été affecté à l'hôpital H2 mais je préfère H1
- H1 me préfère à l'un des internes qui lui a été affecté

→ **Instabilité**

## Affectation des internes aux hôpitaux

Quel algorithme ? Quel(s) objectifs ? Des situations à éviter ?

→ Faire en sorte que globalement les internes soient dans des hôpitaux qu'ils souhaitent, les hôpitaux aient des internes qu'ils souhaitent : objectif **utilitariste**

→ N'avoir personne de trop mécontent : objectif **égalitariste**

→ **Une situation à proscrire :**

- J'ai classé l'hôpital H1 en premier
- L'hôpital H1 m'a classé en premier
- Quelqu'un est affecté à l'hôpital H1
- ... mais pas moi : je suis affecté ailleurs!!!



Mais aussi : **neutralité/anonymité** de la procédure

- Ne pas privilégier un hôpital à un autre
- Ne pas privilégier un interne à un autre

## Affectation des internes aux hôpitaux

Objectif. Etant donné un ensemble des préférences entre des hôpitaux et des étudiants en médecine, concevoir un processus d'admissions.

Paire instable  $(I_i, H_j)$  : est instable si

- l'étudiant  $I_i$  préfère  $H_j$  à l'hôpital auquel il a été affecté.
- l'hôpital  $H_j$  préfère  $I_i$  à l'un des étudiants qui lui ont été affectés.

Affectation stable. Affectation sans paires instables.

Condition naturelle et désirable.

\*\*\* Certains transparents sont de K. Wayne, traduits par E. Bampis \*\*\*

## Un problème simplifié : le mariage stable

→ Cas où il y a exactement une place par hôpital.

Objectif. Etant donnés  $n$  hommes et  $n$  femmes déterminer un couplage "stable" (s'il en existe...)

- Les participants classent les membres du sexe opposé.
- Chaque homme classe les femmes de la "meilleure" à la "pire".
- Chaque femme classe les hommes du "meilleur" au "pire".

Profil de préférences des hommes

Profil de préférences des femmes

	1	2	3
Xavier	Amy	Bertha	Clare
Yancey	Bertha	Amy	Clare
Zeus	Amy	Bertha	Clare

	1	2	3
Amy	Xavier	Yancey	Zeus
Bertha	Xavier	Yancey	Zeus
Clare	Yancey	Xavier	Zeus

## Problème du mariage stable

Q. Est-ce l'affectation X-C, Y-B, Z-A stable?

R. Non. Bertha et Xavier forment une paire instable.

Profil des préférences des hommes

Profil des préférences des femmes

	1	2	3
Xavier	Amy	Bertha	Clare
Yancey	Bertha	Amy	Clare
Zeus	Amy	Bertha	Clare

	1	2	3
Amy	Xavier	Yancey	Zeus
Bertha	Xavier	Yancey	Zeus
Clare	Yancey	Xavier	Zeus

## Problème du mariage stable

Couplage parfait : chacun est apparié de manière "monogame"

- Chaque homme est apparié à exactement une femme.
- Chaque femme est appariée à exactement un homme.

Stabilité : pas de motivation pour une paire de participants de changer

d'affectation en effectuant une action commune.

- Dans un couplage  $M$ , une paire  $m-w$  est instable si l'homme  $m$  et la femme  $w$  préfèrent l'un l'autre plus que leurs partenaires actuels.
- Dans une paire instable  $m-w$  chacun peut améliorer sa condition en changeant de partenaire.

Mariage stable : un couplage parfait sans paires instables.

Problème du mariage stable. Etant données les listes de préférences de  $n$  hommes et de  $n$  femmes, déterminer un couplage stable si il existe.

## Problème du mariage stable

Q. Est-ce l'affectation X-A, Y-B, Z-C est stable?

R. Oui

Profil de préférences des hommes

Profil de préférences des femmes

	1	2	3
Xavier	Amy	Bertha	Clare
Yancey	Bertha	Amy	Clare
Zeus	Amy	Bertha	Clare

	1	2	3
Amy	Xavier	Yancey	Zeus
Bertha	Xavier	Yancey	Zeus
Clare	Yancey	Xavier	Zeus

## Problème du mariage stable

Q1. Existe-t-il toujours un mariage stable ??

R1. Oui !!

Q2. Comment en calculer un ??

R2. Algorithme de Gale-Shapley - Proposer et rejeter.

## Algorithme Proposer-Et-Rejeter (GS)

[Gale-Shapley 1962] Méthode intuitive qui garantit un couplage stable.

1. Initialiser chaque personne comme libre.

2. Tant que (il existe un homme libre qui n'a pas proposé à toutes les femmes) {

    Choisir un tel homme  $m$

$w$  = 1ère femme dans la liste de  $m$  à laquelle  $m$  n'a pas encore proposé

    si ( $w$  est libre)

        considérer  $m$  et  $w$  comme fiancés

    sinon si ( $w$  préfère  $m$  à son fiancé  $m'$ )

        considérer  $m$  et  $w$  comme fiancés, et  $m'$  comme libre

    sinon

$w$  rejette  $m$

}

## Algorithme Proposer-Et-Rejeter (GS)

Appliquer l'algorithme de GS sur l'exemple précédent, en considérant l'ordre Z-Y-X sur les hommes.

Propriétés de l'algorithme :

- Terminaison ?

- Validité ?

→ Toutes les personnes sont en couple

→ Le mariage est stable

Q1. Existe-t-il toujours un mariage stable ??

R1. Oui !!

Q2. Comment en calculer un ??

R2. Algorithme de Gale-Shapley - Proposer et rejeter.

Q3. Peut-il exister plusieurs mariages stables ?

Q4. S'il existe plusieurs mariages stables, lequel trouve l'algorithme GS ?

## Comprendre la Solution

Une instance avec deux couplages stables.

	1	2	3		1	2	3
Xavier	A	B	C	Amy	Y	X	Z
Yancey	B	A	C	Bertha	X	Y	Z
Zeus	A	B	C	Clare	X	Y	Z

Appliquer GS : quel couplage obtient-on ?

Obtient-on toujours le même ?

Comment obtenir l'autre couplage ?

Algorithme Gale-Shapley : dissymétrie apparente hommes/femmes

Déf. L'homme  $m$  est un partenaire valide de la femme  $w$  s'il existe un couplage stable dans lequel ils sont couplés.

Affectation Homme-optimale. Chaque homme est couplé avec sa meilleure partenaire valide.

Assertion. Toutes les exécutions de GS conduisent à une affectation

Homme-optimale qui est un couplage stable !

• Pas de raison a priori de croire que ce soit un couplage, et en plus stable.

• Simultanément meilleur pour chaque homme et pour tous les hommes.

Algorithme Gale-Shapley : dissymétrie apparente hommes/femmes

Assertion. Toutes les exécutions de GS conduisent à une affectation

Homme-optimale qui est un couplage stable !

Note : cela veut dire que toutes les exécutions de GS conduisent à la **même** solution → indépendant de l'ordre dans lequel on a considéré les hommes/les propositions.

→ neutralité/anonymité de la procédure

Algorithme Gale-Shapley : dissymétrie apparente hommes/femmes

Assertion. Toutes les exécutions de GS conduisent à une affectation

Homme-optimale qui est un couplage stable !

Qualité de la solution du point de vue de femmes

Chaque femme est couplée avec son pire partenaire valide.

Assertion. GS trouve un couplage stable femme-"pessimal"  $S^*$ .

Retour sur le problème des hôpitaux

- Chaque interne classe les hôpitaux par ordre de préférence.
  - Chaque hôpital classe les internes par ordre de préférence.
  - Il y a  $n$  internes,  $k$  hôpitaux, chaque hôpital  $H_i$  ayant une capacité  $C_i$ .
- On suppose (pour simplifier) :  $\sum C_i = n$

Paire instable:  $(I_i, H_j)$  tel que

- $I_i$  a été affecté à l'hôpital  $H_k$  mais il préfère  $H_j$
- $H_j$  préfère  $I_i$  à l'un des internes qui lui ont été affectés.

Retour sur le problème des hôpitaux

Vision 'interne-optimal'.

On peut aussi faire la version 'hôpital-optimal' (cf TME).

Retour sur les hôpitaux aux Etats-Unis

1950 : décision d'adopter un système centralisé

mise en place d'un système d'affectation

1952 : problème détecté : non stabilité, incitation à mentir

nouveau système, équivalent de GS 'hôpital-optimal'

participation libre : 95 % des hôpitaux et des internes

Retour sur le problème des hôpitaux

Existence d'une solution stable : généralisation de GS

1. Initialiser chaque interne/hôpital comme libre.
2. Tant que (il existe un interne libre qui n'a pas proposé à tous les hôpitaux) {  
  Choisir un tel interne  $m$   
   $w$  = 1er hôpital dans la liste de  $m$  auquel  $m$  n'a pas encore proposé  
  si ( $w$  n'est pas complet)  
    affecter  $m$  à  $w$   
  sinon  
    soit  $m'$  l'interne affecté à  $w$  'le moins préféré' par  $w$   
    si ( $w$  préfère  $m$  à  $m'$ )  
      affecter  $m$  à  $w$ , et considérer  $m'$  comme libre  
  sinon  
     $w$  rejette  $m$   
}

Problèmes des couples mariés, travaux de A. Roth

Application à d'autres problèmes (lycées (cf Roth à Boston, NY,...), postes académiques, greffes,...)

2012, académie royale des sciences, Suède

