



AULA 7

CENTRÓIDE E BARICENTRO

Professor: Dr. Paulo Sergio Olivio Filho

CONTEÚDO DA AULA

- Conceitos de Centroide e Baricentro
- Estudos bidimensionais e tridimensionais
- Centroide de área, linha e volume
- Baricentro e aplicações

CENTROIDE E BARICENTRO

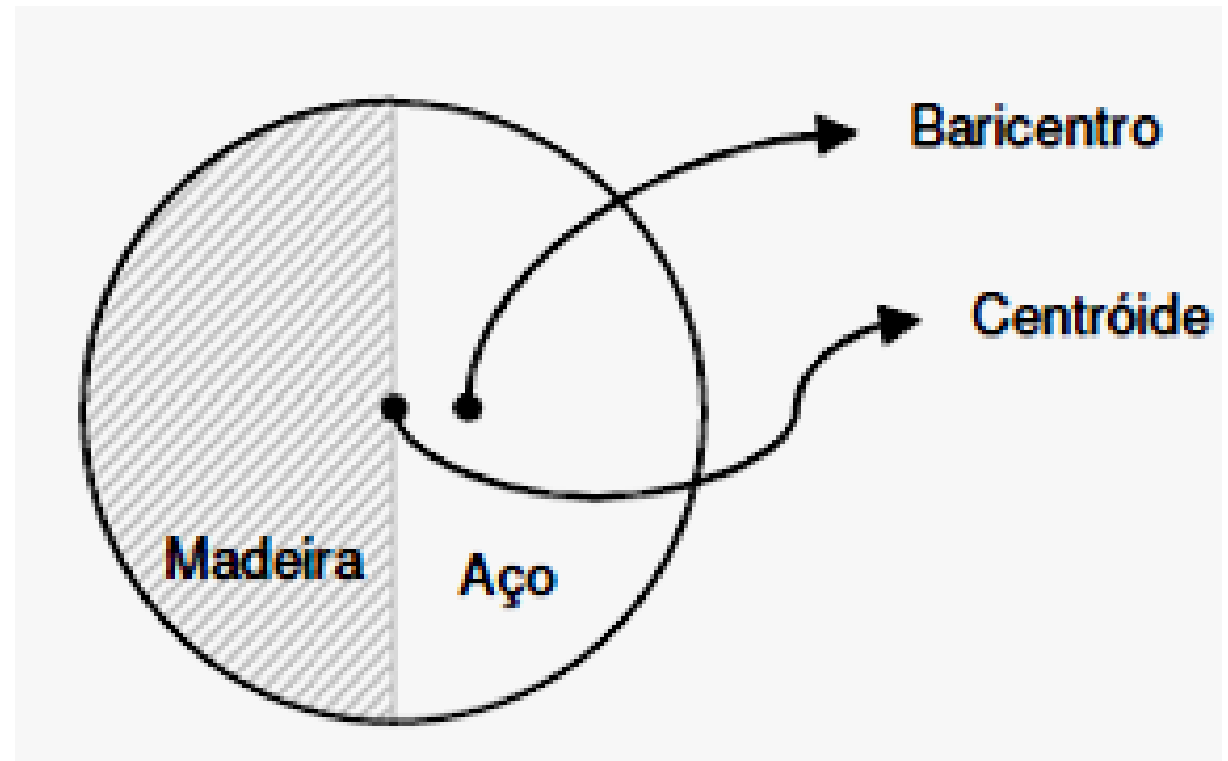
Baricentro: Centro de Gravidade

Centróide: Centro Geométrico

$$P = m \times g = p \times V \times g = p \times t \times A \times g$$

p = peso específico

t = espessura

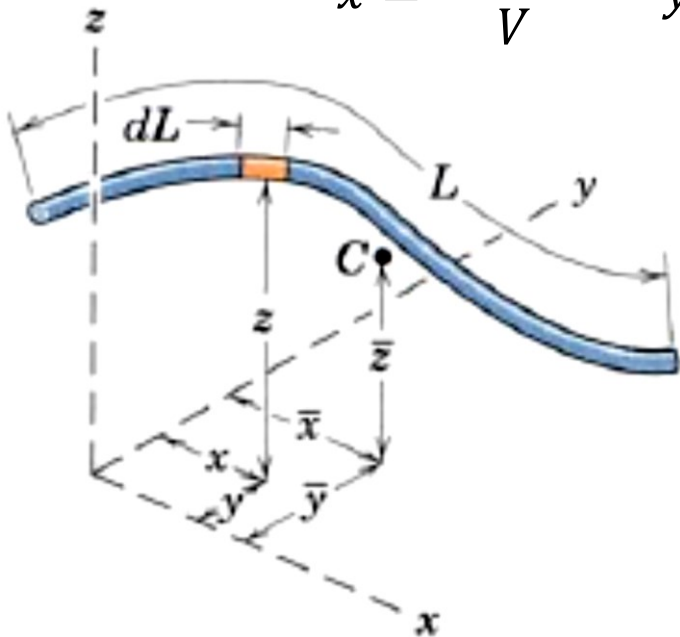


CENTROIDE

O centroide é o ponto que representa o centro geométrico de uma área, linha ou volume, onde se concentra a distribuição uniforme de sua forma.

CENTROIDE DE VOLUME

$$\bar{x} = \frac{\int x \cdot dV}{V} \quad \bar{y} = \frac{\int y \cdot dV}{V} \quad \bar{z} = \frac{\int z \cdot dV}{V}$$

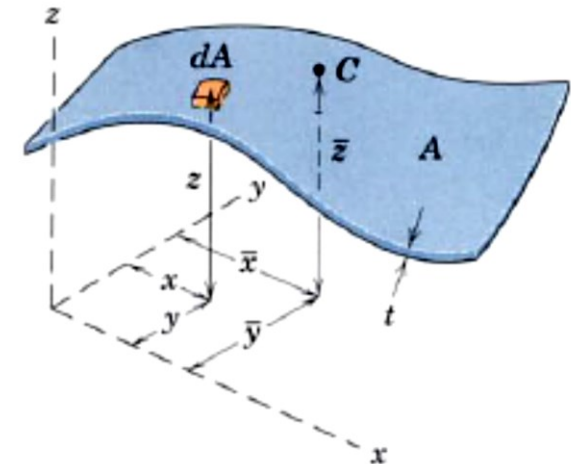


CENTROIDE DE LINHA

$$\bar{x} = \frac{\int x \cdot dL}{L} \quad \bar{y} = \frac{\int y \cdot dL}{L} \quad \bar{z} = \frac{\int z \cdot dL}{L}$$

CENTROIDE DE ÁREA

$$\bar{x} = \frac{\int x \cdot dA}{A} \quad \bar{y} = \frac{\int y \cdot dA}{A} \quad \bar{z} = \frac{\int z \cdot dA}{A}$$

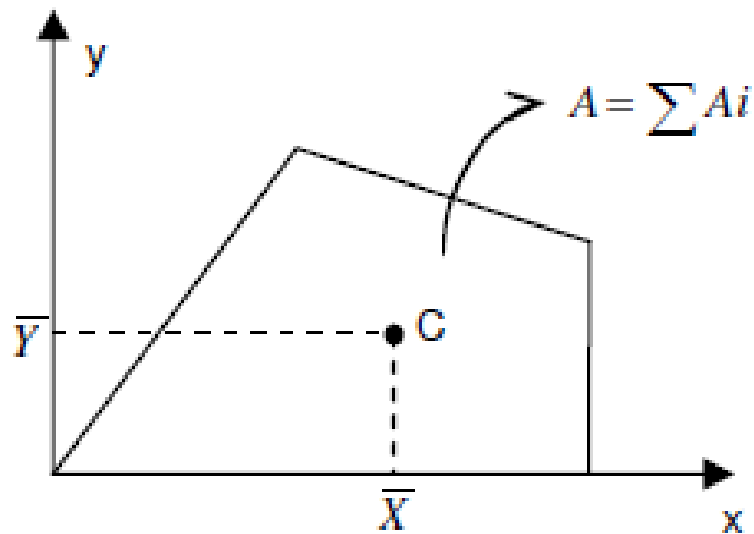


CENTROIDE

Placas

$$\bar{X} \sum A_i = \sum \bar{X}_i \cdot A_i$$

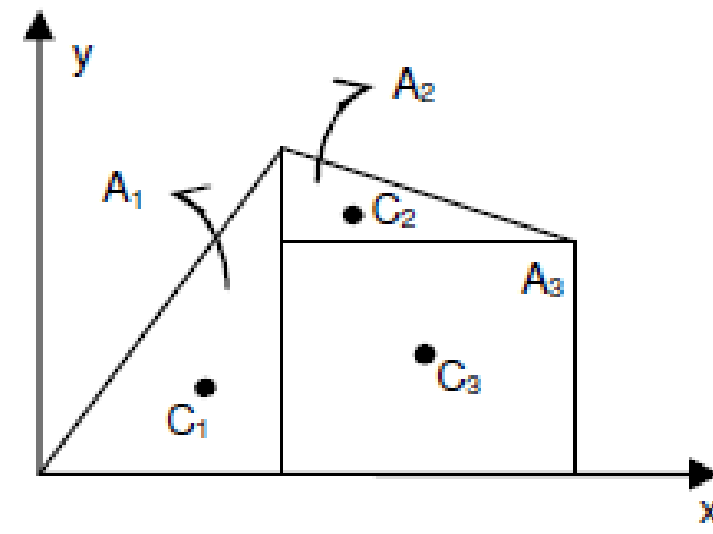
$$\bar{Y} \sum A_i = \sum \bar{Y}_i \cdot A_i$$



Arames

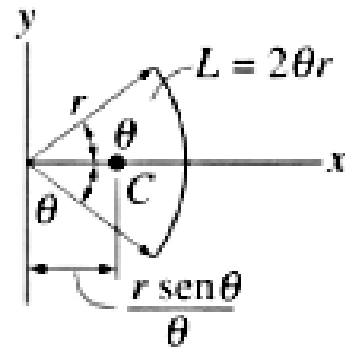
$$\bar{X} L_i = \sum \bar{X}_i \cdot L_i$$

$$\bar{Y} L_i = \sum \bar{Y}_i \cdot L_i$$

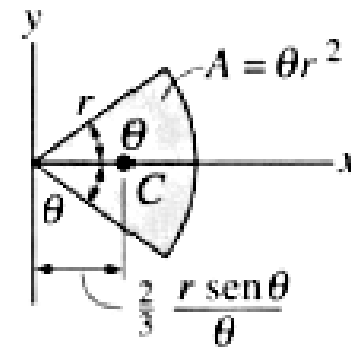


Alguns centroides são tabelados devidos as suas formas comuns como veremos nas tabelas a seguir.

CENTRO E BARICENTRO



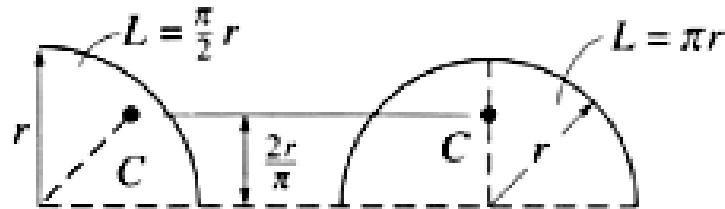
Segmento de arco de circunferência



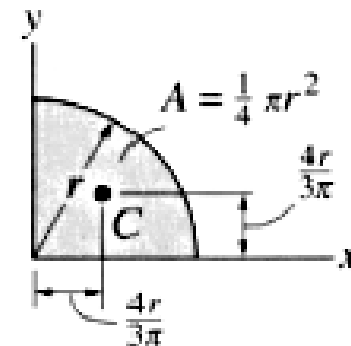
Área de setor circular

$$I_x = \frac{1}{4} r^4 (\theta - \frac{1}{2} \text{sen } 2\theta)$$

$$I_x = \frac{1}{4} r^4 (\theta + \frac{1}{2} \text{sen } 2\theta)$$



Arcos de quarto de circunferência e semicircunferência

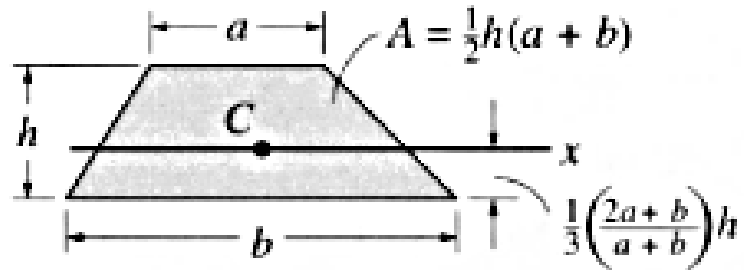


Área de quarto de círculo

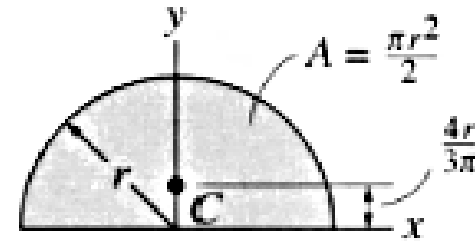
$$I_x = \frac{1}{16} \pi r^4$$

$$I_y = \frac{1}{16} \pi r^4$$

CENTRO E BARICENTRO



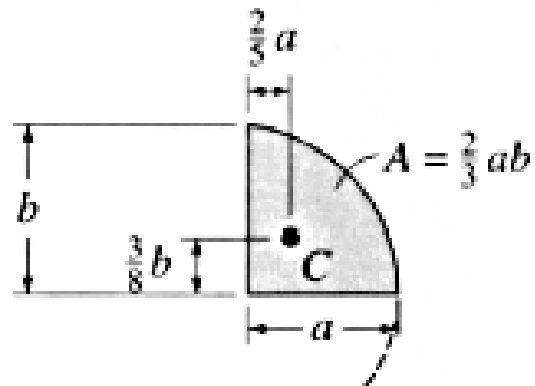
Área do trapézio



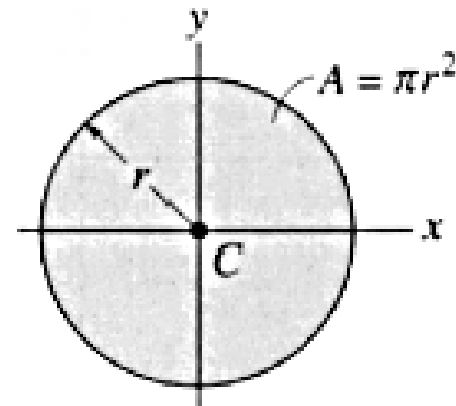
Área de semicírculo

$$I_x = \frac{1}{8}\pi r^4$$

$$I_y = \frac{1}{8}\pi r^4$$



Área semiparabólica

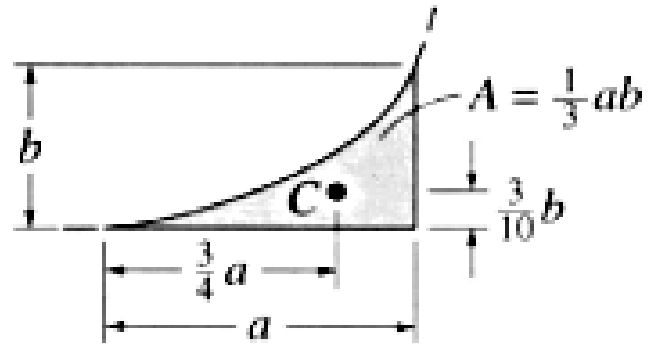


Área do círculo

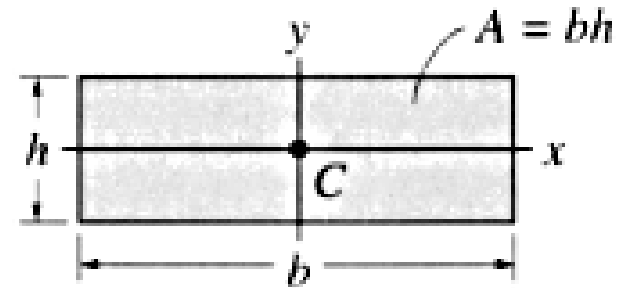
$$I_x = \frac{1}{4}\pi r^4$$

$$I_y = \frac{1}{4}\pi r^4$$

CENTRO E BARICENTRO



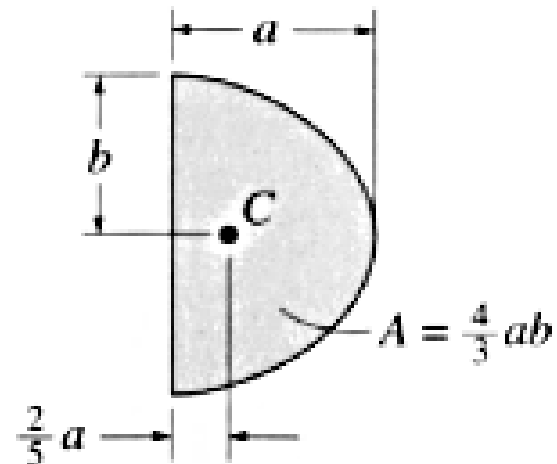
Área sob curva parabólica



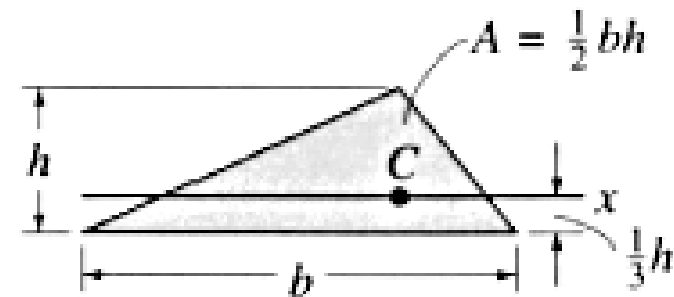
$$I_x = \frac{1}{12}bh^3$$

$$I_y = \frac{1}{12}hb^3$$

Área do retângulo



Área parabólica

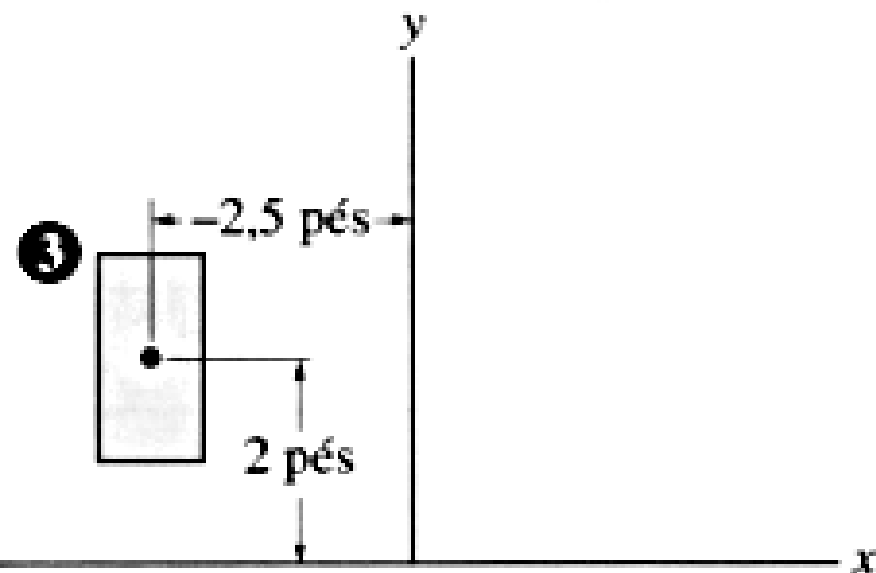
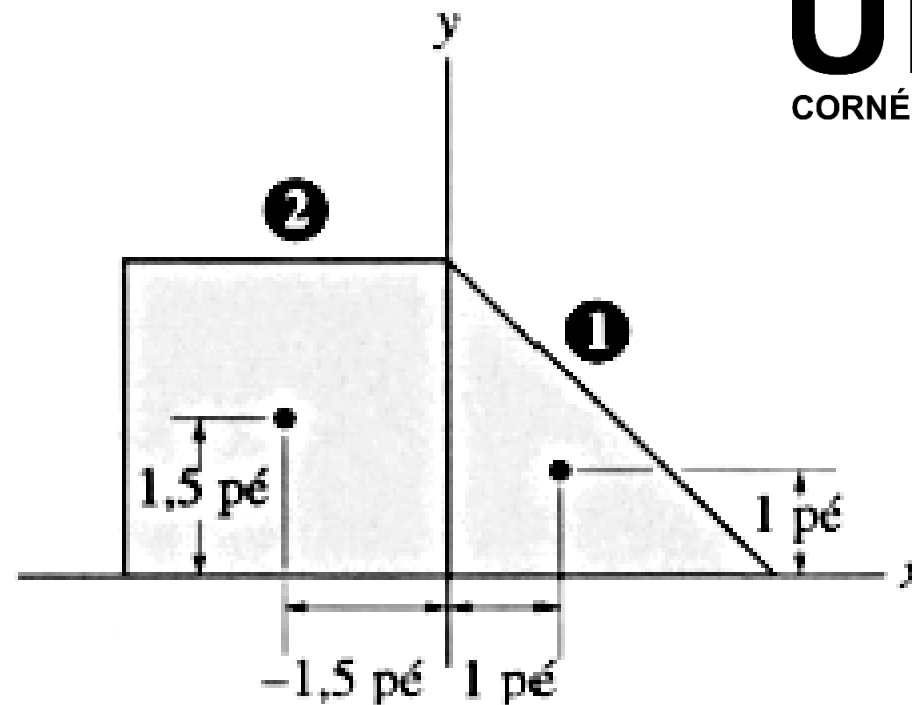
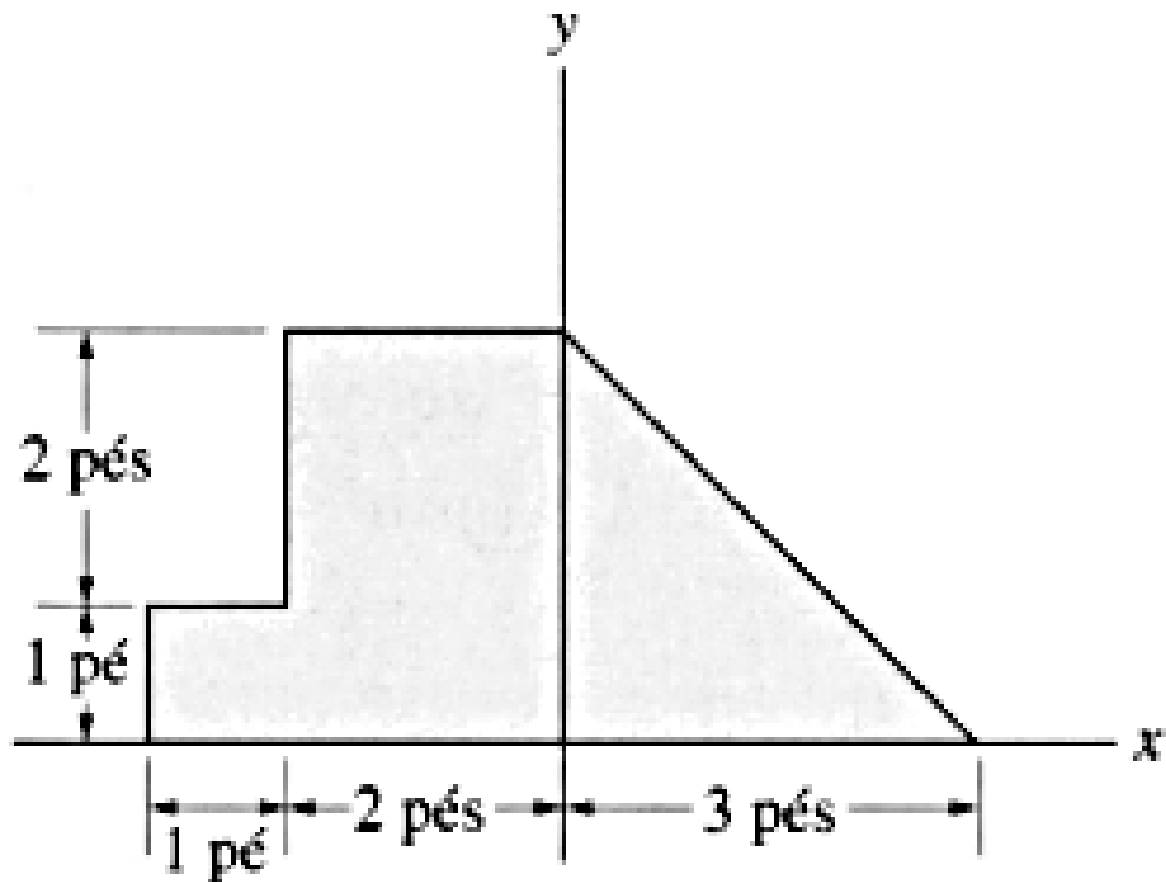


$$I_x = \frac{1}{36}bh^3$$

Área do triângulo

EXEMPLO 1

Localize o centroide da área da placa mostrada na figura abaixo.



EXEMPLO 1

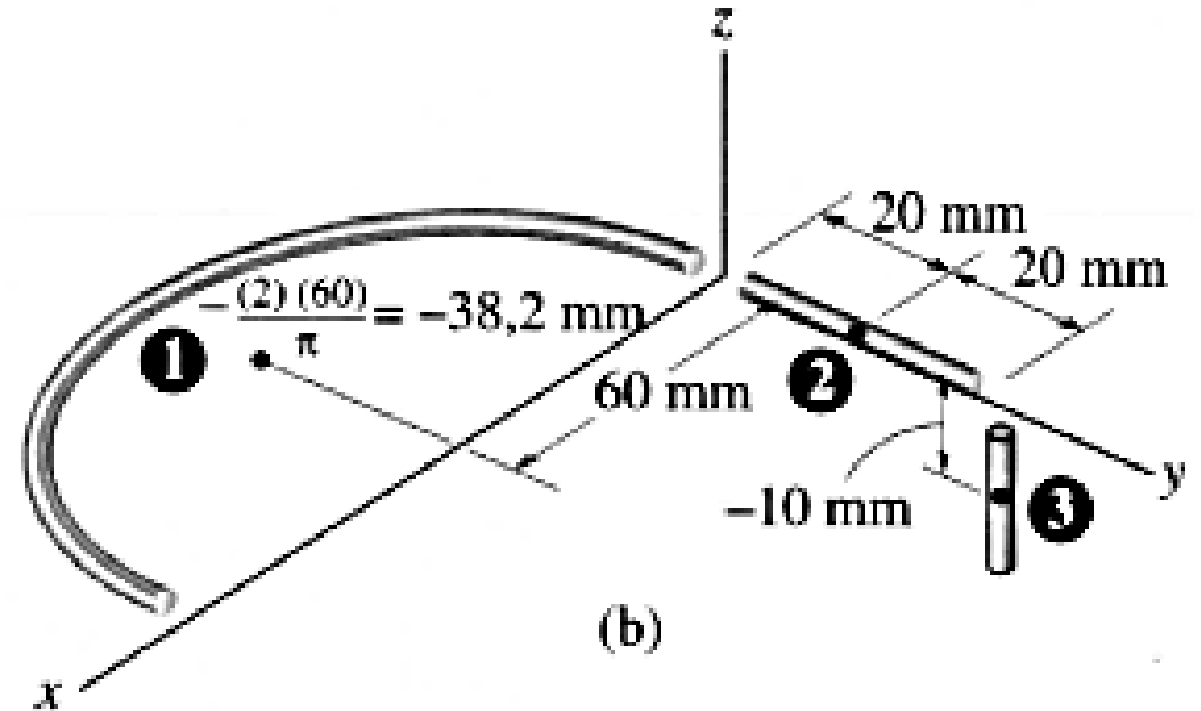
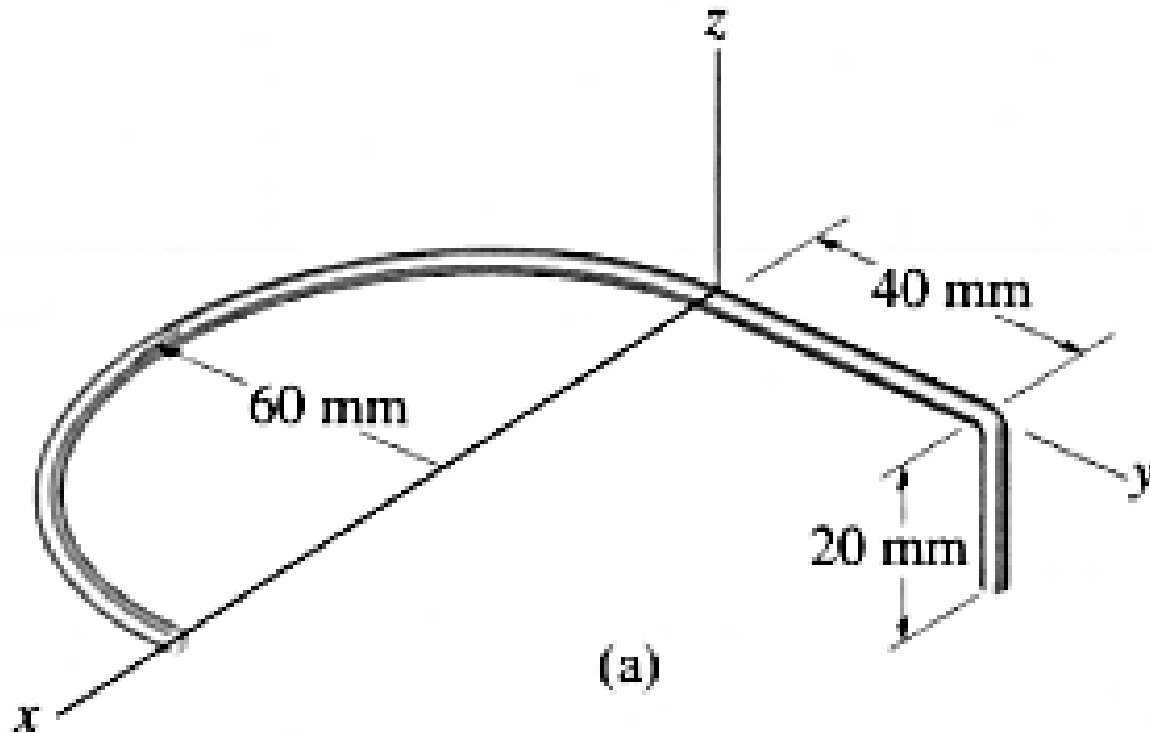
Segmento	$A \text{ (pé}^2\text{)}$	$\tilde{x} \text{ (pé)}$	$\tilde{y} \text{ (pé)}$	$\tilde{x}A \text{ (pé}^3\text{)}$	$\tilde{y}A \text{ (pé}^3\text{)}$
1	$\frac{1}{2}(3)(3) = 4,5$	1	1	4,5	4,5
2	$(3)(3) = 9$	-1,5	1,5	-13,5	13,5
3	<u>$-(2)(1) = -2$</u>	-2,5	2	5	-4
	$\Sigma A = 11,5$			$\Sigma \tilde{x}A = -4$	$\Sigma \tilde{y}A = 14$

$$\bar{x} = \frac{\Sigma \tilde{x}A}{\Sigma A} = \frac{-4}{11,5} = -0,348 \text{ pé}$$

$$\bar{y} = \frac{\Sigma \tilde{y}A}{\Sigma A} = \frac{14}{11,5} = 1,22 \text{ pé}$$

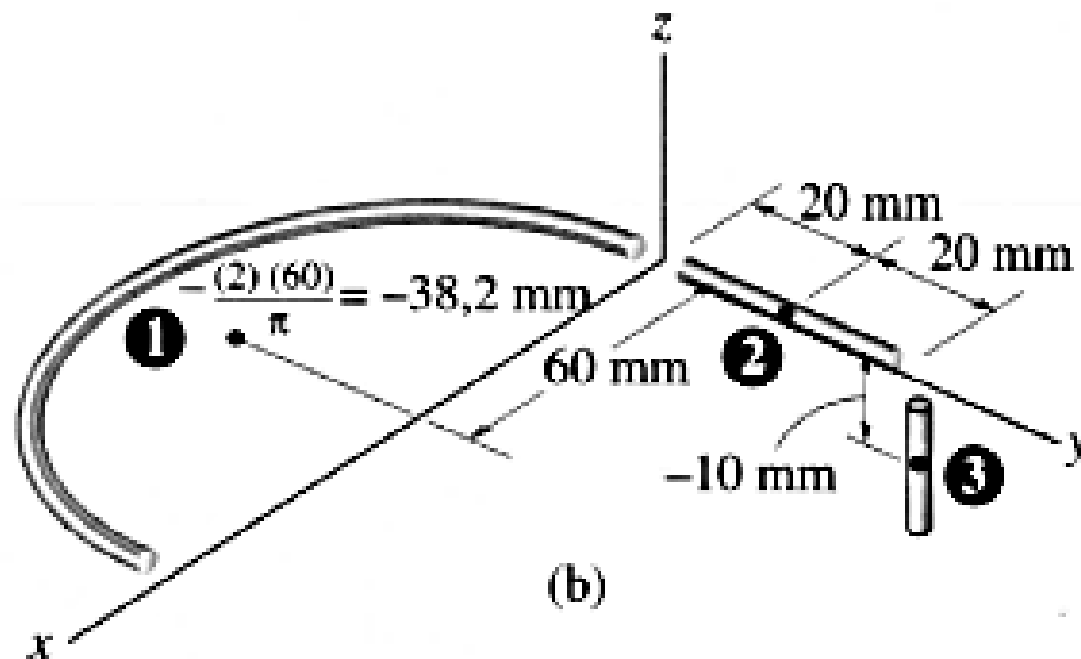
EXEMPLO 2

Localize o centroide da figura mostrada abaixo.



EXEMPLO 2

Segmento	L (mm)	\tilde{x} (mm)	\tilde{y} (mm)	\tilde{z} (mm)	$\tilde{x}L$ (mm ²)	$\tilde{y}L$ (mm ²)	$\tilde{z}L$ (mm ²)
1	$\pi(60) = 188,5$	60	-38,2	0	11.310	-7.200	0
2	40	0	20	0	0	800	0
3	20	0	40	-10	0	800	-200
	$\Sigma L = 248,5$				$\Sigma \tilde{x}L = 11.310$	$\Sigma \tilde{y}L = -5.600$	$\Sigma \tilde{z}L = -200$



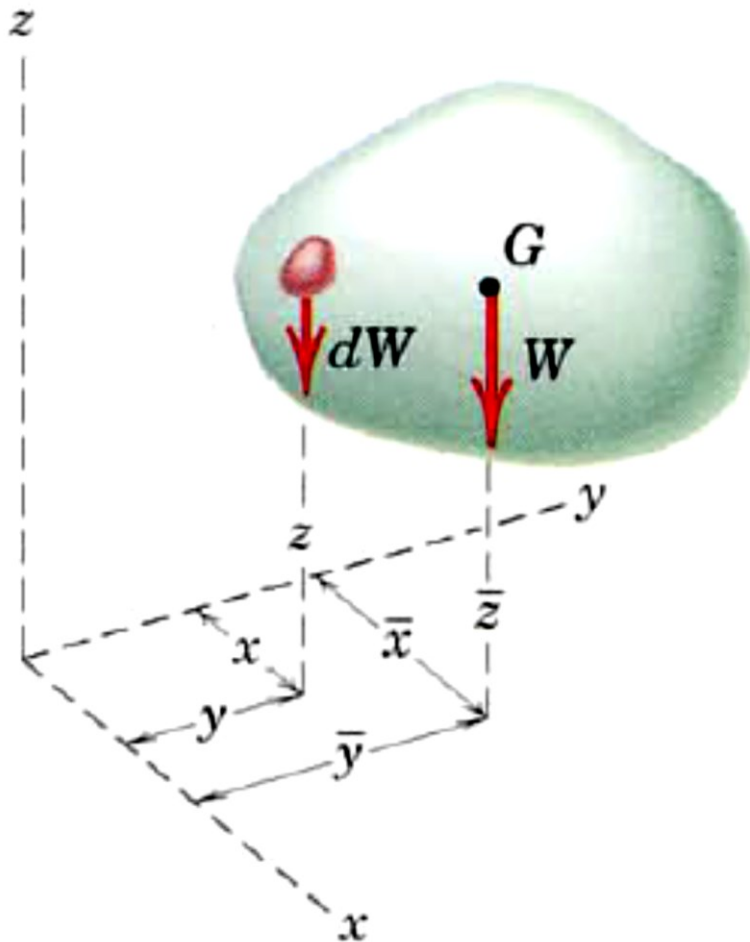
$$\bar{x} = \frac{\Sigma \tilde{x}L}{\Sigma L} = \frac{11.310}{248,5} = 45,5 \text{ mm}$$

$$\bar{y} = \frac{\Sigma \tilde{y}L}{\Sigma L} = \frac{-5.600}{248,5} = -22,5 \text{ mm}$$

$$\bar{z} = \frac{\Sigma \tilde{z}L}{\Sigma L} = \frac{-200}{248,5} = -0,805 \text{ mm}$$

CENTRO DE GRAVIDADE

- Considere um corpo tridimensional de qualquer tamanho e forma com massa m .



CENTRO DE GRAVIDADE

$$\bar{x} = \frac{\int x \cdot dW}{W} \quad \bar{y} = \frac{\int y \cdot dW}{W} \quad \bar{z} = \frac{\int z \cdot dW}{W}$$

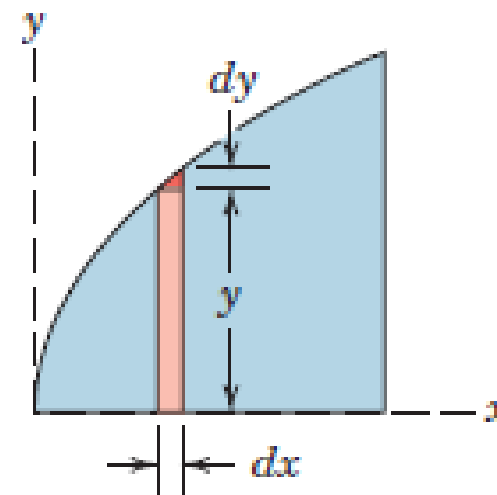
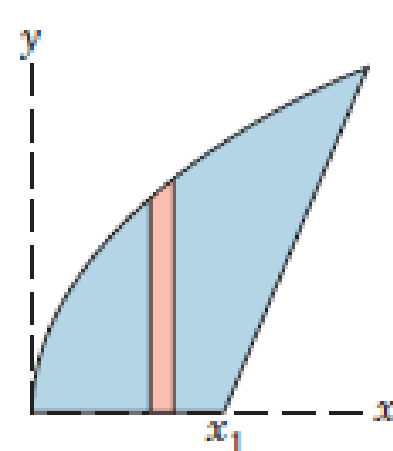
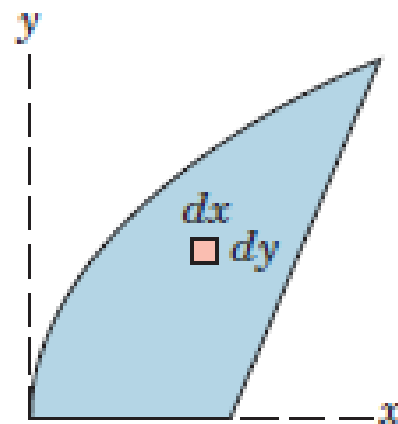
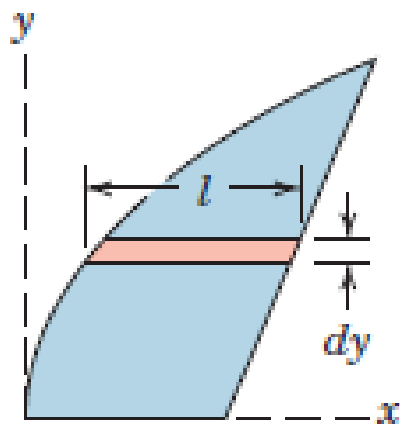
CENTRO DE MASSA

$$\bar{x} = \frac{\int x \cdot dm}{m} \quad \bar{y} = \frac{\int y \cdot dm}{m} \quad \bar{z} = \frac{\int z \cdot dm}{m}$$

CENTRO DE GRAVIDADE - BARICENTRO

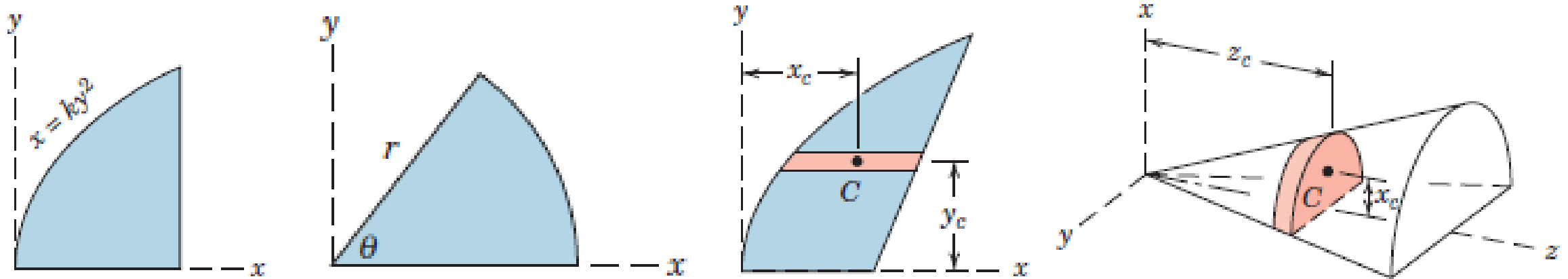
- Escolha do elemento diferencial

- 1) Ordem do elemento: Sempre que possível seleciona-se um elemento de primeira ordem.
- 2) Continuidade: Deve ser possível integrar em uma operação contínua, englobando toda a figura.
- 3) Eliminação de Termos de Ordem Superior: Em comparação com termos de primeira ordem, os elementos de ordem superior podem ser desprezados.



CENTRO DE GRAVIDADE - BARICENTRO

- Escolha do elemento diferencial
- 4) Escolha das Coordenadas: Deve-se escolher o sistema de coordenadas que melhor se ajusta aos contornos da figura.
 - 5) Coordenadas do Centroide de um Elemento: É essencial utilizar as coordenadas do centroide do elemento para calcular o primeiro momento do elemento.



CENTRO DE GRAVIDADE - BARICENTRO

Corpos compostos consiste em um conjunto de corpos de formatos mais simples como triângulo, quadrado semicírculos, etc. Para o cálculo do centro de gravidade do corpo todo é necessário que o peso e centro de gravidade de cada “parte” seja conhecido para que sejam considerados como partículas.

$$\bar{x} = \frac{\sum \tilde{x} W}{\sum W} \quad \bar{y} = \frac{\sum \tilde{y} W}{\sum W} \quad \bar{z} = \frac{\sum \tilde{z} W}{\sum W}$$

$\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ *representam as coordenadas do centro de gravidade G do corpo composto.*

$\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$ *representam as coordenadas do centro de gravidade de cada parte que constitui o corpo.*

$\sum W$ *é a soma dos pesos de todas as partes que constituem o corpo ou é simplesmente o peso total do corpo composto.*

EXEMPLO 3

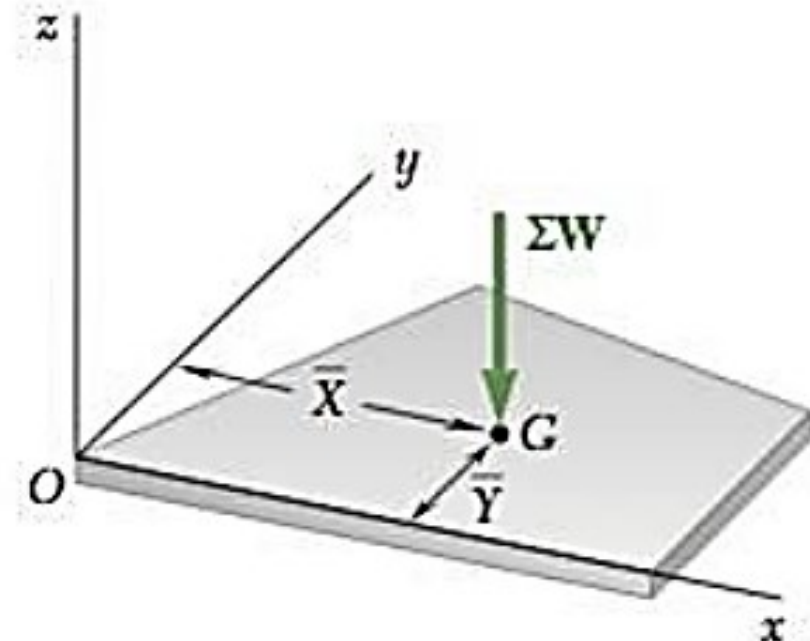
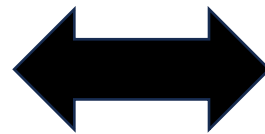
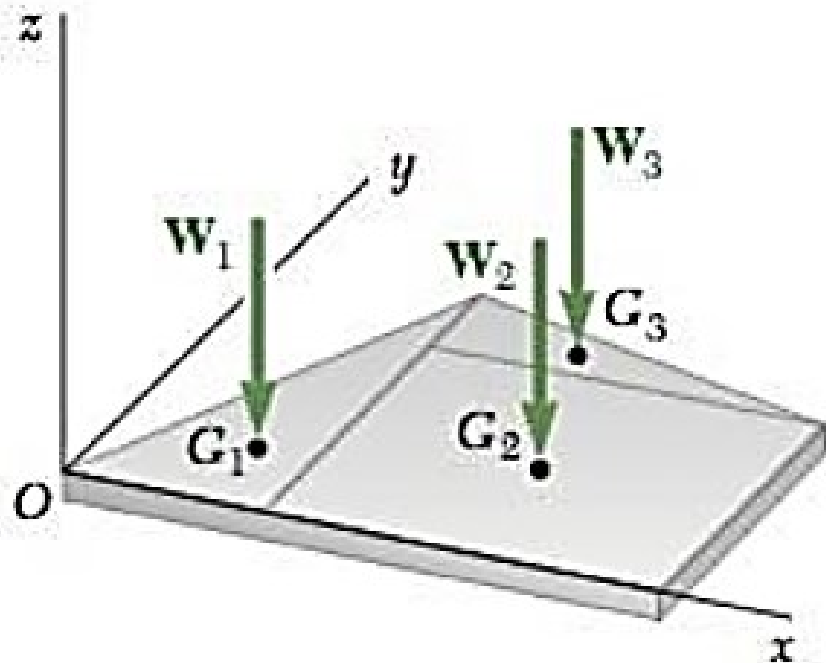
Localize o baricentro da placa mostrada na figura abaixo.

Use os dados:

$A_1 = 300 \times 900 \text{ mm}$; $W_1 = 100 \text{ kN}$, $x_1 = 200 \text{ mm}$; $y_1 = 300 \text{ mm}$

$A_2 = 600 \times 700 \text{ mm}$; $W_2 = 25 \text{ kN}$, $x_2 = 600 \text{ mm}$; $y_3 = 350 \text{ mm}$

$A_3 = 600 \times 200 \text{ mm}$; $W_3 = 75 \text{ kN}$, $x_3 = 500 \text{ mm}$; $y_3 = 800 \text{ mm}$



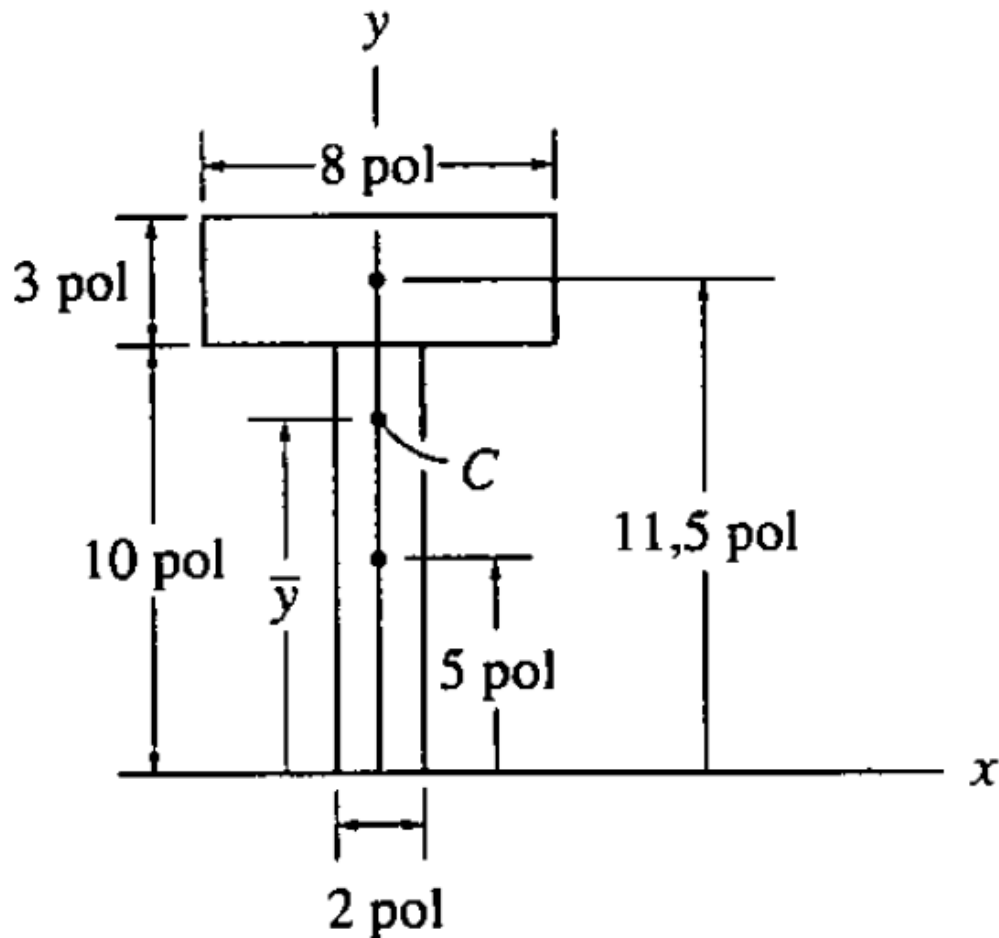
EXERCÍCIOS E ATIVIDADES

Orientação para realização das Atividades:

- Realizar as atividades a mão livre;
- Realizar diagramas e desenhos para compreensão;
- Realizar todas as contas de forma detalhada;
- Colocar as repostas principais a caneta;
- Entregar as atividades e resolução dos exercícios em forma digital na sala virtual da disciplina.

EXERCÍCIO 1

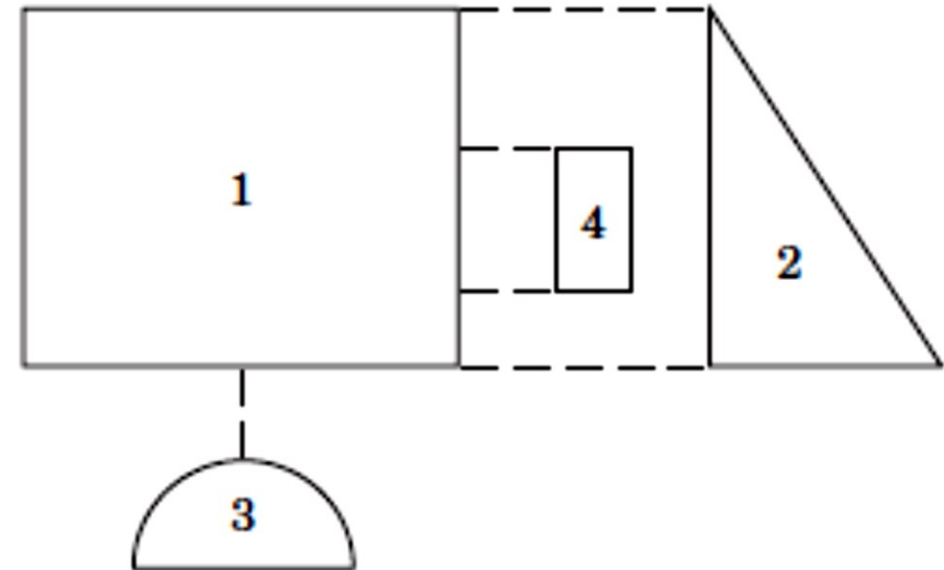
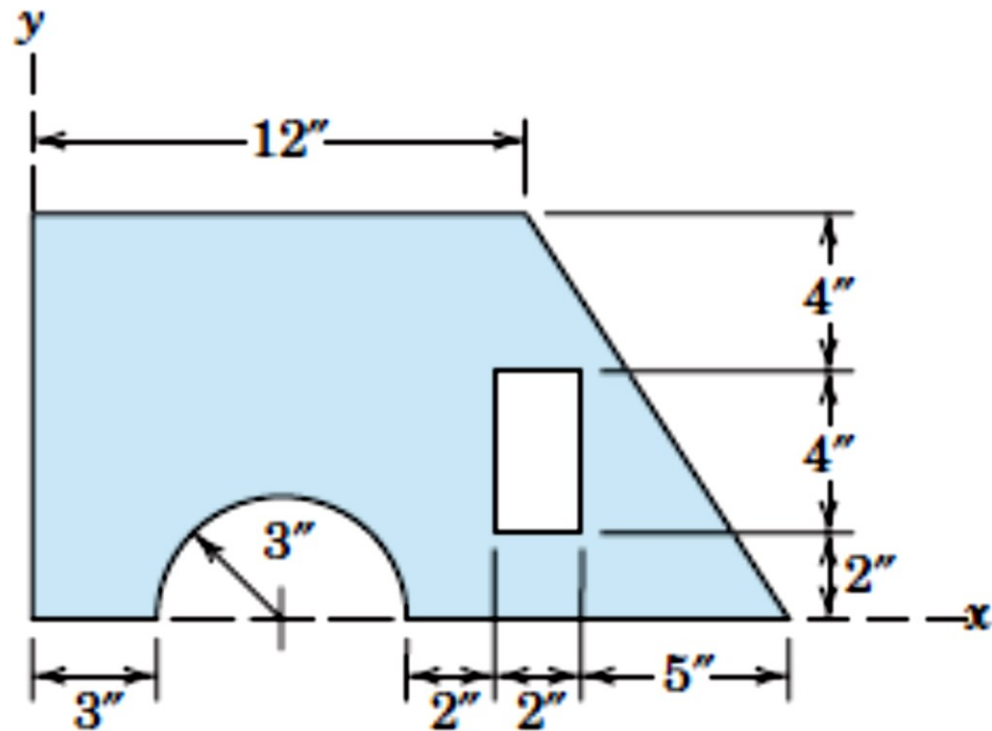
Localize o centroide da figura mostrada abaixo.



Respostas:
 $x = 0 \text{ pol}$
 $y = 8,545 \text{ pol}$

EXERCÍCIO 2

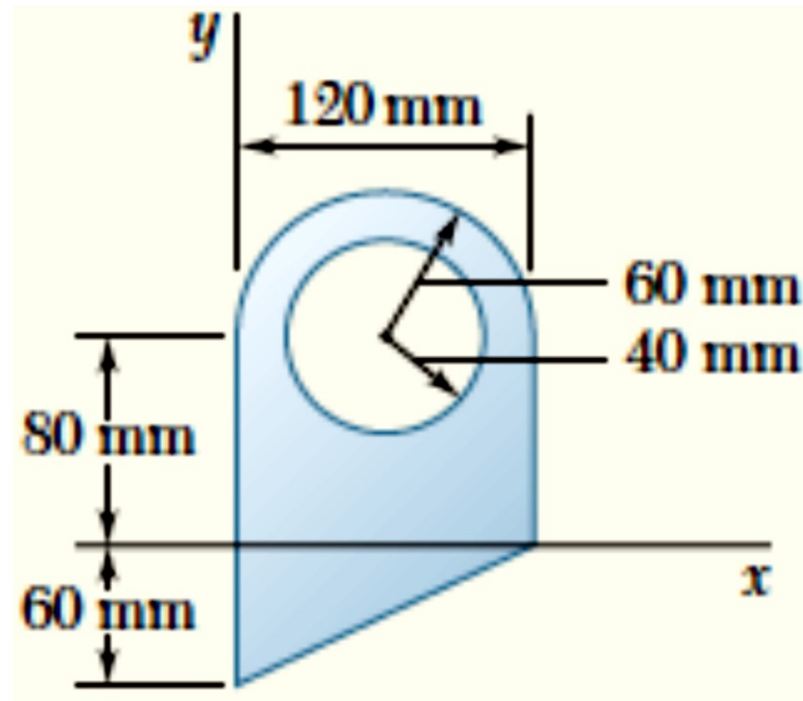
Localize o centroide da área sombreada



Respostas:
 $x = 8,74$ pol
 $y = 4,87$ pol

EXERCÍCIO 3

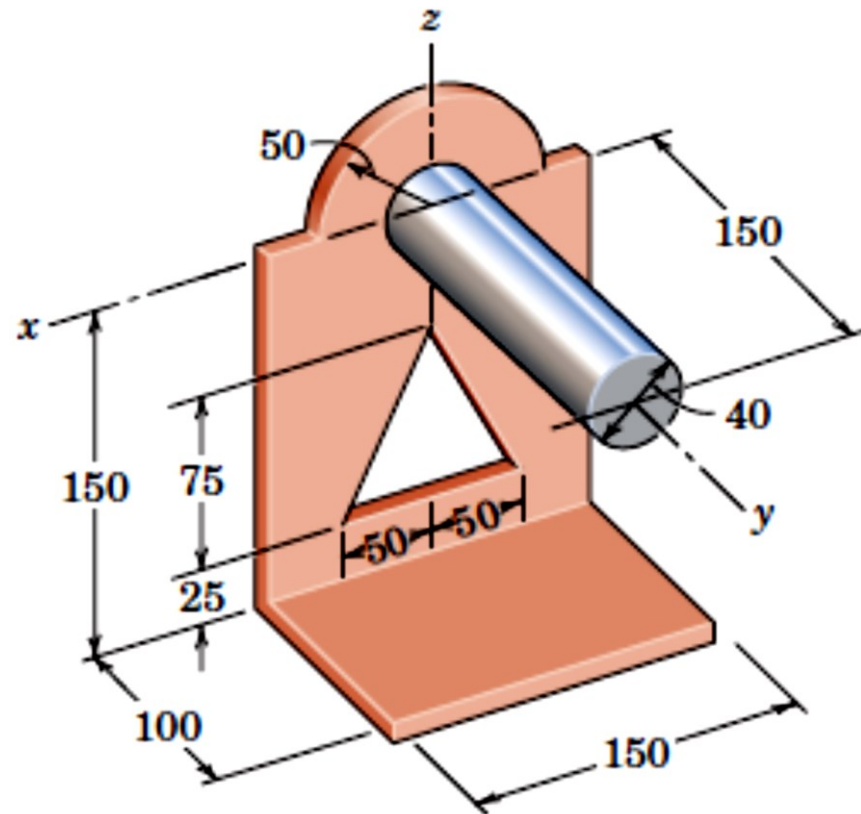
Para a área plana mostrada, determine a localização do centroide



Respostas:
 $x = 53,7$ pol
 $y = 17,3$ pol

EXERCÍCIO 4

Localize o centro de massa do conjunto formado por um suporte e um eixo. A face vertical é feita de uma chapa de metal que tem uma massa de $25 \text{ [kg/m}^2\text{]}$. O material da base horizontal tem uma massa de $40 \text{ [kg/m}^2\text{]}$ e o eixo de aço tem uma densidade de $7,83 \text{ [g/m}^3\text{]}$.



Respostas:

$$x = 0$$

$$y = 26$$

$$z = 49$$