Avaliação Parcial Teórico-Prática

Métodos Numéricos 2015.2

Professora: Emanuele Santos

Aluno: Paulo César Machado Filho

Matrícula: 372015

1. Temos que x é representado em um sistema de aritmética de ponto flutuante de t dígitos na base 10. Como x' é obtido por arredondamento, temos que: $t = 4$

$$|ERu| < 10^{-t+1}$$

$$|ERu| < 10^{-4+1}$$

$$|ERu| < 10^{-3}$$

2. Podemos encontrar o valor da tolerância mínima, épsilon(ε), pela fórmula da estimativa do número de iterações, já que conhecemos o intervalo inicial[a,b] e quantas iterações o método da bisseção executou.

Substituindo, temos que:

$$k > \frac{\log(b-a)-\log(\varepsilon)}{\log(2)}$$

$$13 > \frac{\log(2.0-0.0)-\log(\varepsilon)}{\log(2)}$$

$$13 > 1 - \frac{\log(\varepsilon)}{\log(2)}$$

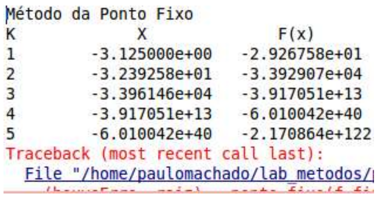
$$-3{,}6123 > \log(\varepsilon)$$

$$10^{\log(\varepsilon)} > 10^{-3{,}6123}$$

$$\varepsilon > 0{,}002$$

3. a) Como a divisão é o inverso da multiplicação, poderíamos diminuir o dividendo pelo divisor, enquanto o dividendo for maior que o divisor.
   b) O código da função divide(b,a) usando o Método de Newton está no repositório.

4. O método não converge, pois a condição $|\varphi'(x)| \leq M < 1, \forall x \in I$ não é satisfeita, ou seja, não existe um intervalo centrado. Sabemos que para dada função $f(x) = 0$, existe mais de uma função de iteração $\varphi(x)$. A escolha correta de uma função de iteração pode determinar se o método irá convergir ou não. Executando o método do Ponto Fixo em Python, observamos que não converge:



```
Método da Ponto Fixo
K          X                F(x)
1          -3.125000e+00    -2.926758e+01
2          -3.239258e+01    -3.392907e+04
3          -3.396146e+04    -3.917051e+13
4          -3.917051e+13    -6.010042e+40
5          -6.010042e+40    -2.170864e+122
Traceback (most recent call last):
  File "/home/paulomachado/lab_metodos/
```

5. a). Aplicando o critério de Sassenfeld para o seguinte sistema:

$$\begin{cases} kx1 + 3x2 + x3 = 1 \\ kx1 + 6x2 + x3 = 2 \\ x1 + 6x2 + 7x3 = 3 \end{cases}$$

$\beta_1 = (3 + 1)/k = 4/k$

$\beta_2 = k * \left(\frac{4}{k}\right) + 1/6 = 0{,}83$

$\beta_3 = 1 * \left(\frac{4}{k}\right) + 6 * 0{,}83/7 = {\left(\frac{4}{k}\right) + 4{,}98}\Big/{7}$

O critério de Sassenfeld é dado por:

$\beta = \max_{1 \leq j \leq n}\{\beta j\}$

Analisando os β obtidos do sistema, observamos que o método irá convergir apenas para valores maios que 4:

$$\frac{4}{k} < 1$$

$$k > 4$$

b). O menor valor inteiro e positivo para k, que se tem garantia que o método de Gauss-Seidel irá convergir é para $k = 5$. Se $k = 5$, analisando o critério de Sassenfeld, temos que:

$\beta_1 = 0{,}80$

$\beta_2 = 0{,}83$

$\beta_3 = 0{,}82$

A condição $\beta = \max_{1 \leq j \leq n}\{\beta j\}$ é satisfeita, então o método irá convergir. ✓

6. a) Equações de Equilíbrio:

   1º Reator: $Q_{01} * c_{01} + Q_{31} * c_3 = Q_{15} * c_1 + Q_{12} * c_1$

   2º Reator: $Q_{12} * c_1 = Q_{25} * c_2 + Q_{24} * c_2 + Q_{23} * c_2$

   3º Reator: $Q_{03} * c_{03} + Q_{23} * c_2 = Q_{31} * c_3 + Q_{34} * c3$

   4º Reator: $Q_{54} * c_5 + Q_{24} * c_2 + Q_{34} * c_3 = Q_{44} * c_4$

   5º Reator: $Q_{15} * c_1 + Q_{25} * c_2 = Q_{54} * c_5 + Q_{55} * c5$

~ Substituindo os valores e montando o sistema:

$$\begin{cases} -9c1 + 0 + 3c3 + 0 + 0 = -120 \\ 4c1 - 4c2 + 0 + 0 + 0 = 0 \\ 0 + 2c2 - 9c3 + 0 + 0 = -350 \\ 0 + c2 + 6c3 - 9c4 + 2c5 = 0 \\ 5c1 + c2 + 0 + 0 - 6c5 = 0 \end{cases}$$

~ Montando a Matriz do Sistema:

$$\begin{bmatrix} -9 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -9 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & -9 & 2 \\ 5 & 1 & 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} c1 \\ c2 \\ c3 \\ c4 \\ c5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -120 \\ 0 \\ -350 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

b) Os códigos da resolução do sistema por Gauss e Gauss-Jacobi estão no repositório.

7. a) Código da resolução do sistema utilizando Gauss-Jordan está no repositório.

   b) Podemos calcular a matriz inversa aplicando as mesma operações elementares na matriz dos coeficientes e na matriz Identidade, utilizando Gauss-Jordan. O código está no repositório.

8. Se A for matriz dos coeficientes o sistema não terá solução, tento em vista que uma das linhas da Matriz U é nula.

9. Para o Método de Gauss-Seidel podemos analisar dois critérios de convergência para ter maior garantia se método irá convergir ou não:

   . Critério das linhas

   . Critério de Sassenfeld

   O critério das linhas diz que o método convergirá se a matriz dos coeficientes for diagonal estritamente dominante. Caso o critério das linhas não nos dê garantia da convergência, podemos analisar o critério de Sassenfeld, como feito na 5 questão.

   Seja o Conjunto 1:

$$\begin{cases} 9x + 3y + z = 13 \\ -6x + 8z = 2 \\ 2x + 5y - z = 6 \end{cases}$$

i) Critério das Linhas para o Conjunto 1:

$9 > 3 + 1$ ✓

$0 > -6 + 2$ ✗

$-1 > 7$ ✗

Pelo Critério das Linhas o método não convergirá.

Seja o Conjunto 2:

$$\begin{cases} x + y + 6z = 8 \\ x + 5y - z = 5 \\ 4x + 2y - 2z = 4 \end{cases}$$

ii) Critério das Linhas para o Conjunto 2:

$1 > 6 + 1$ ✗

$5 > 1 + (-1)$ ✓

$-2 > 4 + 2$ ✗

Pelo Critério das Linhas o método não convergirá.

Seja o Conjunto 3:

$$\begin{cases} -3x + 4y + 5z = 6 \\ -2x + 2y - 3z = -3 \\ 2y - z = 1 \end{cases}$$

iii) Critério das Linhas para o Conjunto 3:

$-3 > 4 + 5$ ✗

$2 > -3 + (-2)$ ✓

$-1 > 2$ ✗

Pelo Critério das Linhas o método não convergirá.

Resolvendo os sistemas por métodos diretos, como o de Gauss-Jordan por exemplo, o método ira convergir. Para o método de Gauss-Seidel, como o critério falhou, pode-se tentar trocar as linhas das equações para garantir a convergência. O código resolvendo os sistemas por um método direto (Gauss-Jordan) está no repositório.