Ministério da Educação
UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
Campus Cornélio Procópio

AULA 2

EQUILIBRIO E MOMENTO DE UMA FORÇA

Professor: Dr. Paulo Sergio Olivio Filho

CONTEÚDO DA AULA

- Equilíbrio de uma partícula
- Equações de equilíbrio no plano
- Diagrama de corpo livre
- Sistemas de forças coplanares
- Momento de uma força
- Momento de um binário

EQUILÍBRIO DE UMA PARTÍCULA

CORNÉLIO PROCÓPIO

Uma partícula está em equilíbrio quando:

- Encontra-se em repouso, se inicialmente em repouso;
- Com velocidade constante, se inicialmente em movimento.

- Porém, o termo equilíbrio estático é mais usado para descrever um objeto em repouso.

Primeira Lei do movimento de Newton para a Segunda lei:

$$\Sigma F = 0 \qquad \Sigma F = ma \rightarrow ma=0 \rightarrow a=0$$

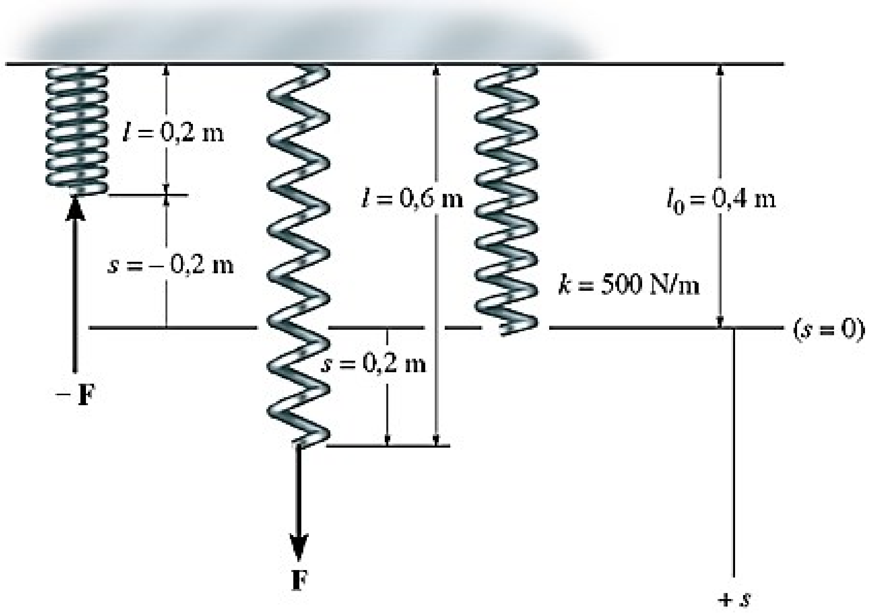
DIAGRAMA DE CORPO LIVRE

- Considerar todas as forças conhecidas e desconhecidas;
- Para tanto, isola-se a partícula do seu entorno;
- Esboça-se a partícula com todas as forças que atuam sobre ela (DCL).

Duas conexões frequentes nos problemas de equilíbrio de uma partícula, são:

1- Molas linear elástica;

2- Cabos e polias.



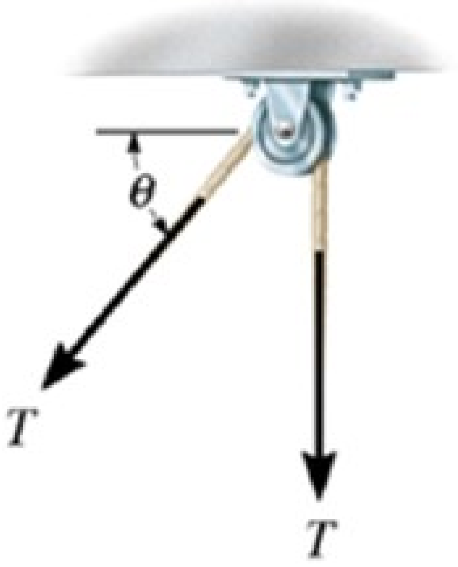
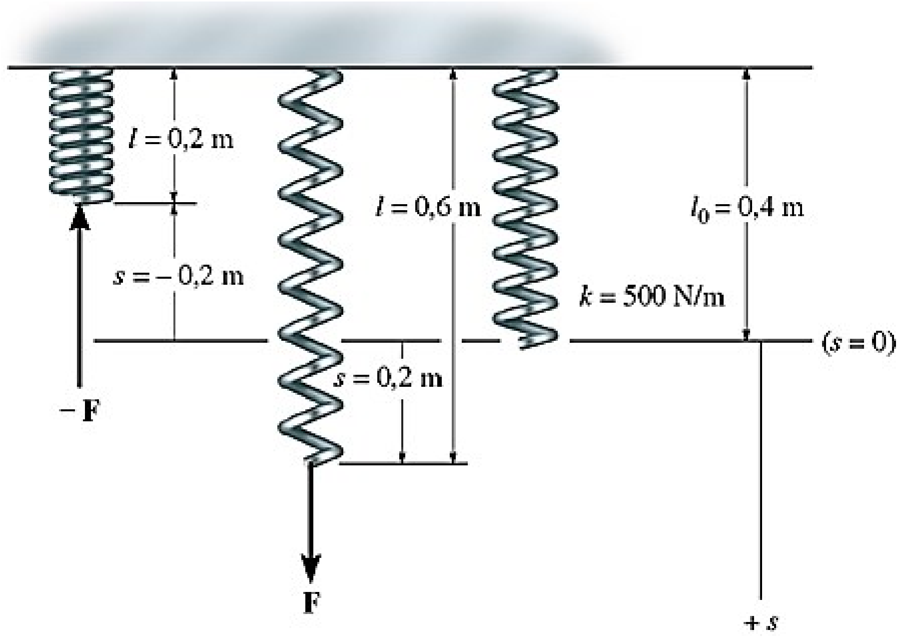


DIAGRAMA DE CORPO LIVRE

UTFPR
CORNÉLIO PROCÓPIO

1) Mola linear elástica



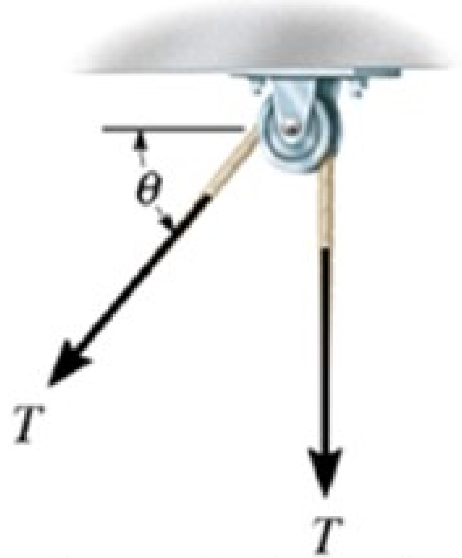
Constante de mola ou rigidez *k;*

Distância medida a partir da posição sem carga, x.

F = k*x

2) Cabos e Polias. Características dos cabos:

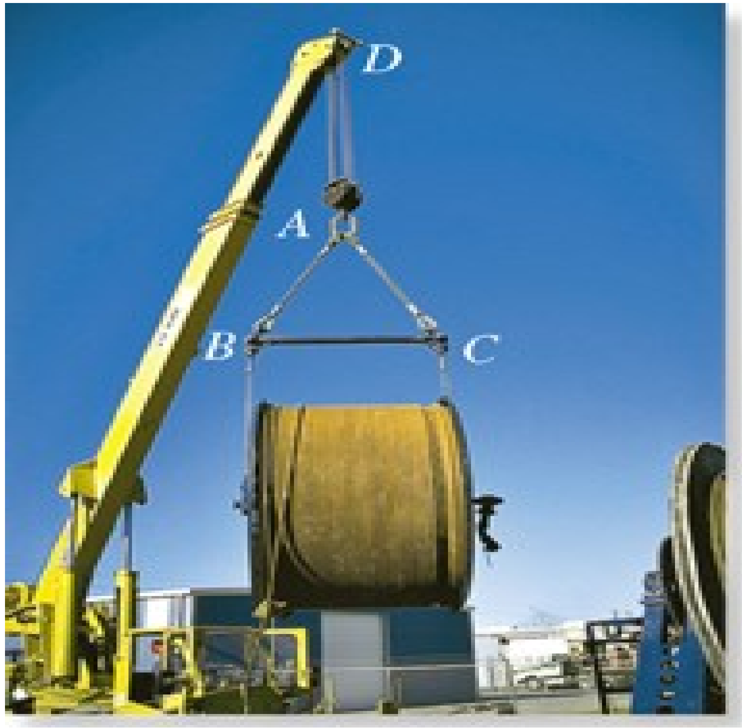
- Têm peso desprezível e indeformável;
- Suporta apenas uma tensão ou força de tração que atua na direção do cabo;
- Polia sem atrito.

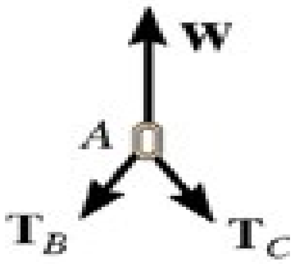


O cabo está sob tensão

DIAGRAMA DE CORPO LIVRE

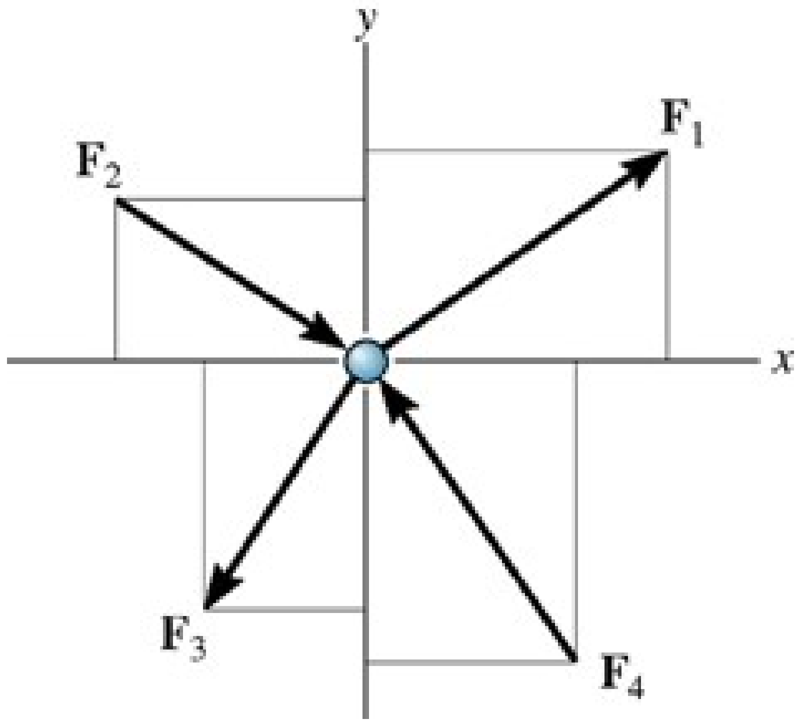
1) Desenhar o contorno do ponto material;
2) Mostrar todas as forças que atuam no ponto material;
3) Identificar cada força;
4) Não exceder na importância do traçado do DCL.





SISTEMAS DE FORÇAS COPLANARES

1) Estabeleça o sistema de eixos de maneira adequada;
2) Somatório de forças igual a zero; $\Sigma\mathbf{F} = 0 \quad \Sigma F_x\mathbf{i} + \Sigma F_y\mathbf{j} = 0$
3) Identifique todas as forças, intensidade, direção e sentido;
4) Assuma o sentido das forças desconhecidas;
5) Aplique as equações de equilíbrio; $\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0$



SISTEMAS DE FORÇAS COPLANARES

6) As componentes serão positivas se forem direcionadas ao longo do eixo positivo;

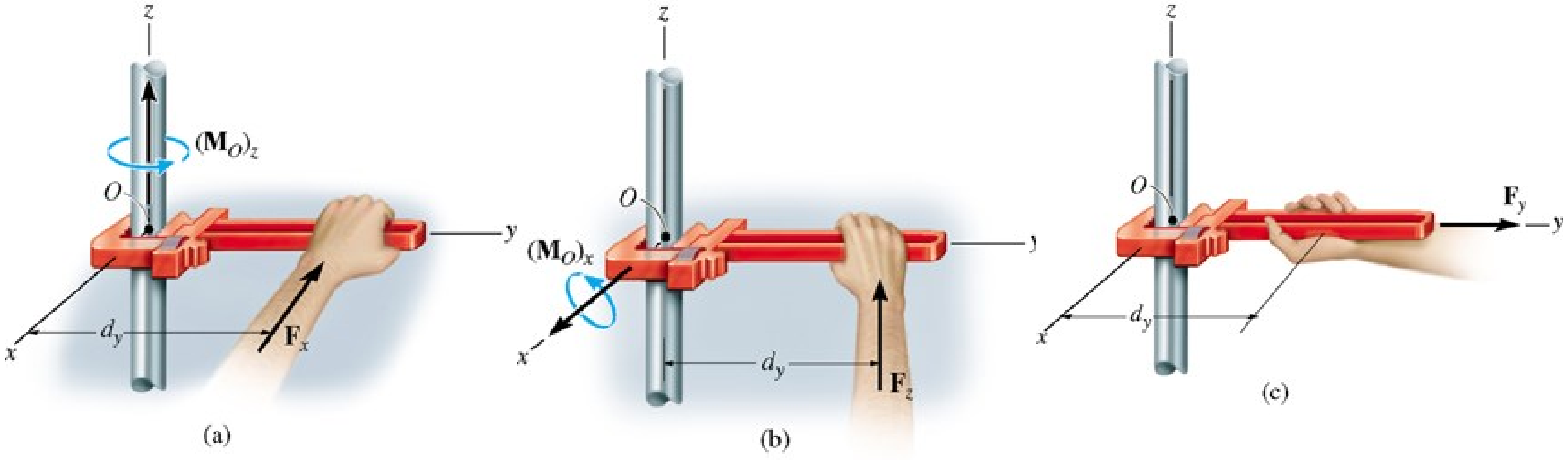
7) As componentes serão negativas se forem direcionadas ao longo do eixo negativo;

8) Se existirem mais de duas incógnitas e o problema envolver mola, deve-se aplicar F = k*x;

9) Como a intensidade de uma força é sempre uma quantidade positiva, então, se a solução produzir resultado negativo, isso indica que o sentido da força é oposto ao mostrado no diagrama.

MOMENTO DE UMA FORÇA

- Uma força pode apresentar uma tendência de rotação de um corpo com relação a um eixo.
- Considere a situação onde uma chave grifo é utilizada para girar um tubo.



Definição: Fornece uma medida da tendência dessa força de provocar rotação de um corpo em torno do ponto ou do eixo.

Giro em torno do eixo x

Não é possível girar o tubo dessa maneira. Tendência de rotação

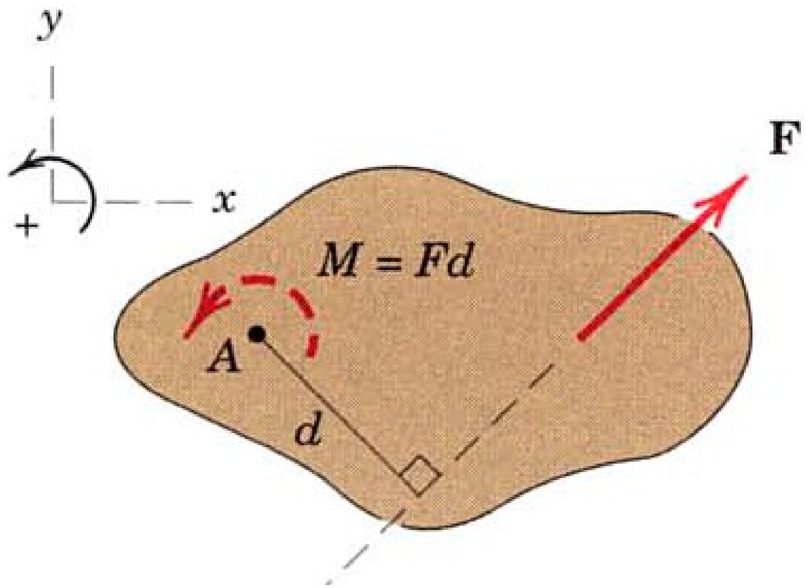
Ausência total de giro

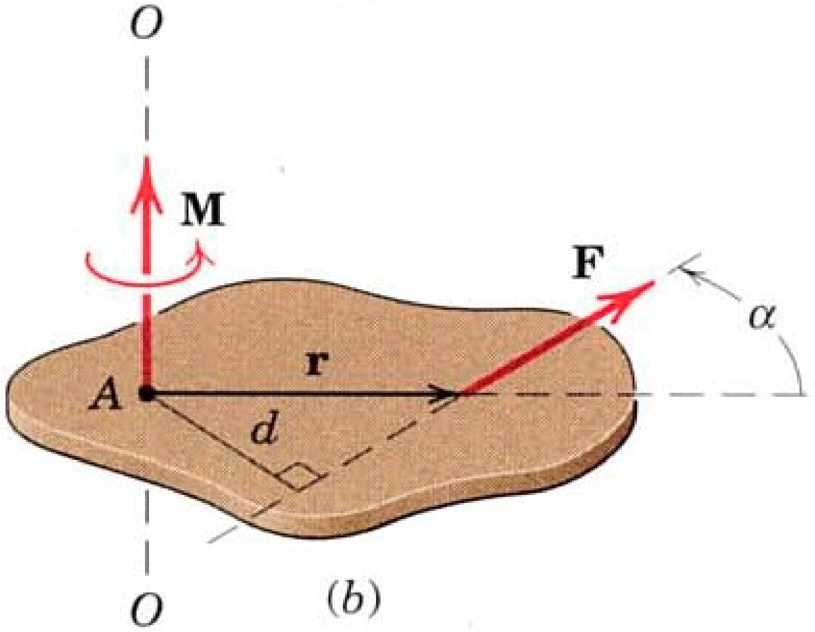
MOMENTO DE FORÇAS BIDIMENSIONAIS

UTFPR
CORNÉLIO PROCÓPIO

Momento em Torno de um Ponto

- Considere o corpo bidimensional submetido a uma força, **F**, que atua no plano do corpo.





M = **F** . d

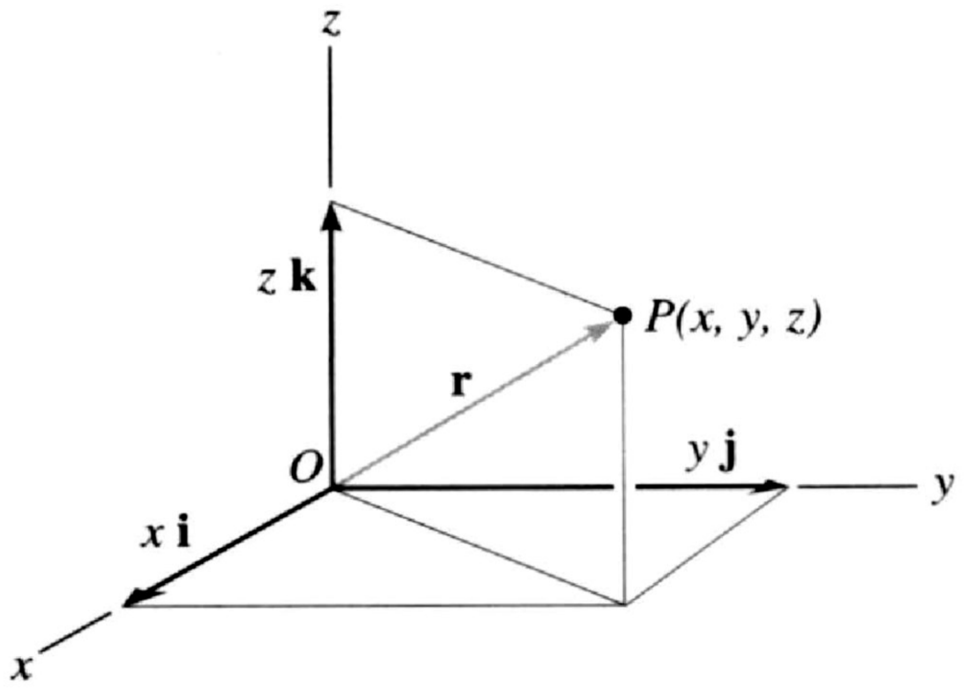
M = **r** x **F**

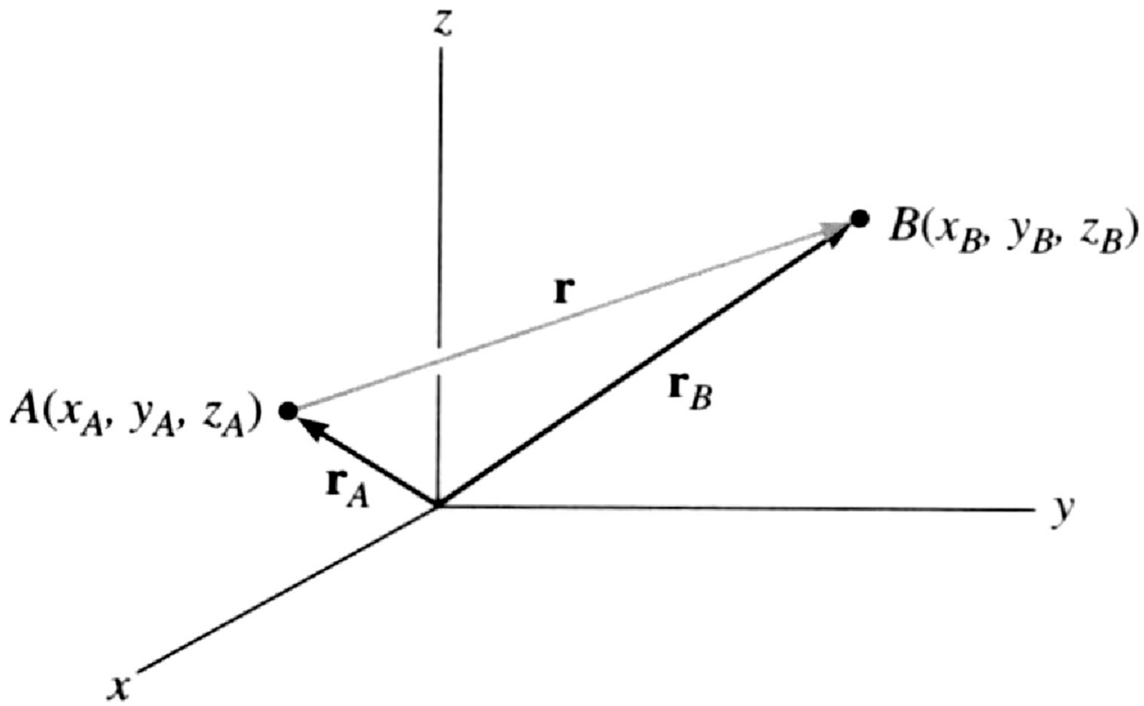
MOMENTO DE FORÇAS BIDIMENSIONAIS

UTFPR CORNÉLIO PROCÓPIO

Momento em Torno de um Ponto – Vetor Posição

- É um vetor fixo que posiciona um ponto no espaço em relação a outro.





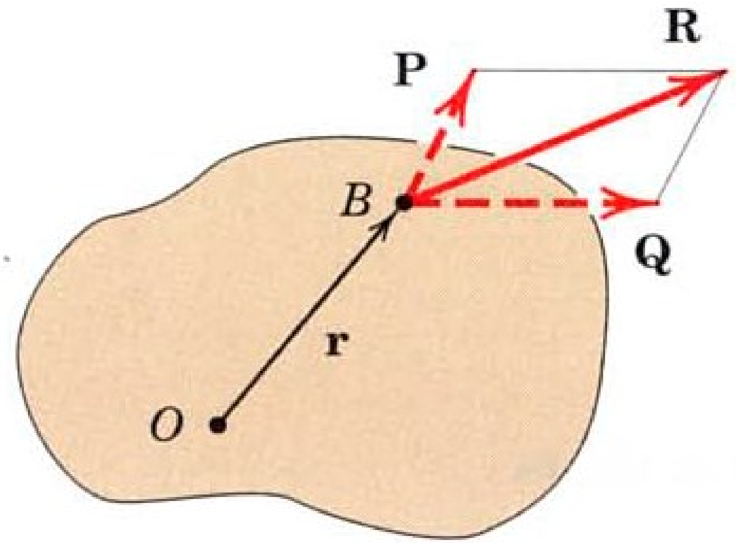
$\mathbf{r} = (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$

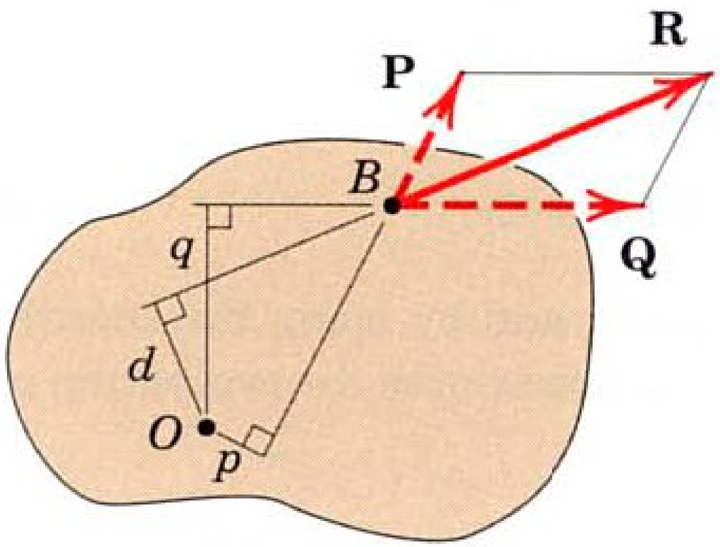
$\mathbf{r}_{AB} = (x_B - x_A)\mathbf{i} + (y_B - y_A)\mathbf{j} + (z_B - z_A)\mathbf{k})$

MOMENTO DE FORÇAS BIDIMENSIONAIS

Teorema de Varignon

- O momento de uma força em relação a qualquer ponto é igual a soma dos momentos dos componentes dessa força em relação ao mesmo ponto.





MOMENTO DE UMA FORÇA - FORMULAÇÃO

UTFPR CORNÉLIO PROCÓPIO

- A intensidade do momento é diretamente proporcional a intensidade da força e do braço;

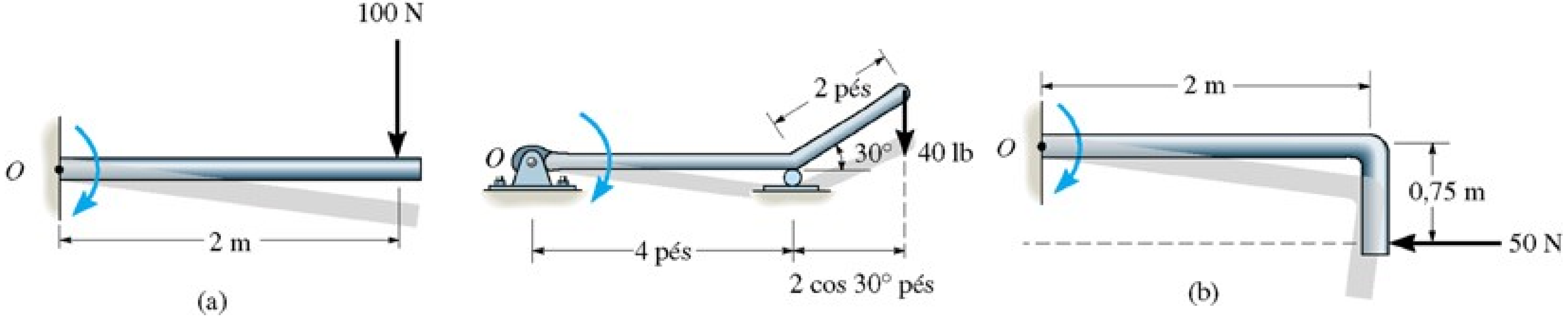
- O momento terá maior intensidade quando a força estiver a 90º do braço;

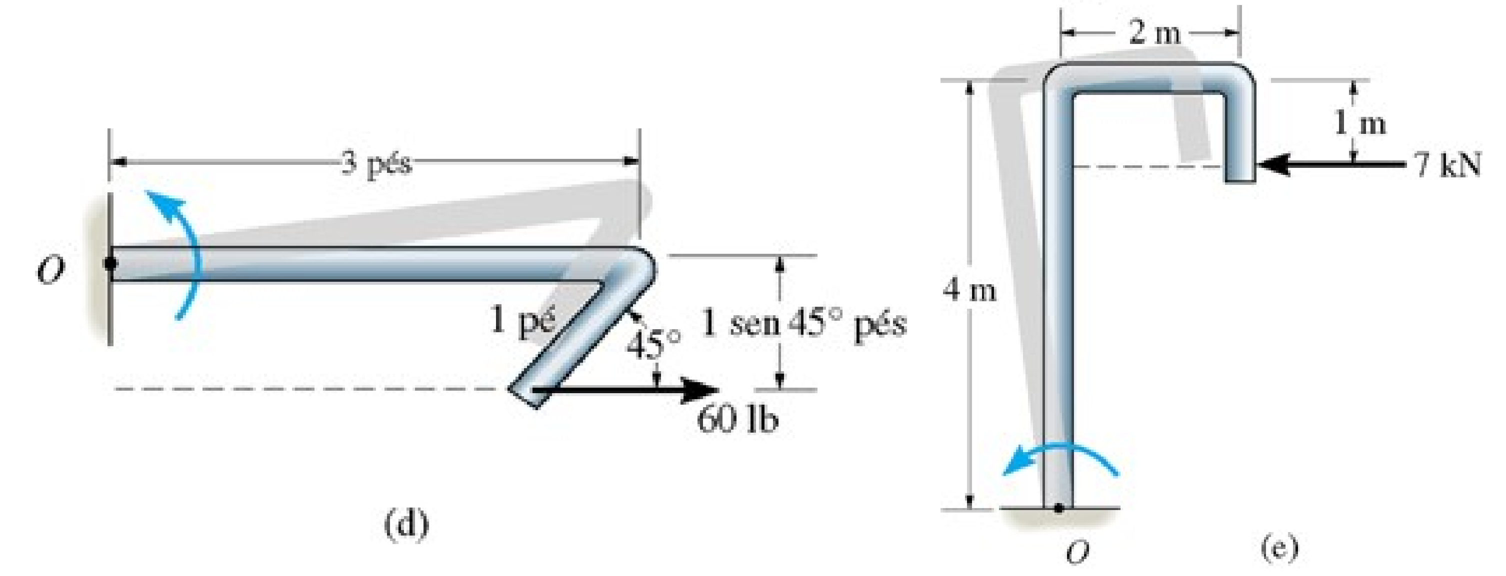
- A direção do momento é perpendicular ao plano que contém a força e o braço;

- Utiliza-se a regra da mão direita.

$$M_0 = Fd \qquad \sum (M_R)_0 = \sum Fd$$

EXEMPLO 3





$$M_O = (100\ \text{N})(2\ \text{m}) = 200\ \text{N}\cdot\text{m} \circlearrowright$$

$$M_O = (50\ \text{N})(0{,}75\ \text{m}) = 37{,}5\ \text{N}\cdot\text{m} \circlearrowright$$

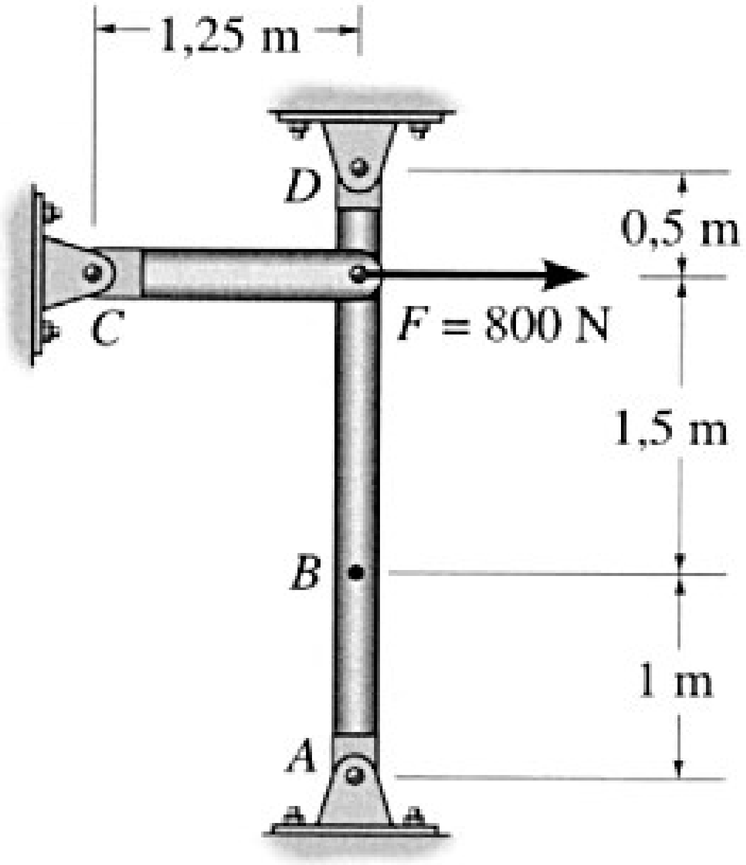
$$M_O = (40\ \text{lb})(4\ \text{pés} + 2\cos 30^\circ\ \text{pés}) = 229\ \text{lb}\cdot\text{pés} \circlearrowright$$

$$M_O = (60\ \text{lb})(1\ \text{sen}\ 45^\circ\ \text{pés}) = 42{,}4\ \text{lb}\cdot\text{pés} \circlearrowleft$$

$$M_O = (7\ \text{kN})(4\ \text{m} - 1\ \text{m}) = 21\ \text{kN}\cdot\text{m} \circlearrowleft$$

EXEMPLO 4

Determine os momentos da força de 800 N que atua sobre a estrutura na Figura abaixo em relação aos pontos A, B, C e D



$$M_A = 800\ \text{N}(2{,}5\ \text{m}) = 2.000\ \text{N}\cdot\text{m} \circlearrowright$$

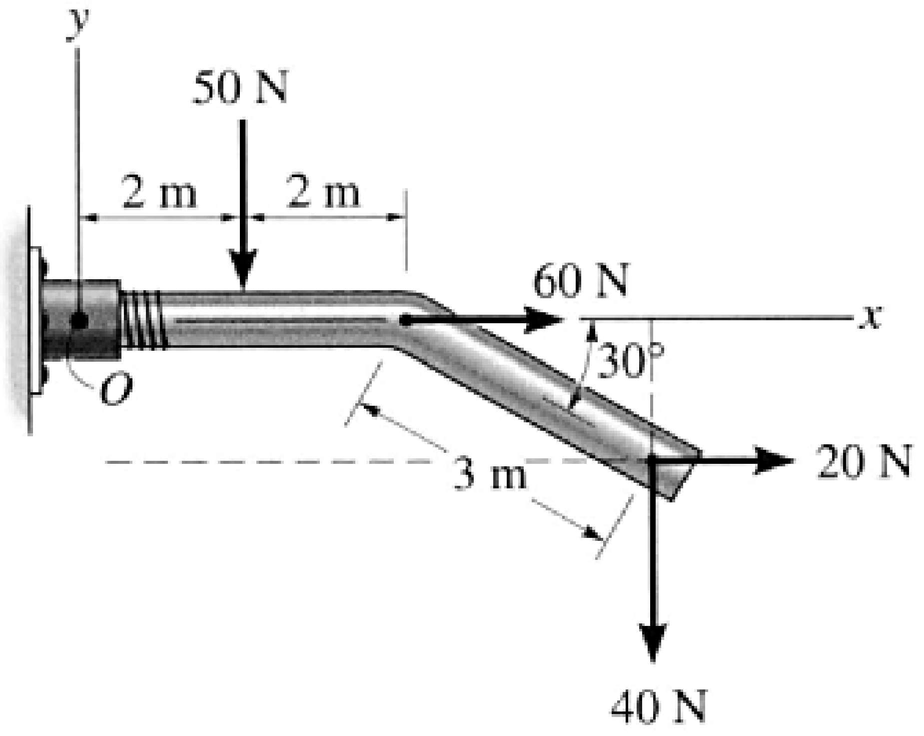
$$M_B = 800\ \text{N}(1{,}5\ \text{m}) = 1.200\ \text{N}\cdot\text{m} \circlearrowright$$

$$M_C = 800\ \text{N}(0) = 0 \quad \text{(a linha de ação de } \mathbf{F} \text{ passando por } C\text{)}$$

$$M_D = 800\ \text{N}(0{,}5\ \text{m}) = 400\ \text{N}\cdot\text{m} \circlearrowleft$$

EXEMPLO 5

Determine os momentos resultante para quatro forças que atuam na haste mostrada na Figura abaixo em relação ao pontos O.



$$\circlearrowright + M_{R_O} = \Sigma Fd$$

$$M_{R_O} = -50\ \text{N}(2\text{m}) + 60\ \text{N}(0) + 20\ \text{N}(3 \operatorname{sen} 30°\ \text{m})$$

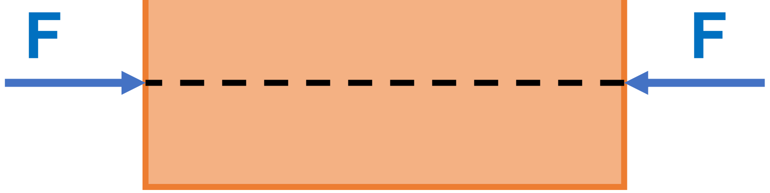
$$-40\ \text{N}(4\ \text{m} + 3 \cos 30°\ \text{m})$$

$$M_{R_O} = -334\ \text{N} \cdot \text{m} = 334\ \text{N} \cdot \text{m} \circlearrowright$$

MOMENTO DE FORÇAS BIDIMENSIONAIS

Binário

- Quando duas forças iguais e opostas são aplicadas a um corpo podemos ter duas situações:
- 1ª - Forças Colineares;   2ª - Forças não Colineares

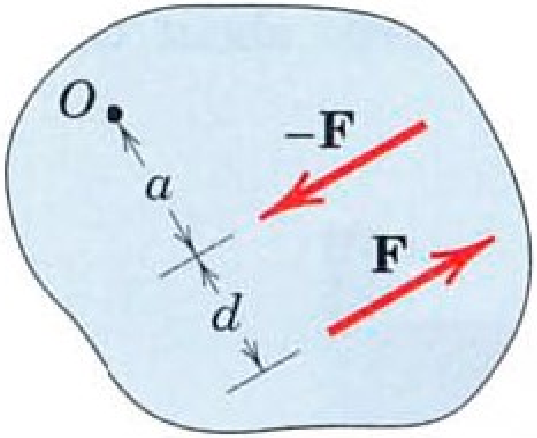


MOMENTO DE FORÇAS BIDIMENSIONAIS

UTFPR
CORNÉLIO PROCÓPIO

Binário

- Considere a ação de duas forças de magnitudes iguais e opostas **F** e **–F** atuando sobre um corpo:



Momento em torno de um eixo que passa pelo ponto O.

$$M_O = F.(a + d) - F.a$$

$$M_O = F.d$$

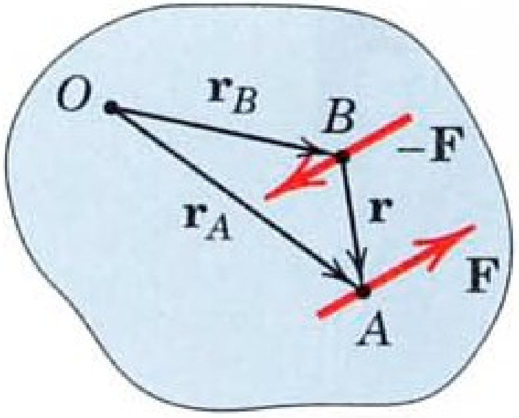
O momento de um binário é calculado pelo produto de uma das forças do binário e a distância entre elas.

MOMENTO DE FORÇAS BIDIMENSIONAIS

UTFPR
CORNÉLIO PROCÓPIO

Binário – Método Vetorial

- Considere a ação de duas forças de magnitudes iguais e opostas **F** e **–F** atuando sobre um corpo:



Momento em torno de um eixo que passa pelo ponto O.

$$\vec{M} = \overrightarrow{r_A}\, x\, \vec{F} + \overrightarrow{r_B}\, x\, (-\vec{F})$$

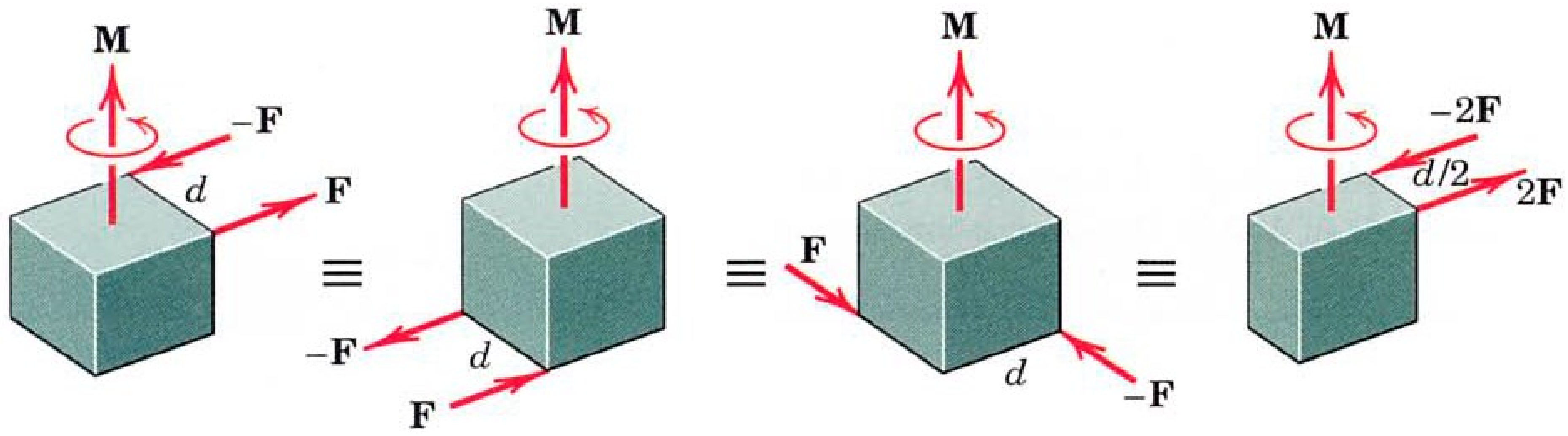
$$\vec{M} = \vec{r}\, x\, \vec{F}$$

O momento de um binário é um vetor livre e possui o mesmo valor para todos os centros de momento.

MOMENTO DE FORÇAS BIDIMENSIONAIS

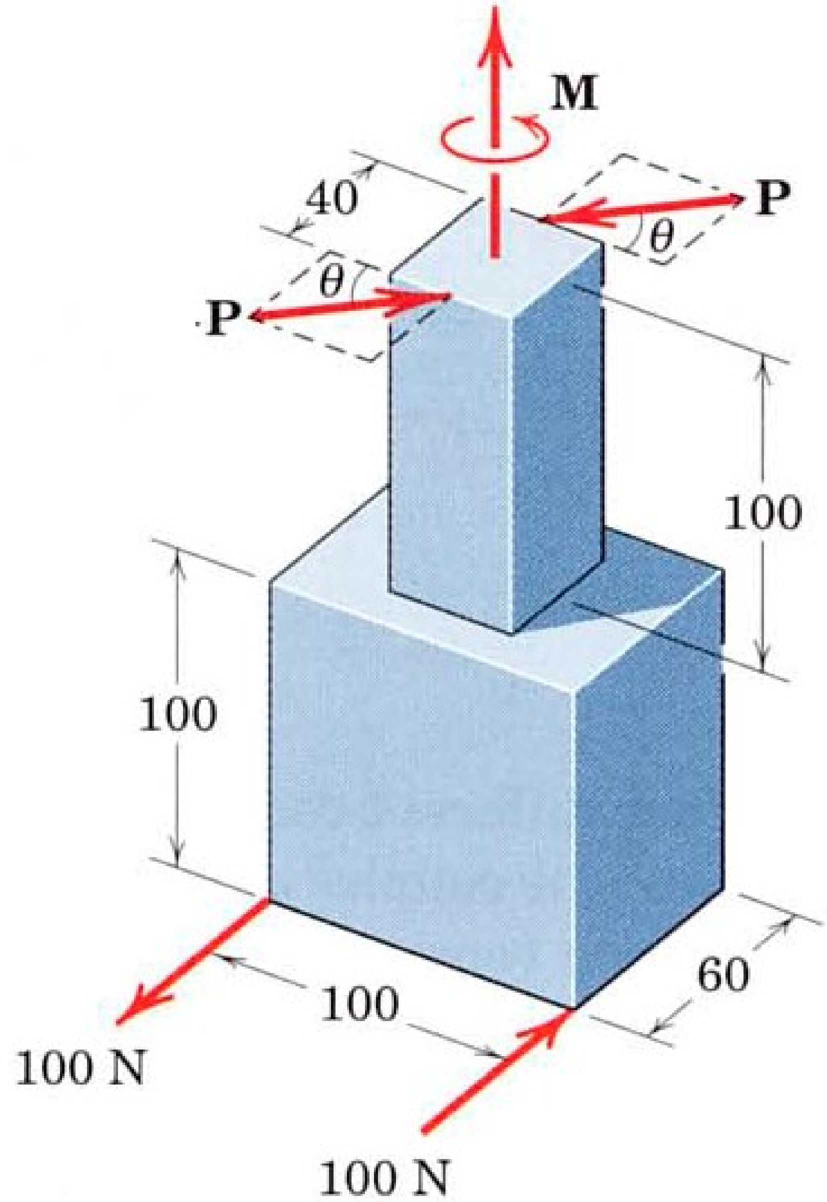
Binários Equivalentes

- Se o produto F*d permanecer o mesmo, uma mudança no ponto de aplicação das forças não afetará o efeito externo do binário:



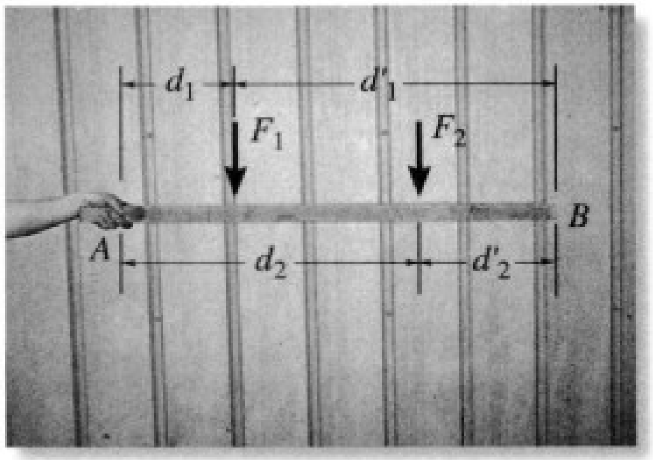
EXEMPLO 7

O elemento estrutural rígido está submetido a um binário composto de um par de forças de 100 [N]. Substitua esse binário por um binário equivalente, consistindo, nas duas forças P, cada uma com módulo de 400 [N], determine o ângulo θ apropriado.

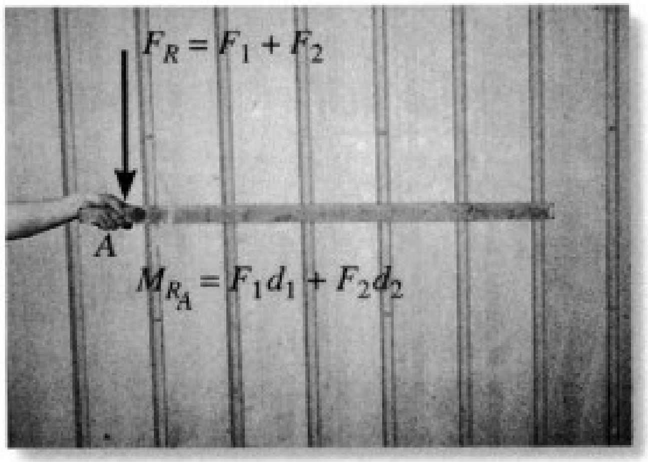


RESULTANTE DE UM SISTEMA DE FORÇA

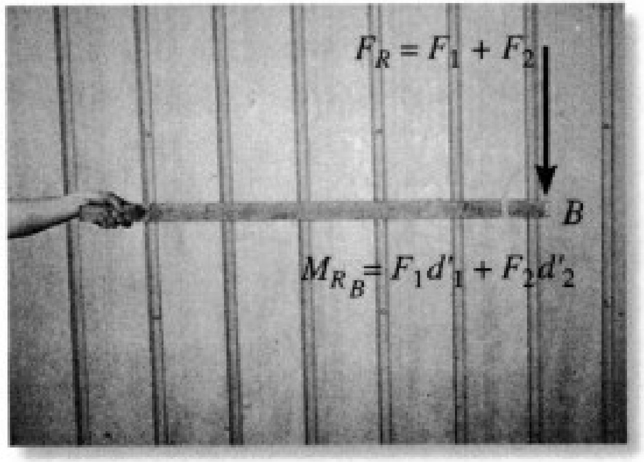
Se duas forças atuam em um bastão e são substituídas por uma força resultante e um momento resultante equivalente no ponto A, ou pela força resultante e um momento resultante equivalente no ponto B, em cada um dos casos a mão pode fornecer a mesma resistência a translação e rotação para manter o bastão na posição horizontal.



=



=



$$FR = \Sigma F$$

$$FR_x = \Sigma F_x$$

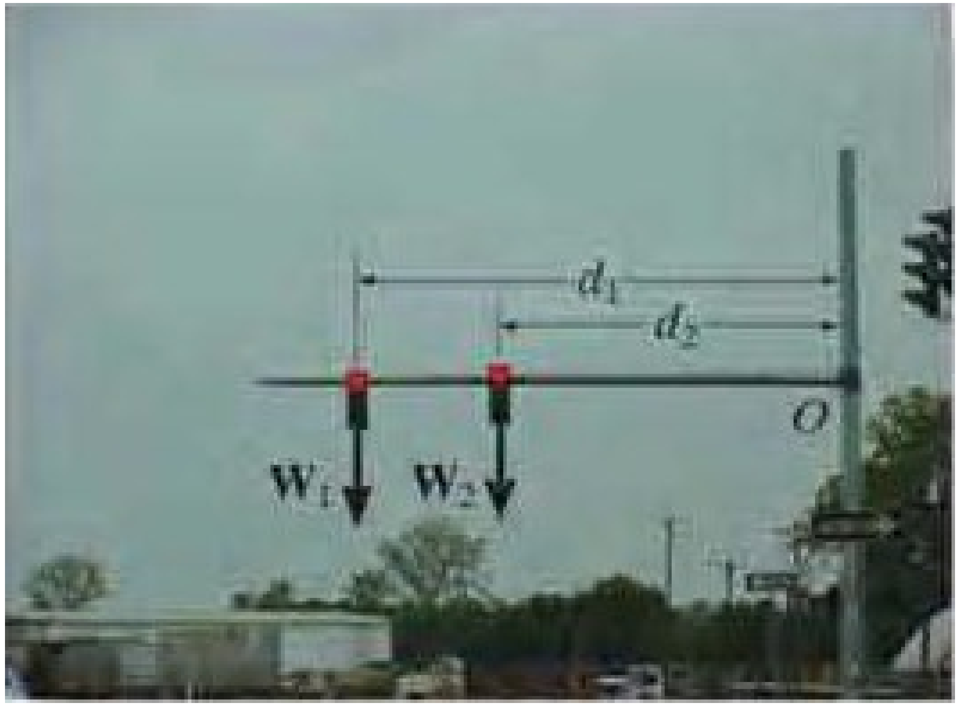
$$FR_y = \Sigma F_y$$

$$M_0 = F \cdot d$$

$$MR_0 = \Sigma M_0$$

RESULTANTE DE UM SISTEMA DE FORÇA

Através da resultante é possível representar os efeitos externos das forças aplicadas a um corpo.



RESULTANTE DE UM SISTEMA DE FORÇA

CORNÉLIO PROCÓPIO

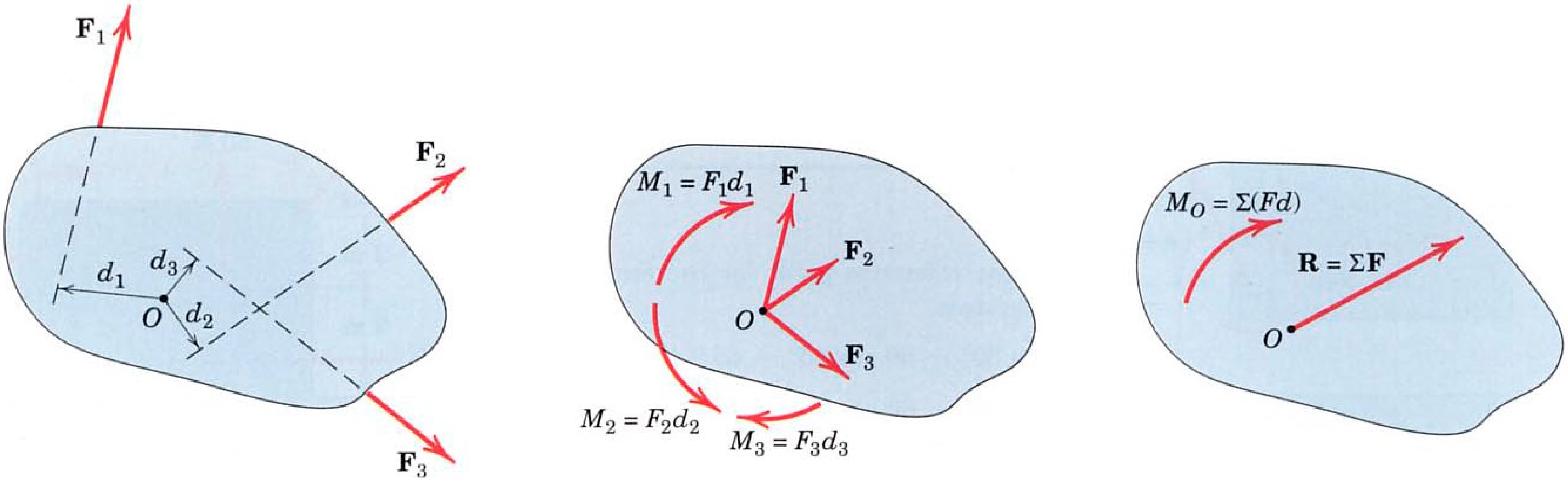
Método Algébrico

- 1º - Escolha um ponto de referência conveniente e mova todas as forças para esse ponto;
- 2º - Some todas as forças e todos os momentos em O para obter a resultante **R** e o momento resultante **M**;
- 3º - Ache a linha de ação de **R** forçando **R** a ter o mesmo momento resultante em relação a O.

$$\vec{R} = \sum \vec{F} \qquad \overrightarrow{M_O} = \sum (\vec{F} \; x \; \vec{r}) \qquad M_O = \sum F \, . \, d \qquad R \, . \, d = M_O$$

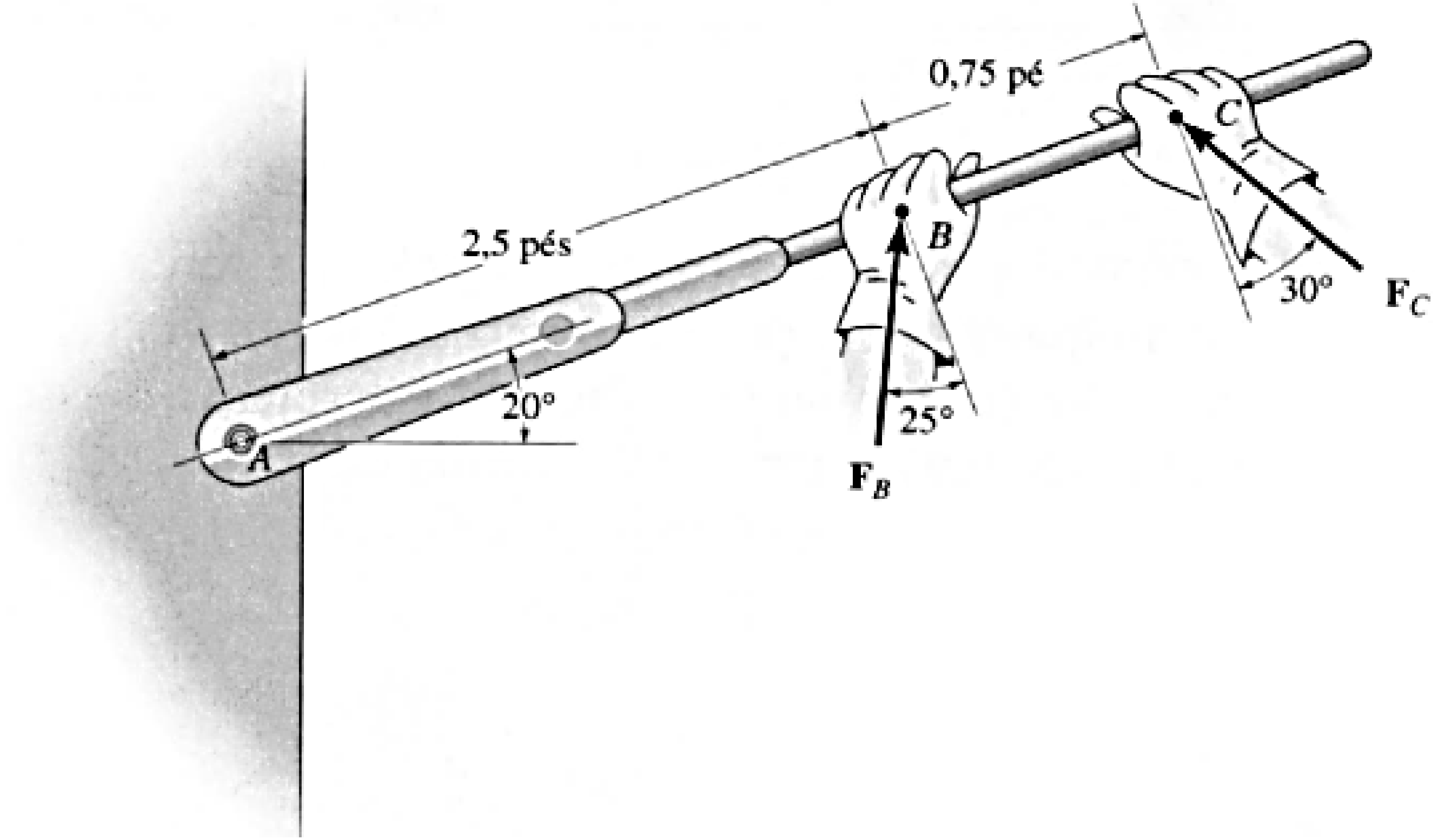
RESULTANTE DE UM SISTEMA DE FORÇA

- Método Algébrico



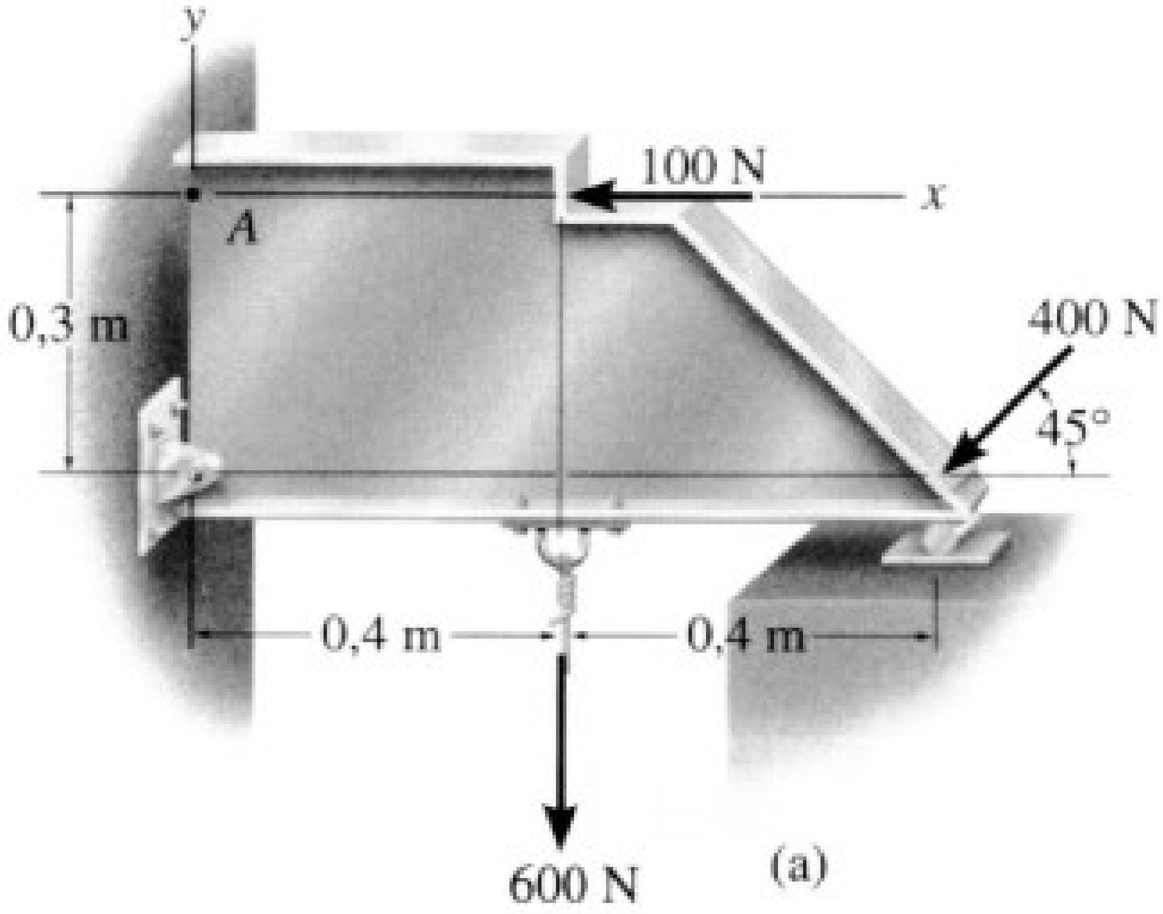
EXEMPLO 7

Se F_B = 30 lb e F_C = 45 lb, determine o momento resultante em relação ao parafuso localizado em A.



EXEMPLO 8

Substitua as forças atuantes no suporte mostrado na Figura abaixo por uma força resultante e um momento atuante no ponto A.



(a)

EXEMPLO 8

Decompondo a força de 400N no eixo x e y e calculando as resultantes no eixo x e y, obtemos:

$$\overset{+}{\rightarrow} F_{R_x} = \Sigma F_x; \qquad F_{R_x} = -100\text{ N} - 400\cos 45°\text{N} = -382{,}8\text{ N} = 382{,}8\text{ N} \leftarrow$$

$$+\uparrow F_{R_y} = \Sigma F_y; \qquad F_{R_y} = -600\text{ N} - 400\,\text{sen}\,45°\text{N} = -882{,}8\text{ N} = 882{,}8\text{ N}\downarrow$$

Em seguida calculamos a intensidade e direção da força resultante do sistema

$$F_R = \sqrt{(F_{R_x})^2 + (F_{R_y})^2} = \sqrt{(382{,}8)^2 + (882{,}8)^2} = 962\text{ N}$$

$$\theta = \text{tg}^{-1}\left(\frac{F_{R_y}}{F_{R_x}}\right) = \text{tg}^{-1}\left(\frac{882{,}8}{382{,}8}\right) = 66{,}6° \qquad \theta$$

EXEMPLO 8

Por fim calculamos o momento em relação ao ponto A.

$$\circlearrowright + M_{R_A} = \Sigma M_A;$$

$$M_{R_A} = 100\ \text{N}(0) - 600\ \text{N}(0{,}4\ \text{m}) - (400\ \text{sen}\ 45°\text{N})(0{,}8\ \text{m})$$

$$- (400\cos 45°\text{N})(0{,}3\ \text{m})$$

$$= -551\ \text{N}\cdot\text{m} = 551\ \text{N}\cdot\text{m}\ \circlearrowright$$

EXERCÍCIOS E ATIVIDADES

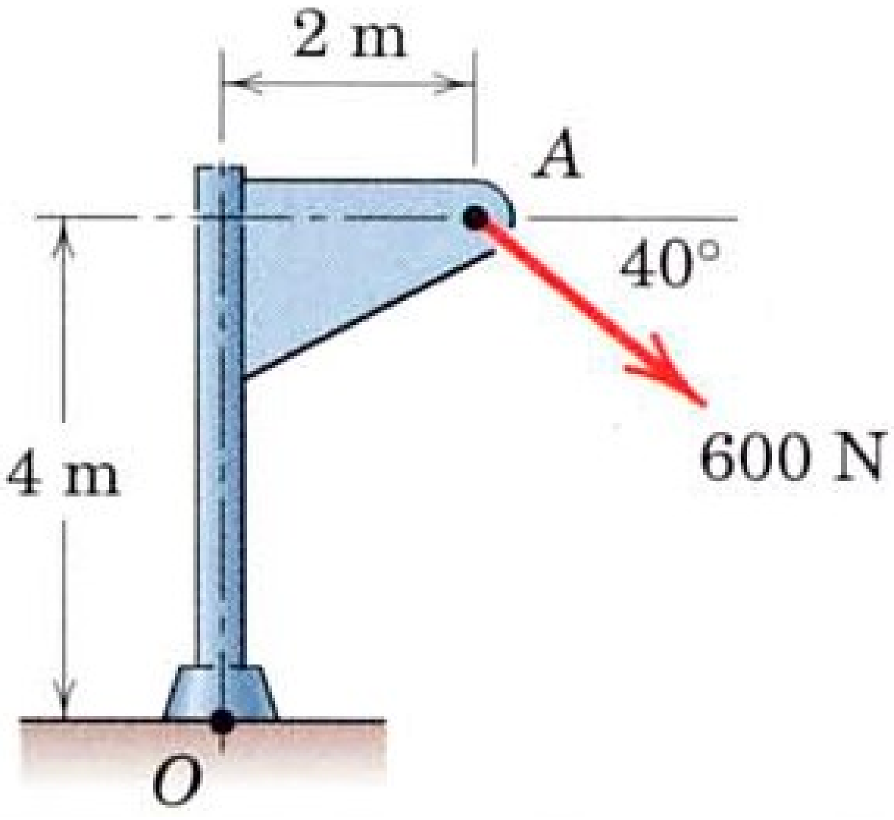
Orientação para realização das Atividades:

- Realizar as atividade a mão livre;
- Realizar diagramas e desenhos para compressão;
- Realizar todas as contas de forma detalhada;
- Colocar as repostas principais a caneta;
- Entregar as atividades e resolução dos exercícios em forma digital no sala virtual da disciplina.

EXERCÍCIO 1

UTFPR CORNÉLIO PROCÓPIO

Calcule o módulo do momento da força de 600 [N] em relação ao ponto O da base, por três maneiras diferentes.

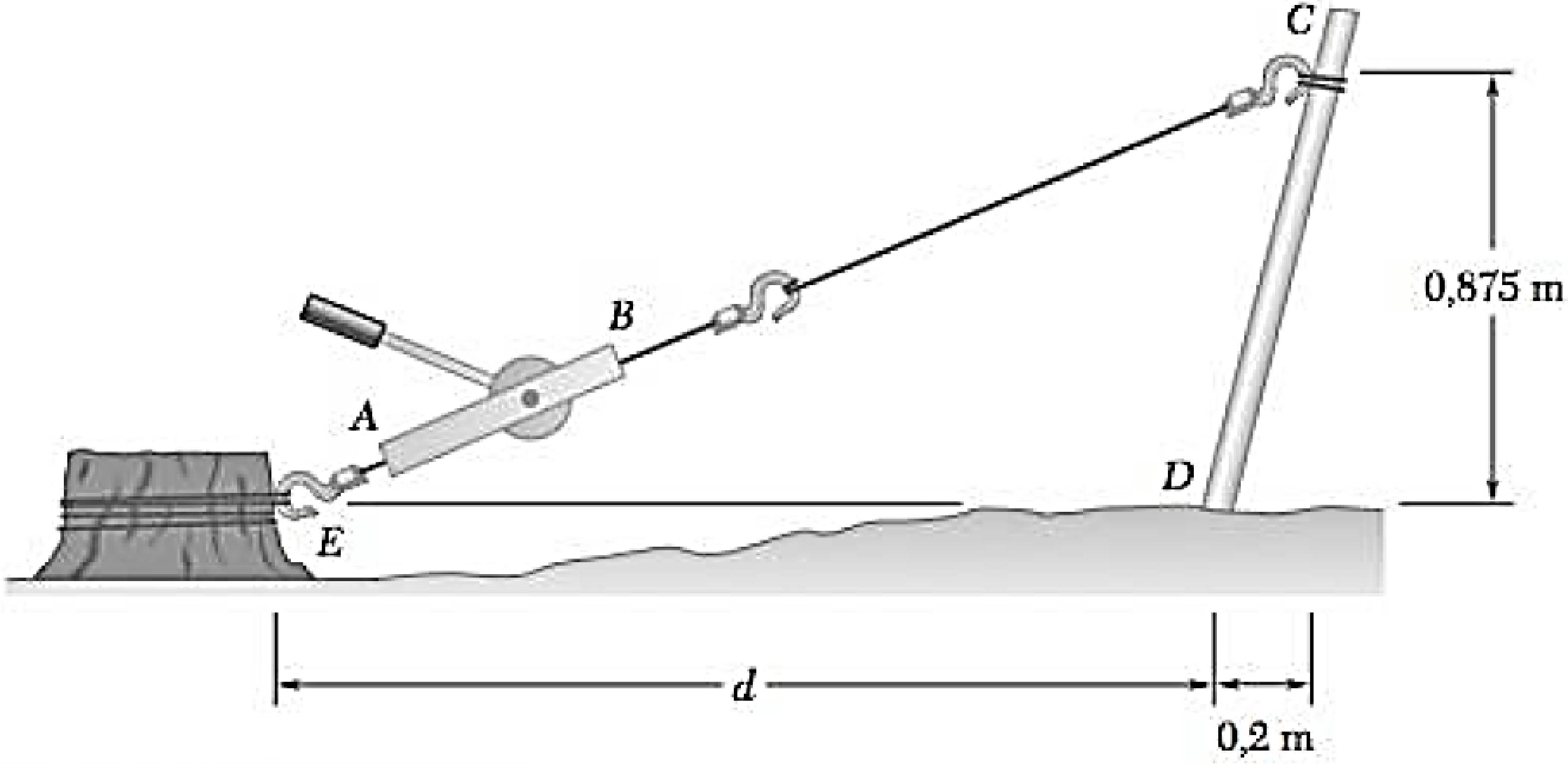


Respostas: -2610 J

EXERCÍCIO 2

UTFPR
CORNÉLIO PROCÓPIO

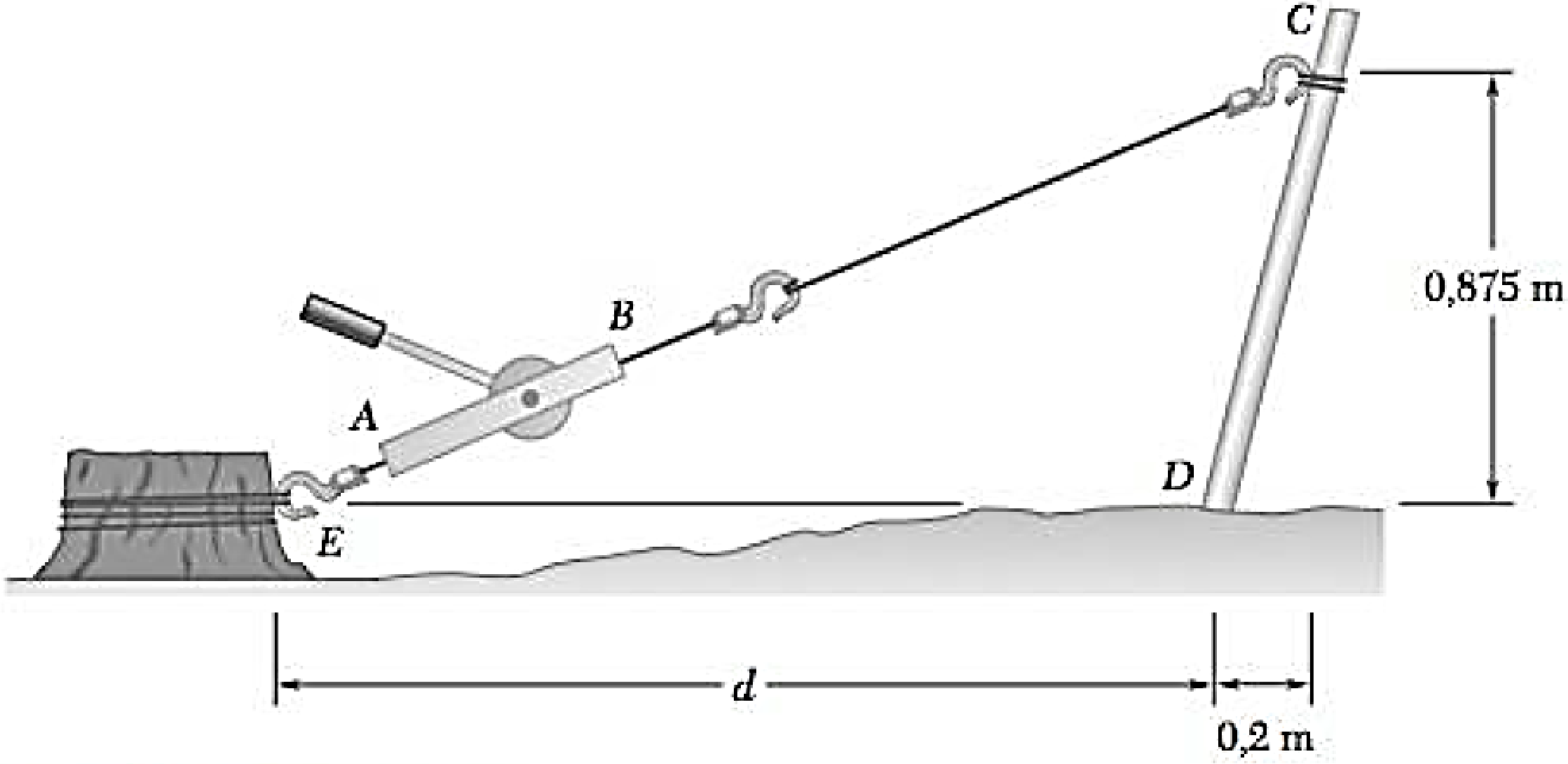
Um guincho AB é usado para endireitar um mourão. Sabendo que a tração no cabo BC é 1140 N e o comprimento d é de 1,9 m, determine o momento em relação a D da força exercida pelo cabo em C decompondo tal força no componente horizontal e no vertical aplicado a) no ponto C, b) no ponto E



Respostas:
a = 833 N*m
b = 833 N*m

EXERCÍCIO 3

Sabe-se que é necessária uma força com um momento de 960N*m em relação a D para endireitar o mourão CD. Se d=2,8m, determine a tração que deve ser desenvolvida no cabo do guincho AB para se criar o momento necessário em relação ao ponto D.

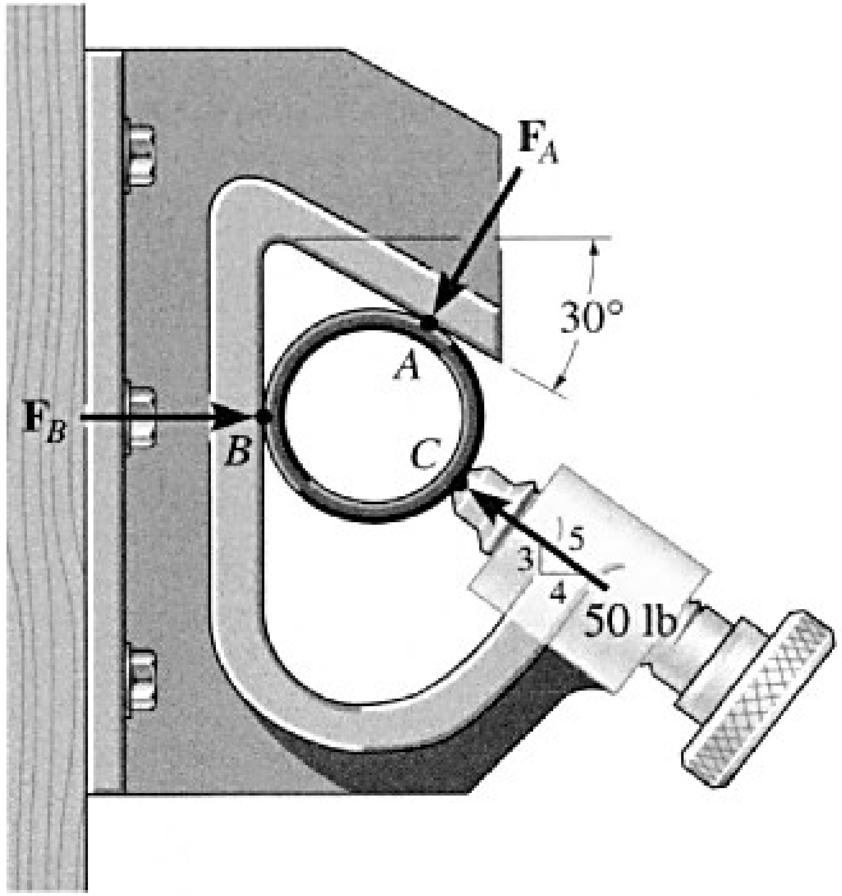


Respostas: 1224 N

EXERCÍCIO 4

UTFPR CORNÉLIO PROCÓPIO

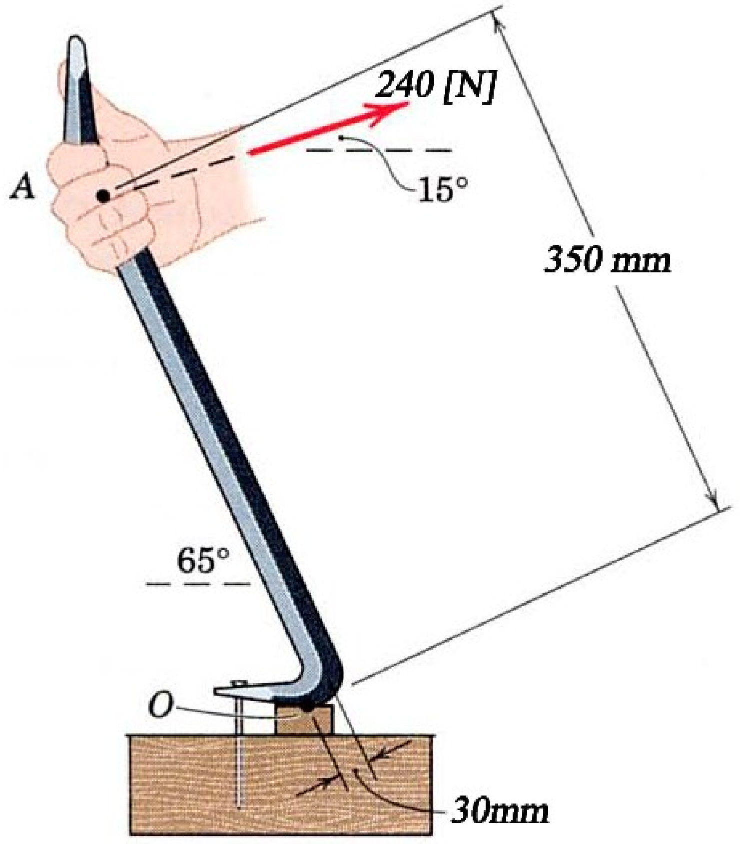
O tubo é mantido na posição pela morsa. Se o parafuso exerce uma força de 50 lb sobre o tubo na direção mostrada, determine as forças F_A e F_B que os contatos lisos em A e B exercem sobre o tubo.



Respostas:
FA = 34,64 N
FB = 57,32 N

EXERCÍCIO 5

Um pé de cabra é usado para remover um prego, como mostrado. Determine o momento da força de 240 [N] em relação ao ponto O, de contato entre o pé de cabra e o pequeno bloco de suporte.

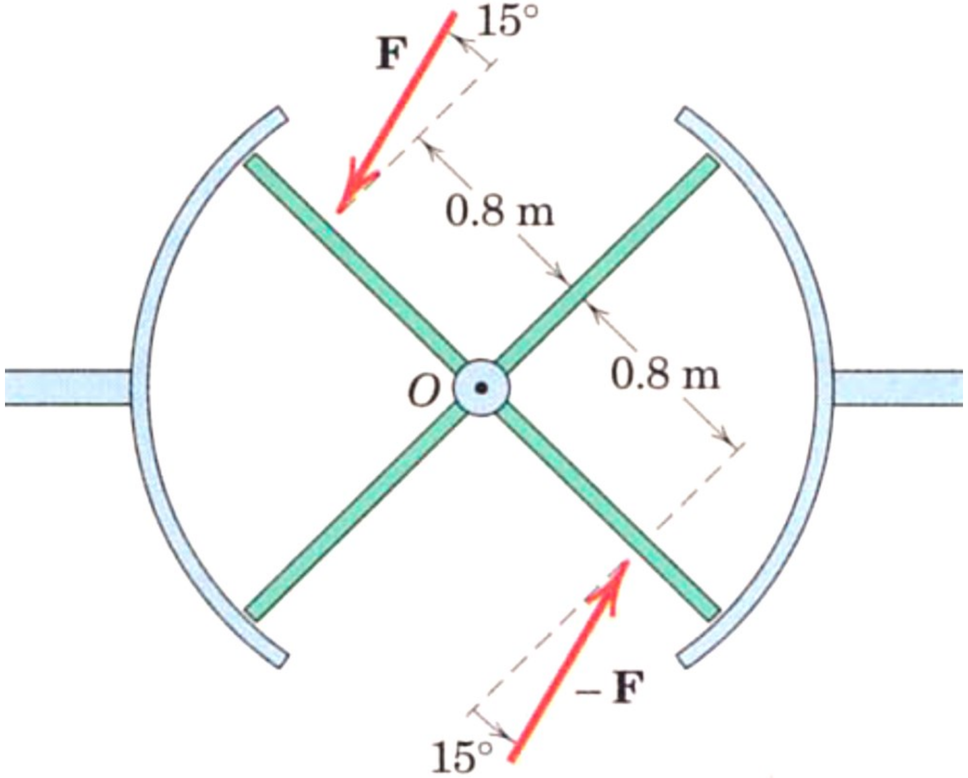


Respostas: - 84 J

EXERCÍCIO 6

UTFPR CORNÉLIO PROCÓPIO

A vista de topo de uma porta giratória está mostrada. Duas pessoas se aproximam simultaneamente da porta e exercem forças de módulo igual, como mostrado. Se o momento resultante em relação ao eixo de rotação da porta em O vale 25 [N.m], determine o módulo da força F.

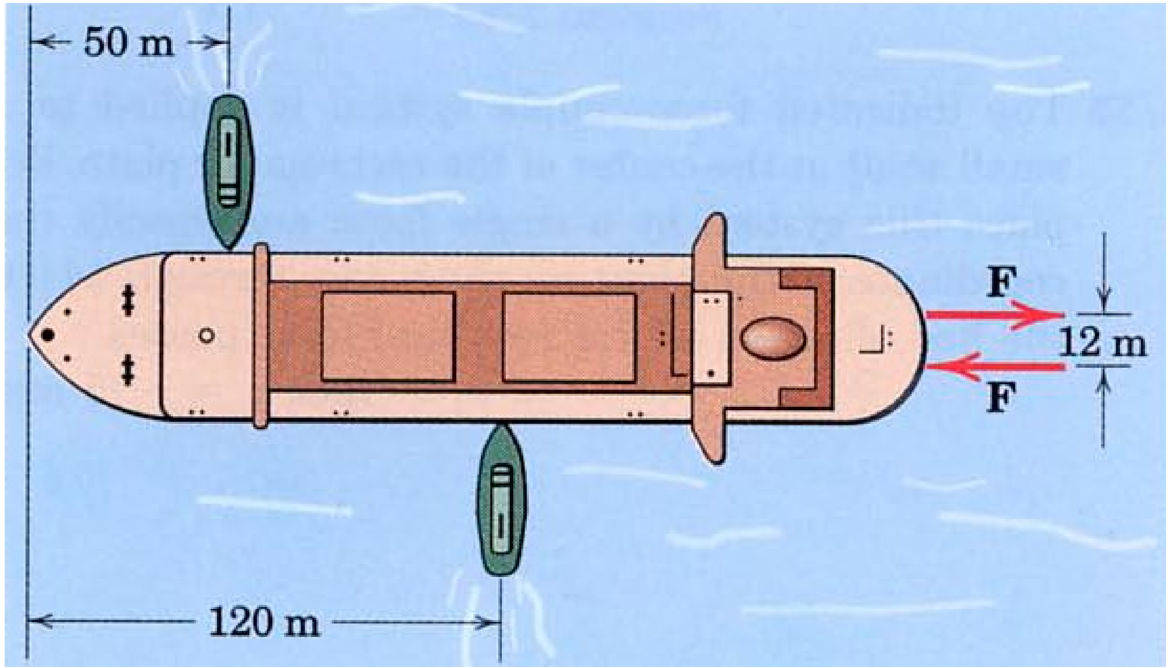


Respostas:
F = 16.18 N

EXERCÍCIO 7

CORNÉLIO PROCÓPIO

Cada hélice de um navio de duas hélices desenvolve um empuxo na velocidade máxima de 300 [kN]. Ao manobrar-se o navio, uma hélice está girando a toda velocidade para a frente e a outra a toda velocidade no sentido reverso. Que empuxo P cada rebocador deve exercer no navio para contrabalancear o efeito de giro causado pelas hélices do navio?

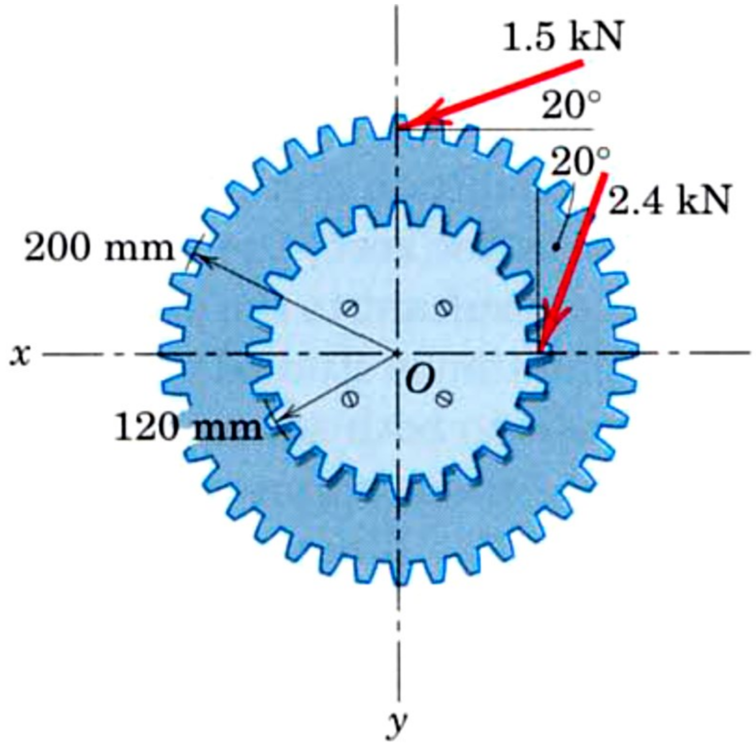


Respostas:
P = 51,4 kN

EXERCÍCIO 8

UTFPR
CORNÉLIO PROCÓPIO

A figura representa duas engrenagens maciças submetidas às forças de contato mostradas. Substitua as duas forças por uma única força equivalente **Fr** no eixo de rotação O e por um binário equivalente **FM** correspondente. Especifique os módulos de **Fr** e **FM**. Se as engrenagens devem começar a girar a partir do repouso sob a ação das forças mostradas, em que direção ocorrerá a rotação?



Respostas:

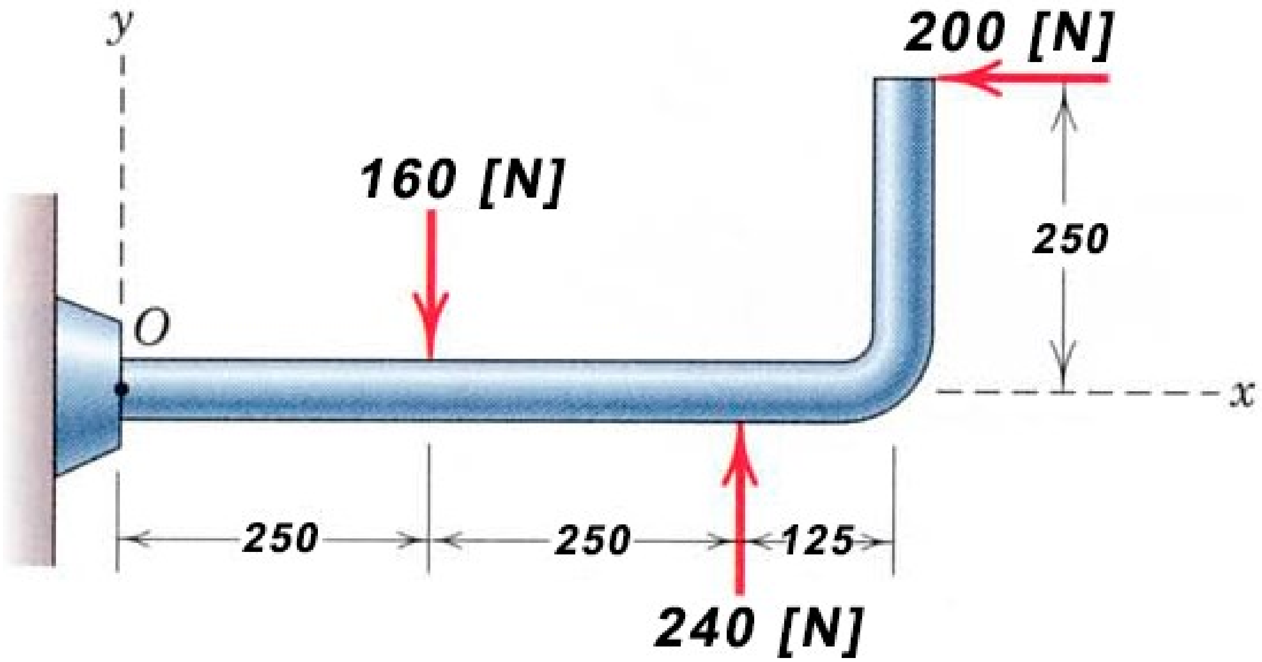
Fr = 3555 N

FM = 1777,5 N

d = 1.585 mm

EXERCÍCIO 9

Substitua as três forças atuando no tubo dobrado por uma única força equivalente Fr. Especifique a distância x a partir do ponto O a um ponto no eixo x pelo qual passa a linha de ação da Fr.

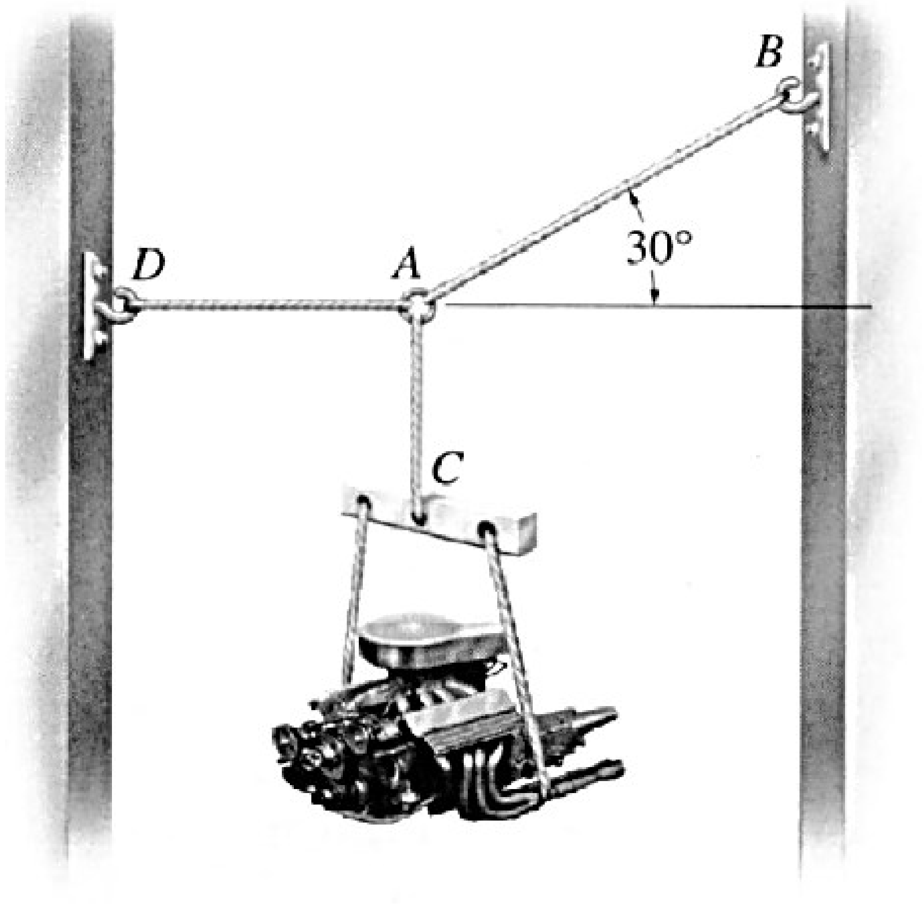


Medidas em milímetros

Respostas:
Fr = 215 N
dx = 561,4 mm
dy = 224,5 mm

EXERCÍCIO 10

Determine a tensão nos cabos AB e AD para o equilíbrio do motor de 250 kg mostrado na figura abaixo:



Respostas:
T_{AB} = 4,9 kN
T_{AD} = 4,25 kN