



AULA 2

EQUILIBRIO E MOMENTO DE UMA FORÇA

Professor: Dr. Paulo Sergio Olivio Filho

CONTEÚDO DA AULA

- Equilíbrio de uma partícula
- Equações de equilíbrio no plano
- Diagrama de corpo livre
- Sistemas de forças coplanares
- Momento de uma força
- Momento de um binário

EQUILÍBRIO DE UMA PARTÍCULA

Uma partícula está em equilíbrio quando:

- Encontra-se em repouso, se inicialmente em repouso;
 - Com velocidade constante, se inicialmente em movimento.
-
- Porém, o termo equilíbrio estático é mais usado para descrever um objeto em repouso.

Primeira Lei do movimento de Newton para a Segunda lei:

$$\Sigma \mathbf{F} = \mathbf{0} \quad \Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a} \rightarrow m\mathbf{a} = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{a} = \mathbf{0}$$

DIAGRAMA DE CORPO LIVRE

- Considerar todas as forças conhecidas e desconhecidas;
- Para tanto, isola-se a partícula do seu entorno;
- Esboça-se a partícula com todas as forças que atuam sobre ela (DCL).

Duas conexões frequentes nos problemas de equilíbrio de uma partícula, são:

- 1- Molas linear elástica;
- 2- Cabos e polias.

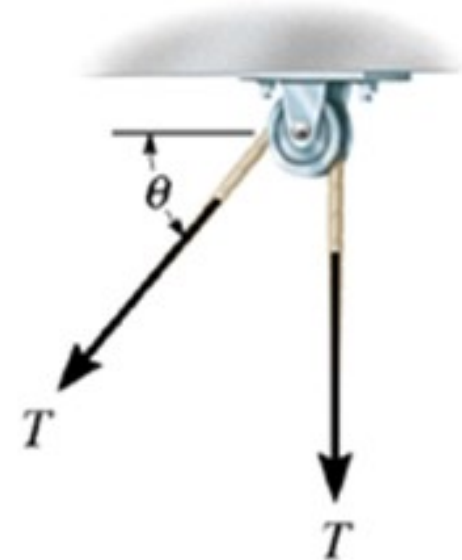
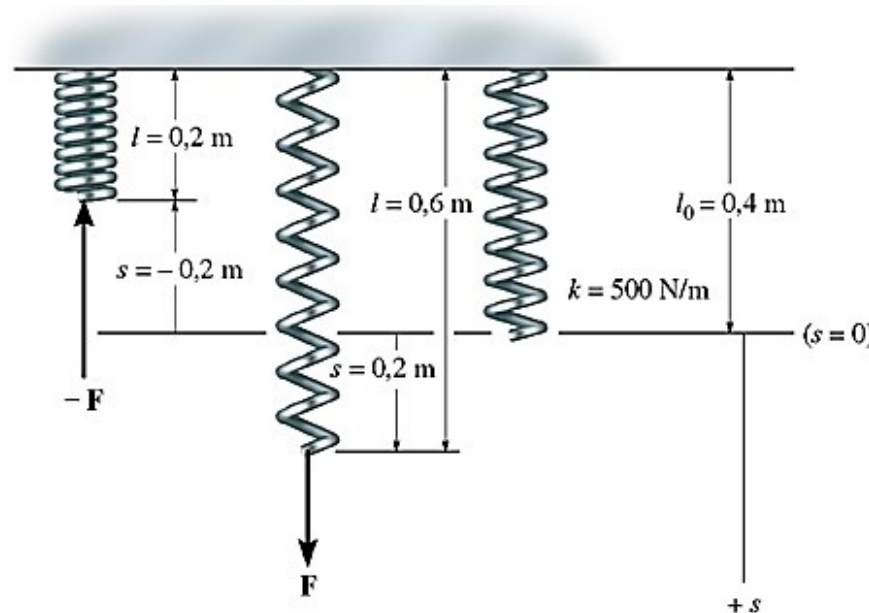
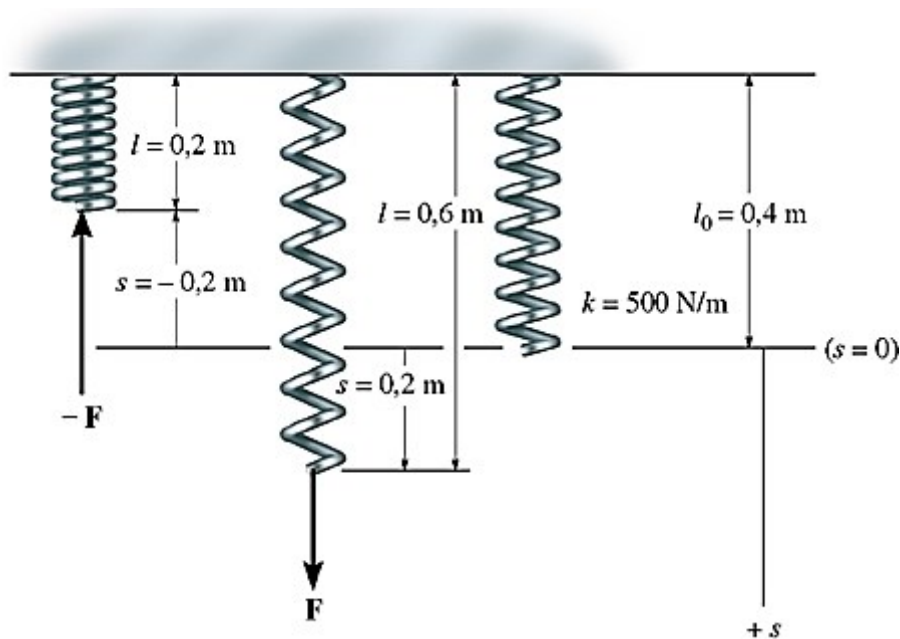


DIAGRAMA DE CORPO LIVRE

1) Mola linear elástica

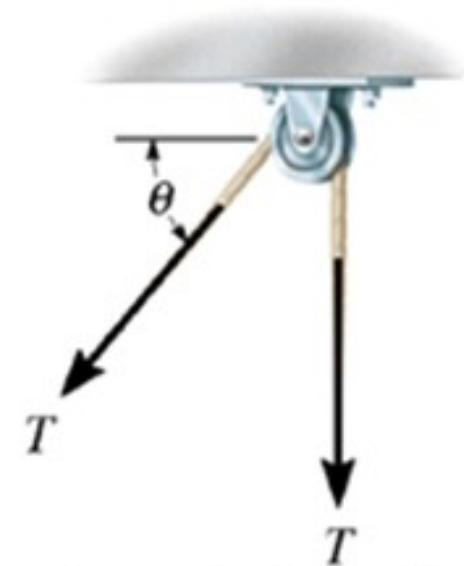


Constante de mola ou rigidez k ;
Distância medida a partir da
posição sem carga, x .

$$F = k \cdot x$$

2) Cabos e Polias. Características dos cabos:

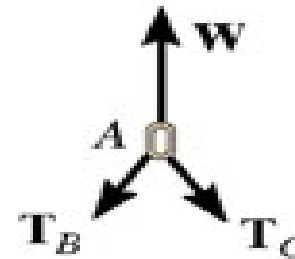
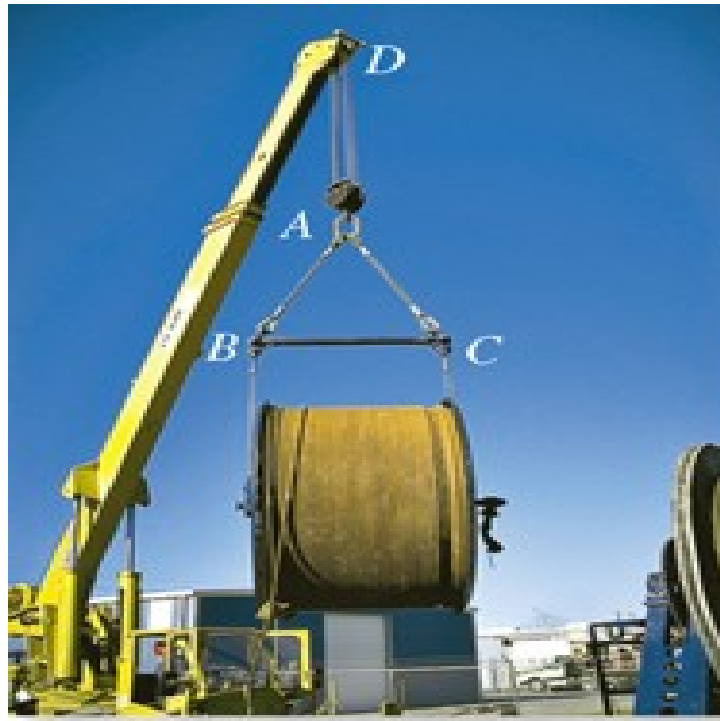
- Têm peso desprezível e indeformável;
- Suporta apenas uma tensão ou força de tração que atua na direção do cabo;
- Polia sem atrito.



O cabo está sob tensão

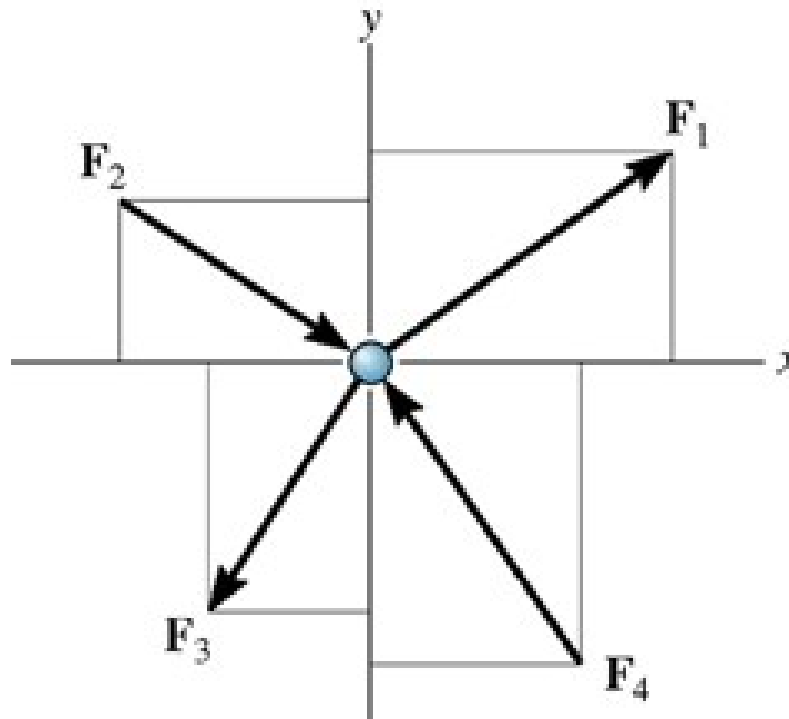
DIAGRAMA DE CORPO LIVRE

- 1) Desenhar o contorno do ponto material;
- 2) Mostrar todas as forças que atuam no ponto material;
- 3) Identificar cada força;
- 4) Não exceder na importância do traçado do DCL.



SISTEMAS DE FORÇAS COPLANARES

- 1) Estabeleça o sistema de eixos de maneira adequada;
- 2) Somatório de forças igual a zero; $\Sigma \mathbf{F} = 0$ $\Sigma F_x \mathbf{i} + \Sigma F_y \mathbf{j} = 0$
- 3) Identifique todas as forças, intensidade, direção e sentido;
- 4) Assuma o sentido das forças desconhecidas;
- 5) Aplique as equações de equilíbrio; $\Sigma F_x = 0$ $\Sigma F_y = 0$

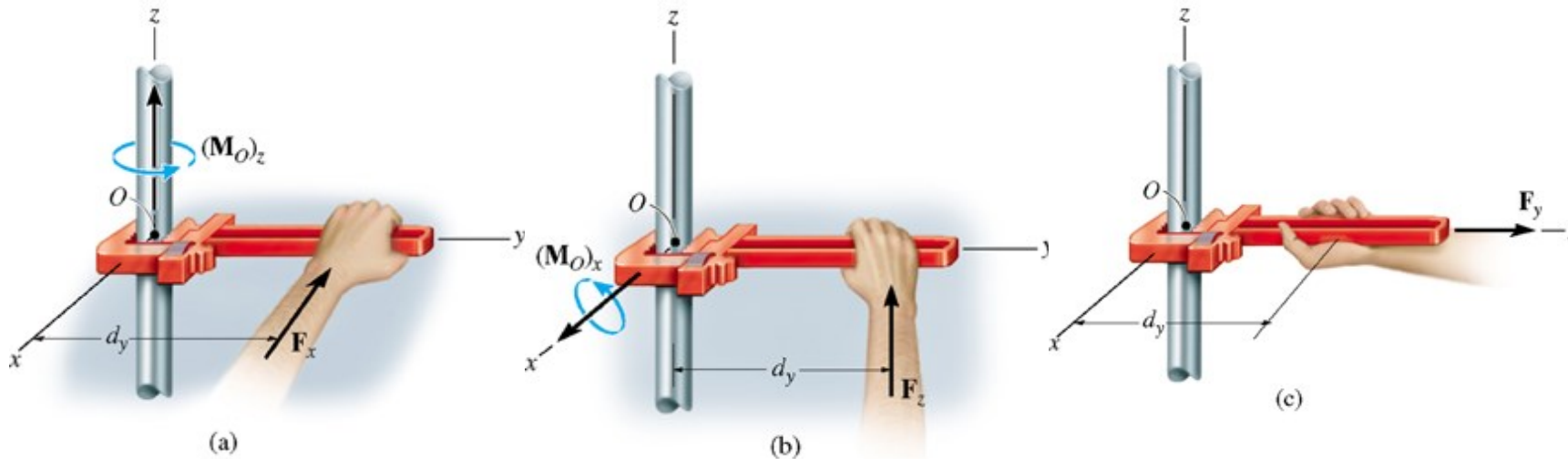


SISTEMAS DE FORÇAS COPLANARES

- 6) As componentes serão positivas se forem direcionadas ao longo do eixo positivo;
- 7) As componentes serão negativas se forem direcionadas ao longo do eixo negativo;
- 8) Se existirem mais de duas incógnitas e o problema envolver mola, deve-se aplicar $F = k \cdot x$;
- 9) Como a intensidade de uma força é sempre uma quantidade positiva, então, se a solução produzir resultado negativo, isso indica que o sentido da força é oposto ao mostrado no diagrama.

MOMENTO DE UMA FORÇA

- Uma força pode apresentar uma tendência de rotação de um corpo com relação a um eixo.
- Considere a situação onde uma chave grifo é utilizada para girar um tubo.



Definição: Fornece uma medida da tendência dessa força de provocar rotação de um corpo em torno do ponto ou do eixo.

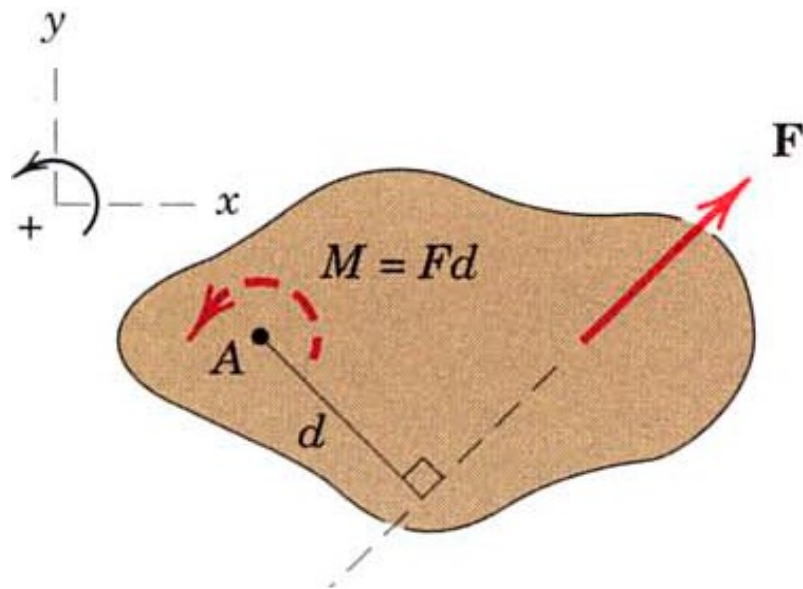
*Giro em torno do eixo x
Não é possível girar o tubo dessa maneira.
Tendência de rotação*

Ausência total de giro

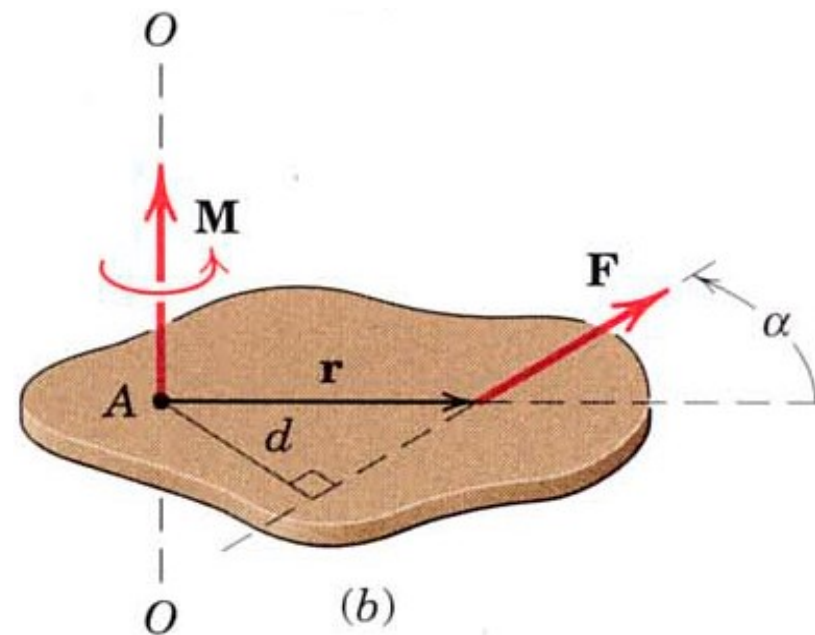
MOMENTO DE FORÇAS BIDIMENSIONAIS

Momento em Torno de um Ponto

- Considere o corpo bidimensional submetido a uma força, F , que atua no plano do corpo.



$$\mathbf{M} = \mathbf{F} \cdot d$$

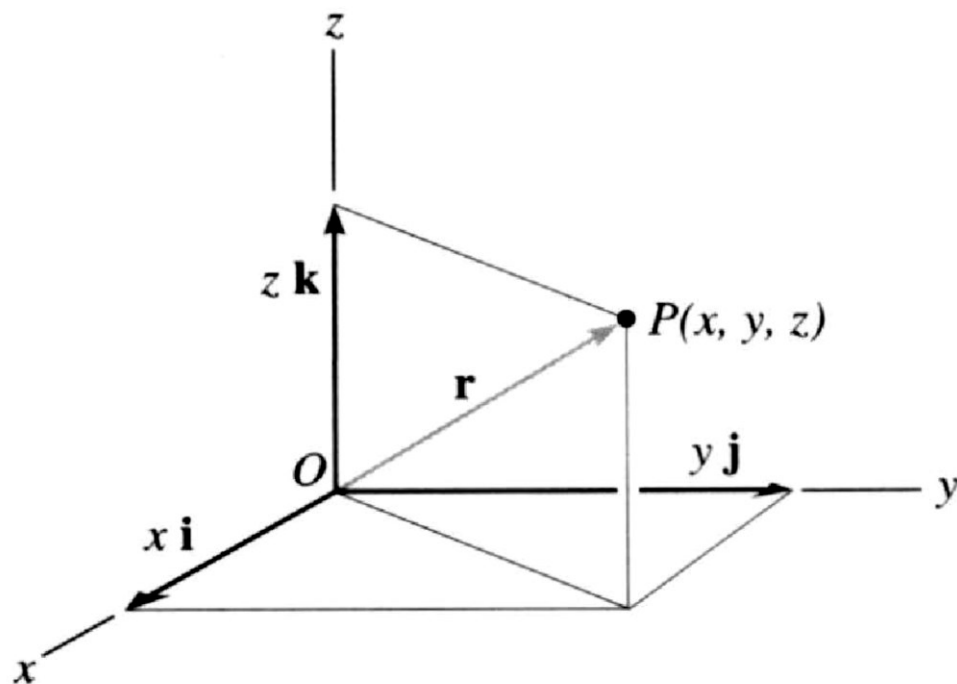


$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

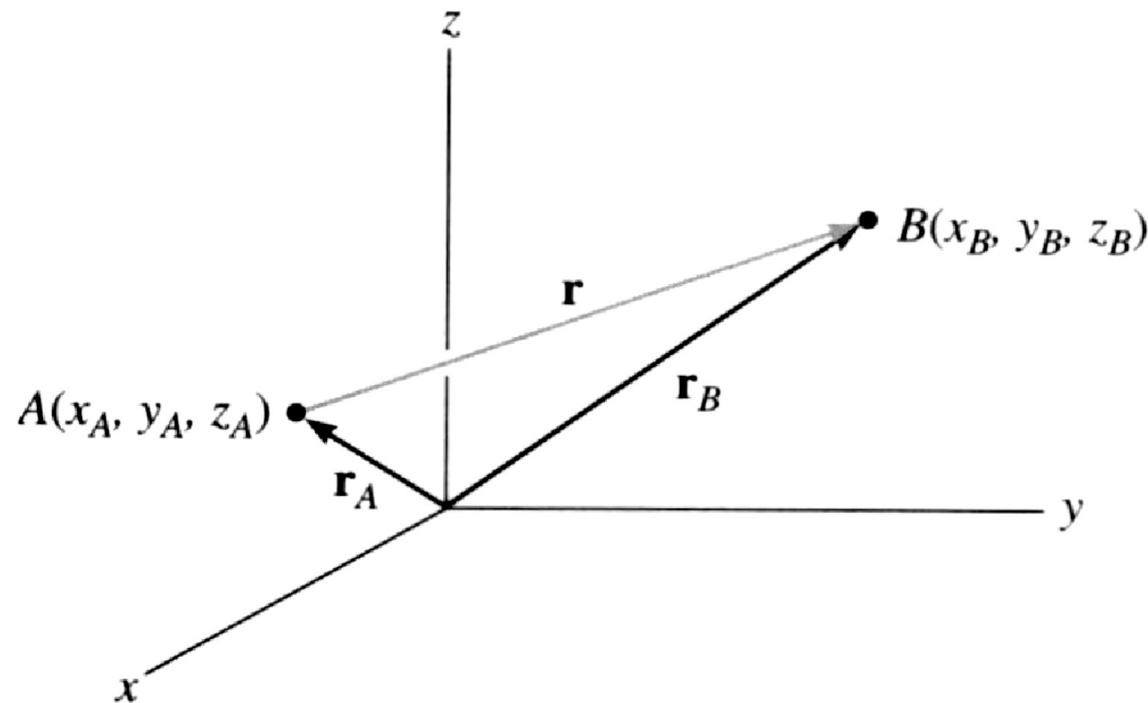
MOMENTO DE FORÇAS BIDIMENSIONAIS

Momento em Torno de um Ponto – Vetor Posição

- É um vetor fixo que posiciona um ponto no espaço em relação a outro.



$$\mathbf{r} = (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$$

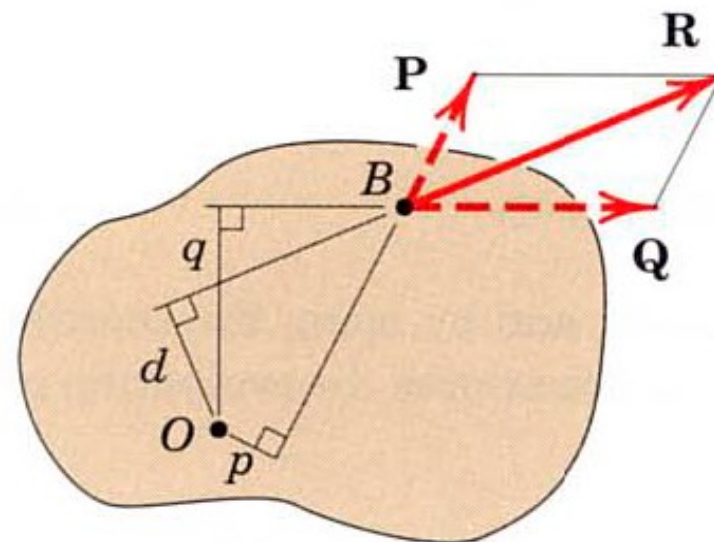
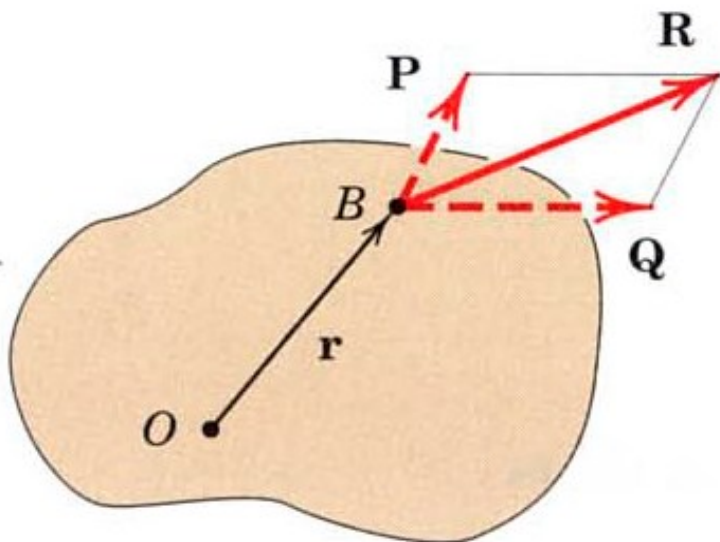


$$\mathbf{r}_{AB} = (x_B - x_A)\mathbf{i} + (y_B - y_A)\mathbf{j} + (z_B - z_A)\mathbf{k}$$

MOMENTO DE FORÇAS BIDIMENSIONAIS

Teorema de Varignon

- O momento de uma força em relação a qualquer ponto é igual a soma dos momentos dos componentes dessa força em relação ao mesmo ponto.



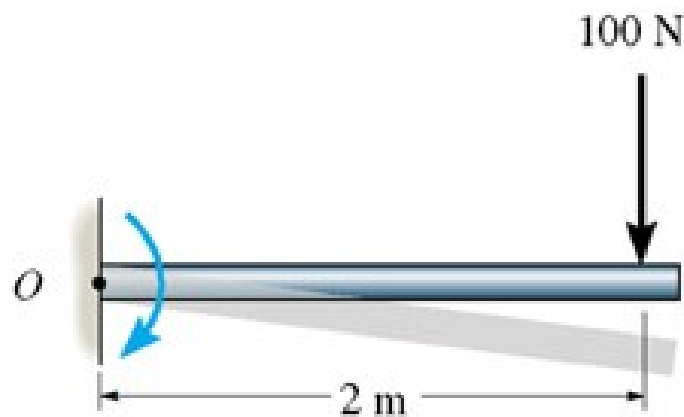
MOMENTO DE UMA FORÇA - FORMULAÇÃO

- A intensidade do momento é diretamente proporcional a intensidade da força e do braço;
- O momento terá maior intensidade quando a força estiver a 90° do braço;
- A direção do momento é perpendicular ao plano que contém a força e o braço;
- Utiliza-se a regra da mão direita.

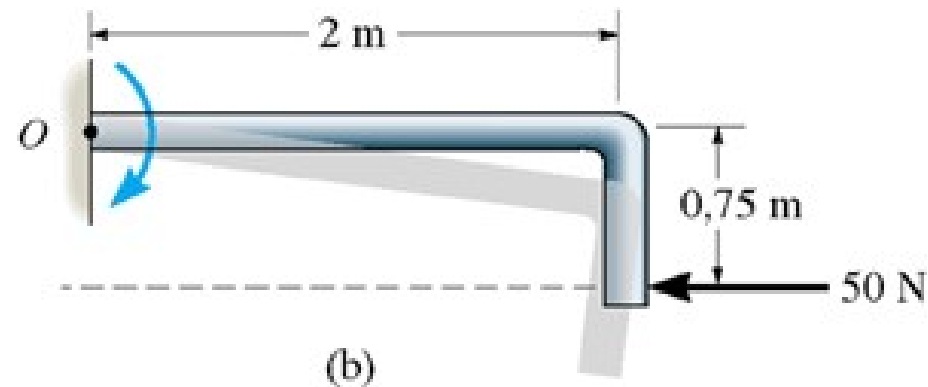
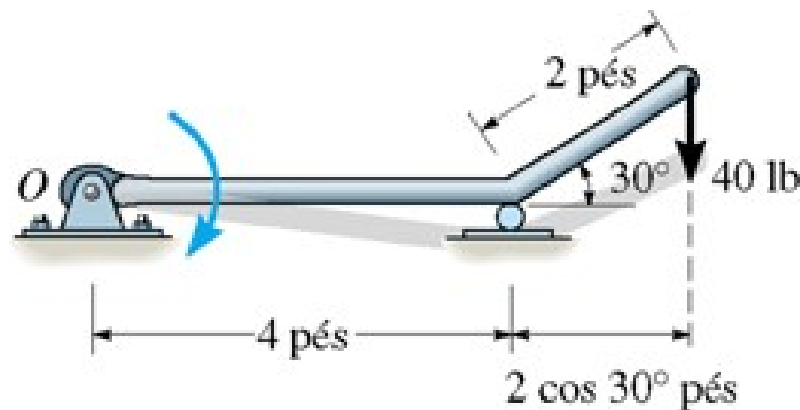
$$M_0 = Fd$$

$$\sum (M_R)_0 = \sum Fd$$

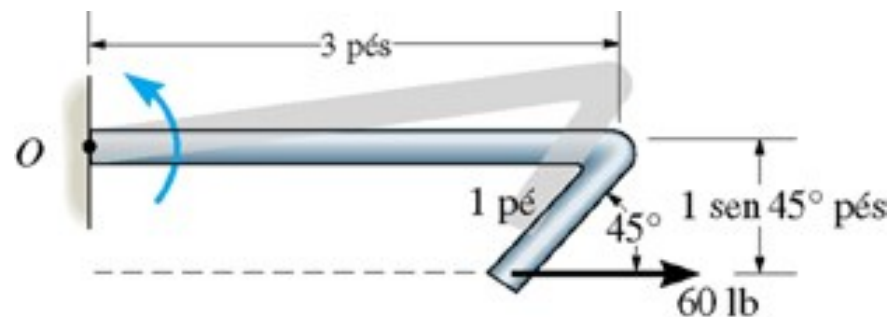
EXEMPLO 3



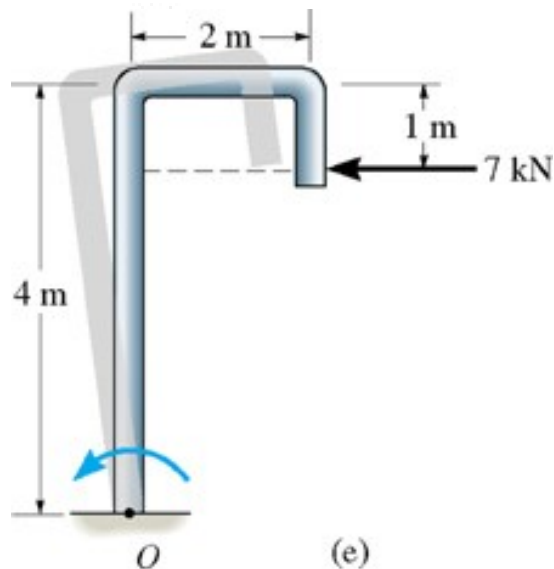
(a)



(b)



(d)



(e)

$$M_O = (100 \text{ N})(2 \text{ m}) = 200 \text{ N} \cdot \text{m} \downarrow$$

$$M_O = (50 \text{ N})(0,75 \text{ m}) = 37,5 \text{ N} \cdot \text{m} \downarrow$$

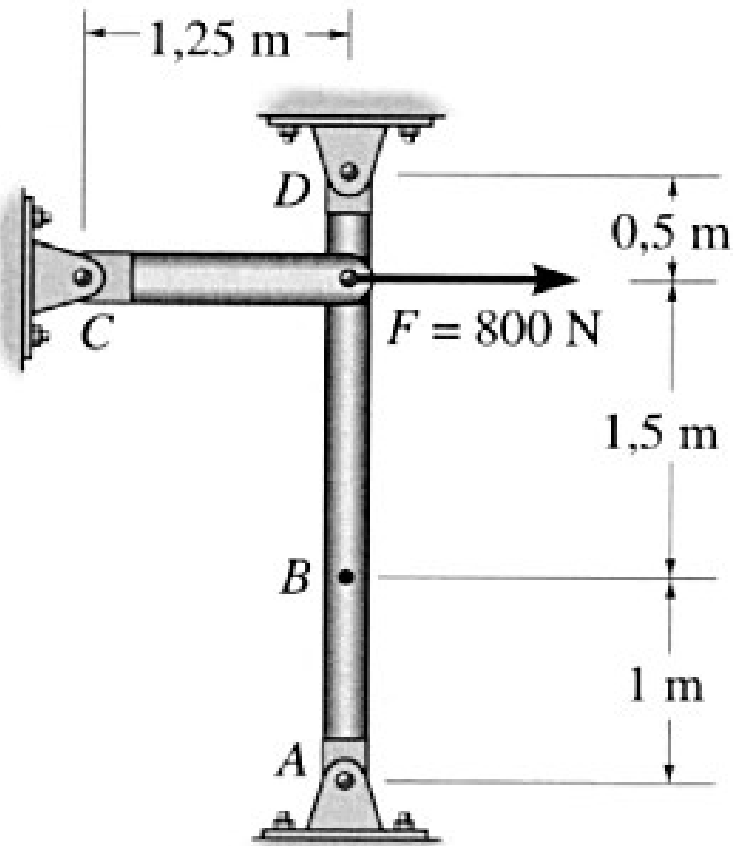
$$M_O = (40 \text{ lb})(4 \text{ pés} + 2 \cos 30^\circ \text{ pés}) = 229 \text{ lb} \cdot \text{pés} \downarrow$$

$$M_O = (60 \text{ lb})(1 \sin 45^\circ \text{ pés}) = 42,4 \text{ lb} \cdot \text{pés} \uparrow$$

$$M_O = (7 \text{ kN})(4 \text{ m} - 1 \text{ m}) = 21 \text{ kN} \cdot \text{m} \uparrow$$

EXEMPLO 4

Determine os momentos da força de 800 N que atua sobre a estrutura na Figura abaixo em relação aos pontos A, B, C e D



$$M_A = 800 \text{ N}(2,5 \text{ m}) = 2.000 \text{ N} \cdot \text{m} \downarrow$$

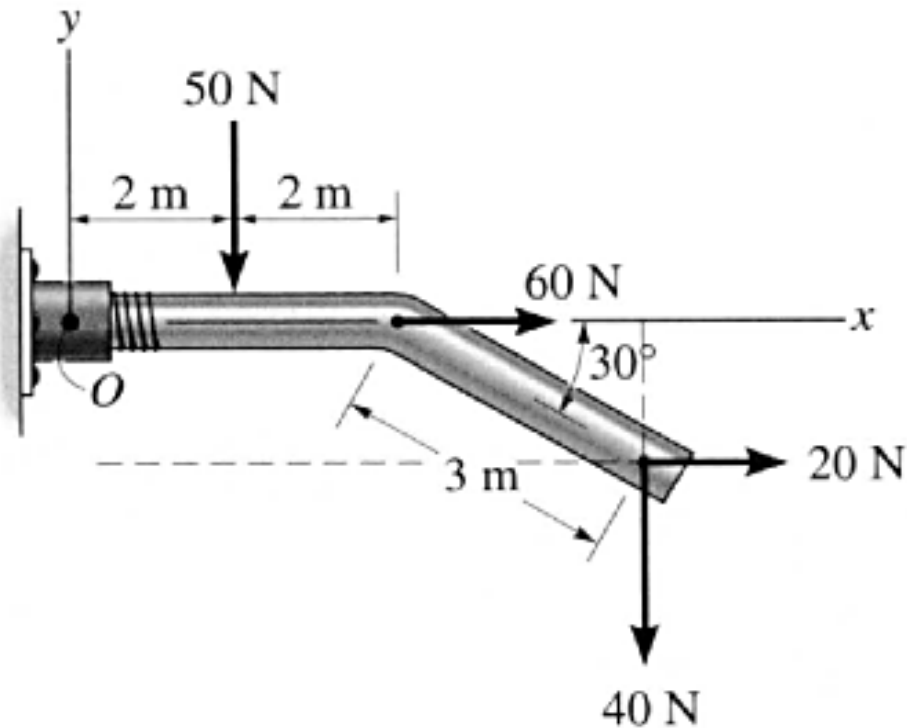
$$M_B = 800 \text{ N}(1,5 \text{ m}) = 1.200 \text{ N} \cdot \text{m} \downarrow$$

$$M_C = 800 \text{ N}(0) = 0 \quad (\text{a linha de ação de } \mathbf{F} \text{ passando por } C)$$

$$M_D = 800 \text{ N}(0,5 \text{ m}) = 400 \text{ N} \cdot \text{m} \uparrow$$

EXEMPLO 5

Determine os momentos resultante para quatro forças que atuam na haste mostrada na Figura abaixo em relação ao pontos O.



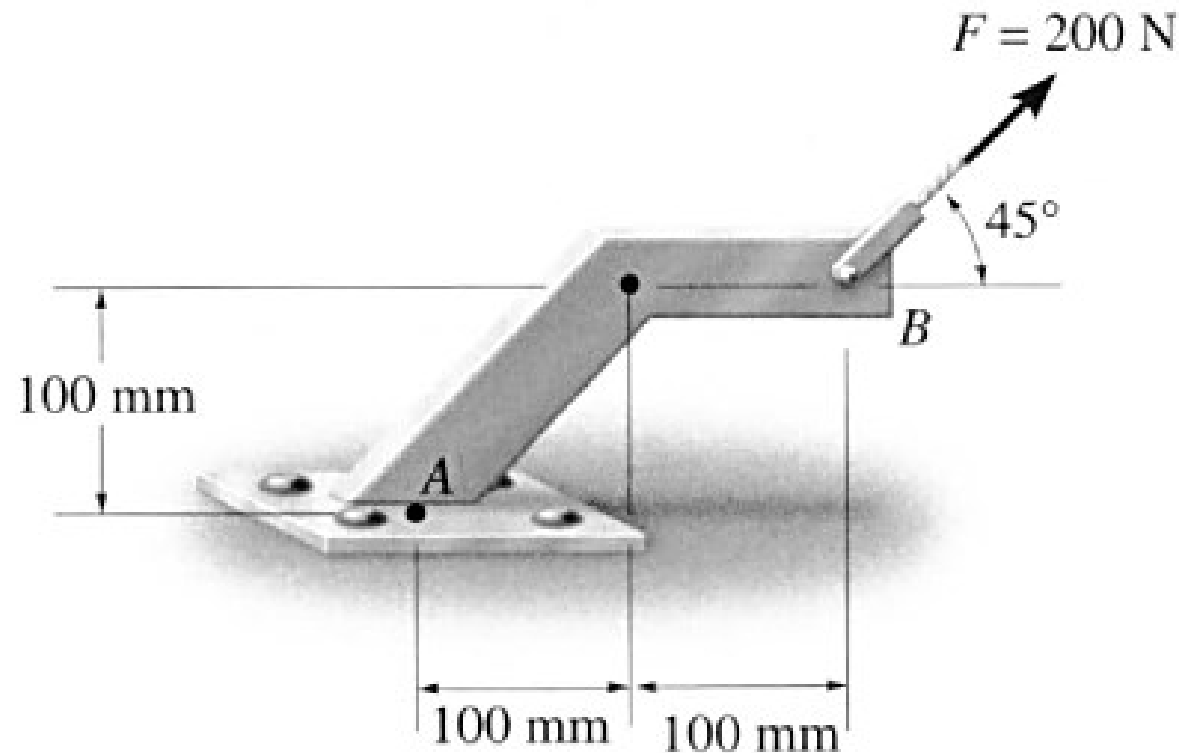
$$\downarrow + M_{R_O} = \Sigma Fd$$

$$M_{R_O} = -50 \text{ N}(2\text{m}) + 60 \text{ N}(0) + 20 \text{ N}(3 \sin 30^\circ \text{ m}) \\ - 40 \text{ N}(4 \text{ m} + 3 \cos 30^\circ \text{ m})$$

$$M_{R_O} = -334 \text{ N} \cdot \text{m} = 334 \text{ N} \cdot \text{m} \downarrow$$

EXEMPLO 6

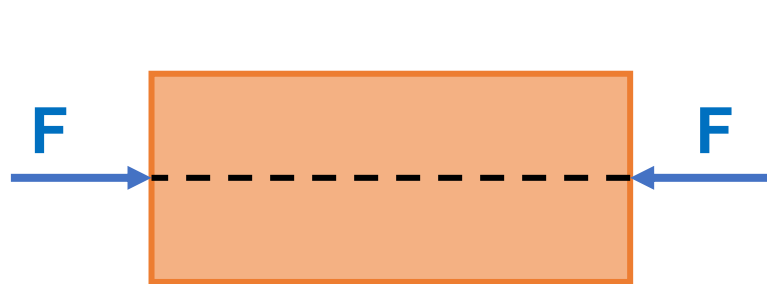
Uma força de 200 N atua sobre o suporte mostrado na Figura abaixo. Determine o momento da força em relação ao ponto A.



MOMENTO DE FORÇAS BIDIMENSIONAIS

Binário

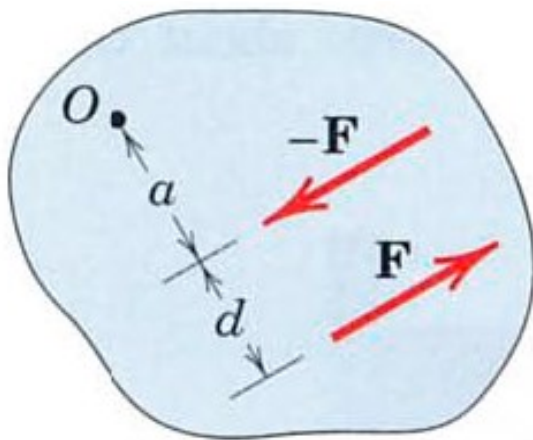
- Quando duas forças iguais e opostas são aplicadas a um corpo podemos ter duas situações:
- 1ª - Forças Colineares;
- 2ª - Forças não Colineares



MOMENTO DE FORÇAS BIDIMENSIONAIS

Binário

- Considere a ação de duas forças de magnitudes iguais e opostas \mathbf{F} e $-\mathbf{F}$ atuando sobre um corpo:



Momento em torno de um eixo que passa pelo ponto O.

$$M_O = F \cdot (a + d) - F \cdot a$$

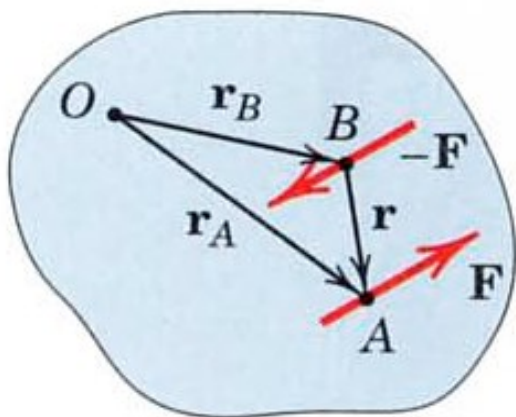
$$M_O = F \cdot d$$

O momento de um binário é calculado pelo produto de uma das forças do binário e a distância entre elas.

MOMENTO DE FORÇAS BIDIMENSIONAIS

Binário – Método Vetorial

- Considere a ação de duas forças de magnitudes iguais e opostas \mathbf{F} e $-\mathbf{F}$ atuando sobre um corpo:



Momento em torno de um eixo que passa pelo ponto O.

$$\vec{M} = \vec{r}_A \times \vec{F} + \vec{r}_B \times (-\vec{F})$$

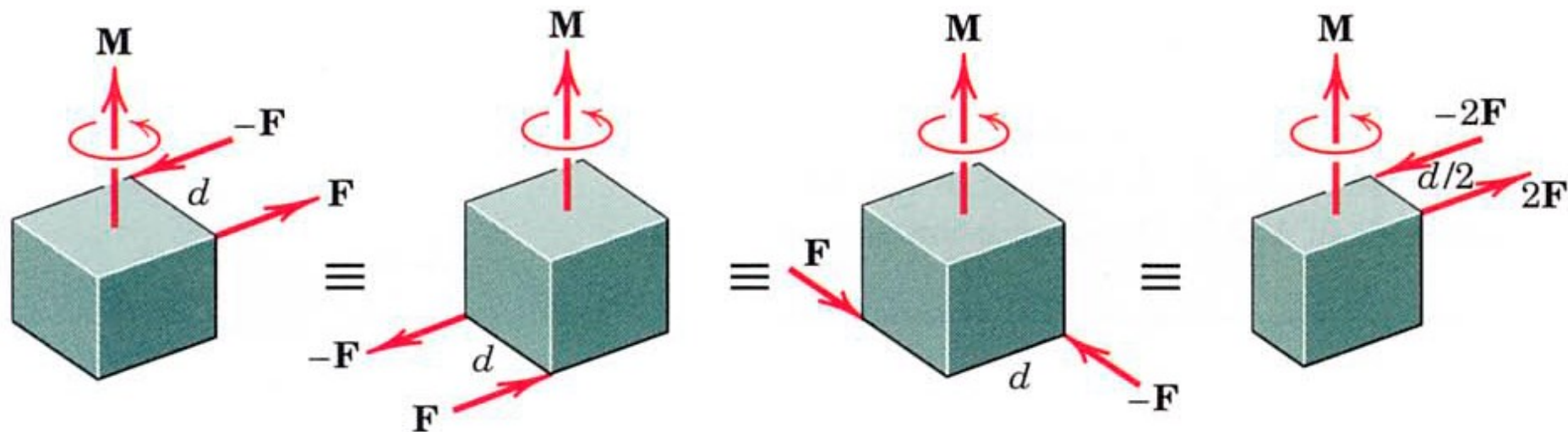
$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

O momento de um binário é um vetor livre e possui o mesmo valor para todos os centros de momento.

MOMENTO DE FORÇAS BIDIMENSIONAIS

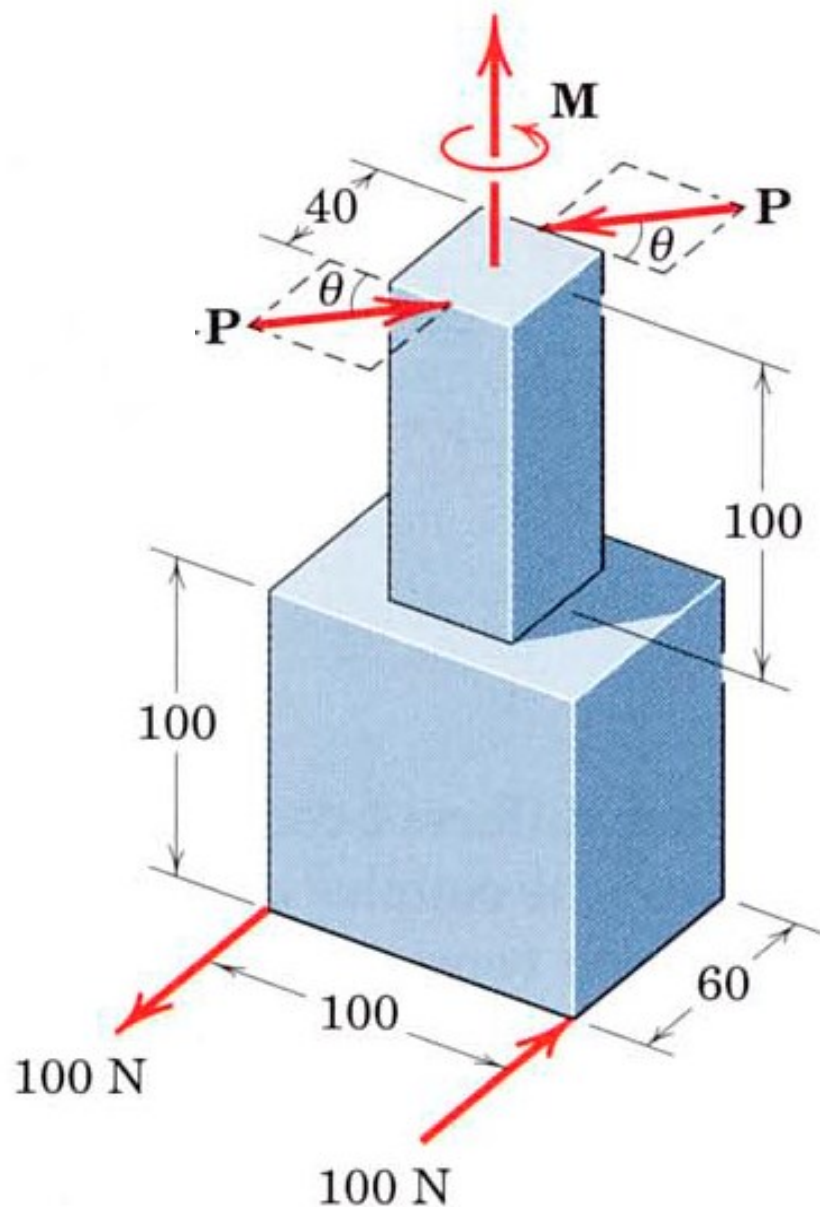
Binários Equivalentes

- Se o produto $F \cdot d$ permanecer o mesmo, uma mudança no ponto de aplicação das forças não afetará o efeito externo do binário:



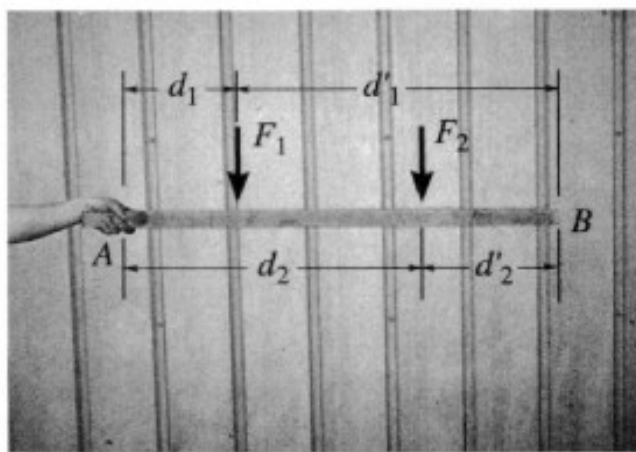
EXEMPLO 7

O elemento estrutural rígido está submetido a um binário composto de um par de forças de 100 [N]. Substitua esse binário por um binário equivalente, consistindo, nas duas forças P , cada uma com módulo de 400 [N], determine o ângulo θ apropriado.

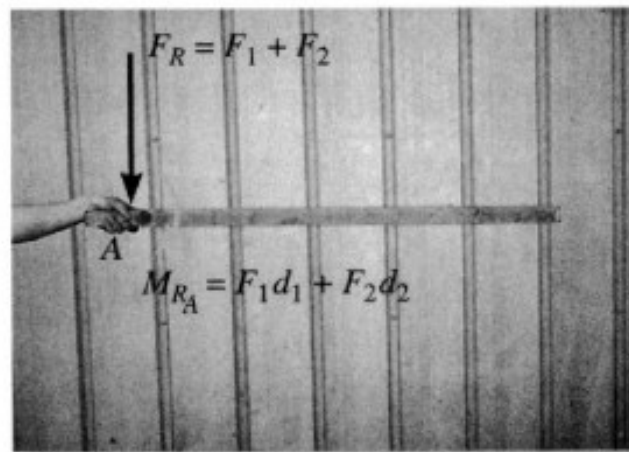


RESULTANTE DE UM SISTEMA DE FORÇA

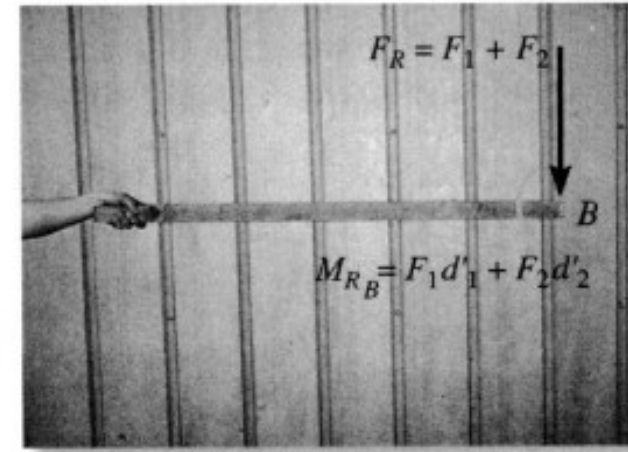
Se duas forças atuam em um bastão e são substituídas por uma força resultante e um momento resultante equivalente no ponto A, ou pela força resultante e um momento resultante equivalente no ponto B, em cada um dos casos a mão pode fornecer a mesma resistência a translação e rotação para manter o bastão na posição horizontal.



=



=



$$FR = \Sigma F$$

$$FR_x = \Sigma F_x$$

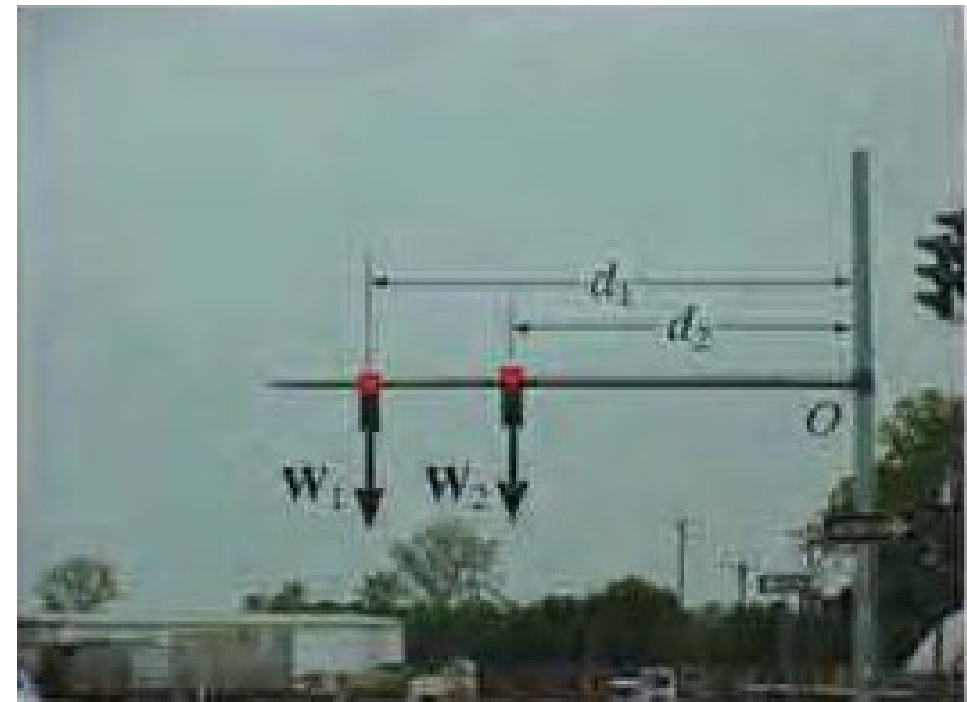
$$FR_y = \Sigma F_y$$

$$M_o = F \cdot d$$

$$MR_o = \Sigma M_o$$

RESULTANTE DE UM SISTEMA DE FORÇA

Através da resultante é possível representar os efeitos externos das forças aplicadas a um corpo.



RESULTANTE DE UM SISTEMA DE FORÇA

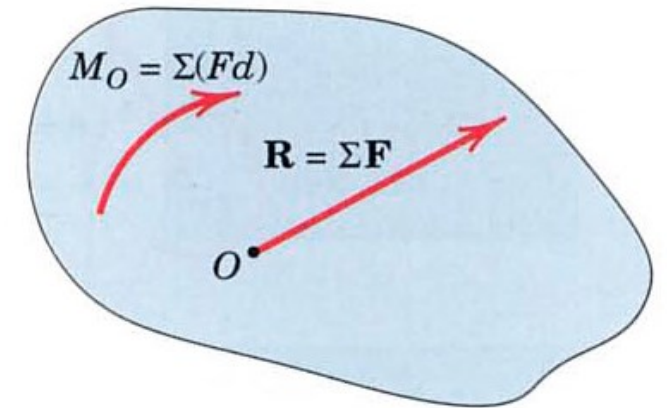
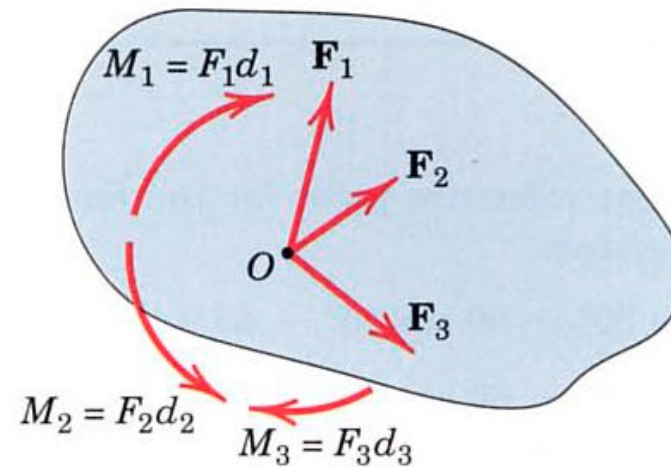
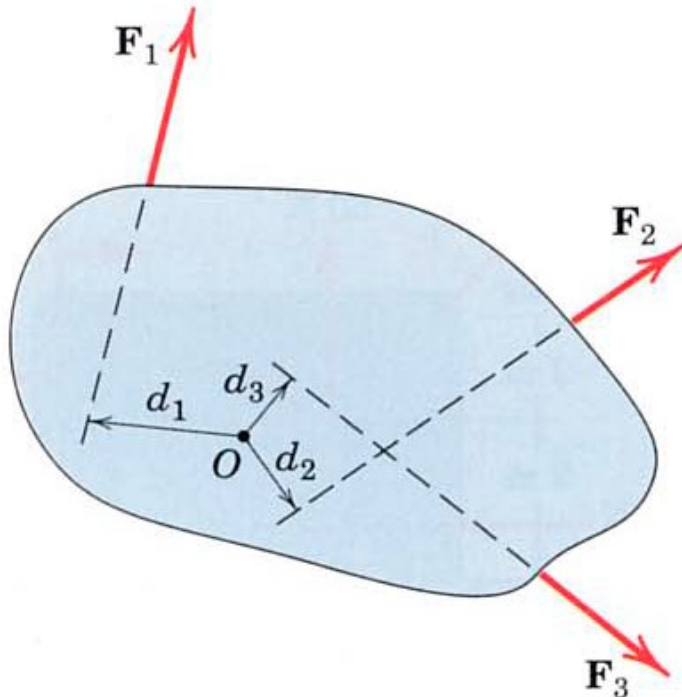
Método Algébrico

- 1º - Escolha um ponto de referência conveniente e mova todas as forças para esse ponto;
- 2º - Some todas as forças e todos os momentos em O para obter a resultante **R** e o momento resultante **M**;
- 3º - Ache a linha de ação de **R** forçando **R** a ter o mesmo momento resultante em relação a O.

$$\vec{R} = \sum \vec{F} \quad \vec{M}_O = \sum (\vec{F} \times \vec{r}) \quad M_O = \sum F \cdot d \quad R \cdot d = M_O$$

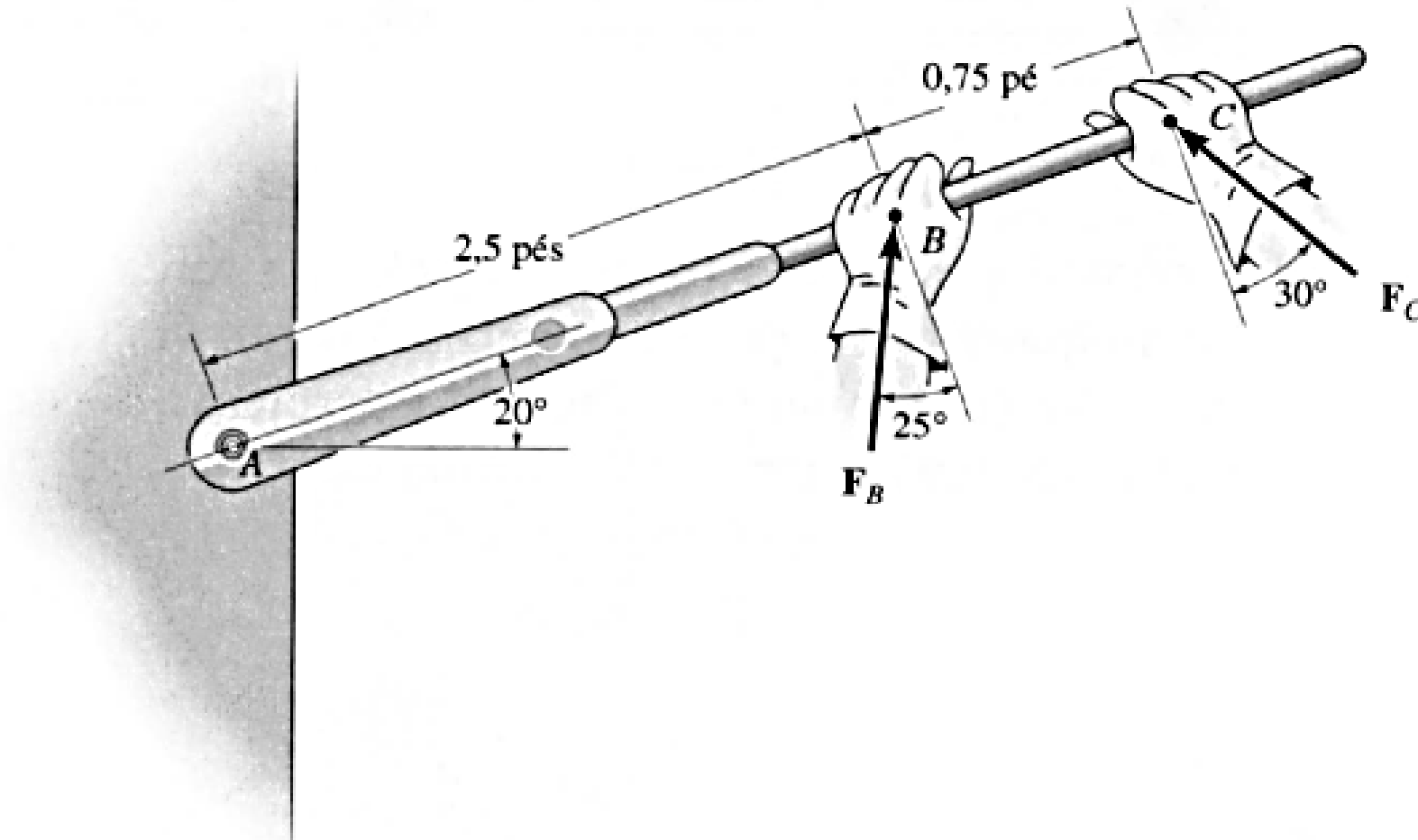
RESULTANTE DE UM SISTEMA DE FORÇA

- Método Algébrico



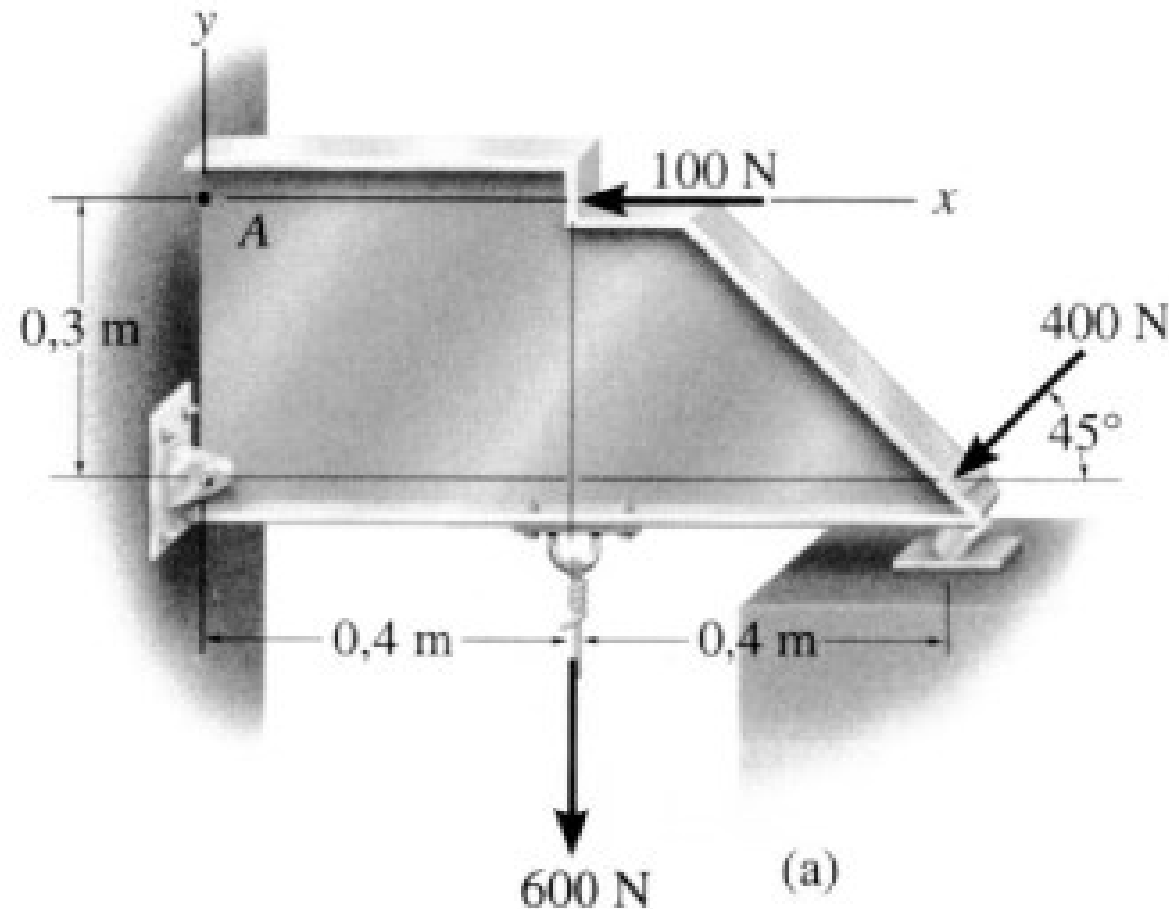
EXEMPLO 7

Se $F_B = 30$ lb e $F_C = 45$ lb, determine o momento resultante em relação ao parafuso localizado em A.



EXEMPLO 8

Substitua as forças atuantes no suporte mostrado na Figura abaixo por uma força resultante e um momento atuante no ponto A.



EXEMPLO 8

Decompondo a força de 400N no eixo x e y e calculando as resultantes no eixo x e y, obtemos:

$$\begin{aligned}\pm \rightarrow F_{R_x} &= \Sigma F_{x_i}; & F_{R_x} &= -100 \text{ N} - 400 \cos 45^\circ \text{ N} = -382,8 \text{ N} = 382,8 \text{ N} \leftarrow \\ + \uparrow F_{R_y} &= \Sigma F_{y_i}; & F_{R_y} &= -600 \text{ N} - 400 \sin 45^\circ \text{ N} = -882,8 \text{ N} = 882,8 \text{ N} \downarrow\end{aligned}$$

Em seguida calculamos a intensidade e direção da força resultante do sistema

$$F_R = \sqrt{(F_{R_x})^2 + (F_{R_y})^2} = \sqrt{(382,8)^2 + (882,8)^2} = 962 \text{ N}$$

$$\theta = \text{tg}^{-1}\left(\frac{F_{R_y}}{F_{R_x}}\right) = \text{tg}^{-1}\left(\frac{882,8}{382,8}\right) = 66,6^\circ \quad \theta \nwarrow$$

EXEMPLO 8

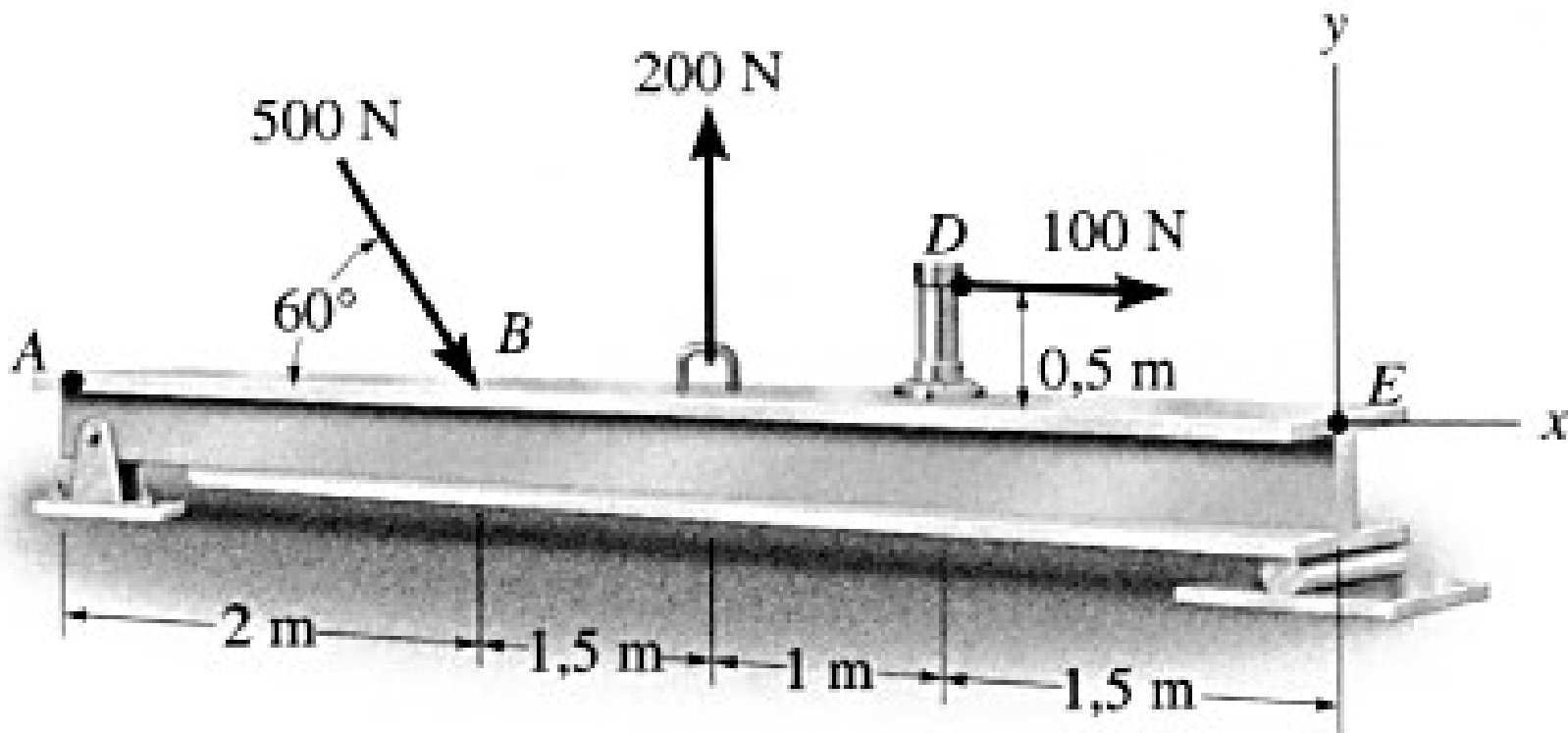
Por fim calculamos o momento em relação ao ponto A.

$$\downarrow + M_{R_A} = \Sigma M_A;$$

$$\begin{aligned} M_{R_A} &= 100 \text{ N}(0) - 600 \text{ N}(0,4 \text{ m}) - (400 \text{ sen } 45^\circ \text{ N})(0,8 \text{ m}) \\ &\quad - (400 \text{ cos } 45^\circ \text{ N})(0,3 \text{ m}) \\ &= -551 \text{ N} \cdot \text{m} = 551 \text{ N} \cdot \text{m} \downarrow \end{aligned}$$

EXEMPLO 9

A viga AE ilustrada na Figura está sujeita a um sistema de forças coplanares. Determine a intensidade, a direção, o sentido e a localização na viga de uma força resultante equivalente ao sistema de forças dado em relação ao ponto E.



EXEMPLO 9

Decompondo a força de 500N no eixo x e y e calculando as resultantes no eixo x e y, obtemos:

$$\rightarrow F_{R_x} = \Sigma F_x; \quad F_{R_x} = 500 \cos 60^\circ \text{ N} + 100 \text{ N} = 350 \text{ N} \rightarrow$$

$$\begin{aligned} +\uparrow F_{R_y} &= \Sigma F_y; \quad F_{R_y} = -500 \sin 60^\circ \text{ N} + 200 \text{ N} = -233 \text{ N} \\ &= 233 \text{ N} \downarrow \end{aligned}$$

Em seguida calculamos a intensidade e direção da força resultante do sistema

$$F_R = \sqrt{(350)^2 + (233)^2} = 420,5 \text{ N}$$

$$\theta = \text{tg}^{-1}\left(\frac{233}{350}\right) = 33,7^\circ \quad \swarrow_{\theta}$$

EXEMPLO 9

Por fim aplicamos o calculo de momento para determinar a localização da força resultante na Viga.

$$\downarrow + M_{R_E} = \Sigma M_E$$

$$233 \text{ N}(d) + 350 \text{ N}(0) = (500 \text{ sen } 60^\circ \text{ N})(4 \text{ m}) + (500 \text{ cos } 60^\circ \text{ N})(0) \\ - (100 \text{ N})(0,5 \text{ m}) - (200 \text{ N})(2,5 \text{ m})$$

$$d = \frac{1.182,1}{233} = 5,07 \text{ m}$$

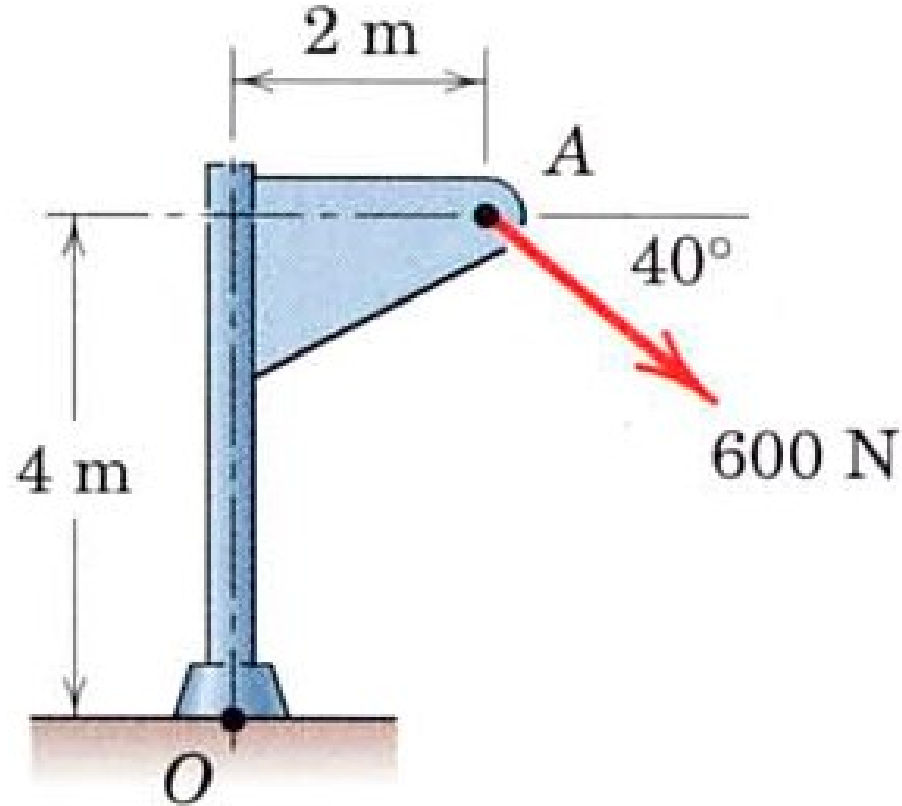
EXERCÍCIOS E ATIVIDADES

Orientação para realização das Atividades:

- Realizar as atividades a mão livre;
- Realizar diagramas e desenhos para compressão;
- Realizar todas as contas de forma detalhada;
- Colocar as repostas principais a caneta;
- Entregar as atividades e resolução dos exercícios em forma digital no sala virtual da disciplina.

EXERCÍCIO 1

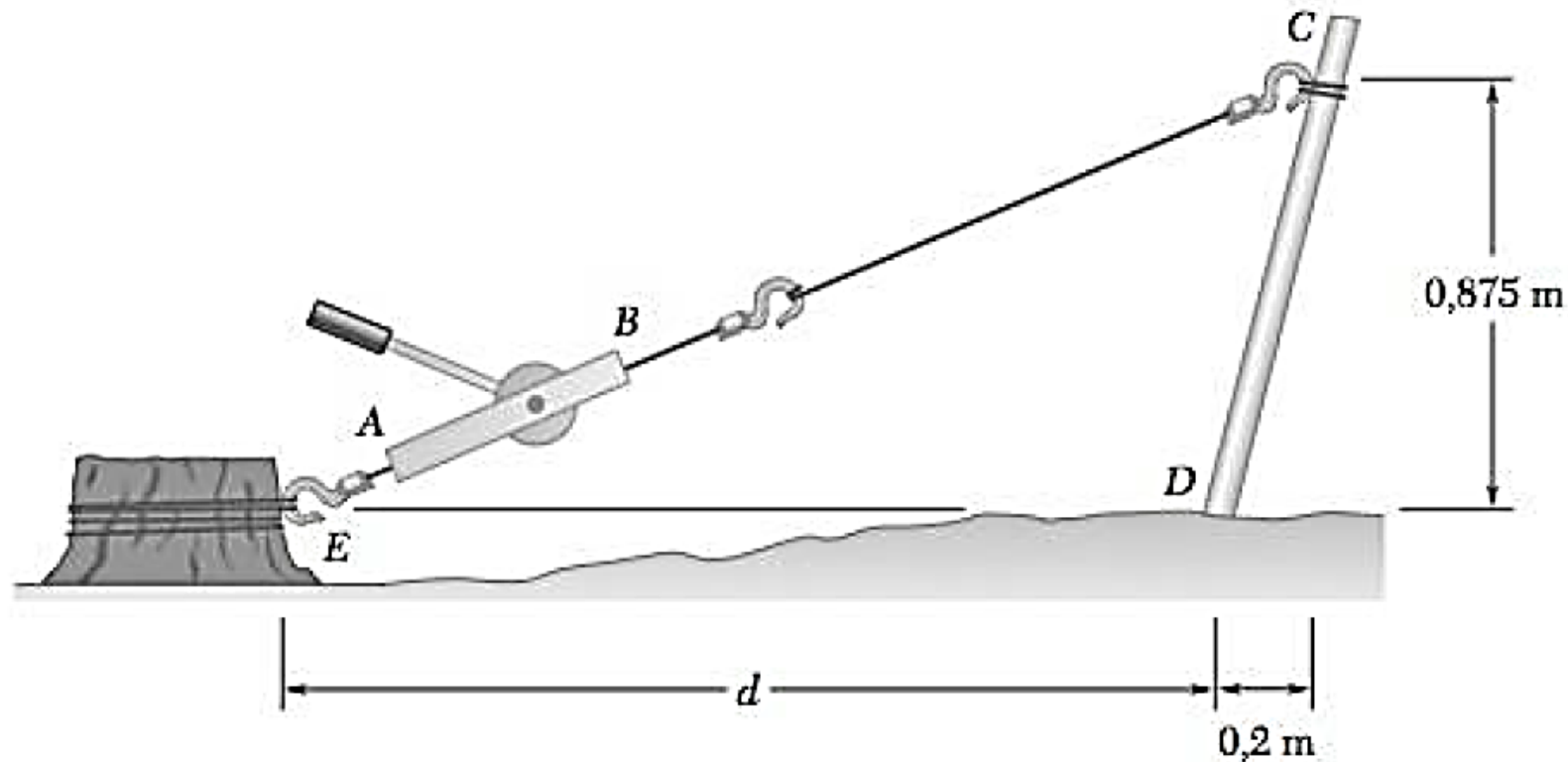
Calcule o módulo do momento da força de 600 [N] em relação ao ponto O da base, por três maneiras diferentes.



Respostas: -2610 J

EXERCÍCIO 2

Um guincho AB é usado para endireitar um mourão. Sabendo que a tração no cabo BC é 1140 N e o comprimento d é de 1,9 m, determine o momento em relação a D da força exercida pelo cabo em C decompondo tal força no componente horizontal e no vertical aplicado a) no ponto C, b) no ponto E



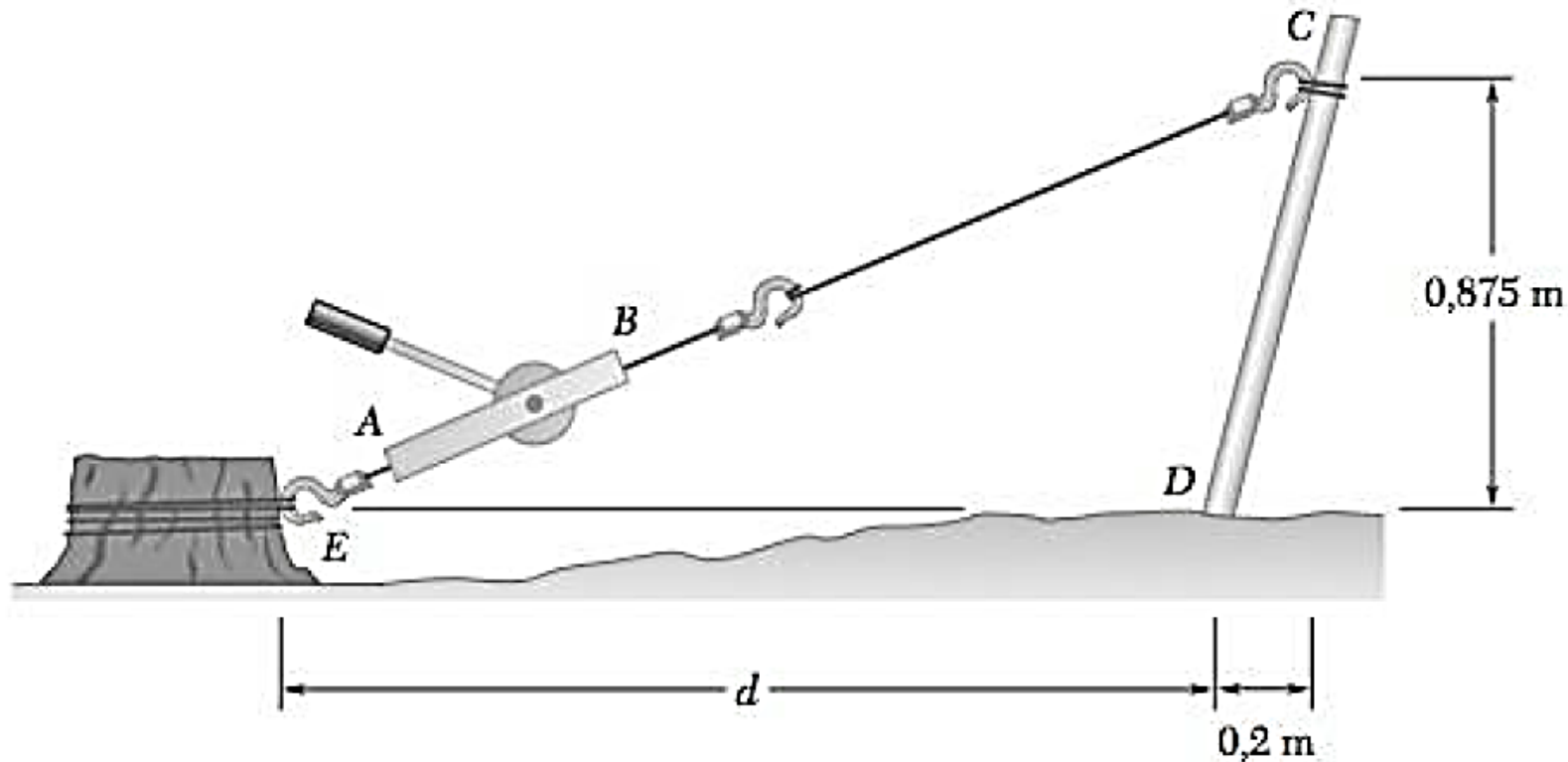
Respostas:

$$a = 833 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$b = 833 \text{ N}\cdot\text{m}$$

EXERCÍCIO 3

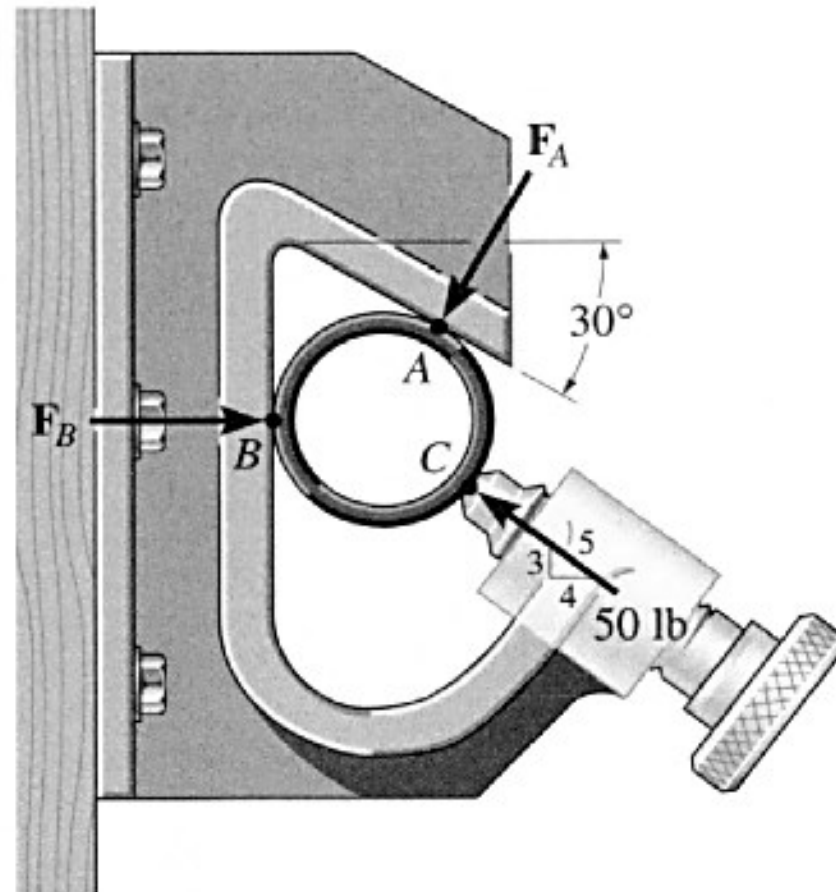
Sabe-se que é necessária uma força com um momento de $960\text{ N}\cdot\text{m}$ em relação a D para endireitar o mourão CD. Se $d=2,8\text{ m}$, determine a tração que deve ser desenvolvida no cabo do guincho AB para se criar o momento necessário em relação ao ponto D.



Respostas: 1224 N

EXERCÍCIO 4

O tubo é mantido na posição pela morsa. Se o parafuso exerce uma força de 50 lb sobre o tubo na direção mostrada, determine as forças F_A e F_B que os contatos lisos em A e B exercem sobre o tubo.



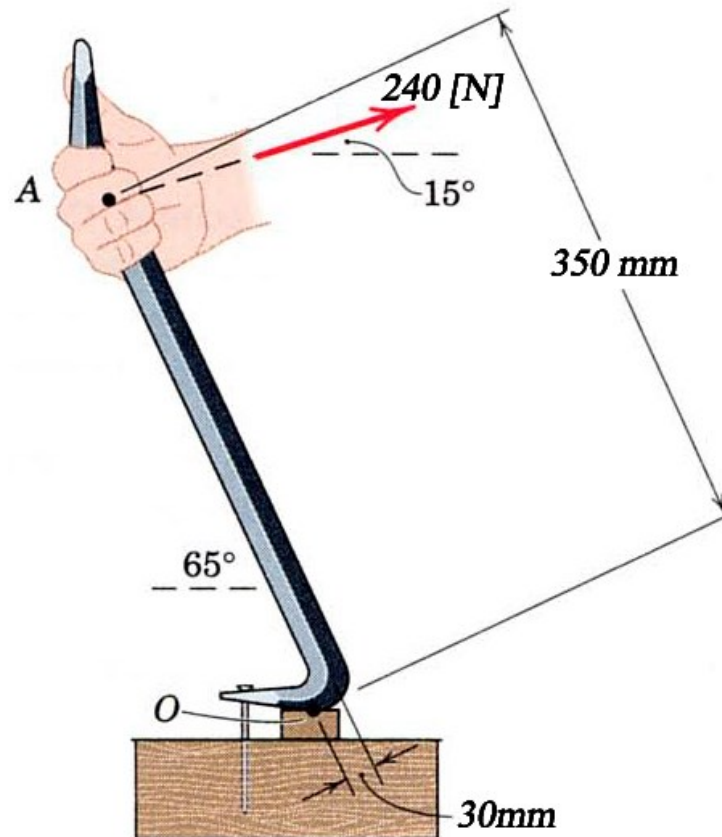
Respostas:

$$F_A = 34,64 \text{ N}$$

$$F_B = 57,32 \text{ N}$$

EXERCÍCIO 5

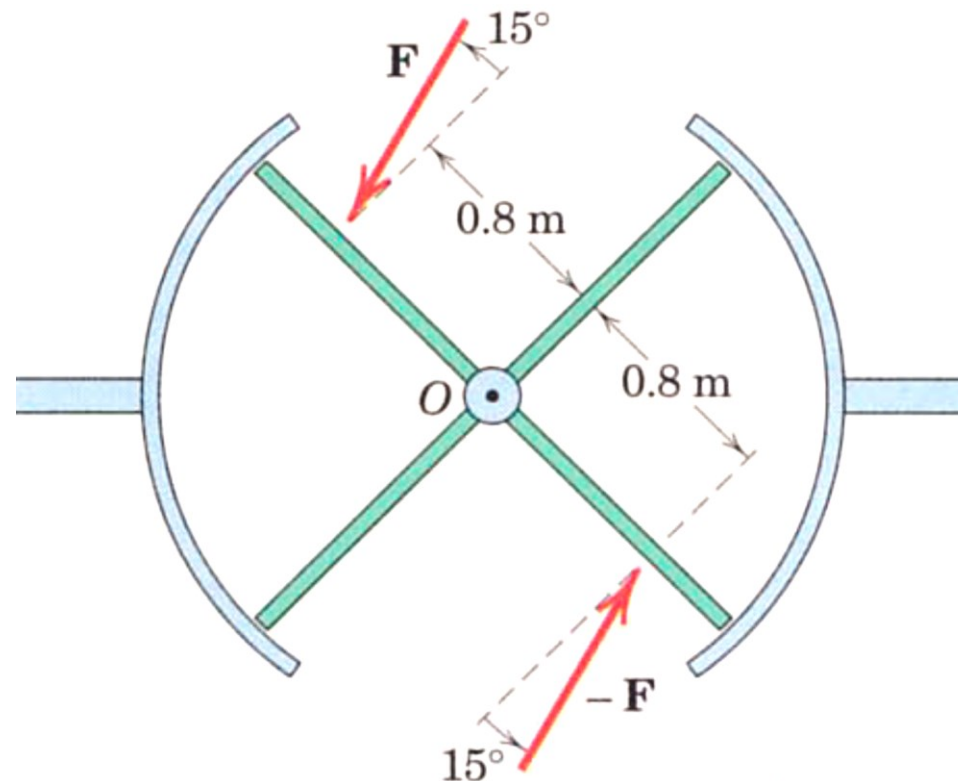
Um pé de cabra é usado para remover um prego, como mostrado. Determine o momento da força de 240 [N] em relação ao ponto O, de contato entre o pé de cabra e o pequeno bloco de suporte.



Respostas: - 84 J

EXERCÍCIO 6

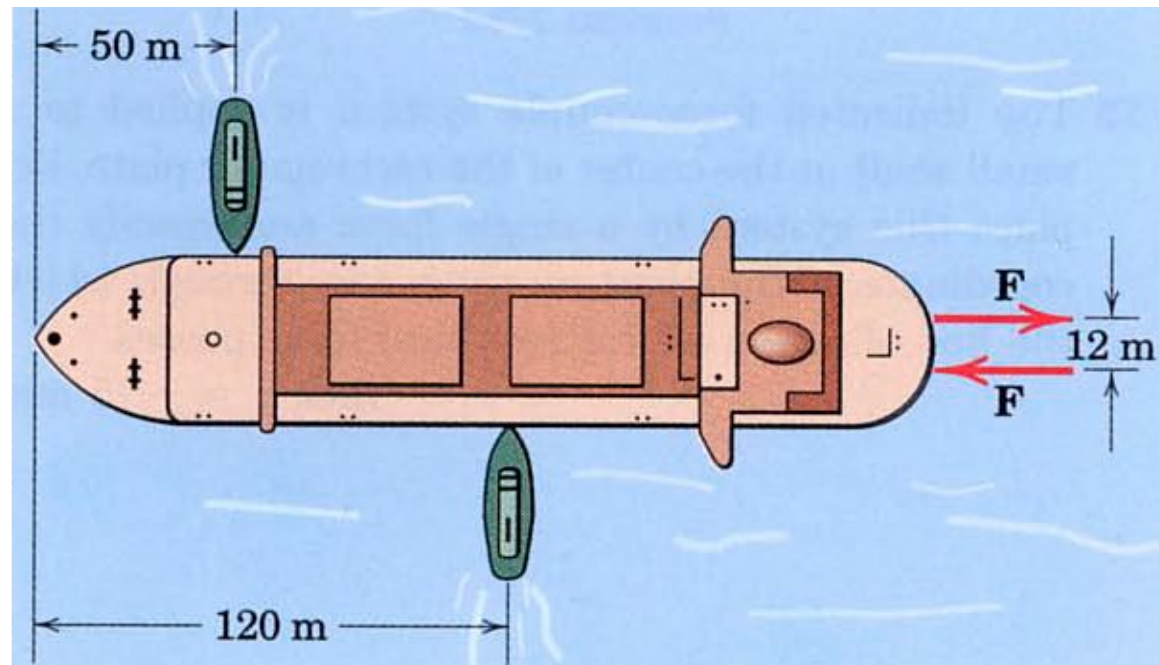
A vista de topo de uma porta giratória está mostrada. Duas pessoas se aproximam simultaneamente da porta e exercem forças de módulo igual, como mostrado. Se o momento resultante em relação ao eixo de rotação da porta em O vale 25 [N.m], determine o módulo da força F .



Respostas:
 $F = 16.18 \text{ N}$

EXERCÍCIO 7

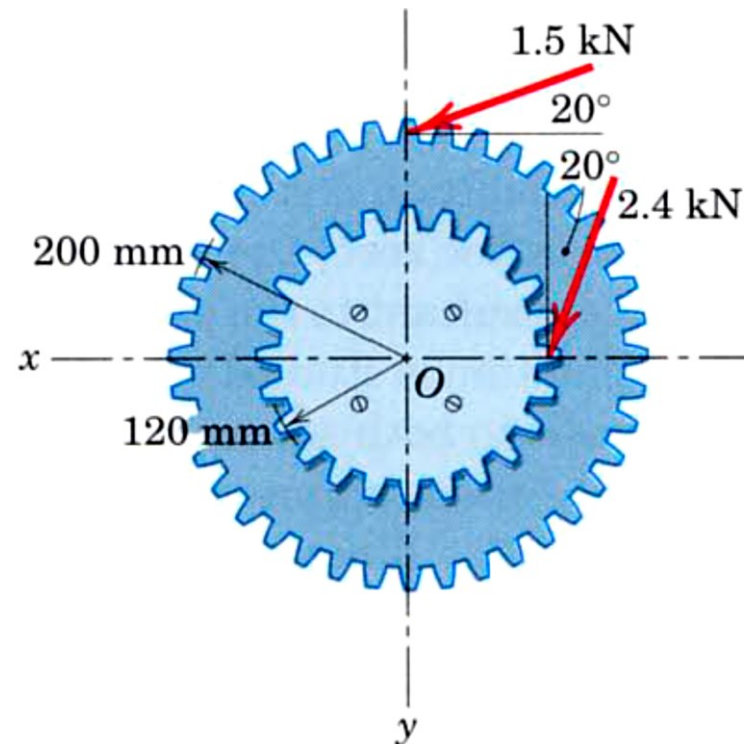
Cada hélice de um navio de duas hélices desenvolve um empuxo na velocidade máxima de 300 [kN]. Ao manobrar-se o navio, uma hélice está girando a toda velocidade para a frente e a outra a toda velocidade no sentido reverso. Que empuxo P cada rebocador deve exercer no navio para contrabalancear o efeito de giro causado pelas hélices do navio?



Respostas:
 $P = 51,4 \text{ kN}$

EXERCÍCIO 8

A figura representa duas engrenagens maciças submetidas às forças de contato mostradas. Substitua as duas forças por uma única força equivalente **F_r** no eixo de rotação **O** e por um binário equivalente **F_M** correspondente. Especifique os módulos de **F_r** e **F_M** . Se as engrenagens devem começar a girar a partir do repouso sob a ação das forças mostradas, em que direção ocorrerá a rotação?



Respostas:

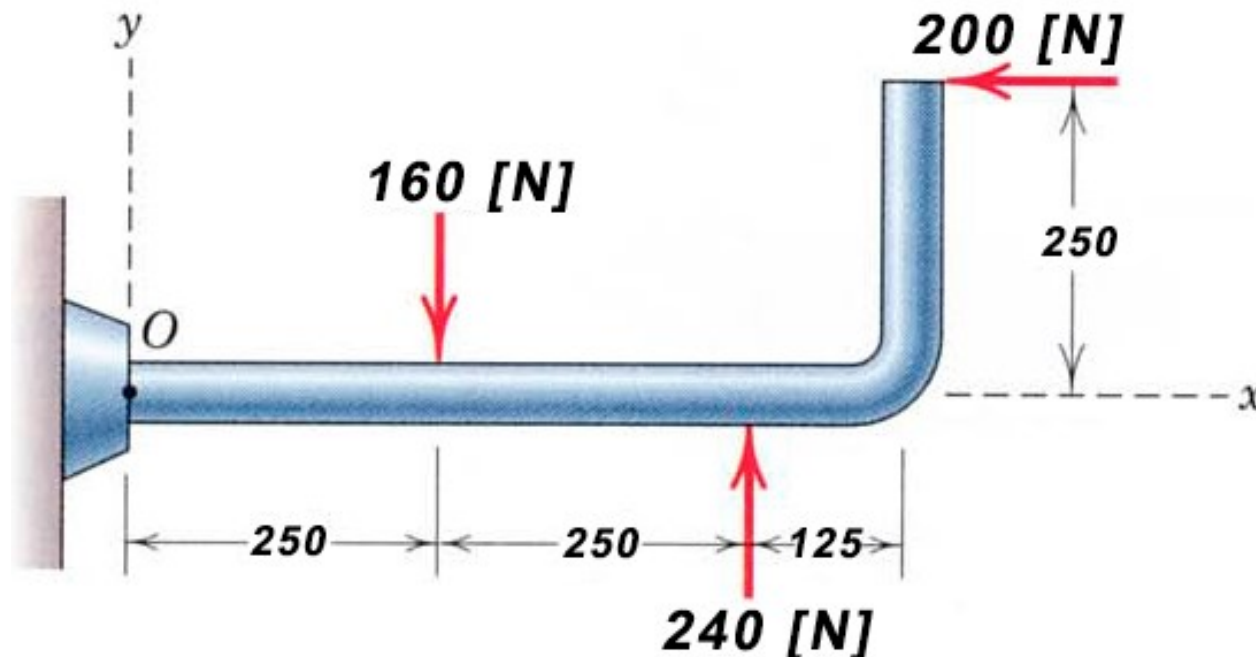
$$F_r = 3555 \text{ N}$$

$$F_M = 1777,5 \text{ N}$$

$$d = 1.585 \text{ mm}$$

EXERCÍCIO 9

Substitua as três forças atuando no tubo dobrado por uma única força equivalente F_r . Especifique a distância x a partir do ponto O a um ponto no eixo x pelo qual passa a linha de ação da F_r .



Medidas em milímetros

Respostas:

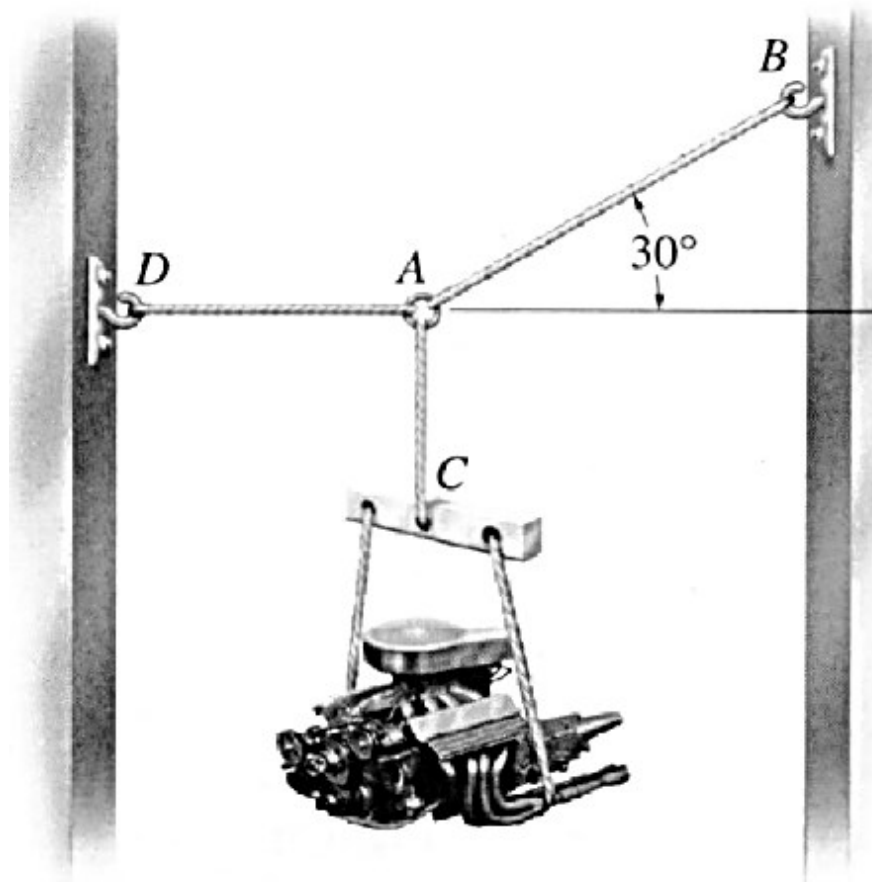
$$F_r = 215 \text{ N}$$

$$dx = 561,4 \text{ mm}$$

$$dy = 224,5 \text{ mm}$$

EXERCÍCIO 10

Determine a tensão nos cabos AB e AD para o equilíbrio do motor de 250 kg mostrado na figura abaixo:



Respostas:

$$T_{AB} = 4,9 \text{ kN}$$

$$T_{AD} = 4,25 \text{ kN}$$