

AULA 11

EIXO E ARVORES – CRITÉRIO DE FALHA

Professor: Dr. Paulo Sergio Olivio Filho

CONTEÚDO DA AULA

EIXOS E EIXOS-ÁRVORES

1. **Critério de Falha**
2. Tensões principais e conversão de tensões
3. Aplicações em projetos

OBJETIVO DE AULA

- O principal objetivo nesse estudo é o pré-dimensionamento de eixos e árvores.
- Analisar as condições de carregamento e contorno, e definir critérios para o projeto: material e dimensões da seção transversal.
- Os carregamentos normalmente variam com o tempo, o que implica em solicitações que induzem o problema de fadiga.

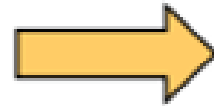
FLEXÃO E TORÇÃO – CRITÉRIOS DE FALHA



- Flexão Pura

Então:

$$\sigma_m = M \cdot \frac{c}{I}$$



Para eixos com raio r :

$$\sigma_m = M \cdot \frac{r}{I}$$

- Torção Pura

De maneira análoga pode-se deduzir que:

$$\tau_m = T \cdot \frac{r}{J}$$

FLEXÃO E TORÇÃO – CRITÉRIOS DE FALHA

Existem várias teorias de falha. Entretanto, uma única teoria não deve ser aplicada a um material específico porque o material pode se comportar de forma dúctil ou frágil dependendo da

- (1) temperatura, (2) carregamento ou
- (3) eventuais reações químicas (mudam o material)

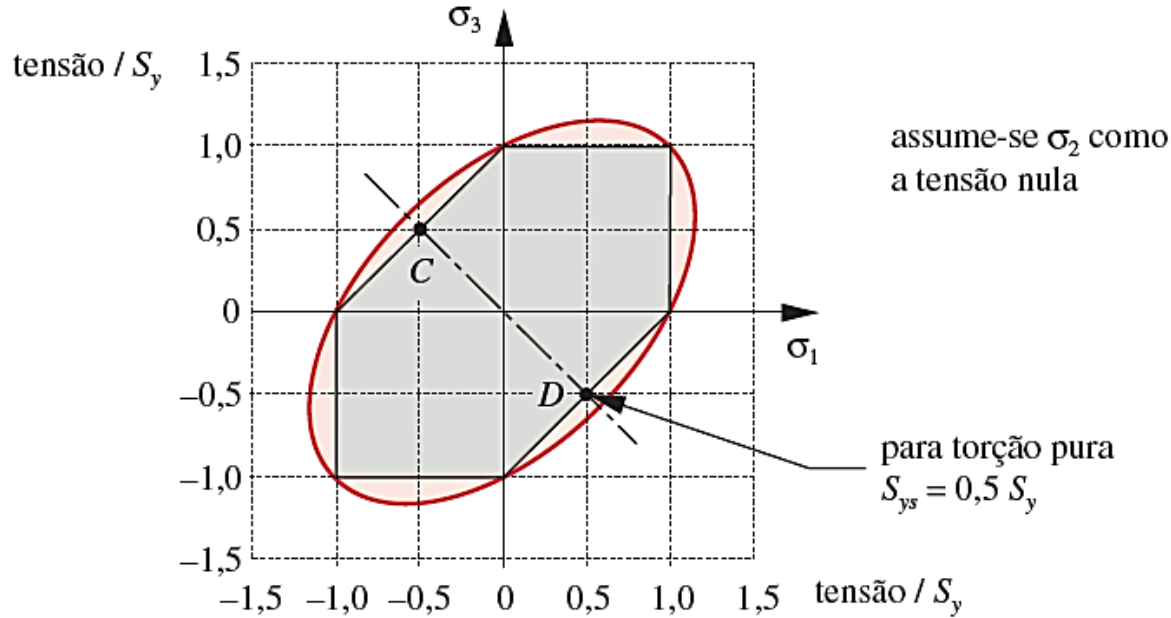
Materiais dúcteis

- Teoria da máxima tensão de cisalhamento (Tresca)
- Teoria da máxima energia de distorção (von Mises)

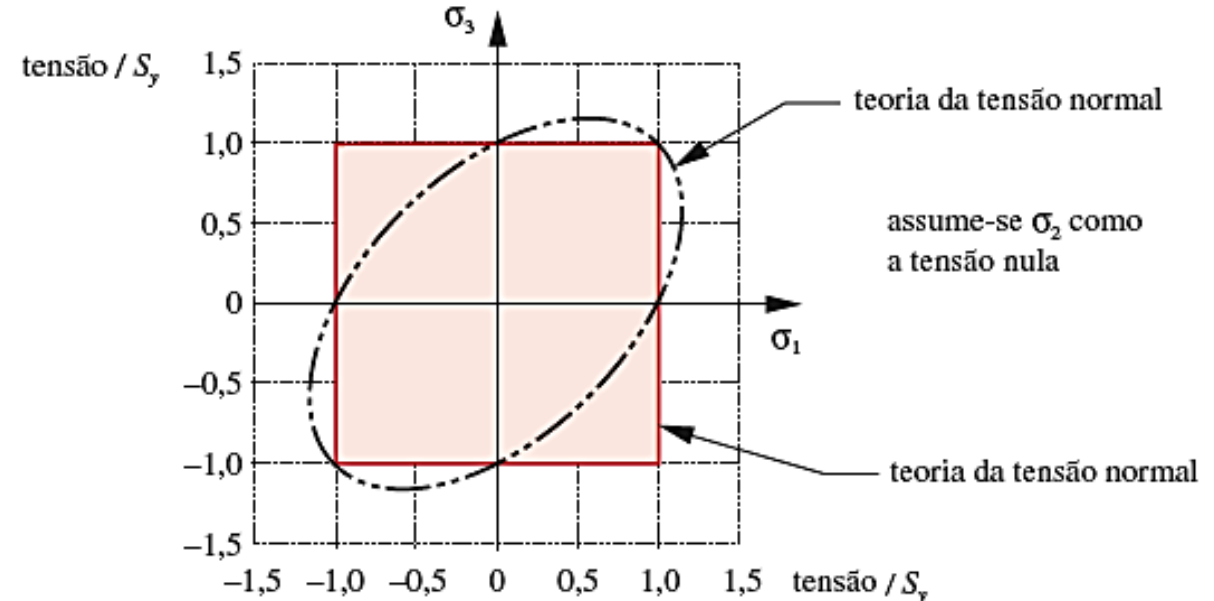
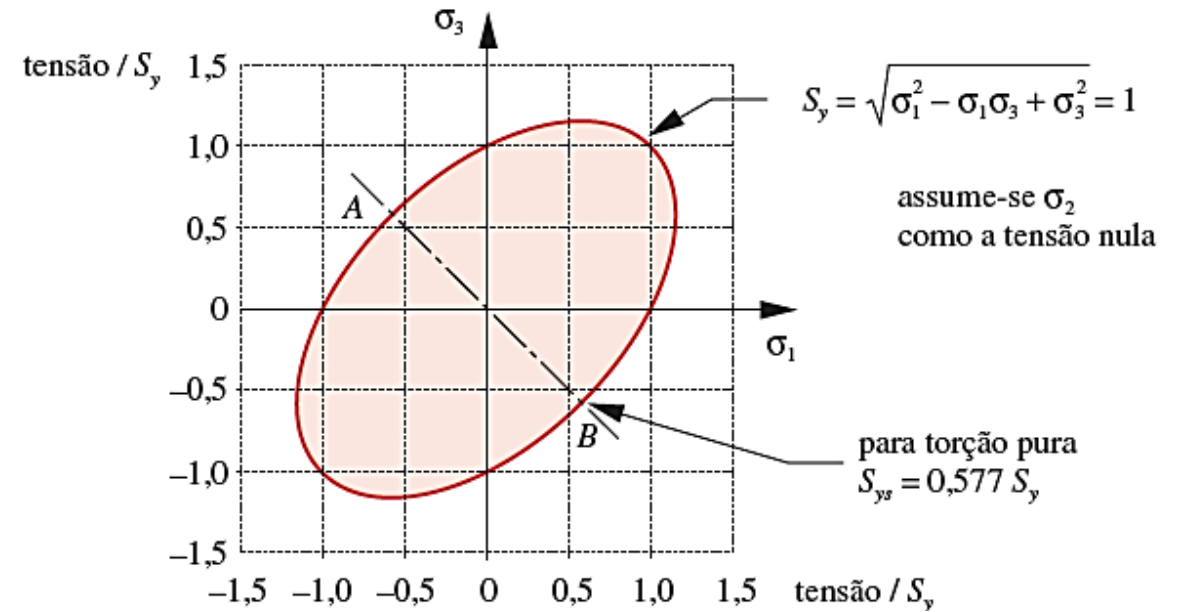
Materiais frágeis

- Teoria da máxima tensão normal
- Critério de falha de Mohr

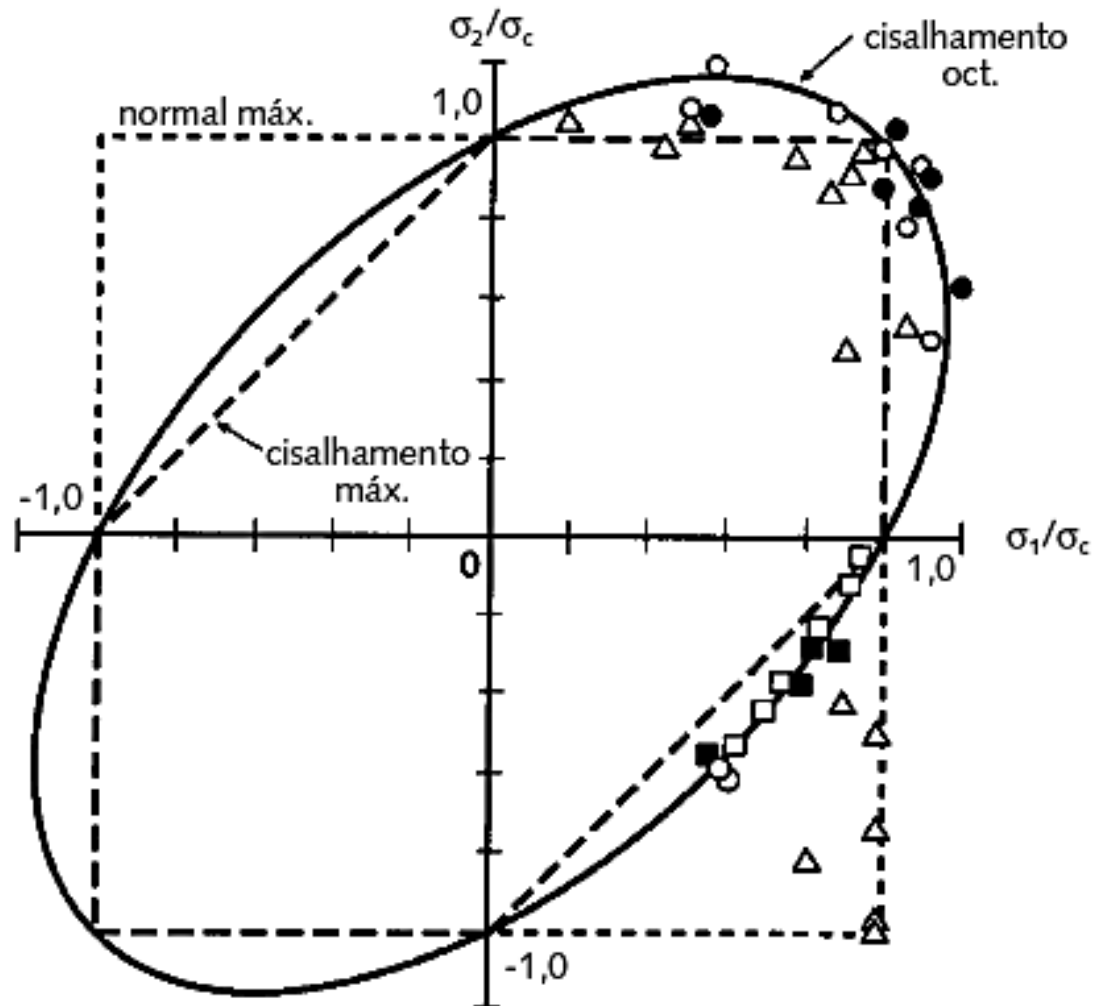
CRITÉRIO DE FALHA



- Teoria da tensão máxima de cisalhamento
- Teoria da energia de distorção
- Teoria da máxima tensão normal



CRITÉRIO DE FALHA



Escoamento ($\sigma_c = \sigma_0$)

- Aço Ni-Cr-Mo
- Aço AISI 1023
- 2024-T4 Al
- 3S-H Al

Ruptura ($\sigma_c = \sigma_{ut}$)

- △ Ferro fundido cinzento

Teoria da tensão normal:

- Não utilizar em materiais dúcteis.

FLEXÃO E TORÇÃO – CRITÉRIO DE TRESCA

Estabelece que a tensão de falha é igual a tensão cisalhante máxima.

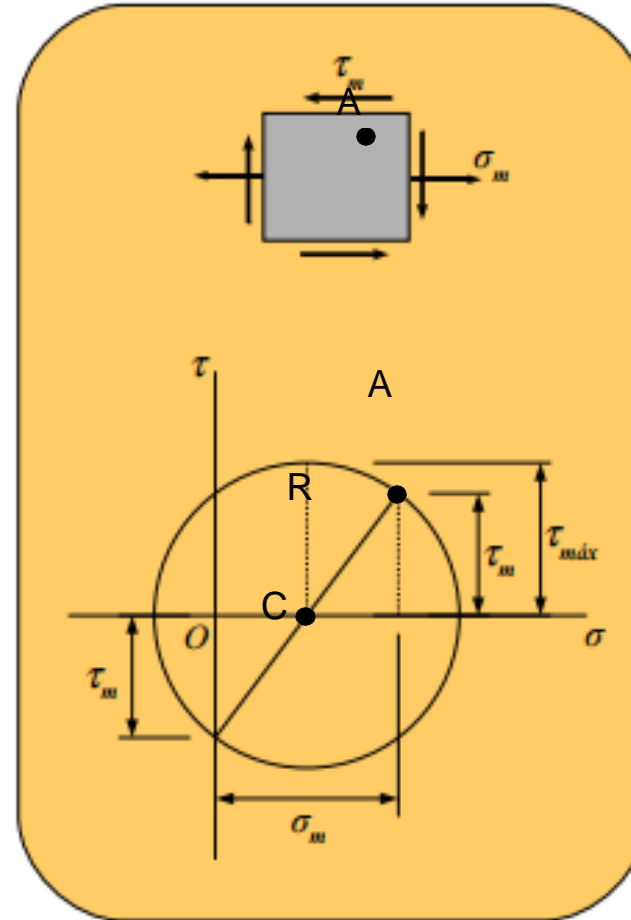
Pelo **circulo de Mohr** pode-se encontrar o valor de tensão de cisalhamento máxima:

$$\tau_{m\acute{a}x} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_m}{2}\right)^2 + (\tau_m)^2}$$

Substituindo σ_m e τ_m pelas equações apresentadas anteriormente, tem-se:

$$\tau_{m\acute{a}x} = \sqrt{\left(\frac{M \cdot r}{2 \cdot I}\right)^2 + \left(\frac{T \cdot r}{J}\right)^2}$$

Como, para seções transversais circulares ou anelares, $2I = J$:



FLEXÃO E TORÇÃO – CRITÉRIO DE TRESCA



$$\tau_{\text{máx}} = \frac{r}{J} \cdot \sqrt{M^2 + T^2}$$

ou


$$\frac{J}{r} = \frac{1}{\tau_{\text{adm}}} \cdot \left(\sqrt{M^2 + T^2} \right)_{\text{máx}}$$

Substituindo o momento M pelas componente M_y e M_z , então:

$$\frac{J}{r} = \frac{1}{\tau_{\text{adm}}} \cdot \left(\sqrt{M_y^2 + M_z^2 + T^2} \right)_{\text{máx}}$$

Para eixos maciços de raio r , tem-se:

$$\frac{J}{r} = \frac{\pi}{16} \cdot d^3$$

Assim:


$$d = \left[\frac{16}{\pi} \cdot \frac{1}{\tau_{\text{adm}}} \left(\sqrt{M_y^2 + M_z^2 + T^2} \right)_{\text{máx}} \right]^{\frac{1}{3}}$$

FLEXÃO E TORÇÃO – CRITÉRIO DE TRESCA

CRITÉRIO PARA TENSÃO ADMISSÍVEL PELA TEORIA DA TENSÃO MÁXIMA DE CISALHAMENTO (TRESCA)

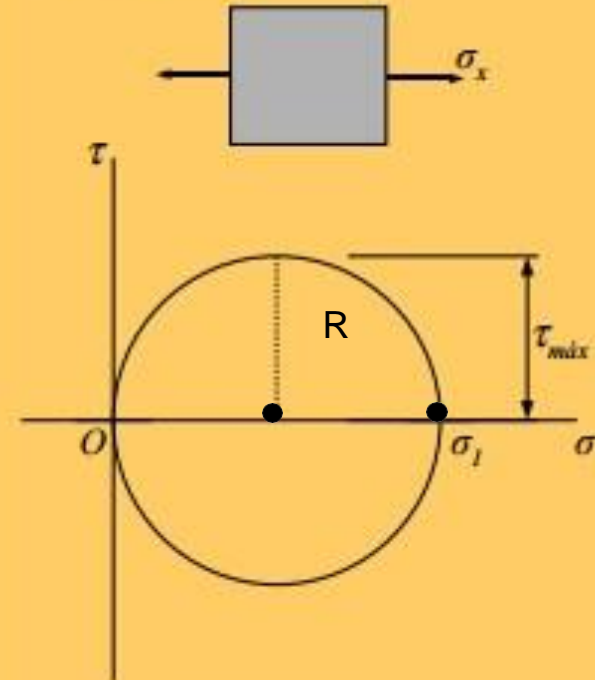
A teoria afirma que a falha ocorre quando a **tensão máxima de cisalhamento** em uma região **excede** a **tensão máxima de cisalhamento de um corpo de prova sob tração em escoamento (metade da tensão normal de escoamento)**.

Fonte: Norton (2004)

Para tensão de escoamento:

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_{esc}}{2}$$

No ensaio de tração, tem-se:



$$\sigma_1 = \sigma_x$$

$$\tau_{max} = \sigma_x / 2$$

FLEXÃO E TORÇÃO – CRITÉRIO DE TRESCA



Pela teoria da tensão máxima de cisalhamento (Tresca)

$$d = \left[\frac{16}{\pi} \cdot \frac{1}{\tau_{max}} \sqrt{M_y^2 + M_z^2 + T^2} \right]^{\frac{1}{3}} \Rightarrow \tau_{max} = \frac{\sigma_{esc}}{2N}$$

Considerando um fator de segurança, N :

$$N = \frac{\sigma_{esc}}{\sigma_{adm}} > 1$$

$$d = \left[\frac{32}{\pi} \cdot \frac{N}{\sigma_{esc}} \sqrt{M_y^2 + M_z^2 + T^2} \right]^{\frac{1}{3}}$$

FLEXÃO E TORÇÃO – CRITÉRIOS DE FALHA

Existem várias teorias de falha. Entretanto, uma única teoria não deve ser aplicada a um material específico porque o material pode se comportar de forma dúctil ou frágil dependendo da (1) temperatura, (2) carregamento ou

(3) eventuais reações químicas (mudam o material)

Materiais dúcteis

- Teoria da máxima tensão de cisalhamento (Tresca)
- **Teoria da máxima energia de distorção (von Mises)**

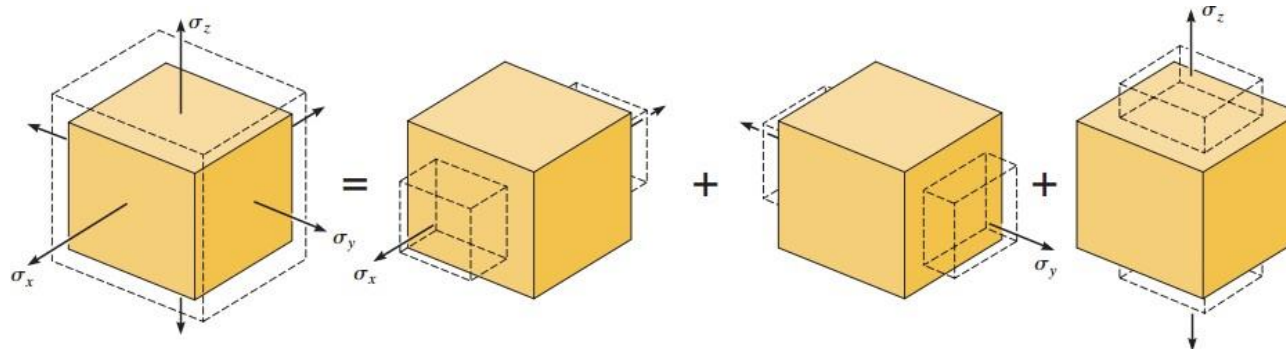
Materiais frágeis

- Teoria da máxima tensão normal
- Critério de falha de Mohr

CRITÉRIO DE FALHA DE VON MISES



Um material quando se deforma armazena energia internamente.



A tensão equivalente de von Mises (σ') é definida como a tensão de tração uniaxial que criaria a mesma energia de distorção que é criada pela combinação atual das tensões aplicadas.

Para o caso mais geral de tensões o critério de von Mises (ou teoria da máxima energia de distorção) é dado por:

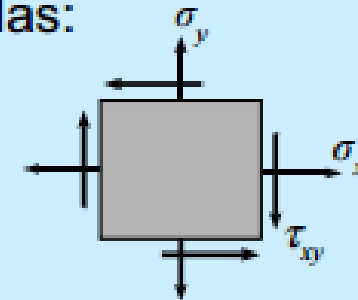
$$\sigma_{max} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2)}$$

CRITÉRIO DE FALHA DE VON MISES

$$\sigma_{max} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \cancel{\sigma_z})^2 + (\cancel{\sigma_z} - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \cancel{\tau_{yz}^2} + \cancel{\tau_{xz}^2})}$$

Pode ser expressa em termos das tensões aplicadas:

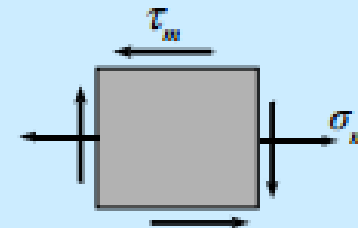
$$\sigma' = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \cdot \sigma_y + 3 \cdot \tau_{xy}^2}$$



$$\sigma_y = 0$$

Para o caso em questão:

$$\sigma' = \sqrt{\sigma_m^2 + 3 \cdot \tau_m^2}$$



CRITÉRIO DE FALHA DE VON MISES



Como:

$$\sigma_m = M \cdot \frac{r}{I}$$

e

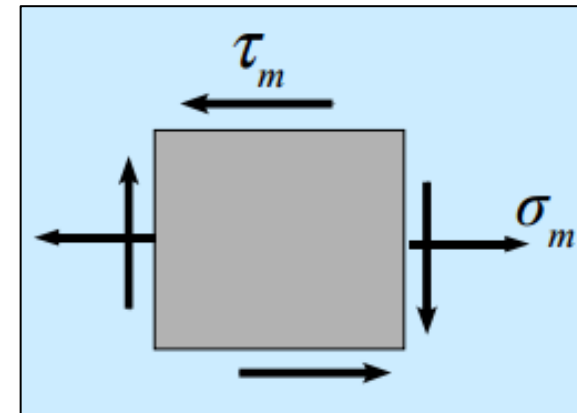
$$\tau_m = T \cdot \frac{r}{J}$$

Então:

$$\sigma' = \sqrt{\left| M \cdot \frac{r}{I} \right|^2 + 3 \cdot \left| T \cdot \frac{r}{J} \right|^2}$$

Como $I = J / 2$:

$$\sigma' = \frac{r}{J} \cdot \sqrt{4 \cdot M^2 + 3 \cdot T^2}$$



CRITÉRIO DE FALHA DE VON MISES

Para eixos maciços de raio r , tem-se:

$$\frac{r}{J} = \frac{16}{\pi \cdot d^3}$$

Assim:

$$\sigma' = \frac{16}{\pi \cdot d^3} \cdot \sqrt{4 \cdot M^2 + 3 \cdot T^2} = \frac{32}{\pi \cdot d^3} \cdot \sqrt{M^2 + \frac{3}{4} \cdot T^2}$$

CRITÉRIO DE FALHA DE VON MISES



Para um coeficiente de segurança N , tem-se:

$$N = \frac{\sigma_{esc}}{\sigma_x}$$

$$\frac{\sigma_{esc}}{N} = \frac{32}{\pi \cdot d^3} \cdot \sqrt{M^2 + \frac{3}{4} \cdot T^2}$$

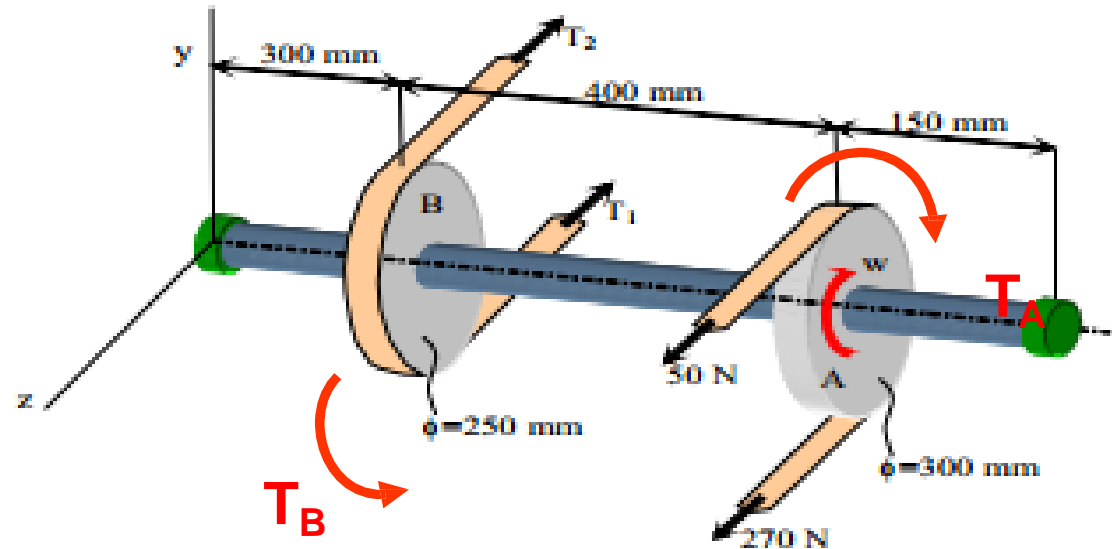
Portanto:

$$d = \left[\frac{32}{\pi} \cdot \frac{N}{\sigma_{esc}} \sqrt{M^2 + \frac{3}{4} \cdot T^2} \right]^{\frac{1}{3}}$$

APLICAÇÃO EXEMPLO

Exemplo 1.3

- Determinar o diâmetro necessário para a árvore da transmissão mostrada na figura:



- Para a polia B, a força menor na correia é 15% da força maior
- Aço trabalhado a frio, UNS G10180
- Um fator de segurança de 1,9

CUIDADO: nesta resolução a redução da resistência pela fadiga (flexão alternada) não está sendo considerada.

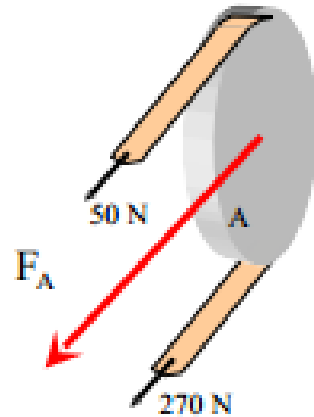
APLICAÇÃO EXEMPLO



Exemplo 1.3 (continuação)

ANÁLISE DAS FORÇAS EXTERNAS ATUANTES

FORÇAS NA CORREIA

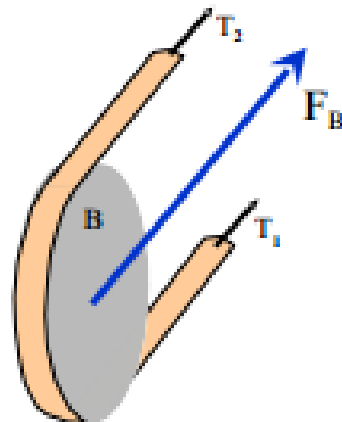


$$F_A = F_{A_1} + F_{A_2}$$



$$\begin{aligned} F_{A_1} &= 270\text{N} \\ F_{A_2} &= 50\text{N} \end{aligned}$$

$$F_A = 320\text{N}$$



$$F_B = F_{B_1} + F_{B_2}$$



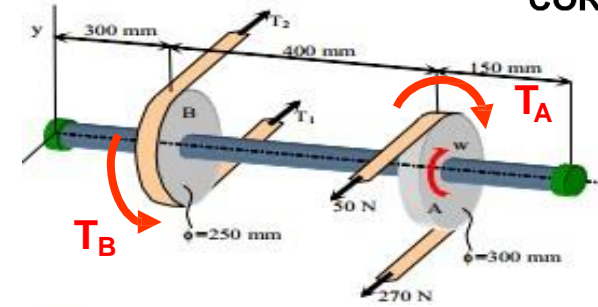
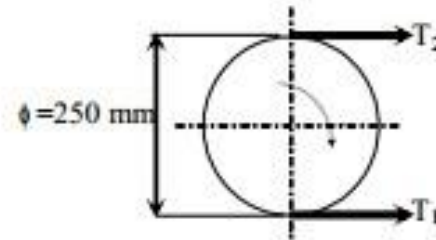
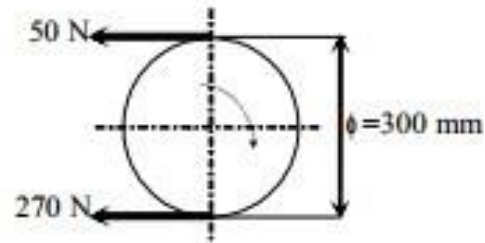
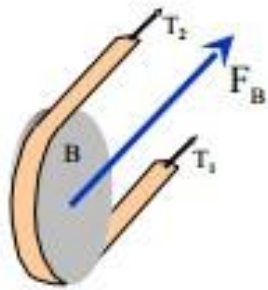
$$\begin{aligned} F_{B_1} &= T_1 \\ F_{B_2} &= T_2 \end{aligned}$$

$$F_B = T_1 + T_2$$

APLICAÇÃO EXEMPLO

Exemplo 1.3 (continuação)

CÁLCULO DAS FORÇAS NAS CORREIAS DA POLIA B



CONDIÇÃO

$$T_2 = 0,15.T_1$$

$$T_A = T_B$$

EQUILÍBRIO

$$T_1 \cdot \frac{250}{2} - T_2 \cdot \frac{250}{2} = 270 \cdot \frac{300}{2} - 50 \cdot \frac{300}{2}$$

FORÇAS

$$T_1 \approx 310 \text{ N} \quad T_2 \approx 47 \text{ N}$$

RESULTANTE

$$F_B = T_1 + T_2$$



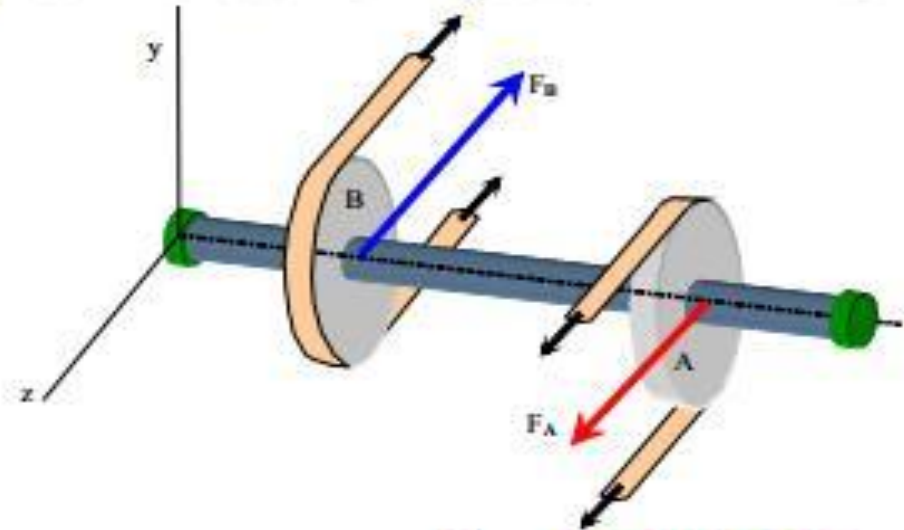
$$F_B = 357 \text{ N}$$

APLICAÇÃO EXEMPLO

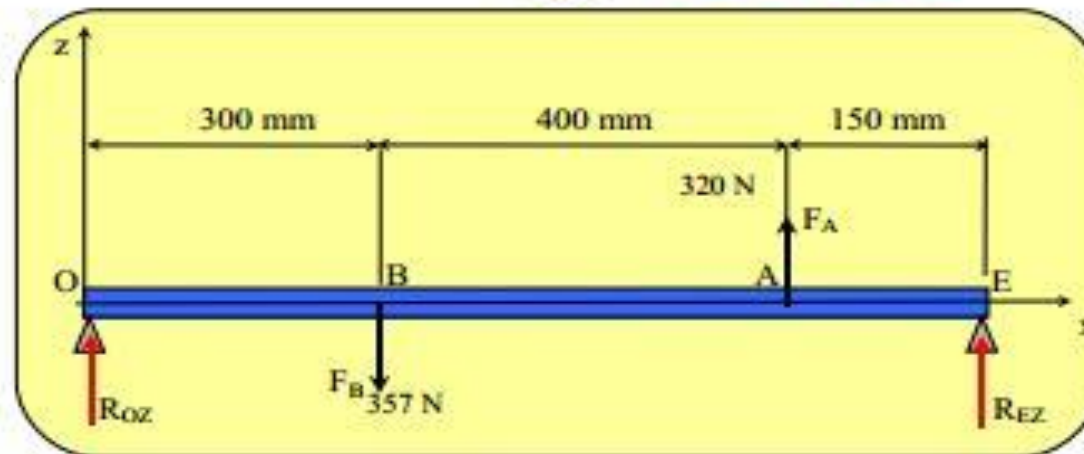


Exemplo 1.3 (continuação)

DETERMINAÇÃO DAS SOLICITAÇÕES INTERNAS



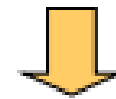
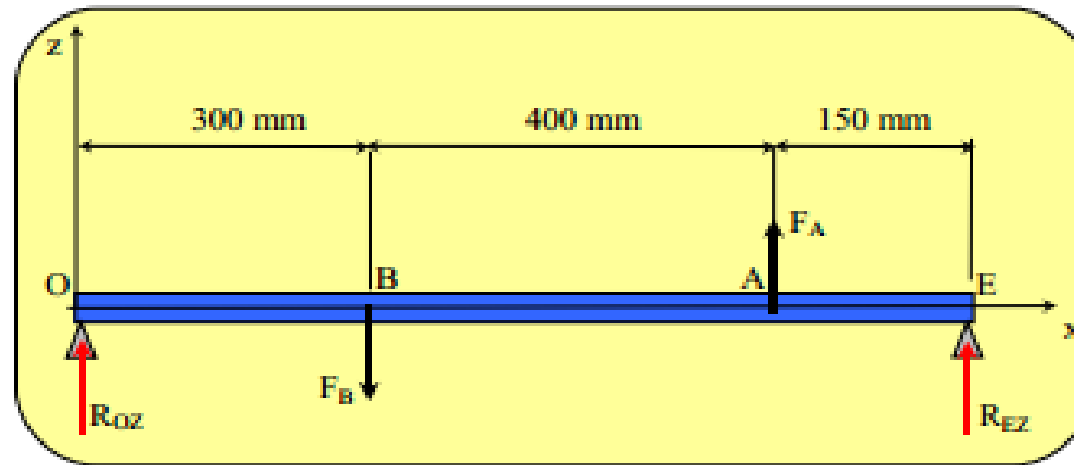
PLANO ZX



APLICAÇÃO EXEMPLO

Exemplo 1.3 (continuação)

DETERMINAÇÃO DAS SOLICITAÇÕES INTERNAS



CÁLCULO DAS REAÇÕES

$$\sum M_O = 0 \downarrow^+ \rightarrow F_B \cdot (300) - F_A \cdot (700) - R_{EZ} \cdot (850) = 0$$

$$R_{EZ} \approx -138 \text{ N}$$

$$\sum F_Z = 0 \uparrow^+ \rightarrow R_{OZ} - F_B + F_A + R_{EZ} = 0$$

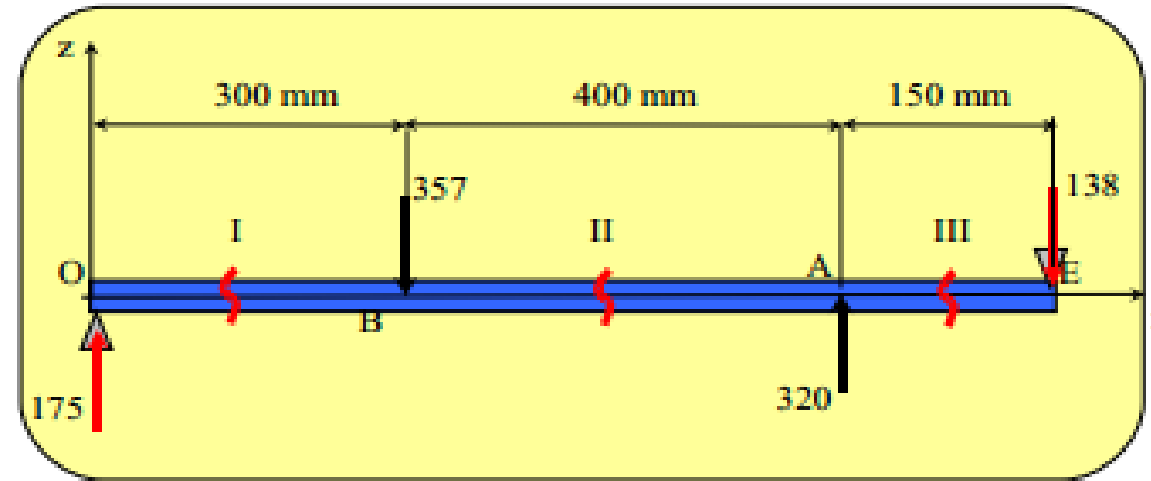
$$R_{OZ} \approx 175 \text{ N}$$

APLICAÇÃO EXEMPLO

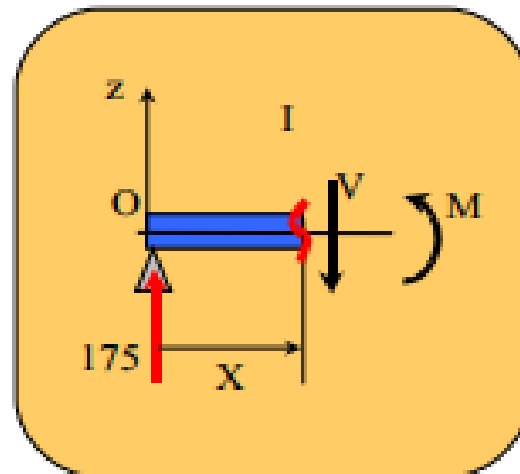


MÉTODO DAS SEÇÕES

Exemplo 1.3 (continuação)



SEÇÃO I



$$\sum F = 0 \uparrow + \rightarrow 175 - V = 0 \rightarrow V = 175 \text{ N}$$

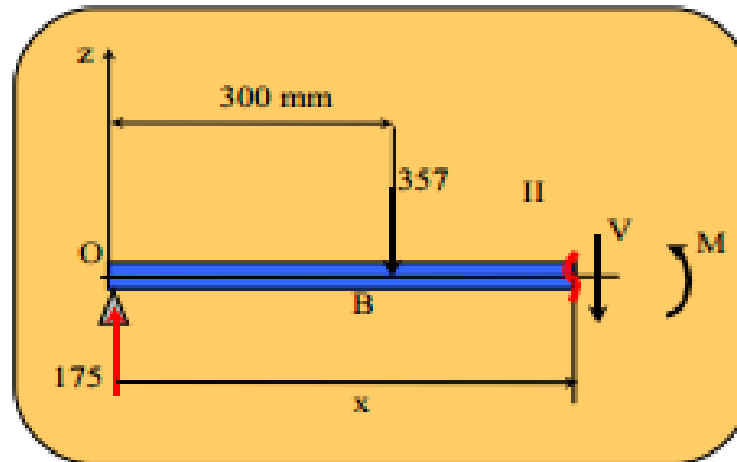
$$\sum M = 0 \uparrow + \rightarrow M - 175x = 0 \rightarrow M = 175x$$

APLICAÇÃO EXEMPLO

Exemplo 1.3 (continuação)

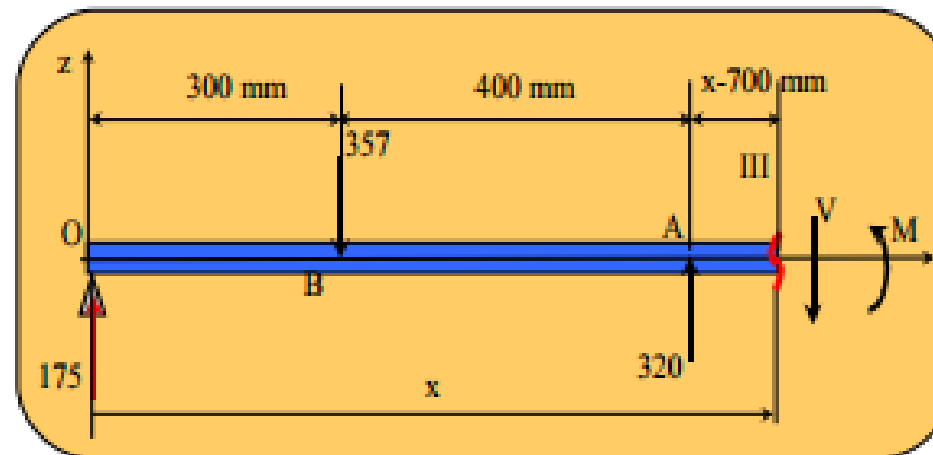
MÉTODO DAS SEÇÕES

SEÇÃO II



$$\begin{aligned}\sum F &= 0 \uparrow + \\ 175 - 357 - V &= 0 \\ V &= -182 \text{ N} \\ \sum M &= 0 \uparrow + \\ M + 357 \cdot (x - 300) - 175 \cdot x &= 0 \\ M &= -182 \cdot x + 107100\end{aligned}$$

SEÇÃO III

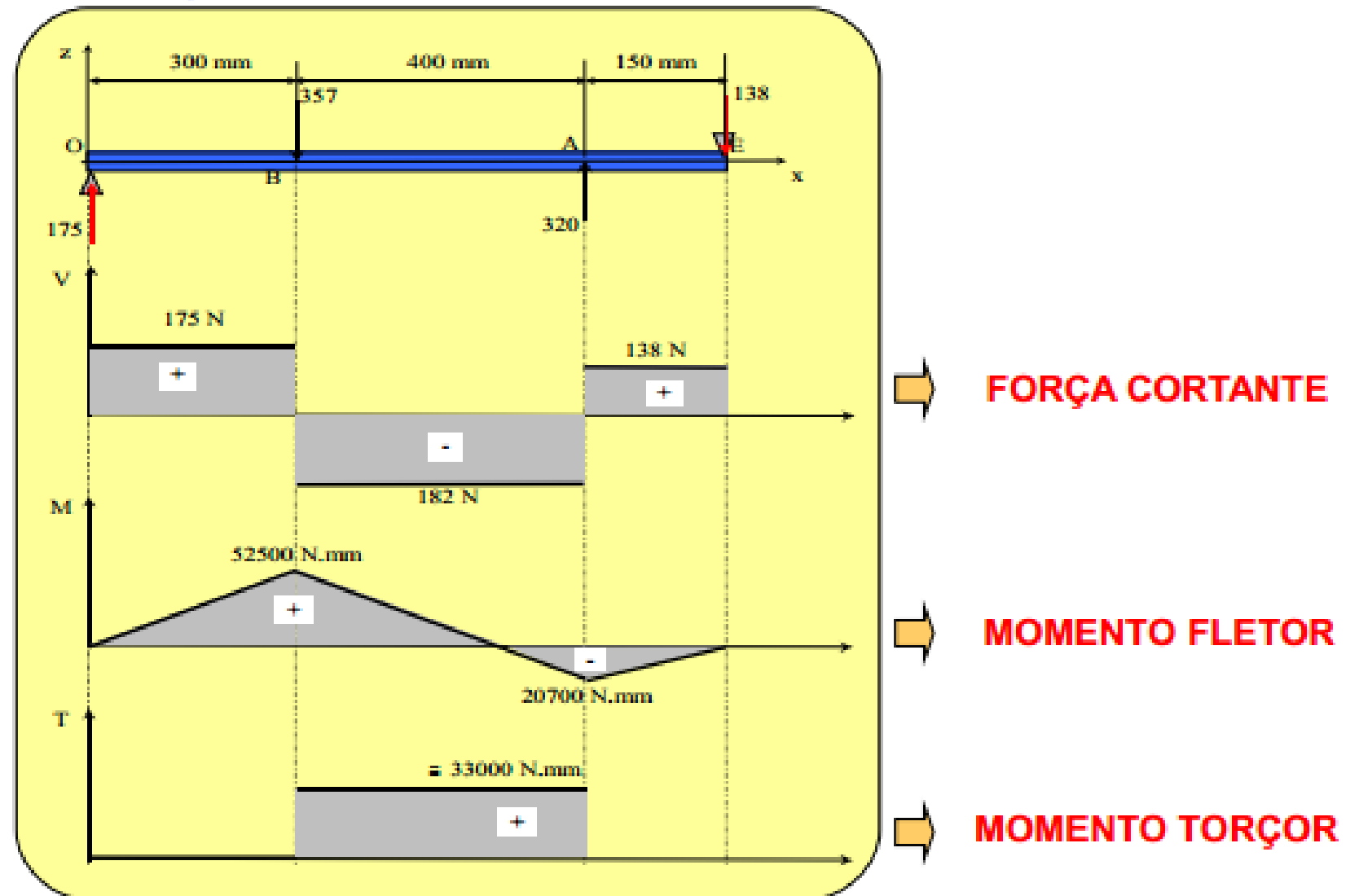


$$\begin{aligned}\sum F &= 0 \uparrow + \\ 175 - 357 + 320 - V &= 0 \\ V &= 138 \text{ N} \\ \sum M &= 0 \uparrow + \\ M - 320 \cdot (x - 700) + 357 \cdot (x - 300) - 175 \cdot x &= 0 \\ M &= 138 \cdot x - 117000\end{aligned}$$

APLICAÇÃO EXEMPLO



Exemplo 1.3 (continuação) SOLICITAÇÕES INTERNAS - DIAGRAMAS

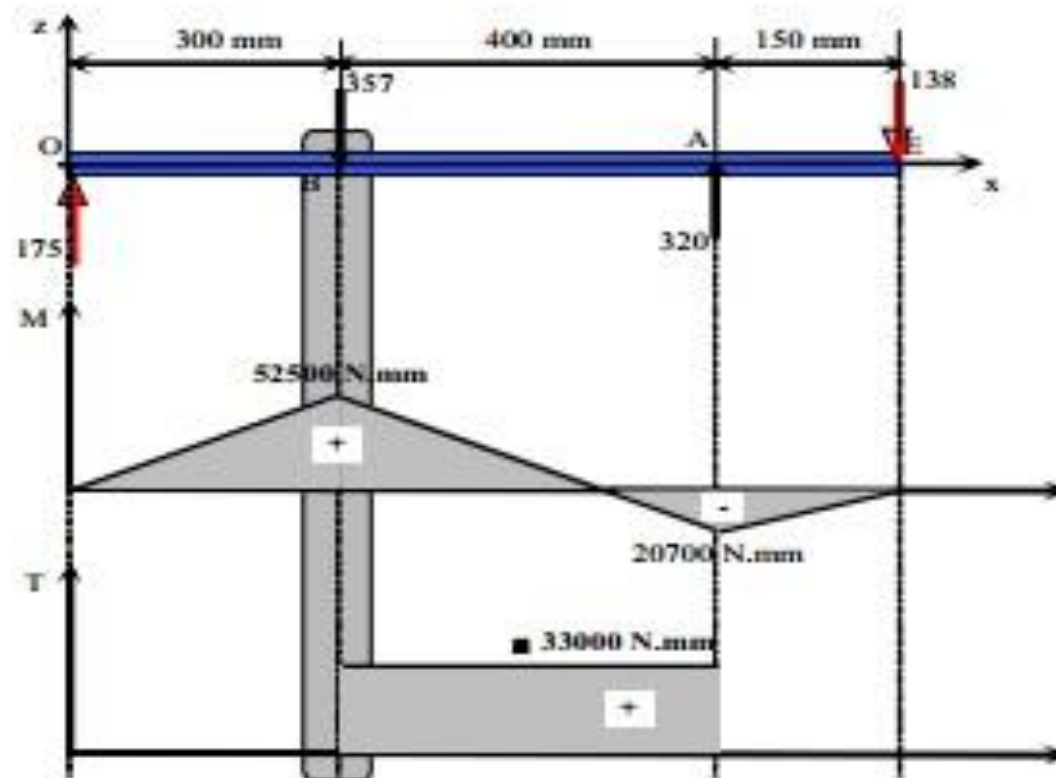


APLICAÇÃO EXEMPLO



Exemplo 1.3 (continuação)

DIMENSIONAMENTO DO EIXO



REGIÃO MAIS SOLICITADA

PONTO B

$$M = 52,5 \text{ N.m}$$

$$T = 33,0 \text{ N.m}$$

DADOS DO MATERIAL (TABELA A.17 – Shigley)

UNS G 10180

$$\sigma_{esc} = 372 \text{ MPa}$$

APLICAÇÃO EXEMPLO



Exemplo 1.3 (continuação)

DIMENSIONAMENTO DO EIXO

Pela teoria da tensão máxima de cisalhamento (Tresca)

$$d = \left[\frac{32}{\pi} \cdot \frac{N}{S_y} \sqrt{M^2 + T^2} \right]^{\frac{1}{3}} = \left[\frac{32}{\pi} \cdot \frac{1,9}{372.000.000} \sqrt{52,5^2 + 33,0^2} \right]^{\frac{1}{3}}$$

$$d \approx 14,78\text{mm}$$

Pela teoria da tensão da energia de distorção (von Mises-Hencky)

$$d = \left[\frac{32}{\pi} \cdot \frac{N}{S_y} \sqrt{M^2 + \frac{3}{4} \cdot T^2} \right]^{\frac{1}{3}} = \left[\frac{32}{\pi} \cdot \frac{1,9}{372.000.000} \sqrt{52,5^2 + \frac{3}{4} \cdot 33,0^2} \right]^{\frac{1}{3}}$$

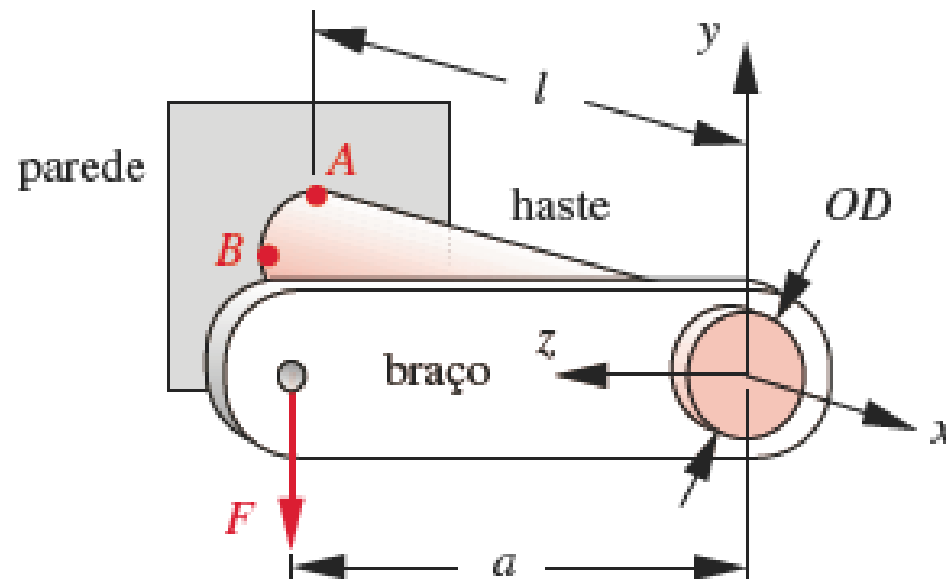
$$d \approx 14,59\text{mm}$$

APLICAÇÃO EXEMPLO



Exemplo 1.4 – Determine os coeficientes de segurança para o suporte do tirante mostrado na Figura 5-9, baseado tanto na teoria da energia de distorção como na teoria da máxima tensão de cisalhamento, e compare-os. O material é alumínio 2024-T4 com tensão de escoamento de 47000 psi. O comprimento da haste é $l = 6$ in e do braço $a = 8$ in. O diâmetro externo da haste é $d = 1,5$ in. A força é $F = 1000$ lb.

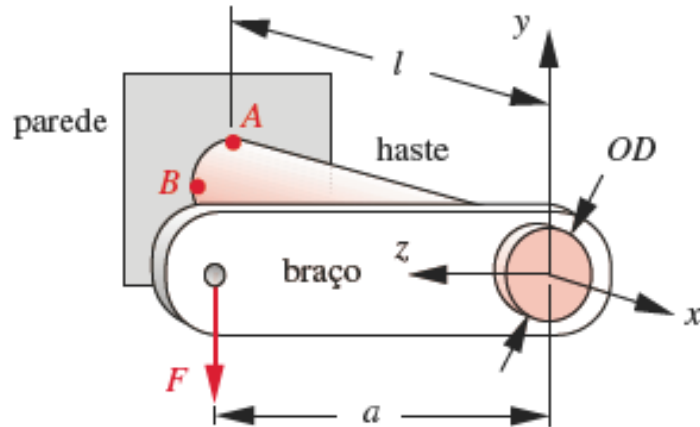
Hipóteses - O carregamento é estático e o conjunto está a temperatura ambiente. Considere o cisalhamento devido à força cortante, assim como outras tensões.



APLICAÇÃO EXEMPLO



Exemplo 1.4



$$\sigma_x = \frac{Mc}{I} = \frac{(Fl)c}{I} = \frac{1000(6)(0,75)}{0,249} = 18108 \text{ psi}$$

$$\tau_{xz} = \frac{Tr}{J} = \frac{(Fa)r}{J} = \frac{1000(8)(0,75)}{0,497} = 12072 \text{ psi}$$

$$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2} = \sqrt{\left(\frac{18108 - 0}{2}\right)^2 + 12072^2} = 15090 \text{ psi}$$

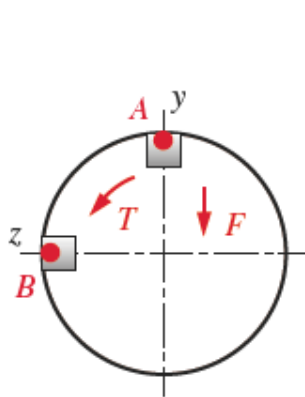
$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} + \tau_{max} = \frac{18108 + 0}{2} + 15090 = 24144 \text{ psi}$$

$$\sigma_2 = 0$$

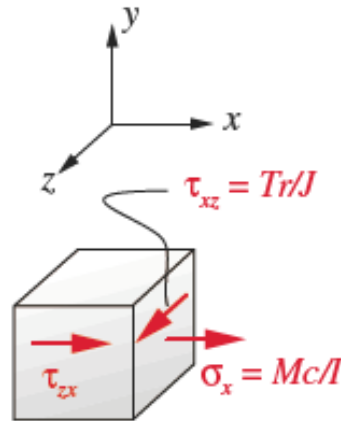
$$\sigma_3 = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} - \tau_{max} = \frac{18108 + 0}{2} - 15090 = -6036 \text{ psi}$$

$$\sigma' = \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_3 + \sigma_3^2}$$

$$\sigma' = \sqrt{24144^2 - 24144(-6036) + (-6036)^2} = 27661 \text{ psi}$$



(a) Dois pontos de interesse para cálculos de tensões

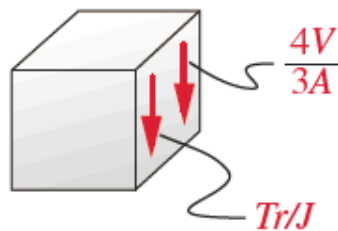
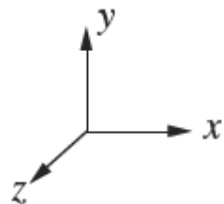
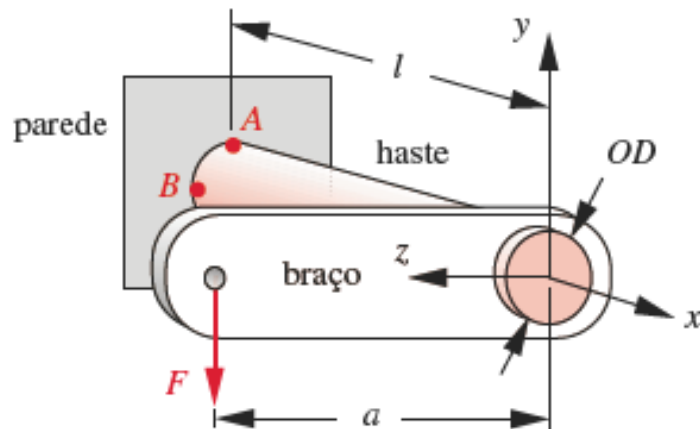


(b) Elemento inifinitesimal de tensão no ponto A

APLICAÇÃO EXEMPLO



Exemplo 1.4



(c) Elemento infinitesimal de tensão no ponto B

$$N = \frac{S_y}{\sigma'} = \frac{47000}{27661} = 1,7$$

$$N = \frac{0,50 S_y}{\tau_{max}} = \frac{0,50(47000)}{15090} = 1,6$$

$$\tau_{flexão} = \frac{4V}{3A} = \frac{4(1000)}{3(1,767)} = 755 \text{ psi}$$

$$\tau_{max} = \tau_{torção} + \tau_{flexão} = 12072 + 755 = 12827 \text{ psi}$$

$$N = \frac{S_{ys}}{\tau_{max}} = \frac{0,577 S_y}{\tau_{max}} = \frac{0,577(47000)}{12827} = 2,1$$

$$N = \frac{S_{ys}}{\tau_{max}} = \frac{0,50 S_y}{\tau_{max}} = \frac{0,50(47000)}{12827} = 1,8$$

FLEXÃO E TORÇÃO – CRITÉRIOS DE FALHA



Existem várias teorias de falha. Entretanto, uma única teoria não deve ser aplicada a um material específico porque o material pode se comportar de forma dúctil ou frágil dependendo da

(1) temperatura, (2) carregamento ou

(3) eventuais reações químicas (mudam o material)

Materiais dúcteis

- Teoria da máxima tensão de cisalhamento (Tresca)
- Teoria da máxima energia de distorção (von Mises)

Materiais frágeis

- **Critério de falha de Mohr**
- Teoria da máxima tensão normal

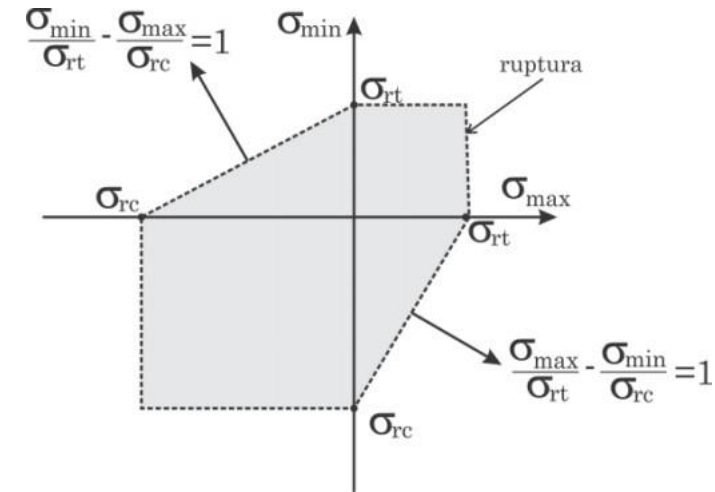
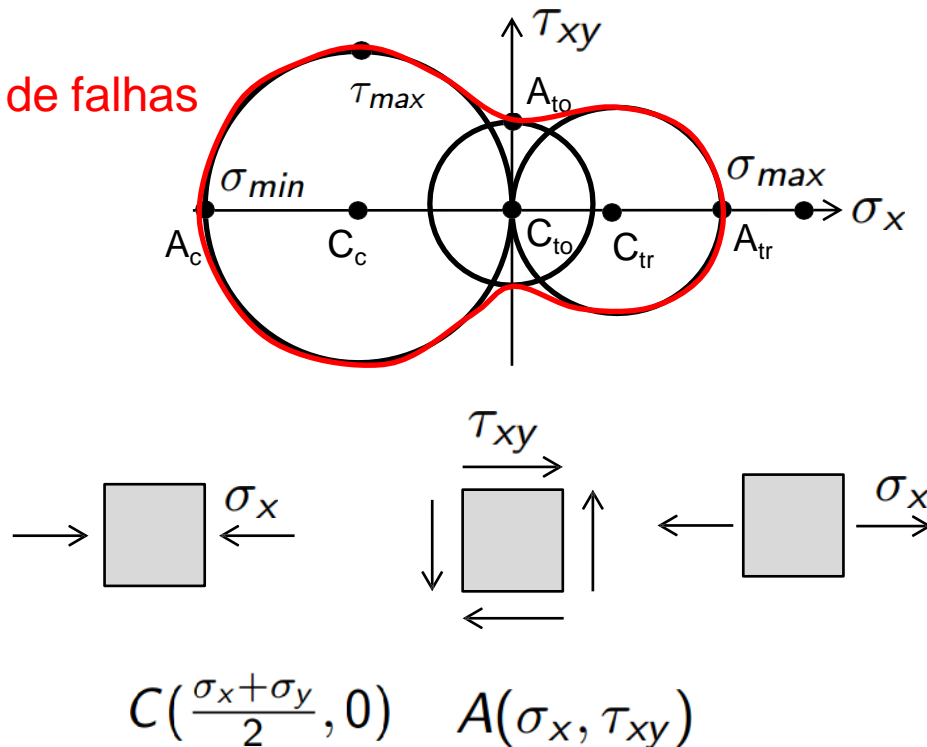
CRITÉRIO DE FALHA DE MOHR



Aplicado a **materiais frágeis** onde as propriedades de tração e compressão são diferentes:

- ensaio de tração uniaxial,
- ensaio de compressão uniaxial;
- ensaio de torção.

Envelope de falhas



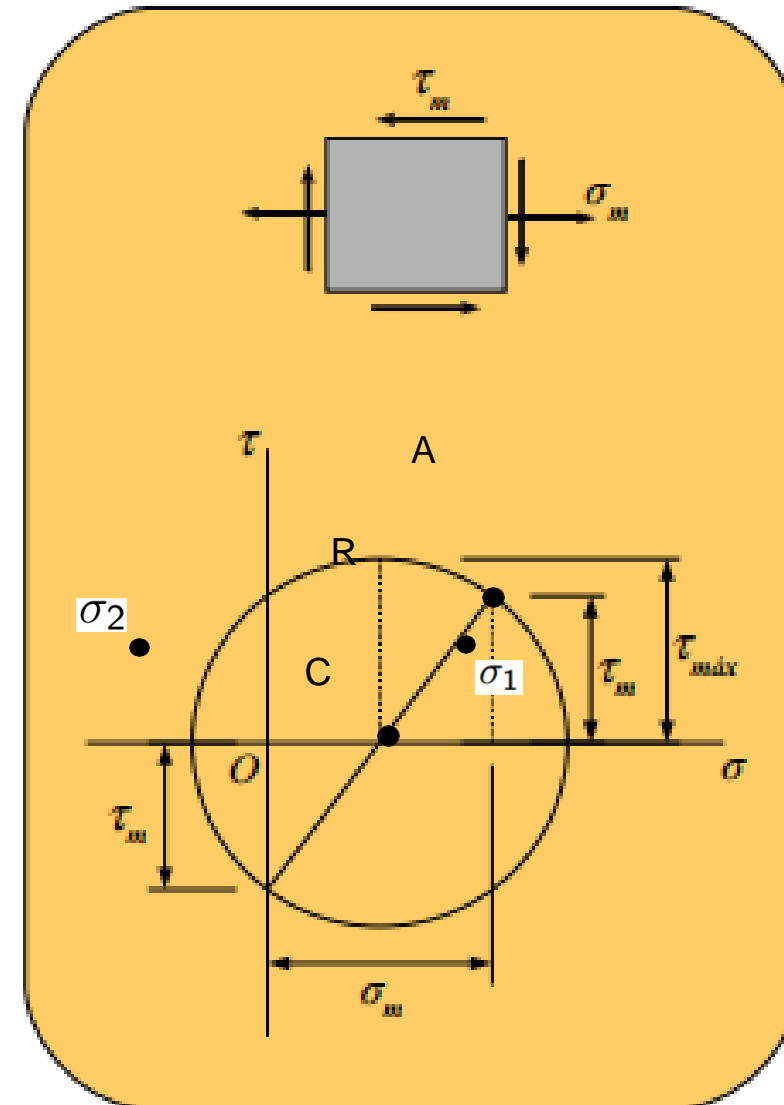
CRITÉRIO DE FALHA DE MOHR



Pelo **circulo de Mohr** pode-se encontrar o valor de tensão de cisalhamento máxima:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_m}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_m}{2}\right)^2 + (\tau_m)^2}$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_m}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_m}{2}\right)^2 + (\tau_m)^2}$$

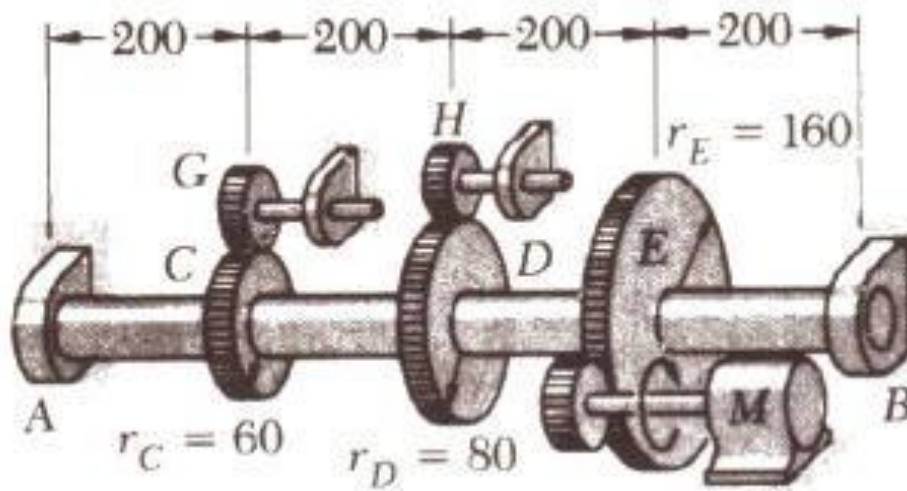


CRITÉRIO DE FALHA DE MOHR



Exemplo 1.5

Um eixo maciço AB gira a 480rpm, transmitindo 30kW do motor M às máquinas conectadas por engrenagens em G e H . Em G são transmitidos 20kW e em H 10kW. Determinar o menor diâmetro permitido para AB , sendo $\tau_{adm} = 50\text{MPa}$.



Dados: Material dúctil

Considere:

- 1) as linhas de ação das forças tangenciais nas engrenagens entre (C e D) e E perpendiculares;
- 2) Dimensões em [mm]
- 3) Mancais sem atrito em A e B

Considere o critério da máxima tensão cisalhante

CUIDADO: nesta resolução a redução da resistência pela fadiga (flexão alternada) não está sendo considerada.

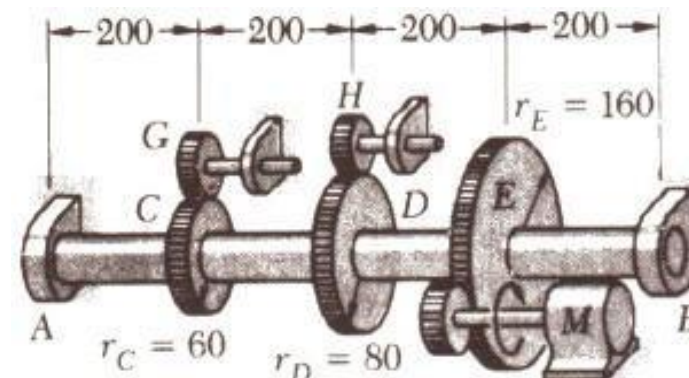
CRITÉRIO DE FALHA DE MOHR

Exemplo 1.5 (continuação)

Com a rotação, pode-se determinar o torque atuante em **G**:

$$f = 480 \text{ rpm} = 8 \text{ Hz}$$

$$T_E = \frac{P}{2 \cdot \pi \cdot f} = \frac{30 \text{ kW}}{2 \cdot \pi \cdot (8 \text{ Hz})} = 597 \text{ N.m}$$



Determina-se, então a força tangencial correspondente que atua na engrenagem:

$$F_E = \frac{T_E}{r_E} = \frac{597 \text{ N.m}}{0,16 \text{ m}} = 3,73 \text{ kN}$$

CRITÉRIO DE FALHA DE MOHR

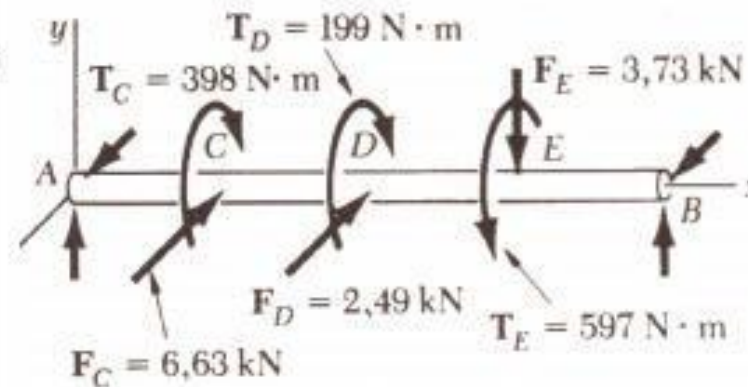
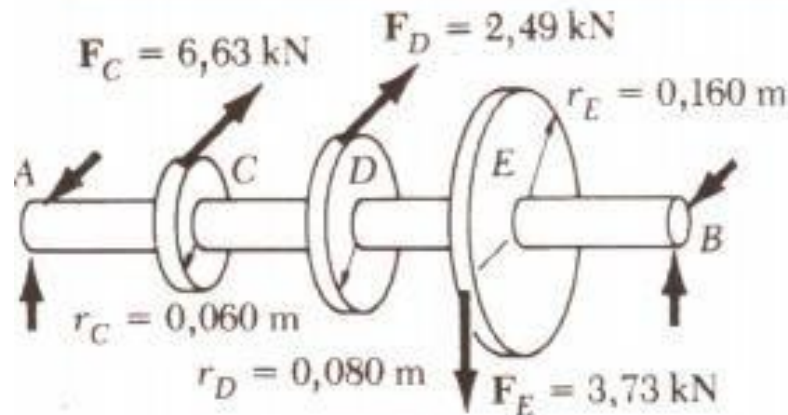


Exemplo 1.5 (continuação)

Analogamente:

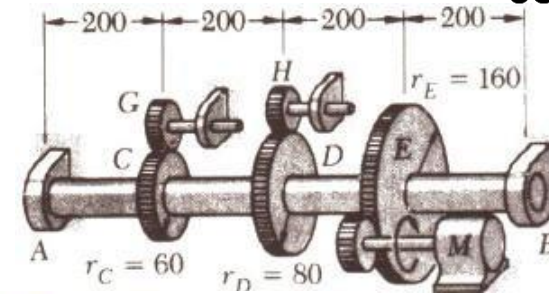
$$T_C = \frac{20 \text{ kW}}{2 \cdot \pi \cdot (8 \text{ Hz})} = 398 \text{ N} \cdot \text{m} \quad F_C = 6,63 \text{ kN}$$

$$T_D = \frac{10 \text{ kW}}{2 \cdot \pi \cdot (8 \text{ Hz})} = 199 \text{ N} \cdot \text{m} \quad F_D = 2,49 \text{ kN}$$

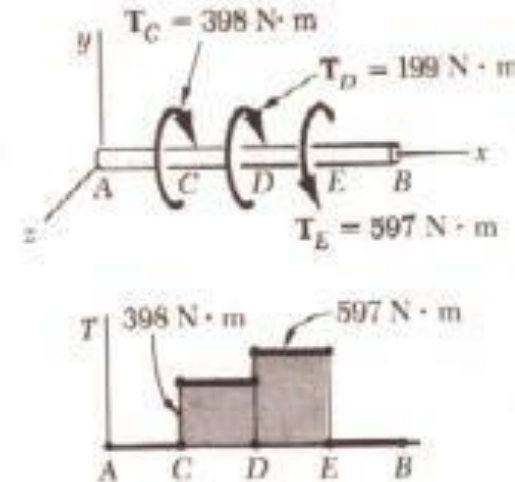
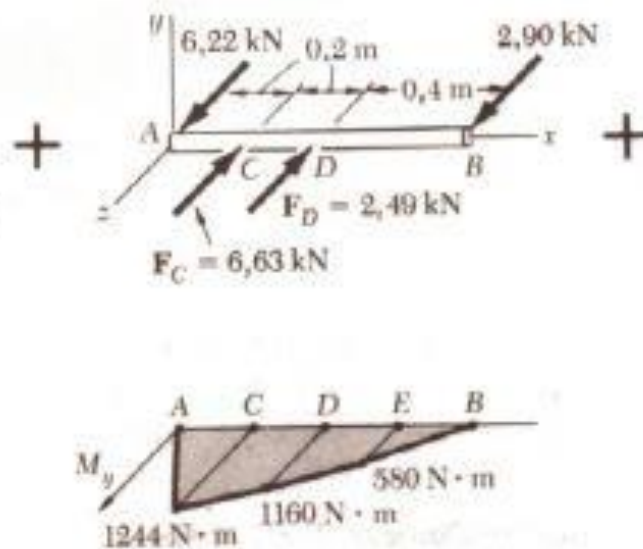
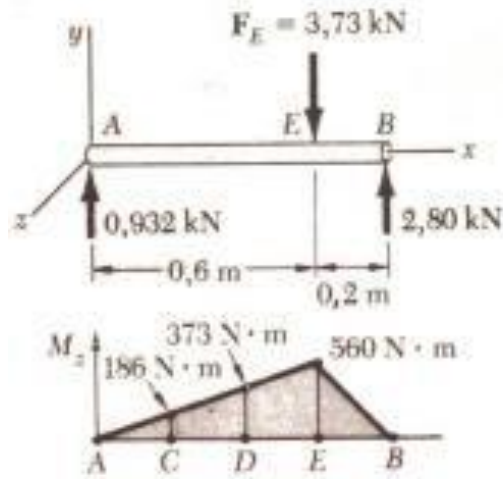


CRITÉRIO DE FALHA DE MOHR

Exemplo 1.5 (continuação)



Pode-se, então calcular as reações nos mancais **A** e **B**,
resultando nos seguintes diagramas de momentos fletores e
de momentos torçores.



CRITÉRIO DE FALHA DE MOHR



Exemplo 1.5

(continuação)

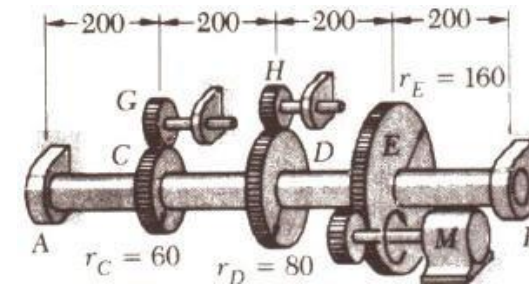
Calculando, em todas as seções potencialmente críticas, o valor:

$$\sqrt{M_z^2 + M_y^2 + T^2}$$

$$\sqrt{186^2 + 1244^2 + 398^2} = 1319 \text{ N.m} \quad \text{Ponto } C$$

$$\sqrt{373^2 + 1160^2 + 597^2} = 1357 \text{ N.m} \quad \text{Ponto } D$$

$$\sqrt{560^2 + 580^2 + 597^2} = 1003 \text{ N.m} \quad \text{Ponto } E$$



Conclui-se que o valor máximo ocorre à direita do ponto *D*.

CRITÉRIO DE FALHA DE MOHR

Exemplo 1.5 (continuação)

Assim, o diâmetro mínimo do eixo para $\tau_{adm} = 50\text{MPa}$:

$$d = \left[\frac{16}{\pi} \cdot \frac{1}{\tau_{adm}} \cdot \left(\sqrt{M_y^2 + M_z^2} + T \right)_{\text{máx}} \right]^{\frac{1}{3}}$$

$$d = \left[\frac{16}{\pi} \cdot \frac{1357\text{N.m}}{50.000.000\text{Pa}} \right]^{\frac{1}{3}} \approx 51,7\text{mm}$$