



AULA 7

# EC e ECRF NORTON E SHIGLEY

Professor: Dr. Paulo Sergio Olivio Filho

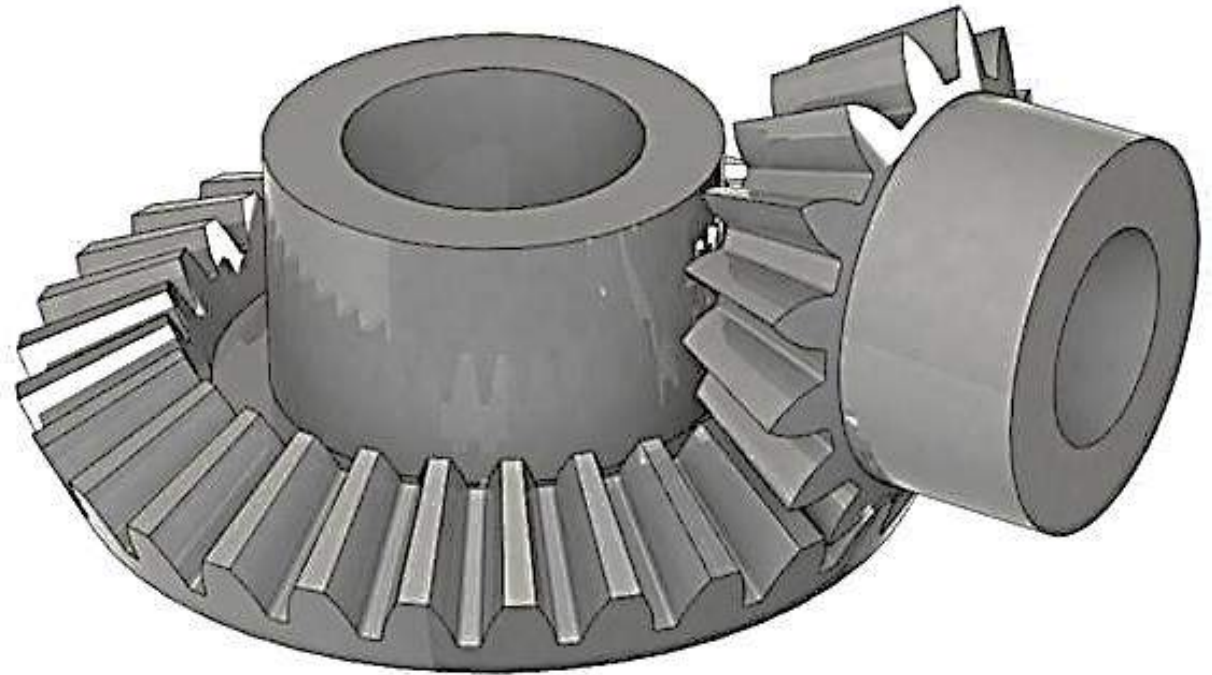
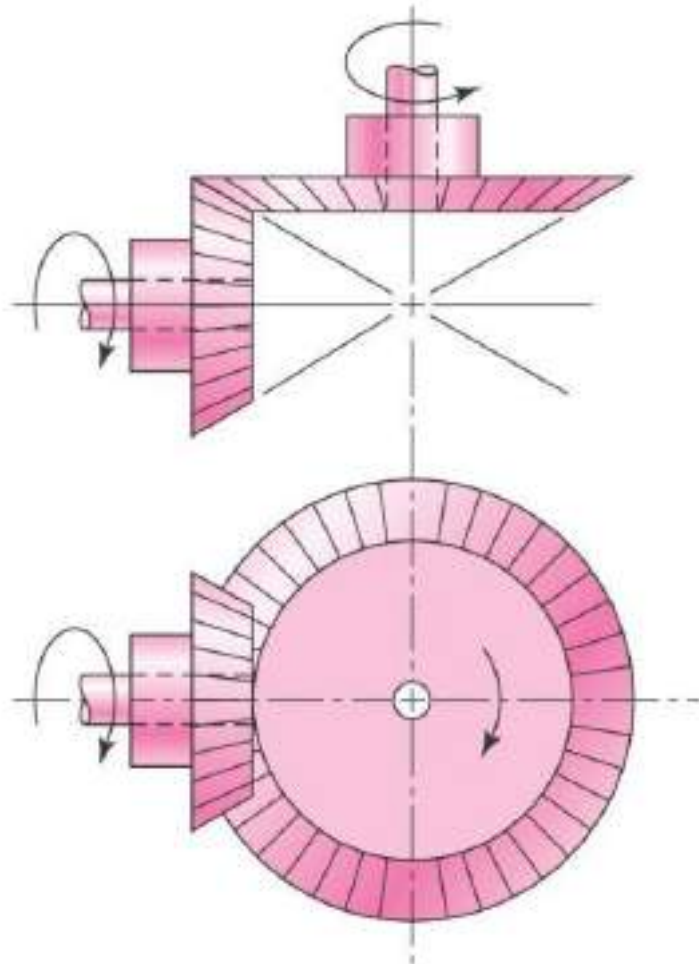
# CONTEÚDO DA AULA

## ENGRENAGENS CÔNICAS E SEM FIM

1. Dimensionamento básico de engrenagens cônicas
2. Análise de forças em engrenagens cônicas
3. Dimensionamento básico de engrenagens de coroa e sem fim
4. Análise de forças e atrito em engrenagens de coroa e sem fim

# ENGRENAGENS CÔNICAS DE DENTES RETOS

- Transmitir movimento entre eixos concorrentes



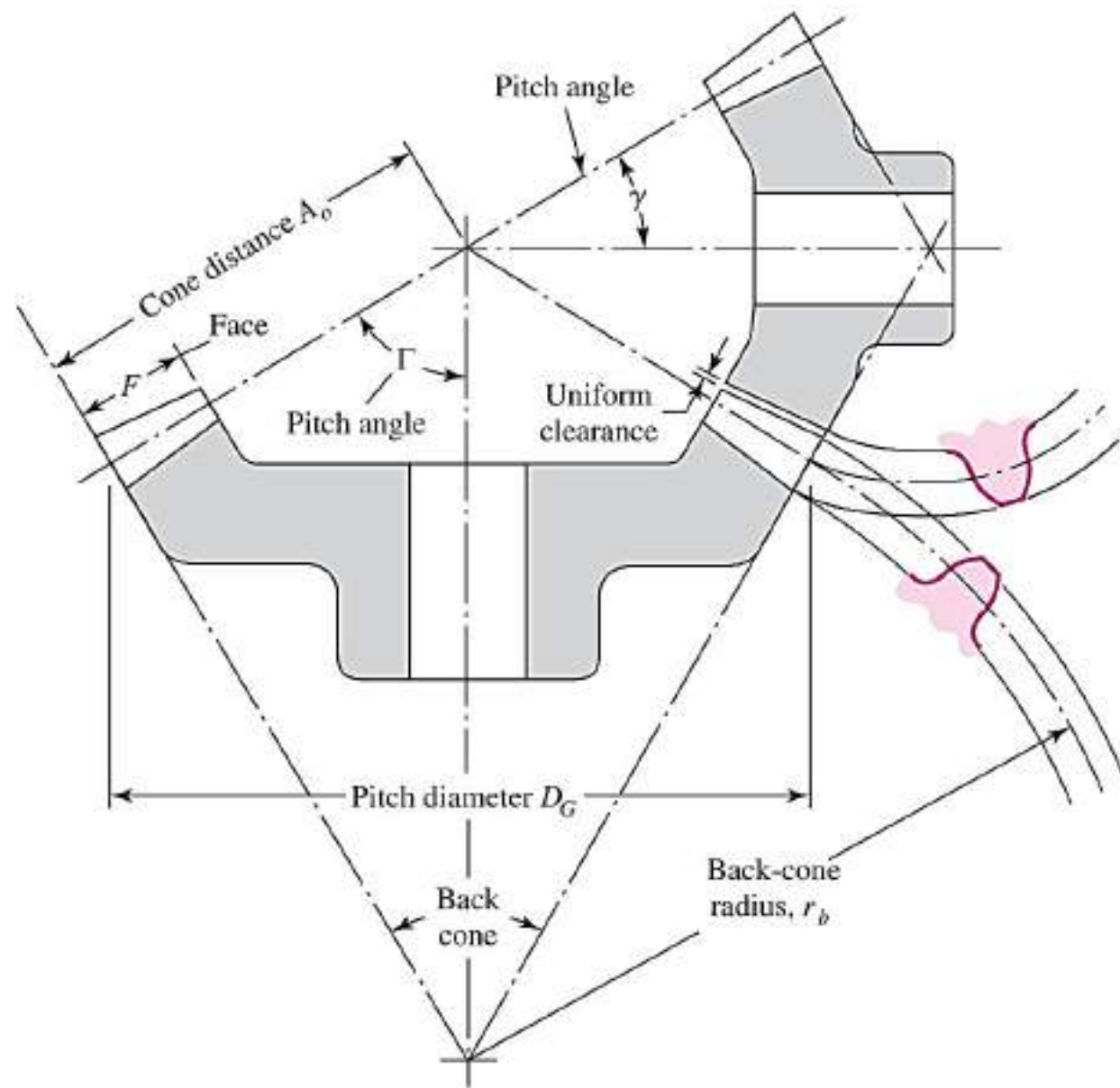
# ENGRENAGENS CÔNICAS DE DENTES RETOS

- Relação de transmissão:

$$\tan \gamma = \frac{N_P}{N_G} \quad \tan \Gamma = \frac{N_G}{N_P}$$

- A forma do dente, projetada no cone complementar (back cone) é a mesma de uma engrenagem de cilíndrica de raio  $r_b$
- O número virtual de dentes desta
- engrenagem cilíndrica virtual é:

$$N' = \frac{2\pi r_b}{p}$$





# ENGRENAGENS CÔNICAS DE DENTES RETOS

Dimensões  
dos Dentes  
para  
Engrenage  
ns Cônicas  
de Dentes  
Retos e  
Ângulo de  
Pressão 20°

**Tabela 13-3** Proporções no denteado de engrenagens cônicas de dentes retos de 20°.

Item	Fórmula	
Profundidade de trabalho	$h_k = 2,0 / P$	$[= 2,0 m]$ ← $m = \text{módulo}$
Folga	$c = (0,188 / P) + 0,002 \text{ in}$	$[= 0,188 m + 0,05 \text{ mm}]$
Adendo da engrenagem	$a_G = \frac{0,54}{P} + \frac{0,460}{P(m_{90})^2}$	$[= 0,54 m + \frac{0,46 m}{(m_{90})^2}]$
Razão de engrenamento	$m_G = N_G / N_P$	
Razão equivalente de 90°	$m_{90} = m_G \text{ quando } \Gamma = 90$	
	$m_{90} = \sqrt{m_G \frac{\cos \gamma}{\cos \Gamma}} \text{ quando } \Gamma \neq 90$	
Largura de face	$F = 0,3 A_0 \text{ ou } F = \frac{10}{P}, \text{ o que for menor}$	$[F = \frac{A_0}{3} \text{ ou } F = 10 m]$
Número mínimo de dentes	Pinhão	16   15   14   13
	Coroa	16   17   20   30

# ANÁLISE DE FORÇAS – EC

- Força tangencial

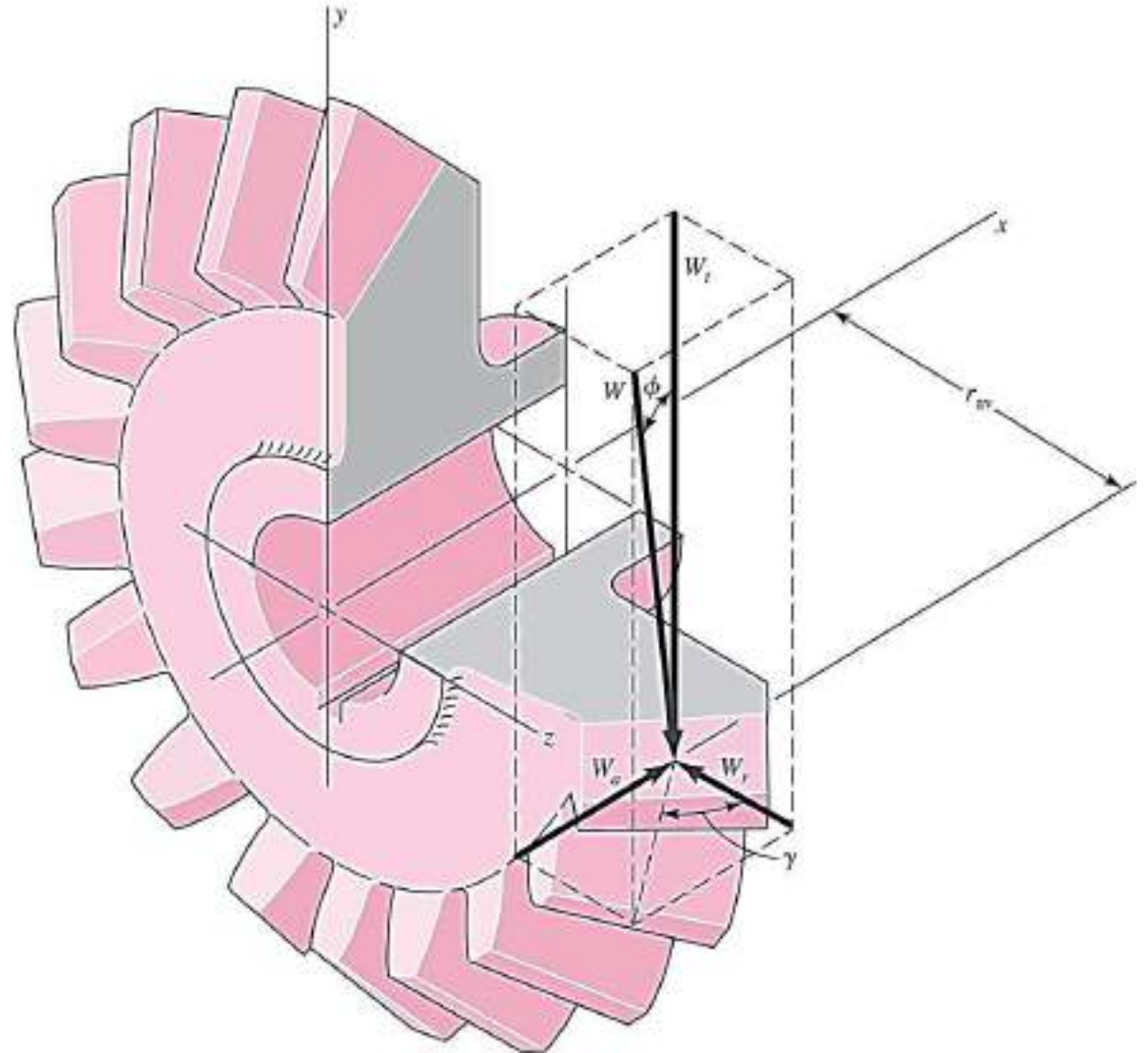
$$W_t = \frac{T}{r_{av}}$$

- Força Radial

$$W_r = W_t \tan \phi \cos \gamma$$

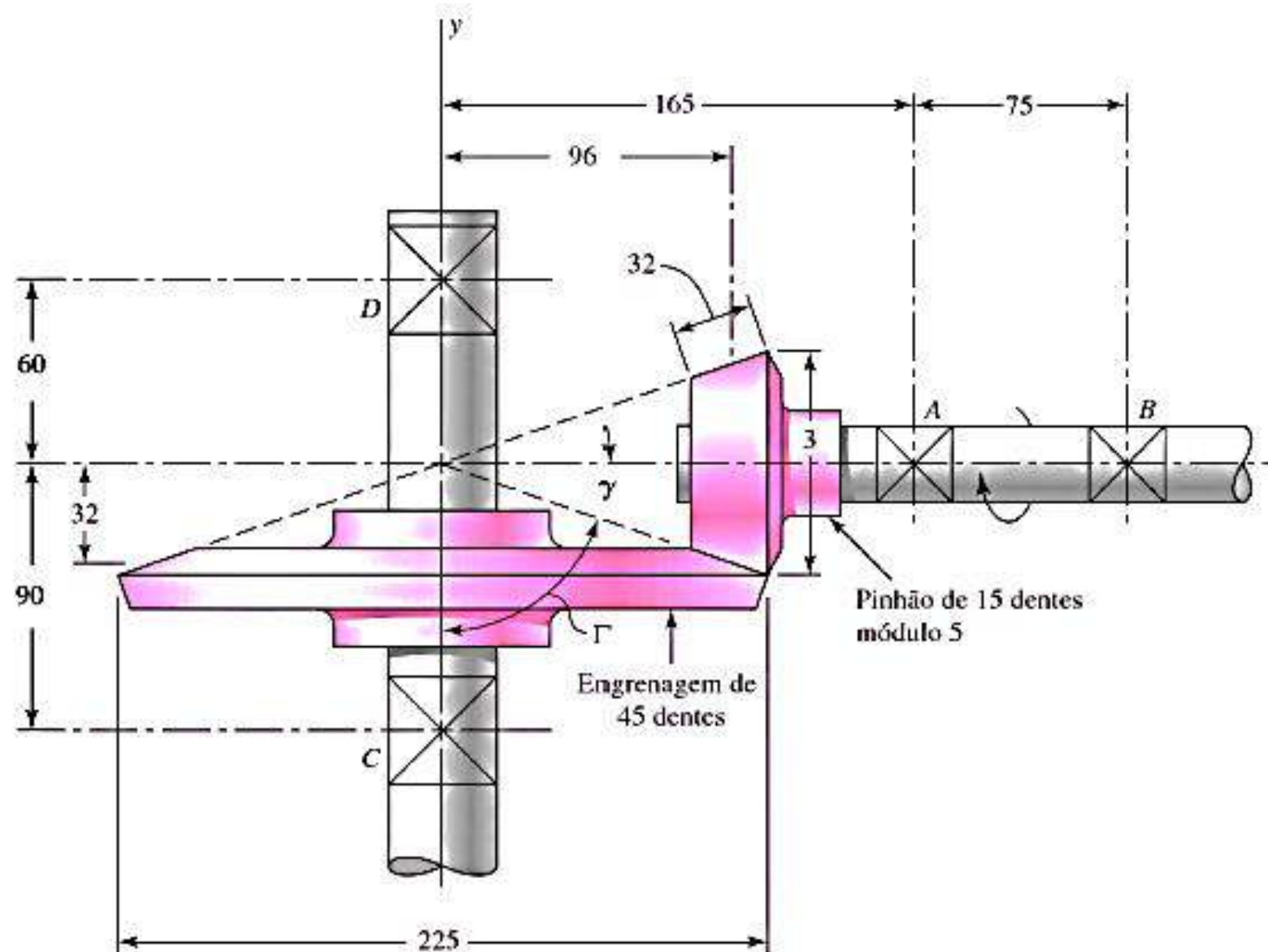
- Força Axial

$$W_a = W_t \tan \phi \sin \gamma$$



# EXEMPLO 1

O pinhão cônico na figura roda a 600 rpm na direção mostrada e transmite 3,75 kW à engrenagem. As distâncias de montagem, a localização de todos os mancais e os raios primitivos médio do pinhão e coroa estão na figura. Por simplicidade, os dentes foram substituídos pelos cones primitivos. Os mancais A e C devem escorar os esforços axiais. Encontre as forças dos mancais no eixo de engrenagens.



# EXEMPLO 1

- Ângulos Primitivos

$$\gamma = \tan^{-1}\left(\frac{75}{225}\right) = 18.4^\circ \quad \Gamma = \tan^{-1}\left(\frac{225}{75}\right) = 71.6^\circ$$

- Velocidade Periférica

$$V = 2\pi r_p n = \frac{2\pi(32)(600)}{60} = 2011 \text{ mm/s}$$

- Força Tangencial , Radial e axial

$$W_t = \frac{H}{V} = \frac{3750}{2.001} = 1865 \text{ N}$$

$$W_r = W_t \tan \phi \cos \Gamma = 1865 \tan 20^\circ \cos 71.6^\circ = 214 \text{ N}$$

$$W_a = W_t \tan \phi \sin \Gamma = 1865 \tan 20^\circ \sin 71.6^\circ = 644 \text{ N}$$



# EXEMPLO 1

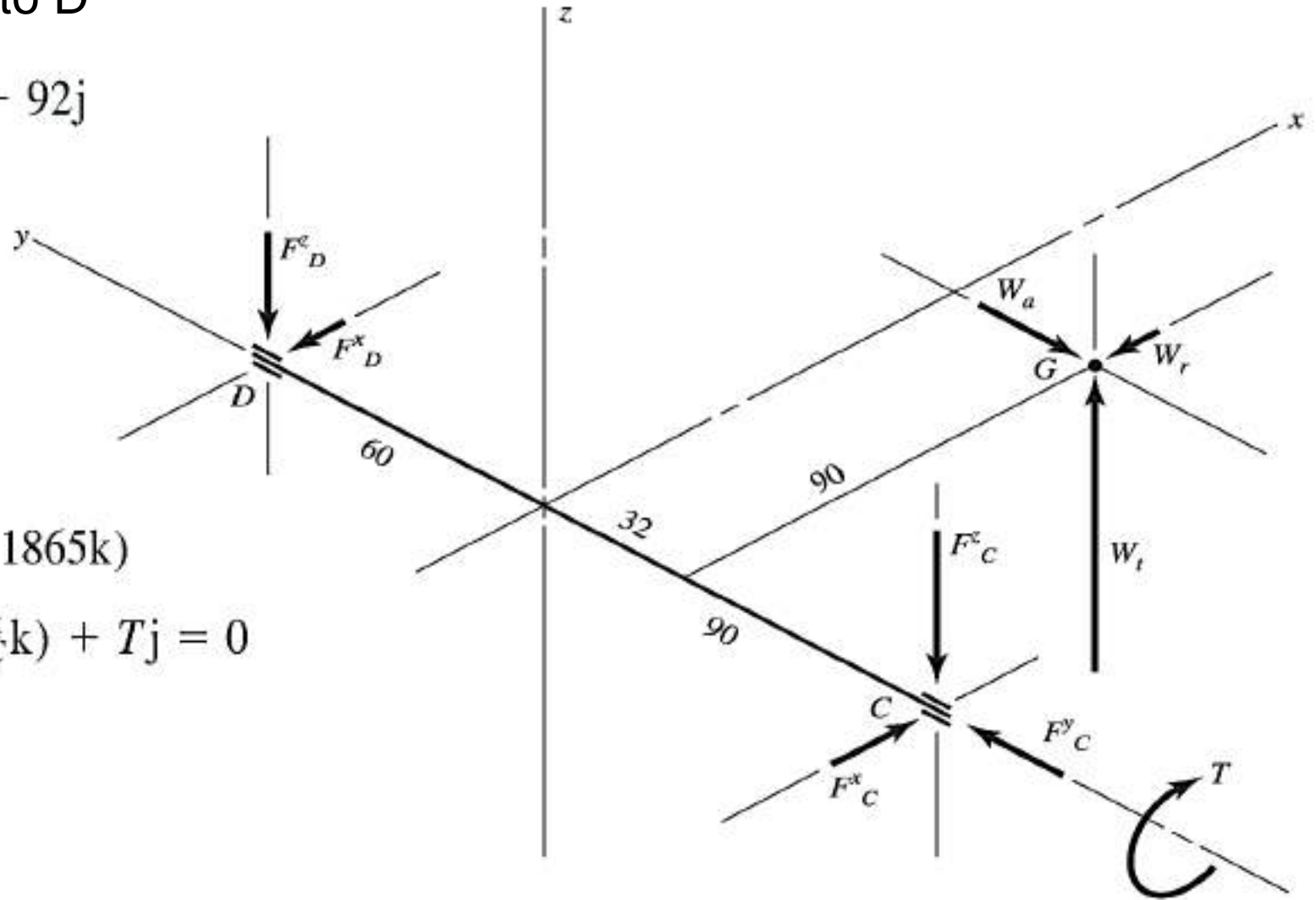
- Soma do momentos no ponto D

$$R_G = 90i - (60 + 32)j = 90i - 92j$$

$$R_C = -(60 + 90)j = -150j$$

$$R_G \times W + R_C \times F_C + T = 0$$

$$(90i - 92j) \times (-214i - 644j + 1865k) \\ + (-150j) \times (F_C^x i + F_C^y j + F_C^z k) + Tj = 0$$



# EXEMPLO 1

- Torque e Forças nos mancais

$$(-171\,580\mathbf{i} - 167\,850\mathbf{j} - 77\,712\mathbf{k}) + (-150F_C^z\mathbf{i} + 150F_C^x\mathbf{k}) + T\mathbf{j} = 0$$

$$T = 168\mathbf{j} \text{ N} \cdot \text{m} \quad F_C^x = 518 \text{ N} \quad F_C^z = -1144 \text{ N}$$

- Torque e Forças nos mancais

$$\mathbf{F}_D + \mathbf{F}_C + \mathbf{W} = 0$$

$$(F_D^x\mathbf{i} + F_D^z\mathbf{k}) + (518\mathbf{i} + F_C^y\mathbf{j} - 1144\mathbf{k}) + (-214\mathbf{i} - 644\mathbf{j} + 1865\mathbf{k}) = 0$$

$$\mathbf{F}_C = 518\mathbf{i} + 644\mathbf{j} - 1144\mathbf{k} \text{ N}$$

$$\mathbf{F}_D = -303\mathbf{i} - 721\mathbf{k} \text{ N}$$

# ANÁLISE DE TENSÕES EM ENGR. CÔNICAS

## Geometria

$$d_p = \frac{N_p}{P}$$

$$\gamma = \tan^{-1} \frac{N_p}{N_G}$$

$$\Gamma = \tan^{-1} \frac{N_G}{N_p}$$

$$d_{av} = d_p - F \cos \Gamma$$

## Análise de força

$$W' = \frac{2T}{d_{av}}$$

$$W'' = W' \tan \phi \cos \gamma$$

$$W''' = W' \tan \phi \sin \gamma$$

## Análise de resistência

$$W' = \frac{2T}{d_p}$$

$$W' = W' \tan \phi \cos \gamma$$

$$W'' = W' \tan \phi \sin \gamma$$

Tabela 15-2

Equações (15-5) a (15-8)

Equação (15-10)

Equação (15-11)

Figura 15-7

Equação (15-13)

Na extremidade posterior  
(mais larga) do dente

Tensão  
de flexão da  
engrenagem

$$S_t = \sigma = \frac{W'}{F} P_d K_o K_v \frac{K_x K_m}{K_x J}$$

US

$\sigma$  (lbf/pol<sup>2</sup>) - Tensão de flexão

$W_t$  (lbf) - Força tangencial transmitida

$K_o$  - Fator de sobrecarga

$K_v$  - Fator dinâmico

$K_s$  - Fator de tamanho

$P_d$  (dentes/pol) - Passo Diametral

$F$  (pol) - Largura da face mais estreita

$K_m$  - Fator de distribuição de carga

$K_x$  - Fator de curvatura ao longo do comprimento

$J$  - Fator geométrico para flexão

# ANÁLISE DE TENSÕES EM ENGR. CÔNICAS

Resistência de  
flexão da  
engrenagem

$$S_{wt} = \sigma_{all} = \frac{s_{at} K_L}{S_F K_T K_R}$$

Diagram showing the derivation of the bending stress formula:

- $s_{at}$  is derived from Tabela 15-6 ou 15-7.
- $K_L$  is derived from Figura 15-9, Equação (15-15).
- $S_F$  is derived from Equações (15-19), (15-20), Tabela 15-3.
- $K_T$  is derived from Equação (15-18).
- $K_R$  is derived from Equações (15-19), (15-20), Tabela 15-3.

Fator de  
segurança  
da flexão

$$S_F = \frac{\sigma_{all}}{\sigma}, \text{ com base na resistência}$$

$$n_B = \frac{\sigma_{all}}{\sigma}, \text{ com base em } W', \text{ o mesmo com relação a } S_F$$

Com base na ANSI/AGMA 2003-B97.

**US**

$\sigma$  (lbf/pol<sup>2</sup>) - Tensão de flexão

$\sigma_{all}$  (lbf/pol<sup>2</sup>) - Tensão de flexão admissível

$s_{at}$  - Valor da Tensão de flexão admissível

$S_F$  - Fator de segurança a flexão

$K_T$  - Fator de temperatura

$K_R$  - Fator de confiabilidade para resistência de flexão

$K_L$  - Fator de ciclagem de tensão para resistência a flexão

# ANÁLISE DE TENSÕES EM ENGR. CÔNICAS

## Geometria

$$d_p = \frac{N_p}{P_d}$$

$$\gamma = \tan^{-1} \frac{N_p}{N_G}$$

$$\Gamma = \tan^{-1} \frac{N_G}{N_p}$$

$$d_{av} = d_p - F \cos \Gamma$$

## Análise de força

$$W' = \frac{2T}{d_{av}}$$

$$W^r = W' \tan \phi \cos \gamma$$

$$W^a = W' \tan \phi \sin \gamma$$

## Análise de resistência

$$W' = \frac{2T}{d_p}$$

$$W^r = W' \tan \phi \cos \gamma$$

$$W^a = W' \tan \phi \sin \gamma$$

Tensão de  
contato na  
engrenagem

$$S_c = \sigma_c = C_p \left( \frac{W'}{F d_p I} K_o K_v K_m C_s C_{xc} \right)^{1/2}$$

Na extremidade posterior (mais larga) - Tabela 15-2

Equações (15-5) a (15-8)

Equação (15-11)

Equação (15-12)

Equação (15-9)

Figura 15-6

Equação (15-21)

US

$\sigma_c$  (lbj/pol2) - Tensão de contato

$C_p$  - Coeficiente elástico

$W_t$  (lbj) - Força tangencial transmitida

$K_o$  - Fator de sobrecarga

$K_v$  - Fator dinâmico

$K_m$  - Fator de distribuição de carga

$C_s$  - Fator de tamanho para resistência a cavitação

$C_{xs}$  - Fator de coroamento para resistência a cavitação

$I$  - Fator geométrico para resistência a cavitação



# ANÁLISE DE TENSÕES EM ENGR. CÔNICAS

Resistência de  
desgaste da  
engrenagem

$$S_{wc} = (\sigma_c)_{all} = \frac{S_{ac} C_L C_H}{S_H K_T C_R}$$

Tabela 15-4, 15-5, Figura 15-12, Equação (15-22)

Figura 15-8, Equação (15-14)

Equações (15-16), (15-17), apenas para a coroa

Equações (15-19), (15-20), Tabela 15-3

Equação (15-18)

Fator de  
segurança  
do desgaste

$$S_H = \frac{(\sigma_c)_{all}}{\sigma_c}, \text{ com base na resistência}$$

$$n_w = \left( \frac{(\sigma_c)_{all}}{\sigma_c} \right)^2, \text{ com base em } W'; \text{ pode ser comparado diretamente com } S_F$$

Com base na ANSI/AGMA 2003-B97.

**US**

$(\sigma_c)$  (lb<sub>f</sub>/pol<sup>2</sup>) - Tensão de contato

$(\sigma_c)_{all}$  (lb<sub>f</sub>/pol<sup>2</sup>) - Tensão de contato admissível

$S_{ac}$  - Valor da tensão de contato admissível

$S_H$  - Fator de segurança de contato

$C_L$  - Fator de segurança a flexão

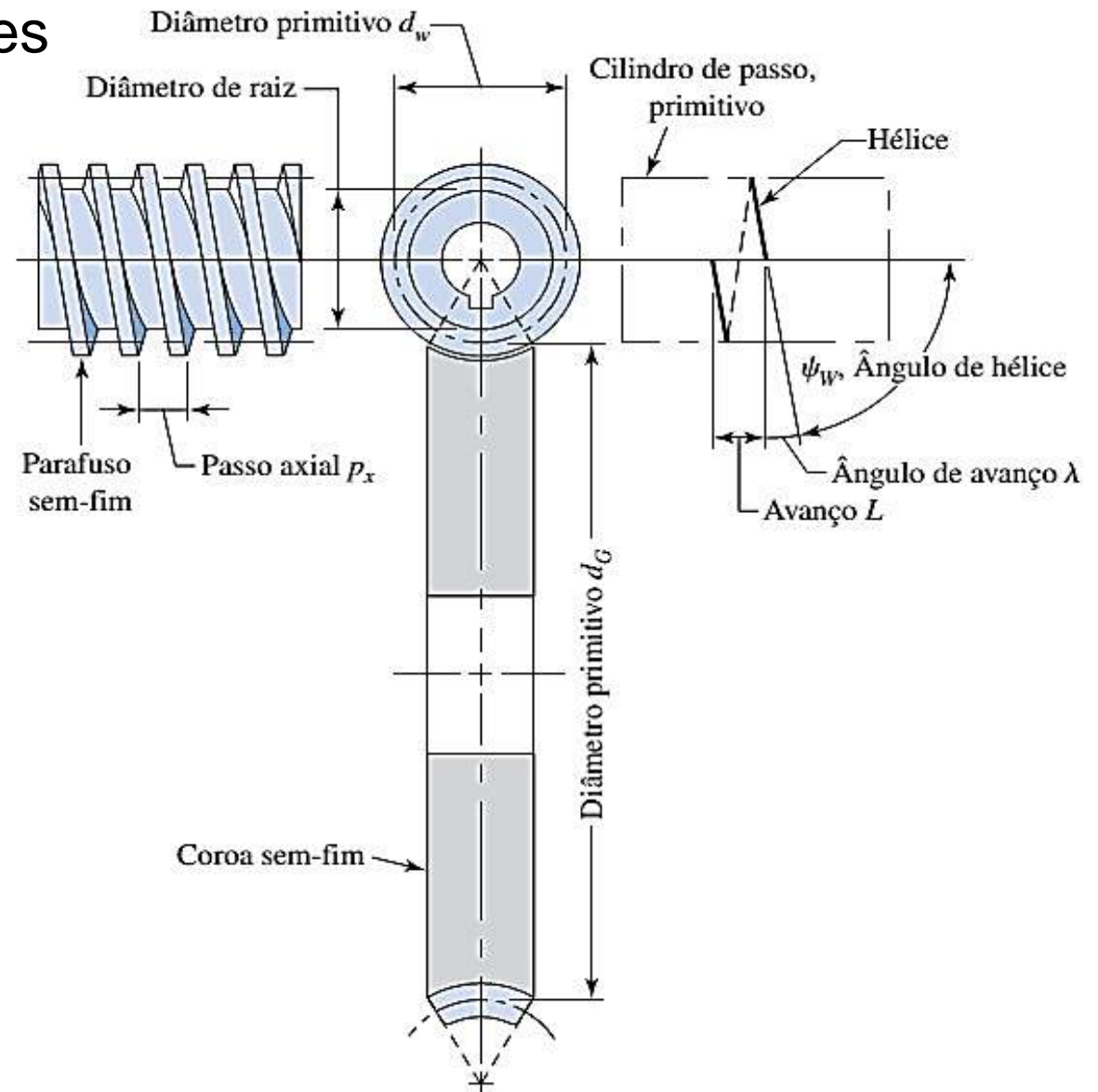
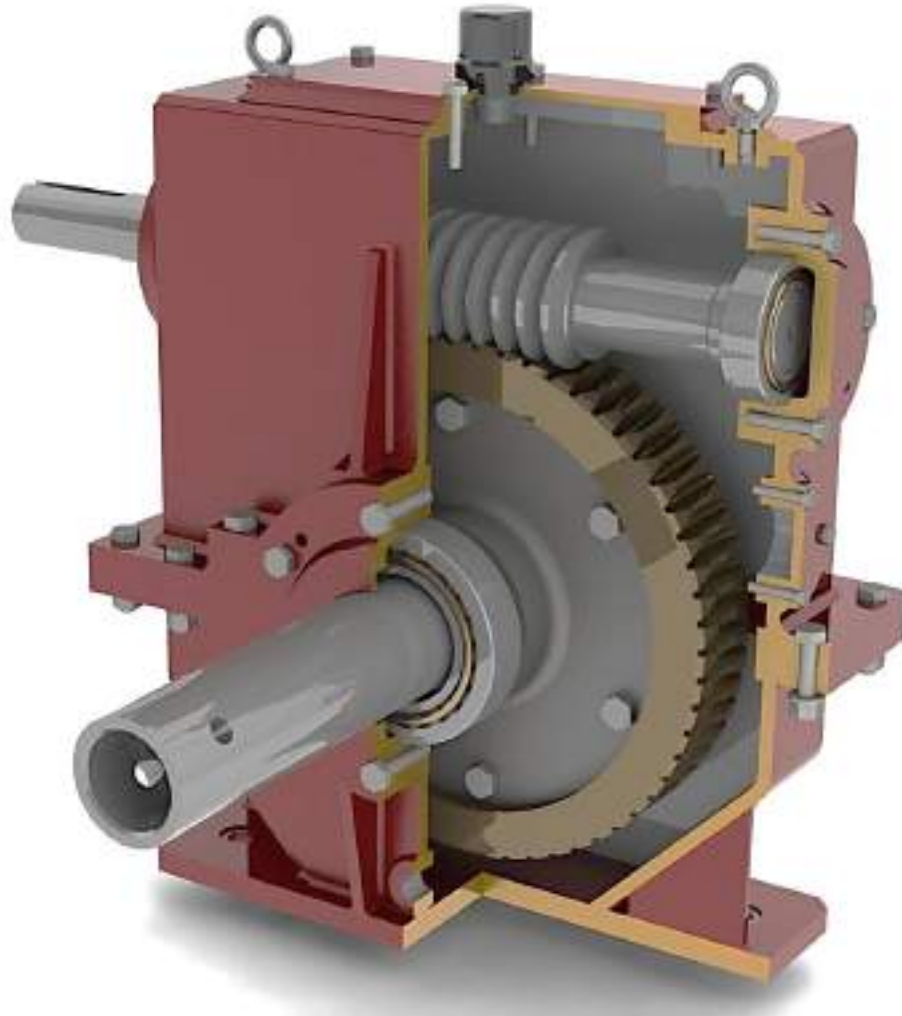
$C_H$  - Fator de razão de dureza (Resis. Cavitação)

$K_T$  - Fator de temperatura

$C_R$  - Fator de confiabilidade (Resis. Cavitação)

# ENGRENAGEM DE COROA E SEM FIM

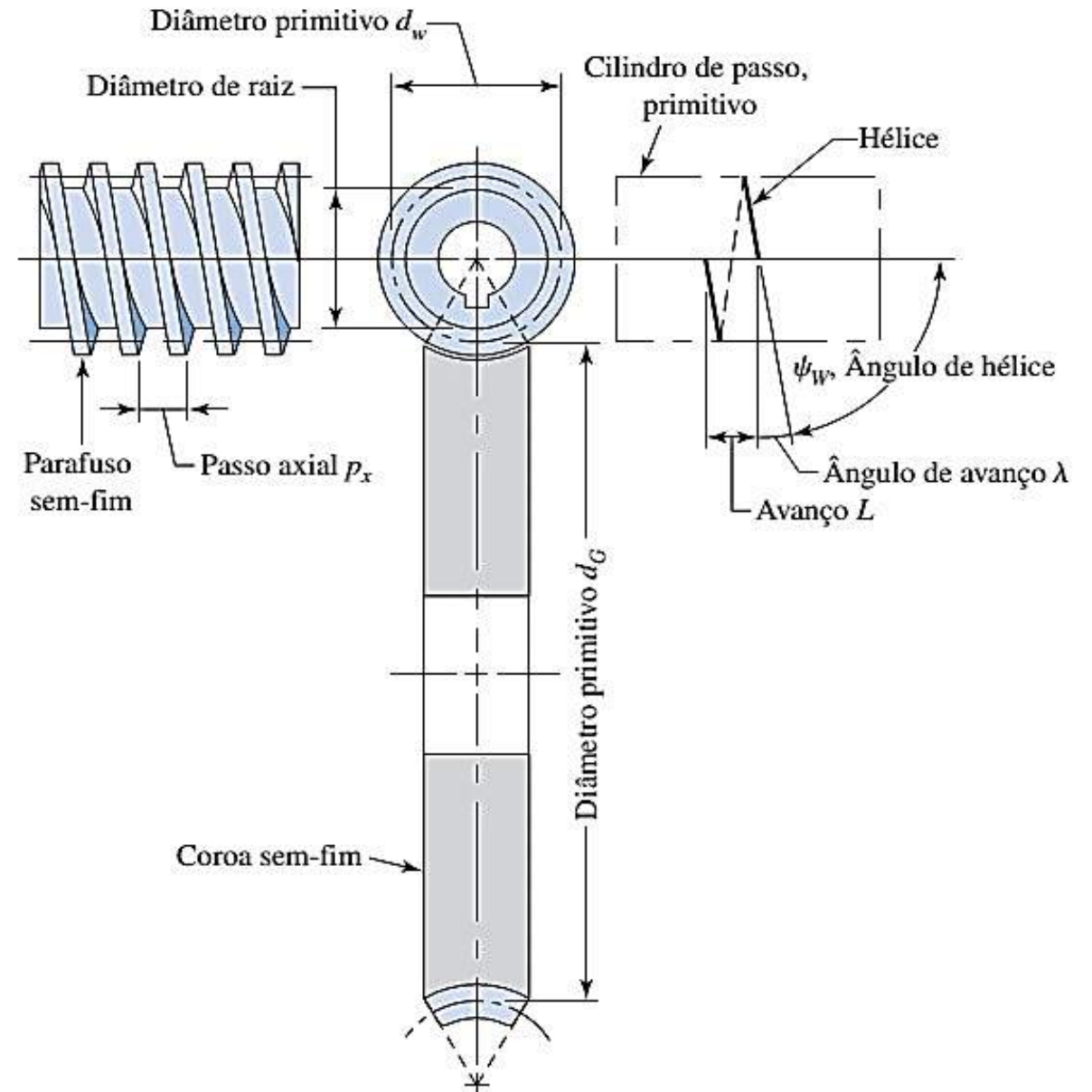
Transmitir movimento entre eixos concorrentes



# ENGRENAGEM DE COROA E SEM FIM

- É comum especificar o ângulo de avanço  $\lambda$  para o sem-fim e o ângulo da hélice  $\psi_G$  para a coroa.
- É comum especificar o *passo axial*  $p_x$  para o parafuso e o *passo transversal circular*  $p_t$  para a coroa.
- O diâmetro primitivo da coroa é medido no plano contendo o eixo da coroa.

$$d_G = \frac{N_G p_t}{\pi}$$



# ENGRENAGEM DE COROA E SEM FIM

- O parafuso pode ter qualquer diâmetro primitivo.
- Pode ser o mesmo da ferramenta utilizada para usinar os dentes da coroa.
- Faixa recomendada para o diâmetro primitivo do parafuso em função da distância entre centros  $C$ ,

$$\frac{C^{0,875}}{3} \leq d \leq \frac{C^{0,875}}{1,6}$$

- Relação entre *avanço*  $L$  e o *ângulo de avanço*  $\lambda$ , sendo  $N_W$  o número de entradas do parafuso.

$$L = p_x N_W$$

$$\tan \lambda = \frac{L}{\pi d_W}$$

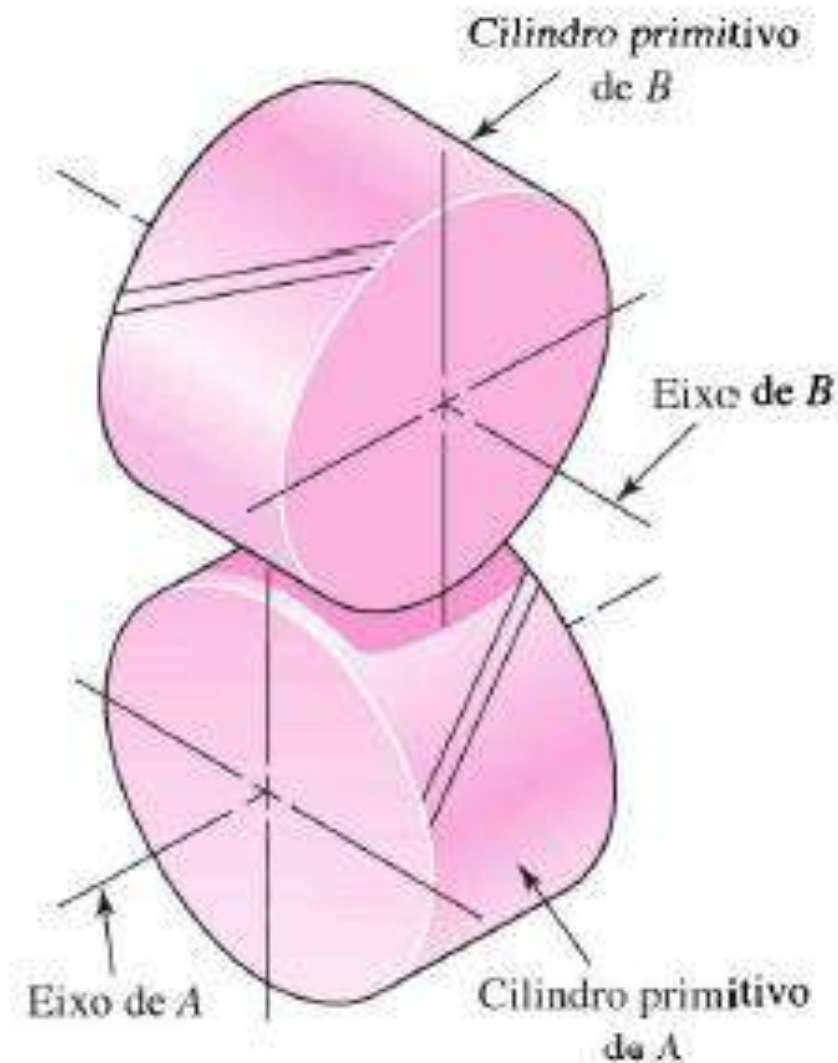
# ENGRENAGENS CÔNICAS DE DENTES RETOS

- Relação de diâmetro e distância entre centros em engrenagens sem fim

$$\frac{C^{0,875}}{3} \leq d \leq \frac{C^{0,875}}{1,6}$$

Quantidade	Símbolo	$\phi_n$		
		14,5° $N_w \leq 2$	20° $N_w \leq 2$	25° $N_w > 2$
Adendo	$a$	$0,3183p_x$	$0,3183p_x$	$0,286p_x$
Dedendo	$b$	$0,3683p_x$	$0,3683p_x$	$0,349p_x$
Altura completa	$h_t$	$0,6866p_x$	$0,6866p_x$	$0,635p_x$

\*As entradas da tabela são para um passo diametral tangencial da engrenagem de  $P_t = 1$ .

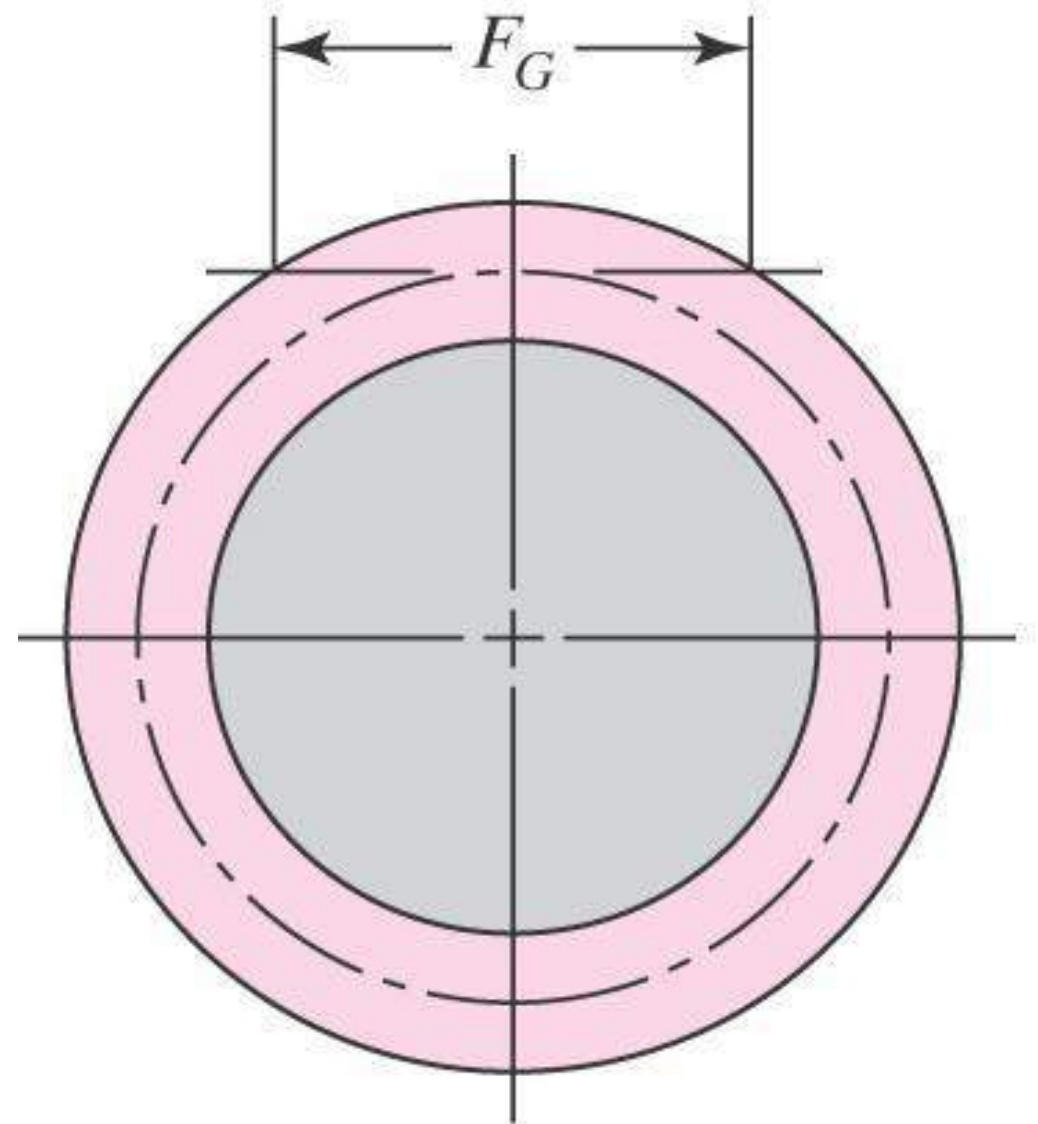




# ENGRENAGEM DE COROA E SEM FIM

## Largura da Coroa

- A Largura da Face  $F_G$  da coroa deve ser igual ao comprimento da tangente à circunferência do parafuso, entre os pontos de interseção com a circunferência de adendo.



# ENGRENAGEM DE COROA E SEM FIM

## Ângulos de Pressão Recomendados e Profundidades para Engrenagens Coroa e Parafuso Sem-fim

**Tabela 13–5** Ângulos de pressão recomendados e profundidades de dentes para engrenagens sem-fim.

Ângulo de avanço $\lambda$ , grau	Ângulo de pressão $\phi_n$ , grau	Adendo $a$	Dedendo $b_G$
0–15	$14\frac{1}{2}$	$0,3683p_x$	$0,3683p_x$
15–30	20	$0,3683p_x$	$0,3683p_x$
30–35	25	$0,2865p_x$	$0,3314p_x$
35–40	25	$0,2546p_x$	$0,2947p_x$
40–45	30	$0,2228p_x$	$0,2578p_x$

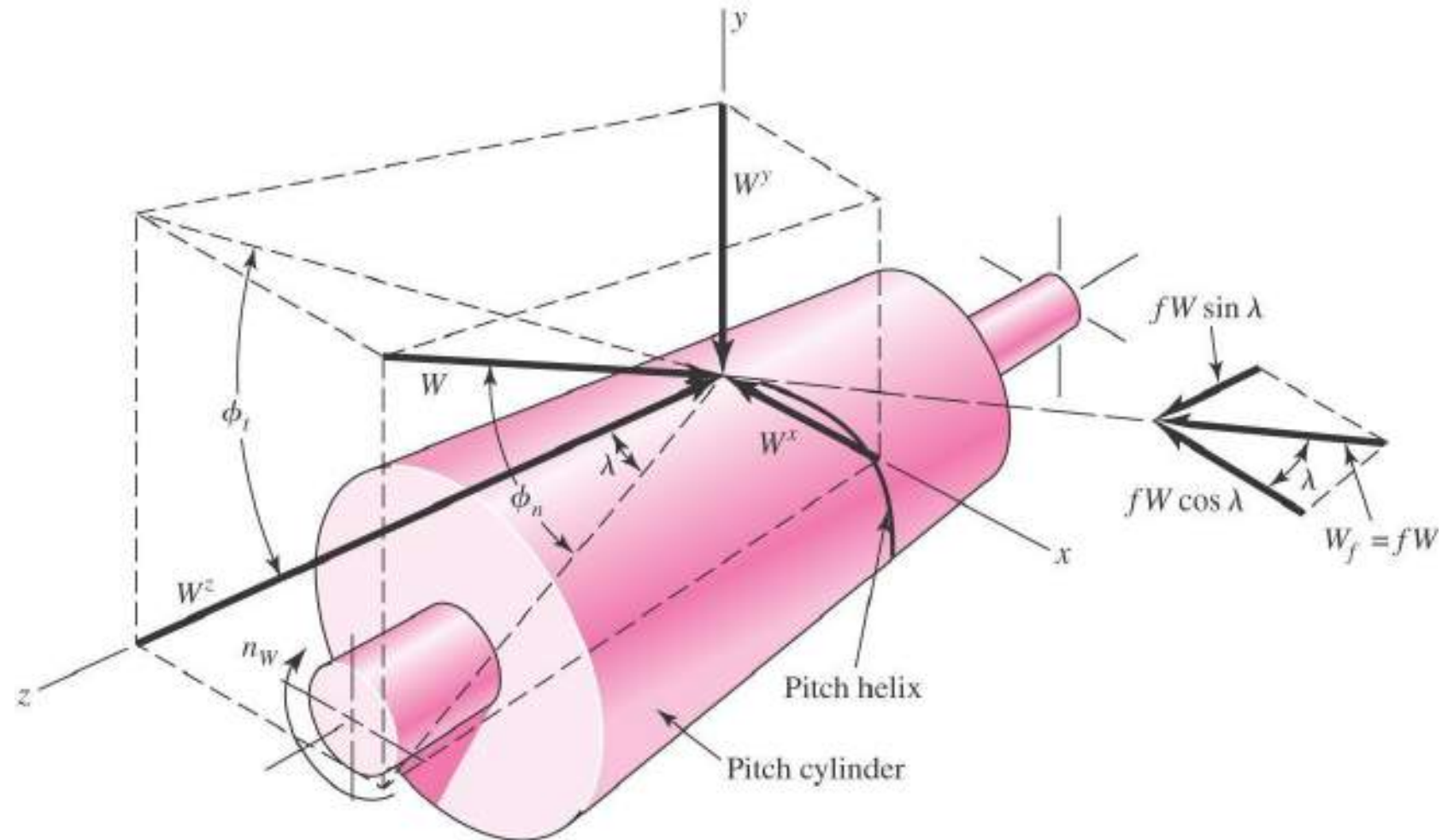
# ANÁLISE DE FORÇAS – ECSF

Para ângulo de 90° entre eixos

$$W^x = W \cos \phi_n \sin \lambda$$

$$W^y = W \sin \phi_n$$

$$W^z = W \cos \phi_n \cos \lambda$$



# ANÁLISE DE FORÇAS – ECSF

- Força tangencial

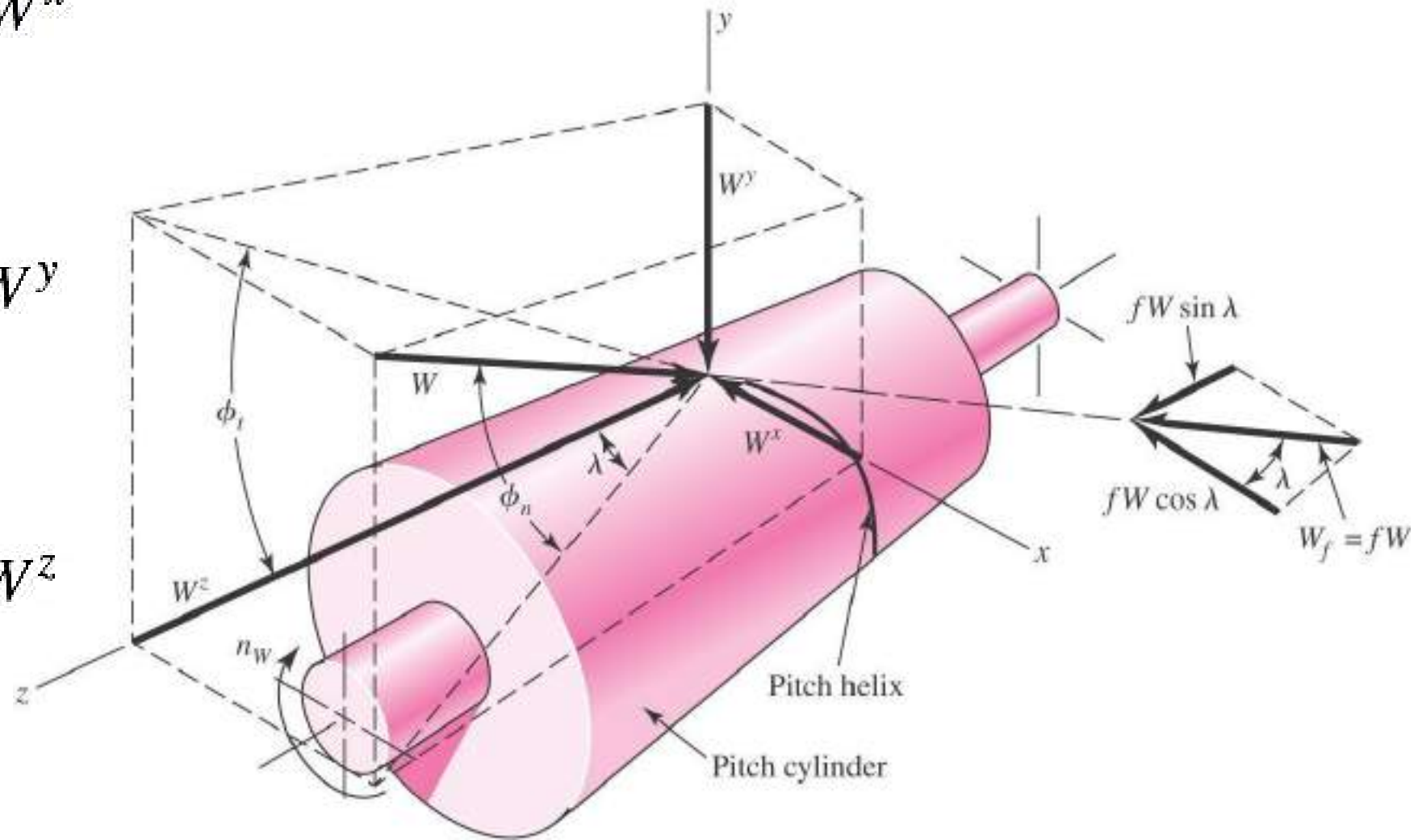
$$W_{Wt} = -W_{Ga} = W^x$$

- Força Radial

$$W_{Wr} = -W_{Gr} = W^y$$

- Força Axial

$$W_{Wa} = -W_{Gt} = W^z$$



# ANÁLISE DE FORÇAS – ECSF

- Escorregamento no ponto de contato
- O atrito é muito mais significativo que em outros tipos de engrenagem
- Incluindo o atrito, Eq. (13–41) tornam-se:

$$W^x = W(\cos \phi_n \sin \lambda + f \cos \lambda)$$

$$W^y = W \sin \phi_n$$

$$W^z = W(\cos \phi_n \cos \lambda - f \sin \lambda)$$

- Combinando as Eqs. (13–42) e (13–43):

$$W_f = fW = \frac{f W_{Gt}}{f \sin \lambda - \cos \phi_n \cos \lambda}$$

$$W_{Wt} = W_{Gt} \frac{\cos \phi_n \sin \lambda + f \cos \lambda}{f \sin \lambda - \cos \phi_n \cos \lambda}$$



# EFICIÊNCIA DA TRANSMISSÃO – ECSF

- Eficiência da transmissão:

$$\eta = \frac{W_{Wt}(\text{without friction})}{W_{Wt}(\text{with friction})}$$

- Da equação acima (com  $f = 0$  no numerador) e da Eq. (13–45):

$$\eta = \frac{\cos \phi_n - f \tan \lambda}{\cos \phi_n + f \cot \lambda}$$

# EFICIÊNCIA DA TRANSMISSÃO – ECSF

- Valores do *rendimento* para um valor típico de  $f = 0,05$  e  $\phi_n = 20^\circ$

Lead Angle $\lambda$ , deg	Efficiency $\eta$ , %
1.0	25.2
2.5	45.7
5.0	62.6
7.5	71.3
10.0	76.6
15.0	82.7
20.0	85.6
30.0	88.7

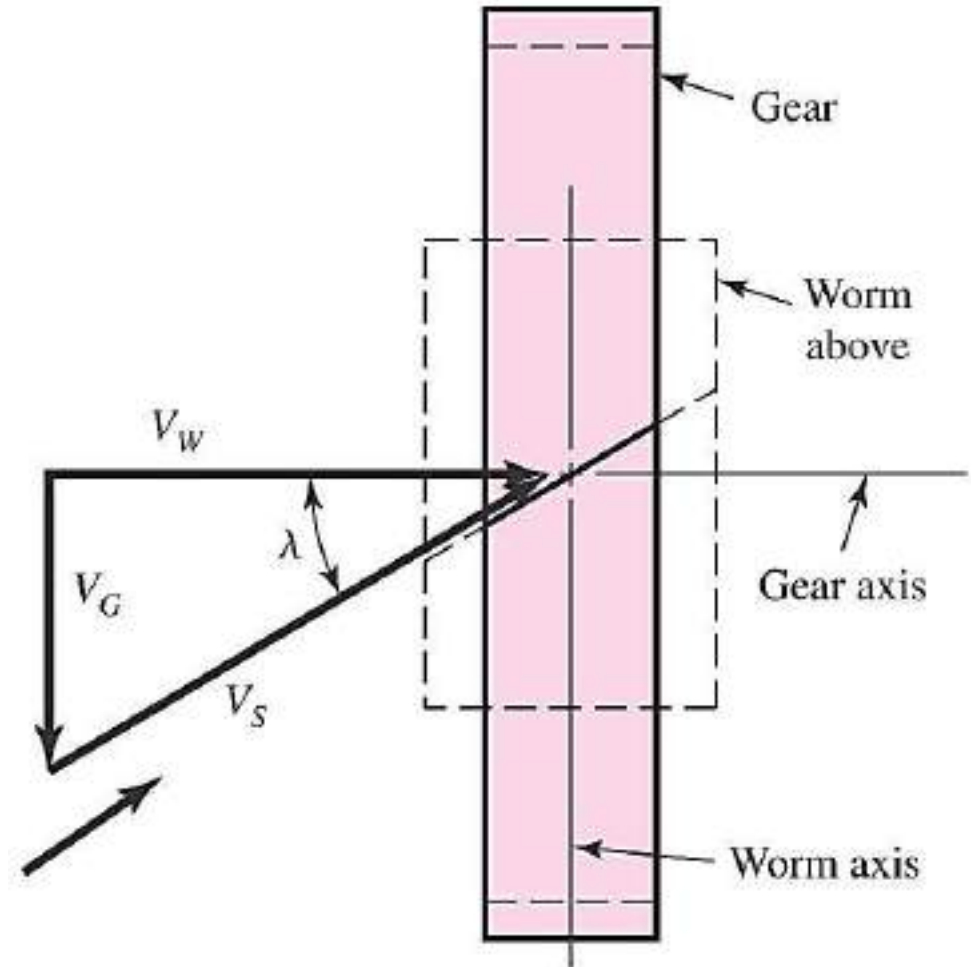
# COEFICIENTE DE ATRITO – ECSF

## Coeficiente de atrito entre coroa parafuso sem-fim

- $f$  depende da velocidade de escorregamento  $V_S$
- $V_G$  é a velocidade de um ponto no círculo primitivo da coroa
- $V_W$  é a velocidade no cilindro primitivo do parafuso

$$V_W = V_G + V_S$$

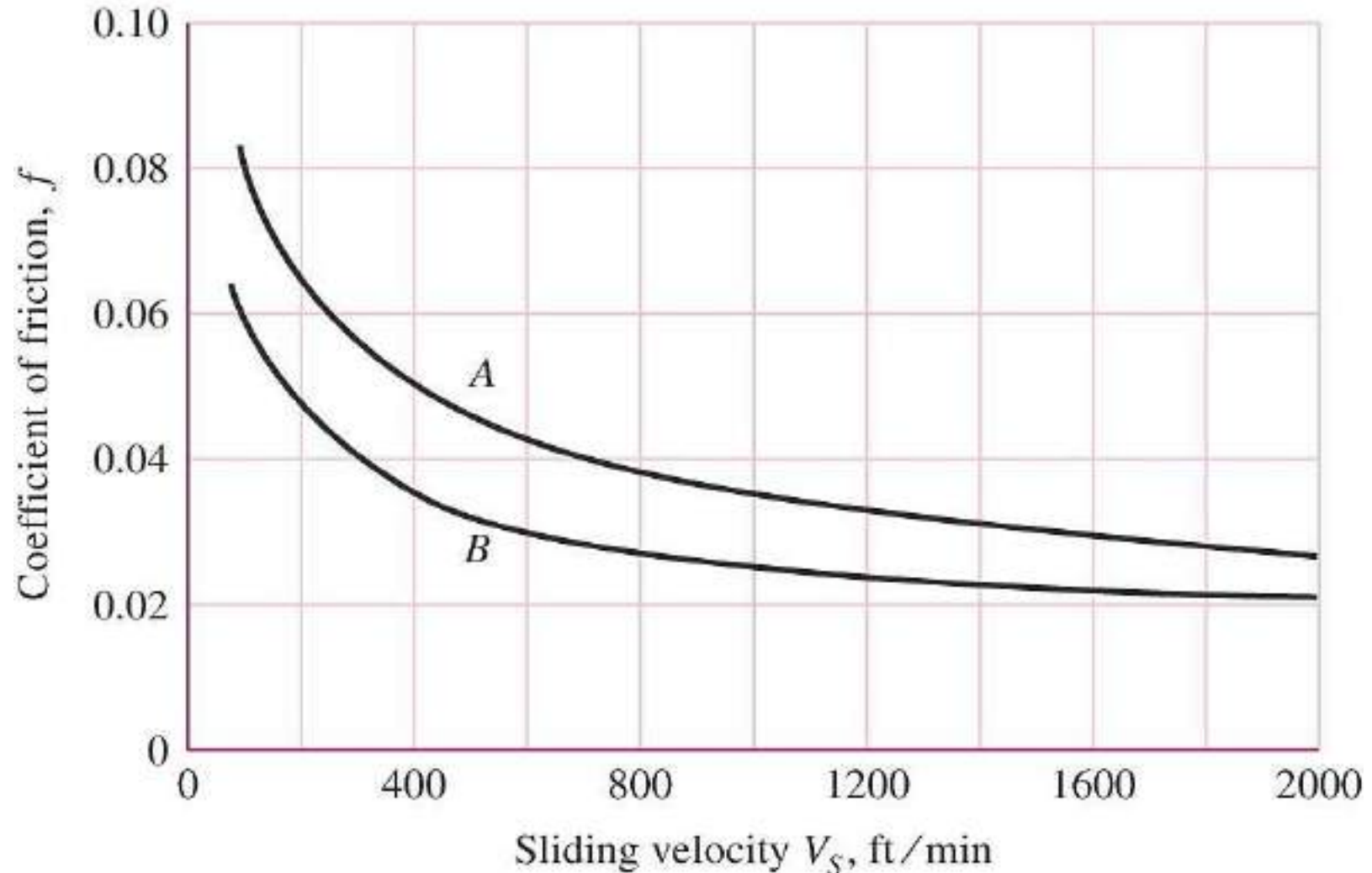
$$V_S = \frac{V_W}{\cos \lambda}$$



# COEFICIENTE DE ATRITO – ECSF

## Gráfico de $f$ x $V_s$

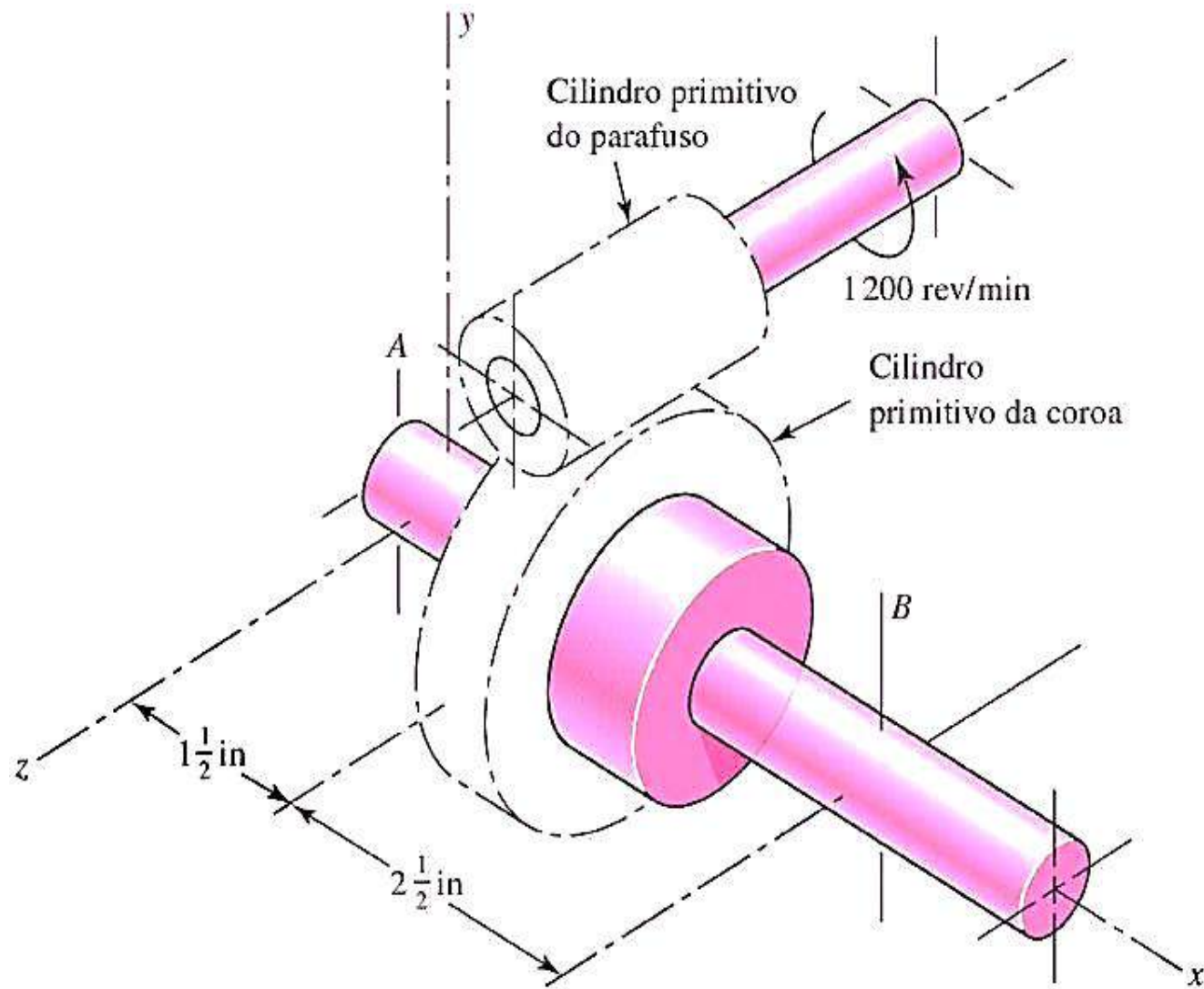
- Curva A corresponde a maior atrito entre as engrenagens (p.ex. par de ferro-fundido)
- Curva B corresponde a materiais de alta qualidade



# EXEMPLO 2

Um pinhão sem fim de dois dentes de mão direita, transmite 1 hp a 1200 rpm a uma coroa sem fim com 30 dentes. A coroa possui um passo diametral transversal de 6 dentes/pol e uma largura de face de 1 pol. O pinhão possui um diâmetro primitivo de 2 pol e uma largura de face de  $2\frac{1}{2}$  pol. O ângulo de pressão normal vale  $14\frac{1}{2}$  pol. Os materiais e a qualidade do trabalho requerido são tais que a curva B do Gráfico de  $f \times V$ s deve ser utilizada na obtenção do coeficiente de atrito.

- (a) Encontre o passo axial, a distância entre centros, o avanço e o ângulo de avanço.
- (b) Na figura a coroa sem fim é orientada com relação ao sistema de coordenadas descrito no começo da seção; a coroa é suportada pelos mancais A e B. Encontre as forças exercidas pelos mancais contra o eixo da coroa sem fim e o torque de saída.





# EXEMPLO 2

- Passo axial do parafuso e passo transversal circular da coroa

$$p_x = p_t = \frac{\pi}{P} = \frac{\pi}{6} = 0,5236 \text{ in}$$

- Distância entre centros

$$C = \frac{d_w + d_G}{2} = \frac{2 + 5}{2} = 3,5 \text{ in}$$

- Avanço do parafuso (rosca)

$$L = p_x N_w = (0,5236)(2) = 1,0472 \text{ in}$$

- Ângulo de avanço

$$\lambda = \tan^{-1} \frac{L}{\pi d_w} = \tan^{-1} \frac{1,0472}{\pi(2)} = 9,46^\circ$$

# EXEMPLO 2

- Velocidade da linha primitiva da rosca

$$V_W = \frac{\pi d_W n_W}{12} = \frac{\pi (2)(1200)}{12} = 628 \text{ ft/min}$$

- Velocidade da linha primitiva da Coroa

$$V_G = \frac{\pi d_G n_G}{12} = \frac{\pi (5)(80)}{12} = 105 \text{ ft/min}$$

- Velocidade de deslizamento

$$V_S = \frac{V_W}{\cos \lambda} = \frac{628}{\cos 9,46^\circ} = 637 \text{ ft/min}$$

- Componente de força tangencial na rosca

$$W_{Wt} = \frac{33\,000 H}{V_W} = \frac{(33\,000)(1)}{628} = 52,5 \text{ lbf}$$

# EXEMPLO 2

- Componente de força resultante com atrito na rosca

$$W = \frac{W^x}{\cos \phi_n \sin \lambda + f \cos \lambda} = \frac{52,5}{\cos 14,5^\circ \sin 9,46^\circ + 0,03 \cos 9,46^\circ} = 278 \text{ lbf}$$

- Componente de força radial e axial na rosca

$$W^y = W \sin \phi_n = 278 \sin 14,5^\circ = 69,6 \text{ lbf}$$

$$W^z = W (\cos \phi_n \cos \lambda - f \sin \lambda) = 278 (\cos 14,5^\circ \cos 9,46^\circ - 0,03 \sin 9,46^\circ) = 264 \text{ lbf}$$

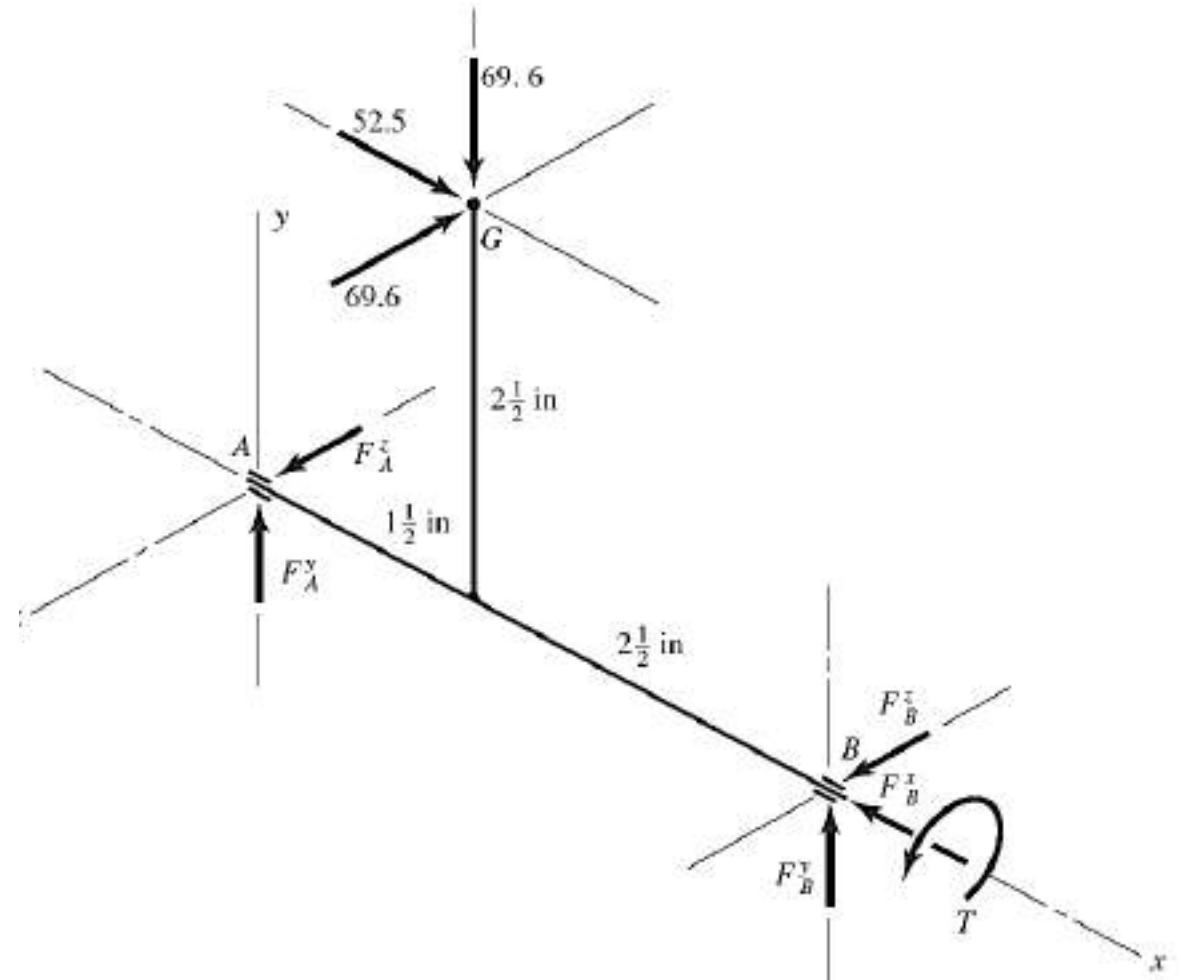
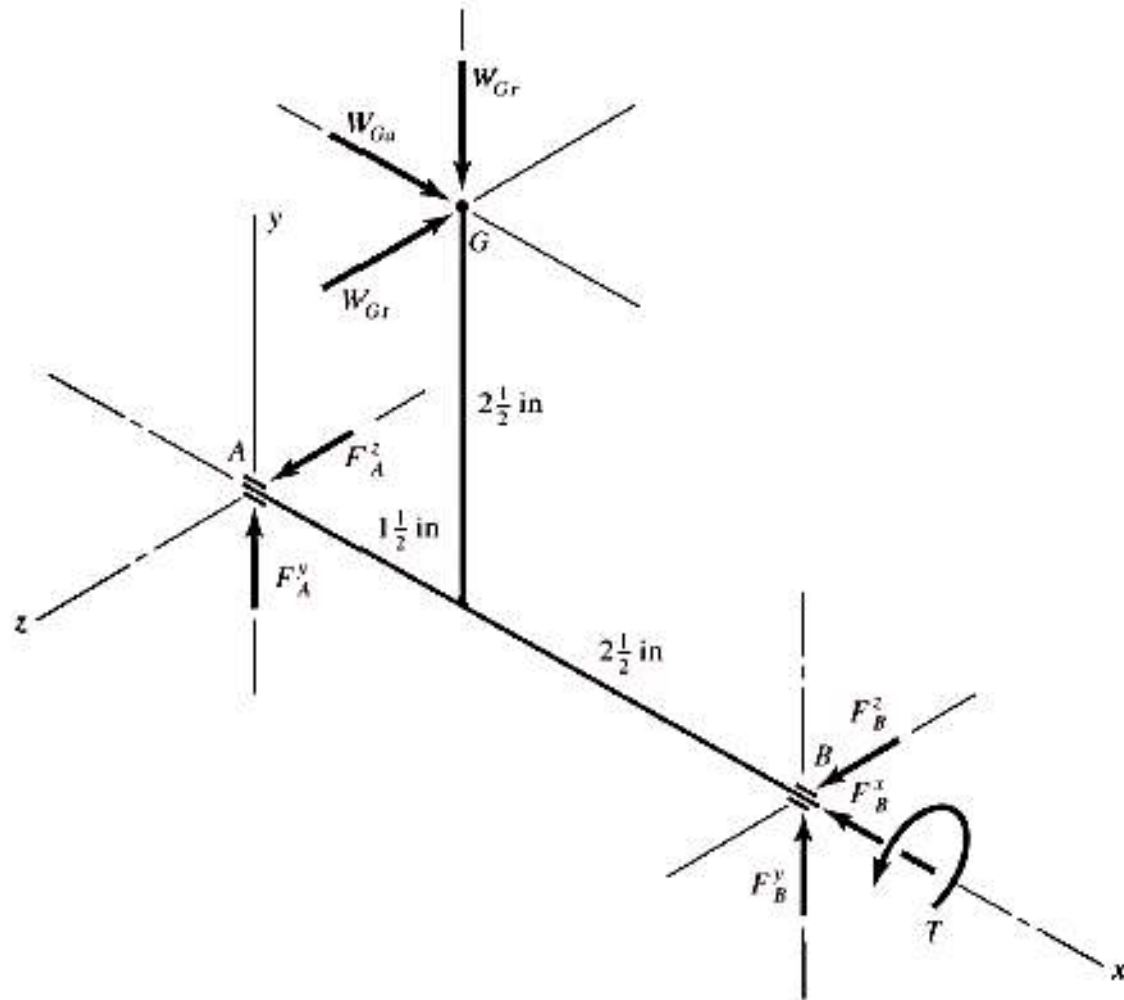
- Componente de força atuante na coroa

$$W_{Ga} = -W^x = 52,5 \text{ lbf}$$

$$W_{Gr} = -W^y = -69,6 \text{ lbf}$$

$$W_{Gt} = -W^z = -264 \text{ lbf}$$

# EXEMPLO 2



# EXEMPLO 2

- Força no Mancal B

$$F_B^x = -52,5 \text{ lbf}$$

- Momento em relação ao eixo z

$$-(52,5)(2,5) - (69,6)(1,5) + 4F_B^y = 0 \quad F_B^y = 58,9 \text{ lbf}$$

- Momento em relação ao eixo y

$$(264)(1,5) - 4F_B^z = 0 \quad F_B^z = 99 \text{ lbf}$$

- Somatório das forças na direção y e z

$$-69,6 + 58,9 + F_A^y = 0 \quad F_A^y = 10,7 \text{ lbf}$$

$$-264 + 99 + F_A^z = 0 \quad F_A^z = 165 \text{ lbf}$$

- Torque gerado no eixo x

$$-(264)(2,5) + T = 0 \quad T = 660 \text{ lbf} \cdot \text{in}$$

# EXERCÍCIO PARA ENTREGAR

Crie um programa em python que calcule as forças geradas em engrenagens cônicas e as forças geradas em engrenagens de coroa e sem fim.

Crie um arquivo chamado “forca.py” e crie uma classe “Forca\_EC” e uma classe “Forca\_ECSF”. Adicione as funções e gere um arquivo para calculo chamado “main” que importe as classe com “construtor e atributos”.

