Ministério da Educação
UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
Campus Cornélio Procópio

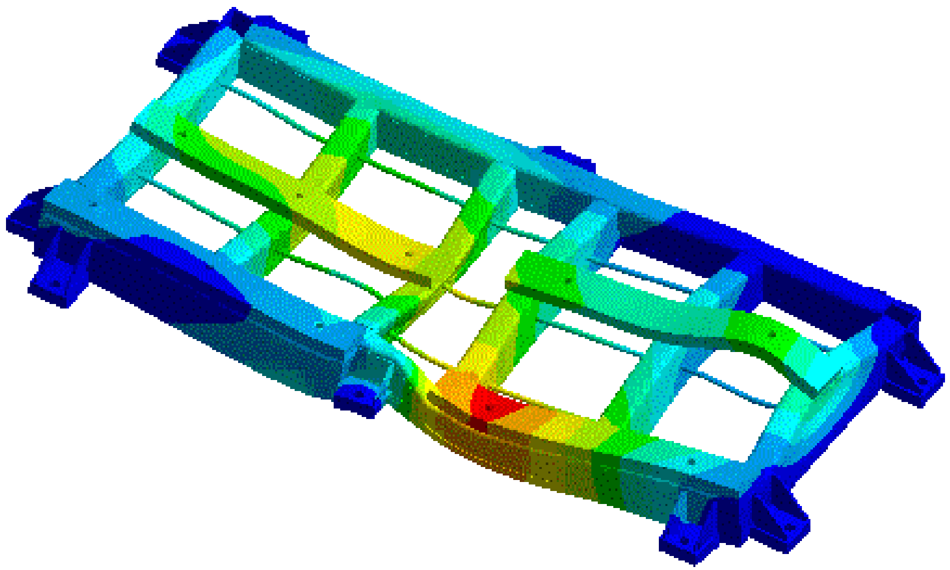
AULA 11

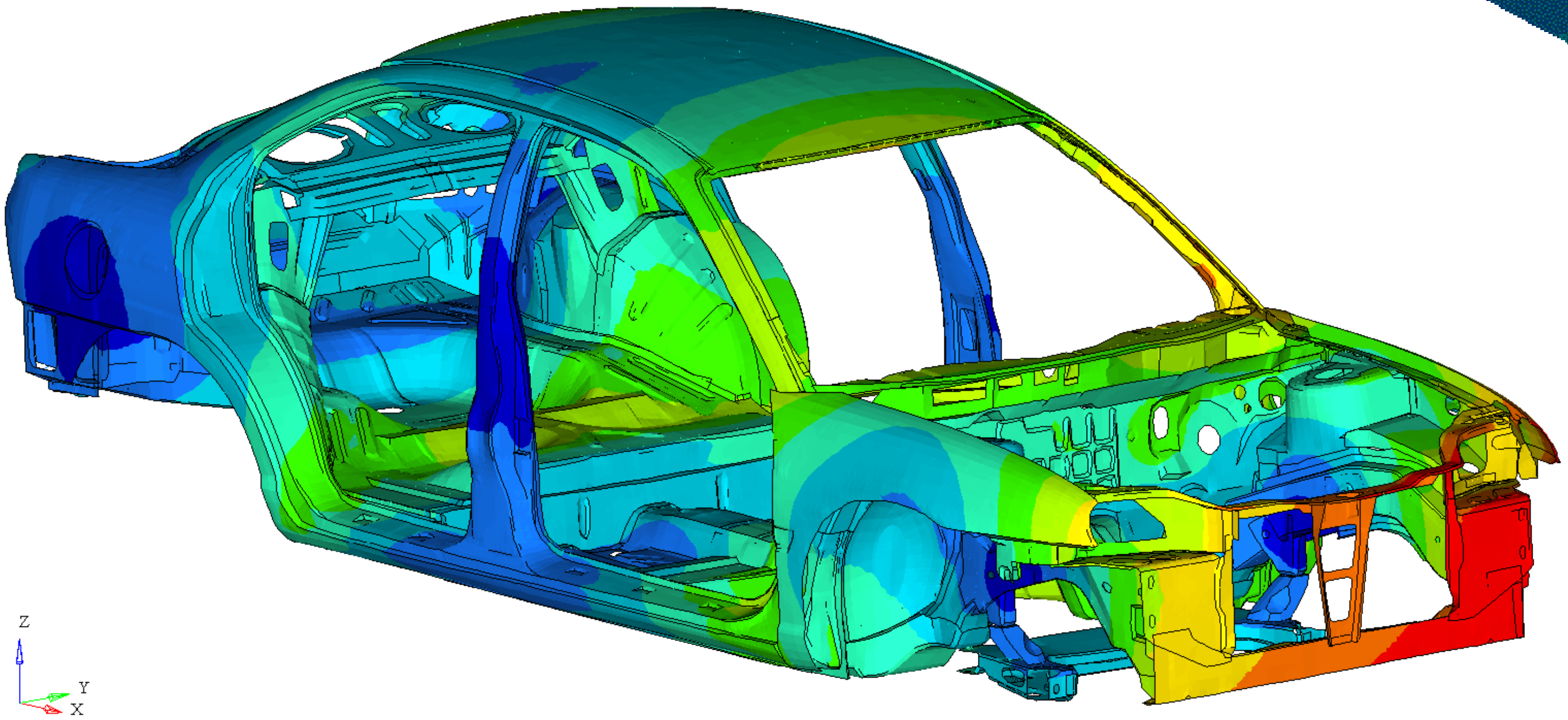
FLEXÃO EM EIXOS E VIGAS

Professor: Dr. Paulo Sergio Olivio Filho

CONTEÚDO DA AULA

- Efeitos da carga que proporciona flexão
- Diagrama momento fletor e força cortante
- Deformação devido a flexão em vigas
- Tensão em vigas devido a flexão





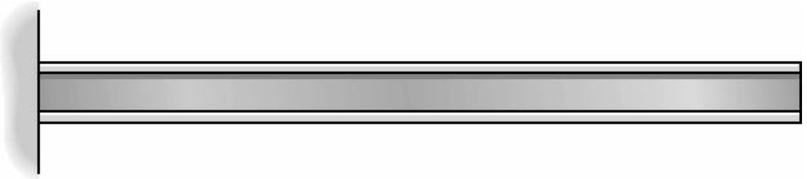
FLEXÃO EM VIGAS

Elementos estreitos que suportam cargas aplicadas perpendicularmente ao seu eixo longitudinal são chamados vigas.

Em geral, as vigas são barras compridas e retas com área de seção transversal constante. Elas são classificadas conforme seus apoio.

Vida simplesmente apoiada
Viga em balanço
Viga apoiada com extremidade em balanço

Viga simplesmente apoiada



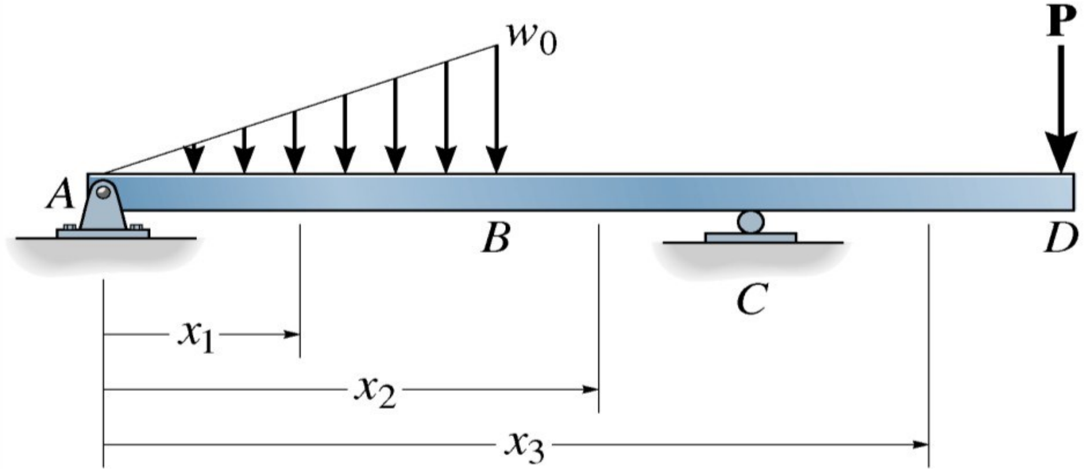
Viga em balanço

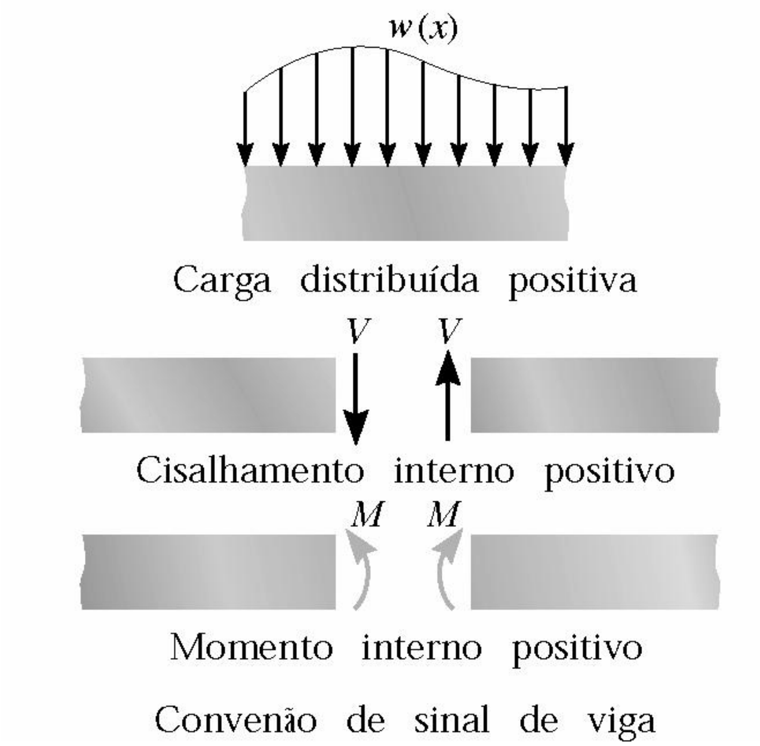
Viga apoiada com extremidade em balanço

FLEXÃO EM VIGAS

Devido as cargas aplicadas, as vigas desenvolvem força cortante (cisalhante) interna e momento fletor que, em geral, variam de ponto para ponto ao longo do eixo da viga..

A fim de projetar a viga adequadamente é necessário primeiro determinar o cisalhante e o momento fletor máximo na viga.

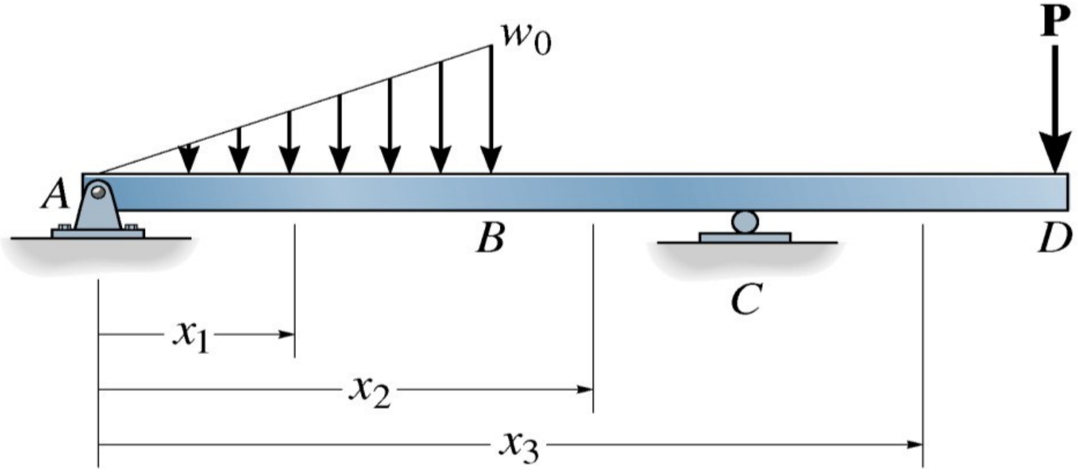




FLEXÃO EM VIGAS

Uma maneira de se expressar V e M é por meio de funções arbitrarias, as quais são representadas por gráficos, denominados diagrama de força cortante e momento fletor.

Os valores máximos de V e M são então obtidos a partir desse gráficos , que fornecem também informações detalhadas sobre a variação do cisalhamento e do momento fletor ao longo do eixo da viga.



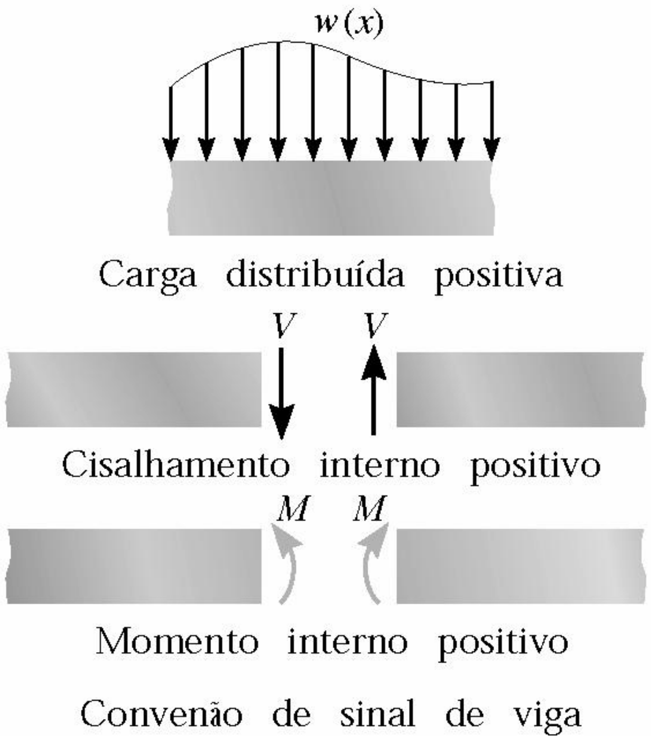
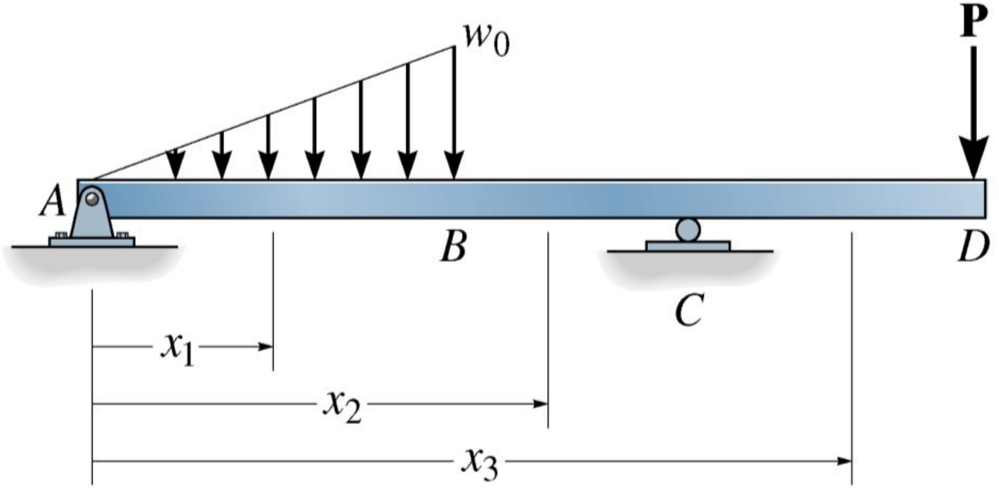


DIAGRAMA MOMENTO FLETOR E FORÇA CORTANTE

UTFPR CORNÉLIO PROCÓPIO

Em geral, as funções de cisalhamento interno e momento fletor obtidas em função de x (deslocamento) são descontinuas nos pontos em que a carga distribuída muda ou estão aplicadas forças concentradas ou conjugados.
Tais funções devem ser determinadas para cada região da viga localizada entre quaisquer duas descontinuidades da carga.

<u>A figura ao lado mostras que as coordenadas x1, x2 e x3 tem de ser usadas para descrever a variação de V e M em todo o comprimento da viga.</u>

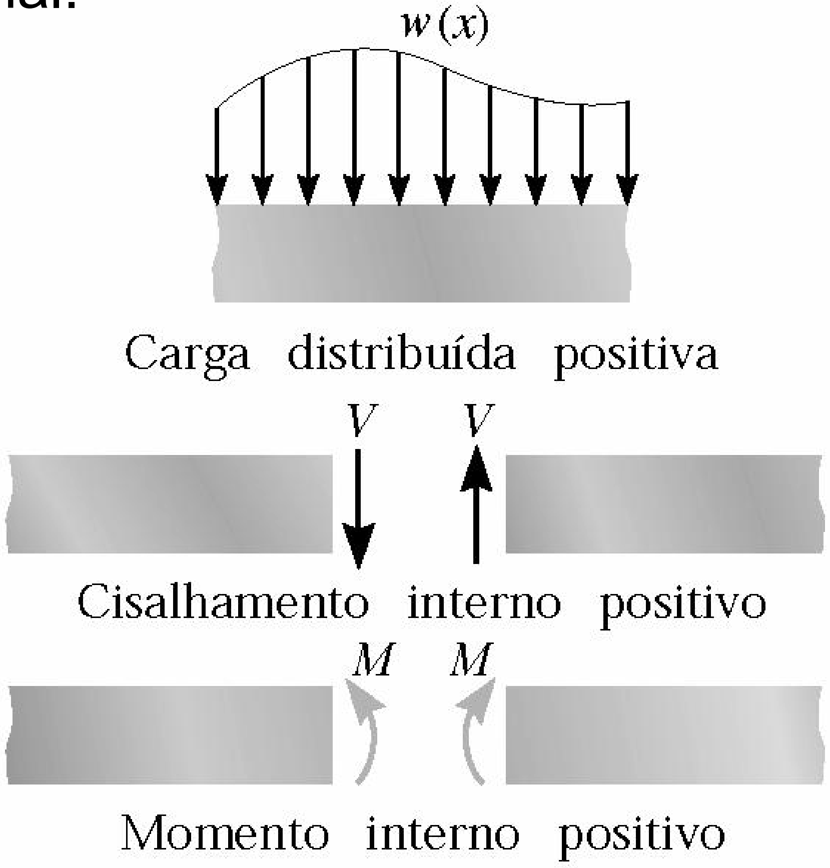


CONVENÇÃO DE SINAL

Antes de apresentar um método para determinar o cisalhamento e o momento fletor como funções de x e depois relacionar as funções (diagrama de força cortante e momento fletor), é necessário estabelecer uma convenção de sinal.

Apesar da convenção de sinal ser arbitrária usamos:

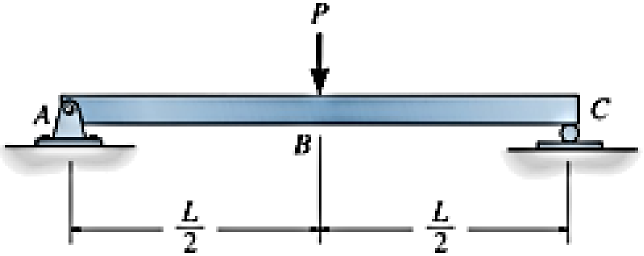
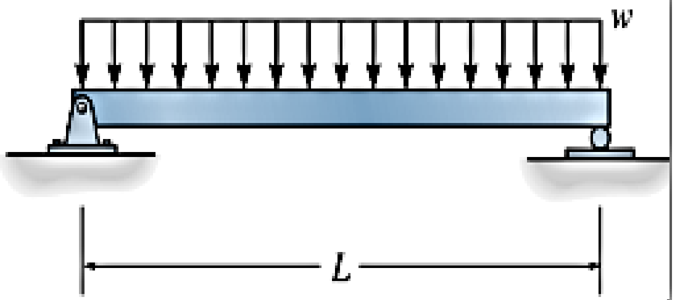
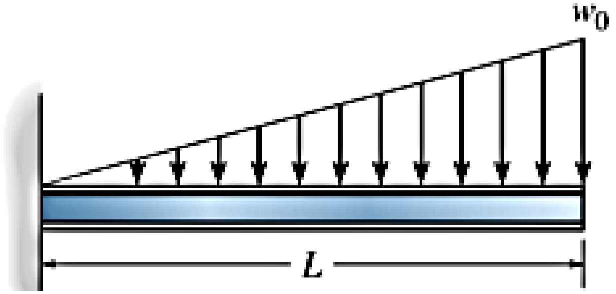
Direções positivas: as cargas distribuídas ao longo da viga atuam no sentido de cima para baixo, gerando uma força cortante interna atuante para baixo gerando rotação no sentido horário e momento interno no sentido anti-horário fazendo a viga sorrir ou de modo a reter água.



Convenão de sinal de viga

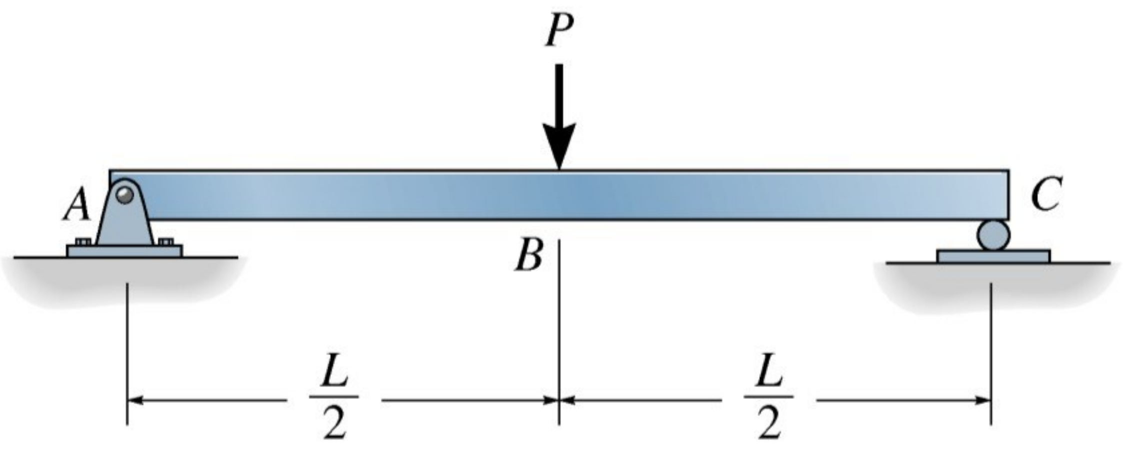
TABELA DE FUNÇÕES

UTFPR
CORNÉLIO PROCÓPIO

TIPO DE CARGA	FORÇA CORTANTE (V)	MOMENTO FLETOR (M)
	$V = \frac{P}{2}$ | $V = -\frac{P}{2}$	$M = \frac{P}{2}(L - x)$
	$V = w\left(\frac{L}{2} - x\right)$	$M_{máx} = \frac{wL^2}{8}$
	$V = \frac{w_0}{2L}(L^2 - x^2)$	$M = \frac{w_0}{6L}(-2L^3 + 3L^2x - x^3)$

EXEMPLO 5

Desenhar os diagramas de força cortante e momento fletor da viga abaixo.

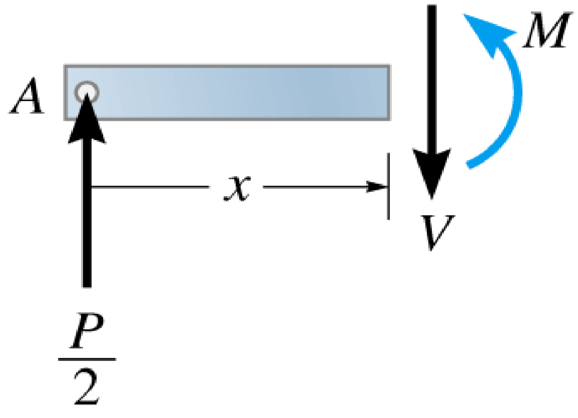


(a)

Utilizem:
P = 2kN
L = 5m

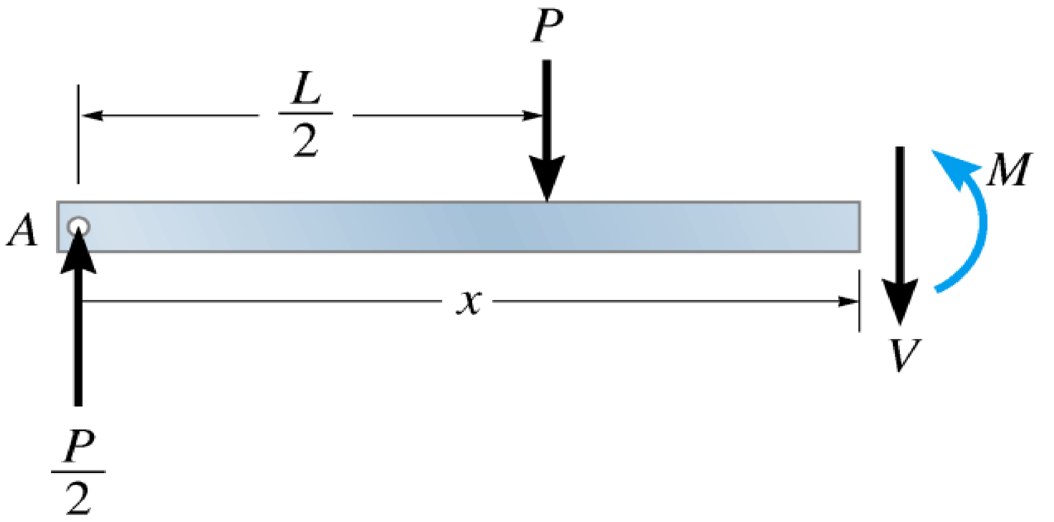
Verifiquem os cálculos com o Software Ftool

Corte1:



(b)

Corte2:



(c)

EXEMPLO 5

Equações de equilíbrio no Corte 1:

$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad V = \frac{P}{2}$

$\circlearrowleft + \Sigma M = 0; \qquad M = \frac{P}{2}x$

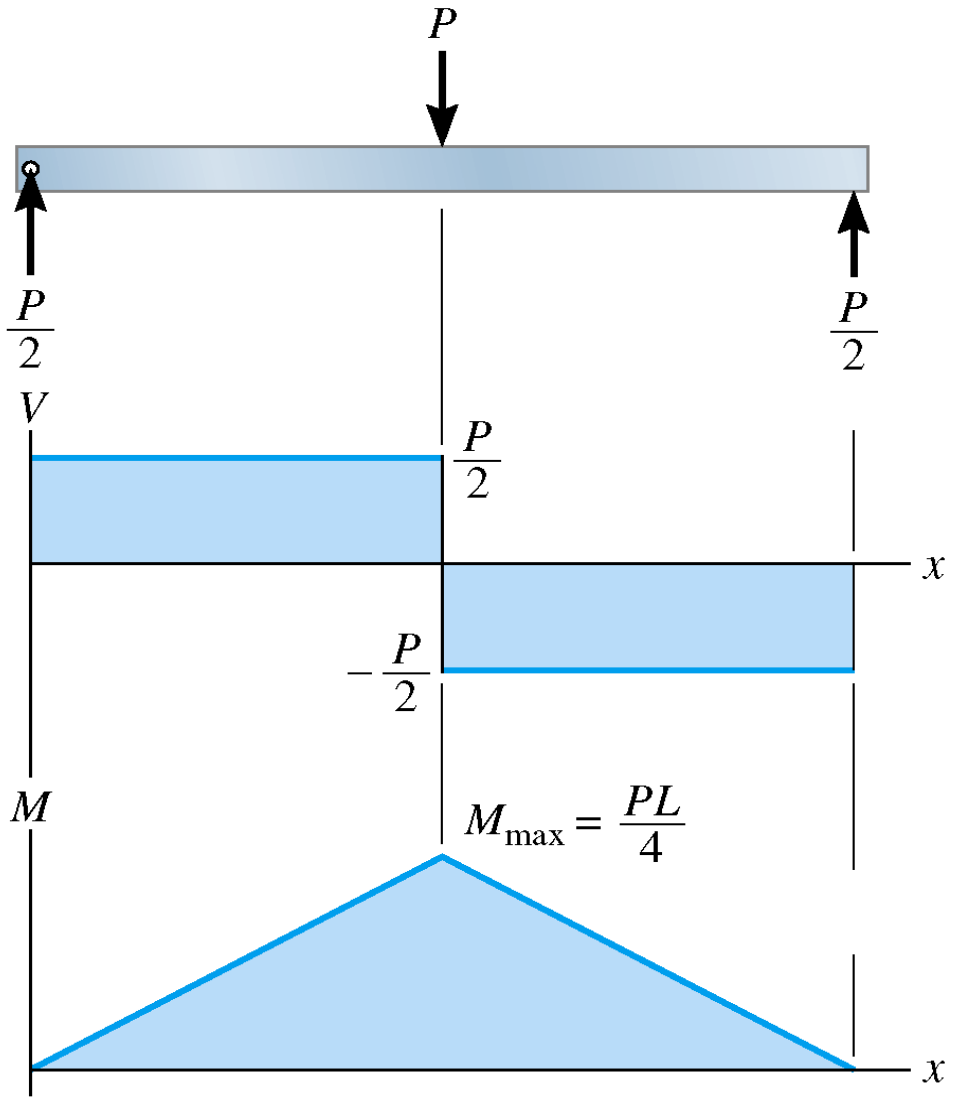
Equações de equilíbrio no Corte 2:

$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad \frac{P}{2} - P - V = 0$

$$V = -\frac{P}{2}$$

$\circlearrowleft + \Sigma M = 0; \qquad M + P\left(x - \frac{L}{2}\right) - \frac{P}{2}x = 0$

$$M = \frac{P}{2}(L - x)$$

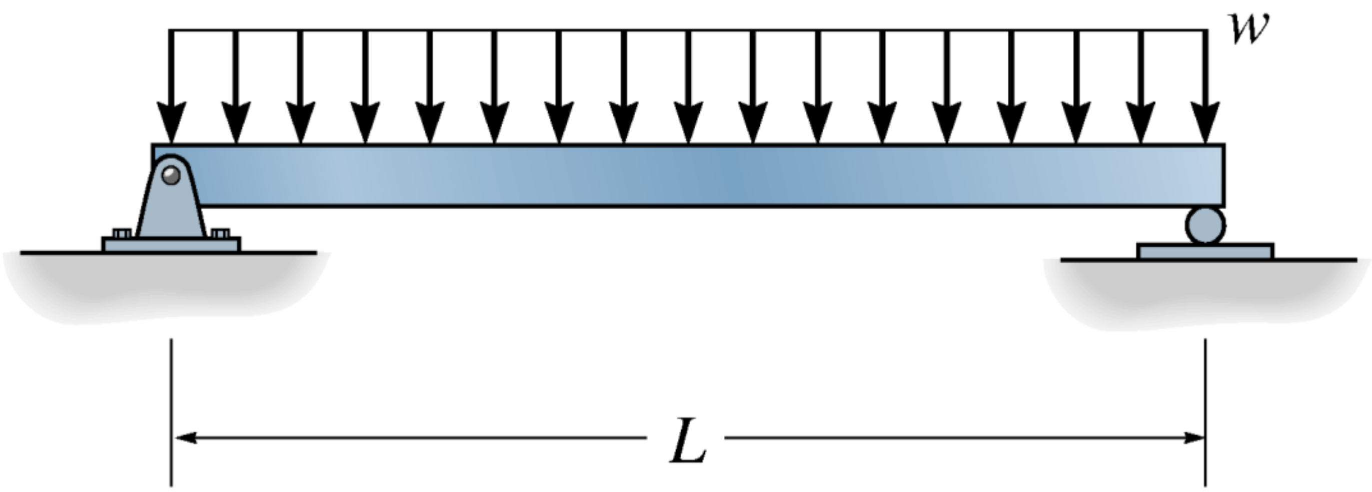


EXEMPLO 6

Desenhar os diagramas de força cortante e momento fletor da viga abaixo.

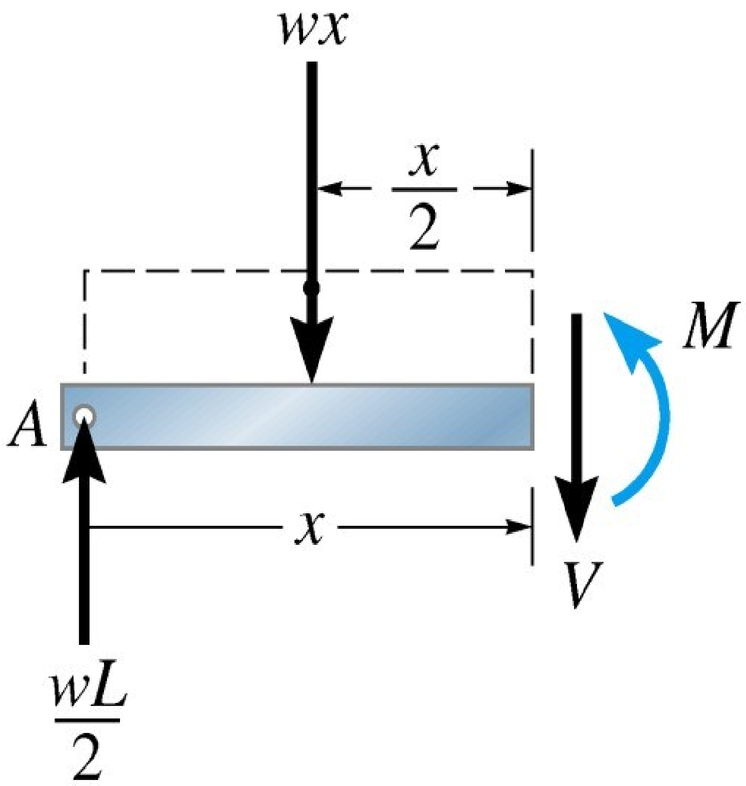
Utilizem:
w = 200N/m
L = 10m

Verifiquem os cálculos com o Software Ftool



(a)

Corte:



(b)

EXEMPLO 6

Equações de equilíbrio no Corte:

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad \frac{wL}{2} - wx - V = 0$$

$$V = w\left(\frac{L}{2} - x\right)$$

$$\circlearrowleft + \Sigma M = 0; \qquad -\left(\frac{wL}{2}\right)x + (wx)\left(\frac{x}{2}\right) + M = 0$$

$$M = \frac{w}{2}(Lx - x^2)$$

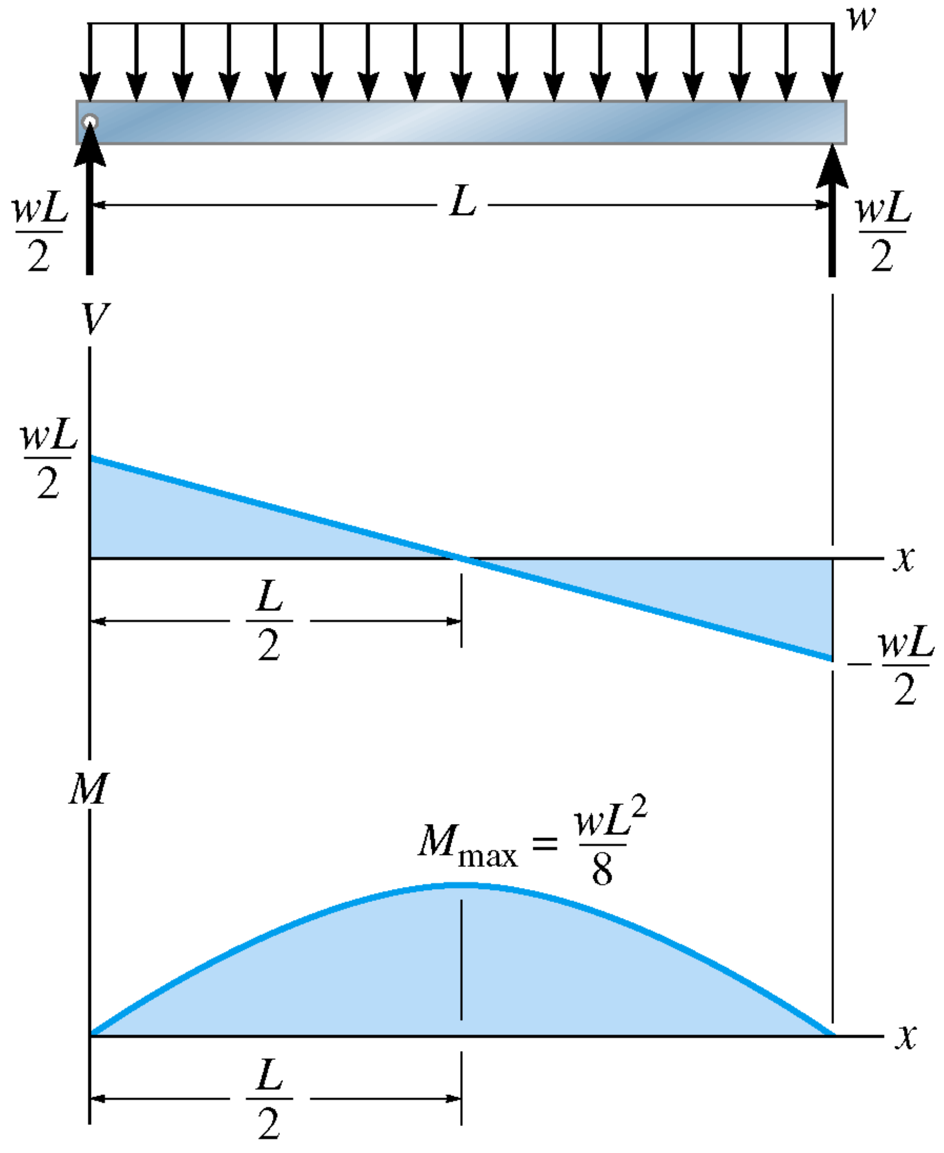
Montando o diagrama:

$$V = w\left(\frac{L}{2} - x\right) = 0$$

$$x = \frac{L}{2}$$

$$M_{\text{máx}} = \frac{w}{2}\left[L\left(\frac{L}{2}\right) - \left(\frac{L}{2}\right)^2\right]$$

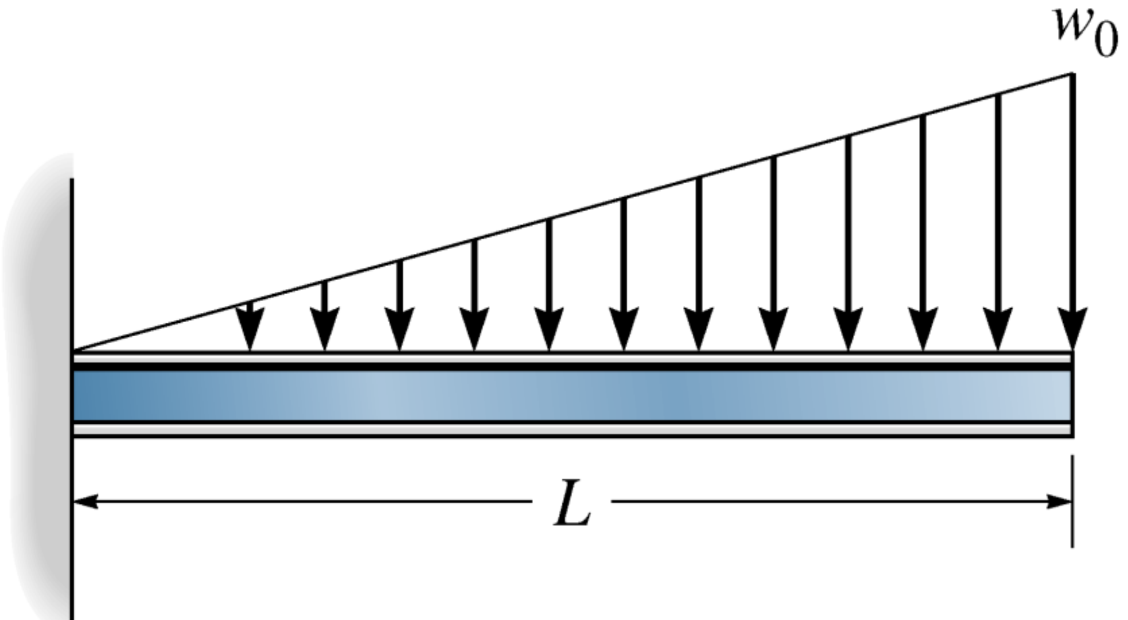
$$= \frac{wL^2}{8}$$



(c)

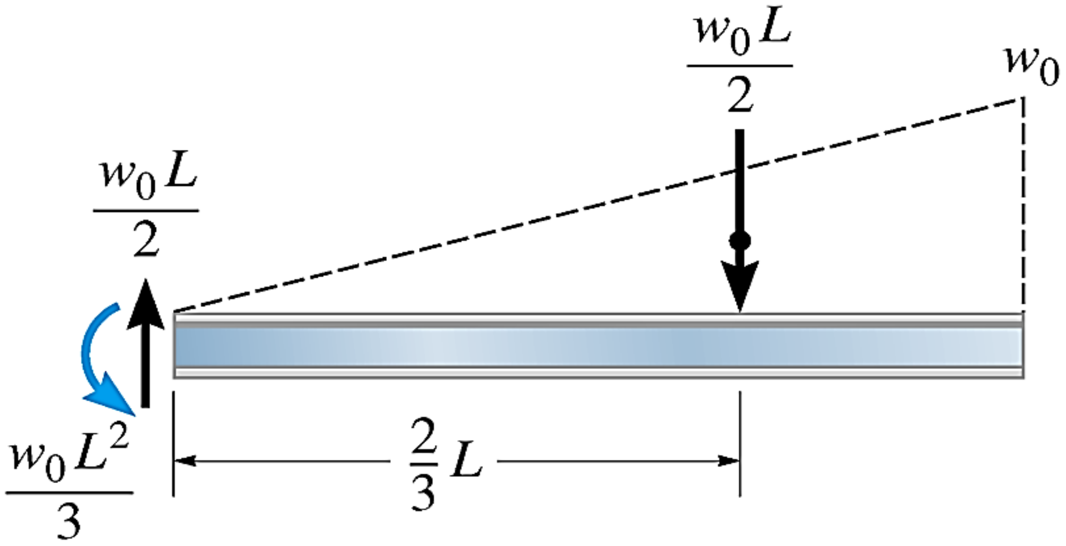
EXEMPLO 7

Desenhar os diagramas de força cortante e momento fletor da viga abaixo.



(a)

Corte:



(b)

Utilizem:
w = 200N/m
L = 10m

Verifiquem os cálculos com o Software Ftool

EXEMPLO 7

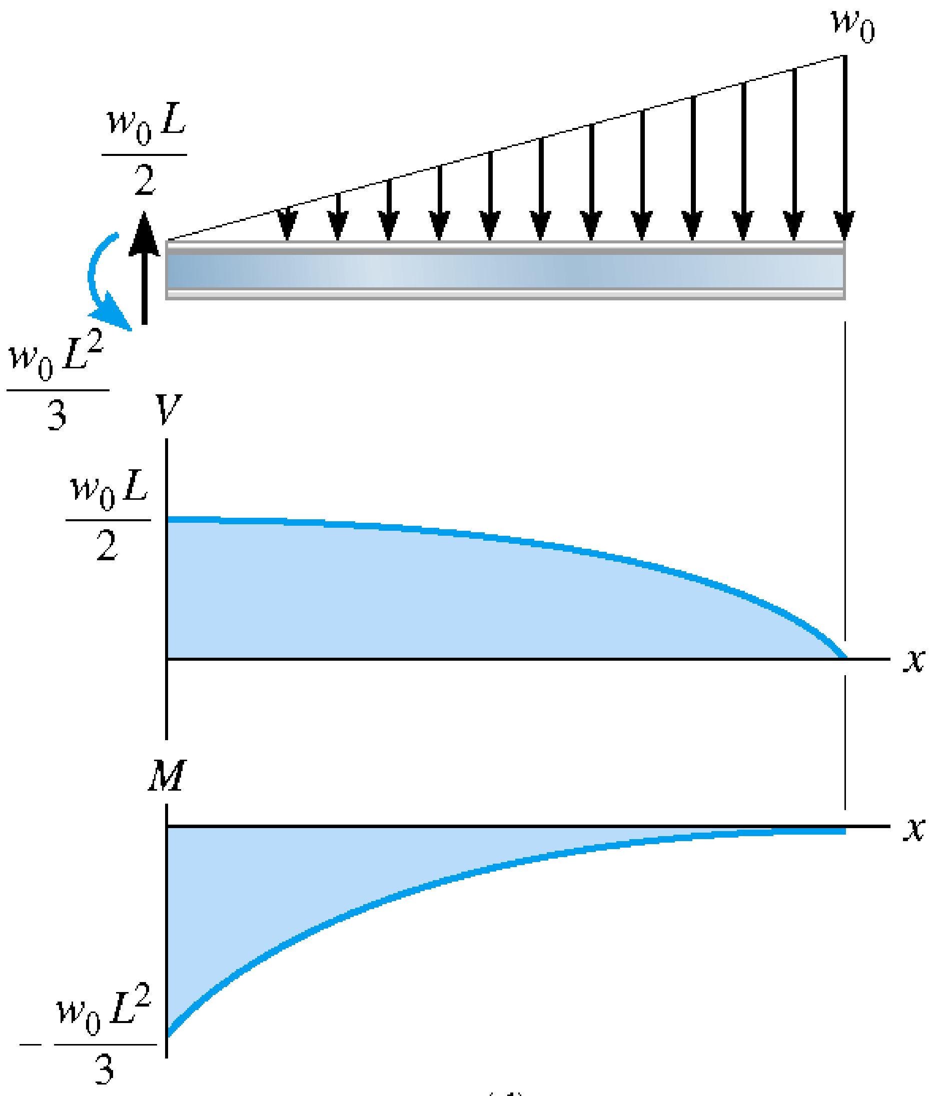
Equações de Equilíbrio no Corte:

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad \frac{w_0 L}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{w_0 x}{L}\right)x - V = 0$$

$$V = \frac{w_0}{2L}(L^2 - x^2)$$

$$\circlearrowleft + \Sigma M = 0; \qquad \frac{w_0 L^2}{3} - \frac{w_0 L}{2}(x) + \frac{1}{2}\left(\frac{w_0 x}{L}\right) x \left(\frac{1}{3}x\right) + M = 0$$

$$M = \frac{w_0}{6L}(-2L^3 + 3L^2 x - x^3)$$



(d)

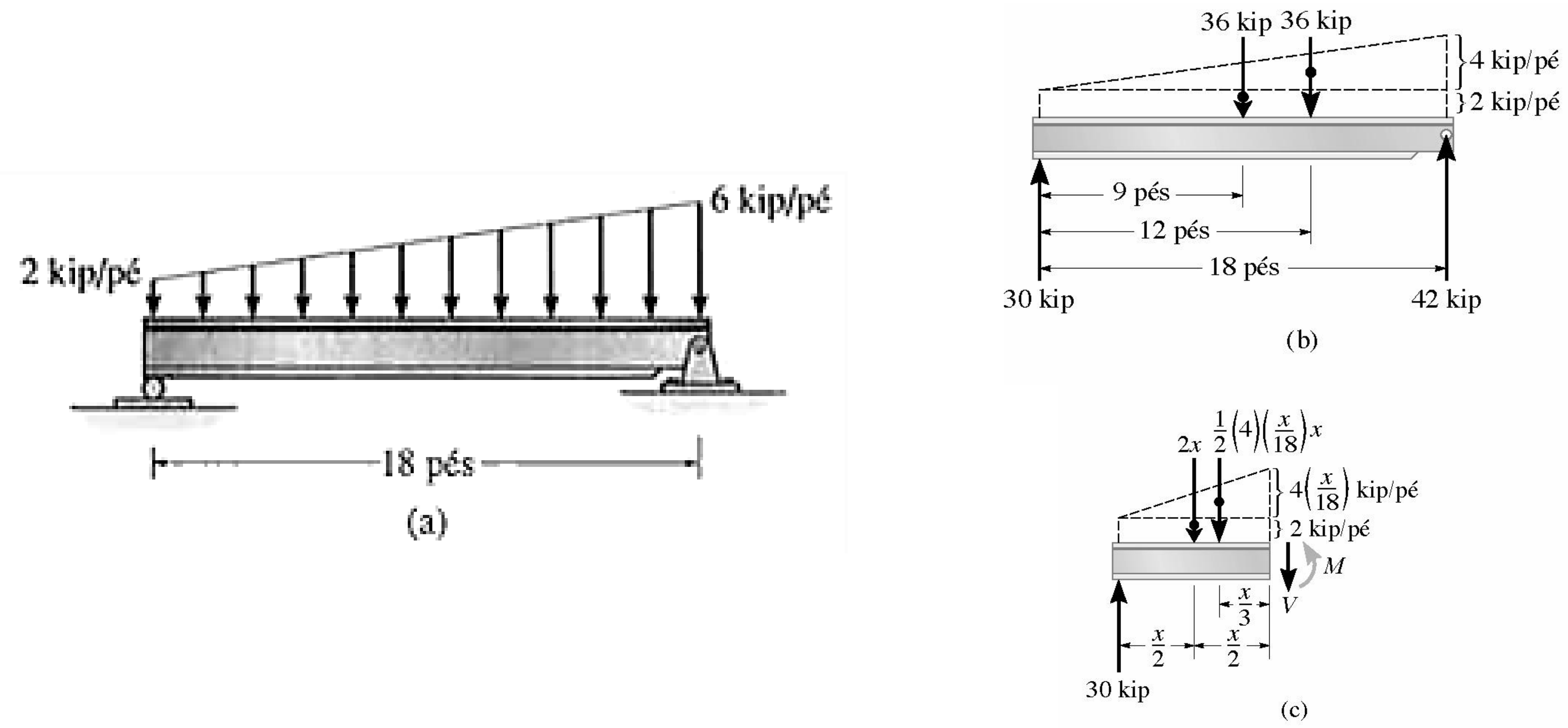
Verificando os resultados:

$$w = -\frac{dV}{dx} = -\frac{w_0}{2L}(0 - 2x) = \frac{w_0 x}{L}$$

$$V = \frac{dM}{dx} = \frac{w_0}{6L}(-0 + 3L^2 - 3x^2) = \frac{w_0}{2L}(L^2 - x^2)$$

EXEMPLO 8

Desenhar os diagramas de força cortante e momento fletor da viga abaixo.



EXEMPLO 8

Equações de equilíbrio:

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad 30\text{ kip} - (2\text{ kip/pé})x - \frac{1}{2}(4\text{ kip/pé})\left(\frac{x}{18\text{ pés}}\right)x - V = 0$$

$$V = \left(30 - 2x - \frac{x^2}{9}\right)\text{ kip}$$

$$\circlearrowleft + \Sigma M = 0;$$

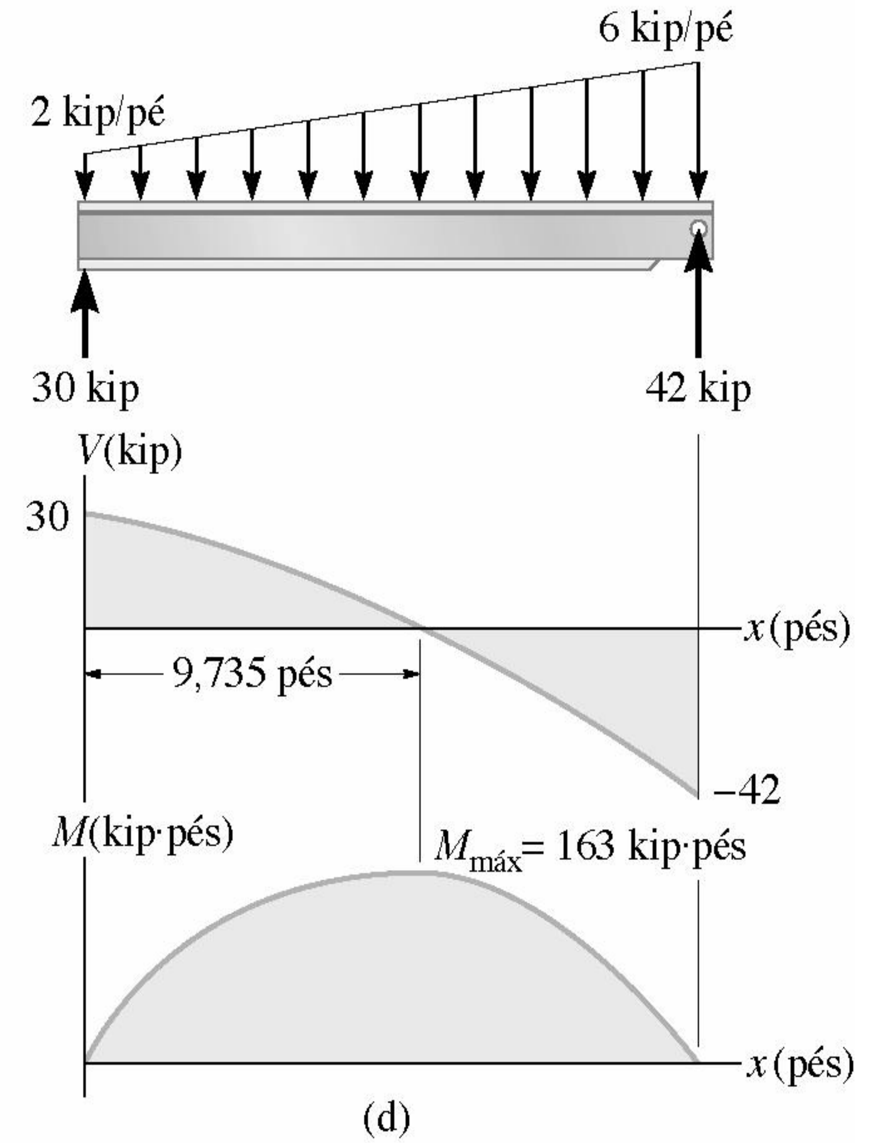
$$-30\text{ kip}(x) + (2\text{ kip/pé})\,x\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2}(4\text{ kip/pé})\left(\frac{x}{18\text{ pés}}\right)x\left(\frac{x}{3}\right) + M = 0$$

$$M = \left(30x - x^2 - \frac{x^3}{27}\right)\text{ kip}\cdot\text{pés}$$

Força cortante e o Momento máximo

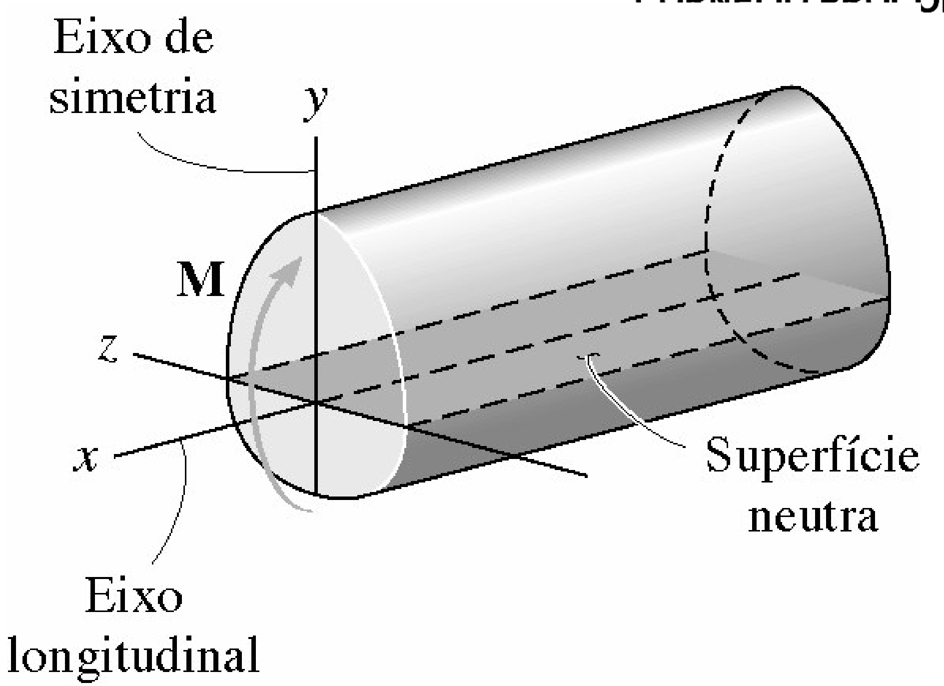
$$V = 0 = 30 - 2x - \frac{x^2}{9} \quad \Rightarrow \quad x = 9{,}735\text{ pés}$$

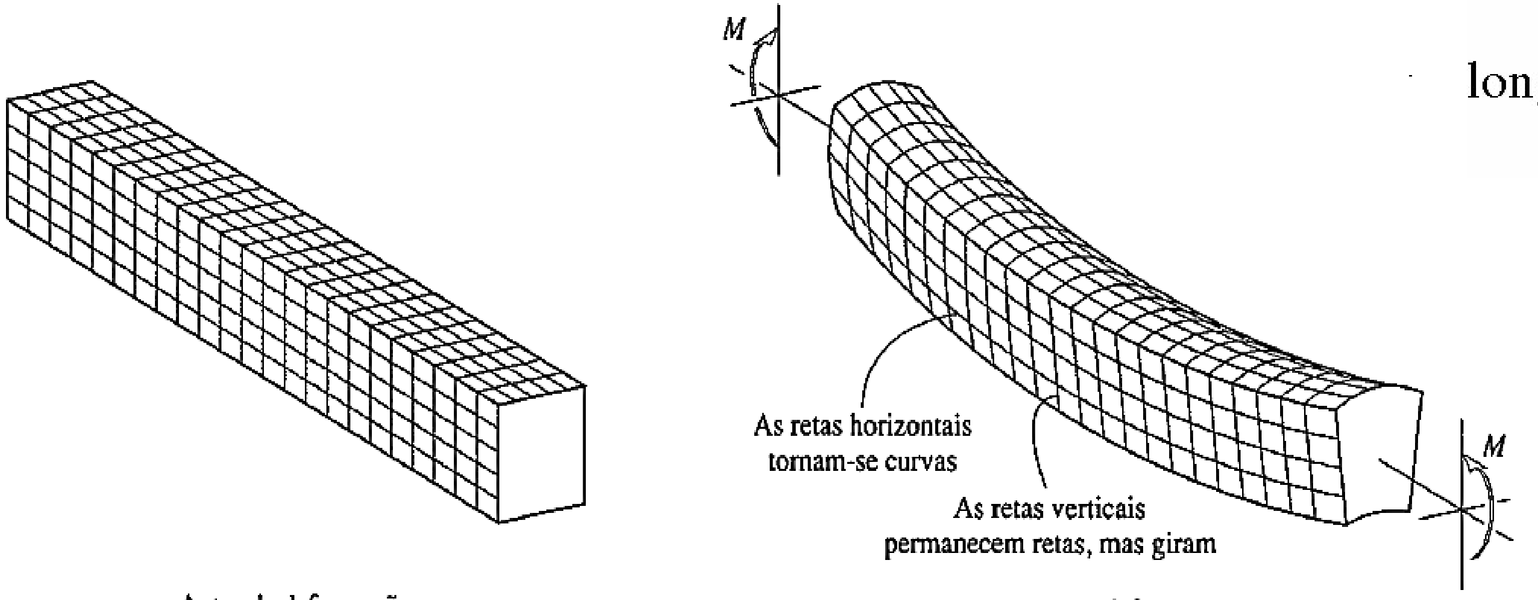
$$M_{máx} = 30(9{,}735) - (9{,}735)^2 - \frac{(9{,}735)^3}{27} \quad \Rightarrow \quad = 163\text{ kip}\cdot\text{pés}$$



DEFORMAÇÃO POR FLEXÃO

As deformações que ocorrem quando uma viga prismática, feita de material homogêneo, é submetida a flexão limita-se a área da seção transversal simétrica em relação a um eixo, nas quais o momento fletor é aplicado em torno de um eixo perpendicular ao eixo de simetria, observado na figura abaixo.





Antes da deformação

Após a deformação

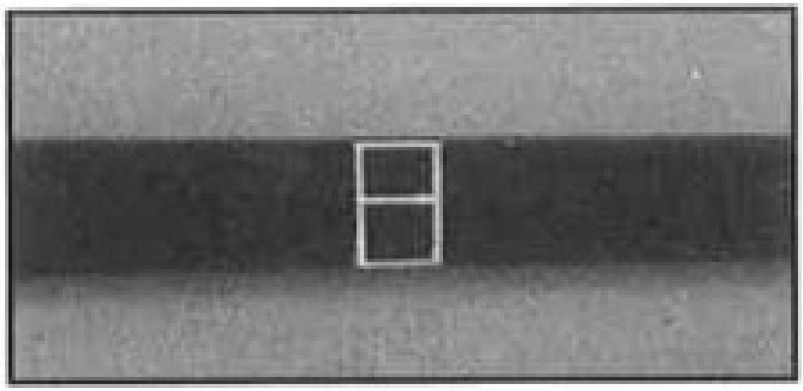
Quando aplicado um momento fletor a barra tende a distorcer a sua seção inicial, tornando as retas horizontais curvas e mas mantendo as retas verticais como retas.

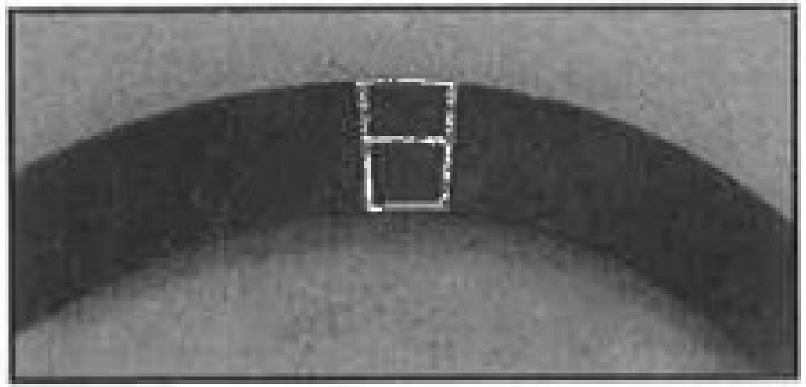
DEFORMAÇÃO POR FLEXÃO

O comportamento de qualquer barra deformável sujeita a momento fletor faz o material da parte inferior esticar-se e o da parte superior comprimir-se.

<u>No entanto, entre as duas regiões devem existir uma superfície neutra, na qual as fibras longitudinais do material não sofrem mudança de comprimento.</u>

Observa-se ao lado a distorção das retas devido a flexão da barra de borracha. A reta superior estica-se, a inferior comprime-se e a central permanece com o mesmo comprimento. Além disso as retas verticais giram, ainda que permanecam retas





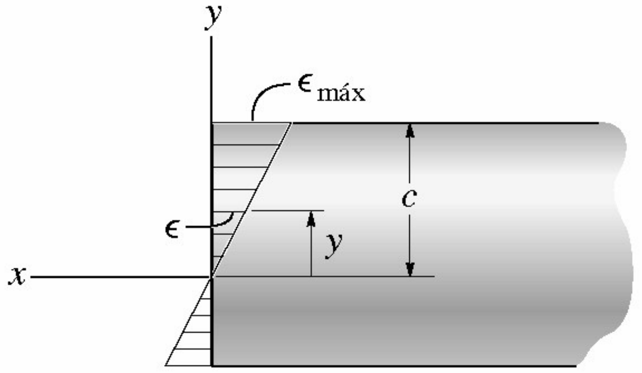
EQUAÇÃO DA TENSÃO DEVIDO A FLEXÃO

Suponha que o material comporta-se de maneira linear-elástica de modo que a lei de Hooke a ela se aplica.

Uma **variação linear da deformação normal** deve ser consequência de uma **variação linear na tensão normal.**

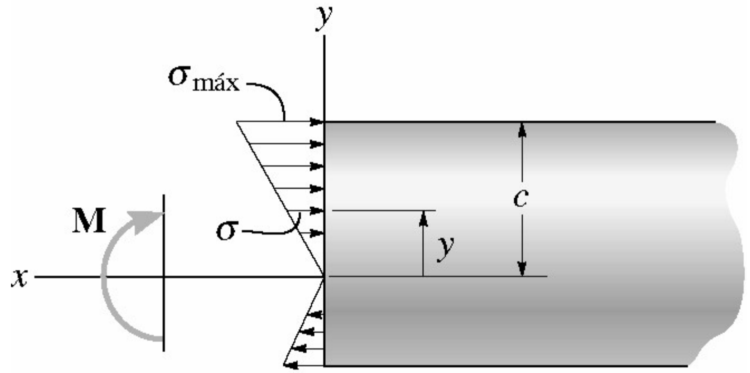
Então como a variação da deformação, a tensão varia de zero no eixo neutro a um valor de tensão máximo a distância que se afasta do eixo neutro, sendo assim podemos escrever que:

$$\sigma = -\left(\frac{y}{c}\right)\sigma_{\text{máx}}$$



Variação da deformação normal
(vista lateral)

(a)

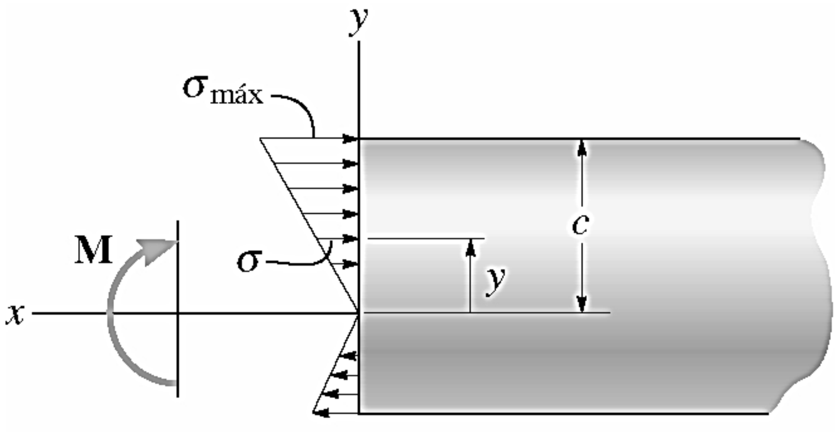


Variação da tensão de flexão
(vista lateral)

(b)

EQUAÇÃO DA TENSÃO DEVIDO A FLEXÃO

- Essa equação representa a distribuição de tensão sobre a área da seção transversal. Os vetores indicam a região que sofre tração e a região que sofre compressão.



Variação da tensão de flexão (vista lateral)

Compressão (-)

Tração (+)

- Podemos localizar a posição do eixo neutro na seção transversal satisfazendo a condição de que a força resultante produzida pela distribuição de tensão sobre a seção transversal deve ser igual a zero.

$$F_R = \Sigma F_x; \qquad 0 = \int_A dF = \int_A \sigma \, dA$$

$$= \int_A -\left(\frac{y}{c}\right)\sigma_{\text{máx}} \, dA$$

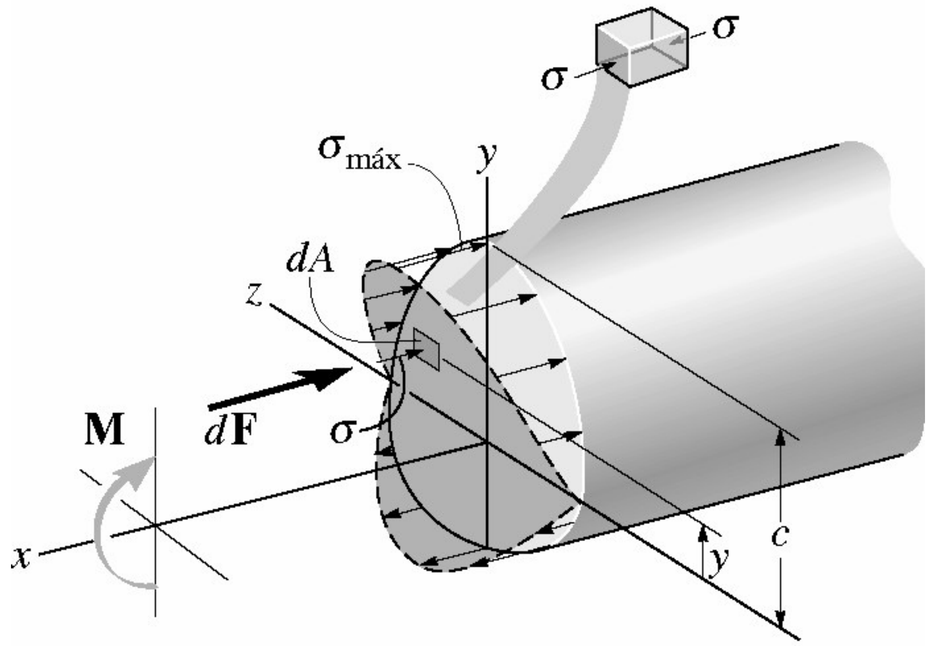
$$= \frac{-\sigma_{\text{máx}}}{c} \int_A y \, dA$$

EQUAÇÃO DA TENSÃO DEVIDO A FLEXÃO

UTFPR CORNÉLIO PROCÓPIO

Uma vez determinado o centroide da seção transversal, a localização do eixo neutro será conhecida.

Podemos determinar a tensão na viga pelo requisito de que o momento interno resultante M seja igual ao momento produzido pela distribuição de tensão em torno do eixo neutro.



Variação da tensão de flexão

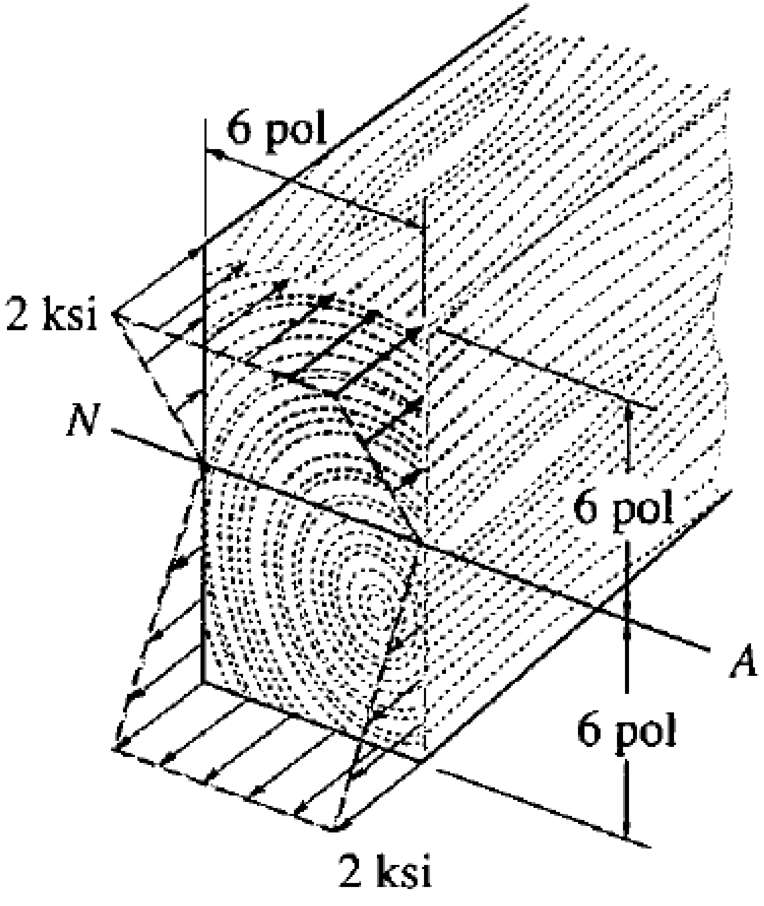
$$(M_R)_z = \Sigma M_z;\; M = \int_A y\, dF = \int_A y\,(\sigma\, dA) = \int_A y\left(\frac{y}{c}\,\sigma_{\text{máx}}\right) dA$$

$$M = \frac{\sigma_{\text{máx}}}{c}\int_A y^2\, dA \quad \Longrightarrow \quad \sigma_{\text{máx}} = \frac{Mc}{I}$$

EXEMPLO 9

CORNÉLIO PROCÓPIO

Uma viga tem que seção transversal retangular e está submetida à distribuição de tensão mostrada na figura. Determinar o momento interno **M** na seção provocada pela distribuição de tensão, usando a fórmula de flexão e (b) determinando a resultantes da distribuição de tensão por meio de princípios básicos.



(a)

Momento de inercia:

$$I = \frac{1}{12}bh^3 = \frac{1}{12}(6 \text{ pol})(12 \text{ pol})^3 = 864 \text{ pol}^4$$

Momento Interno Resultante

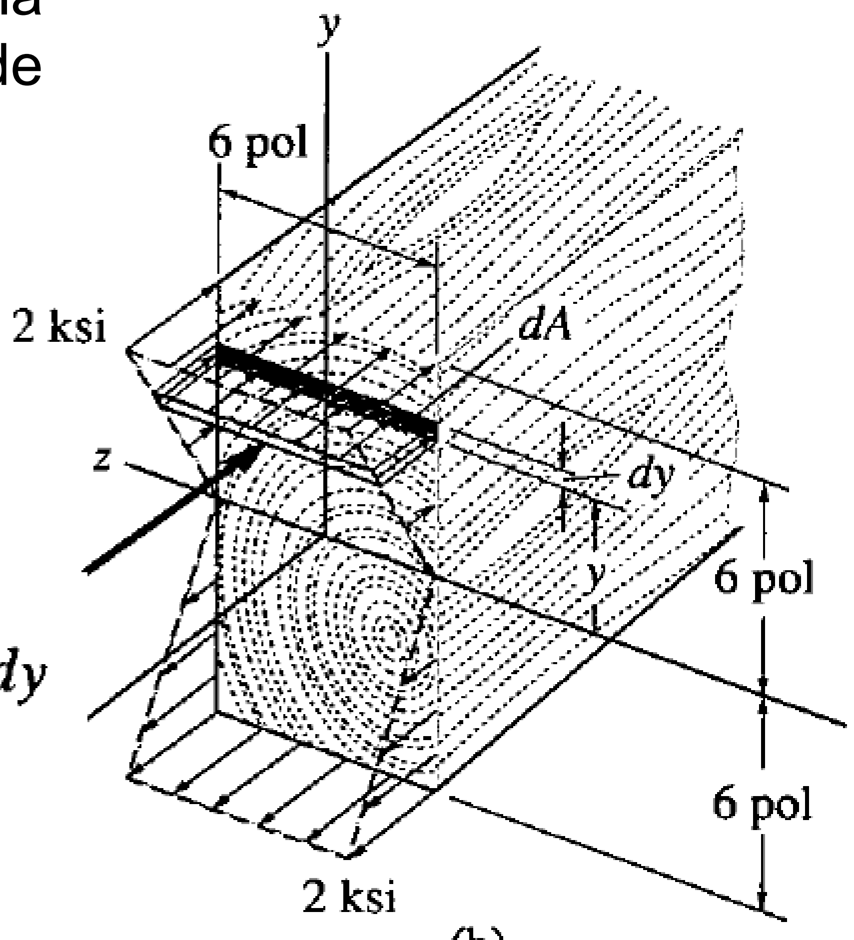
$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{Mc}{I}; \qquad 2 \text{ kip/pol}^2 = \frac{M(6 \text{ pol})}{864 \text{ pol}^4}$$

$$M = 288 \text{ kip} \cdot \text{pol} = 24 \text{ kip} \cdot \text{pés}$$

EXEMPLO 10

UTFPR CORNÉLIO PROCÓPIO

Uma viga tem que seção transversal retangular e está submetida à distribuição de tensão mostrada na figura. Determinar o momento interno **M** na seção provocada pela distribuição de tensão, usando a resultante da distribuição de tensão por meio de princípios básicos.



(b)

Equação da Tensão:

$$\sigma = \left(\frac{-y}{6\text{ pol}}\right)(2\text{ kip/pol}^2)$$

Calculo da Força Resultante:

$$F_R = \int_A \sigma\, dA = \int_{-6\text{ pol}}^{6\text{ pol}} \left[\left(\frac{-y}{6\text{ pol}}\right)(2\text{ kip/pol}^2)\right](6\text{ pol})\, dy$$

$$= (-1\text{ kip/pol}^2)\, y^2 \Big|_{-6\text{ pol}}^{+6\text{ pol}} = 0$$

EXEMPLO 10

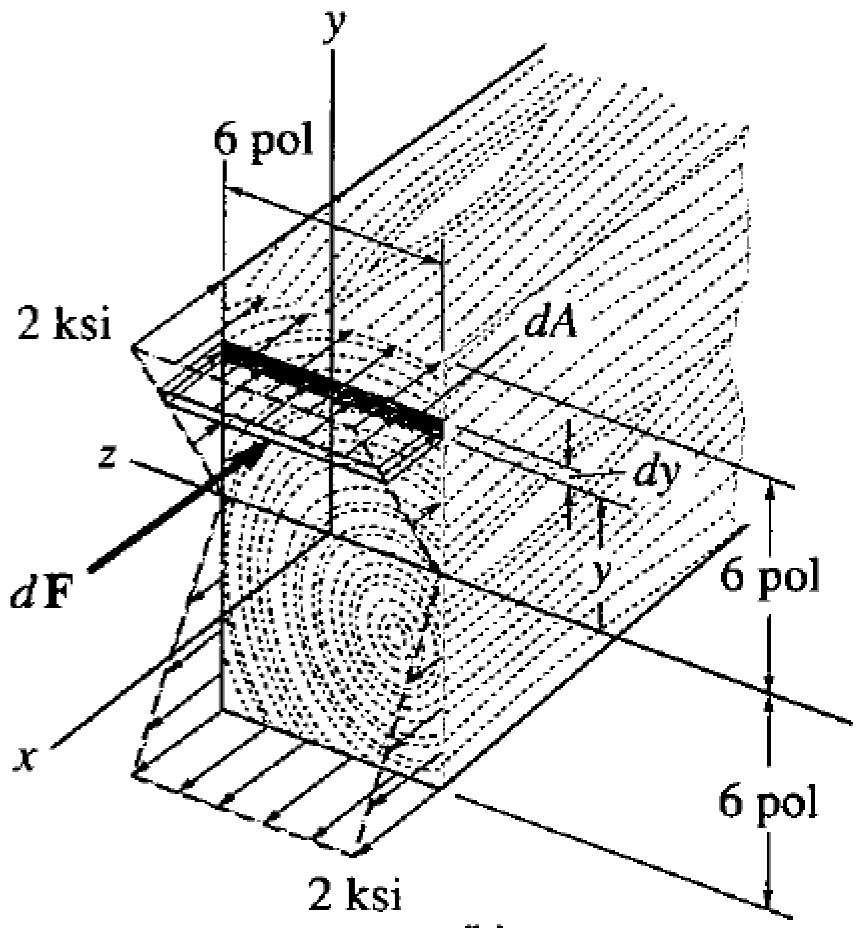
CORNÉLIO PROCÓPIO

Calculo do momento máximo na viga

$$M = \int_A y\, dF = \int_{-6\text{ pol}}^{6\text{ pol}} y\left[\left(\frac{-y}{6\text{ pol}}\right)(2\text{ kip/pol}^2)\right](6\text{ pol})\, dy$$

$$= \left(\frac{2}{3}\text{ kip/pol}^2\right) y^3 \Big|_{-6\text{ pol}}^{+6\text{ pol}}$$

$$= 288\text{ kip}\cdot\text{pol} = 24\text{ kip}\cdot\text{pés}$$



(b)

Calculo da força de tração/compressão interna:

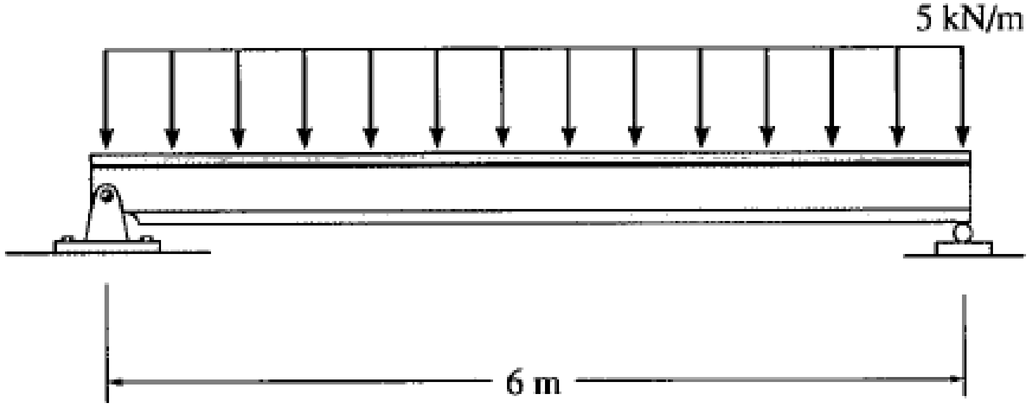
$$F = \frac{1}{2}(6\text{ pol})(2\text{ kip/pol}^2)(6\text{ pol}) = 36\text{ kip}$$

Calculo do momento máximo na viga:

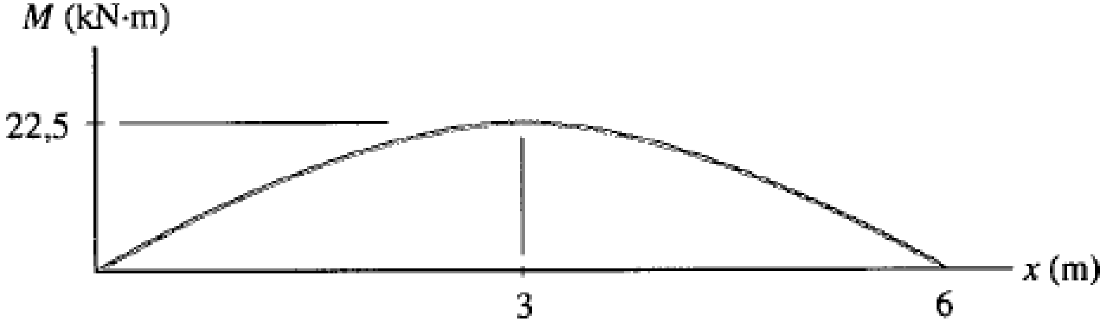
$$M = 36\text{ kip }(8\text{ pol}) = 288\text{ kip}\cdot\text{pol} = 24\text{ kip}\cdot\text{pés}$$

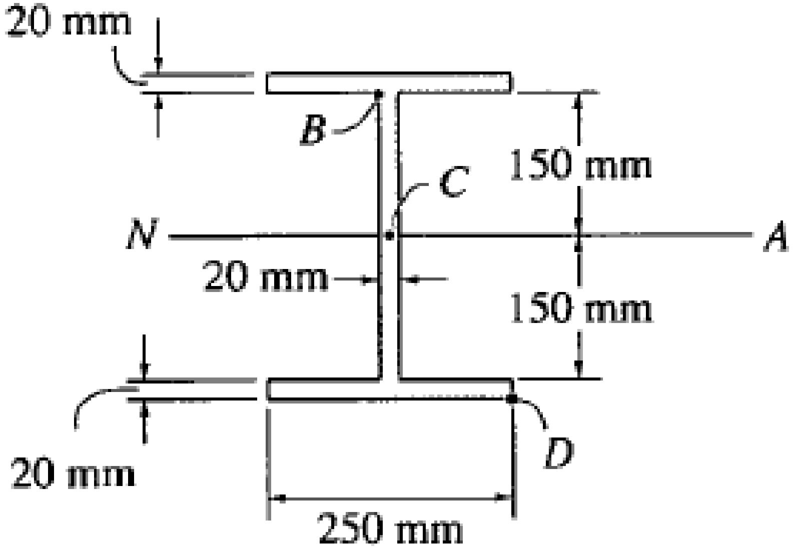
EXEMPLO 11

A viga simplesmente apoiada tem a área da seção transversal mostrada na figura. Determine a tensão de flexão máxima absoluta na viga e desenhe a distribuição de tensão na seção transversal nessa localização.



(a)

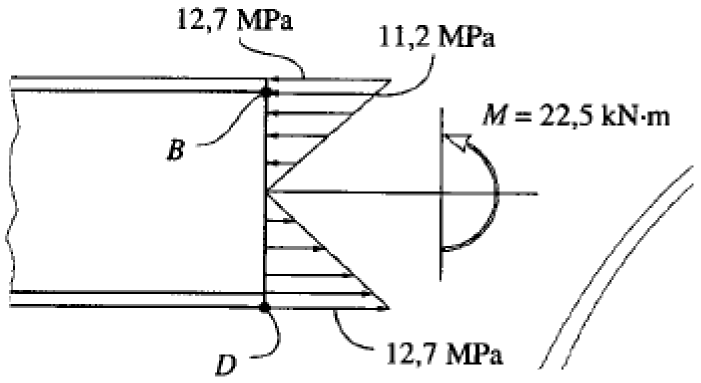




EXEMPLO 11

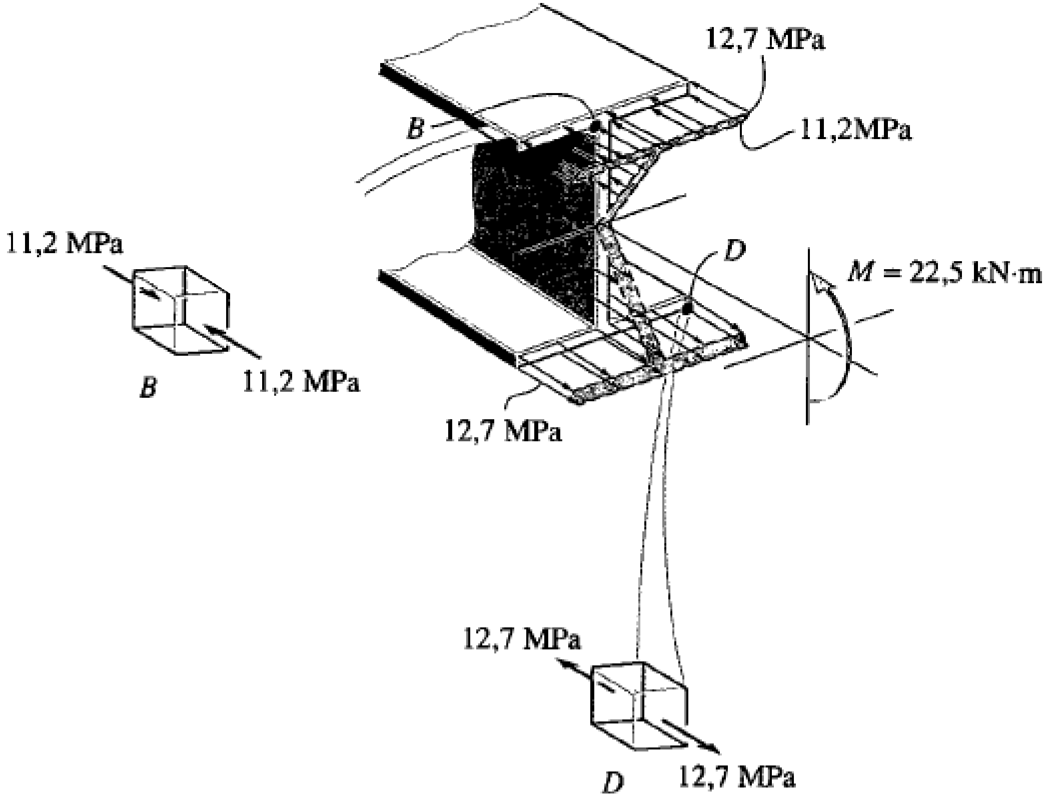
Momento de inércia de área da seção composta:

$$
\begin{aligned}
I &= \Sigma(\bar{I} + Ad^2) \\
&= 2\left[\frac{1}{12}(0{,}25\text{ m})(0{,}020\text{ m})^3 + (0{,}25\text{ m})(0{,}020\text{ m})(0{,}160\text{ m})^2\right] \\
&\quad + \left[\frac{1}{12}(0{,}020\text{ m})(0{,}300\text{ m})^3\right] \\
&= 301{,}3(10^{-6})\text{ m}^4
\end{aligned}
$$



Tensão máxima na viga devido a flexão:

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{Mc}{I}; \qquad \sigma_{\text{máx}} = \frac{22{,}5\text{ kN}\cdot\text{m}(0{,}170\text{ m})}{301{,}3(10^{-6})\text{ m}^4} = 12{,}7\text{ MPa}$$

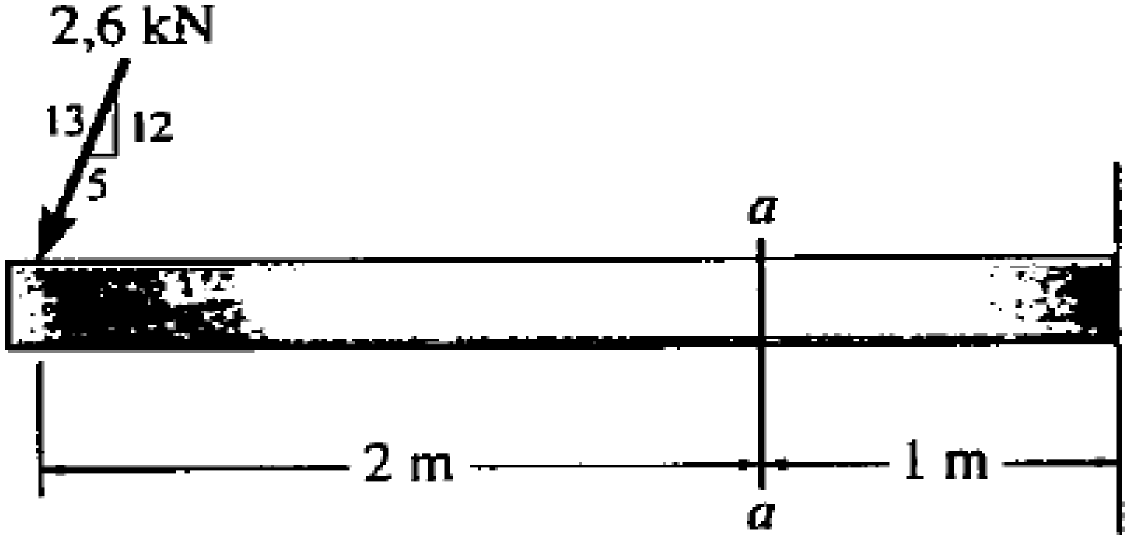


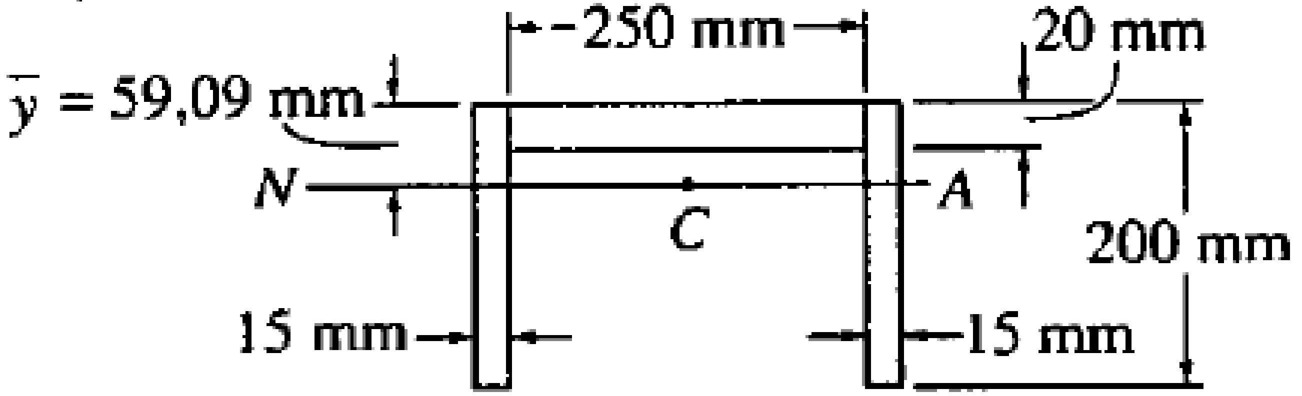
Tensão na seção B da viga devido a flexão:

$$\sigma_B = \frac{My_B}{I}; \qquad \sigma_B = \frac{22{,}5\text{ kN}\cdot\text{m}\ (0{,}150\text{ m})}{301{,}3(10^{-6})\text{ m}^4} = 11{,}2\text{ MPa}$$

EXEMPLO 12

A viga mostrada na figura tem área da seção transversal como no perfil em forma de U. Determine a tensão de flexão máxima que ocorre na seção a-a da viga





EXEMPLO 12

UTFPR CORNÉLIO PROCÓPIO

Posição do centroide:

$$\bar{y} = \frac{\Sigma \tilde{y} A}{\Sigma A} = \frac{2[0{,}100\text{ m}](0{,}200\text{ m})(0{,}015\text{ m}) + [0{,}010\text{ m}](0{,}02\text{ m})(0{,}250\text{ m})}{2(0{,}200\text{ m})(0{,}015\text{ m}) + 0{,}020\text{ m}(0{,}250\text{ m})} = 0{,}05909\text{ m} = 59{,}09\text{ mm}$$

Momento interno na seção a-a:

$$\circlearrowleft + \Sigma M_{EN} = 0; \qquad 2{,}4\text{ kN}(2\text{ m}) + 1{,}0\text{ kN}(0{,}05909\text{ m}) - M = 0 \quad \Rightarrow \quad M = 4{,}859\text{ kN}\cdot\text{m}$$

Momento de inércia de área da seção composta:

$$I = \left[\frac{1}{12}(0{,}250\text{ m})(0{,}020\text{ m})^3 + (0{,}250\text{ m})(0{,}020\text{ m})(0{,}05909\text{ m} - 0{,}010\text{ m})^2\right]$$

$$+ 2\left[\frac{1}{12}(0{,}015\text{ m})(0{,}200\text{ m})^3 + (0{,}015\text{ m})(0{,}200\text{ m})(0{,}100\text{ m} - 0{,}05909\text{ m})^2\right] = 42{,}26(10^{-6})\text{ m}^4$$

Tensão devido a flexão:

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{Mc}{I} = \frac{4{,}859\text{ kN}\cdot\text{m}(0{,}1409\text{ m})}{42{,}26(10^{-6})\text{ m}^4} = 16{,}2\text{ MPa}$$

EXERCÍCIOS E ATIVIDADES

Orientação para realização das Atividades:

- Realizar as atividade a mão livre;
- Realizar diagramas e desenhos para compreensão;
- Realizar todas as contas de forma detalhada;
- Colocar as repostas principais a caneta;
- Entregar as atividades e resolução dos exercícios em forma digital no sala virtual da disciplina.

EXERCÍCIOS PARA ENTREGAR

CORNÉLIO PROCÓPIO

Realizar os exercícios do livro:
Hibbeller – Resistência os Materiais

Capitulo 6

- Item 6.46 ; R:
- Item 6.48 ; R:
- Item 6.60 ; R:
- Item 6.77 ; R: