

Control Predictivo basado en Modelo (MPC - Model Predictive Control)

Paulo Loma Marconi
prlomarconi@gmail.com
<https://github.com/paulomarconi>

26-06-2020

Contenido

Introducción y motivación

LQG vs MPC

MPC - idea básica

MPC algoritmo

Control por MPC

Polihedros

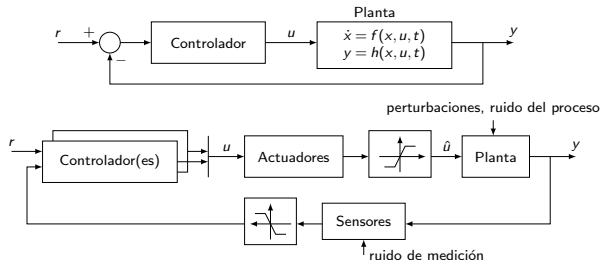
Estabilidad por Lyapunov

Ejemplo MPC

Referencias

Introducción

El problema de control



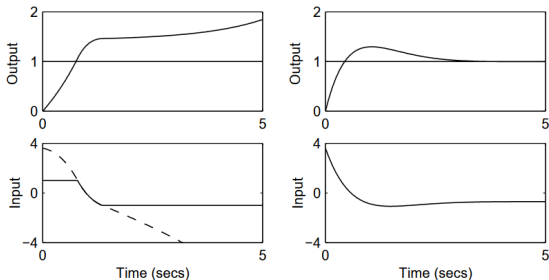
Objetivo de control: proporcionar u , tal que:

- Seguidor: siga a la referencia r (*tracking*).
- Regulador: regule los estados $x \rightarrow 0$.
- En seguidor/regulador rechace perturbaciones: salida/entrada.

mientras,

- Cumplir los requerimientos de diseño: *overshoot*, *settling time*, etc.
- Minimizar no linealidades/discontinuidades: *backlash*, relay con histéresis, zona muerta, etc.
- Minimizar: ruido proceso/medición, error de calibración, error en el modelo de la planta, retraso de tiempo.
- Satisfacer restricciones físicas (**hard constraints**): max/min torque, voltaje, etc.

Con restricciones vs sin restricciones



Con saturación vs sin saturación - controlador PI

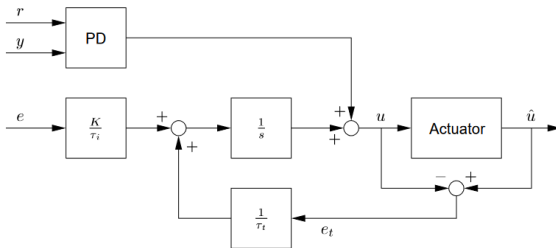
Problemas con la saturación:

- Genera discordancia entre la salida del controlador u y la entrada al sistema \hat{u} .
- Cambios en el controlador no afecta a la planta.
- Puede permanecer saturado y llevar el sistema a la región de inestabilidad.

Clásico PID con *anti-windup*¹

Objetivo: reducir que de la integración del error se dispare (*windup*).

Solución: agregar *feedback loop* de $\Delta(\hat{u} - u)$ con ganancia ajustable $\frac{1}{\tau_i}$ y reset al integrador con una ganancia $\frac{1}{\tau_t}$.



PID con anti-windup

¹Martin Bak. "Control of systems with constraints". PhD thesis. Technical University of Denmark, Department of Automation, 2000.

Clásico PID con *anti-windup*

Definido como,

$$u = K \left(e + \frac{1}{\tau_i} \int_{\tau=0}^t e(\tau) d\tau + \frac{\tau_i}{K \tau_t} (\hat{u} - u) dt \right)$$
$$\hat{u} = \text{sat}(u)$$

en tiempo discreto,

$$P(k) = K(\beta r(k) - y(k))$$
$$D(k) = \frac{\alpha \tau_d}{\alpha \tau_d + T} D(k-1) - \frac{K \tau_d}{\alpha \tau_d + T} (1 - q^{-1}) y(k)$$
$$I(k+1) = I(k) + \frac{KT}{\tau_i} e(k) + \frac{T}{\tau_t} (\hat{u}(k) - u(k))$$
$$u(k) = P(k) + I(k) + D(k)$$
$$\hat{u}(k) = \text{sat}(u(k))$$

donde, $\tau_i, \tau_d, \tau_t, \alpha$ y β son los parámetros de ajuste.

Pros:

- Implementación fácil.
- Procesamiento computacional bajo.

Cons:

- Ajuste de parámetros por prueba y error.
- **No es óptimo.**
- **Manejo de restricciones es a posteriori.**

LQG (Linear Quadratic Gaussian)

Sea un sistema DLTI en espacio de estados,

$$\begin{aligned}x(k+1) &= A x(k) + B u(k) + w(k) \\ y(k) &= C x(k) + z(k), \quad k = 0, 1, 2, \dots\end{aligned}\tag{1}$$

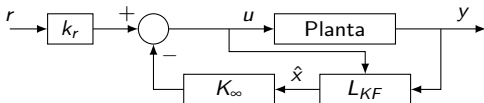
donde, $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$, $w \sim \mathcal{N}(0, Q_w)$, $z \sim \mathcal{N}(0, Q_z)$. Analizando la dinámica,

$$\begin{aligned}\dot{x}(k) &= Ax(k) + Bu(k), & \dot{\hat{x}}(k) &= A\hat{x}(k) + Bu(k) + L_{KF}(y(k) - \hat{y}(k)) \\ y(k) &= Cx(k), & \hat{y}(k) &= C\hat{x}(k) \\ u(k) &= -K_{\infty}\hat{x}(k), & \dot{\tilde{x}}(k) &= \dot{x}(k) - \dot{\hat{x}}(k)\end{aligned}$$

de la dinámica a lazo cerrado, la matriz dinámica es triangular¹.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(k) \\ \dot{\tilde{x}}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK_{\infty} & BK_{\infty} \\ 0 & A - L_{KF}C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ \tilde{x}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Bk_r \\ 0 \end{bmatrix} r$$

por tanto, el polinomio característico es $\lambda(s) = \det(sl - A + BK_{\infty}) \det(sl - A + L_{KF}C)$



Principio de separación: se puede diseñar K_{∞} y L_{KF} por separado y luego combinarlos.

¹ k_r reduce el steady-state error (DC gain)

¿LQG en la industria?

- Avances teóricos en los 50. (Bellman, Pontryagin, Kalman)
- Kalman introduce las nociones de controlabilidad y observabilidad.
- LQR es desarrollado.
- En 1960 introduce su celebrado filtro².
- Teoría de control óptimo general.

Pero en 1978³...

Guaranteed Margins for LQG Regulators

JOHN C. DOYLE

Abstract—There are none.

INTRODUCTION

Considerable attention has been given lately to the issue of robustness of linear-quadratic (LQ) regulators. The recent work by Safonov and Athans [1] has extended to the multivariable case the now well-known guarantee of 60° phase and 6 dB gain margin for such controllers. However, for even the single-input, single-output case there has remained the question of whether there exist any guaranteed margins for the full LQG (Kalman filter in the loop) regulator. By counterexample, this note answers that question; there are none.

A standard two-state single-input single-output LQG control problem is posed for which the resulting closed-loop regulator has arbitrarily small gain margin.

²Rudolf Emil Kalman et al. "Contributions to the theory of optimal control". In: *Bol. soc. mat. mexicana* 5.2 (1960), pp. 102–119.

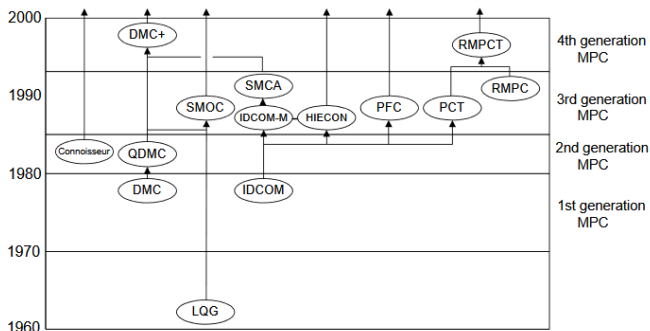
³J. Doyle. "Guaranteed margins for LQG regulators". In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 23.4 (1978), pp. 756–757. DOI: 10.1109/tac.1978.1101812.

Raíces del MPC

- Predictor de Smith. (Smith 1970).
- Control variante mínimo. (Astrom, 1970).
- Dynamic Matrix Control (DMC). (Cutler y Ramaker, 1980)

Gracias al paper seminal de Doyle,

- GPC, MBPC, DMC, RHC,...





PERGAMON

Automatica 36 (2000) 789–814



www.elsevier.com/locate/automatica

Survey Paper

Constrained model predictive control: Stability and optimality[☆]

D. Q. Mayne^{a,*}, J. B. Rawlings^b, C. V. Rao^b, P. O. M. Scokaert^c

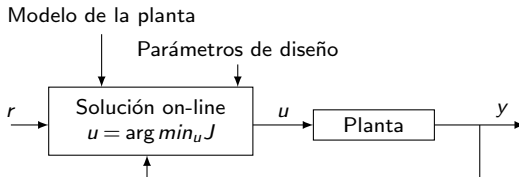
^aDepartment of Electrical and Electronic Engineering, Imperial College of Science, Technology and Medicine, London SW7 2BT, UK

^bDepartment of Chemical Engineering, University of Wisconsin, Madison, USA

^cCentre National d'Etudes des Telecommunications, France Telecom, France

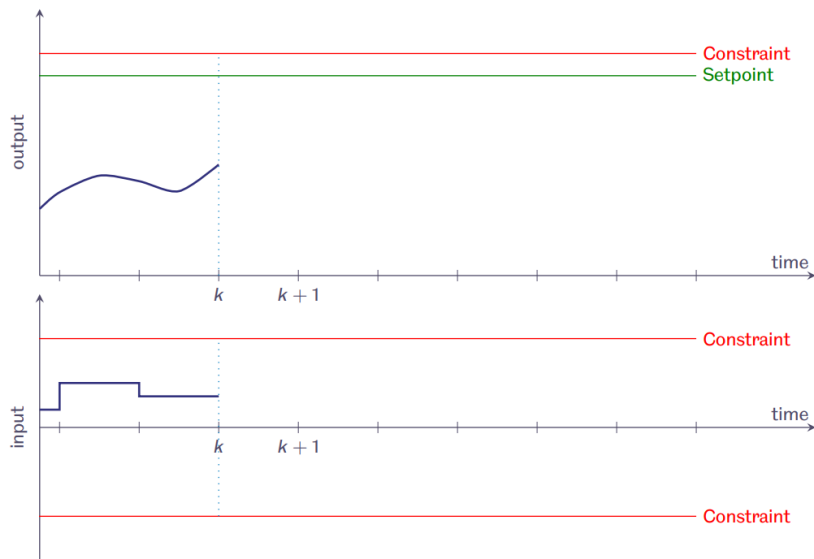
Received 29 May 1998; revised 6 September 1999; received in final form 8 November 1999

"MPC es una técnica donde la acción de control es obtenida resolviendo un problema control óptimo (optimización) a lazo abierto con horizonte finito de forma on-line para cada instante de tiempo, usando el estado actual como estado inicial. De la secuencia de la solución solo se aplica el primer resultado a la planta y el resto se descarta, cerrando así el lazo. (H_2 y H_∞ requieren un horizonte infinito.)"

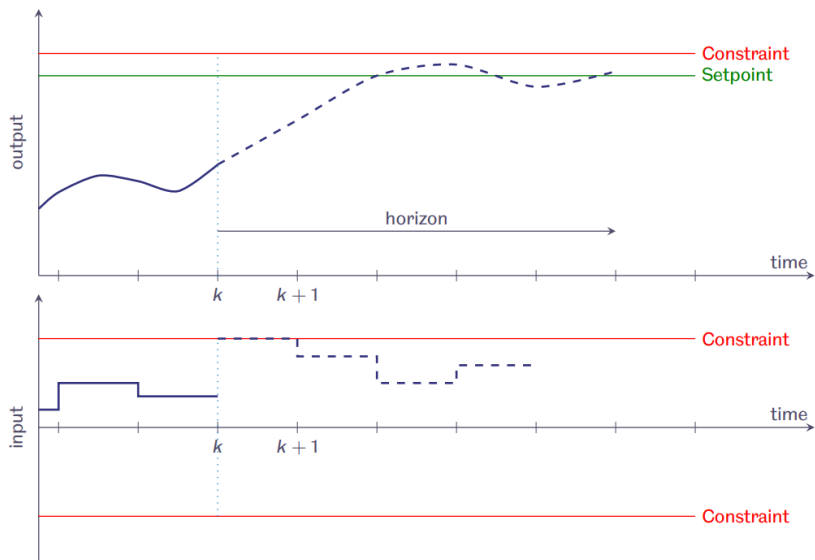


⁴D.Q. Mayne, J.B. Rawlings, C.V. Rao, and P.O.M. Scokaert. "Constrained model predictive control: Stability and optimality". In: *Automatica* 36.6 (2000), pp. 789–814. DOI: 10.1016/S0005-1098(99)00214-9.

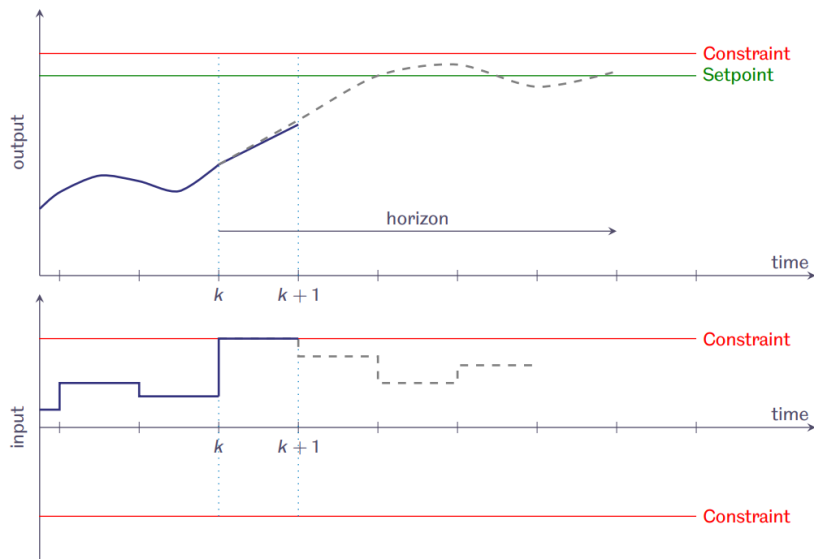
MPC - idea básica



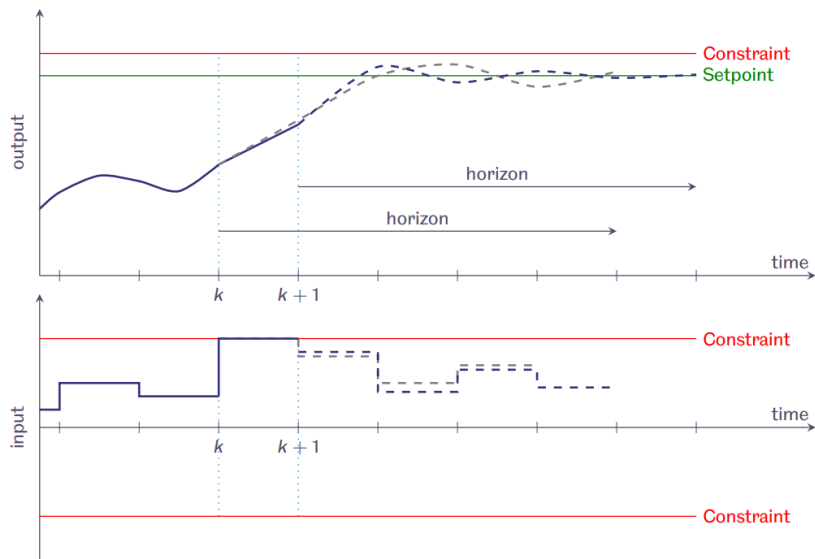
MPC - idea básica



MPC - idea básica



MPC - idea básica



MPC algoritmo

- Predicción.
- Optimización.
- Horizonte reciente.

MPC algoritmo - Predicción

- Usamos el modelo dinámico de la planta
- En DTLI,

$$\begin{aligned}x(k+1) &= f(x(k), u(k)) \\ y(k) &= g(x(k))\end{aligned}$$

- Set de predicciones **futuras** a partir del estado actual para k ,

$$\begin{aligned}\{ &u(k|k), u(k+1|k), \dots, u(k+N-1|k) \} \\ \{ &x(k|k), x(k+1|k), \dots, x(k+N|k) \} \\ \{ &y(k|k), y(k+1|k), \dots, y(k+N|k) \}\end{aligned}$$

MPC algoritmo - Optimización

- A partir de ese set, minimizar una función de costo,

$$J_N = \sum_{j=0}^{N-1} \mathcal{L}(x(k+j|k), u(k+j|k))$$

mientras satisfaga cualquier restricción en,

$$u_{min} \leq u(k) \leq u_{max}$$

$$x_{min} \leq x(k) \leq x_{max}$$

$$y_{min} \leq y(k) \leq y_{max}$$

MPC algoritmo - Horizonte de retroceso (reciente)

- Aplicando solo el primer resultado de la solución al problema de optimización,

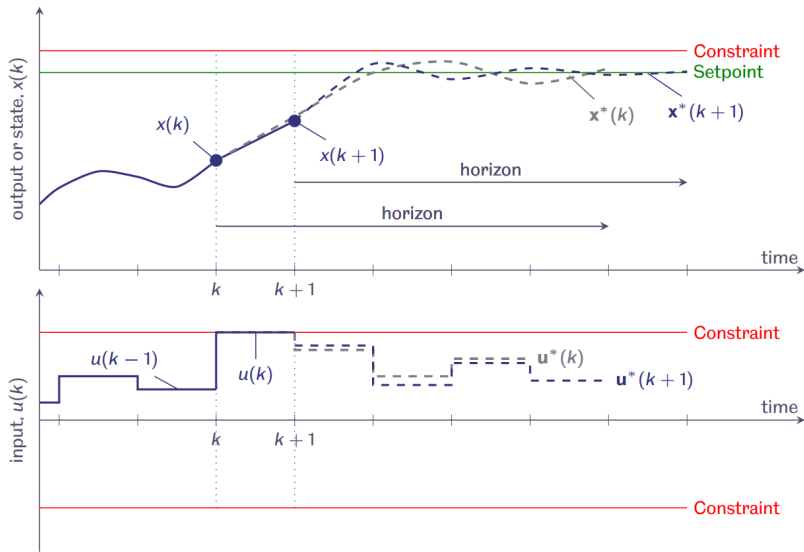
$$\begin{aligned}\mathbf{u}^*(k) &= \arg \min_{u(k)} J_N \\ &= \{\mathbf{u}^*(k|k), u^*(k+1|k), \dots, u^*(k+N-1|k)\}\end{aligned}$$

- Se cierra el lazo y la planta cambia,

$$\begin{aligned}x(k+1) &= \tilde{f}(x(k), \mathbf{u}^*(k)) \\ y(k+1) &= \tilde{g}(x(k))\end{aligned}$$

- Se repite el proceso para el siguiente instante de tiempo $k+1$.

MPC algorithm



MPC es una familia de algoritmos

Los sistemas pueden ser,

- Lineales o no lineales.
- Continuos o discretos.
- Híbridos (continuo+discreto).
- Determinístico o estocástico.

y se necesita como prerequisite,

- Teoría de espacio de estados.
- Control óptimo (LQR).
- Optimización convexa (funciones cuadrática). **Importante!**
- Programación dinámica (optimización multi-etapa).
- Sistemas no lineales (estabilidad de Lyapunov).
- ...

Control por MPC

Sea un sistema DLTI en espacio de estados,

$$\begin{aligned}x(k+1) &= A x(k) + B u(k) + w(k) \\ y(k) &= C x(k) + z(k), \quad k = 0, 1, 2, \dots\end{aligned}\tag{2}$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$, $w \sim \mathcal{N}(0, Q_w)$, $z \sim \mathcal{N}(0, Q_z)$.

El objetivo de control es regular $x \rightarrow 0$ mientras se minimize la función de costo,

$$\begin{aligned}J_N &= \sum_{j=0}^{N-1} \mathcal{L}(x(k+j|k), u(k+j|k)) \\ J_N &= \sum_{j=0}^{N-1} (\|x(k+j|k)\|_Q^2 + \|u(k+j|k)\|_R^2) + \|x(k+N|k)\|_P^2 \\ J_N &= \sum_{j=0}^{N-1} (x^T(k+j|k) Q x(k+j|k) + u^T(k+j|k) R u(k+j|k)) + x^T(k+N|k) P x(k+N|k)\end{aligned}\tag{3}$$

sujeto a,

$$\begin{aligned}x(k+1+j|k) &= A x(k+j|k) + B u(k+j|k) \\ x(k|k) &= x(k) \\ P_x x(k+j|k) &\leq q_x \\ P_u u(k+j|k) &\leq q_u \\ P_{x_N} x(k+N|k) &\leq q_{x_N}\end{aligned}$$

para $j = 0, 1, 2, \dots, N-1$, y $k = 0, 1, 2, \dots$

Donde $Q \succeq 0$, $P \succeq 0$, $R \succ 0$, y $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$ y $N \in \mathbb{N}$. $P_x x \leq q_x$,

$P_u u \leq q_u$, y $P_{x_N} x \leq q_{x_N}$ son las restricciones (polihedros).

Matriz de predicción de la dinámica del sistema

Recurvisamente,

$$x(k+1|k) = A x(k) + B u(k)$$

$$\begin{aligned} x(k+2|k) &= A x(k+1|k) + B u(k+1|k) \\ &= A^2 x(k) + AB u(k|k) + B u(k+1|k) \end{aligned}$$

$$\vdots = \vdots$$

$$\begin{aligned} x(k+N|k) &= A x(k+N-1|k) + B u(k+N-1|k) \\ &= A^N x(k) + A^{N-1}B u(k|k) + \dots + B u(k+N-1|k) \end{aligned}$$

agrupando,

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x(k+1|k) \\ x(k+2|k) \\ \vdots \\ x(k+N|k) \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}(k)} = \underbrace{\begin{bmatrix} A \\ A^2 \\ \vdots \\ A^N \end{bmatrix}}_F + \underbrace{\begin{bmatrix} B & 0 & \dots & 0 \\ AB & B & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A^{N-1}B & A^{N-2}B & \dots & B \end{bmatrix}}_G \underbrace{\begin{bmatrix} u(k|k) \\ u(k+1|k) \\ \vdots \\ u(k+N-1|k) \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}(k)} \quad (4)$$

la predicción de la dinámica resulta en,

$$\mathbf{x}(k) = F \mathbf{x}(k) + G \mathbf{u}(k) \quad (5)$$

donde $\mathbf{x}(k)$, y $\mathbf{u}(k)$ son los vectores de estados y entradas prededidas para $j = 0, 1, 2, \dots, N$.

Matriz de predicción de la función de costo

Reescribiendo la función de costo (3) como,

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{x}^T(k|k) \mathbf{Q} \mathbf{x}(k|k) + \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k+1|k) \\ \mathbf{x}(k+2|k) \\ \vdots \\ \mathbf{x}(k+N|k) \end{bmatrix}^T \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{Q} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{Q} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \mathbf{Q} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mathbf{P} \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{Q}}} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k+1|k) \\ \mathbf{x}(k+2|k) \\ \vdots \\ \mathbf{x}(k+N|k) \end{bmatrix} \\
 & + \begin{bmatrix} \mathbf{u}(k|k) \\ \mathbf{u}(k+1|k) \\ \vdots \\ \mathbf{u}(k+N-1|k) \end{bmatrix}^T \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{R} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{R} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \mathbf{R} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mathbf{R} \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{R}}} \begin{bmatrix} \mathbf{u}(k|k) \\ \mathbf{u}(k+1|k) \\ \vdots \\ \mathbf{u}(k+N-1|k) \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{6}$$

Ahora, con $\mathbf{x}(k|k) = \mathbf{x}(k)$, el problema es minimizar,

$$J_N(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)) = \mathbf{x}^T(k) \mathbf{Q} \mathbf{x}(k) + \mathbf{x}^T(k) \tilde{\mathbf{Q}} \mathbf{x}(k) + \mathbf{u}^T(k) \tilde{\mathbf{R}} \mathbf{u}(k) \tag{7}$$

sujeto a,

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{F} \mathbf{x}(k) + \mathbf{G} \mathbf{u}(k)$$

Matriz de predicción de la función de costo

Entonces sustituyendo (5) en (7),

$$J_N(x(k), u(k)) = x^T(k) Q x(k) + (F x(k) + G u(k))^T \tilde{Q} (F x(k) + G u(k)) + u^T(k) \tilde{R} u(k)$$

y realizando operaciones algebraicas, la función de costo en su forma compacta QP² es,

$$J_N(x(k), u(k)) = \frac{1}{2} u(k)^T H u(k) + c^T u(k) + \alpha \quad (8)$$

donde,

$$\begin{aligned} H &= 2(G^T \tilde{Q} G + \tilde{R}) \\ c &= L x(k) \\ L &= 2G^T \tilde{Q} F \\ \alpha &= x^T(k) M x(k) \\ M &= Q + F^T \tilde{Q} F \end{aligned} \quad (9)$$

²QP unconstrained

Polihedros - inecuaciones lineales

Si, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ y u es escalar. Las restricciones (saturación),

$$x_{min} \leq x(k+j|k) \leq x_{max}, \quad u_{min} \leq u(k+j|k) \leq u_{max}$$

se pueden transformar a inecuaciones como,

$$\begin{bmatrix} +1 & 0 \\ 0 & +1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x(k+j|k) \leq \begin{bmatrix} +x_{max,1} \\ +x_{max,2} \\ -x_{min,1} \\ -x_{min,2} \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} +1 \\ -1 \end{bmatrix} u(k+j|k) \leq \begin{bmatrix} +u_{max} \\ -u_{min} \end{bmatrix}$$

Polihedros - inecuaciones lineales

En general,

$$\underbrace{\begin{bmatrix} +I_{n \times n} \\ -I_{n \times n} \end{bmatrix}}_{P_x} x(k+j|k) \leq \underbrace{\begin{bmatrix} +x_{max} \\ -x_{min} \end{bmatrix}}_{q_x}$$
$$\underbrace{\begin{bmatrix} +I_{m \times m} \\ +I_{m \times m} \end{bmatrix}}_{P_u} u(k+j|k) \leq \underbrace{\begin{bmatrix} +u_{max} \\ -u_{min} \end{bmatrix}}_{q_u}$$

y para,

$$y_{min} \leq y(k+j|k) \leq y_{max}$$

es equivalente a,

$$\underbrace{\begin{bmatrix} +C \\ -C \end{bmatrix}}_{P_x} x(k+j|k) \leq \underbrace{\begin{bmatrix} +y_{max} \\ -y_{min} \end{bmatrix}}_{q_x}$$

Polihedro de predicción de las restricciones (estados)

Definiendo las restricciones de los estados como,

$$\begin{cases} P_x x(k+j|k) & \leq q_x \\ P_{x_N} x(k+N|k) & \leq q_{x_N} \end{cases}$$

agrupando³,

$$\underbrace{\begin{bmatrix} P_x \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{P}_{x_0}} x(k|k) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ P_x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P_x & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & P_{x_N} \end{bmatrix}}_{\tilde{P}_x} \underbrace{\begin{bmatrix} x(k+1|k) \\ x(k+2|k) \\ \vdots \\ x(k+N|k) \end{bmatrix}}_{x(k)} \leq \underbrace{\begin{bmatrix} q_x \\ q_x \\ q_x \\ \vdots \\ q_{x_N} \end{bmatrix}}_{\tilde{q}_x}$$

resulta en,

$$\tilde{P}_x x(k) \leq \tilde{q}_x - \tilde{P}_{x_0} x(k) \quad (10)$$

³ P_{x_N} , q_{x_N} restricciones terminales que definen la estabilidad del sistema.

Polihedro de predicción de las restricciones (entrada)

Las restricciones de entrada son,

$$P_u u(k+j|k) \leq q_u$$

agrupando,

$$\underbrace{\begin{bmatrix} P_u & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P_u & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & P_u \end{bmatrix}}_{\tilde{P}_u} \underbrace{\begin{bmatrix} u(k|k) \\ u(k+1|k) \\ \vdots \\ u(k+N-1|k) \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}(k)} \leq \underbrace{\begin{bmatrix} q_u \\ q_u \\ \vdots \\ q_u \end{bmatrix}}_{\tilde{q}_u}$$

resulta en,

$$\tilde{P}_u \mathbf{u}(k) \leq \tilde{q}_u \quad (11)$$

Agrupando ambos polihedros

Agrupando ambos polihedros en forma compacta,

$$\begin{cases} \tilde{P}_u \mathbf{u}(k) & \leq \tilde{q}_u \\ \tilde{P}_x \mathbf{x}(k) & \leq \tilde{q}_x - \tilde{P}_{x_0} \mathbf{x}(k) \end{cases}$$

usando (5) para eliminar $\mathbf{x}(k)$,

$$\begin{aligned} \tilde{P}_x (F \mathbf{x}(k) + G \mathbf{u}(k)) & \leq \tilde{q}_x - \tilde{P}_{x_0} \mathbf{x}(k) \\ \tilde{P}_x G \mathbf{u}(k) & \leq \tilde{q}_x + (-\tilde{P}_{x_0} - \tilde{P}_x F) \mathbf{x}(k) \end{aligned}$$

agrupando,

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{P}_u \\ \tilde{P}_x G \end{bmatrix}}_{P_c} \mathbf{u}(k) \leq \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{q}_u \\ \tilde{q}_x \end{bmatrix}}_{q_c} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -\tilde{P}_{x_0} - \tilde{P}_x F \end{bmatrix}}_{S_c} \mathbf{x}(k) \quad (12)$$

entonces,

$$P_c \mathbf{u}(k) \leq q_c + S_c \mathbf{x}(k) \quad (13)$$

Al fin!...

El problema de control MPC con restricciones en su forma compacta es minimizar,

$$J_N^*(x(k), \mathbf{u}(k)) = \min_{\mathbf{u}(k)} \frac{1}{2} \mathbf{u}(k)^\top H \mathbf{u}(k) + c^\top \mathbf{u}(k) + \alpha \quad (14)$$

sujeto a,

$$P_c \mathbf{u}(k) \leq q_c + S_c x(k)$$

donde la solución óptima es,

$$\mathbf{u}^*(k) = \arg \min_{\mathbf{u}(k)} \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{u}(k)^\top H \mathbf{u}(k) + x^\top(k) L^\top \mathbf{u}(k) + \alpha : P_c \mathbf{u} \leq q_c + S_c x(k) \right\} \quad (15)$$

$$\mathbf{u}^*(k) = \{ \mathbf{u}^*(k|k), \mathbf{u}^*(k+1|k), \dots, \mathbf{u}^*(k+N-1|k) \}$$

$\mathbf{u}^*(k|k)$ es la ley de control no lineal implícita de tiempo invariante que se aplica a la planta y que considera las restricciones/saturaciones a priori,

$$\mathbf{u}^*(k|k) = \kappa_N(x(k)) \quad (16)$$

que además está listo para introducir a su optimizador favorito, e.g. quadprog en Matlab, ACADOS para sistemas embebidos.

Los sets

La región de viabilidad (*feasibility region*) \mathcal{X}_N es el set de estados para los cuales la función de costo tiene solución,

$$\mathcal{X}_N = \{x(k) : \mathcal{U}_N(x(k)) \neq \emptyset\} \quad (17)$$

donde el set viable \mathcal{U}_N es,

$$\mathcal{U}_N(x(k)) = \{u(k) : P_c u(k) \leq q_c + S_c x(k)\} \quad (18)$$

Set de restricciones de entrada,

$$\mathcal{U} = \{u(k) : P_u u(k) \leq q_u\} \subseteq \mathbb{R}^m \quad (19)$$

set de restricciones de estados,

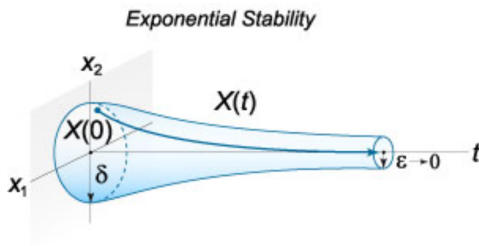
$$\mathcal{X} = \{x(k) : P_x x(k) \leq q_x\} \subseteq \mathbb{R}^n \quad (20)$$

y el set de restricciones terminal,

$$\mathcal{X}_f = \{x(k) : P_{x_N} x(k) \leq q_{x_N}\} \subseteq \mathbb{R}^n \quad (21)$$

Estabilidad por Lyapunov - no lineal

Definición,



Para un sistema $\dot{x} = f(x)$, el origen $x = 0$ es **exponencialmente estable** en una región de atracción \mathcal{X} si existe un $c > 0$ y un $\gamma \in (0, 1)$ tal que,

$$|x(k)| \leq c \gamma^k |x(0)| \text{ para todo } x(0) \in \mathcal{X} \text{ y } k > 0$$

Estabilidad no lineal en MPC

Para garantizar estabilidad, el objetivo es construir un set terminal de restricciones \mathcal{X}_f para que exista solución después del horizonte N y satisfaga las restricciones del problema en modo-2,

$$\begin{aligned} x(k+N+j|k) &\in \mathcal{X}, \quad j=1,2,\dots \\ u(k+N+j|k) &\in \mathcal{U}, \quad j=1,2,\dots \end{aligned} \quad (22)$$

Usando un controlador deadbeat para el modo-2, es decir, $j=N, \dots, N+n-1$, en (22),

$$\begin{aligned} x(k+j|k) &= (A+BK)^j x(k+N|k) \\ u(k+j|k) &= K(A+BK)^j x(k+N|k) \end{aligned} \quad (23)$$

extendiendo las restricciones en n pasos después del modo-1,

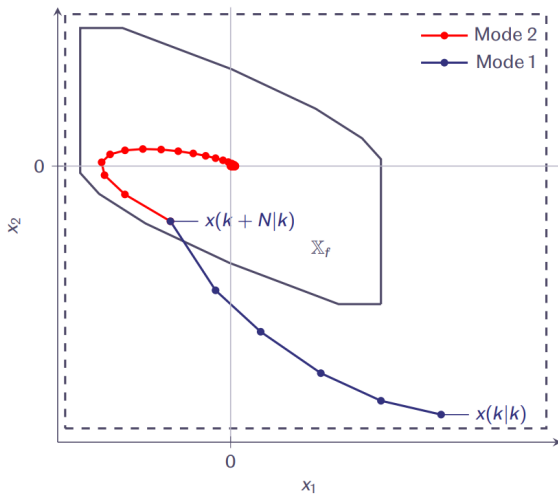
$$\underbrace{\begin{bmatrix} P_x & 0 & \dots & 0 \\ P_u K & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P_x & \dots & 0 \\ 0 & P_u K & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}}_{P_{x_N}} \begin{bmatrix} (A+BK)^0 \\ (A+BK)^1 \\ \vdots \\ (A+BK)^{n-1} \end{bmatrix} x(k+N|k) \leq \underbrace{\begin{bmatrix} q_x \\ q_u \\ q_x \\ q_u \\ \vdots \end{bmatrix}}_{q_{x_N}} \quad (24)$$

Entonces, para cualquier $x(k+N|k) \in \mathcal{X}_f$

$$\mathcal{X}_f = \{x(k+N|k) \in \mathbb{R}^n : P_{x_N} x(k+N|k) \leq q_{x_N}\} \quad (25)$$

\mathcal{X}_f tiene la propiedad de set invariante, lo que significa que las predicciones del sistema en modo-2 se quedarán en \mathcal{X}_f para $k \rightarrow \infty$.

Modo-1 y modo-2



En conclusión, la estabilidad es garantizada si,

- (A, B) es estabilizable.
- $Q \succeq 0, R \succ 0$
- $(Q^{1/2}, A)$ es observable. ($Q^{1/2} = C$)
- P satisface la ecuación de Lyapunov para un estabilizador K (LQR),
 $(A + B K)^T P (A + B K) - P = -(Q + K^T R K)$
- \mathcal{X}_f es un set invariante para la dinámica del modo-2: $x(k+1) = (A + B K) x(k)$

entonces, dado un $x(k) \in \mathcal{X}_N$,

- $J_N^*(x(k))$ es una función de Lyapunov para la dinámica del modo-1:
 $x(k+1) = Ax(k) + B\kappa_N(x(k))$, y es recursivamente viable, esto es: si existe una solución viable $J_N^*(x(k))$, entonces las soluciones subsecuentes $J_N^*(x(k+1)), J_N^*(x(k+2)), \dots$ existen y son viables en \mathcal{X}_N .
- Todas las restricciones se satisfacen.
- El origen $x = 0$ es asintóticamente estable en una Región de Atracción (RoA) \mathcal{X}_N .
- \mathcal{X}_N es un set invariante para la dinámica en modo-1:
 $x(k+1) = Ax(k) + B\kappa_N(x(k))$.

Ejemplo MPC

Sistema inestable de fase no-mínima,

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 1.12 & 0.20 \\ 0.11 & 1.01 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0.11 \\ 0.06 \end{bmatrix} u(k) + w(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} x(k) + z(k)$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1.5 \end{bmatrix}^\top$$

$$Ts = 0.1, \quad N = 10, \quad k = 100$$

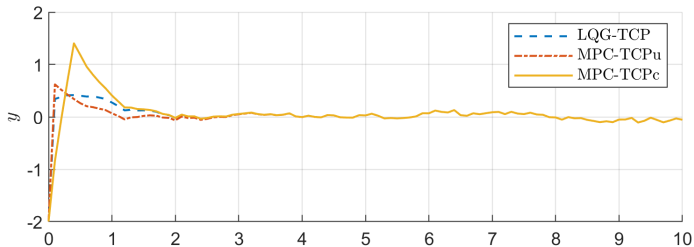
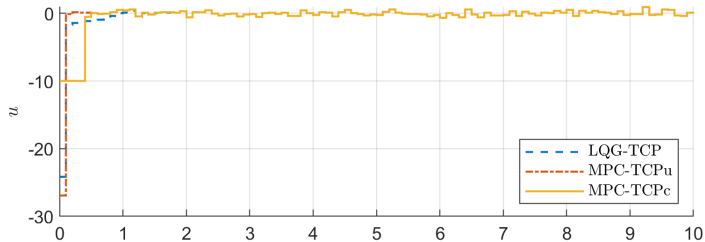
$$Q = \begin{bmatrix} 1e^6 & 0 \\ 0 & 1e^6 \end{bmatrix}, \quad R = 1$$

$$w(k) \sim \mathcal{N}(0, 0.01), \quad z(k) \sim \mathcal{N}(0, 0.01)$$

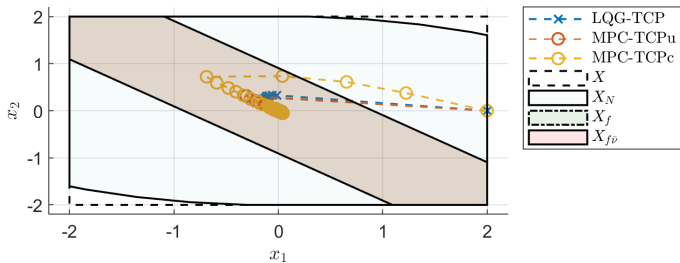
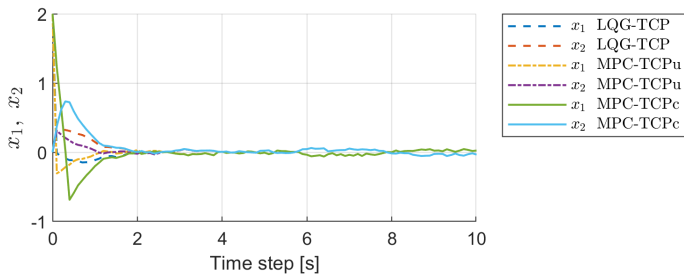
Restricciones,

$$|x| \leq 2, \quad |u| \leq 10$$

Ejemplo



Ejemplo



20 años después... pero solo es la superficie.

- MPC no lineal.
- MPC explícito.
- MPC robusto.
- MPC estocástico.
- MPC distribuido y descentralizado.
- MPC adaptativo.
- MHE (Moving Horizon Estimation)
- ...

Referencias

- [1] Martin Bak. “Control of systems with constraints”. PhD thesis. Technical University of Denmark, Department of Automation, 2000.
- [2] Rudolf Emil Kalman et al. “Contributions to the theory of optimal control”. In: *Bol. soc. mat. mexicana* 5.2 (1960), pp. 102–119.
- [3] J. Doyle. “Guaranteed margins for LQG regulators”. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 23.4 (1978), pp. 756–757. DOI: 10.1109/tac.1978.1101812.
- [4] D.Q. Mayne, J.B. Rawlings, C.V. Rao, and P.O.M. Scokaert. “Constrained model predictive control: Stability and optimality”. In: *Automatica* 36.6 (2000), pp. 789–814. DOI: 10.1016/s0005-1098(99)00214-9.