Ministério da Educação
UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
Campus Cornélio Procópio

AULA 7

CENTRÓIDE E BARICENTRO

Professor: Dr. Paulo Sergio Olivio Filho

CONTEÚDO DA AULA

- Conceitos de Centroide e Baricentro
- Estudos bidimensionais e tridimensionais
- Centroide de área, linha e volume
- Baricentro e aplicações

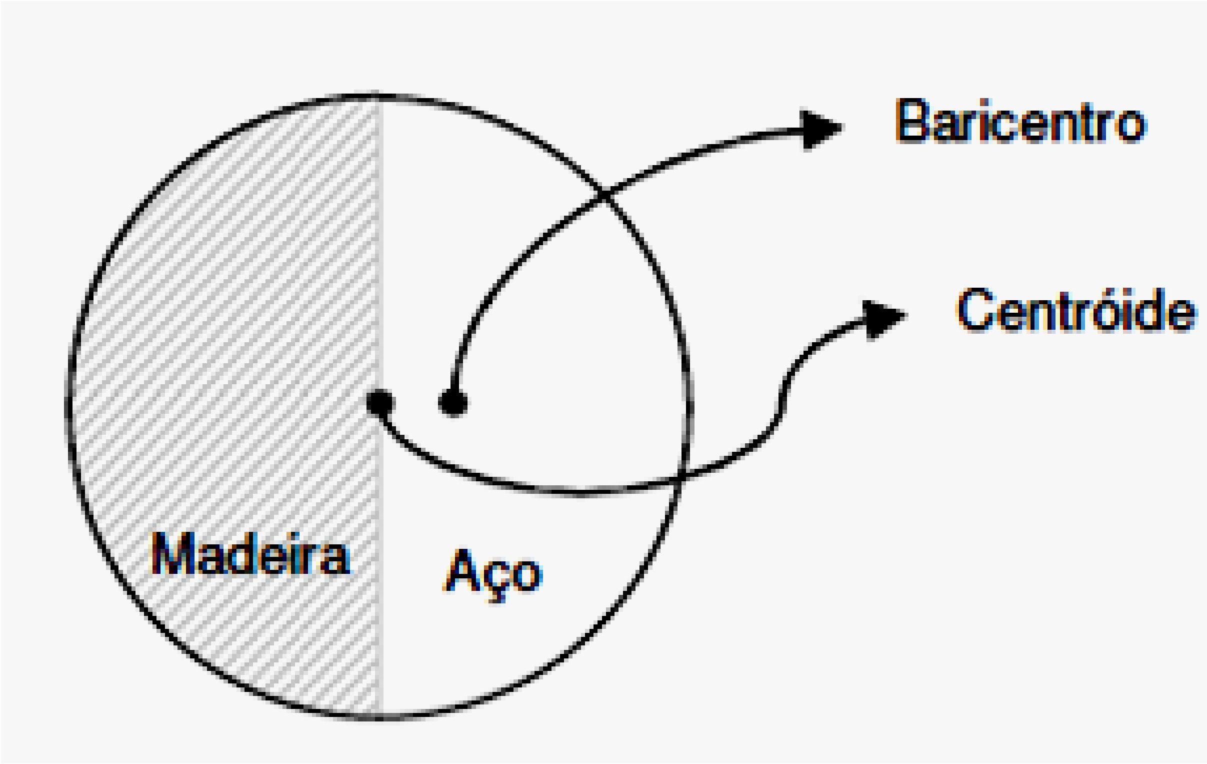
CENTROIDE E BARICENTRO

Baricentro: Centro de Gravidade
Centróide: Centro Geométrico

$P = m \times g = p \times V \times g = p \times t \times A \times g$

p = *peso específico*

t = *espessura*



CENTROIDE

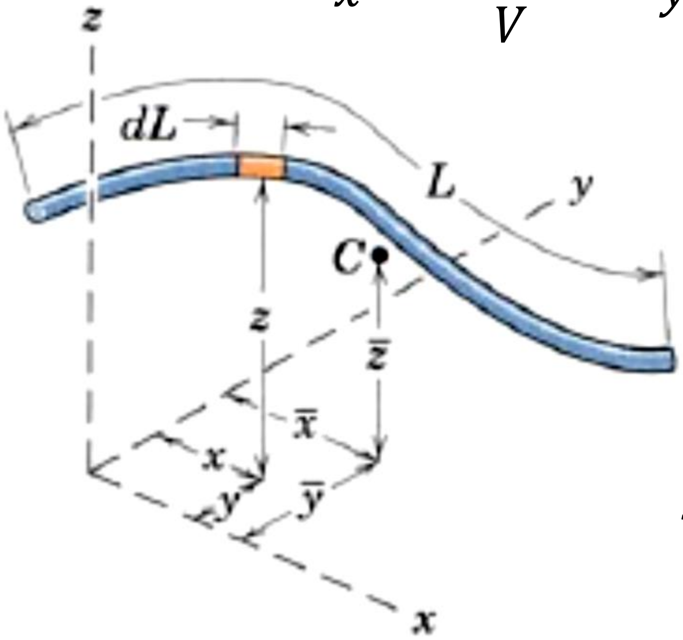
O centroide é o ponto que representa o centro geométrico de uma área, linha ou volume, onde se concentra a distribuição uniforme de sua forma.

CENTROIDE DE VOLUME

$$\bar{x} = \frac{\int x.dV}{V} \quad \bar{y} = \frac{\int y.dV}{V} \quad \bar{z} = \frac{\int z.dV}{V}$$

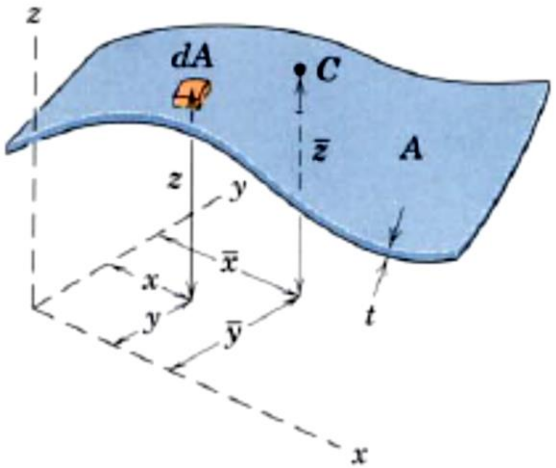
CENTROIDE DE ÁREA

$$\bar{x} = \frac{\int x.dA}{A} \quad \bar{y} = \frac{\int y.dA}{A} \quad \bar{z} = \frac{\int z.dA}{A}$$



CENTROIDE DE LINHA

$$\bar{x} = \frac{\int x.dL}{L} \quad \bar{y} = \frac{\int y.dL}{L} \quad \bar{z} = \frac{\int z.dL}{L}$$



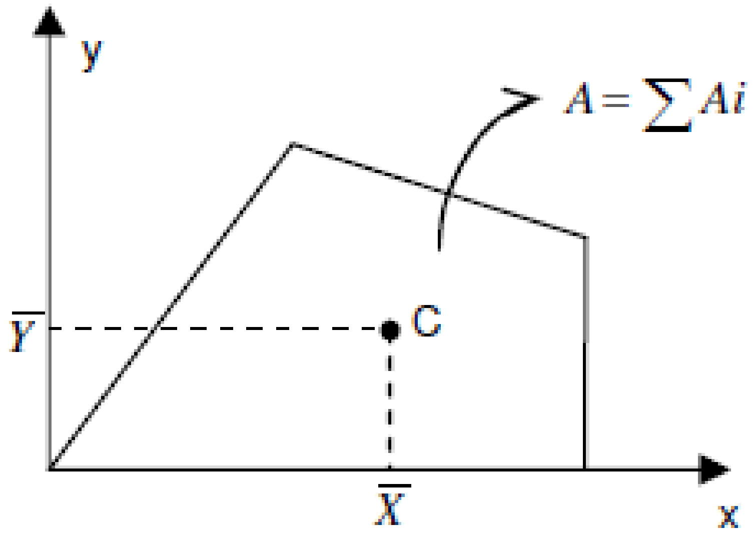
CENTROIDE

UTFPR
CORNÉLIO PROCÓPIO

Placas

$$\bar{X}\sum Ai = \sum \bar{X}i \cdot Ai$$

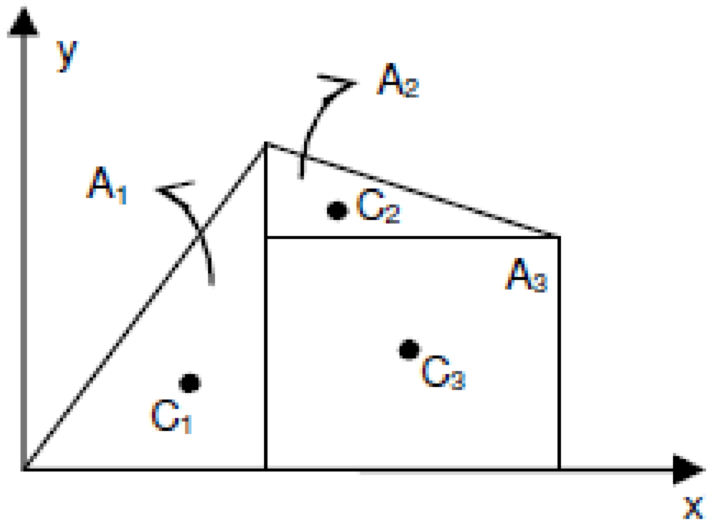
$$\bar{Y}\sum Ai = \sum \bar{Y}i \cdot Ai$$



Arames

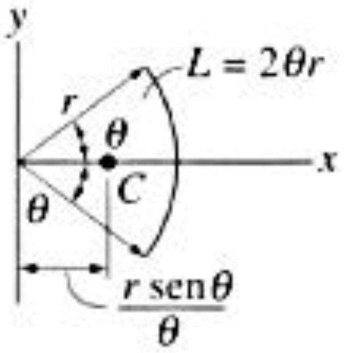
$$\bar{X}Li = \sum \bar{X}i \cdot Li$$

$$\bar{Y}Li = \sum \bar{Y}i \cdot Li$$

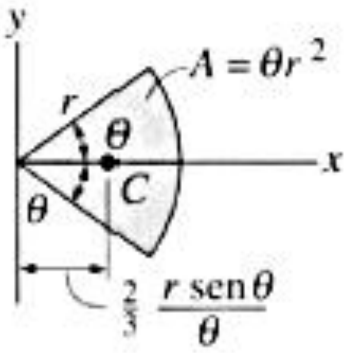


Alguns centroides são tabelados devidos as suas formas comuns como veremos nas tabelas a seguir.

CENTRO E BARICENTRO



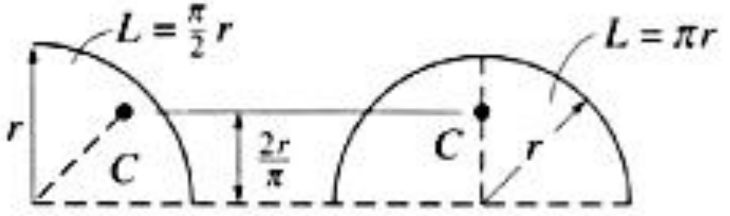
Segmento de arco de circunferência



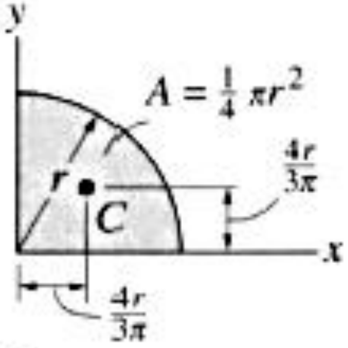
Área de setor circular

$$I_x = \frac{1}{4} r^4 (\theta - \tfrac{1}{2} \operatorname{sen} 2\theta)$$

$$I_x = \frac{1}{4} r^4 (\theta + \tfrac{1}{2} \operatorname{sen} 2\theta)$$



Arcos de quarto de circunferência e semicircunferência

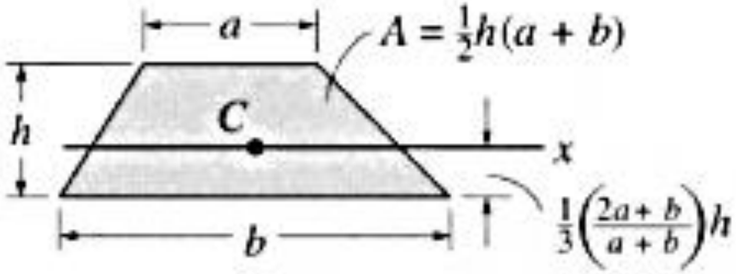


Área de quarto de círculo

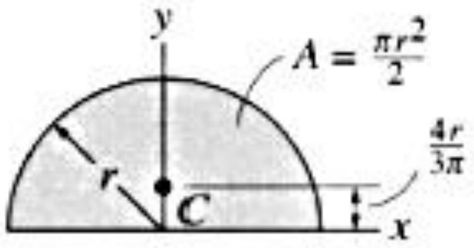
$$I_x = \frac{1}{16} \pi r^4$$

$$I_y = \frac{1}{16} \pi r^4$$

CENTRO E BARICENTRO



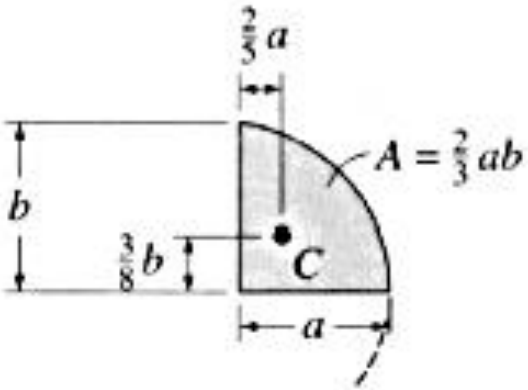
Área do trapézio



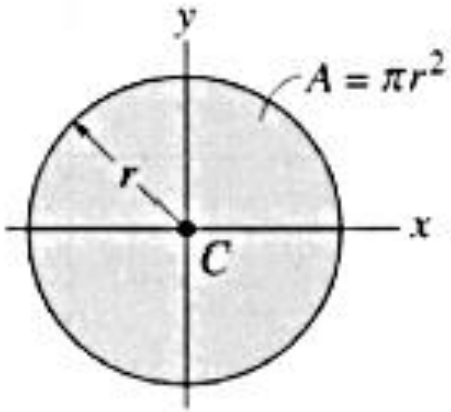
Área de semicírculo

$$I_x = \frac{1}{8}\pi r^4$$

$$I_y = \frac{1}{8}\pi r^4$$



Área semiparabólica

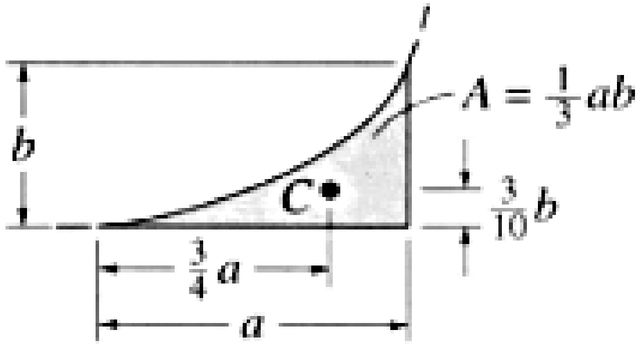


Área do círculo

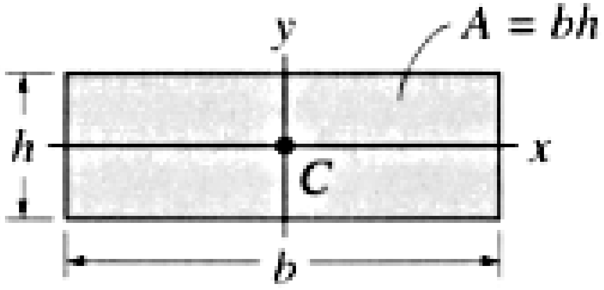
$$I_x = \frac{1}{4}\pi r^4$$

$$I_y = \frac{1}{4}\pi r^4$$

CENTRO E BARICENTRO



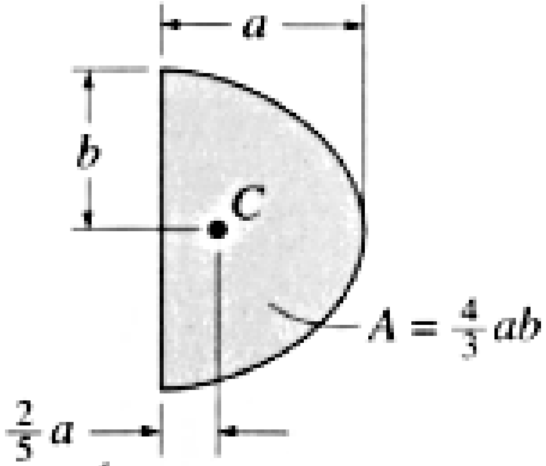
Área sob curva parabólica



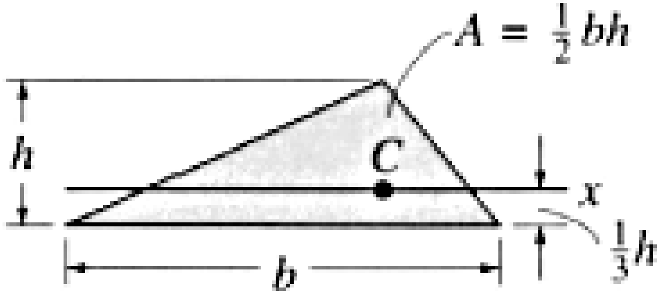
$$I_x = \frac{1}{12}bh^3$$

$$I_y = \frac{1}{12}hb^3$$

Área do retângulo



Área parabólica

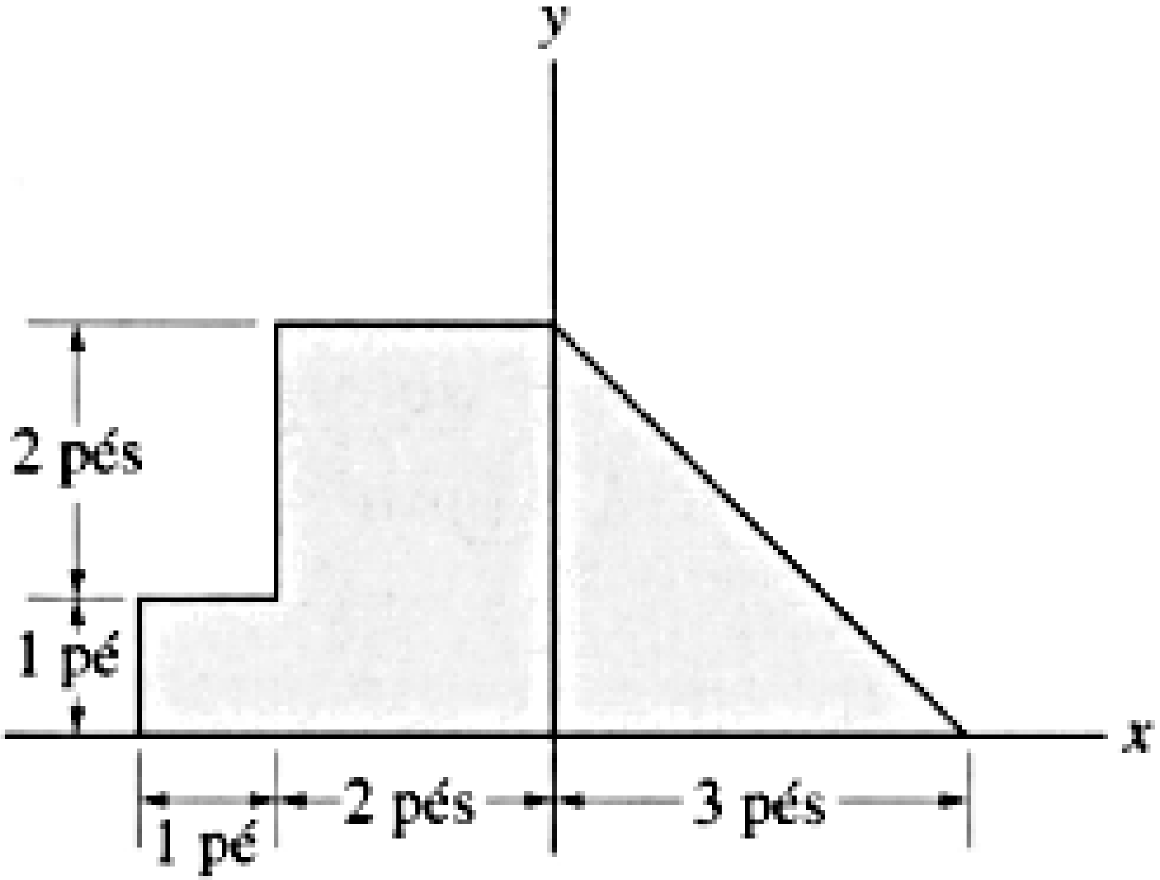


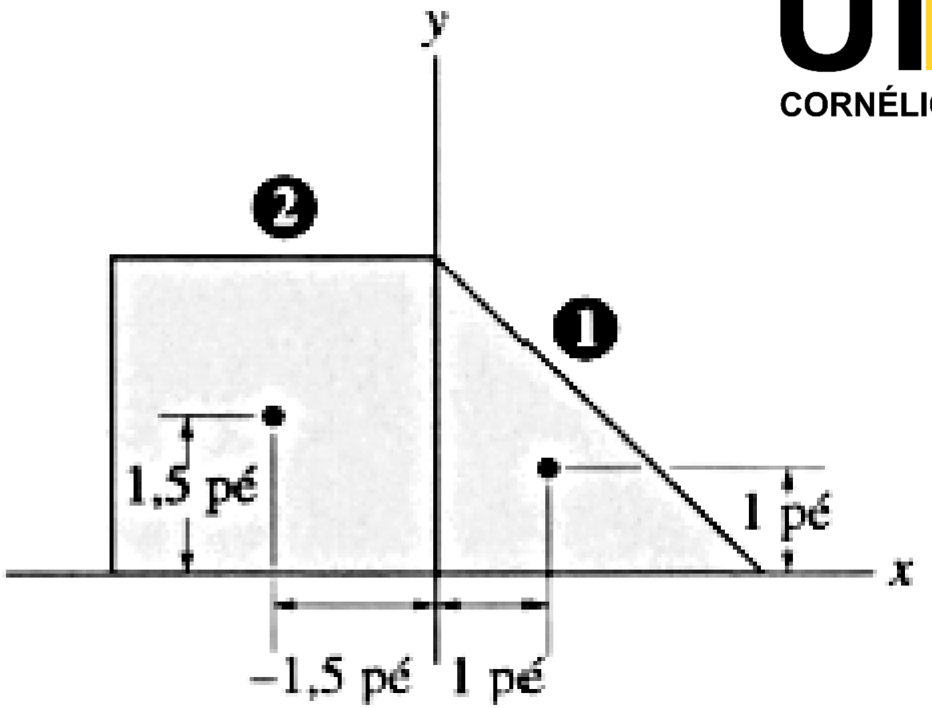
$$I_x = \frac{1}{36}bh^3$$

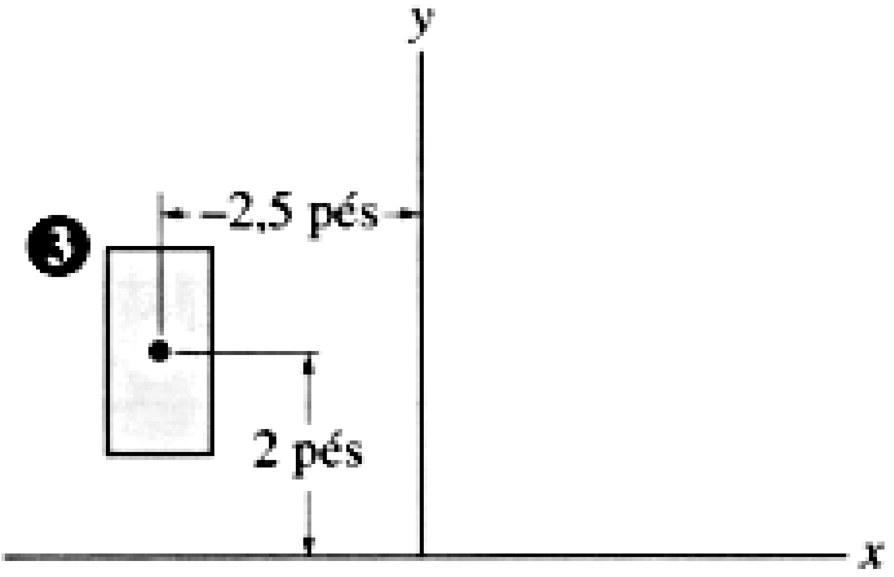
Área do triângulo

EXEMPLO 1

Localize o centroide da área da placa mostrada na figura abaixo.







EXEMPLO 1

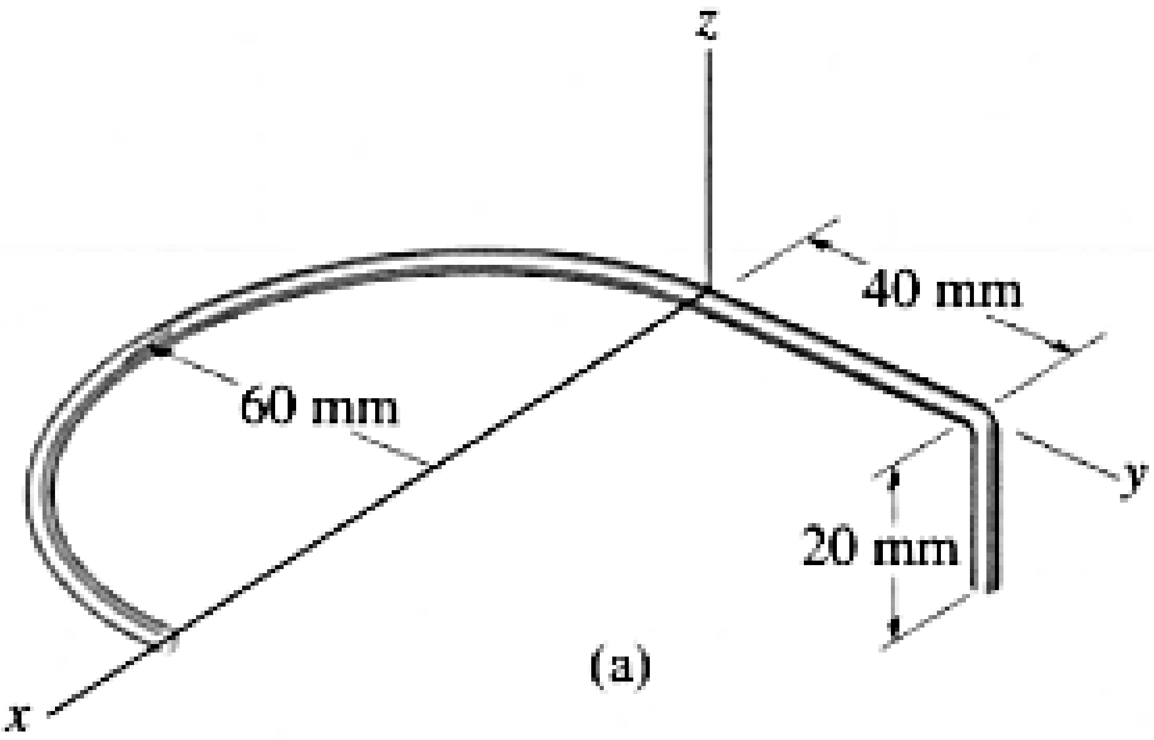
Segmento	A (pé^2)	$\tilde{x}$ (pé)	$\tilde{y}$ (pé)	$\tilde{x}A$ (pé^3)	$\tilde{y}A$ (pé^3)
1	$\frac{1}{2}(3)(3) = 4{,}5$	1	1	4,5	4,5
2	$(3)(3) = 9$	−1,5	1,5	−13,5	13,5
3	$-(2)(1) = -2$	−2,5	2	5	−4
	$\Sigma A = 11{,}5$			$\Sigma \tilde{x}A = -4$	$\Sigma \tilde{y}A = 14$

$$\bar{x} = \frac{\Sigma \tilde{x}A}{\Sigma A} = \frac{-4}{11{,}5} = -0{,}348 \text{ pé}$$

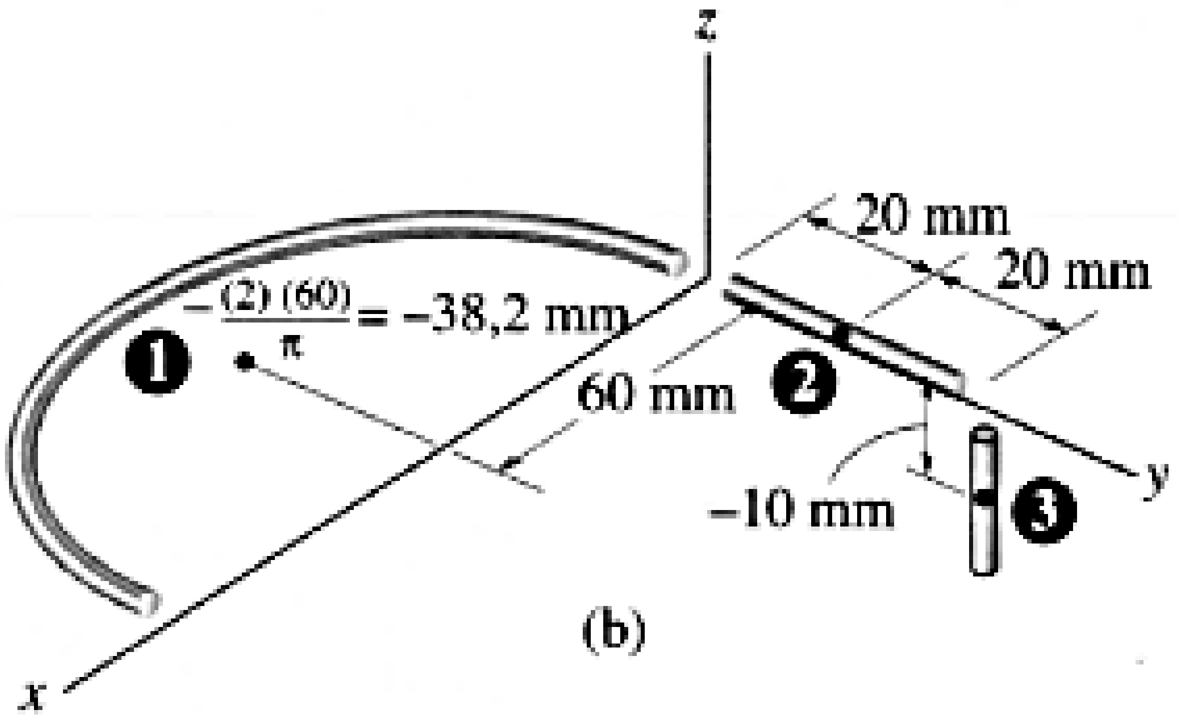
$$\bar{y} = \frac{\Sigma \tilde{y}A}{\Sigma A} = \frac{14}{11{,}5} = 1{,}22 \text{ pé}$$

EXEMPLO 2

Localize o centroide da figura mostrada abaixo.



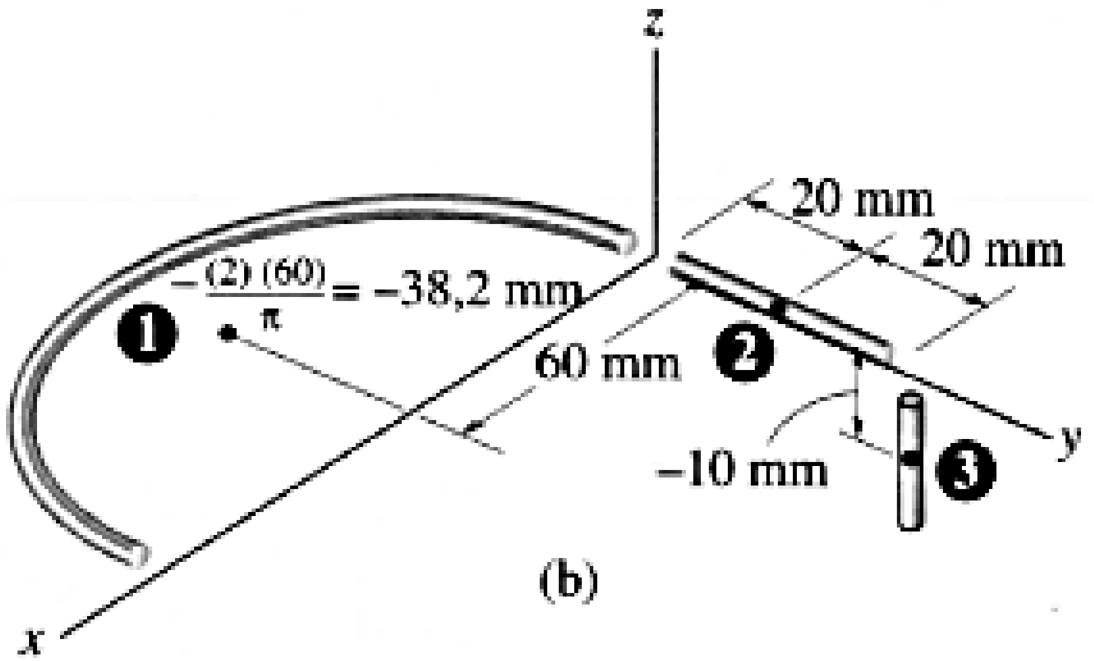
(a)



(b)

EXEMPLO 2

Segmento	L (mm)	$\tilde{x}$ (mm)	$\tilde{y}$ (mm)	$\tilde{z}$ (mm)	$\tilde{x}L$ (mm²)	$\tilde{y}L$ (mm²)	$\tilde{z}L$ (mm²)
1	$\pi(60) = 188{,}5$	60	−38,2	0	11.310	−7.200	0
2	40	0	20	0	0	800	0
3	20	0	40	−10	0	800	−200
	$\Sigma L = 248{,}5$				$\Sigma\tilde{x}L = 11.310$	$\Sigma\tilde{y}L = -5.600$	$\Sigma\tilde{z}L = -200$



(b)

$$\bar{x} = \frac{\Sigma\tilde{x}L}{\Sigma L} = \frac{11.310}{248{,}5} = 45{,}5 \text{ mm}$$

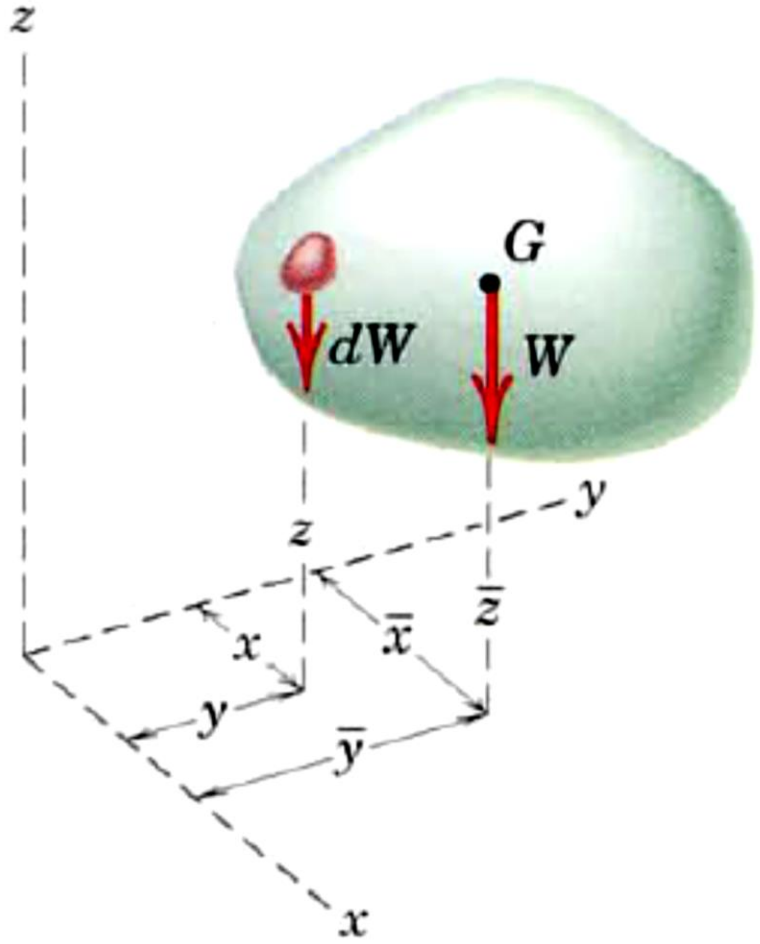
$$\bar{y} = \frac{\Sigma\tilde{y}L}{\Sigma L} = \frac{-5.600}{248{,}5} = -22{,}5 \text{ mm}$$

$$\bar{z} = \frac{\Sigma\tilde{z}L}{\Sigma L} = \frac{-200}{248{,}5} = -0{,}805 \text{ mm}$$

CENTRO DE GRAVIDADE

UTFPR CORNÉLIO PROCÓPIO

- Considere um corpo tridimensional de qualquer tamanho e forma com massa m.



CENTRO DE GRAVIDADE

$$\bar{x} = \frac{\int x.dW}{W} \quad \bar{y} = \frac{\int y.dW}{W} \quad \bar{z} = \frac{\int z.dW}{W}$$

CENTRO DE MASSA

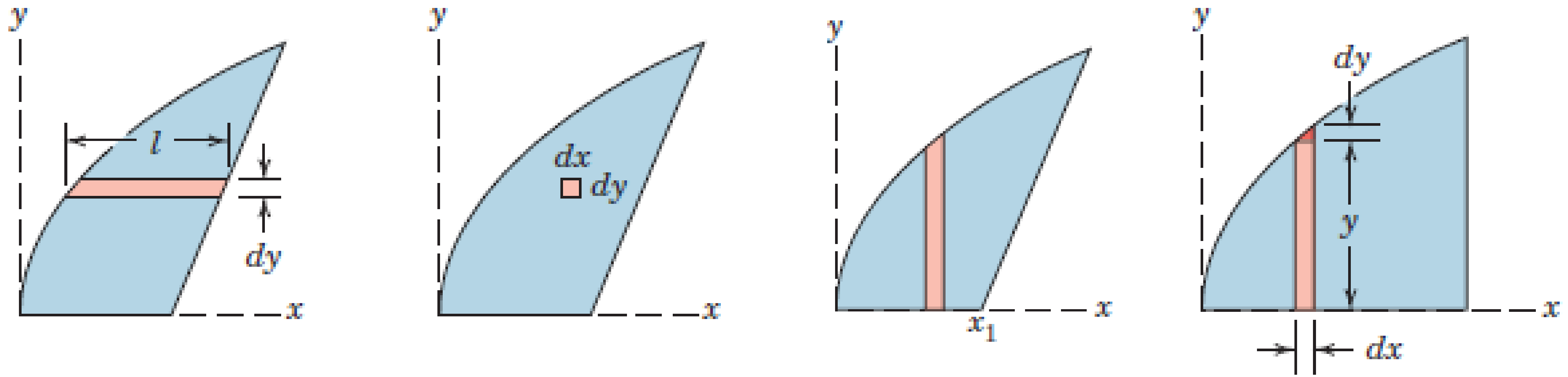
$$\bar{x} = \frac{\int x.dm}{m} \quad \bar{y} = \frac{\int y.dm}{m} \quad \bar{z} = \frac{\int z.dm}{m}$$

CENTRO DE GRAVIDADE – BARICENTRO

UTFPR CORNÉLIO PROCÓPIO

- Escolha do elemento diferencial

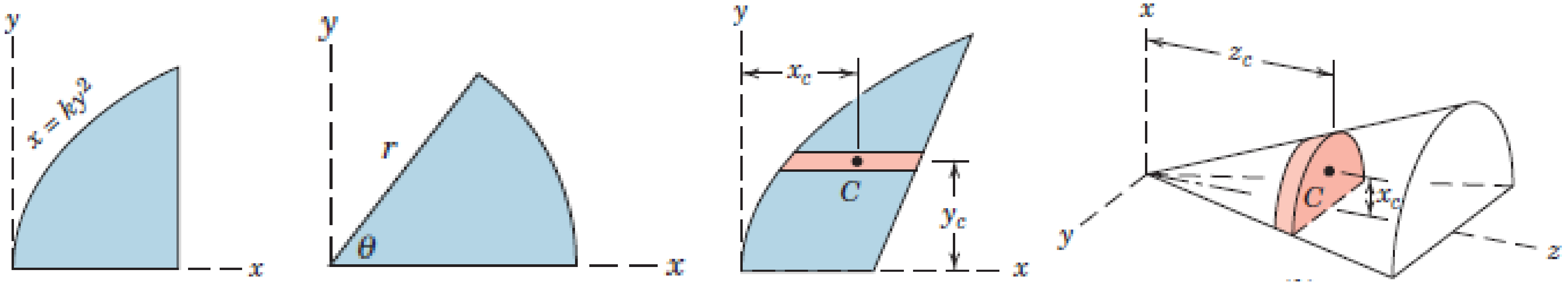
1) Ordem do elemento: Sempre que possível seleciona-se um elemento de primeira ordem.
2) Continuidade: Deve ser possível integrar em uma operação contínua, englobando toda a figura.
3) Eliminação de Termos de Ordem Superior: Em comparação com termos de primeira ordem, os elementos de ordem superior podem ser desprezados.



CENTRO DE GRAVIDADE - BARICENTRO

- Escolha do elemento diferencial

4) Escolha das Coordenadas: Deve-se escolher o sistema de coordenadas que melhor se ajusta aos contornos da figura.
5) Coordenadas do Centroide de um Elemento: É essencial utilizar as coordenadas do centroide do elemento para calcular o primeiro momento do elemento.



CENTRO DE GRAVIDADE – BARICENTRO

CORNÉLIO PROCÓPIO

Corpos compostos consiste em um conjunto de corpos de formatos mais simples como triângulo, quadrado semicírculos, etc. Para o cálculo do centro de gravidade do corpo todo é necessário que o peso e centro de gravidade de cada "parte" seja conhecido para que sejam considerados como partículas.

$$\bar{x} = \frac{\Sigma \tilde{x} W}{\Sigma W} \qquad \bar{y} = \frac{\Sigma \tilde{y} W}{\Sigma W} \qquad \bar{z} = \frac{\Sigma \tilde{z} W}{\Sigma W}$$

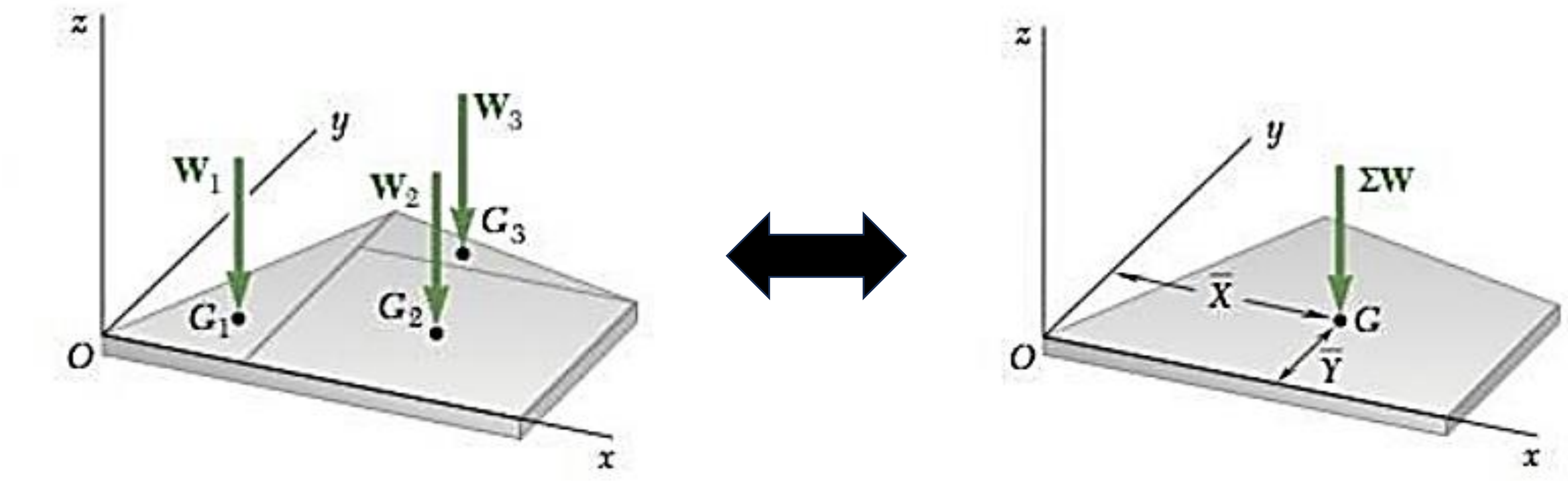
$\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ *representam as coordenadas do centro de gravidade G do corpo composto.*

$\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$ *representam as coordenadas do centro de gravidade de cada parte que constitui o corpo.*

ΣW *é a soma dos pesos de todas as partes que constituem o corpo ou é simplesmente o peso total do corpo composto.*

EXEMPLO 3

Localize o baricentro da placa mostrada na figura abaixo.
Use os dados:
A1 = 300x900 mm; W1 = 100kN, x1 = 200mm ; y1 = 300 mm
A2 = 600x700 mm; W2 = 25kN, x2 = 600mm ; y3 = 350mm
A3 = 600x200 mm; W3 = 75kN, x3 = 500mm; y3 = 800mm



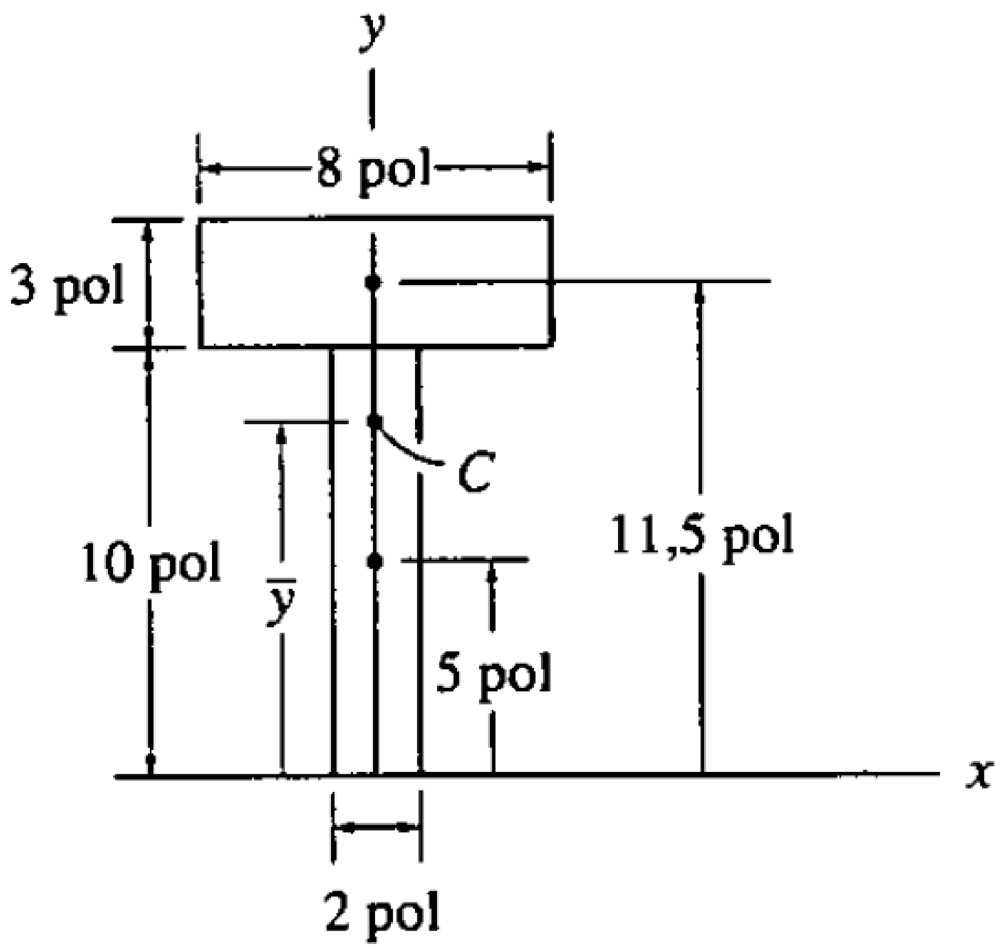
EXERCÍCIOS E ATIVIDADES

Orientação para realização das Atividades:

- Realizar as atividade a mão livre;
- Realizar diagramas e desenhos para compreensão;
- Realizar todas as contas de forma detalhada;
- Colocar as repostas principais a caneta;
- Entregar as atividades e resolução dos exercícios em forma digital no sala virtual da disciplina.

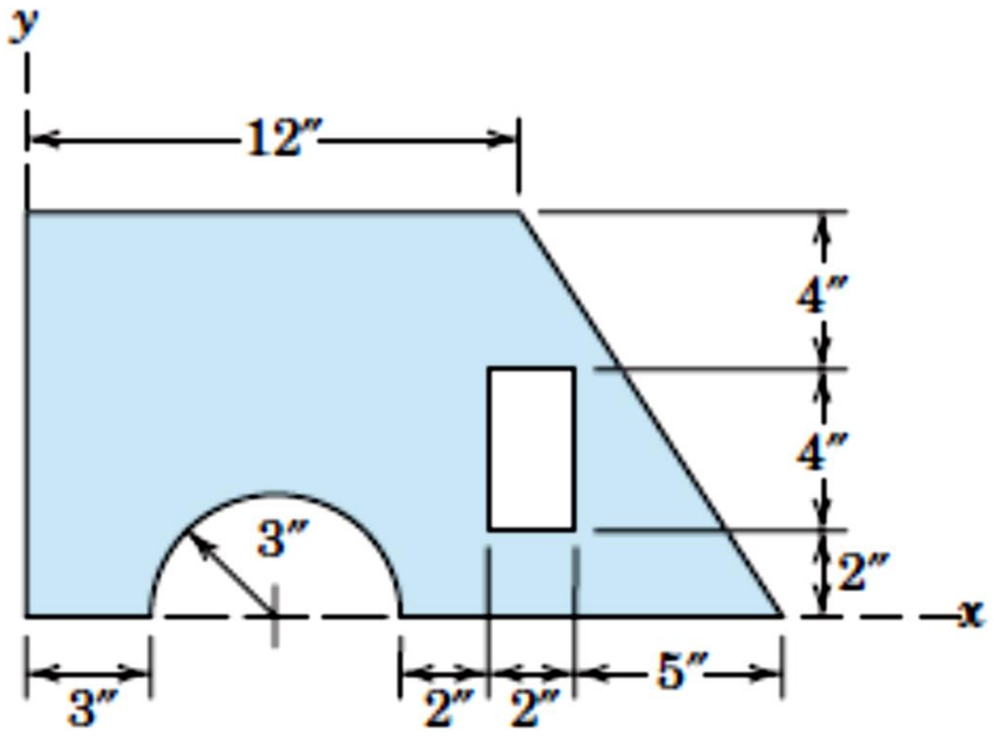
EXERCÍCIO 1

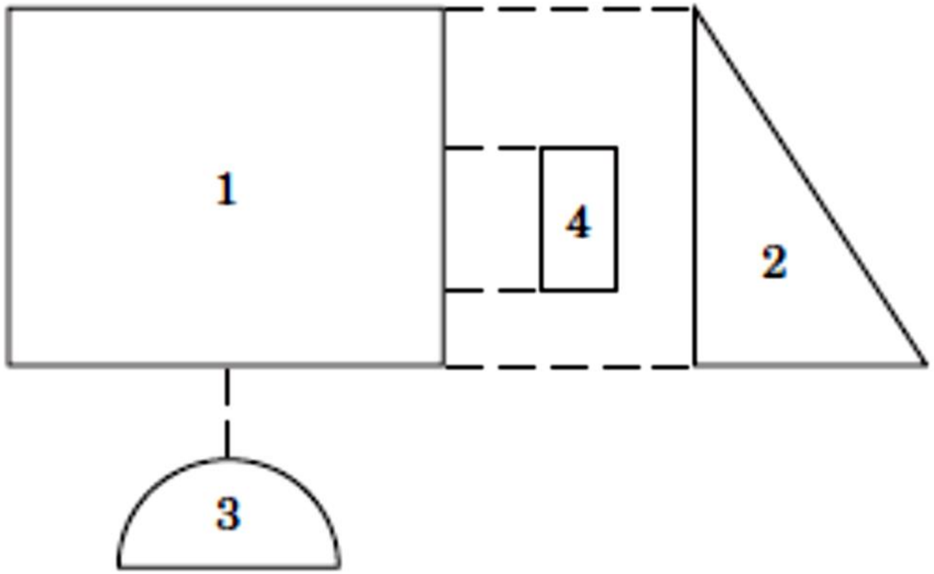
Localize o centroide da figura mostrada abaixo.



EXERCÍCIO 2

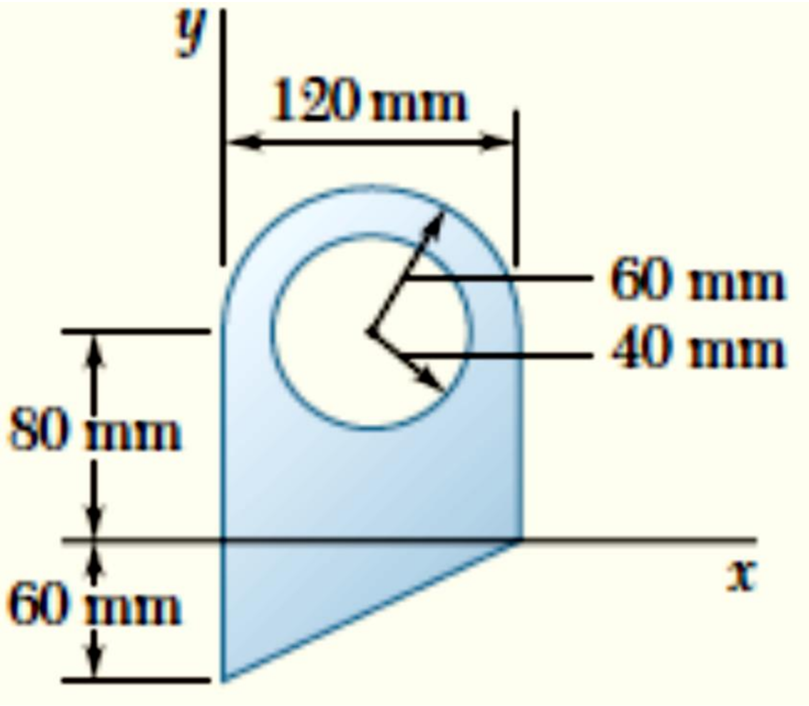
Localize o centroide da área sombreada





EXERCÍCIO 3

Para a área plana mostrada, determine a localização do centroide



EXERCÍCIO 4

Localize o centro de massa do conjunto formado por um suporte e um eixo. A face vertical é feita de uma chapa de metal que tem uma massa de 25 [kg/m²]. O material da base horizontal tem uma massa de 40 [kg/m²] e o eixo de aço tem uma densidade de 7,83 [Mg/m³].