Ministério da Educação
UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
Campus Cornélio Procópio

AULA 10

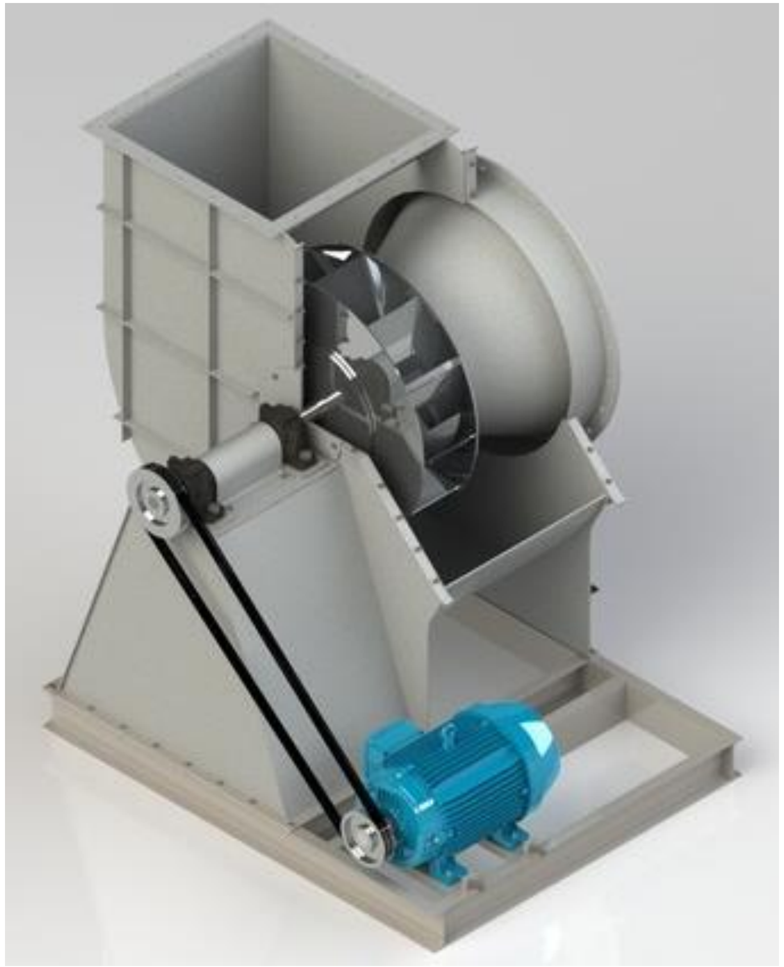
TORÇÃO EM EIXOS ÁRVORES

Professor: Dr. Paulo Sergio Olivio Filho

CONTEÚDO DA AULA

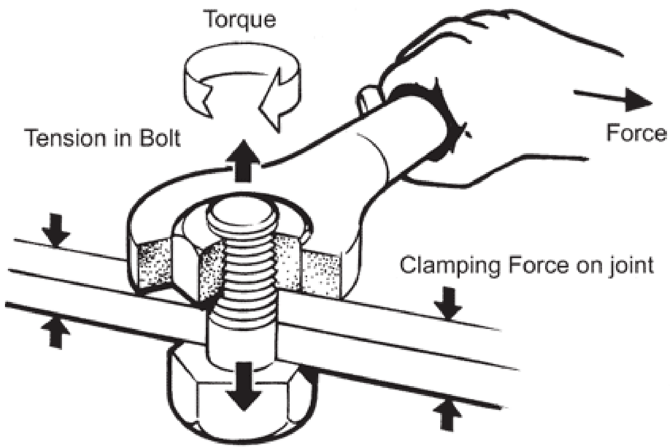
UTFPR
CORNÉLIO PROCÓPIO

- Efeitos da aplicação de esforços torcionais
- Efeitos torcionais em eixos e tubos
- Determinação da distribuição de tensão
- Análise de ângulo de torção



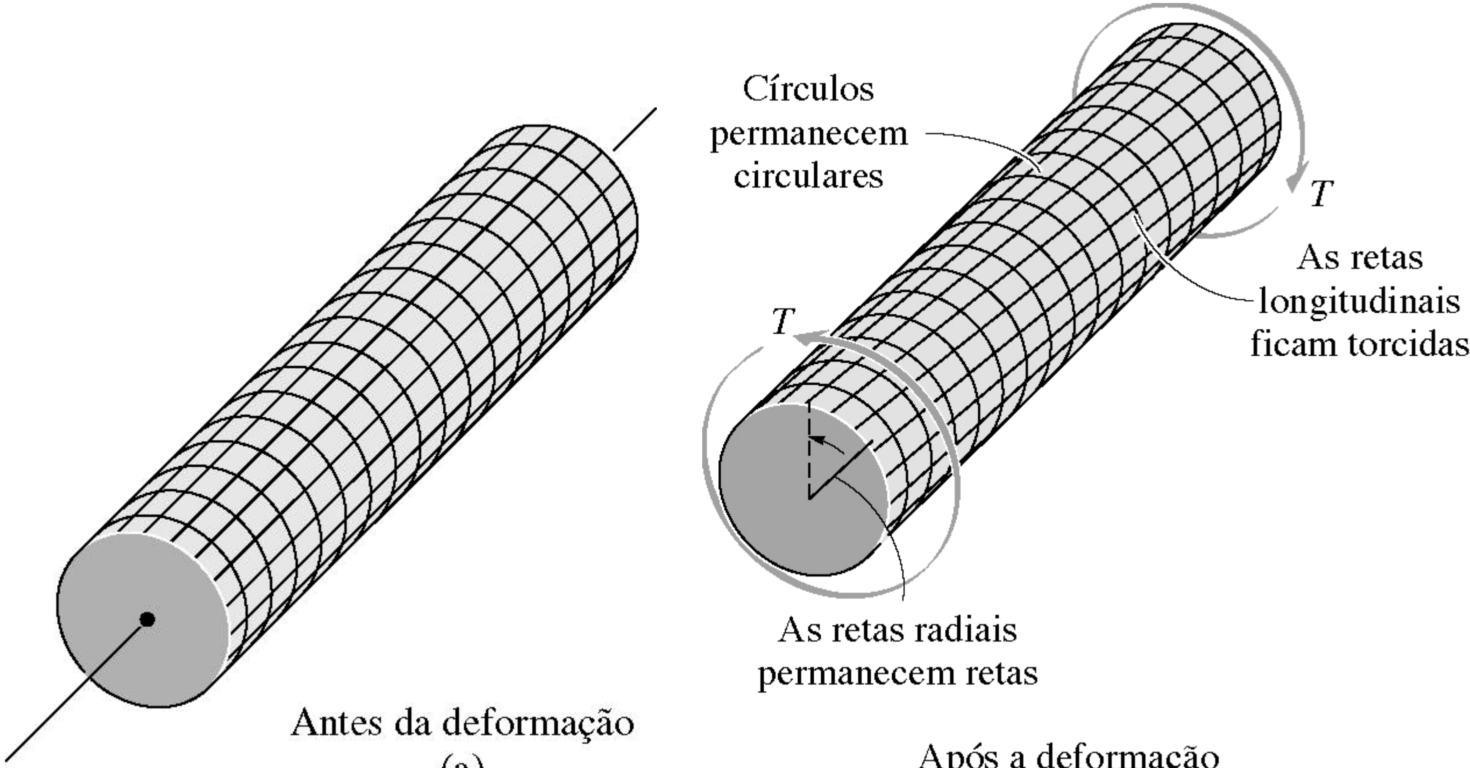
TORQUE

Torque é o momento que tende a torcer o membro em torno de seu eixo longitudinal.



Quando o torque é aplicado, os círculos e as retas longitudinais da grelha originalmente marcada no eixo tendem a se distorcer com o padrão mostrado na figura

Se o ângulo de rotação formado no eixo for pequeno, o comprimento do eixo e seu raio permanecerão inalterados.

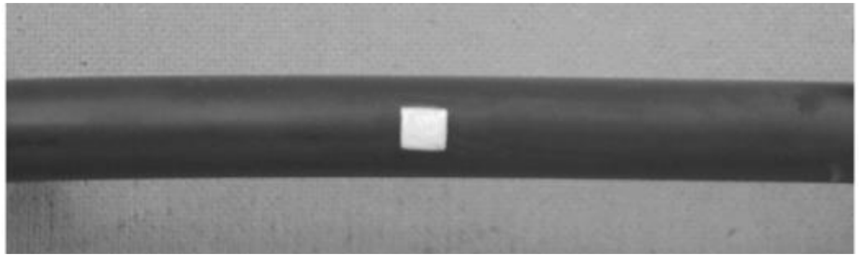


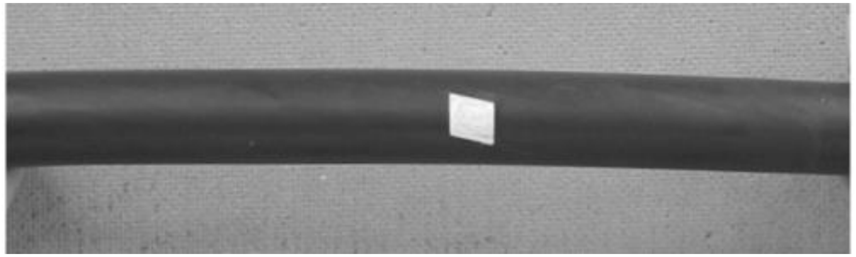
Antes da deformação
(a)

Após a deformação
(b)

TORQUE

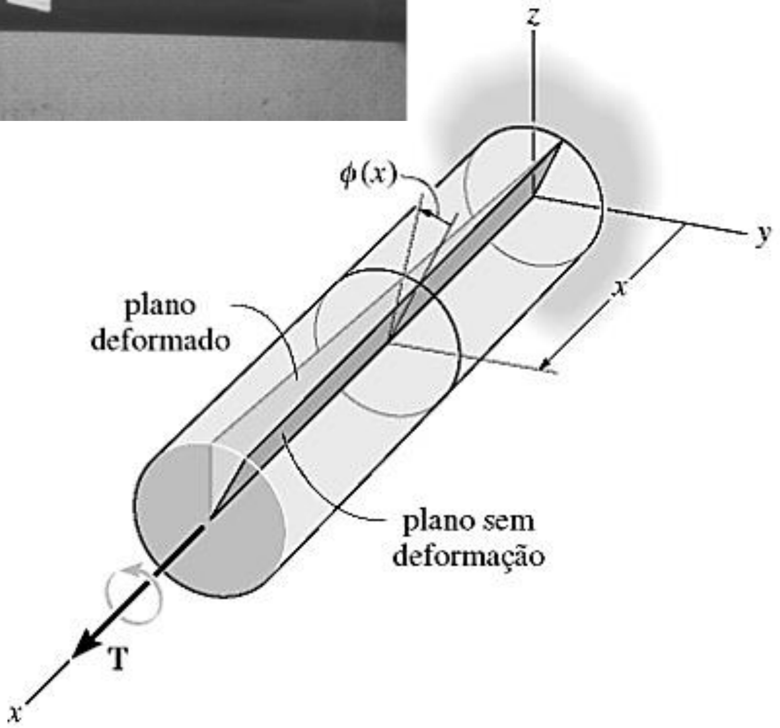
Se o eixo estiver preso em uma extremidade e for aplicado um torque na outra extremidade, o plano sombreado da figura abaixo se distorcerá e assumirá um forma obliqua como mostrado.





A linha radial localizada na seção transversal a uma distância x da extremidade fixa do eixo girará por meio de um ângulo $\phi(x)$.

O ângulo $\phi(x)$, assim definido, é denominado de ângulo de torção. Ele depende da posição de x e varia ao longo do eixo como mostrado.



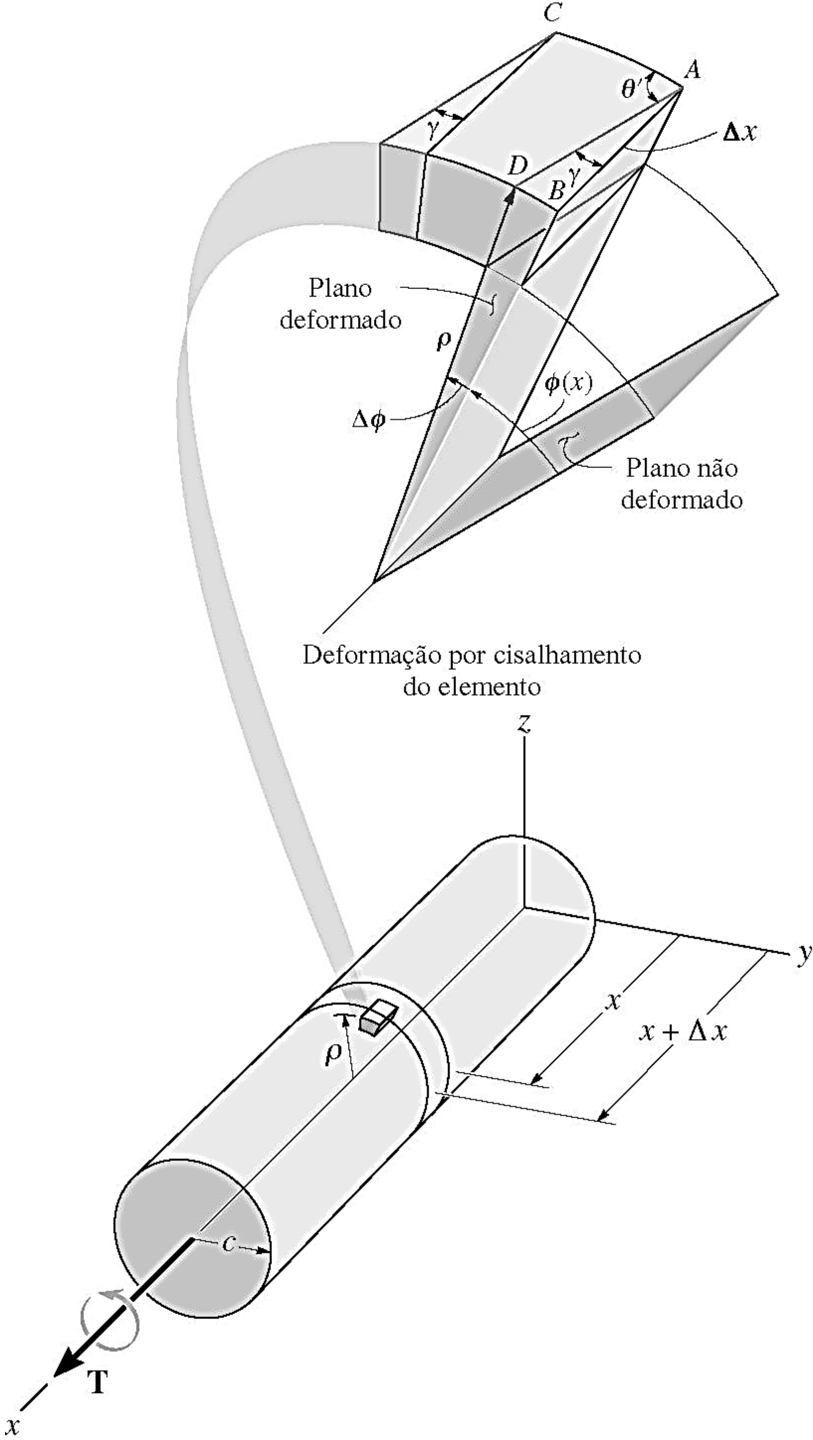
TORQUE

A fim de se compreender como a distorção deforma o material, vamos isolar um elemento pequeno localizado a uma distância radial (*ρ)* da linha de centro do eixo da figura ao lado.

A face posterior por *ϕ(x)*, e a face anterior *ϕ(x)* + *Δ(x*). O resultado é que a diferença entre as rotações, torna o elemento sujeito a deformação por cisalhamento.

Para calcular essa deformação observe que antes da deformação principal o ângulo entre as bordas AB e AC era de 90º, depois da deformação, as bordas do elemento passa para AD e AC e o ângulo entre elas θ.

$$\gamma = \frac{\pi}{2} - \lim_{\substack{C \to A \text{ along } CA \\ B \to A \text{ along } BA}} \theta'$$



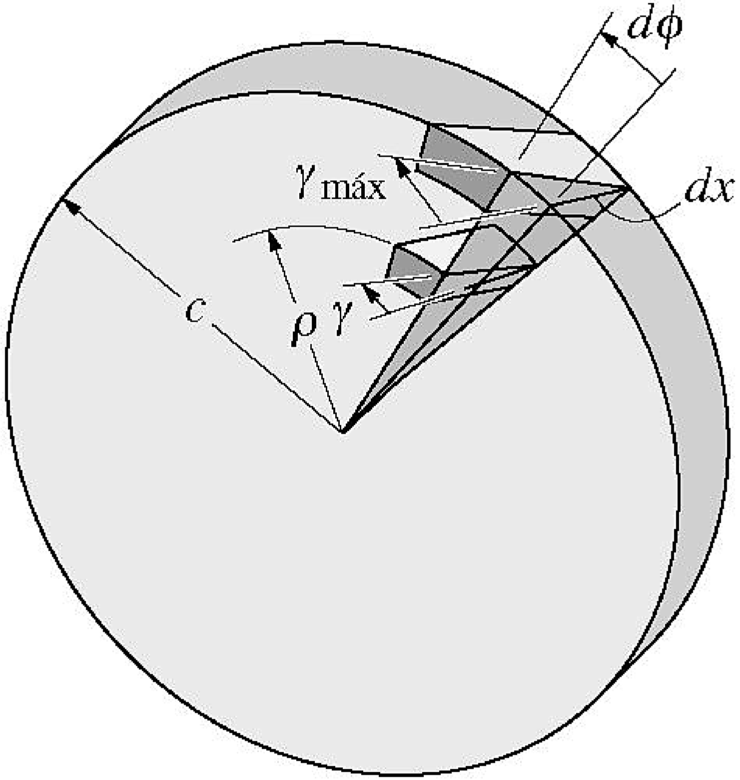
DEFORMAÇÃO ANGULAR

A deformação por cisalhamento no interior do eixo varia linearmente ao longo de qualquer reta radial, de a um máximo y_{max} em seu limite externo.

Como $d\phi/dx = y/\rho = y_{max}/c$, então:

$$\gamma = \left(\frac{\rho}{c}\right)\gamma_{máx}$$

Os resultados obtidos nesse caso também são válidos para tubos circulares.



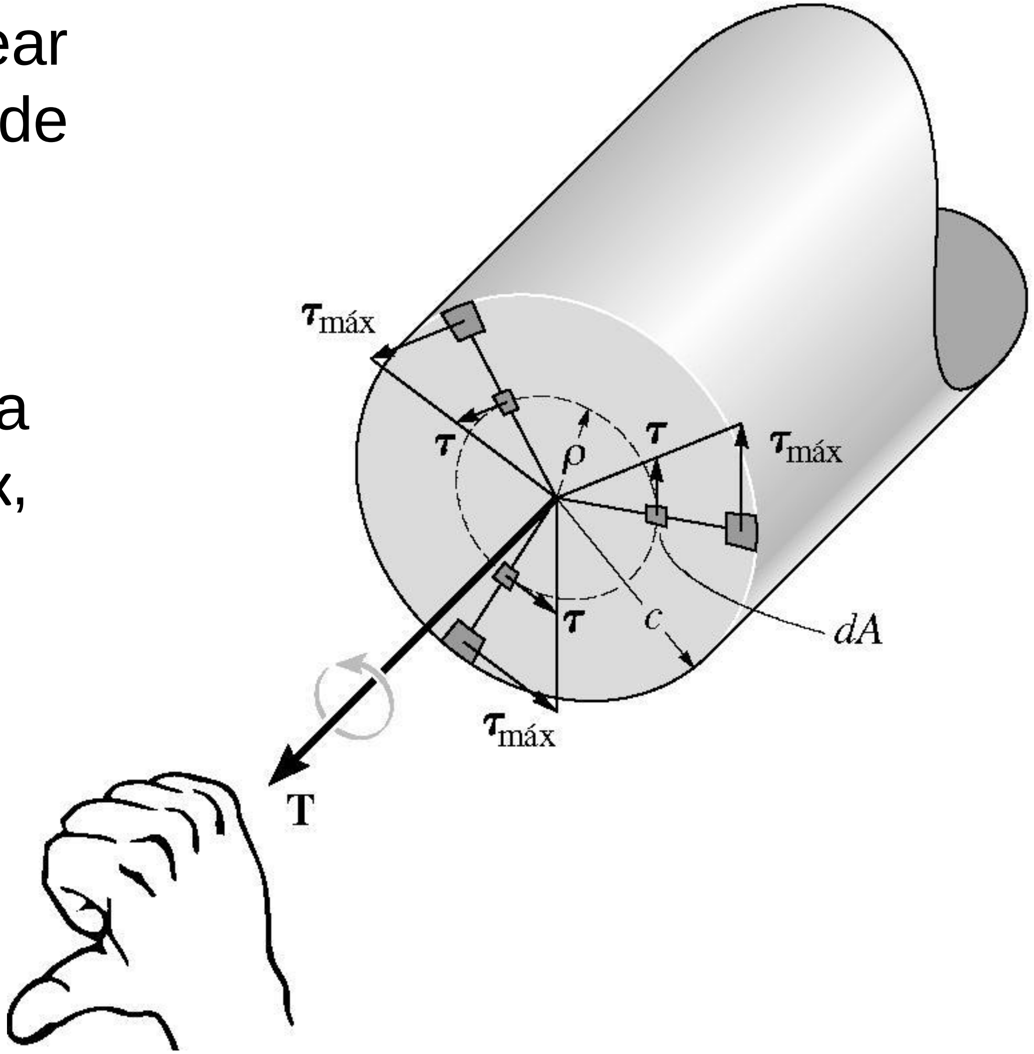
A deformação por cisalhamento do material aumenta linearmente de acordo com ρ, isto é, $\gamma = (\rho/c)\gamma_{máx}$

TENSÃO DE CISALHAMENTO

Se o material for linear-elástico, então a lei de Hooke é aplicada, observado uma variação linear na deformação por cisalhamento ao longo de qualquer reta radial na seção transversal.

Devido a proporcionalidade de triângulos, ou a lei de Hooke ($\tau = G \cdot \gamma$) e pela equação $\gamma = (\rho/c)\,\gamma max$, podemos escrever:

$$\tau = \left(\frac{\rho}{c}\right)\tau_{máx}$$



TENSÃO DE CISALHAMENTO

Cada elemento de área (dA), localizado em *ρ,* está submetido a uma força dF = τ dA. O torque produzido por essa força é dT = ρ(τ dA).

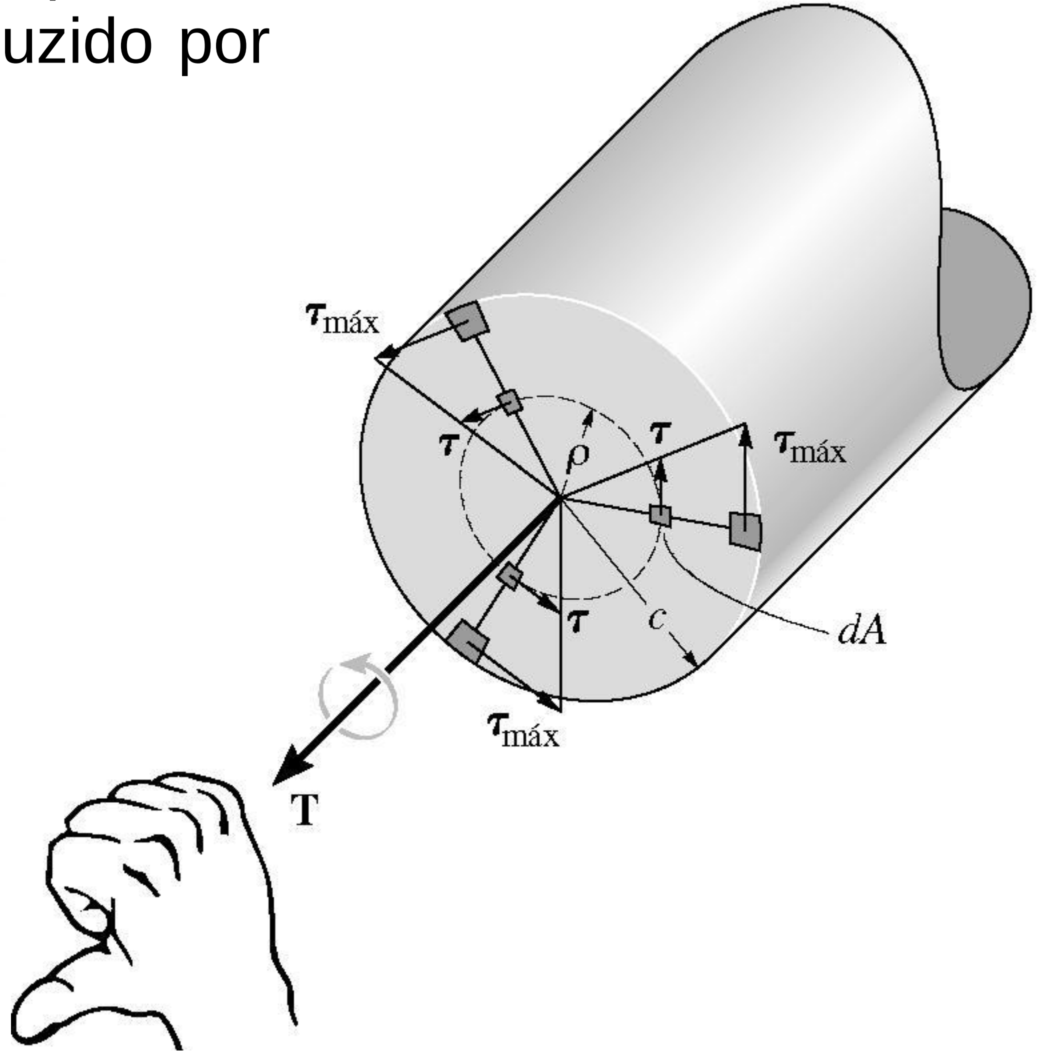
Portanto para toda a seção transversal:

$$T = \int_A \rho(\tau\, dA) = \int_A \rho\left(\frac{\rho}{c}\right)\tau_{\text{máx}}\, dA$$

Como τ_{max}/c é constante,

$$T = \frac{\tau_{\text{máx}}}{c}\int_A \rho^2\, dA$$

A integral dessa equação depende somente da geometria do eixo.



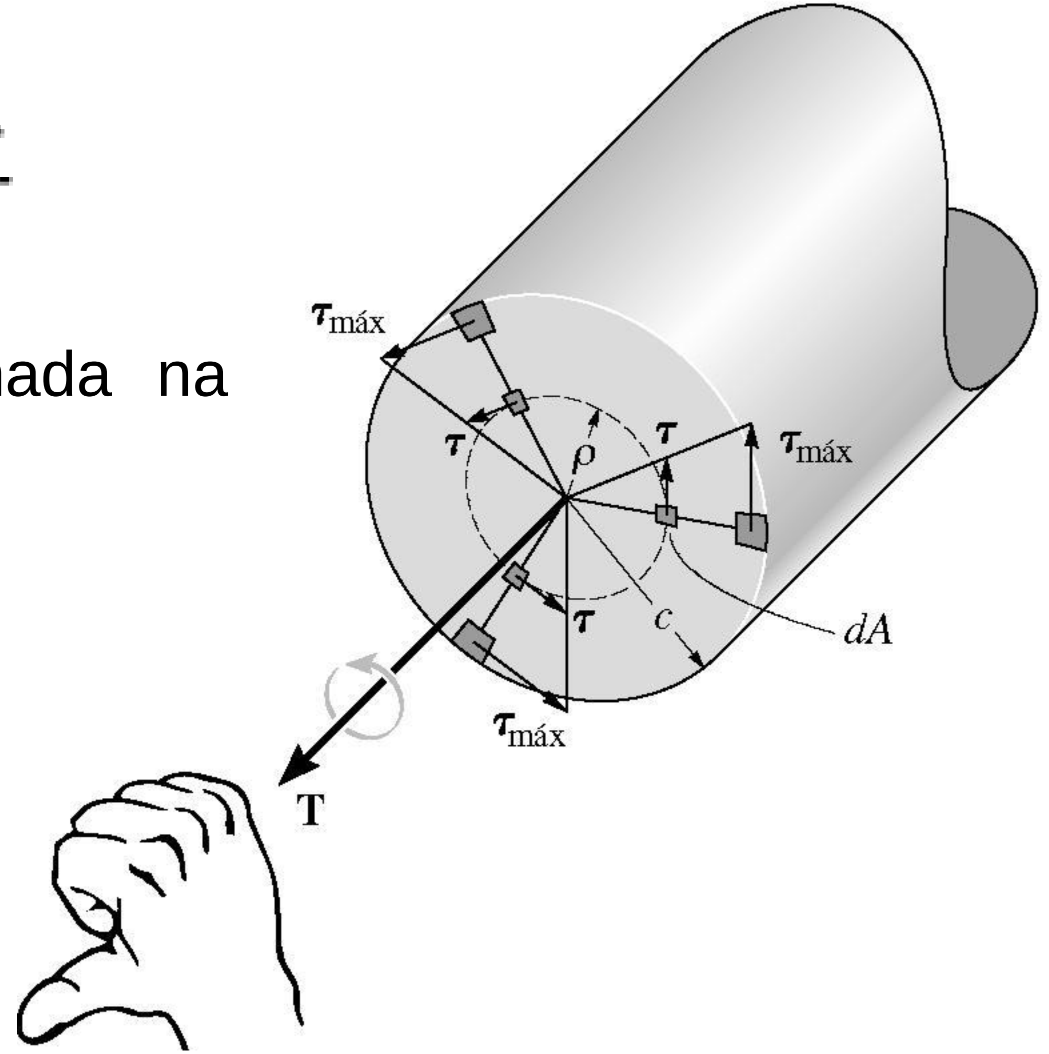
TORQUE

Essa integral representa o produto da tensão cisalhante e o momento de inércia polar.

$$T = \frac{\tau_{máx}}{c} \int_A \rho^2 \, dA \quad \Rightarrow \quad \tau_{máx} = \frac{Tc}{J}$$

A tensão de cisalhamento nominal determinada na seção intermediária é obtida por:

$$\tau = \frac{T\rho}{J}$$



OBS: Essa formula é usada somente se o eixo for circular e o material for homogênio e comporta-se de maneira linear-elástica.

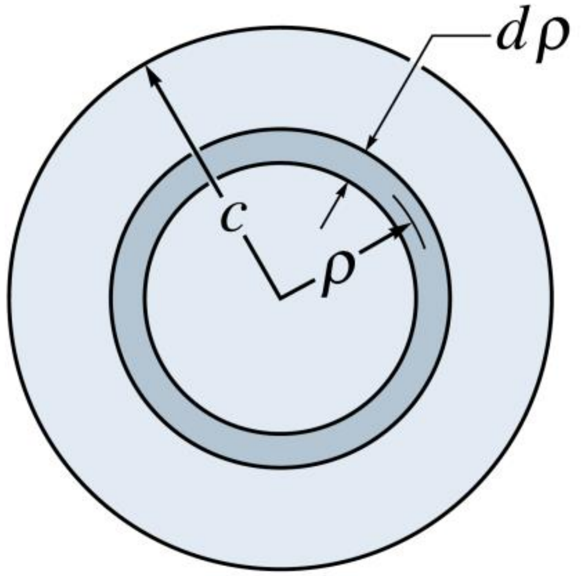
MOMENTO DE INÉRCIA POLAR

EIXO SÓLIDO: Se o eixo tiver uma seção transversal maciça, determinaremos o momento de inércia polar J usando um elemento de área sob a forma de um anel infinitesimal com espessura *dρ* e circunferência *2πρ dρ,* então:

$$J = \int_A \rho^2 \, dA = \int_0^c \rho^2 \,(2\pi\rho \, d\rho) = 2\pi \int_0^c \rho^3 \, d\rho = 2\pi\left(\frac{1}{4}\right)\rho^4 \Big|_0^c$$

$$J = \frac{\pi}{2}c^4$$

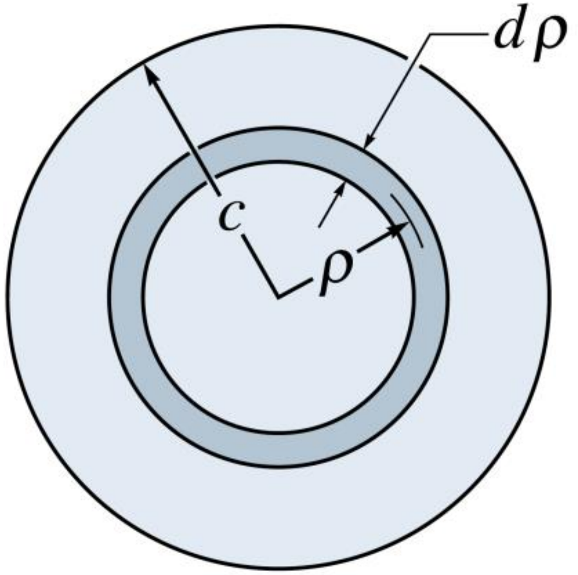
Observe que *J* é uma propriedade geométrica da área do circulo e é sempre positiva. As unidade usadas para sua medida são mm^4 e pol^4

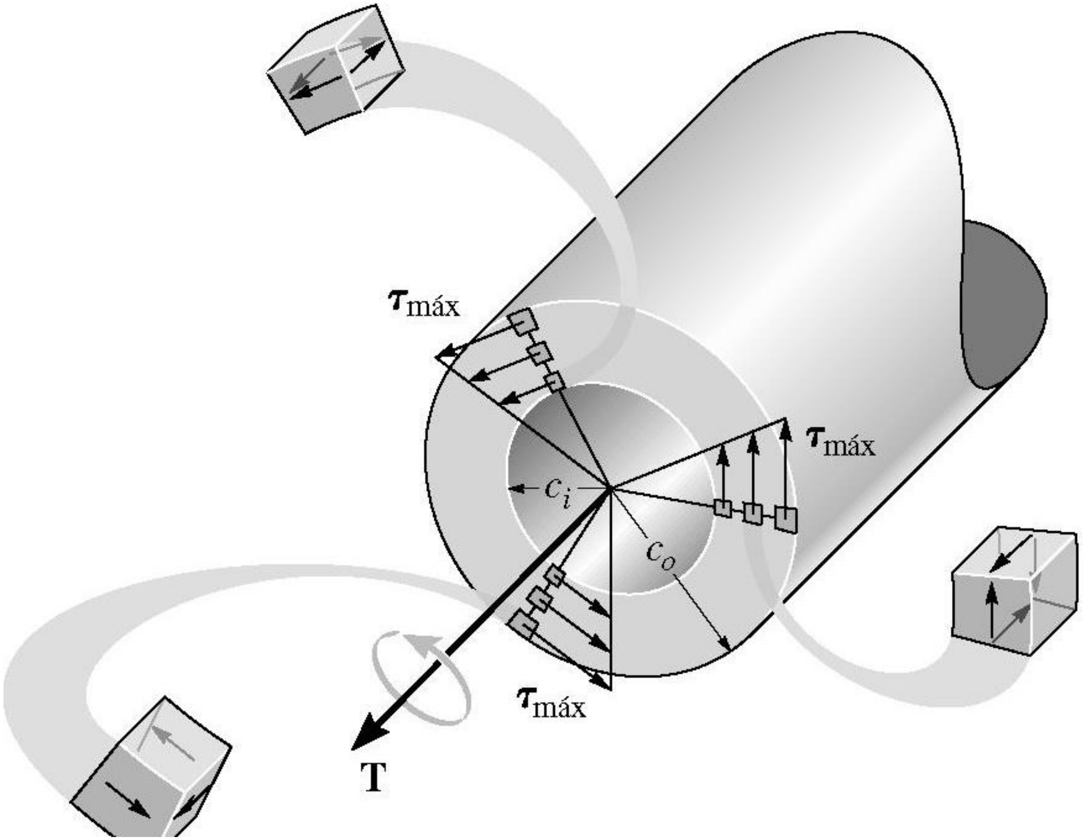


MOMENTO DE INÉRCIA POLAR

EIXO TUBULAR: Se um eixo tem seção transversal tubular (eixo vazado), com raio interno c_i e raio externo c_e, então pela equação anterior, determinamos seu momento de inercia polar subtraindo o J para o eixo de raio c_i daquele determinado para o eixo de raio c_e.

$$J = \frac{\pi}{2}(c_e^4 - c_i^4)$$



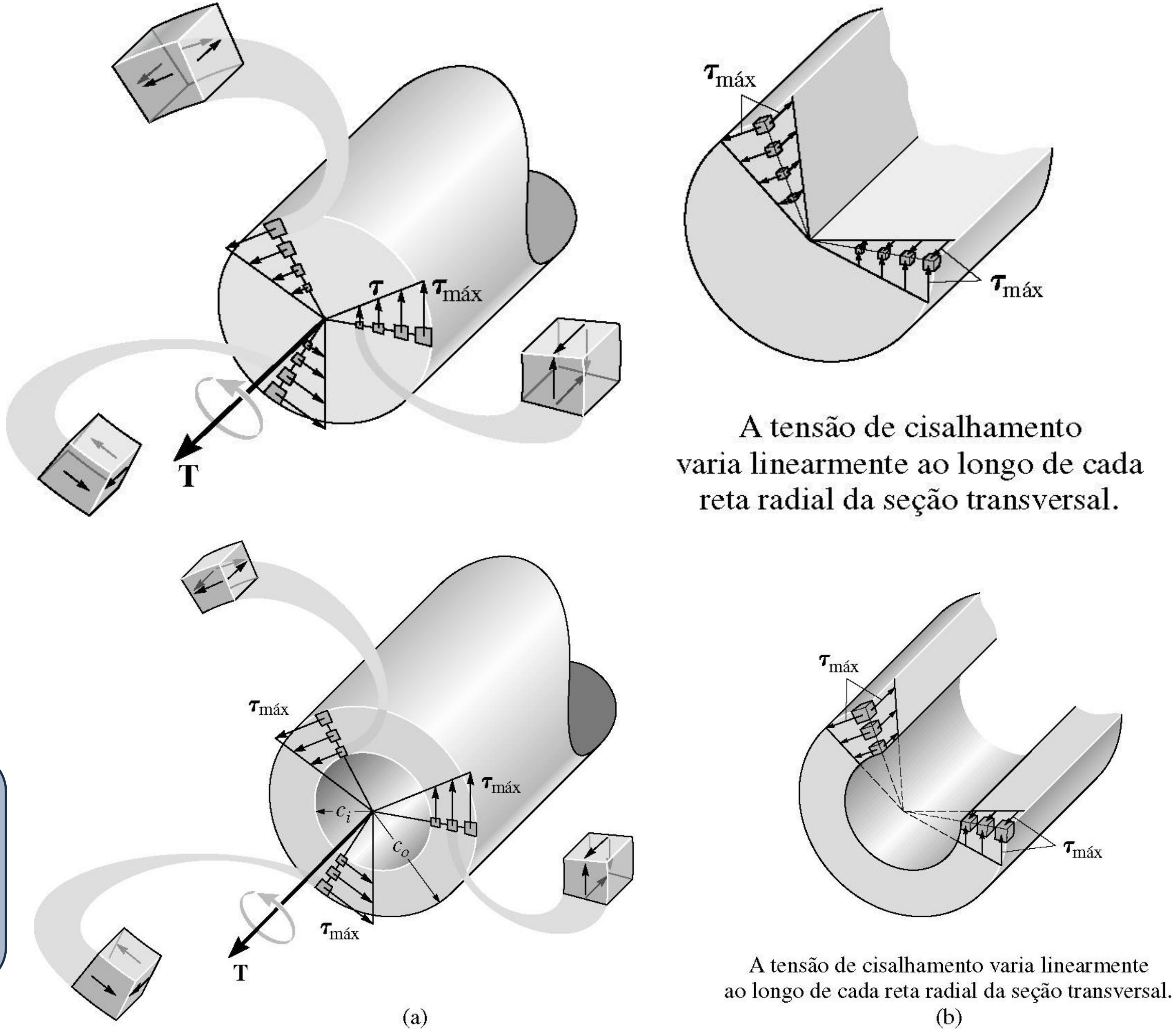


TENSÃO DE CISALHAMENTO

A tensão de cisalhamento em um eixo maciço varia linearmente ao longo de cada reta radial da seção transversal do eixo.

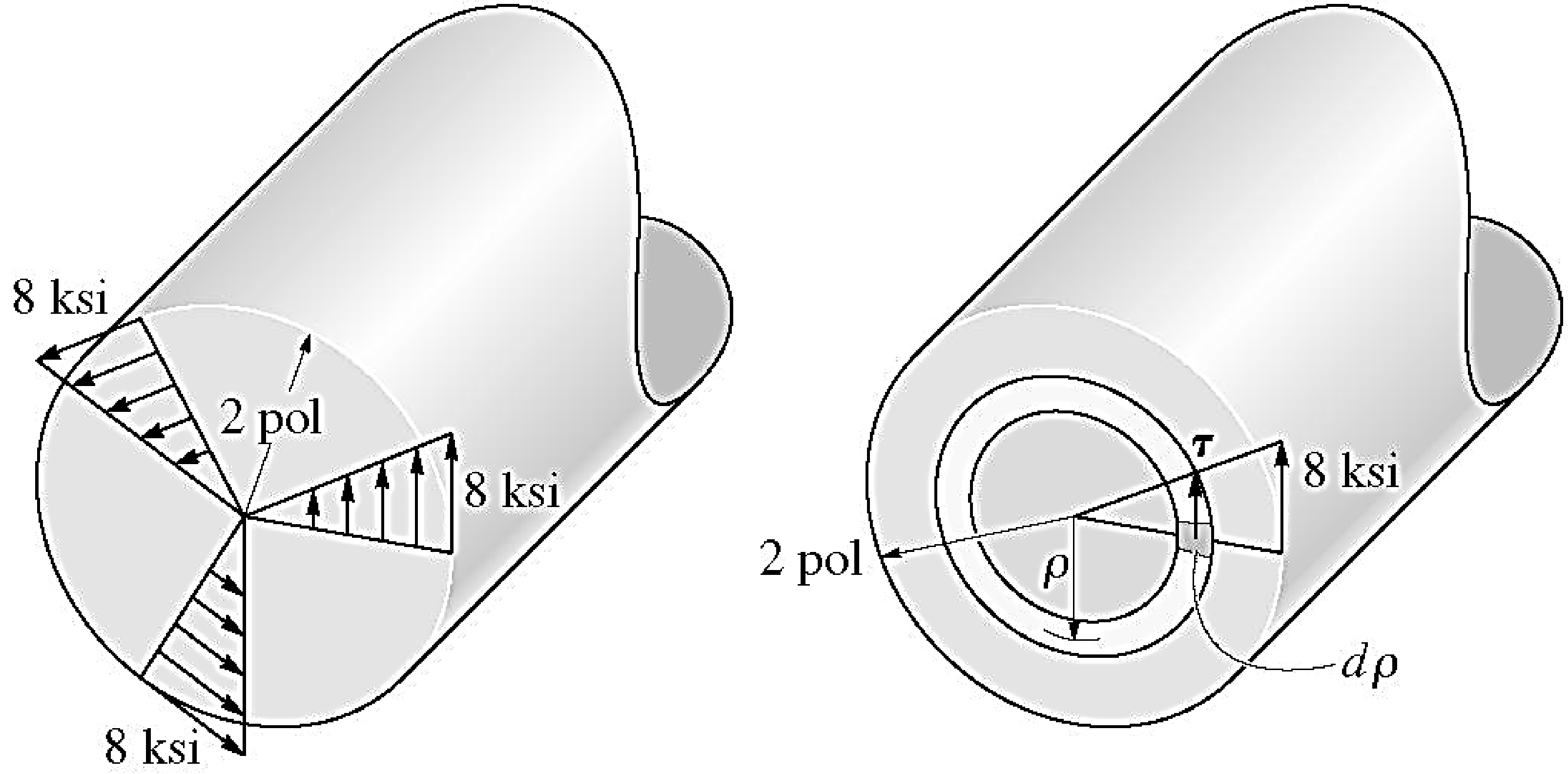
No eixo maciço, a tensão de cisalhamento é distribuída sobre a área da seção transversal varia linearmente ao longo de qualquer reta radial

OBS: Em qualquer seção transversal do eixo a tensão de cisalhamento máxima ocorre na superfície externa.



EXEMPLO 1

A distribuição de tensão em um eixo maciço foi esquematizada na figura abaixo ao longo de 3 retas radiais arbitrárias. Determine o torque interno resultante na sessão.



EXEMPLO 1

Solução I:

Momento de Inércia Polar:

$$J = \frac{\pi}{2}(2 \text{ pol})^4 = 25{,}13 \text{ pol}^4$$

Torque Máximo:

$$\tau_{máx} = \frac{Tc}{J};$$

$$8 \text{ kip/pol}^2 = \frac{T(2 \text{ pol})}{(25{,}13 \text{ pol}^4)}$$

$$T = 101 \text{ kip} \cdot \text{pol}$$

Solução II:

Expressando a Tensão como Função da Posição Radial:

$$\frac{\tau}{\rho} = \frac{8 \text{ ksi}}{2 \text{ pol}} \longrightarrow \tau = 4\rho$$

Essa Tensão Atua em Todas as Partes do Elemento:

Para ÁREA: $dA = 2\pi\rho \, d\rho.$

Para FORÇA: $dF = \tau \, dA,$

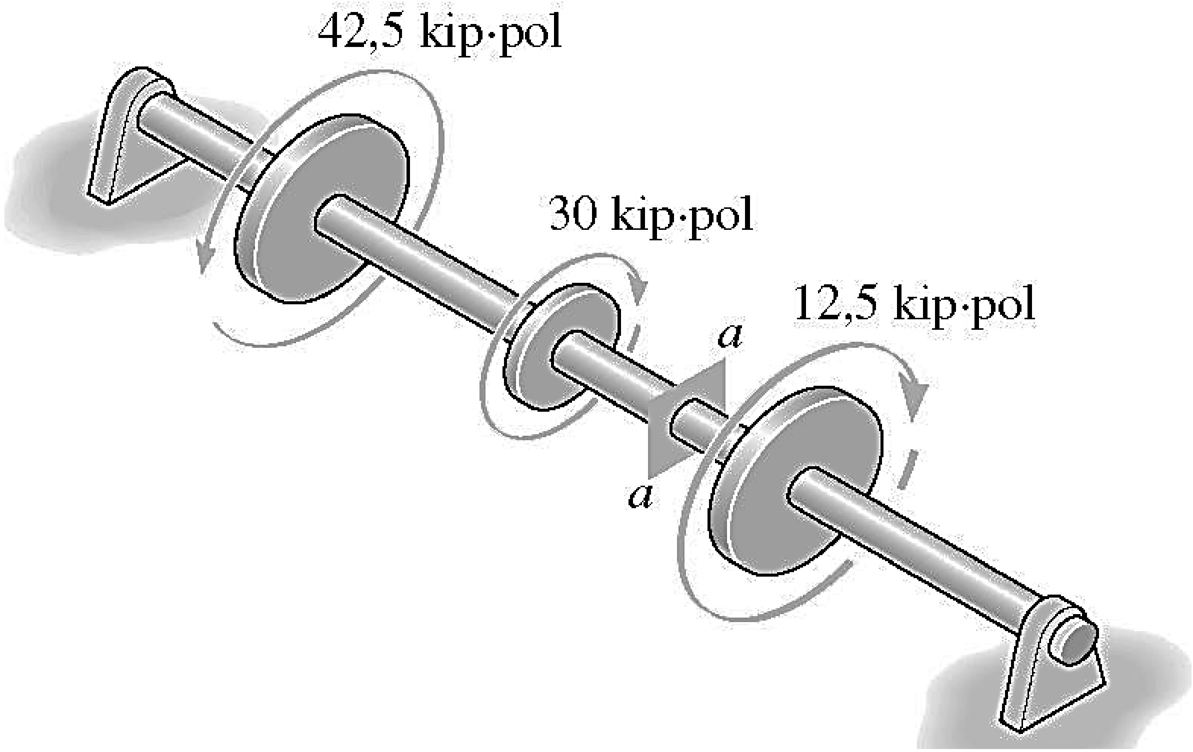
$$dT = \rho \, dF = \rho(\tau dA) = \rho(4\rho)2\pi\rho \, d\rho = 8\pi\rho^3 \, d\rho$$

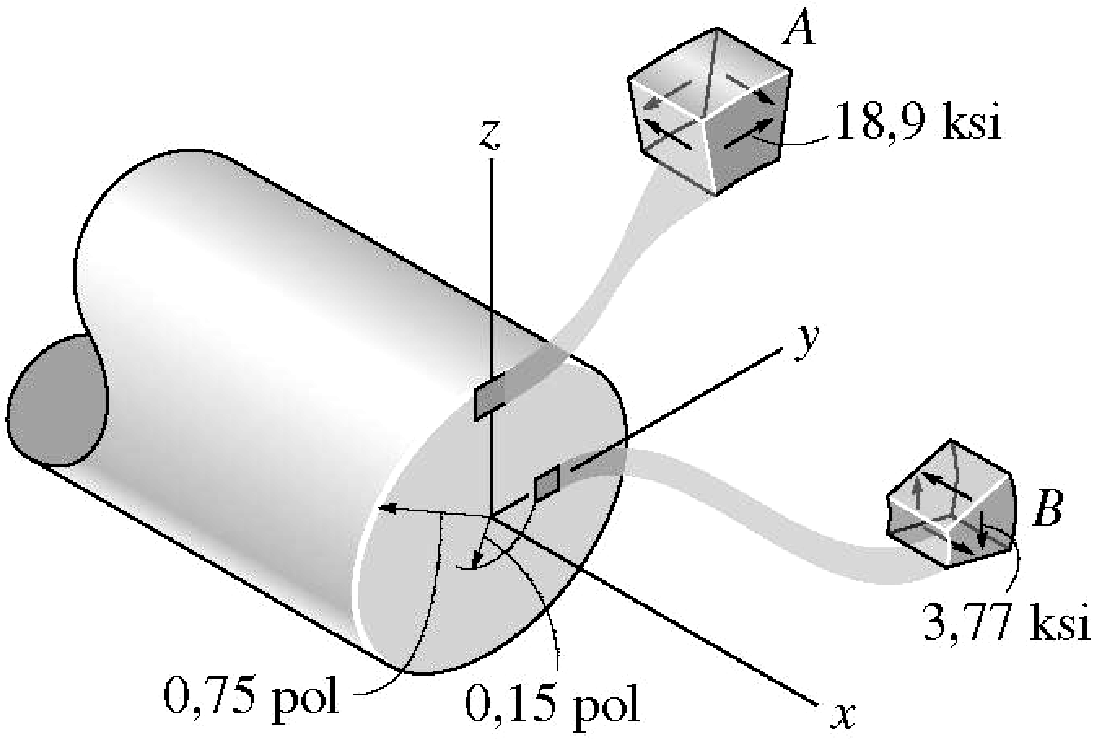
Somando as Tensões Temos:

$$T = \int_0^2 8\pi\rho^3 \, d\rho = 8\pi\left(\frac{1}{4}\rho^4\right)\Big|_0^2 = 101 \text{ kip} \cdot \text{pol}$$

EXEMPLO 2

O eixo árvore mostrado na figura é suportado por 2 mancais que estão sujeitos a 3 torques. Determine a tensão de cisalhamento desenvolvida nos pontos A e B localizados na sessão a-a.





EXEMPLO 2

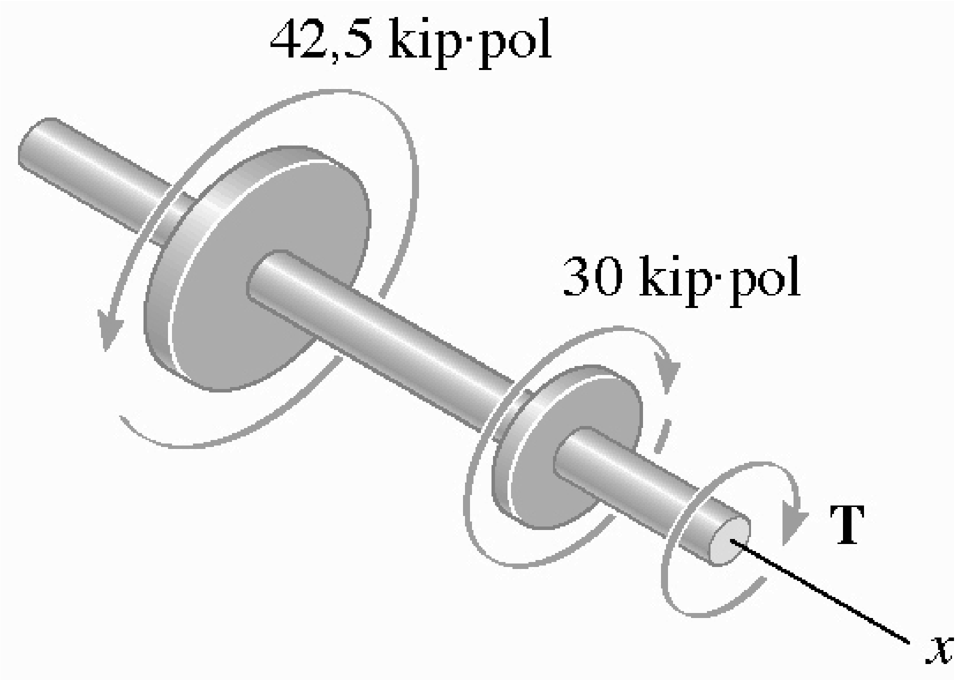
UTFPR CORNÉLIO PROCÓPIO

- **Torque Gerado na Seção a-a:**

$$\Sigma M_x = 0; \quad 42{,}5 \text{ kip} \cdot \text{pol} - 30 \text{ kip} \cdot \text{pol} - T = 0 \quad T = 12{,}5 \text{ kip} \cdot \text{pol}$$

- **Momento de Inércia Polar do eixo:**

$$J = \frac{\pi}{2}(0{,}75 \text{ pol})^4 = 0{,}497 \text{ pol}^4$$



- **Tensão de Cisalhamento no Ponto A:**

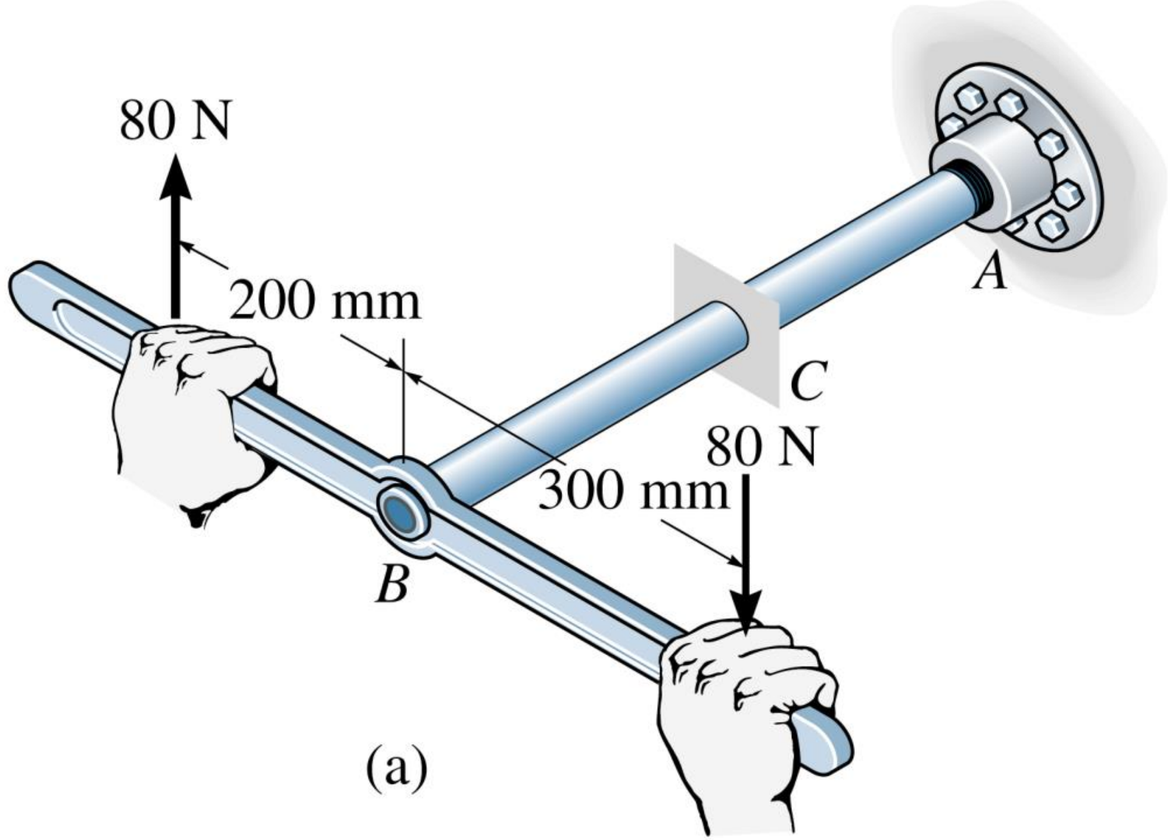
$$\tau_A = \frac{Tc}{J} = \frac{(12{,}5 \text{ kip} \cdot \text{pol})(0{,}75 \text{ pol})}{(0{,}497 \text{ pol}^4)} = 18{,}9 \text{ ksi}$$

- **Tensão de Cisalhamento no Ponto B:**

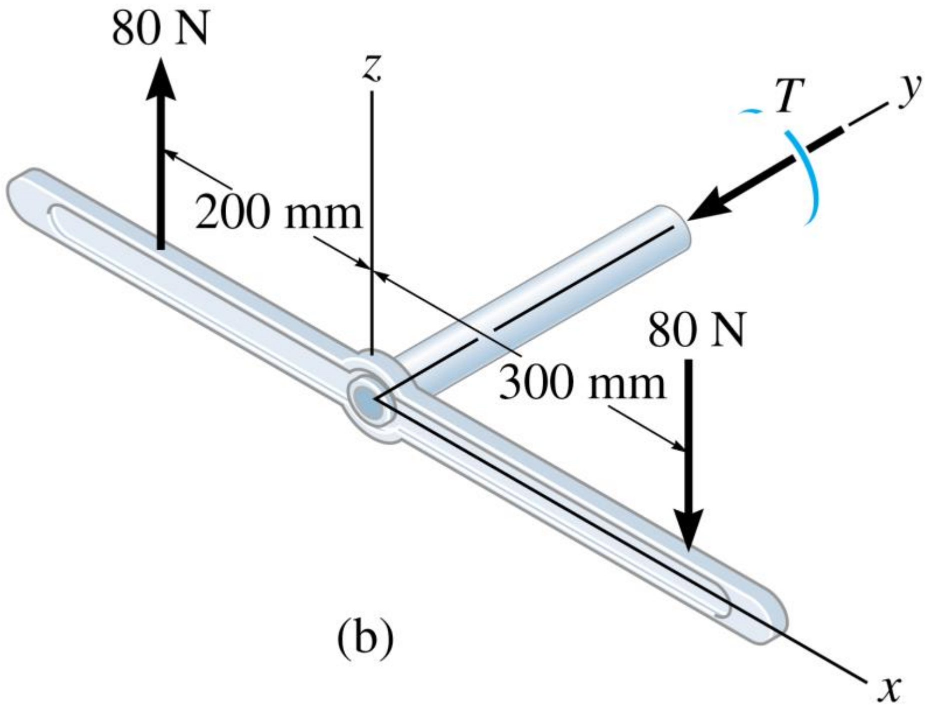
$$\tau_B = \frac{T\rho}{J} = \frac{(12{,}5 \text{ kip} \cdot \text{pol})(0{,}15 \text{ pol})}{(0{,}497 \text{ pol}^4)} = 3{,}77 \text{ ksi}$$

EXEMPLO 3

O tubo mostrado na figura tem diâmetro interno de 80 mm e diâmetro externo de 100 mm. Supondo que sua extremidade seja apertada contra o apoio em A por meio de um torquímetro em B, determine a tensão de cisalhamento desenvolvida no material nas extremidades internas e internas do tubo.



(a)



(b)

EXEMPLO 3

UTFPR CORNÉLIO PROCÓPIO

Torque Interno na Seção do Tubo:

$$\Sigma M_y = 0; \qquad 80\ \text{N}(0{,}3\ \text{m}) + 80\ \text{N}(0{,}2\ \text{m}) - T = 0$$

$$T = 40\ \text{N} \cdot \text{m}$$

Momento de Inércia Polar:

$$J = \frac{\pi}{2}[(0{,}05\ \text{m})^4 - (0{,}04\ \text{m})^4] = 5{,}80(10^{-6})\ \text{m}^4$$

Tensão de Cisalhamento na Parede Externa do Tubo:

$$\tau_o = \frac{Tc_e}{J} = \frac{40\ \text{N} \cdot \text{m}(0{,}05\ \text{m})}{5{,}80(10^{-6})\ \text{m}^4} = 0{,}345\ \text{MPa}$$

Tensão de Cisalhamento na Parede Interna do Tubo:

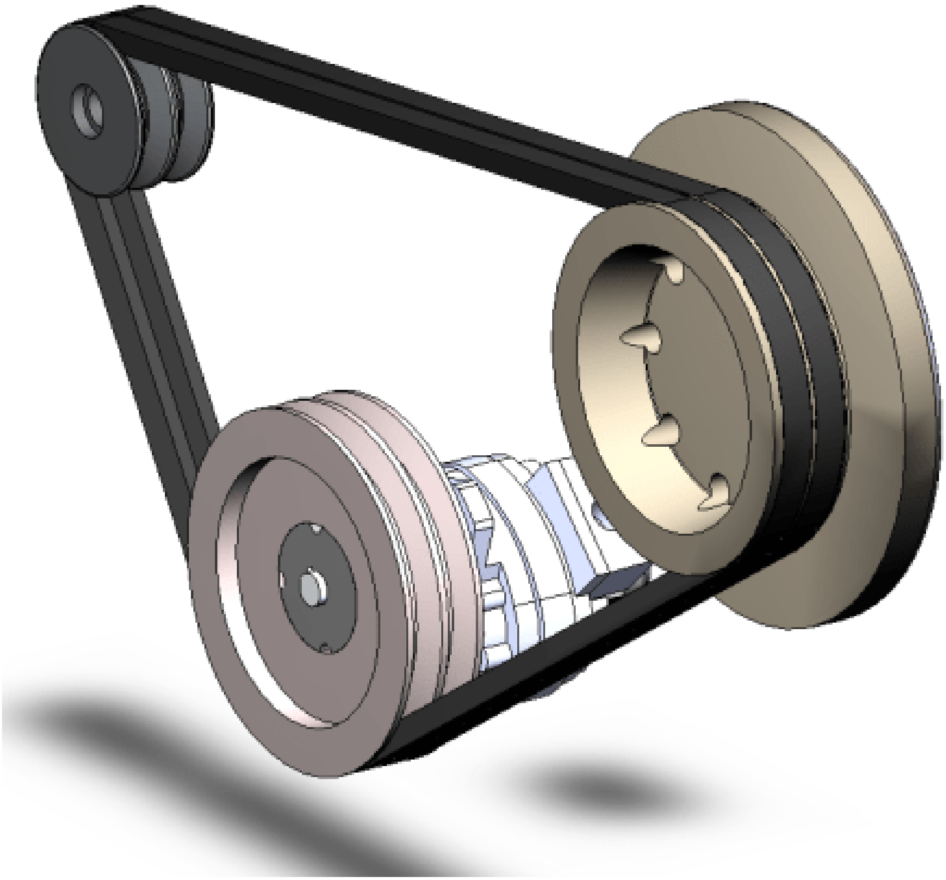
$$\tau_i = \frac{Tc_i}{J} = \frac{40\ \text{N} \cdot \text{m}(0{,}04\ \text{m})}{5{,}80(10^{-6})\ \text{m}^4} = 0{,}276\ \text{MPa}$$

TRANSMISSÃO DE POTÊNCIA

Em eixos arvores maciços e tubos com seção transversal circular são frequentemente empregados para transmitir potência gerada por máquinas.

A potência é definida com sendo o trabalho realizado por unidade de tempo.

$$P = \frac{T\,d\theta}{dt}$$



A velocidade angular do *eixo é ω = dθ / dt,* então podemos expressar a potência como:

$$P = T\omega$$

TRANSMISSÃO DE POTÊNCIA

CORNÉLIO PROCÓPIO

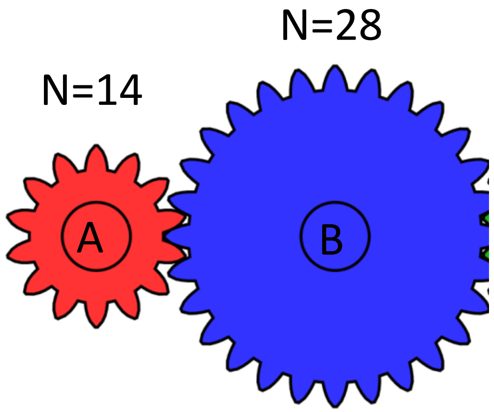
Quando a potência transmitida por um eixo e sua frequência de rotação são conhecidas, o torque desenvolvido no eixo é determinado por:

$$T = P / 2\pi f$$

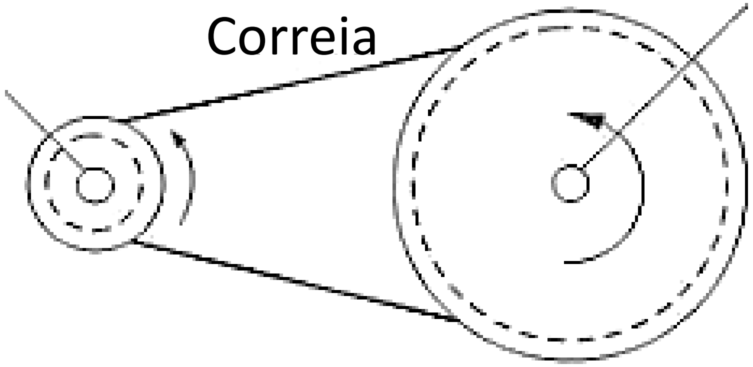
Conhecendo *o torque* T e a tensão de cisalhamento admissível para o material, τ_{adm} Podemos determinar a área da seção transversal usando a fórmula da torção, desde que o material seja linear-elástico. Em particular, o parâmetro geométrico J/c torna-se:

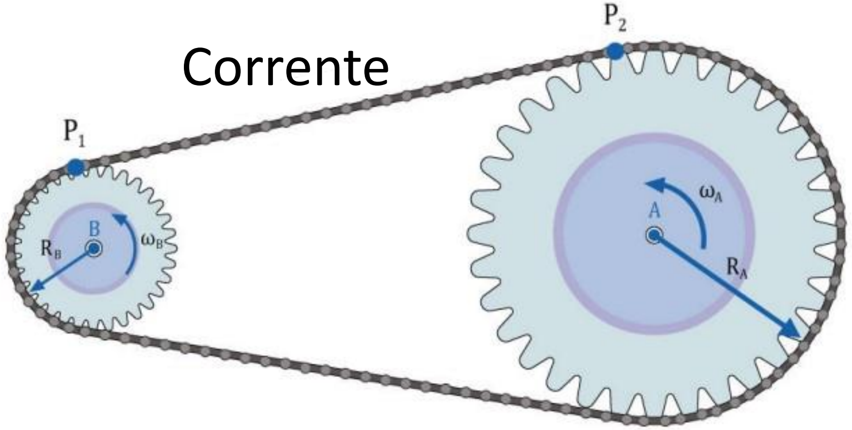
$$\frac{J}{c} = \frac{T}{\tau_{adm}}$$

Engrenagens



$$i_{AB} = \frac{28}{14}$$

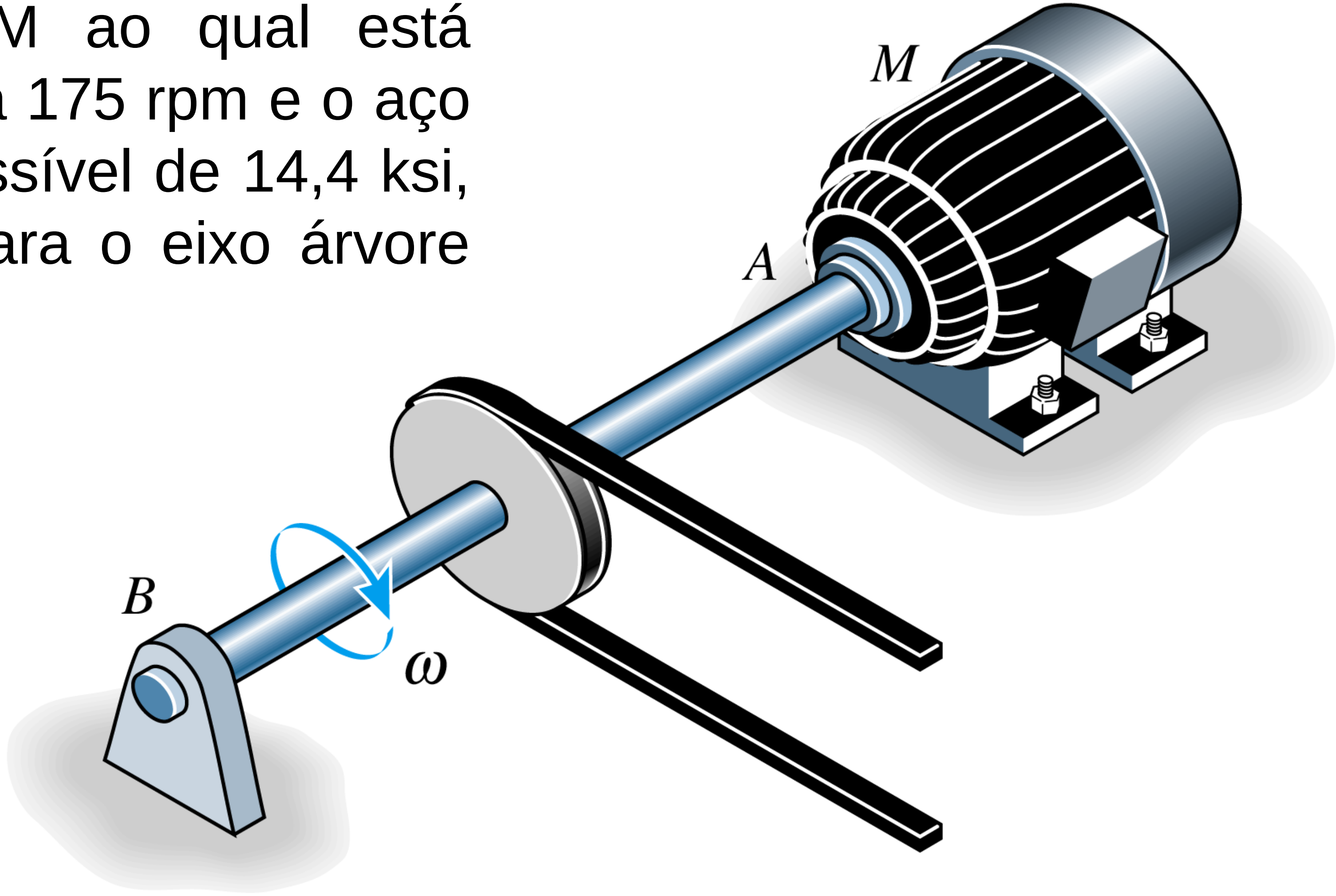




EXEMPLO 4

O eixo maciço AB mostrado na figura deve ser usado para transmitir 5 HP do motor M ao qual está acoplado. Supondo que o eixo gire a 175 rpm e o aço tenha tensão de cisalhamento admissível de 14,4 ksi, determine o diâmetro necessário para o eixo árvore com aproximação de 1/8 polegada.

$$1 \text{ hp} = 550 \text{ pés} \cdot \text{lb/s}^{*}$$



EXEMPLO 4

Calculo da Potência Transmitida em Watts:

$$P = 5\ \text{hp}\left(\frac{550\ \text{pés}\cdot\text{lb/s}}{1\ \text{hp}}\right) = 2.750\ \text{pés}\cdot\text{lb/s}$$

Calculo da Velocidade de Rotação Angular:

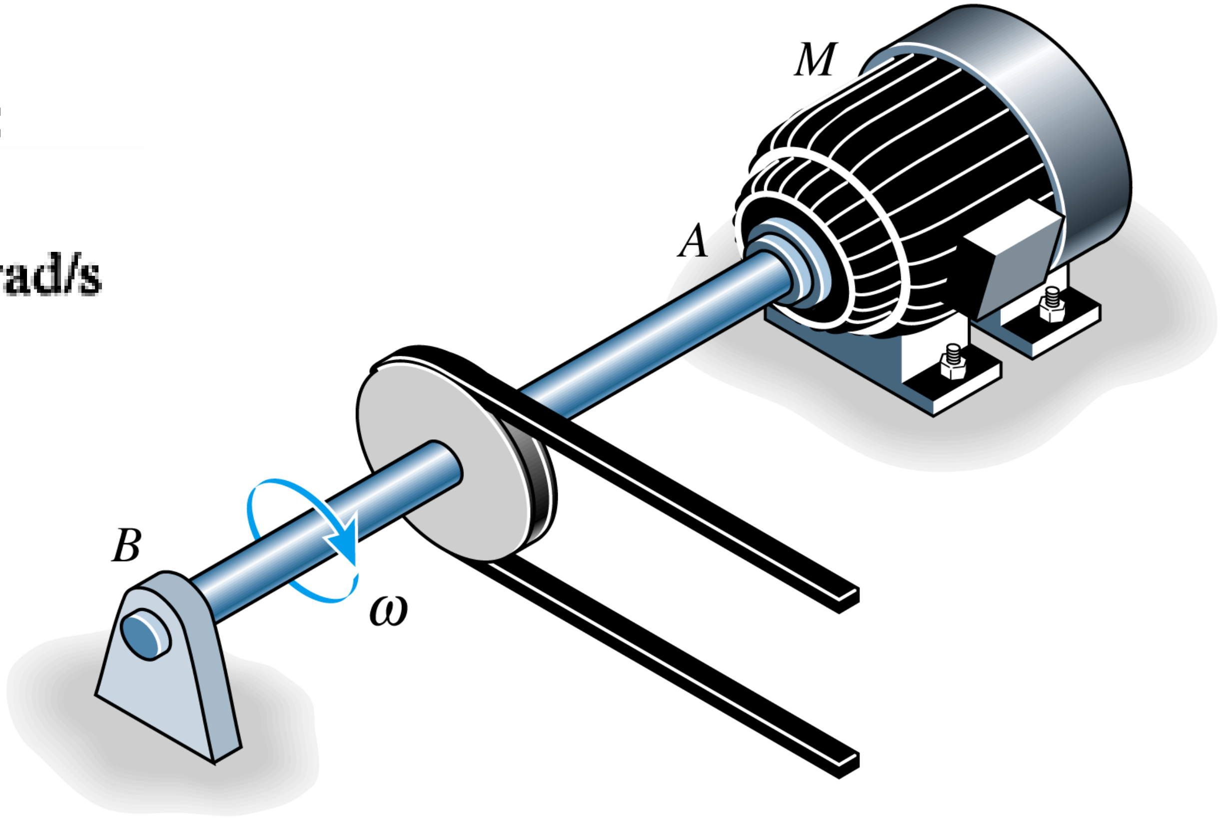
$$\omega = \frac{175\ \text{rev}}{\text{min}}\left(\frac{2\pi\ \text{rad}}{1\ \text{rev}}\right)\left(\frac{1\ \text{min}}{60\ \text{s}}\right) = 18{,}33\ \text{rad/s}$$

Torque na Parede Externa do Tubo:

$$P = T\omega;$$

$$2.750\ \text{pés}\cdot\text{lb/s} = T(18{,}33\ \text{rad/s})$$

$$T = 150{,}1\ \text{pés}\cdot\text{lb}$$



EXEMPLO 4

Calculo do Raio Mínimo do Eixo:

$$\frac{J}{c} = \frac{\pi}{2}\frac{c^4}{c} = \frac{T}{\tau_{adm}}$$

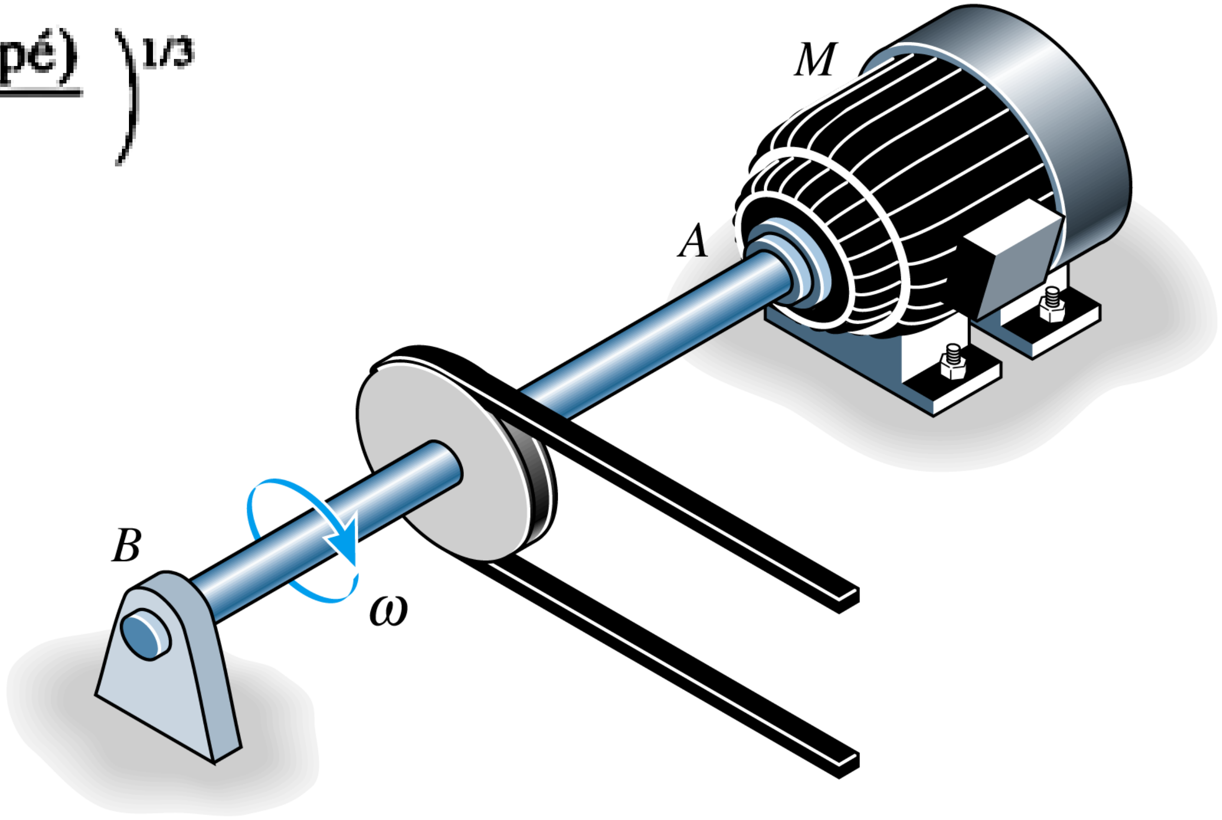
$$c = \left(\frac{2T}{\pi\tau_{adm}}\right)^{1/3} = \left(\frac{2(150{,}1\ \text{pés}\cdot\text{lb})(12\ \text{pol/pé})}{\pi(14.500\ \text{lb/pol}^2)}\right)^{1/3}$$

$$c = 0{,}429\ \text{pol}$$

Para 2c = d (2x Raio = Diametro)

$$2c = 0{,}858\ \text{pol}$$

$$d = \frac{7}{8}\ \text{pol} = 0{,}875\ \text{pol}$$



EXEMPLO 5

Um eixo tubular de diâmetro interno de 30 mm e diâmetro externo de 42 mm é usado para transmitir 90 kW de potência. Determine a frequência de rotação do eixo de modo que a tensão de cisalhamento não exceda 50 MPa.

Toque no Eixo Árvore:

$$\tau_{máx} = \frac{Tc}{J}$$

$$50(10^6)\ \text{N/m}^2 = \frac{T(0{,}021\ \text{m})}{(\pi/2)[(0{,}021\ \text{m})^4 - (0{,}015\ \text{m})^4]} \quad \Rightarrow \quad T = 538\ \text{N}\cdot\text{m}$$

Frequência Máxima do Eixo Árvore:

$$P = 2\pi f T$$

$$90(10^3)\ \text{N}\cdot\text{m/s} = 2\pi f(538\ \text{N}\cdot\text{m}) \quad \Rightarrow \quad f = 26{,}6\ \text{Hz}$$

EXERCÍCIOS E ATIVIDADES

CORNÉLIO PROCÓPIO

Orientação para realização das Atividades:

- Realizar as atividade a mão livre;
- Realizar diagramas e desenhos para compreensão;
- Realizar todas as contas de forma detalhada;
- Colocar as repostas principais a caneta;
- Entregar as atividades e resolução dos exercícios em forma digital no sala virtual da disciplina.

EXERCÍCIOS PARA ENTREGAR

UTFPR
CORNÉLIO PROCÓPIO

Realizar os exercícios do livro:
Hibbeller – Resistência os Materiais

Capitulo 5

- Item 5.3; R:
- Item 5.4 ; R:
- Item 5.26 ; R:
- Item 5.30 ; R:
- Item 5.112 ; R:
- Item 5.119 ; R:

OBS: Leia no capitulo sobre torção no livro como dimensionar eixo de geometria quadrada, retangular e triangular.