

AULA 4

# ECDR - NORTON & SHIGLEY

Professor: Dr. Paulo Sergio Olivio Filho

# CONTEÚDO DA AULA

## DIMENSIONAMENTO BÁSICO DE ENGRENAGENS

1. ECDR – Engrenagens Cilíndricas de Dentes Retos.
2. Cálculo de cargas aplicadas ao dente
3. Cálculo do número mínimo do dente

# SOBRE TRANSMISSÃO POR ENGRENAGENS

- Razão de velocidade angular constante;
- Trabalham com baixa e alta rotação
- Eixos paralelos, reversos ou concorrentes;
- Não apresentam escorregamento, boa precisão na transmissão do movimento;
- Grande resistência à sobrecargas;
- Podem ser confeccionadas de aço, alumínio, cerâmica, polímeros termoplásticos, etc.
- Podem apresentar tamanhos variados indo de m a nm
- Boa confiabilidade e durabilidade (pequena manutenção);
- **Custo mais elevado;**
- Problemas de ruído;
- Não absorvem choque;
- Rendimentos na faixa de até 99% (exceto em sistemas parafuso-coroa sem fim).
- Podem ter o seu desempenho afetado por umidade e poeira;

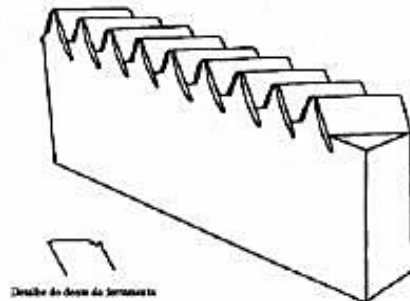
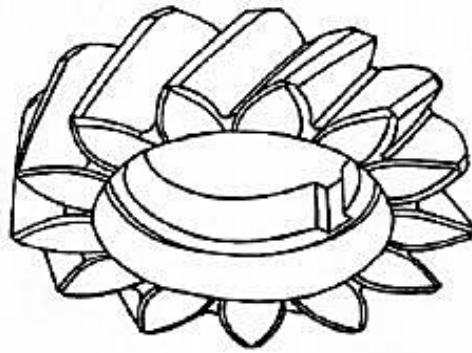
# PROCESSO DE FABRICAÇÃO

Dentre os principais tipos de fabricação utilizados para o fabrico de engrenagens, destaca-se a saber:

- Aplainamento;
- Fresamento
- Fundição;
- Sinterização;
- Laminação;
- Extrusão;
- Forjamento;
- Brochamento (engrenagens internas);
- Eletro-erosão e eletro-deposição;
- Retificação;

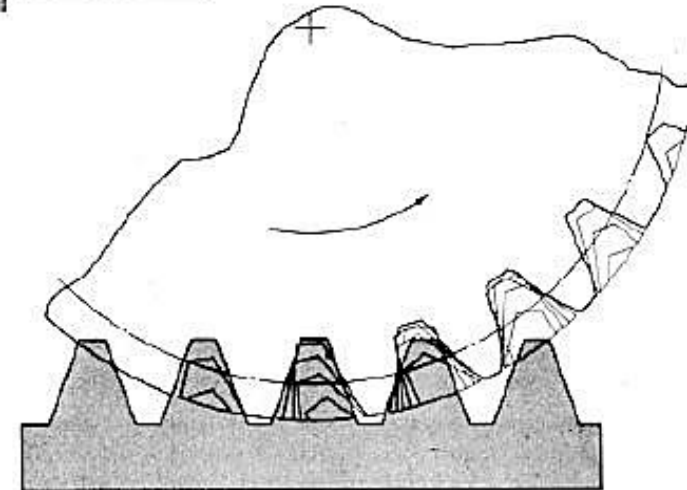
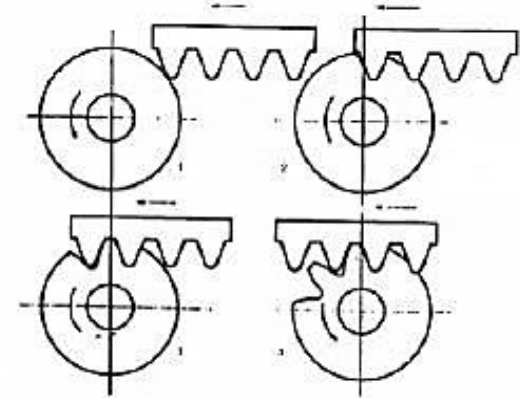
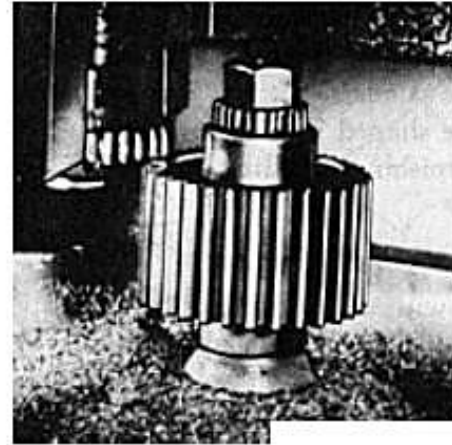
# PROCESSO DE FABRICAÇÃO

## Ferramentas de Aplainamento



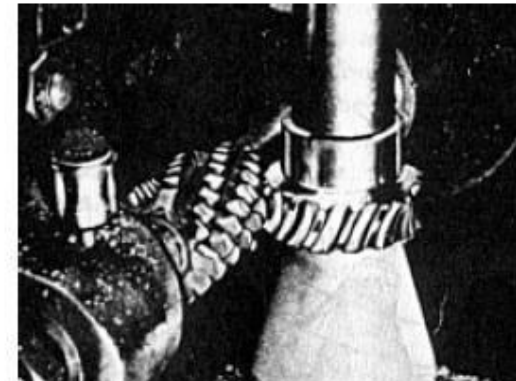
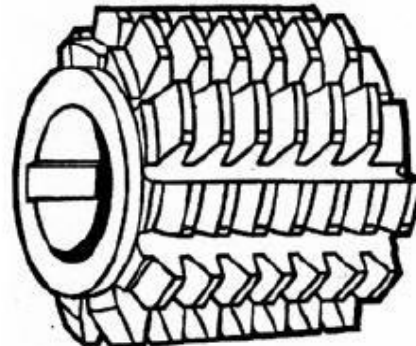
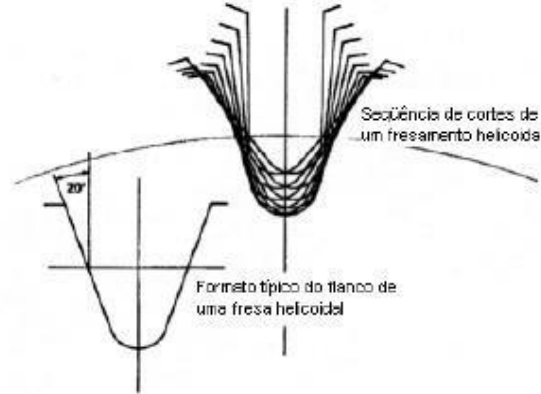
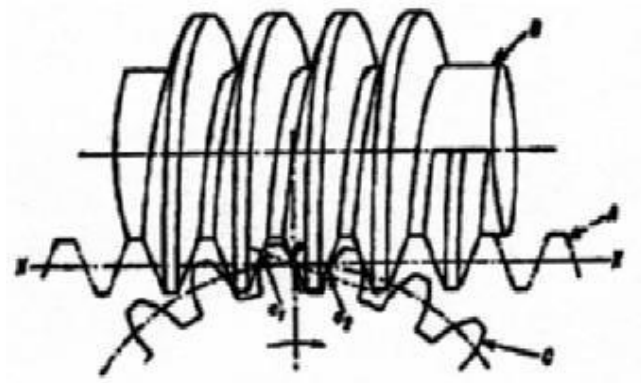
forma de pinhão e forma de cremalheira

## Processo de Aplainamento



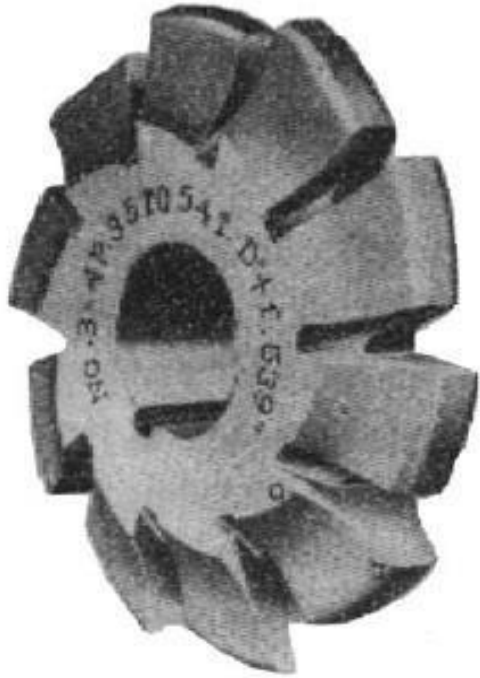


# PROCESSO DE FABRICAÇÃO

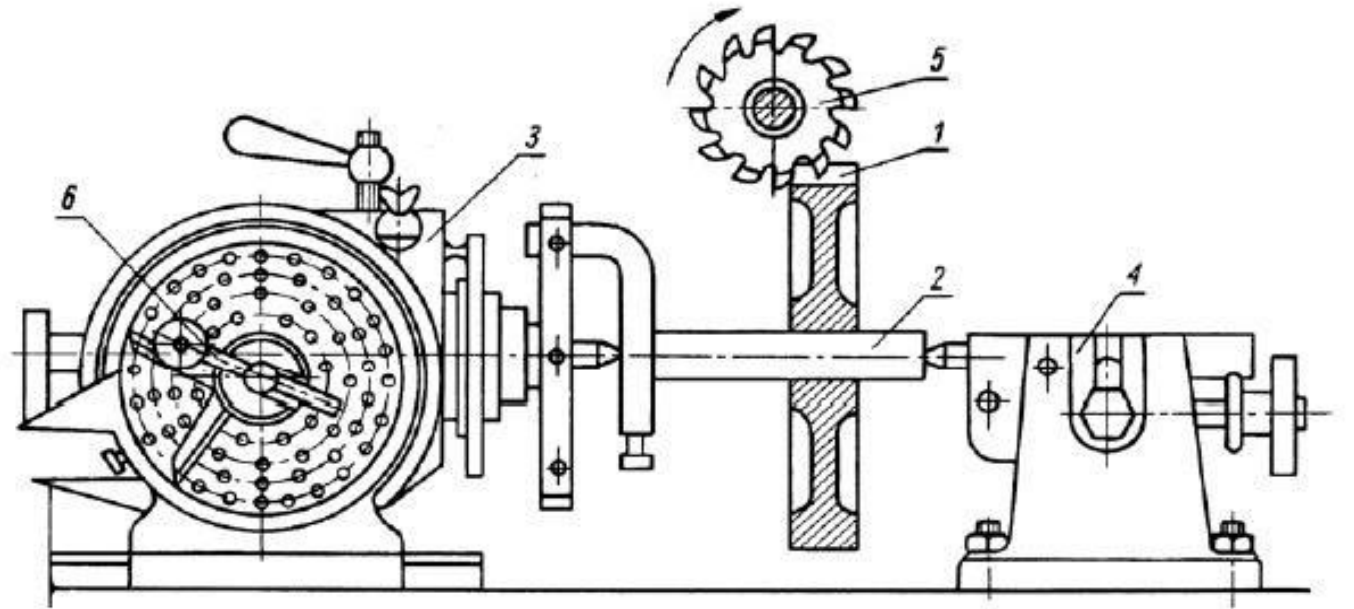


Ferramenta do fresamento helicoidal

# PROCESSO DE FABRICAÇÃO

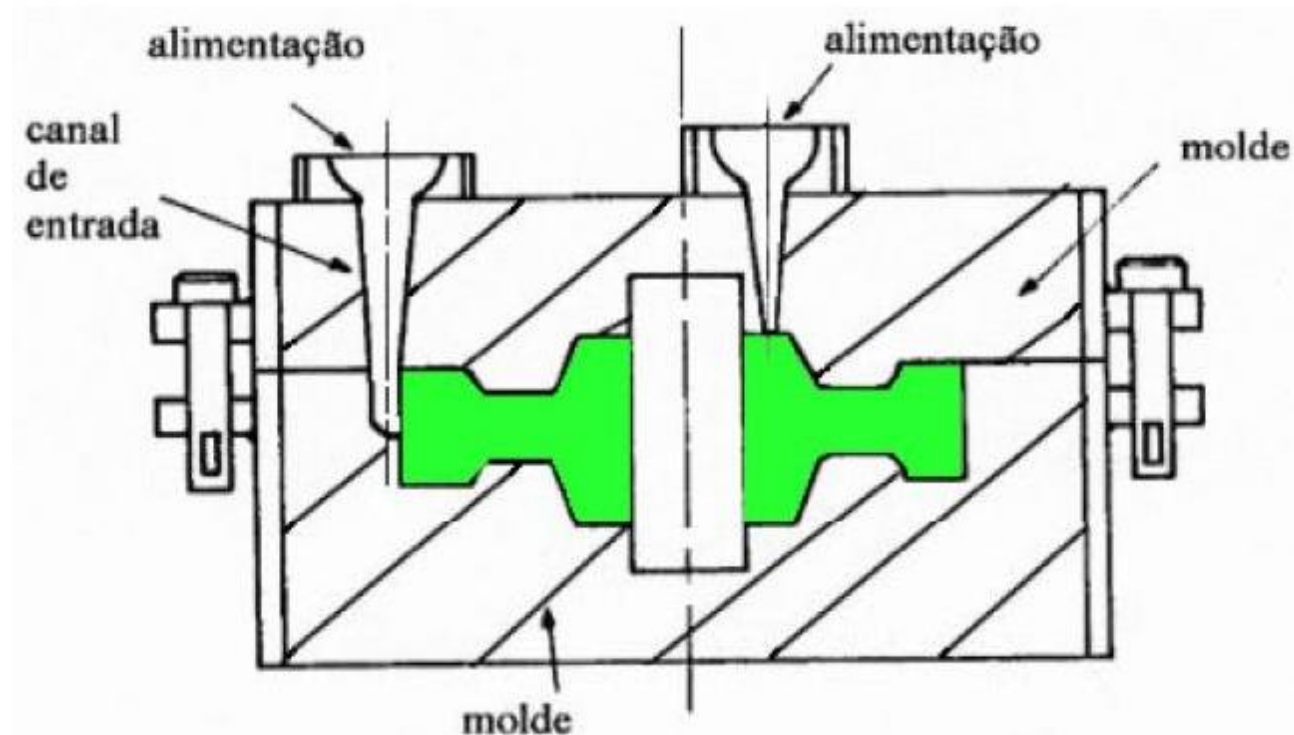


Fresa com perfil envolvental



# PROCESSO DE FABRICAÇÃO

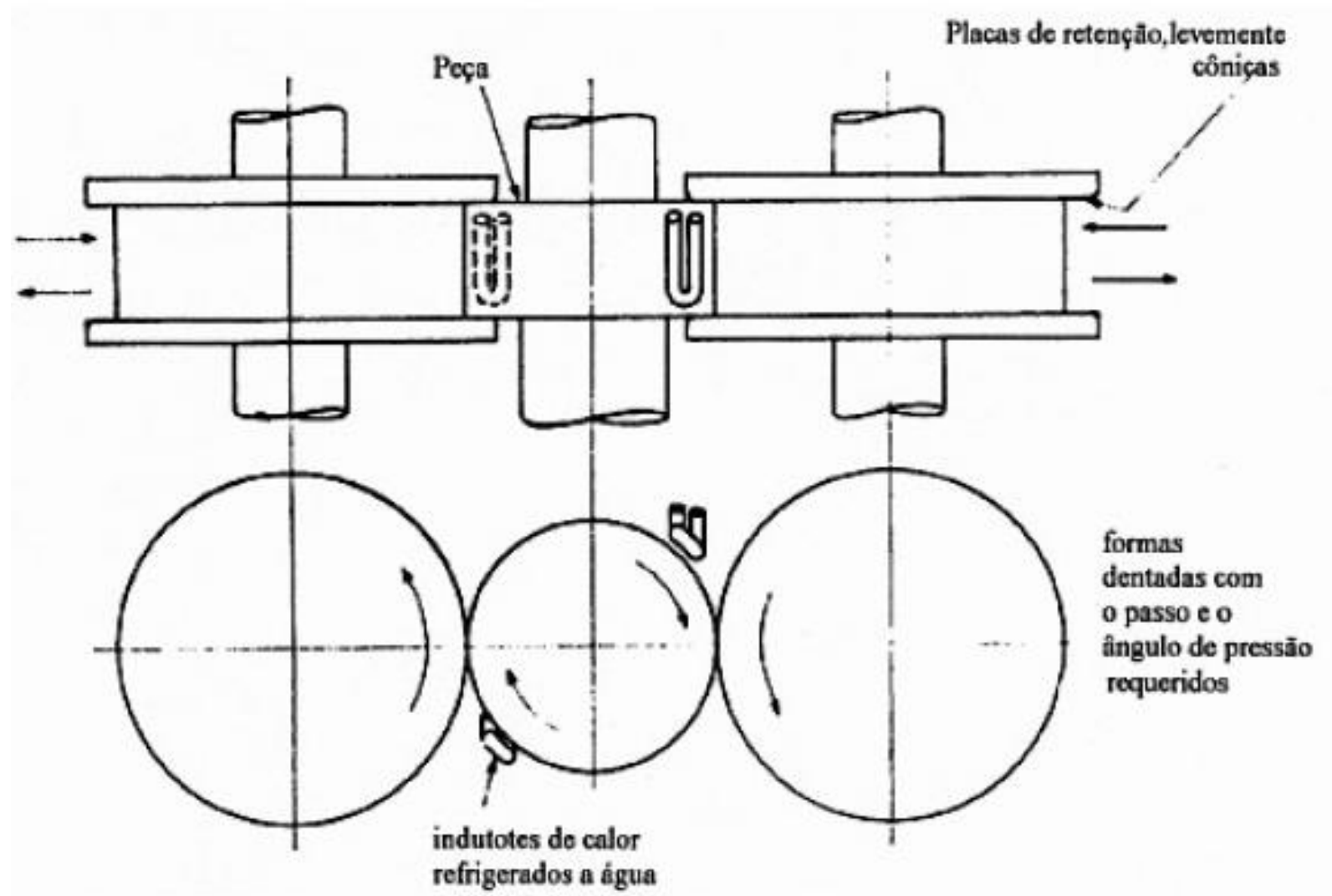
- Grandes quantidades de engrenagens pequenas
- Moldes de precisão pode-se obter engrenagens de ótimas qualidade
- Engrenagens de baixa resistência
- Defeitos (vazios ou bolhas)
- Necessidade de tratamentos térmico para alívio de tensão.





# PROCESSO DE FABRICAÇÃO

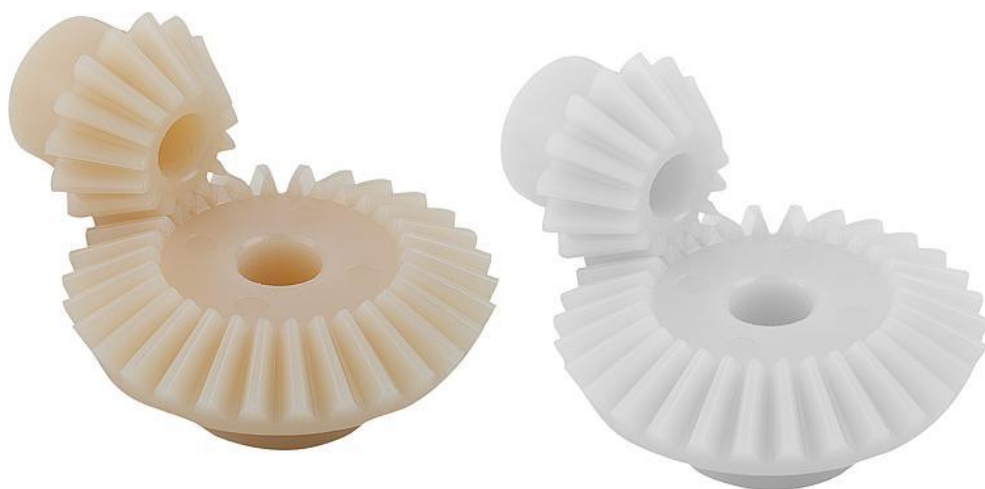
- Os dentes são formados por deformação plástica
- Pode ser feita a frio ou a quente
- Dentes retos e helicoidais



# PROCESSO DE FABRICAÇÃO

## Engrenagens poliméricas

- Fabricação por injeção
- Baixo peso
- Baixo custo de produção em série
- Menor capacidade de carga
- Aplicações em eletrodomésticos, brinquedos, etc.



# CLASSIFICAÇÃO

As engrenagens, tem uma classificação bem usual quanto a disposição dos seus eixos, quanto a forma do dente e quanto a posição relativa dos centros instantâneos de rotação.

- a) Quanto a disposição dos eixos, estas podem ser classificadas como:
- I. Engrenagens cilíndricas quando os eixos de rotação são paralelos;
  - II. Engrenagens cônicas quando os eixos de rotação são concorrentes;
  - III. Engrenagens com eixos reversos.



I



II



III

# CLASSIFICAÇÃO

- b) Classificação quanto a forma do dente:
- I. Engrenagens com dentes retos;
  - II. Engrenagens com dentes helicoidais;
  - III. Engrenagens Espirais.



I



II



III

# CLASSIFICAÇÃO

c) Quanto a posição relativa dos centros instantâneos de rotação, podem ser classificadas como:

- I. Engrenagens exteriores;
- II. Engrenagens interiores.



I



II

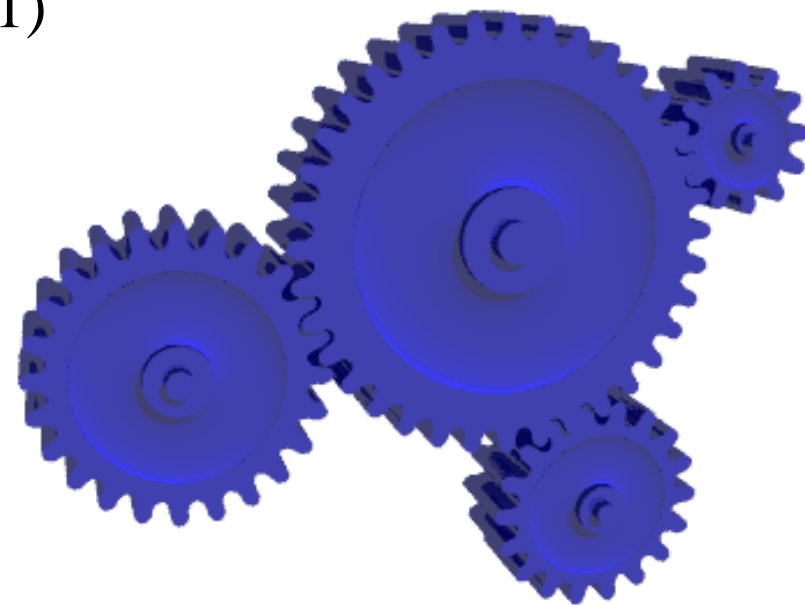
As engrenagens interiores, em geral, apresentam distância entre os eixos menor que nas engrenagens exteriores, e geralmente são utilizadas em trens planetários.



# ENGRENAGENS DE DENTES RETOS

Agora vamos abordar as engrenagens com dentes retos.

- É a mais comum quando se pretende transmitir movimento entre eixos paralelos.
- O projeto, a fabricação, a montagem e manutenção deste tipo de engrenagem é relativamente a mais simples de todas.
- Admitem grandes relações de transmissão da ordem de (8:1)
- Apresentam elevado rendimento, da ordem de 99%
- São bastante ruidosas quando operam em velocidades elevadas.
- Podem transmitir potências da ordem de 15 MW com velocidades tangenciais entre 150 m/s a 200 m/s



# ENGRENAGENS DE DENTES HELICOIDAIS

As engrenagens cilíndricas de dentes helicoidais apresentam um funcionamento mais suave e bem menos ruidoso se comparado com as de dentes retos, uma vez que o engrenamento acontece de forma mais suave e progressivo.

- Os parâmetros de funcionamento e desempenho são idênticos aos de engrenagens de dentes retos, entretanto as engrenagens helicoidais apresentam cargas axiais, o que não acontece com as de dentes retos.;
- Apresentam engrenamento suave com redução do ruído gerado;
- Apresentam elevado rendimento, da ordem de 95,5 a 99%;
- Permitem dimensionamento com módulo menor;
- Geram momentos fletores sobre os eixos e conseqüentemente nos mancais;
- Apresentam custo de fabricação mais elevado que as de dentes retos e



# ENGRENAGENS CÔNICAS

- Forma cônica
- Dentes retos, espirais ou hipoides
- Normalmente as engrenagens cônicas são utilizadas quando há a necessidade de se cruzar os eixos dos órgãos motor e movido;
- Relações de transmissão de até 6:1;
- Desempenho semelhante às cilíndricas;
- Engrenagens cônicas espiral e hipoides:
  - maior capacidade de carga; maior relação de transmissão; menor geração de ruído; rendimento menor (60 a 95 %); maior custo de fabricação e montagem;
  - As hipoides permitem soluções mais compactas



# ENGRENAGEM DE PINHÃO/COROA SEM FIM

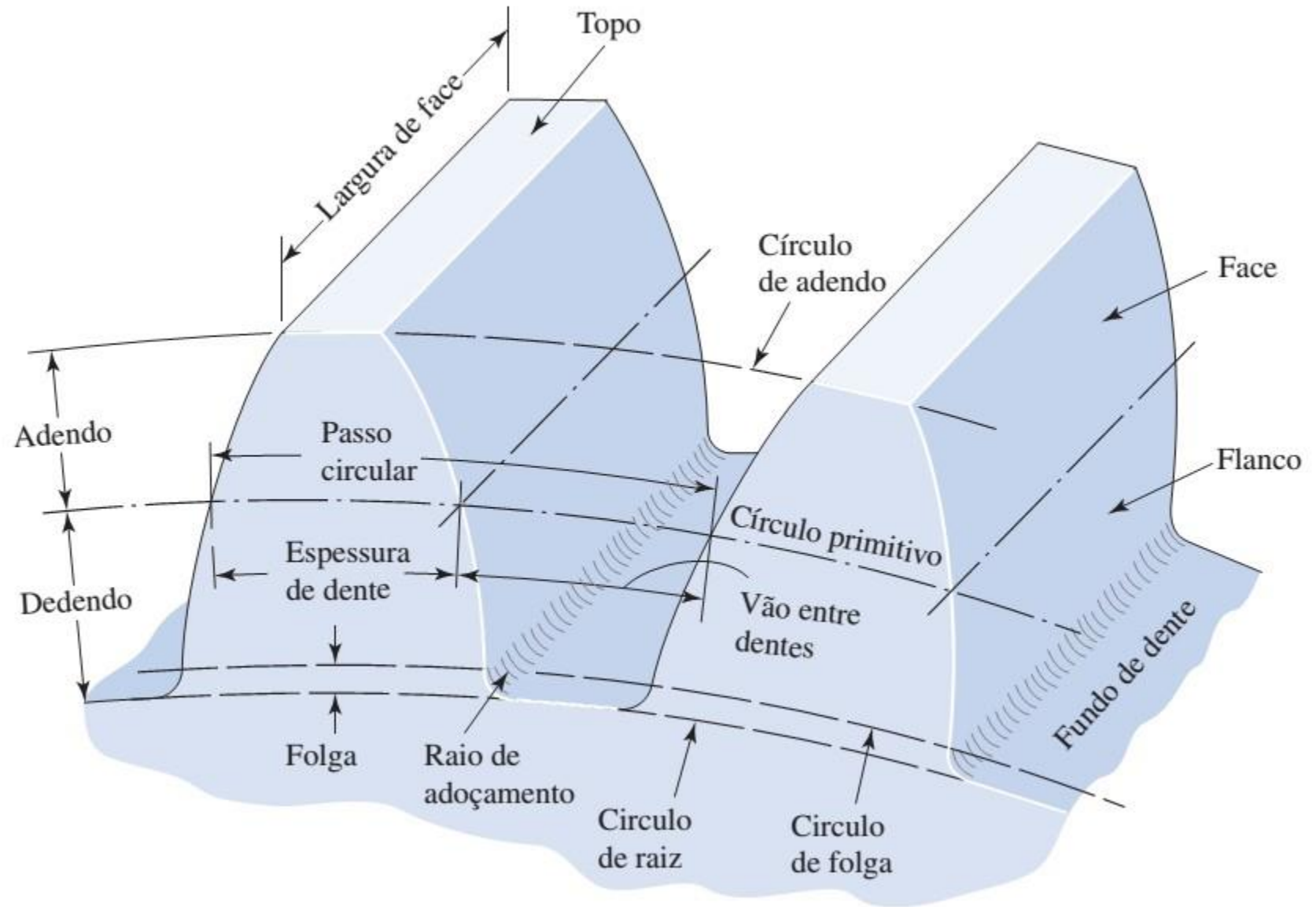
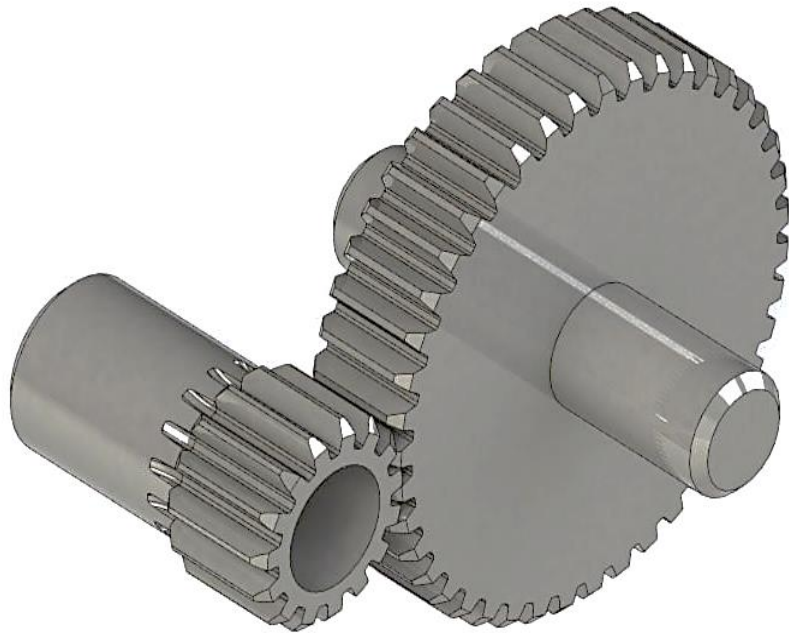


- Relações de transmissão até 100:1
- Elevado escorregamento: rendimento baixo (40 a 70 %)
- Sem-fim de uma, duas ou três entradas;
- É recomendável materiais diferentes peça do par





# ENGRENAGEM DE DENTES RETOS



Desenho em SolidWorks

<https://youtu.be/Ejr533rHJ1c>



# TAMANHO DO DENTE

$$P = \frac{N}{d}$$

$$m = \frac{d}{N}$$

$$p = \frac{\pi d}{N} = \pi m$$

$$pP = \pi$$

Onde :

$$P_d = \frac{N}{D_p}$$

$$m = \frac{D_p}{N}$$

P ou Pd = passo diametral, dentes por polegadas

N = número de dentes

d ou Dp = diâmetro primitivo, polegadas ou mm

m = módulo, mm

p = passo circular

# SISTEMAS DE DENTES PADRONIZADOS

**Sistema padronizados e usado comumente para engrenagens cilíndricas de dentes retos**

Sistema de dente	Ângulo de pressão $\phi$ , graus	Adendo $a$	Dedendo $b$
Profundidade completa	20	$1/P$ ou $1m$	$1,25/P$ ou $1,25 m$
			$1,35/P$ ou $1,35 m$
	$22 \frac{1}{2}$	$1/P$ ou $1m$	$1,25/P$ ou $1,25 m$
			$1,35/P$ ou $1,35 m$
	25	$1/P$ ou $1m$	$1,25/P$ ou $1,25 m$
			$1,35/P$ ou $1,35 m$
Curto	20	$0,8/P$ ou $0,8 m$	$1/P$ ou $m$

# SISTEMAS DE DENTES PADRONIZADOS

## Tamanho de dentes de uso geral

### Passo diametral $P$ (dentes/in)

Grosso	2, $2\frac{1}{4}$ , $2\frac{1}{2}$ , 3, 4, 6, 8, 10, 12, 16
Fino	20, 24, 32, 40, 48, 64, 80, 96, 120, 150, 200

### Módulos $m$ (mm/dente)

Preferidos	1, 1,25, 1,5, 2, 2,5, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 16, 20, 25, 32, 40, 50
Próxima escolha	1,125, 1,375, 1,75, 2,25, 2,75, 3,5, 4,5, 5,5, 7, 9, 11, 14, 18, 22, 28, 36, 45

# SISTEMAS DE DENTES PADRONIZADOS

- Ângulos de pressão usuais  $\phi$  :  $20^\circ$  e  $25^\circ$
- Ângulo de pressão antigo:  $14\frac{1}{2}^\circ$
- Largura da face:  $3p < F < 5p$

AGMA

$$p = \frac{\pi}{P}$$

$$\frac{3\pi}{P} < F < \frac{5\pi}{P}$$

ou aproximadamente:

$$\frac{9}{P} < F < \frac{15}{P}$$

SI

$$p = m\pi$$

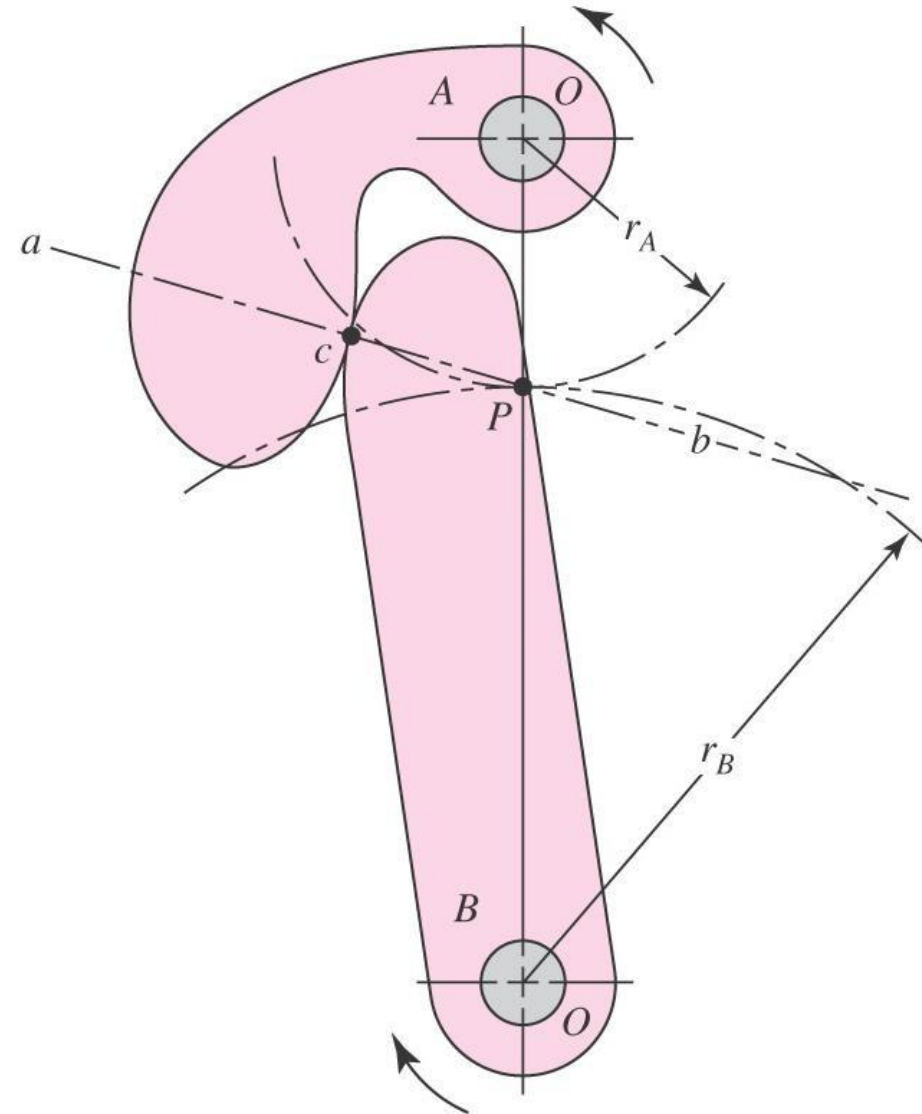
$$3m\pi < b < 5m\pi$$

ou aproximadamente:

$$9m < b < 15m$$

# SISTEMAS DE DENTES PADRONIZADOS

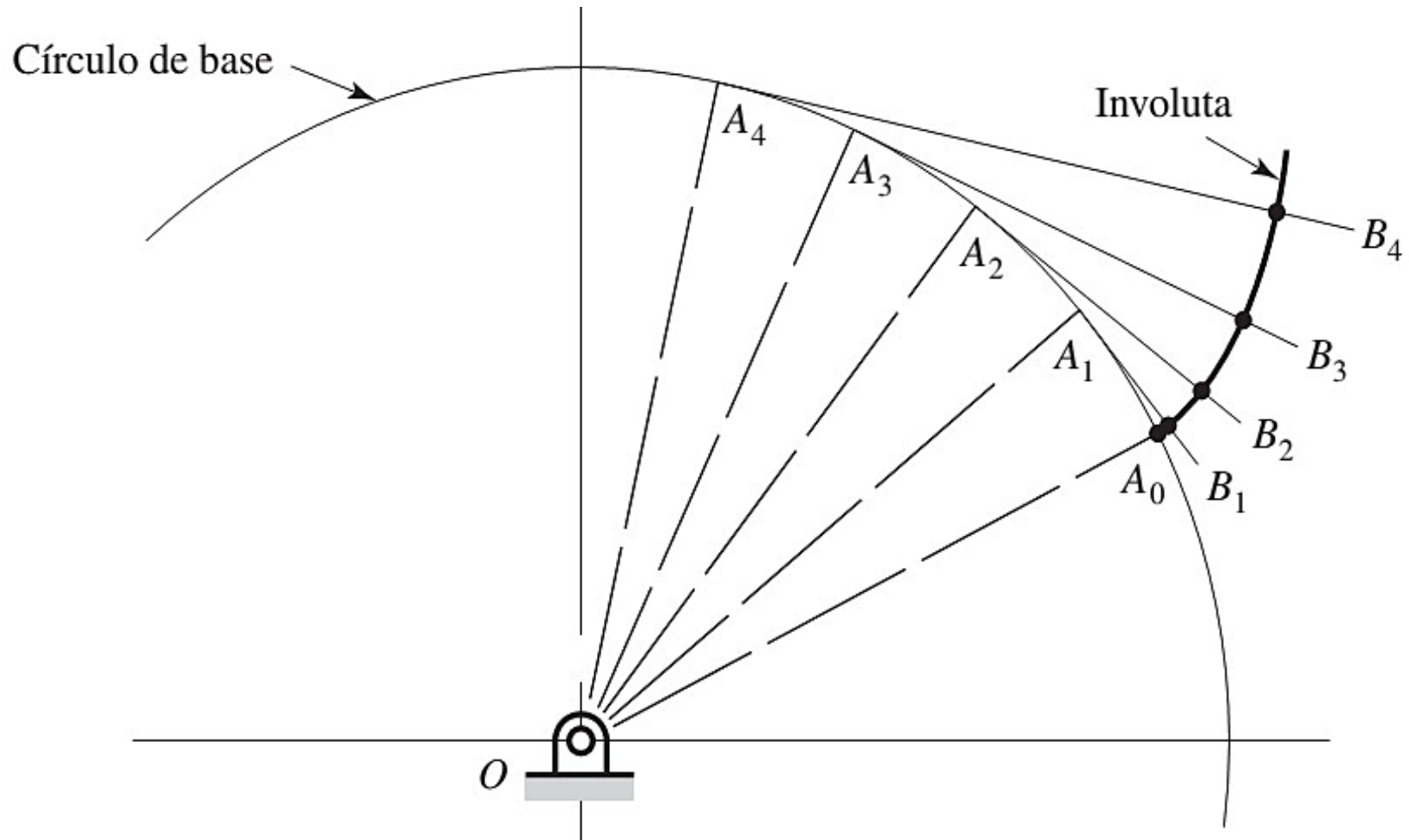
- Quando as superfícies rolam/ deslizam uma contra a outra e produzem uma relação de velocidade angular constante, diz-se que eles têm *ação conjugada*.
- A força é transmitida ao longo da *linha de ação*, que é normal às superfícies em contato.
- A relação de velocidades é inversamente proporcional aos raios até o ponto  $P$ , o *ponto primitivo*.
- As circunferências traçadas pelo ponto  $P$ , com centro em cada ponto fixo, são as *circunferências primitivas*, cada uma com o seu *raio primitivo*.



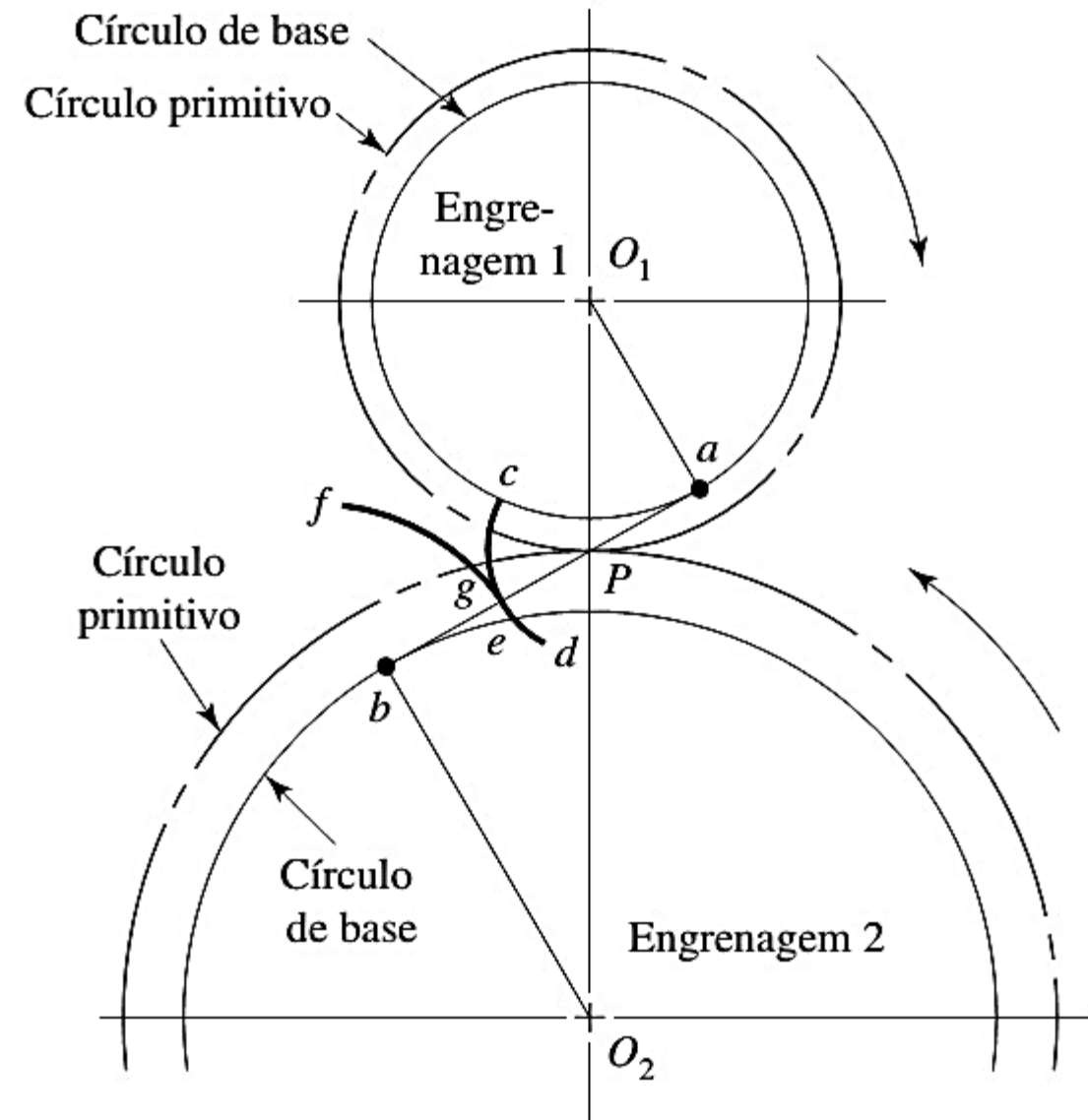
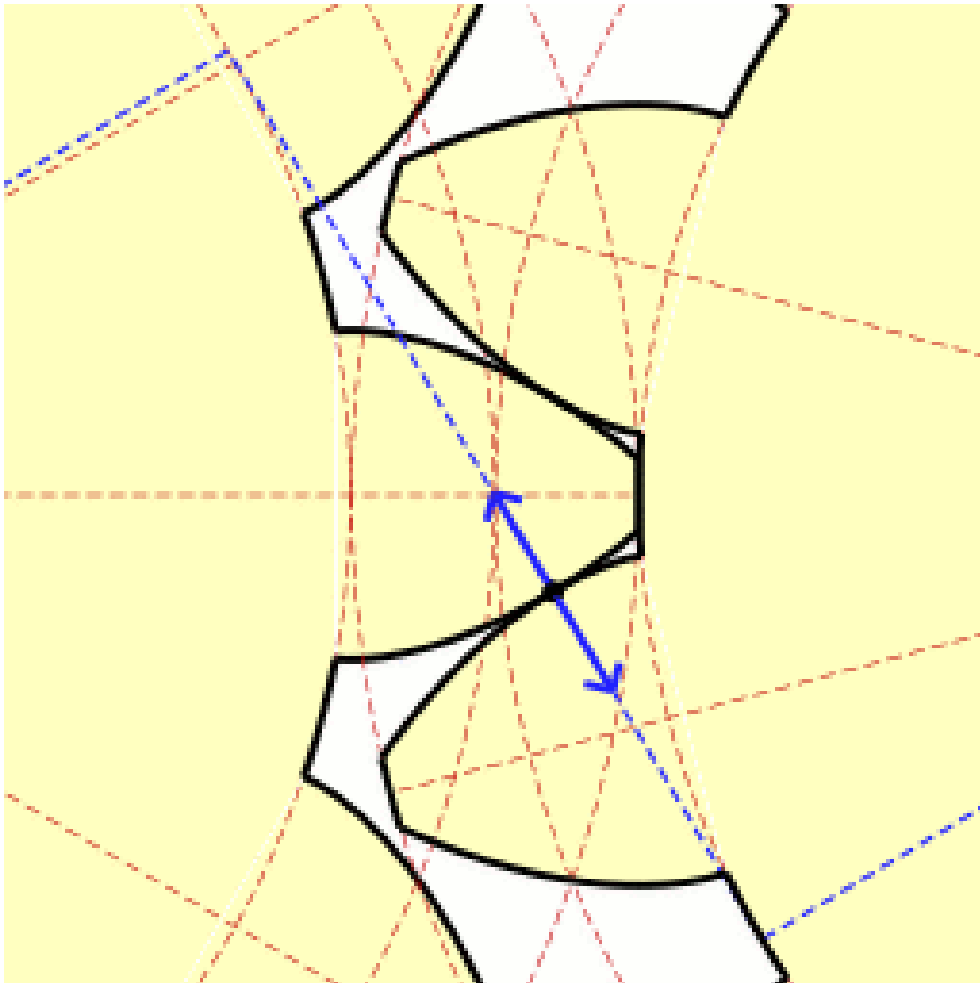


# PERFIL DA INVOLUTA

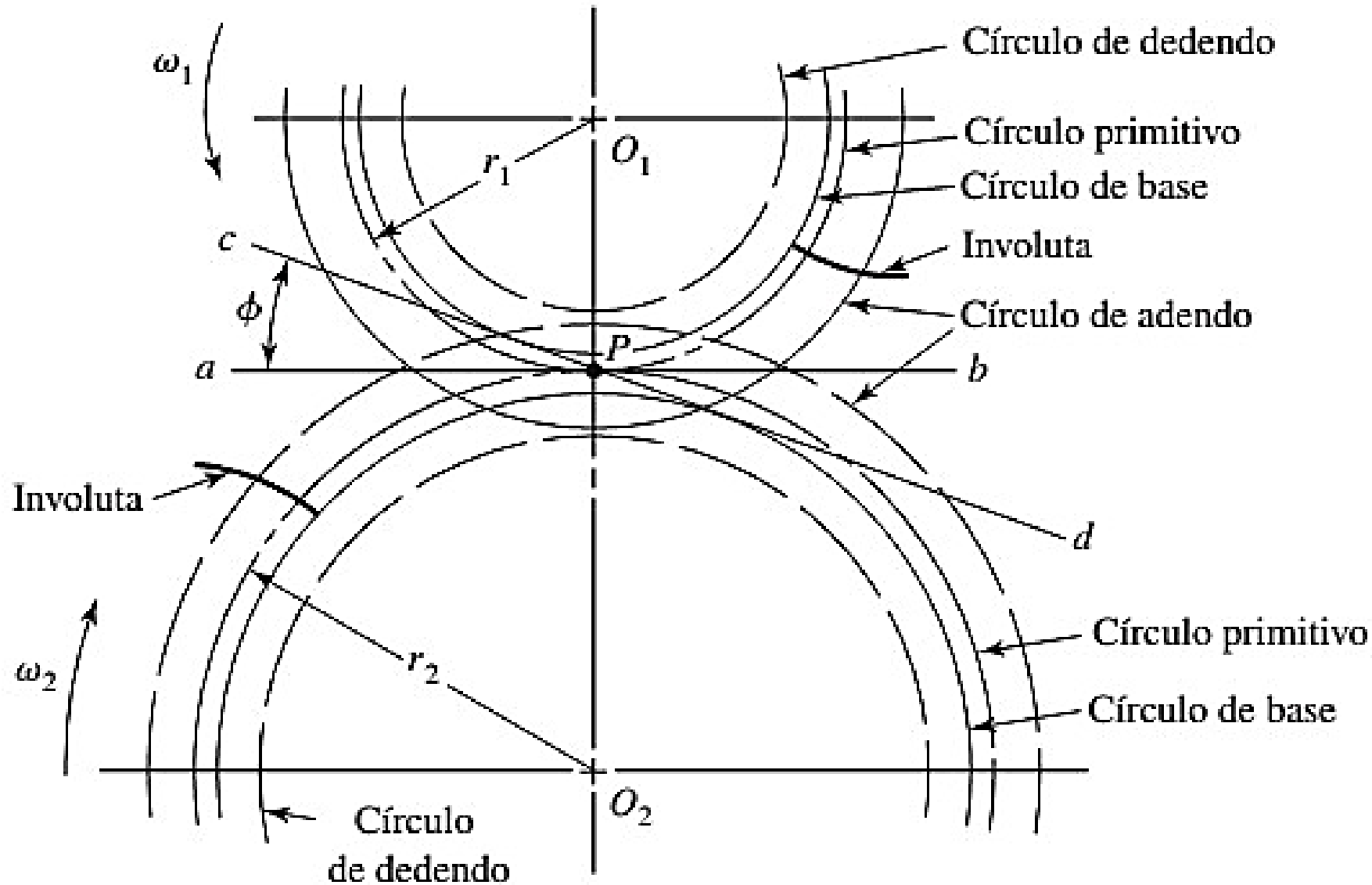
- O perfil conjugado mais comum é o perfil *evolvente da involuta*.
- Pode ser gerado, desenrolando um barbante de um cilindro, mantendo o barbante esticado e tangente ao cilindro.
- A circunferência formada pelo cilindro chama-se *circunferência de base*.



# PERFIL DA INVOLUTA EM AÇÃO CONJUGADA

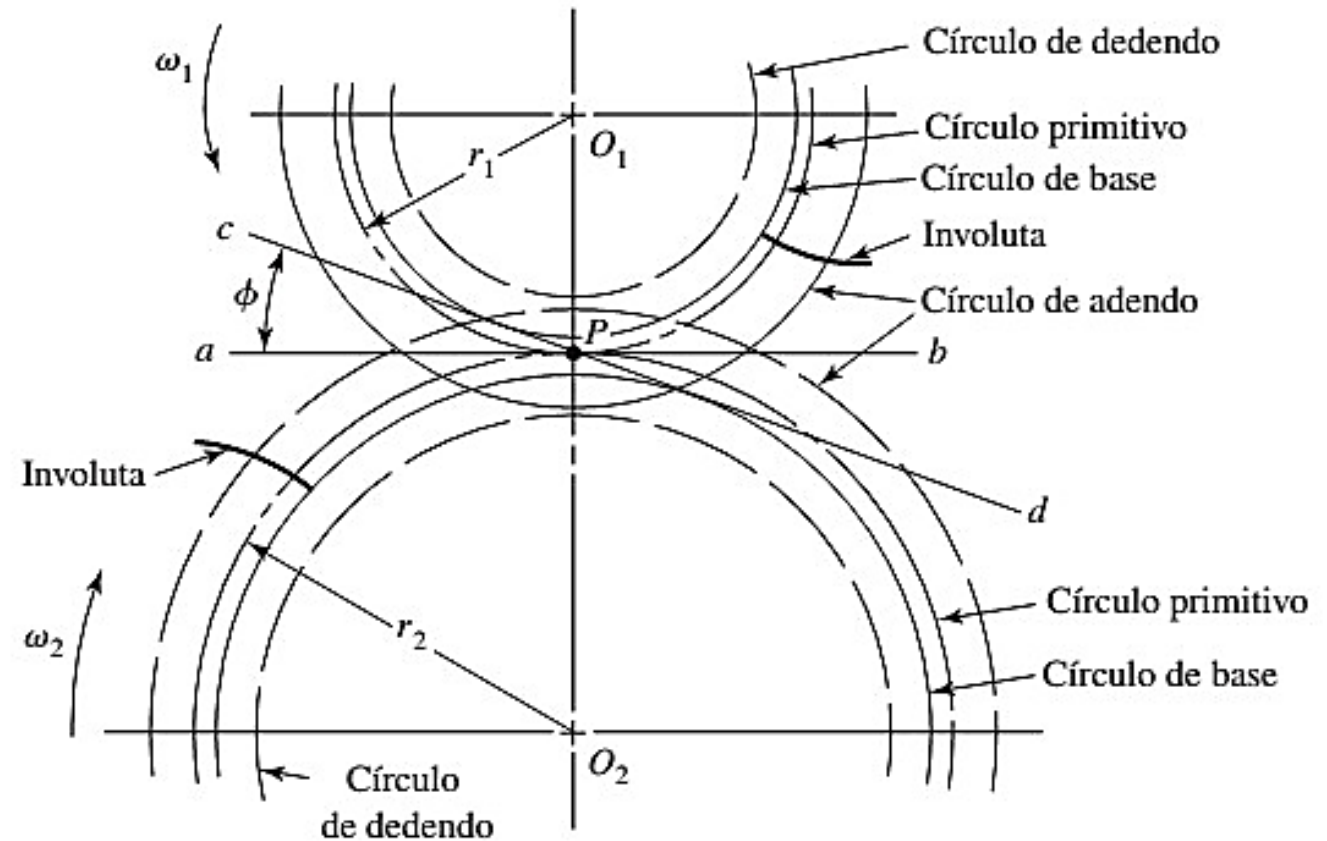


# CIRCUNFERÊNCIA DO ENGRENAMENTO



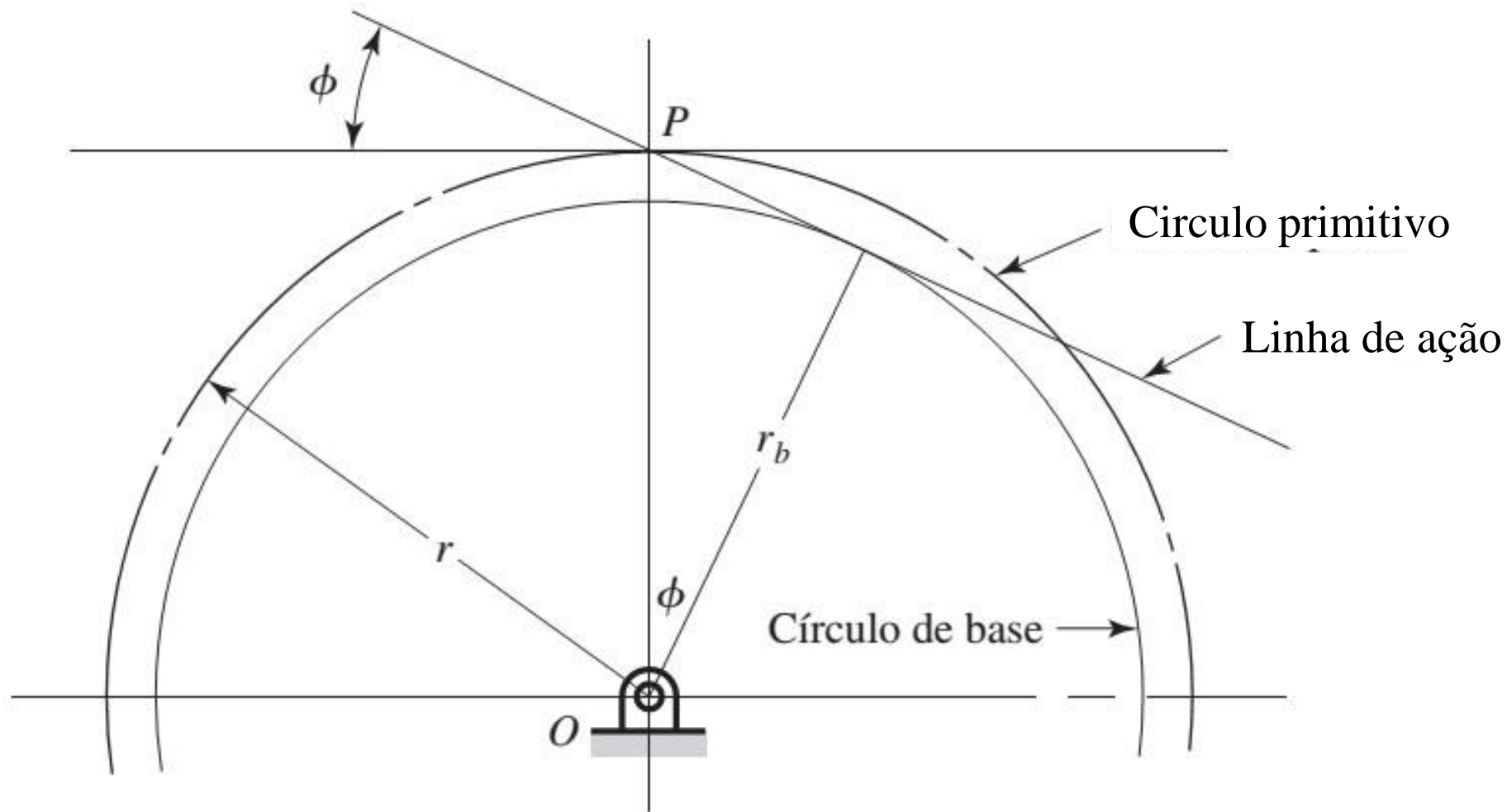
# SEQUÊNCIA DO ENGRENAMENTO

- Circunferências primitivas em contato
- Linha de pressão no ângulo de pressão desejado
- Circunferências de base tangentes à linha de ação
- Perfil evolvental a partir da circunferência de base
- Topo dos dentes na circunferência de adendo a  $m$  da circunferência primitiva
- Raiz dos dentes na circunferência de dedendo, a  $1,25m$  da circunferência primitiva
- Espaçamento entre os dentes sobre a circunferência primitiva,  $p = m \pi$



# RELAÇÃO CIRC. BASE X ÂNGULO DE PRESSÃO

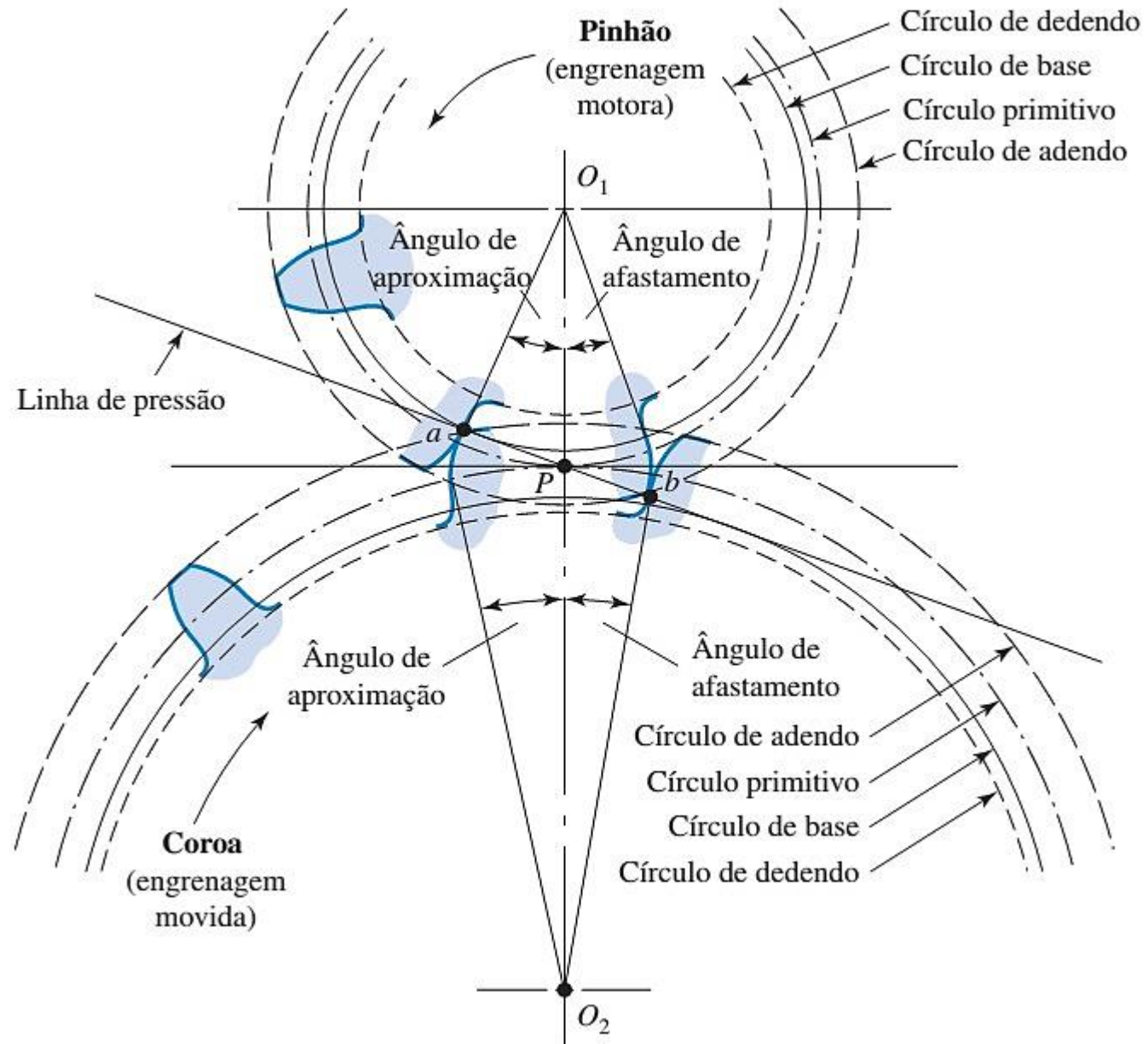
Relação entre a Circunferência de Base e o Ângulo de Pressão  $r_b = r \cos \phi$





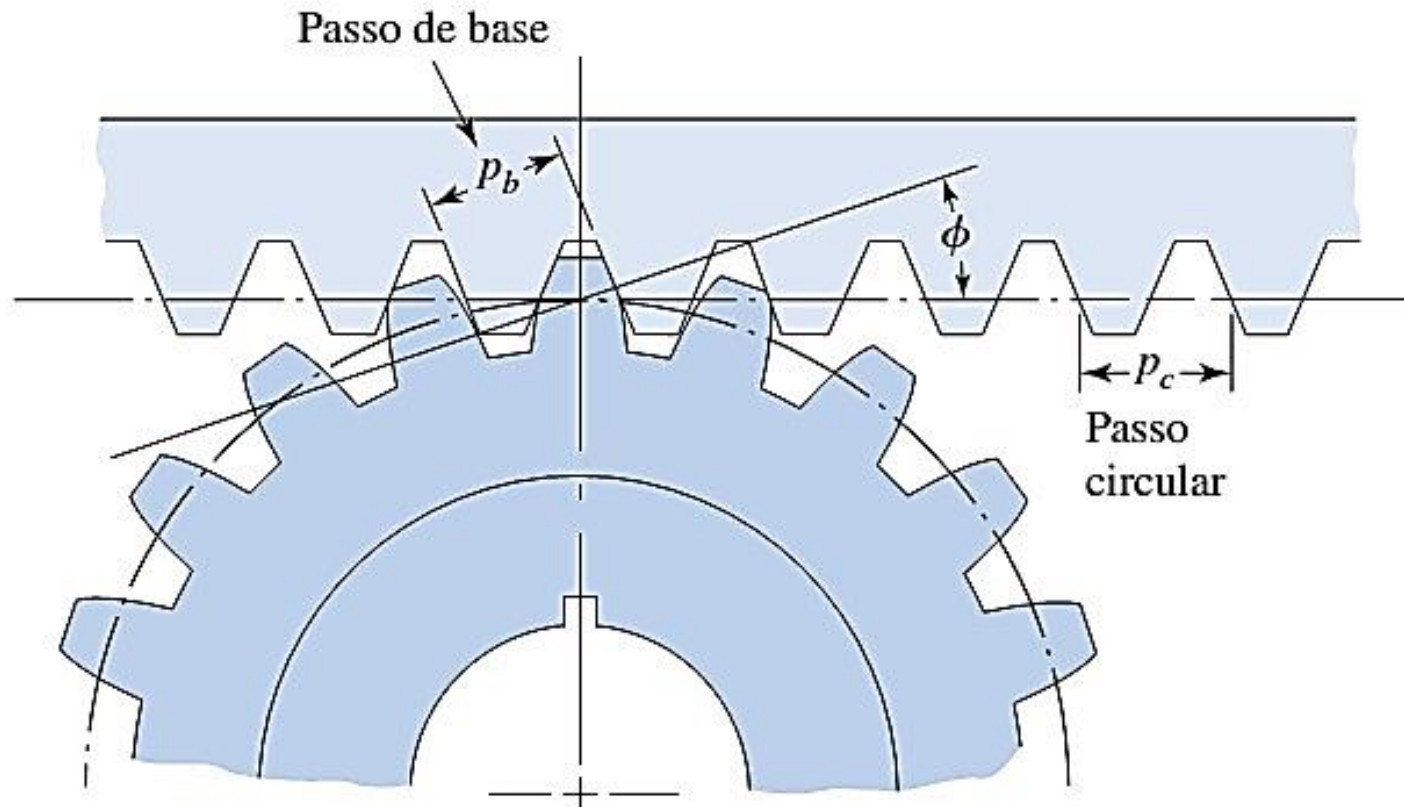
# AÇÃO DO DENTE

- Primeiro ponto de contato em  $a$  onde o flanco do pinhão toca o topo da engrenagem
- Último ponto de contato em  $b$ , onde o topo do pinhão toca o flanco da engrenagem
- A linha  $ab$  é a *linha de ação*
- O *ângulo de ação* é a soma dos ângulos de aproximação e de afastamento

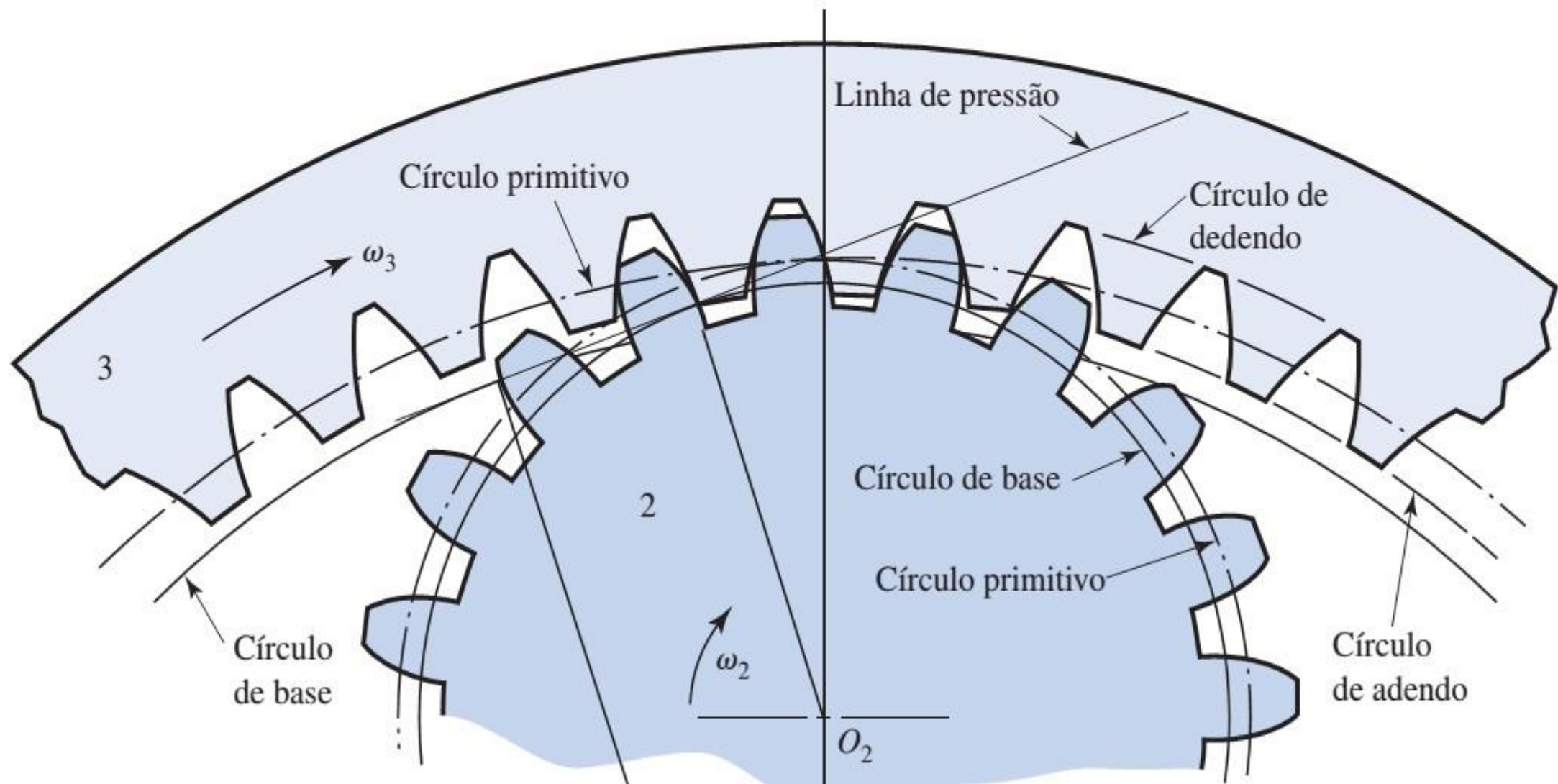


# CREMALHEIRA

- Uma *cremelheira* é uma engrenagem de dentes retos com um diâmetro primitivo infinito.
- Os lados dos dentes são linhas retas formando um ângulo em relação à linha de centros igual ao ângulo de pressão.
- O *passo de base* e o *passo circular*, mostrados na Figura 13-13, estão relacionados por:



# ENGRENAGENS INTERNAS



# EXEMPLO 1

Um par de engrenagens consiste em um pinhão de 16 dentes que aciona uma coroa de 40 dentes. O Passo Diametral vale 2, e o adendo e dedendo são  $1/P_d$  e  $1,25/P_d$ , respectivamente. As engrenagens são cortadas usando um ângulo de pressão de  $20^\circ$ .

- Compute o passo circular, a distancia entre centros e os raios dos círculos de base.
- Ao montarem, se essas engrenagens, a distância entre centros foi, incorretamente, aumentada em  $\frac{1}{4}$  pol. Compute os novos valores do ângulo de pressão e diâmetro do circulo primitivo.

- Passo circular

$$p = \frac{\pi}{P} = \frac{\pi}{2} = 1,57 \text{ in}$$

- Diâmetro primitivo

$$d_P = \frac{16}{2} = 8 \text{ in} \quad d_G = \frac{40}{2} = 20 \text{ in}$$

- Distância entre centros

$$\frac{d_P + d_G}{2} = \frac{8 + 20}{2} = 14 \text{ in}$$

- Raio do circulo de base

$$r_b (\text{pinhão}) = \frac{8}{2} \cos 20^\circ = 3,76 \text{ in}$$

$$r_b (\text{engrenagem}) = \frac{20}{2} \cos 20^\circ = 9,40 \text{ in}$$

# EXEMPLO 1

- Distância entre centros com aumento de  $\frac{1}{4}$  pol.

$$\frac{d'_P + d'_G}{2} = 14,250$$

- A razão de velocidade não muda.

$$\frac{d'_P}{d'_G} = \frac{16}{40}$$

- Novo diâmetro primitivo

$$d'_P = 8,143 \text{ in} \quad d'_G = 20,357 \text{ in}$$

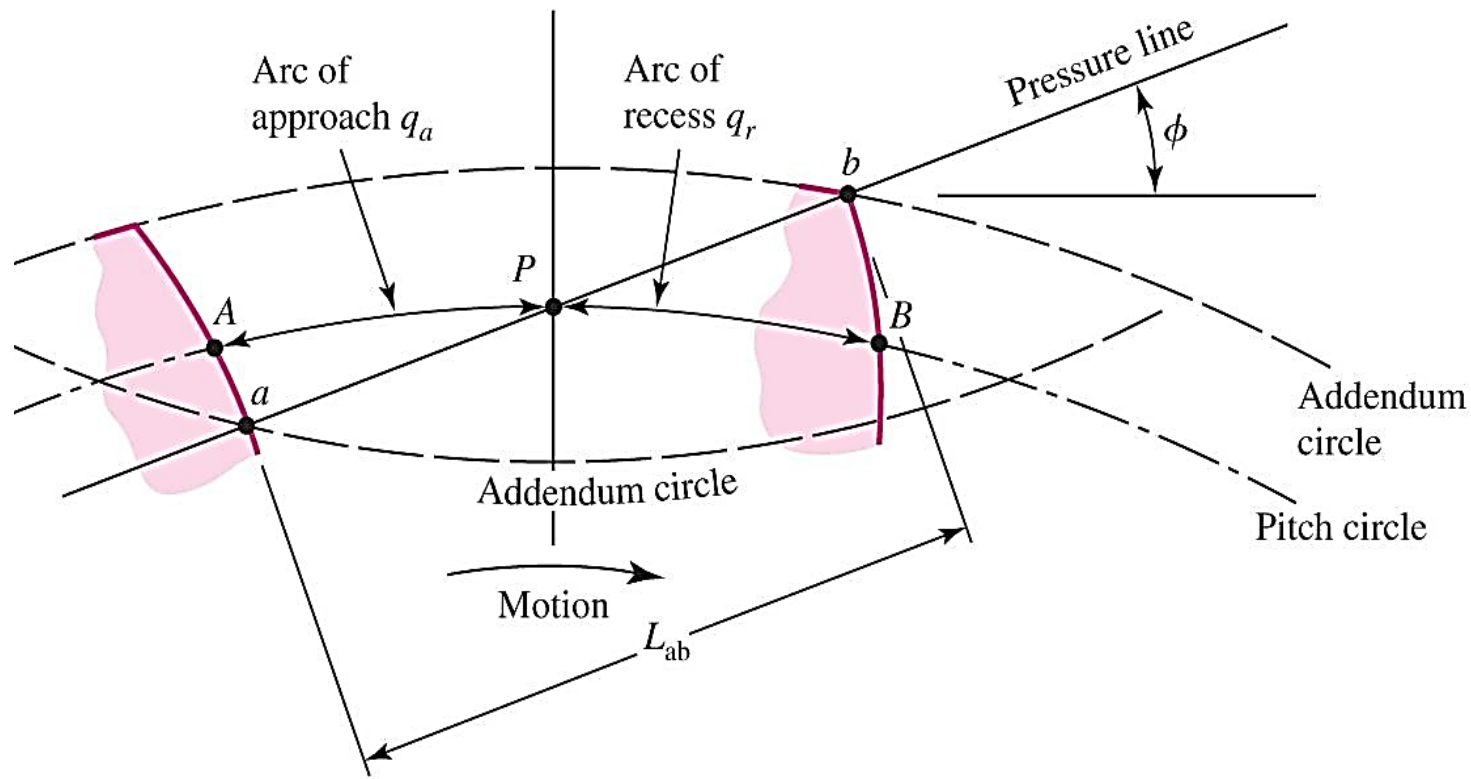
- Novo ângulo de pressão

$$\phi' = \cos^{-1} \frac{r_b \text{ (pinhão)}}{d'_P/2} = \cos^{-1} \frac{3,76}{8,143/2} = 22,56^\circ$$



# RAZÃO DE CONTATO

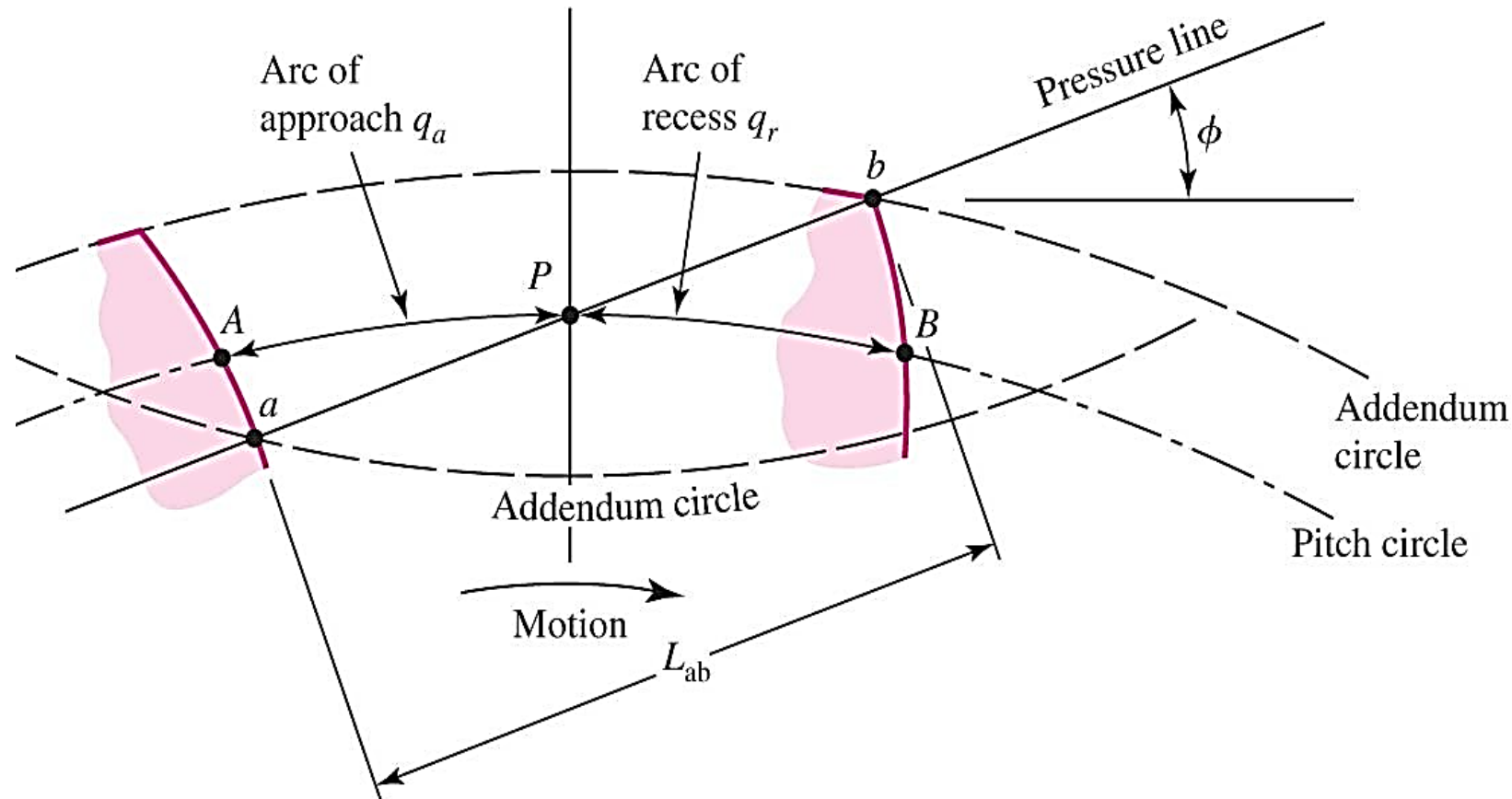
- O arco de ação  $q_t$  é a soma do arco de aproximação  $q_a$  com o arco de afastamento  $q_r$ , ou seja  $q_t = q_a + q_r$
- A razão de contato  $m_c$  é a razão entre o arco de ação e o passo circular.  $m_c = \frac{q_t}{p}$
- A razão de contato representa o número médio de pares de dente em contato.



# RAZÃO DE CONTATO

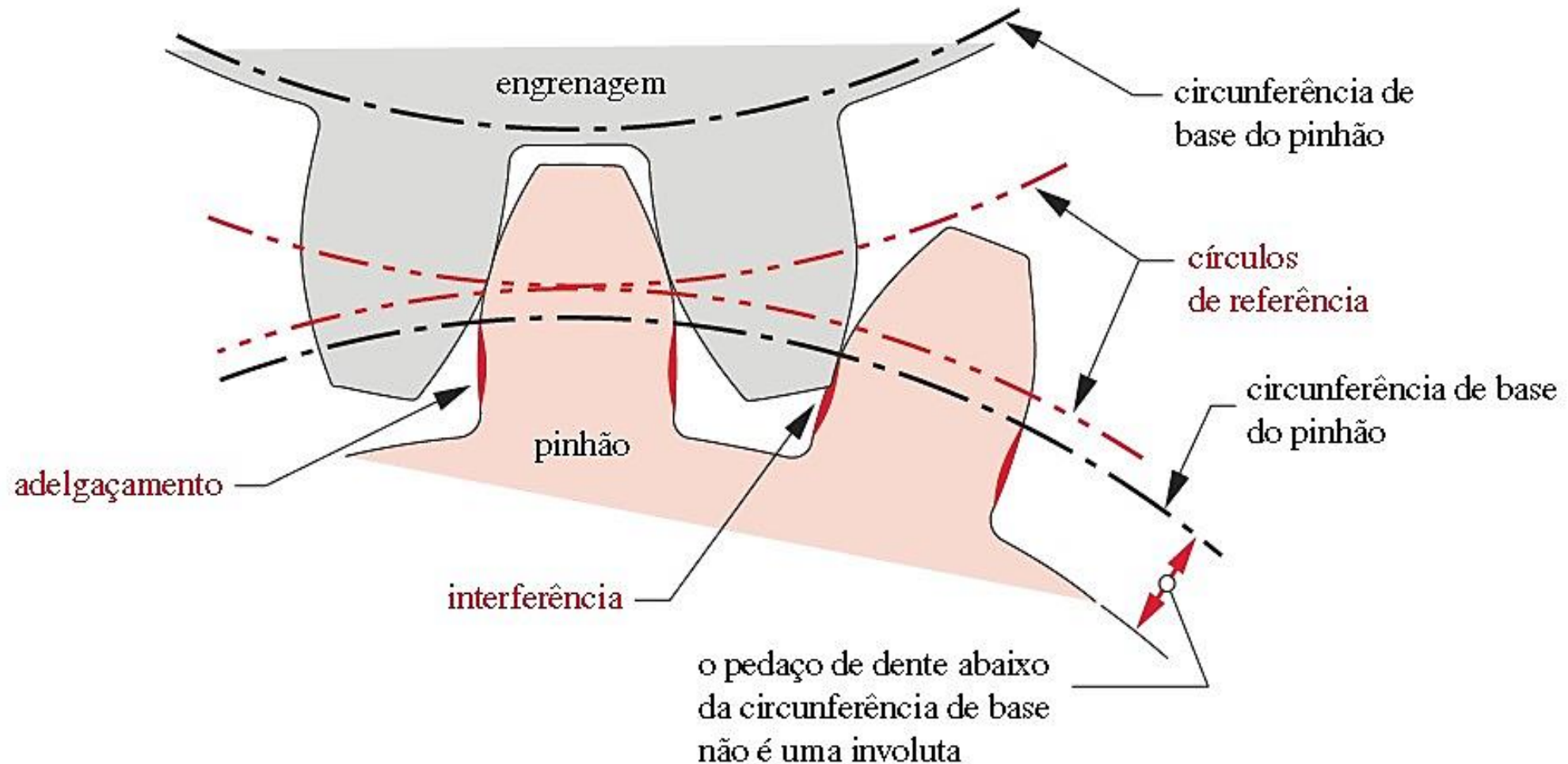
- A razão de contato pode também ser obtida pela razão entre o comprimento da linha de ação e o passo de base
- A razão de contato deve ser no mínimo igual a 1.2

$$m_c = \frac{L_{ab}}{p \cos \phi}$$



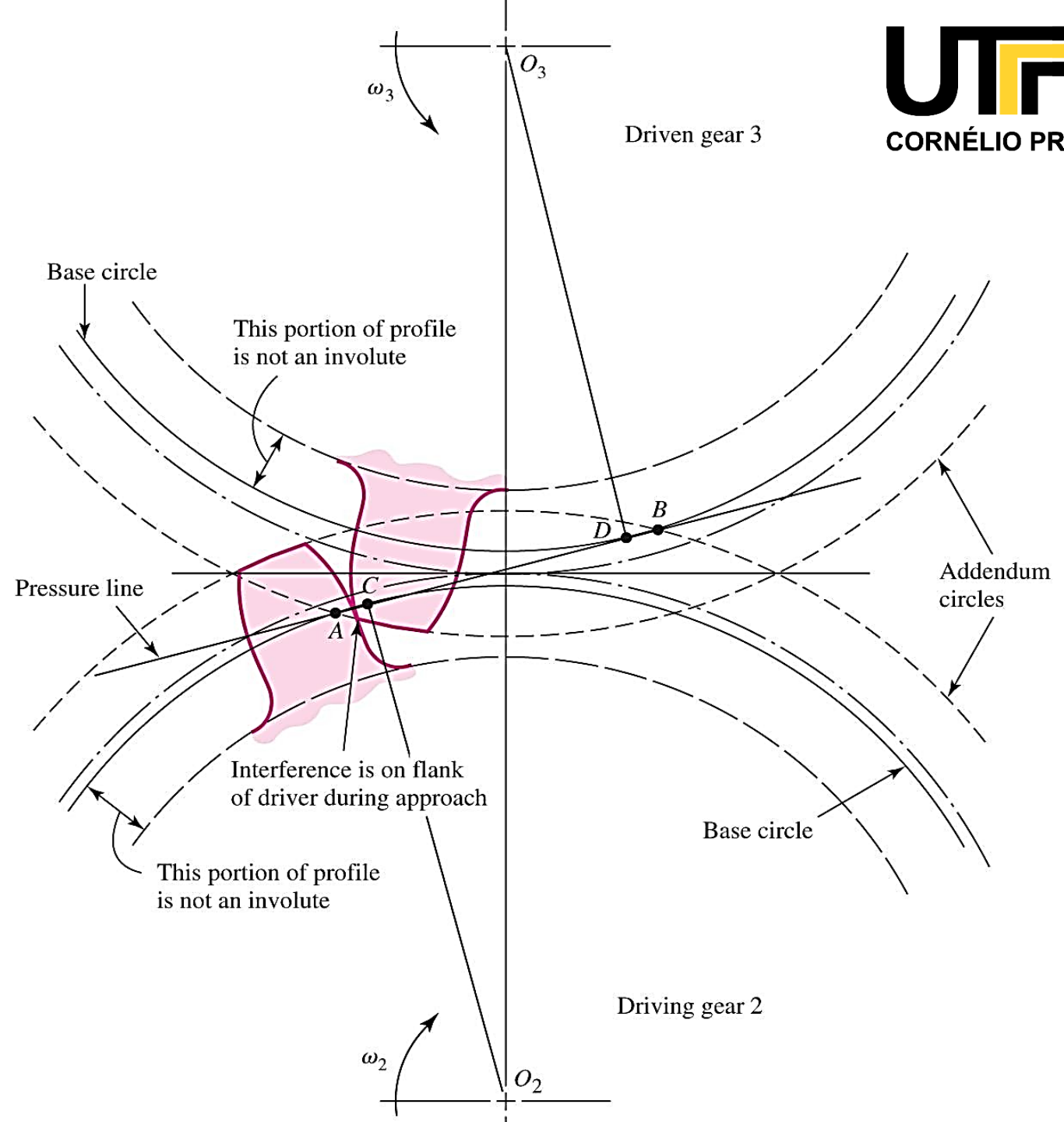
# INTERFERÊNCIA

- Contato de partes do dente que não são conjugadas é chamado de interferência.



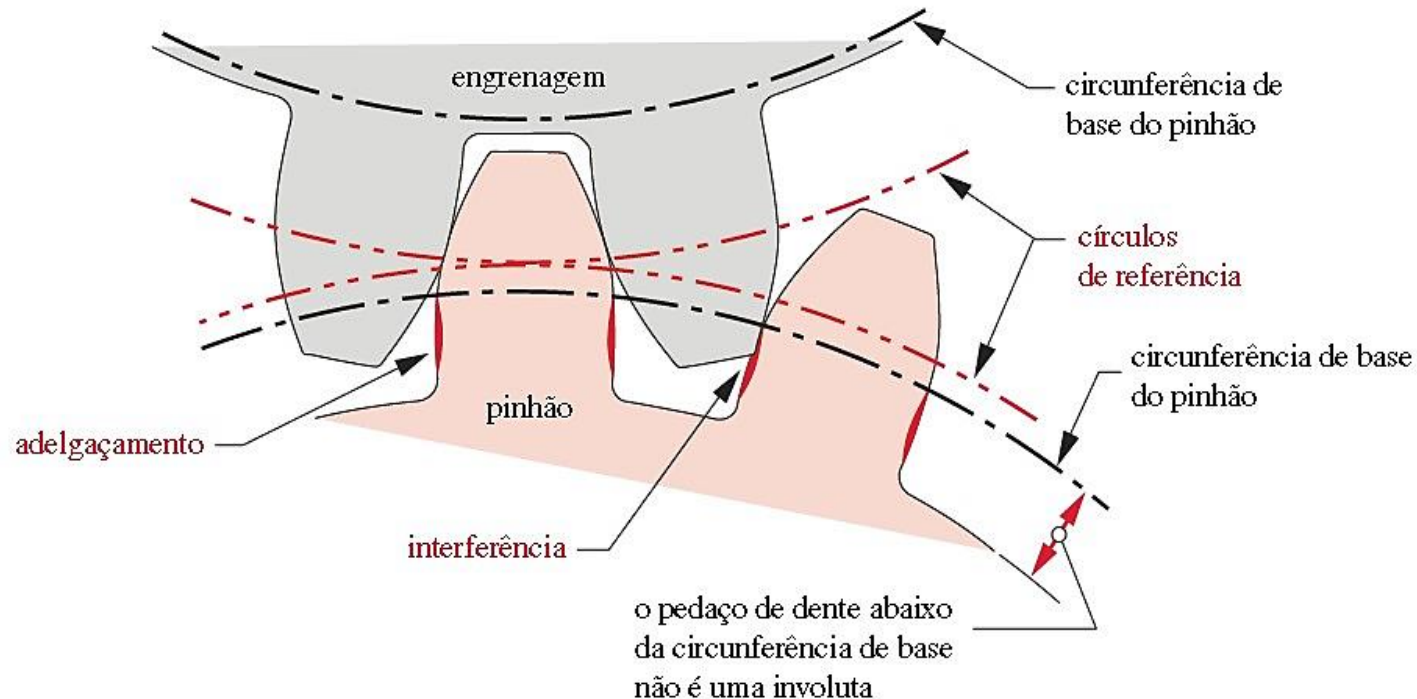
# INTERFERÊNCIA

- Acontece quando o contato ocorre abaixo da circunferência de base
- Se o dente fosse produzido pelo processo de geração, então a parcela interferente seria removida; conhecida como *adelgaçamento*.



# INTERFERÊNCIA

- Procedimento para evitar interferência:
  1. Calcular  $N_p$  mínimo
  2. Calcular  $N_G$  máximo para  $N_p$  escolhido
  3. Verificar se  $N_G = m N_p \leq N_G$  máximo
  4. Se 3 não verificar, escolha  $N_p$  maior e repita 1,2 e 3 até verificar  $N_G \leq N_G$  máximo





# INTERFERÊNCIA EM ECDR

- Menor número de dentes numa relação 1:1 sem ocorrer interferência:

$$N_P = \frac{2k}{3 \sin^2 \phi} \left( 1 + \sqrt{1 + 3 \sin^2 \phi} \right)$$

- $m_G = N_G/N_P = m$
  - $k = 1$  dente de altura completa ( $ht$ )
  - $k = 0,8$  dente de altura menor que  $ht$
- Menor número de dentes no pinhão com relação de transmissão  $m_G = N_G/N_P > 1$ , sem ocorrer interferência:

$$N_P = \frac{2k}{(1 + 2m_G) \sin^2 \phi} \left( m_G + \sqrt{m_G^2 + (1 + 2m_G) \sin^2 \phi} \right)$$

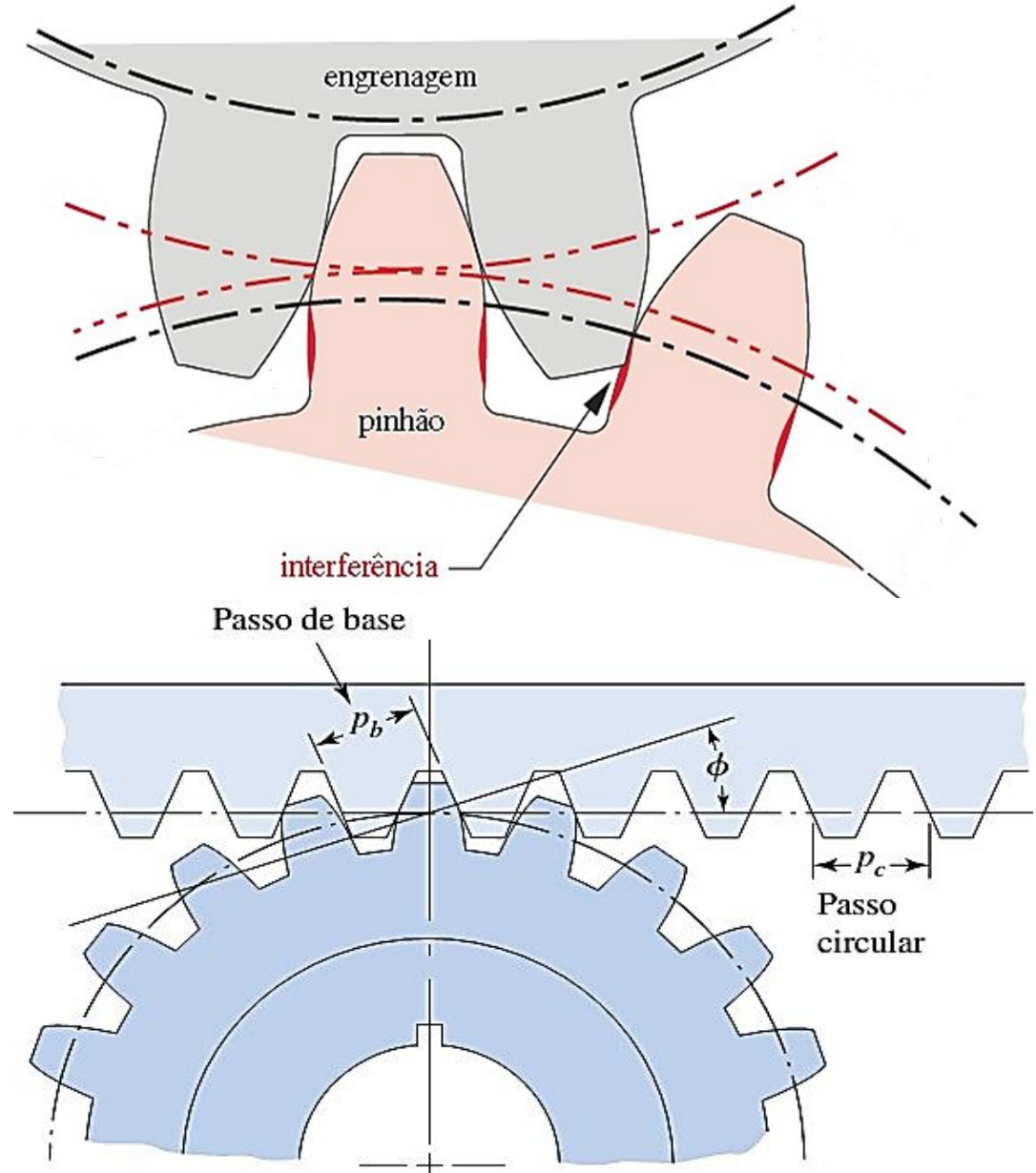
# INTERFERÊNCIA EM ECDR

- Maior coroa engrenada a um pinhão, livre de interferência:

$$N_G = \frac{N_P^2 \sin^2 \phi - 4k^2}{4k - 2N_P \sin^2 \phi}$$

- Menor pinhão engrenado a uma cremalheira, livre de interferência:

$$N_P = \frac{2k}{\sin^2 \phi}$$



# INTERFERÊNCIA EM ECDR

- Para ângulo de pressão 20°

Mín $N_P$	Max $N_G$	Max $N_G$ Inteiro	Relação Max $m_G = N_G/N_P$
13	16.45	16	1.23
14	26.12	26	1.86
15	45.49	45	3
16	101.07	101	6.31
17	1309.86	1309	77

- Para ângulo de pressão 25°

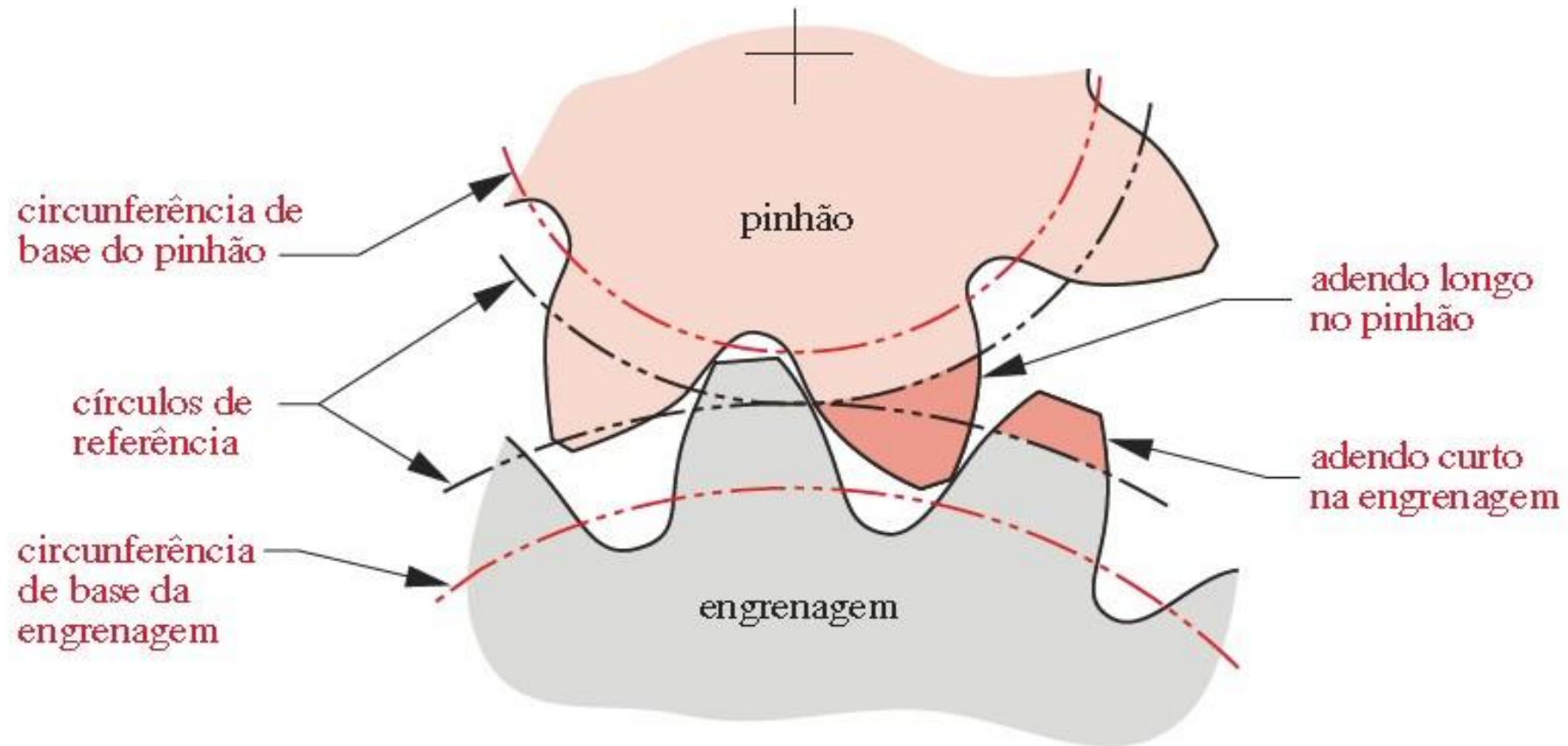
Min $N_P$	Max $N_G$	Max $N_G$ Inteiro	Relação Max $m_G = N_G/N_P$
9	13.33	13	1.44
10	32.39	32	3.2
11	249.23	249	22.64

# INTERFERÊNCIA EM ECDR

- Pode ser eliminada utilizando maior número de dentes no pinhão.
- Contudo, se o tamanho do dente (modulo) for mantido, ocorrerá aumento no diâmetro da engrenagem, já que  $d = m.N$ .
- Pode ser eliminada utilizando maior ângulo de pressão. Isto resulta em menores circunferências de base aumentando o perfil evolmental no dente.
- A desvantagem de ângulos de pressão maiores é o aumento da força radial para a mesma força transmitida.
- Outra forma de eliminação da interferência é a correção do perfil do dente.

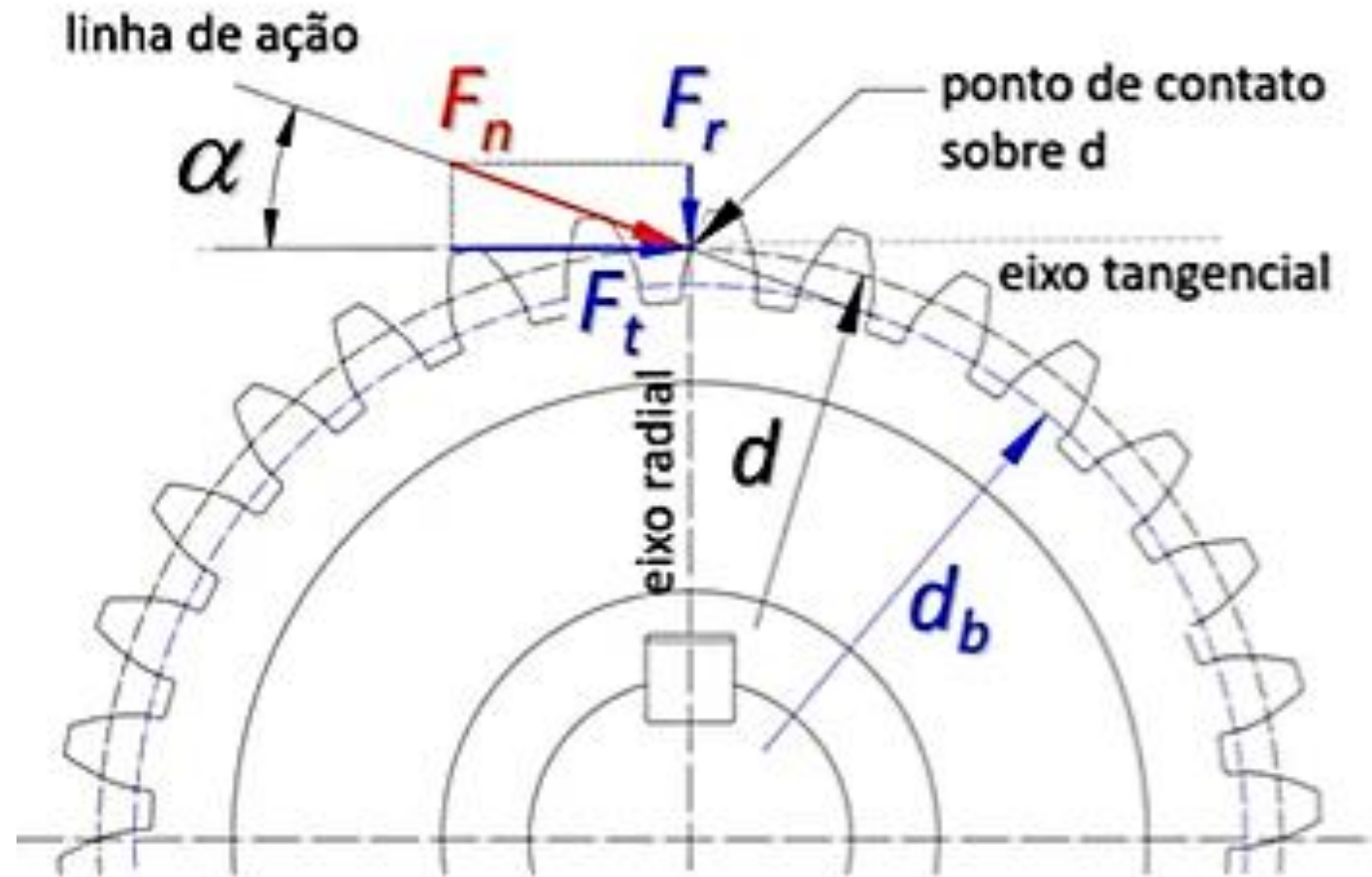
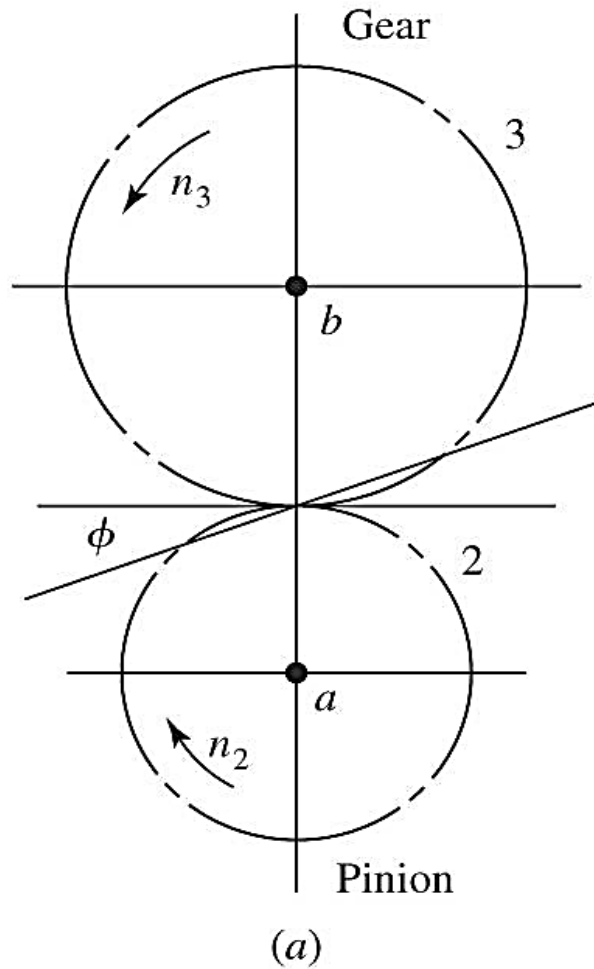
# DENTES CORRIGIDOS

- **Profundidade completa:** tem adendos iguais em ambos pinhão e engrenagem
- **Perfil deslocado:** adendo maior no pinhão e outro menor na engrenagem.

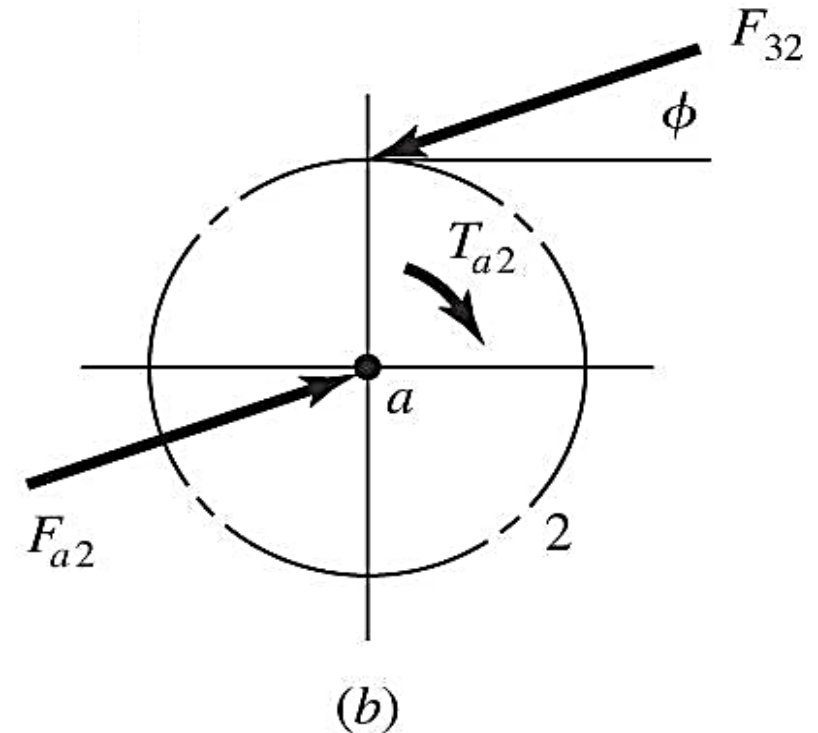
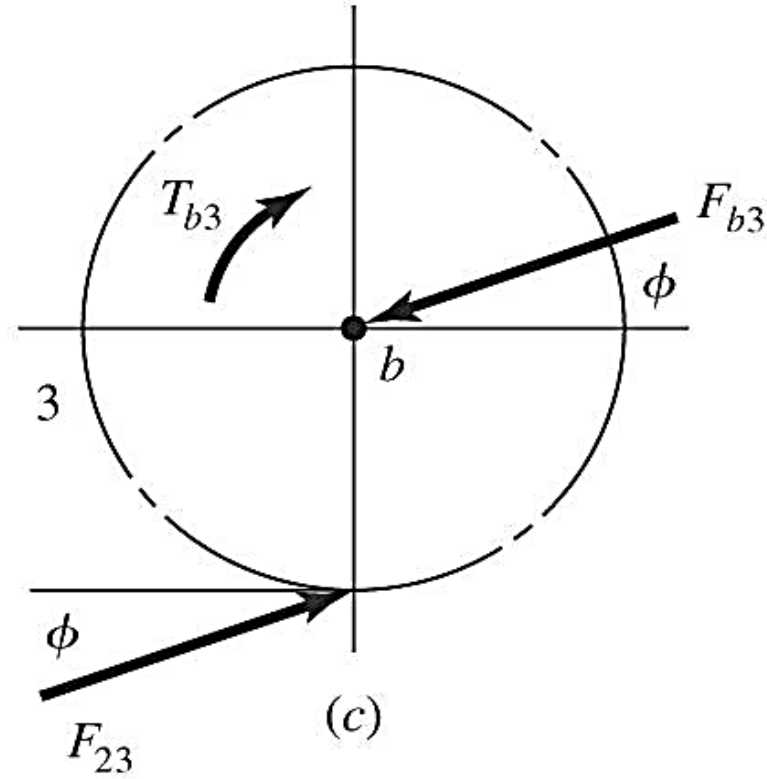
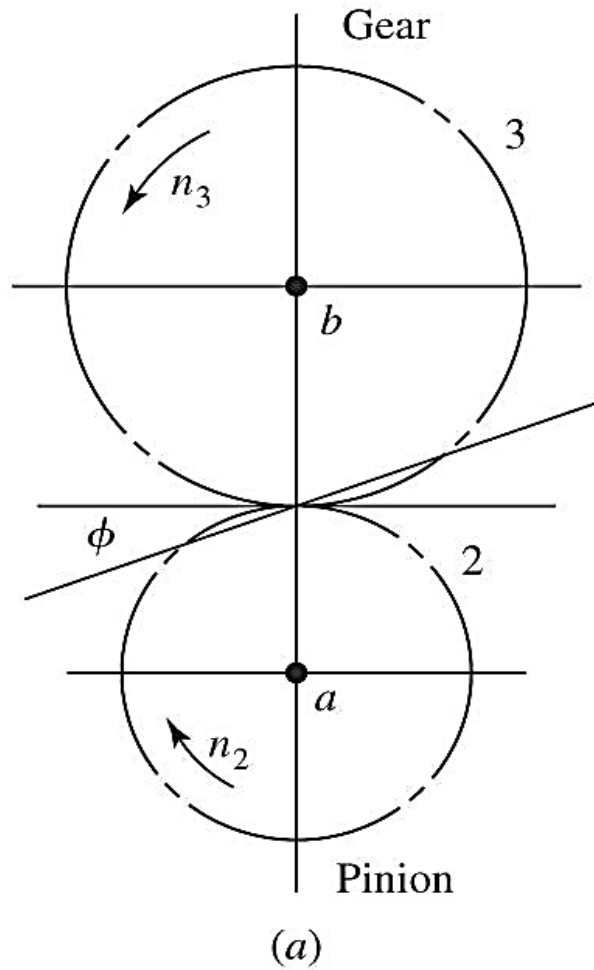




# ANÁLISE DE FORÇA EM ECDR



# ANÁLISE DE FORÇA EM ECDR



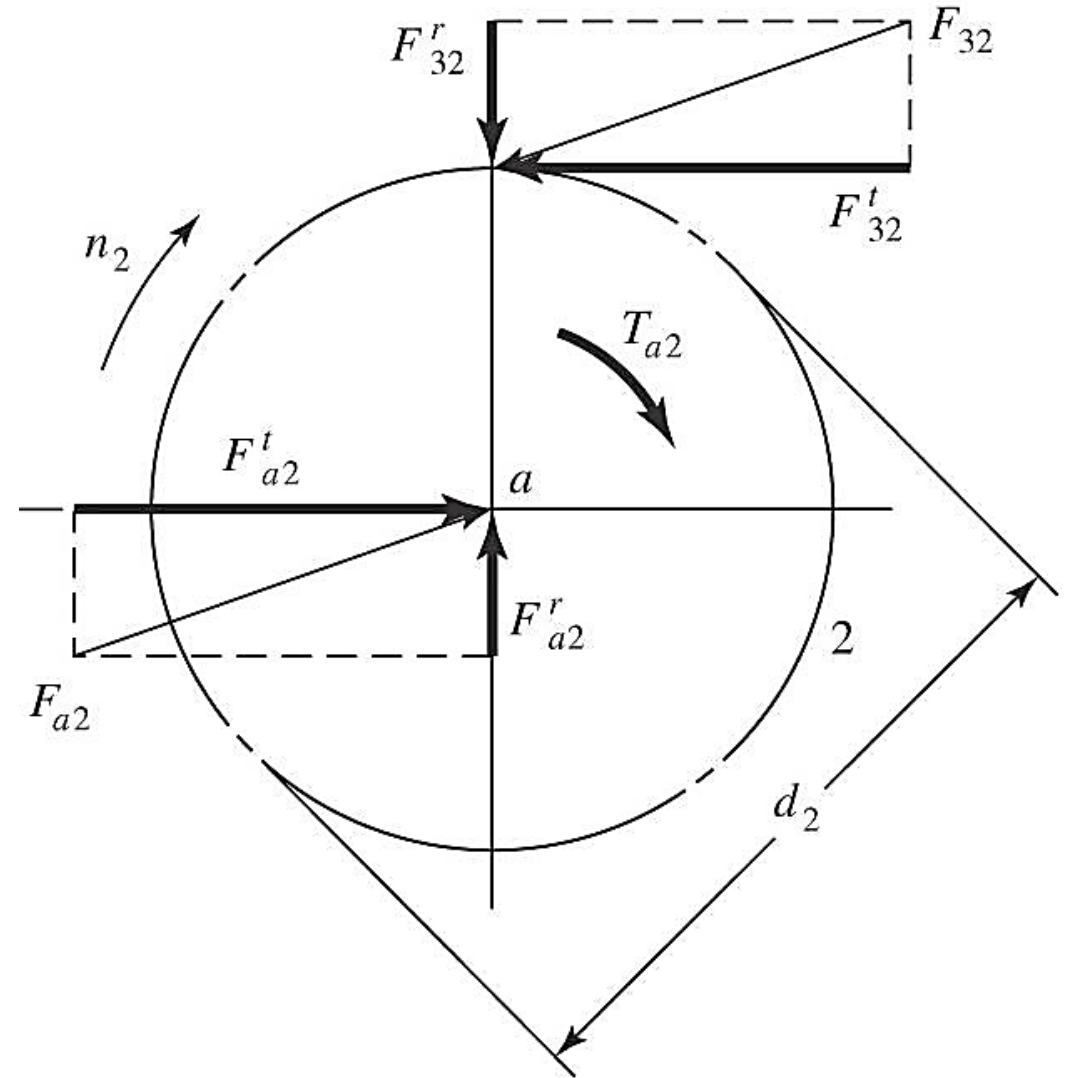
# ANÁLISE DE FORÇA EM ECDR

- *Carga Transmitida  $W_t$*

$$W_t = F_{32}^t$$

- *Torque transmitido*

$$T = \frac{d}{2} W_t$$



# ANÁLISE DE FORÇA EM ECDR

- *Carga Tangencial  $W_t$*

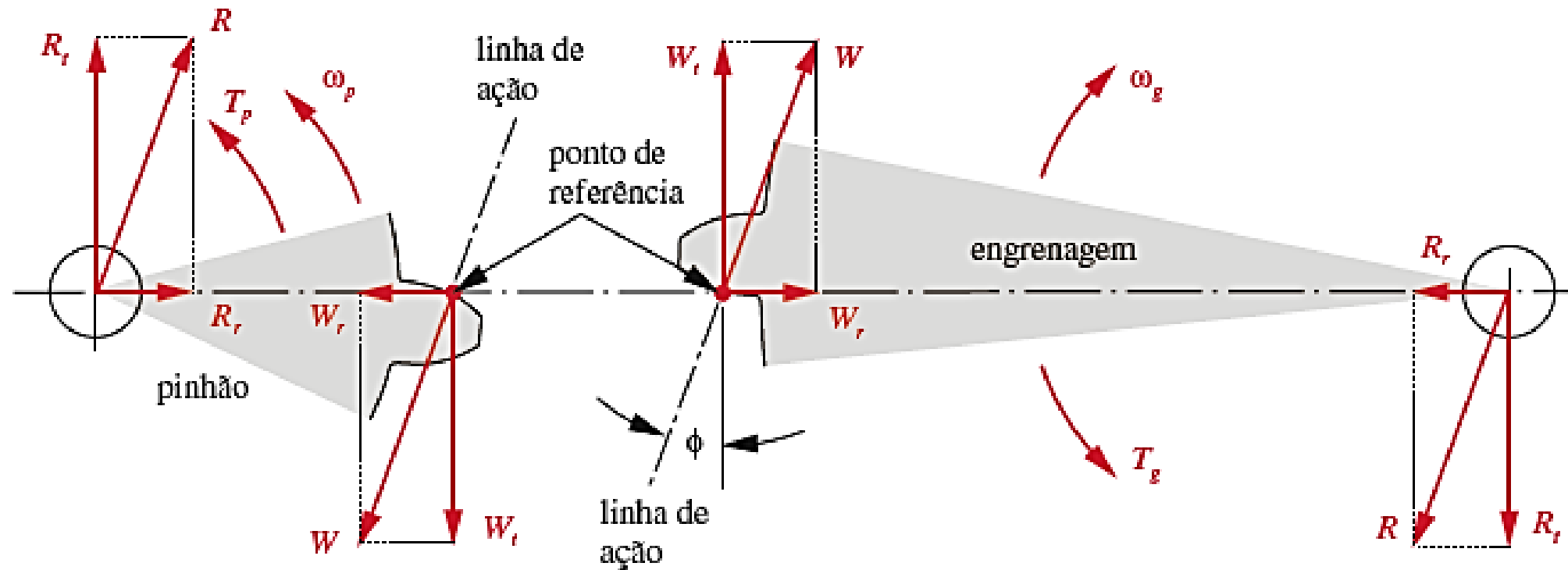
$$W_t = \frac{T_p}{r_p} = \frac{2T_p}{d_p} = \frac{2p_d T_p}{N_p}$$

- *Carga Normal  $W$*

$$W = \frac{W_t}{\cos \phi}$$

- *Carga Radial  $W_r$*

$$W_r = W_t \tan \phi$$

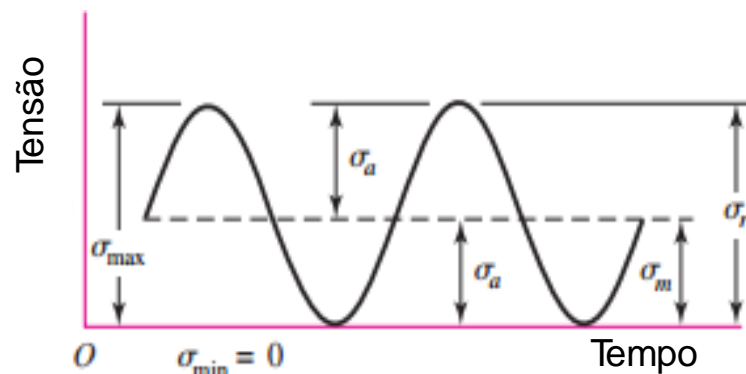


# CARGA ALTERNANTE E REPETIDA

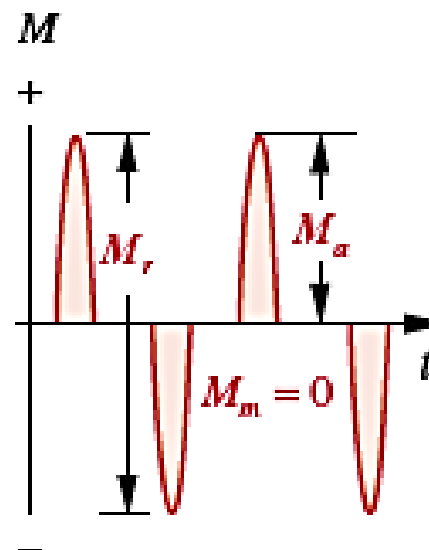
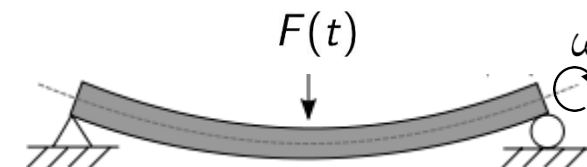
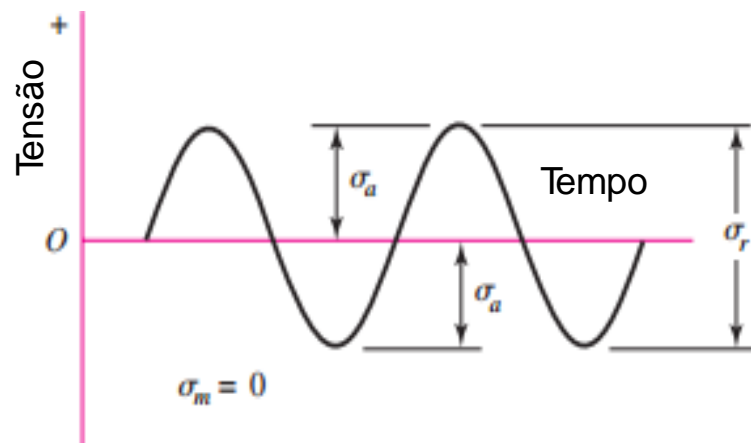


- Os carregamentos podem variar com o tempo e podem ocorrer de forma combinada.

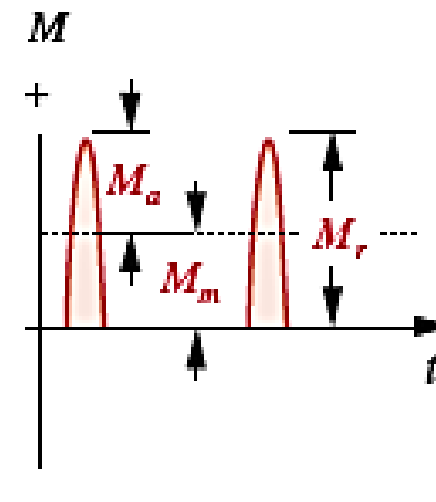
Tensão repetida



Tensão alternada



(b) Momento invertido em dente de engrenagem intermediária



(a) Momento repetido em dente de engrenagem intermediária



# POTÊNCIA EM ECDR

- *Potência Transmitida H*

$$H = T \omega = (W_t d/2) \omega$$

- *A velocidade linear (velocidade tangencial) V*
  - velocidade de um ponto do círculo primitivo comum as engrenagens do par

$$V = \frac{\pi d n}{60} [m/s]$$

- $d$  é o diâmetro primitivo [m]
- $n$  é a frequência de rotação [rpm]

# POTÊNCIA EM ECDR

- Relações úteis:
  - Sistema americano

$$W_t = 33\,000 \frac{H}{V}$$

- $W_t$  em *lbf*
- $H$  em *HP*
- $V$  em *pé/min*

- SI

$$W_t = \frac{60\,000 H}{\pi d n}$$

- $W_t$  em *kN*
- $H$  em *kW*
- $V$  em *rpm*

Conversões de unidade:

- $1 \text{ pé} = 0,3048 \text{ m}$
- $1 \text{ pol} = 0,0254 \text{ m}$
- $1 \text{ rpm} = 1/60 \text{ Hz}$
- $1 \text{ lb} = 4,448 \text{ N}$
- $1 \text{ HP} = 745 \text{ W}$

# EXEMPLO 2 - NORTON

Determine os torques e as cargas transmitidas nos dentes de um engrenagem em um trem de 3 engrenagens contendo um pinhão, uma engrenagem vazia e uma engrenagem. Encontre os diâmetros das engrenagens e as componentes média e alternante da carga transmitida em cada engrenagem.

- O eixo do pinhão passa 20 hp a 2500 rpm. A razão de trem é 3,5:1. O pinhão tem 14 dentes, um ângulo de pressão de  $25^\circ$  e  $pd = 6$ . A engrenagem vazia tem 17 dentes. O pinhão engrena com a engrenagem vazia e esta engrena com a engrenagem.

# EXEMPLO 2

- Número de dentes da Coroa

$$N_g = m_G N_p = 3,5(14) = 49 \text{ dentes}$$

- Torque do Pinhão

$$T_p = \frac{P}{\omega_p} = \frac{20 \text{ hp} \left( 6600 \frac{\text{in-lb}}{\text{s}} / \text{hp} \right)}{2500 \text{ rpm} \left( 2\pi/60 \right) \frac{\text{rad}}{\text{s}} / \text{rpm}} = 504 \text{ lb-in}$$

- Torque da Coroa

$$T_g = m_G T_p = 3,5(504) = 1765 \text{ lb-in}$$

- Diâmetro Primitivo das Engrenagens

$$d_p = \frac{N_p}{p_d} = \frac{14}{6} = 2,33 \text{ in} \quad d_i = \frac{17}{6} = 2,83 \text{ in} \quad d_g = \frac{49}{6} = 8,17 \text{ in} \quad (d)$$

# EXEMPLO 2

- Carga Tangencial transmitida no pinhão

$$W_t = \frac{T_p}{d_p/2} = \frac{504}{2,33/2} = 432 \text{ lb}$$

- Carga Radial transmitida no pinhão

$$W_r = W_t \operatorname{tg} \phi = 432 \operatorname{tg} 25^\circ = 202 \text{ lb}$$

- Carga transmitida devido ao ângulo de pressão

$$W = \frac{W_t}{\cos \phi} = \frac{432}{\cos 25^\circ} = 477 \text{ lb}$$

- Carga Alternante e Carga média no dente do pinhão e da engrenagem

$$W_{t_{\text{alternante}}} = \frac{W_t}{2} = 216 \text{ lb} \qquad W_{t_{\text{média}}} = \frac{W_t}{2} = 216 \text{ lb}$$

- Carga Alternante e média no dente da engrenagem vazia

$$W_{t_{\text{alternante}}} = W_t = 432 \text{ lb} \qquad W_{t_{\text{média}}} = 0 \text{ lb}$$