**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ**

**БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

**МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ**

**Кафедра веб-технологий и компьютерного моделирования**

СПЕКТРАЛЬНЫЙ МЕТОД ПЕРЕМЕННЫХ НАПРАВЛЕНИЙ ДЛЯ ЗАДАЧ, ОПИСЫВАЕМЫХ ДВУМЕРНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Курсовая работа

Окунева Павла Андреевича

студента 3 курса специальности

“Веб-программирование и интернет технологии”

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук, доцент

Волков В.М.

Минск, 2020

[Введение 3](#_Toc41857046)

[О работе 5](#_Toc41857047)

[1. Метод сеток 6](#_Toc41857048)

[1.1.Основа метода сеток 6](#_Toc41857049)

[1.2 Сходимость и точность схем 9](#_Toc41857050)

[2. Разностная схема для двумерного уравнения теплопроводности 11](#_Toc41857051)

[2.1 Постановка задачи 11](#_Toc41857052)

[2.2 Метод сеток для двумерного уравнения теплопроводности 12](#_Toc41857053)

[3. Спектральные методы 18](#_Toc41857054)

[3.1 Введение в спектральные методы 18](#_Toc41857055)

[3.2 Интерполирование в узлах полиномов Чебышева 18](#_Toc41857056)

[3.3 Построение матриц спектрального дифференцирования 21](#_Toc41857057)

[3.4 Спектральный метод переменных направлений 22](#_Toc41857058)

[3.5 Реализация с помощью Matlab 23](#_Toc41857059)

[Заключение 27](#_Toc41857060)

[Приложение A 29](#_Toc41857061)

Введение

Двумерное уравнение теплопроводности, как и любой его N-мерный аналог относятся к классу дифференциальных уравнений в частных производных (от англ. - *partial differential equations*).

Дифференциальные уравнения в частных производных относительно неизвестной функции имеют вид:

Такие уравнения позволяют математически описывать явления, имеющие место в непрерывном (континуальном) подпространстве объектов. Одним из важнейших приложений данных уравнений являются уравнения, описывающие изменяющиеся во времени температурные показатели среды – это уравнения теплопроводности. Уравнение диффузии тепла принадлежит классу линейных (по *u* и её частным производным) уравнений и имеет вид:

В отличие от обыкновенных дифференциальных уравнений, дифференциальные уравнения в частных производных обеспечивают дополнительные возможности моделирования реальных прикладных задач. В большинстве случаев задачи для уравнений в частных производных могут рассматриваться как естественное обобщение краевых задач и задач Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений, потому что вообще говоря, решения ДУЧП – это функции, и они должны удовлетворять условиям, которые выполняются на границе рассматриваемой среды и для определенного момента времени (как правило, *начального*). Вот и рассматриваемый в теме данной работы класс дифференциальных уравнений в частных производных не является исключением.

Известны методы нахождения классических решений задачи Коши для уравнения теплопроводности – в курсе уравнений математической физики, преподаваемом на механико-математическом факультете, рассказывается про метод разделения переменных (англ. - *separation of variables*), позволяющем свести ДУЧП к системе ОДУ от одной переменной.

В 1 параграфе данной работы будут кратко рассмотрены методы конечных разностей решения таких дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с указанными краевыми условиями 1 рода.

О работе

В данной работе были получены и проанализированы результаты нахождения решений линейного нестационарного дифференциального уравнения в частных производных, для которого поставлена задача Дирихле в виде:

численным методом переменных направлений в двух реализациях: с помощью матрицы разностного дифференцирования и матрицы спектрального дифференцирования. Однако сразу стоит отметить, что основное направление данной работы – исследование эффективности поиска численного приближения искомой функции сеточной функцией , заданной на дискретном множестве точек – *узлов –* некоторой сетки , узлами которой являются корни полиномов Чебышева .

Следует понимать, что спектральный метод решения дифференциальных уравнений является не самым удачным с точки зрения объёма вычислений для решения, например, задачи Коши, однако его использование в методе переменных направлений, рассматриваемом в данной работе, ничуть не хуже разностного и обладает всеми преимуществами экономичных разностных схем – абсолютной устойчивостью решения при различных параметрах разбиения и погрешностью аппроксимации порядка

, где - приращения аргументов.

В работе также приведены необходимые сведения для понимания подхода решения дифференциальных уравнений с помощью метода сеток.

1. Метод сеток

1.1.Основа метода сеток

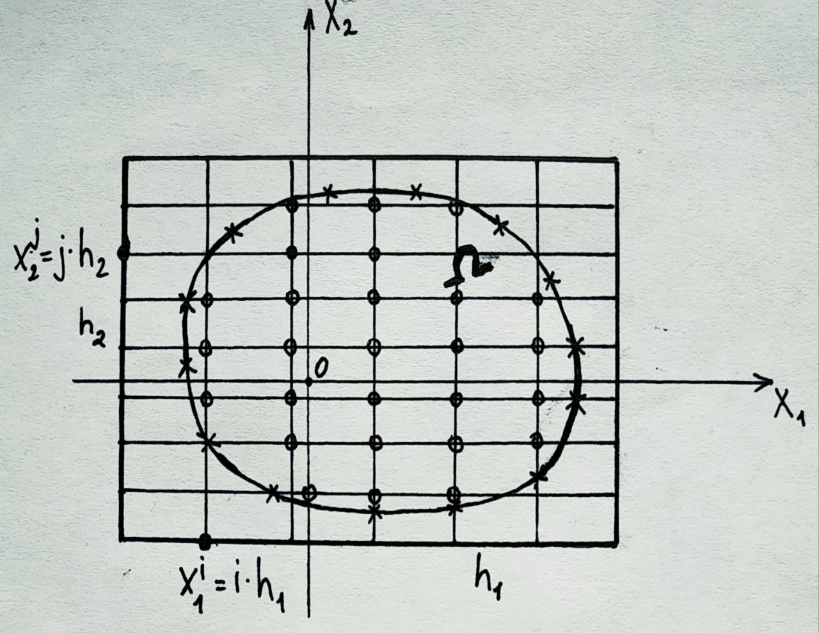
Суть метода сеток состоит в следующем: пусть в некоторой области c границей Г требуется найти решение дифференциального уравнения

, (1.1)

удовлетворяющего определенным условиям на границе, заданным как

, (1.2)

где - входные данные задачи. Область G + Г непрерывного изменения независимых переменных заменяется дискретным множеством точек, называемым *сеткой*. Плотность расположения узлов сетки характеризуется параметром (или вектором параметров) , который показывает насколько точно дискретная область аппроксимирует непрерывную. Узлы сетки связаны соотношением , вообще говоря , в противном случае сетка называется *равномерной*.

Рис. 1 Пример равномерной сетки на области с границей

Пример построения сетки на 2-мерной области: рассмотрим функцию определенную в области . Через точки на плоскости, заданные соотношениями проведем прямые, параллельные осям координат. Получим сеточную область (рис. 1), которая содержит узлы, находящиеся внутри (внутренние) и узлы, лежащие на границе (граничные), т.е. , - совокупность внутренних узлов, - совокупность граничных узлов. Эта сетка имеет шаги по направлениям соответственно. Если , говорят, что задана *однородная* сетка. Таким образом нам удаётся заменить непрерывную область семейством сеточных областей , каждая из которых зависит от параметров разбиения . Вместо функций непрерывного аргумента возникают сеточные функции .

Производные, входящие в уравнения (1.1) и (1.2) заменяются (аппроксимируются) с помощью разностных уравнений. То есть дифференциальные операторы и , заменяются разностными операторами и , где - сеточный аналог функции на дискретном множестве точек из .

Простейший пример аппроксимации дифференциального оператора: пусть задан линейный дифференциальный оператор и построена сеточная область:

(1.3)

фиксируем некоторую внутреннюю точку и возьмём точки . Для аппроксимации можно использовать любое из следующий выражений для :

, (1.4)

эти выражения называются *правая разностная производная* и *левая разностная производная* соответственно. Кроме того есть параметризованная формула, по которой можно получить выражение для любой разностной производной используя линейную комбинацию выражений (1.4)

(1.5)

при выражение имеет вид:

(1.6)

и называется *центральной разностной производной*.

При аппроксимации естественным образом возникает вопрос о погрешности значения приближенного выражения. Для точки *t* погрешностью аппроксимации является выражение . Проанализируем погрешность разностного выражения, предполагая что функция достаточно гладкая (т.е. *n* раз дифференцируемая) в окрестности точки области. Тогда при малом *h* имеет место разложение Тейлора:

(1.7)

подставляя в разложения (1.4) и (1.6) получаем:

(1.8.1)

(1.8.2)

(1.8.3)

Рассчитаем погрешности аппроксимации первого разностного дифференциала для выражений (1.8.1,2,3) по формуле . Они будут равны соответственно . Таким образом правая и левая разностные производные аппроксимируют c первым порядком*,* а центральная – со вторым.

Для дифференциалов второго порядка справедливо представление

,

откуда видно, что оператор , аппроксимирующий второй дифференциал, задействует для любого внутреннего узла три точки: (трехточечный шаблон). Используя разложение функции по формуле Тейлора (1.7) получим . Следовательно погрешность аппроксимации .

В принципе такой процесс повышения порядка дифференциалов можно продолжить и получить для достаточно гладких функций аппроксимацию любого порядка. При этом число задействованных узлов возрастает. Однако такой прием не рекомендуется, поскольку с ростом порядка аппроксимации может возникнуть неустойчивость разносного оператора, что может привести к большим вычислительным затратам.

В результате описанных выше действий система из ур.(1.1), (1.2) для функции заменяется на систему разностных отношений функции :

, (1.9)

(1.10)

**Определение** *Семейство уравнений (1.9), (1.10) относительно значений функции*  *в узлах сетки, зависящее от параметра h, называется разностной схемой задачи (1.1), (1.2).*

1.2 Сходимость и точность схем

Основной целью приближенного метода является получение решения исходной непрерывной задачи с заданной точностью за конечное число действий. Чтобы выяснить вопрос сходимости решения задачи (1.9), (1.10) к решению задачи (1.1), (1.2) с любой заданной точностью нужно сравнить. Однако возникает вопрос по какой норме их сравнивать, ведь функция не входит в пространство сеточных функций .

Для этого на практике часто используется *проектирование* функции на сетку: , где - оператор, действующий из в .

В простейшем применении проектирования вводят на пространстве сеточных функций **сеточную норму**  , таким образом, чтобы выполнялось условие

Примеры сеточных норм:

1) Сеточный аналог равномерной нормы

,

где - замкнутая ограниченная область, имеет вид:

,

где - сетка, построенная по области .

2) Сеточные аналоги норм

в пространстве на отрезке [0,1] в случае равномерной сетки с шагом *h*, содержащей *N+1* узлов, определяются с помощью интегральных сумм:

, ,

**Определение 1** Говорят, что решение разностной задачи (1.9), (1.10) сходится к решению задачи (1), (2) (схема сходится), если

, (1.11)

Разностная схема (1.9), (1.10) *имеет точность* , если при достаточно малом выполняется неравенство

,

где *M > 0 –* постоянная, не зависящая от , *n > 0* , выражение называется *погрешностью разностной схемы* (1.9), (1.10).

Выражения , (1.12)

называются **погрешностью аппроксимации** для уравнения и для условия на решении задачи (1.1), (1.2).

Говорят, что разностная схема (1.9), (1.10) обладает *n-ым порядком аппроксимации*, если , где - нормы пространств сеточных функций, заданных на сеточных областях .

Свойство непрерывной по *h* зависимости решения от

называется устойчивостью схемы (9), (10). Это означает, что при любых

малых найдутся такие , не зависящие от *h,* что

(1.13)

Если операторы - линейны, то погрешность схемы удовлетворяет разностной схеме (1.11), которая отличается от разностной схемы (1.9), (1.10) лишь правой частью. Тогда разностная схема (1.9), (1.10) является устойчивой, если верно неравенство:

(1.14)

Таким образом, если линейная схема аппроксимации (1.9), (1.10) для задачи (1.1), (1.2) устойчива, то по определению 1 она сходится. При этом порядок точности схемы определяется её порядком аппроксимации.

2. Разностная схема для двумерного уравнения теплопроводности

2.1 Постановка задачи

Физический процесс диффузии тепла, проходящий внутри некоторой конечно-мерной области , описывается уравнением:

- n-мерное уравнение теплопроводности, (2.1)

где - функция пространства и времени ; - n-мерный оператор Лапласа, действующий на функцию; D — коэффициент теплопроводности области, в общем случае зависит от *u*; *f* = *f* (*x,t*) - функция источника тепла.

Выражение (2.1) выражает зависимость между первой производной функции *u* по времени и линейной комбинацией вторых производных по пространству (множеству точек ).

В (2.1) при *n =* 2 получим требуемый для исследования вид:

, (2.2)

где областью определения функции является 3-мерный брус

, D=1 без ограничения общности, а .

Требуется в области

найти непрерывную функцию, удовлетворяющую краевым условиям (2.3), (2.4) на границе:

(2.3)

(2.4)

2.2 Метод сеток для двумерного уравнения теплопроводности

Процесс построения разностных схем для дифференциальных уравнений заключается в следующей последовательности действий:

1. Необходимо заменить область непрерывного изменения аргумента областью его дискретного изменения.

2. Необходимо заменить дифференциальный оператор некоторым разностным оператором , а также сформулировать разностный аналог для краевых условий задачи.

Пусть искомая функция *u* = *u*(*x, y, t*) - функция непрерывно меняющихся аргументов, необходимо построить конечно-разностную аппроксимацию этой функции на некотором дискретном множестве точек. Аналогично примеру построения сетки из п.1.1 построим сетку

покрывающую область :

с и вместе с этим

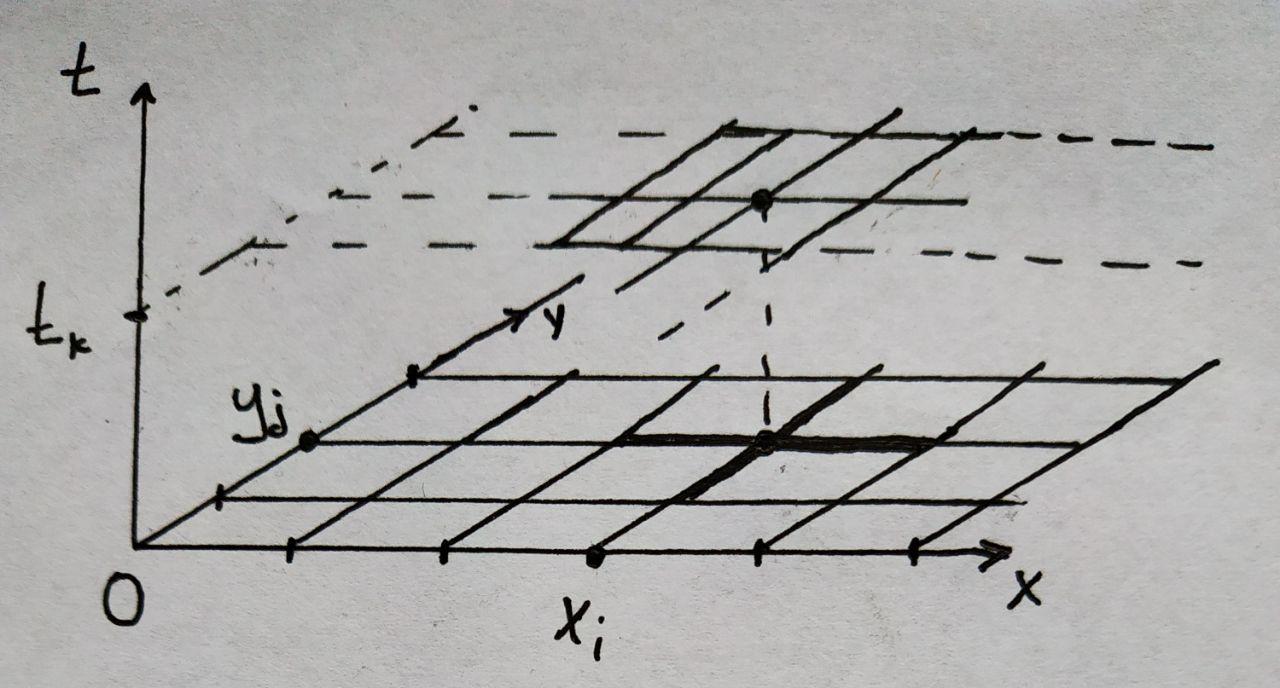
ещё сетку по временной переменной с шагом .

Рис. 5 Пространственно-временная сетка

Полученная сетка сетки (рис. 5) образует дискретную область, в узлах которой ищутся численные приближения искомой функции. Поскольку в условии не оговорено, каким образом разбиваются оси аргументов, воспользуемся равномерным распределением узлов:

Для аппроксимации производных уравнения (2.2) используются различные шаблоны взаимного расположения узлов на сетке (2.5), которые называются *сеточными шаблонами*. Далее будем использовать специальную индексацию для значений сеточной функции .

Воспользуется известными формулами (2.6.1,2,3) конечно-разностных аппроксимаций для замены дифференциалов уравнения (2.2):

Напишем в качестве сеточного шаблона двухслойную схему с весами в виде операторного уравнения

в результате конечно-разностное представление исходного уравнения (2.2) имеет вид:

При схема с весами эквивалентна *явной* схеме, при -

*неявной*, а при - более известна как *схема Кранка-Николсон*.

Явная схема обладает

преимуществом в нахождении решений на *k*+1 слое, когда известно решение на слое *k*, поскольку требует количества вычислений пропорционально числу узлов сетки :

Однако она устойчива при условии , где *p —* размерность пространства, и видно, что с ростом числа измерений необходимо уменьшать шаг , то есть схема условно устойчива.

В случае неявной схемы

для определения необходимо решать систему уравнений, число которых пропорционально числу узлов сетки:

но неявная схема является безусловно устойчивой.

Существуют компромиссные схемы, так называемые экономичные схемы, которые используют достоинства каждой из схем (объём вычислений, как в явной, и безусловная устойчивость, как в неявной). К классу таких схем относится и продольно-поперечная схема (метод переменных направлений).

Суть метода переменных направлений состоит в том, что переход на *k*+1 слой осуществляется в 2 шага, сначала применяя двухслойную схему, заданную **неявно** по *x* и **явно** по *y*, а после схему, заданную наоборот – **явно** по *x* и **неявно** по *y.*

**1 шаг** , (2.7)

**2 шаг**  (2.8)

где можно рассматривать как значение при

Эти уравнения пишутся во всех внутренних узлах сетки и для всех .

Схемы МПН (метода переменных направлений) для (2.7), (2.8) удобно представить в виде операторных уравнений (2.9), (2.10):

, где

, где

Вычитая из уравнения (2.7) уравнение (2.8), получим равенство, связывающее значения вспомогательной функции со значениями искомой сеточной функции на слоях *k*, *k*+1:

, (2.11)

которое должно выполняться во всех узлах, вплоть до граничных.

Равенство (2.11) позволяет получить граничные условия для при :

На каждом целом слое по времени граничные условия (2.3) аппроксимируются точно:

для *i* = 0, 1, …, *N* ,

для *j* = 0, 1, …, *M*, *k* = 0,1,…;

а начальные условия из (2.4): .

Добавляя к равенству (11) граничные условия для функции при *i* = 0 и *i* = *N,* при каждом фиксированном *j* = 1, 2, …, *M-1* получаем систему (2.12) из *N+1* неизвестных - :

(2.12)

которая решается методом прогонки. Для этого при каждом *j* совершится *O*(*N*+1) действий. Когда значения на промежуточном слое *k+0,5* найдены, добавляя к равенству (2.12) граничные условия для численной функции при *j* = 0 и *j* = *M,* при каждом фиксированном *i* = 1, 2, …, *N*-1 получаем систему (15) из *M+1* неизвестных:

, (2.13)

где - искомые значения. Которая также решается прогонкой. Для этого при каждом *i* совершится *O*(*M+1*) действий. Завершается переход на новый слой нахождением и для всех *j* из граничных условий. Таким образом для перехода со слоя *k* на слой *k+1* необходимо затратить *O*((*N+1*)(*M+1*)) действий.

Так как прогонка требует на каждый узел числа операций, не зависящего от шага сетки, то описываемый метод будет экономичным в силу своей абсолютной устойчивости.

Матрицы систем (2.13), (2.14) , представимы в виде трёхдиагональных матриц (рис.2).

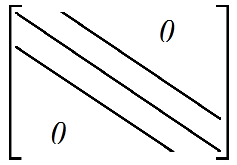


Рис. 2 Структура трёхдиагональной матрицы

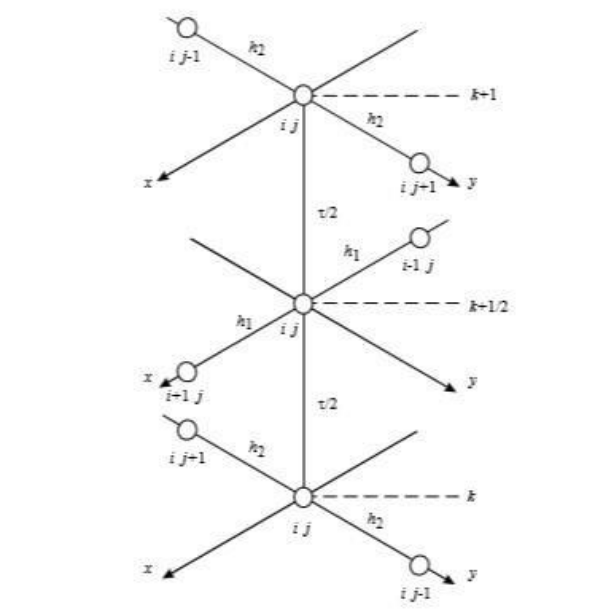


Рис. 3 Шаблон продольно-поперечной схемы(МПН)

3. Спектральные методы

3.1 Введение в спектральные методы

Спектральные методы относятся к высокоточным методам. Принцип, лежащий в основе всех спектральных методов, заключается в сведении исходных дифференциальных уравнений в частных производных к системе алгебраических уравнений на основе представления искомого решения в виде суперпозиции **базисных функций**, в качестве которых, как правило, выступают системы ортогональных тригонометрических или алгебраических полиномов. Как точность, так и вычислительная сложность спектральных методов достаточно велика. В связи с этим представляет интерес сравнение эффективности этих методов с более экономичными, но менее точными подходами на решении конкретных прикладных задач.

Класс спектральных методов, применяемых для решения дифференциальных задач, предоставляет иную модель аппроксимации искомой функции на конечном множестве узлов. Главная цель этой части – дать представление о спектральном методе для решения двумерного уравнения теплопроводности в прямоугольной области, количественно оценить преимущества и недостатки, которые возникают при численном решений таких задач на различных сеточных шаблонах.

3.2 Интерполирование в узлах полиномов Чебышева

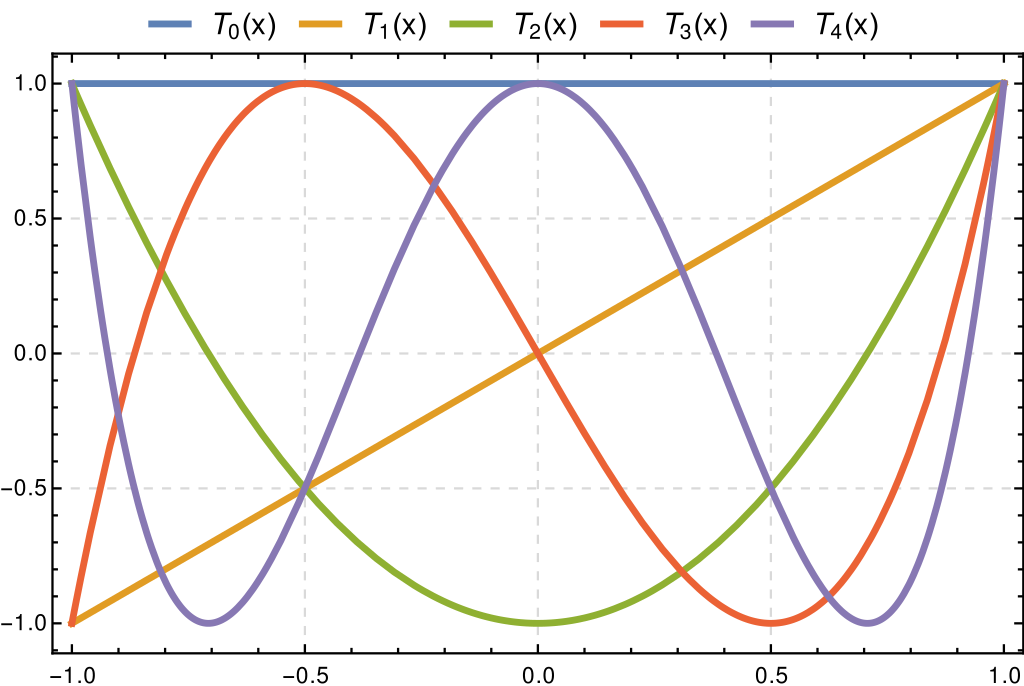
Полиномом Чебышева первого рода называется такой полином от *x* степени *n,* который может быть определен следующим образом: . В тригонометрическом смысле с помощью полиномов Чебышева можно отыскать значение косинуса любого кратного угла, для этого достаточно положить .

Первые 5 полиномов Чебышева 1 рода при *n* = 0,1,2,3,4 равны:

и изображены на рис. 4.

Любой полином может быть определен следующим рекуррентным соотношением:

Спектральные методы появляются тогда, когда необходимо производить интерполирование функции на некотором интервале [*a*; *b*]. Многомерную область в конечном счёте можно представить в качестве совокупности одномерных интервалов. В качестве частного случая любого одномерного интервала можно взять интервал [-1;1].

Рис. 4 График, иллюстрирующий поведение некоторых полиномов 1 рода на отрезке [-1;1]

Интерполирование функции *f* (x) делается в некоторых *N* точках области, на которой эта функция задана, при условии, что значение интерполяционного полинома в этих точках совпадает со значением функции. Пусть и - множество точек(узлов) некоторой сетки , для определенности пусть точки распределены следующим образом:

Для этих узлов можно задать следующие законы распределения:

**Равноудалённые точки:**

**Нули полиномов Чебышева:**

**Экстремальные т. п. Чебышева:**

Однако не каждое распределение гарантирует сходимость полинома к искомой функции при . Следующий пример наглядно демонстрирует отсутствие сходимости для непрерывной функции в равноудаленных узлах.

**Феномем Рунге** Пусть точки распределены равноудалённо на отрезке [-1;1] , тогда интерполяционный полином не сходится равномерно при для непрерывной функции (рис. 6).

Таким образом построение сеток на узлах полиномов Чебышева чаще бывает более выгодным, чем неоправданным. И для решения дифференциальных уравнений спектральным методом в этой работе будет использована сетка, построенная именно на этих узлах, а точнее на экстремумах полиномов Чебышева.

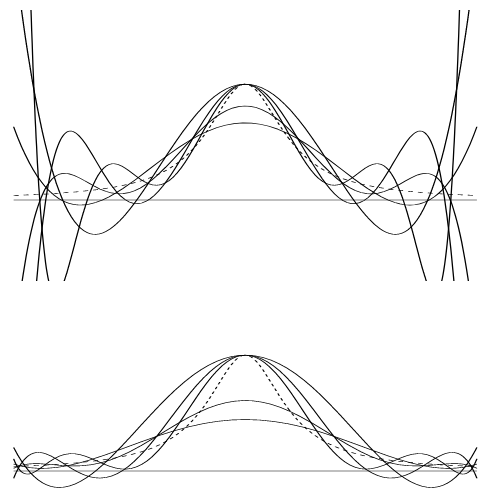


Рис. 6 Интерполирование полиномами 4 и 8 степени в равноудалённых узлах (сверху) и в нулях полиномов Чебышева (снизу)

3.3 Построение матриц спектрального дифференцирования

Как уже было отмечено в этом параграфе в основе спектрального метода лежит принцип построения приближенной функции с помощью линейной комбинации базисных функций

,

где значения коэффициентов совпадают со значениями функции в соответствующим узлах . В этом случае достаточно компактно выразить производные интерполируемой функции в узлах сетки:

(3.1)

Выражение (3.1) для приближенного вычисления производных сеточной функции представляет собой не что иное, как произведение некоторой матрицы *-* матрицы спектрального дифференцирования – на заданный вектор :

(3.2)

Опишем процесс построения матрицы спектрального дифференцирования. Вспомним, что в данной работе описывается метод сеток для решения двумерного уравнения теплопроводности с краевыми условиями. Одним из ключевых этапов реализации метода является построение конечных аппроксимации вторых дифференциалов на сетке

, .

Матрица спектрального дифференцирования второго порядка для аппроксимации значений второго дифференциала будет строиться по базисным функциям интерполирования в узлах Чебышева. Покажем процесс, построив матрицу для оператора .

Построим сетку на узлах Чебышева . Пускай - искомый вид интерполяционного полинома, где - вид базисных функций.

Строки получившейся матрицы системы: представляют собой коэффициенты разложения полинома в узлах сетки.

Таким образом построенный линейный оператор аппроксимирует значения дифференциального оператора в узлах сетки, построенной по экстремумам полиномов Чебышева первого рода.

3.4 Спектральный метод переменных направлений

Напомним, что схема переменных направлений позволяет эффективно решать двумерную краевую задачу теплопроводности благодаря тому, что сочетает в себе неявную и явную разностные схемы. Переход на слой *k+1* осуществлялся за O((*N+1*)(*M+1*)) действий решением уравнений:

, где - конечно-разностные аппроксимации 2 порядка в узлах сетки из прошлого параграфа. Исключая значения сеточной функции *U* на промежуточном слое *k=0,5* получим следующую схему МПН:

(3.3)

данная схема не зависит от выбранной сетки, поэтому для того, чтобы применить спектральный метод к нахождению сеточной функции заменим конечно-разностные операторы вторых дифференциалов на спектральный оператор, описанный выше. Схема не изменит свой вид, однако решения будут искаться в узлах другой сетки (построенной по экстремумам полиномов ).

3.5 Реализация с помощью Matlab

В качестве иллюстрации работы спектрального метода и сравнения его с разностным будем искать численное решение двумерного нестационарного уравнения теплопроводности:

,

где , удовлетворяющее краевым условиям Дирихле:

Схема переменных направлений уже описана в данном и предыдущем параграфах.

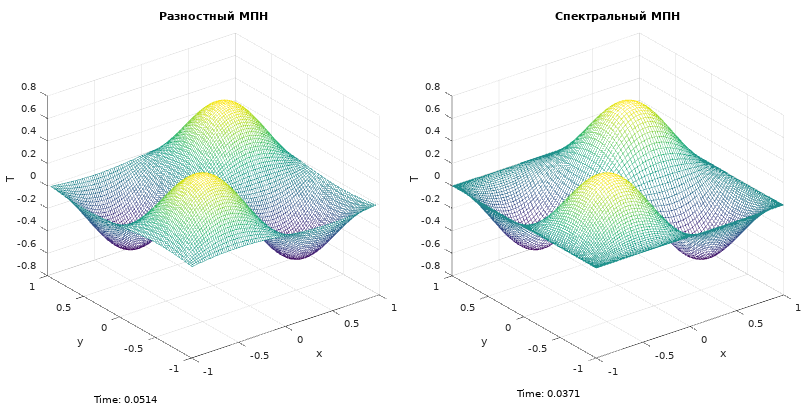
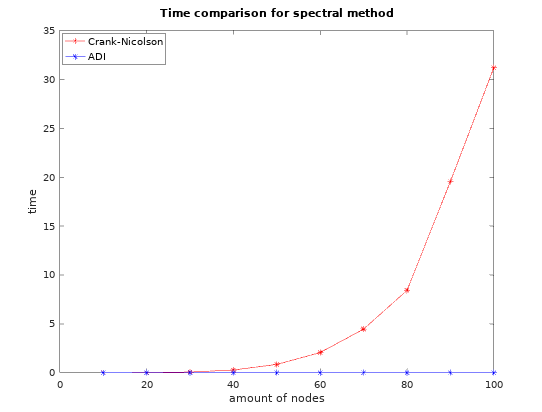
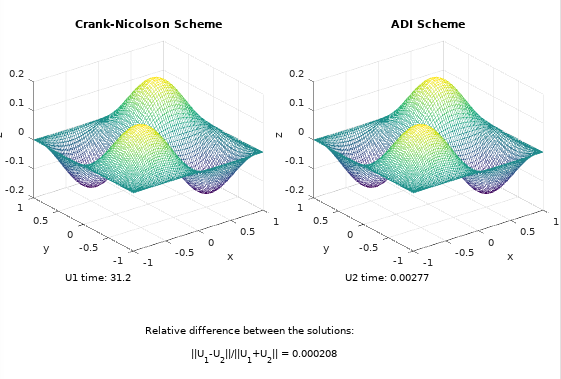
 Важное замечание: для упрощения графического представления решения параметры разбиения по пространственным координатам численно равны, то есть . Реализацию решения данной задачи можно увидеть в Приложении A.

Рис.7 Графическое представление численного решения методом переменных направлений



На предыдущей странице приведены иллюстрации сравнительного анализа эффективности применения спектрального метода с использованием схемы переменных направлений. Представленные результаты показывают, что при различиях в точности, не превосходящих 1.e-4 спектральный метод переменных направлений требует приблизительно на четыре порядка меньше вычислительных затрат по сравнению с неявной схемой Кранка-Николсон. Для сравнения, для разностной схемы переменных направлений сопоставимая точность вычислений по сравнению со схемой Кранка-Николсон достигается при сокращении вычислительных затрат на два порядка [5]. Таким образом, использование схемы переменных направлений для реализации спектральных методов обеспечивает существенно большее повышение эффективности по сравнению с разностными методами.

Заключение

В работе были рассмотрены особенности применения спектрального метода переменных направлений для решения нестационарного двумерного уравнения теплопроводности. На примере задачи с нулевыми краевыми условиями Дирихле было построено численное решение в виде значений сеточной функции в узлах дискретного множества. Результаты показали, что спектральный метод позволяет так же эффективно решать задачу, как и разностный и намного превосходя по скорости и никак не уступая по точности решениям, построенным с помощью других разностных схем (например, схема Кранка-Николсон). Метод следует применять для функций, имеющих особенности расположения узлов у границы, поскольку сетка, построенная по чебышевским узлам, сравнительно хорошо приближает точное решение.

**СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Trefethen, L.N. Spectral Methods in MATLAB / L.N. Trefethen. – Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2000. – 181 с.
2. Самарский, А.А. Теория разностных схем / А.А. Самарский. - М.: Наука, 1989, - 553 с.
3. Trefethen, L.N. Finite difference and spectral methods for ordinary and partial differential equations / L.N. Trefethen. – New York: Ithaca, 1996. – 299 с.
4. Буяльская, Ю.В. Спектральный метод на основе полиномов Чебышева для краевых задач встречного взаимодействия волн / Ю.В. Буяльская, В.М. Волков // Веб-программирование и интернет технологии WebConf2012: материалы 2-й международной научно-практической конференции, Минск, 5-7 июня 2012 г. / Белорус. гос. ун-т; редкол.: И.М. Галкин [и др.]. – Минск, 2012. – 76 с.
5. Волков В.М. Численный анализ и оптимизация / В.М. Волков, О.Л. Зубко, И.Н. Катковская, И.Л. Ковалева, В.Г. Кротов, П. Лима. – Минск: РУП “Белгослес”, 2017. – 207 с.

Приложение A

**Листинг программ Matlab, реализующих построение численного решения 2мерного уравнения теплопроводности с помощью метода сеток**

%% Построение решения с помощью разностных операторов %%

L = 2;

n = 145; %число узлов пространственной сетки

t = 3; %число узлов временной сетки

tau = 0.05; % шаг по времени

%%%% построение сетки %%%%

h = L/(n+1);

x = -L/2+h : h : L/2-h;

[Y,X] = ndgrid(x,x);

F = 10\*sin(2\*pi\*X/L).\*sin(2\*pi\*Y/L);

U = zeros(n,n); % начальное условие

%% Неявная схема Кранка-Николсон %%

A = -gallery('poisson',n )/h^2; % матрица системы AU=F

E = eye(size(A));

Apos = E + 0.5\*tau\*A;

Aneg = E - 0.5\*tau\*A;

U1 = U; % матрица решений в узлах сетки

tic

for k = 1:t

f = Apos\*U1(:) + tau\*F(:);

U1 = Aneg\f(:);

end

CN = toc % время для схемы Кранка-Николсона

U1=reshape(U1,n,n); % перестройка матрицы решений

%% Метод переменных направлений %%

e = ones(n,1);

A1 = spdiags([e,-2\*e e], -1:1, n,n)/h^2;

E = eye(size(A1));

Apos = E + 0.5\*tau\*A1;

Aneg = E - 0.5\*tau\*A1;

U2 = U; % двумерный вектор решений

tic

for k=1:t

f = (Apos\*(U2.'))' + 0.5\*tau\*F;

U2 = Aneg\f;

f = Apos\*U2 + 0.5\*tau\*F;

U2 = (Aneg\f.').';

end

ADI=toc % время для МПН

%%%% Вывод результатов %%%%

subplot('position',[0.06,0.4, 0.41 0.5]), mesh(X,Y,U1);

title('Crank-Nicolson Scheme');

xlabel('x'); ylabel('y'); zlabel('z');

text(-2.99,-2.5,['Computational time CN: ', num2str(CN,3)]);

subplot('position',[0.56,0.4, 0.41 0.5]), mesh(X,Y,U2);

title('ADI Scheme');

xlabel('x'); ylabel('y'); zlabel('z');

text(-2.99,-2.5,['Computational time ADI: ', num2str(ADI,3)]);

%%%% Относительная погрешность решений %%%%

subplot('position',[0.3,0.15, 0.41 0.2]),

text( -0.10, 0.3,'Relative difference between the solutions:');

D=2\*norm(U2(:)-U1(:))/norm(U2(:)+U1(:));

text( 0.1, -0.0,['||U\_1-U\_2||/||U\_1+U\_2|| = ', num2str(D,3)]);

axis off

%% Построение решения с помощью спектральных операторов

L = 2;

n = 50;

t = 3;

tau = 0.005;

%%%% построение сетки %%%%

h = L/(n+1);

N=n+2;

x = -cos(((1:N)-1)\*pi/(N-1));

x = x(2:end-1);

[Y,X] = ndgrid(x,x);

F = 10\*sin(2\*pi\*X/L).\*sin(2\*pi\*Y/L); % вектор правой части

U = zeros(n,n); % начальное условие

C = gallery('chebspec',N); % матрица спектрального дифференцирования

C = C(2:end-1,2:end-1);

E = speye(n);

A = kron(E,C)+kron(C,E); % кронекеровское произведение

%% Cхема Кранка-Николсон %%

E = eye(size(A));

Apos = E + 0.5\*tau\*A;

Aneg = E - 0.5\*tau\*A;

U1 = U;

tic

for k = 1:t

f = Apos\*U1(:) + tau\*F(:);

U1 = Aneg\f(:);

end

CN = toc

%% Метод Переменных Направлений %%

A1=C;

E = eye(size(A1));

Apos = E + 0.5\*tau\*A1;

Aneg = E – 0.5\*tau\*A1;

U2 = U;

tic

for k=1:N

f = (Apos\*(U2.'))' + 0.5\*tau\*F;

U2 = Aneg\f;

f = Apos\*U2 + 0.5\*tau\*F;

U2 = (Aneg\f.').';

end

ADI=toc

U1=reshape(U1,n,n);

U2=reshape(U2,n,n);

%%%% Вывод результатов %%%%

subplot('position',[0.06,0.4, 0.41 0.5]), mesh(X,Y,U1);

title('Crank-Nicolson Scheme');

xlabel('x'); ylabel('y'); zlabel('z');

text(-3.2,-2.5,['U1 time: ', num2str(CN,3)]);

subplot('position',[0.56,0.4, 0.41 0.5]), mesh(X,Y,U2);

title('ADI Scheme');

xlabel('x'); ylabel('y'); zlabel('z');

text(-2.9,-2.5,['U2 time: ', num2str(ADI,3)]);

subplot('position',[0.3,0.15, 0.41 0.2]),

text( -0.10, 0.3,'Relative difference between the solutions:');

D=2\*norm(U2(:)-U1(:))/norm(U2(:)+U1(:));

text( 0.1, -0.0,['||U\_1-U\_2||/||U\_1+U\_2|| = ', num2str(D,3)]);

axis off