Ministério da Educação
UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
Campus Cornélio Procópio

AULA 7

FORÇAS INTERNAS E DIAGRAMAS

Professor: Dr. Paulo Sergio Olivio Filho

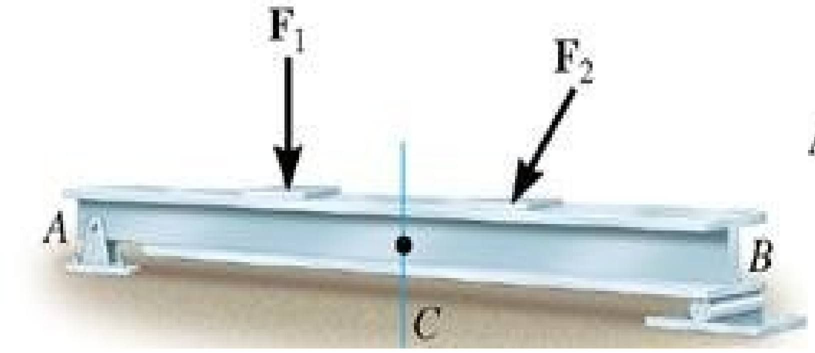
CONTEÚDO DA AULA

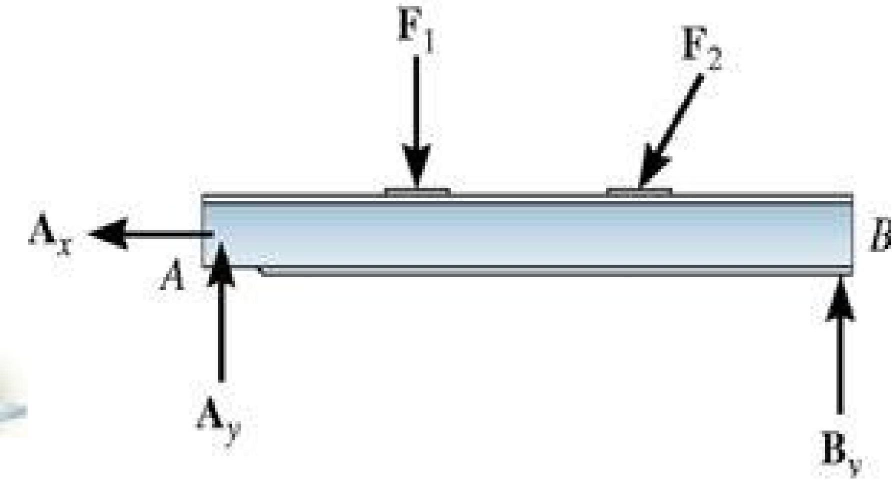
- Introdução a força cortante, força normal e momento fletor.
- Criação e análise de diagramas de força cortante.
- Criação e análise de diagramas de força normal
- Criação e análise de diagramas de momento fletor.
- Introdução unidades básicas de Tensão
- Introdução a Tensão média

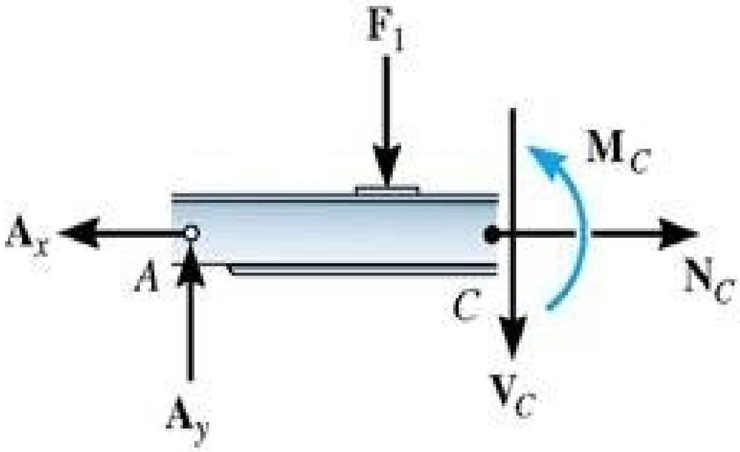
FORÇAS INTERNAS

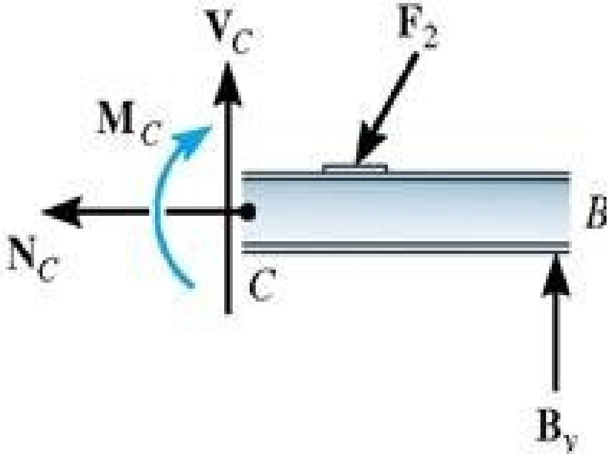
Para projetar membro estrutural ou mecânico é preciso:

- ✓ Conhecer a carga atuante dentro do membro, com o intuito de verificar se o material resistirá a carga aplicada.

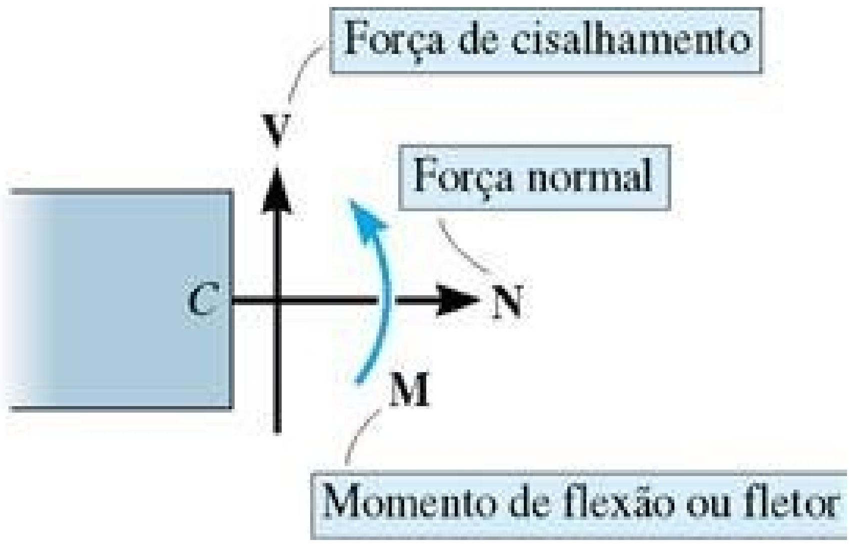






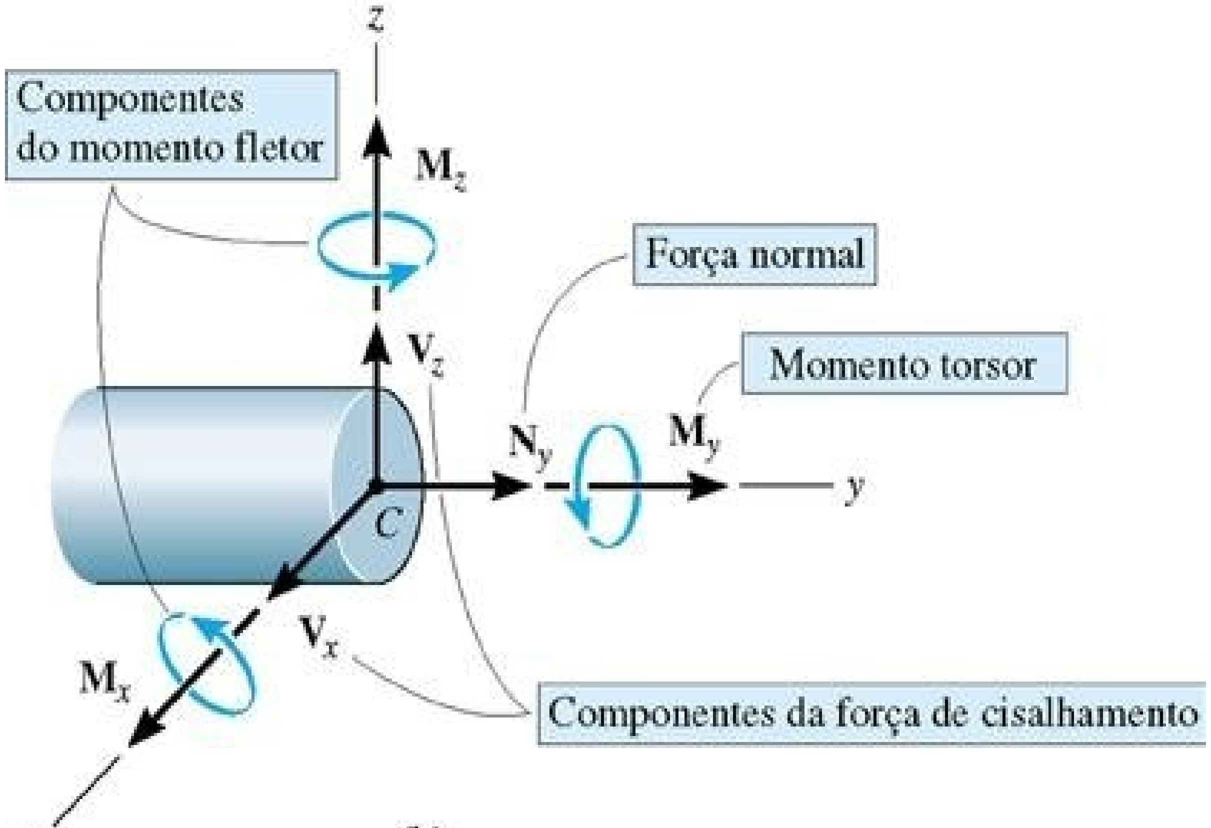


FORÇAS INTERNAS



Momento de Torção ou Torque, T.

Esse efeito é criado quando as cargas externas tendem a torcer uma parte do corpo em relação a outra.



(b)

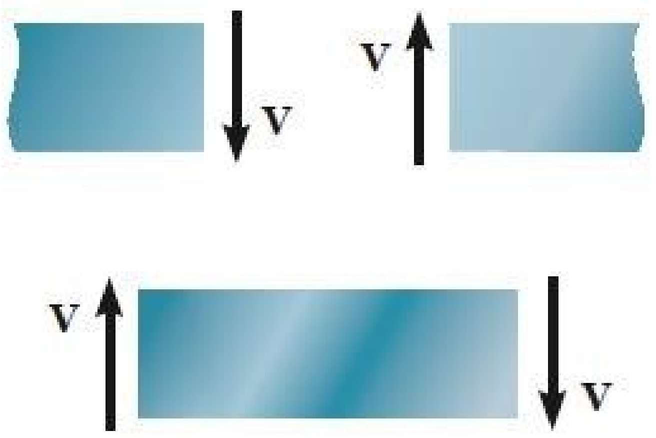
Força Normal, N.

Essa força atua perperndicularmente a área. É criada sempre que as forças externas tendem a empurrar ou puxar as duas partes dos corpo.

FORÇAS INTERNAS

CORNÉLIO PROCÓPIO

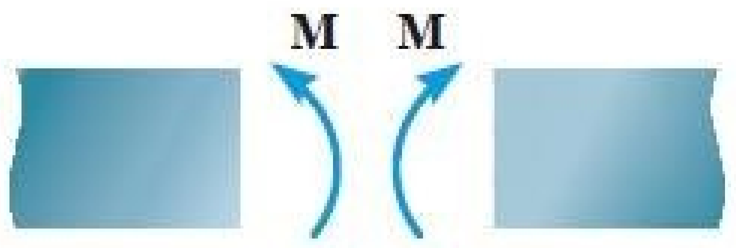
Força normal positiva



Esforço cortante positivo

Momento Fletor, M.

O momento fletor é provocado peças cargas externas que tendem a fletir o corpo em relação ao eixo localizado no plano da área



Momento positivo

Força de Cisalhamento , V.

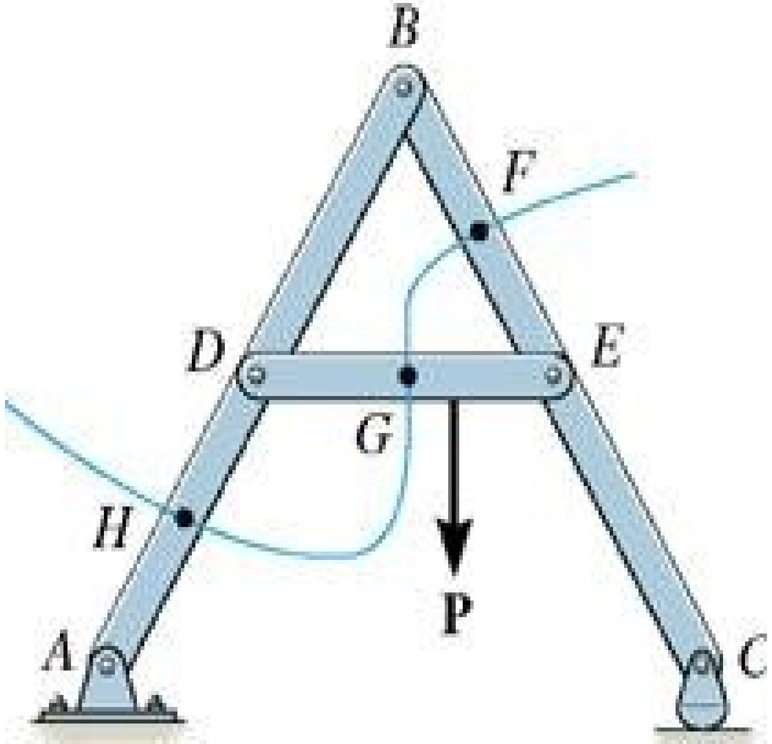
A força de cisalhamento localiza-se no plano da área e é criada quando as cargas externas tendem a provocar o deslizamento das duas partes do corpo, uma sobre a outra

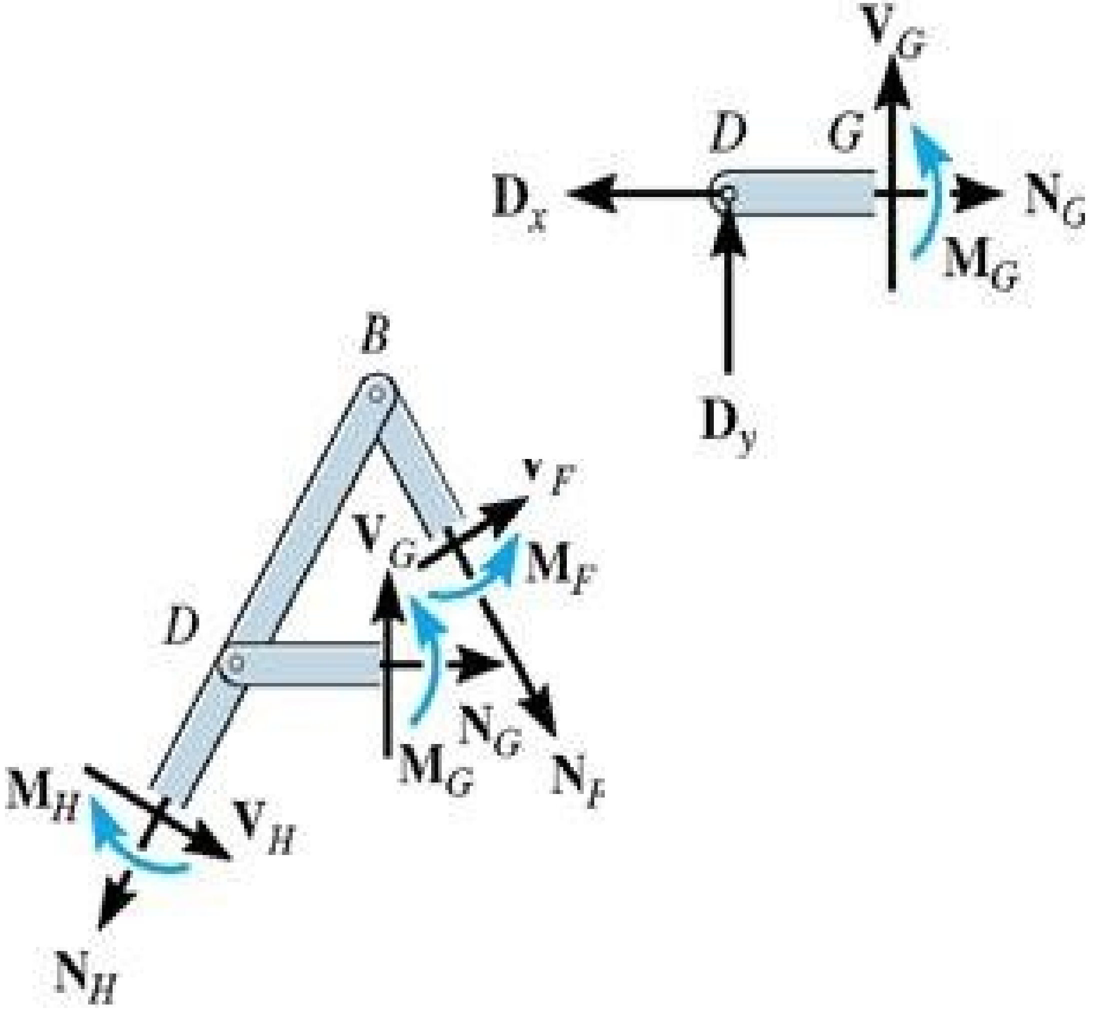
FORÇAS INTERNAS

UTFPR CORNÉLIO PROCÓPIO

O método das seções pode ser usado para determinar as cargas internas sobre a seção transversal de um membro da seguinte forma:

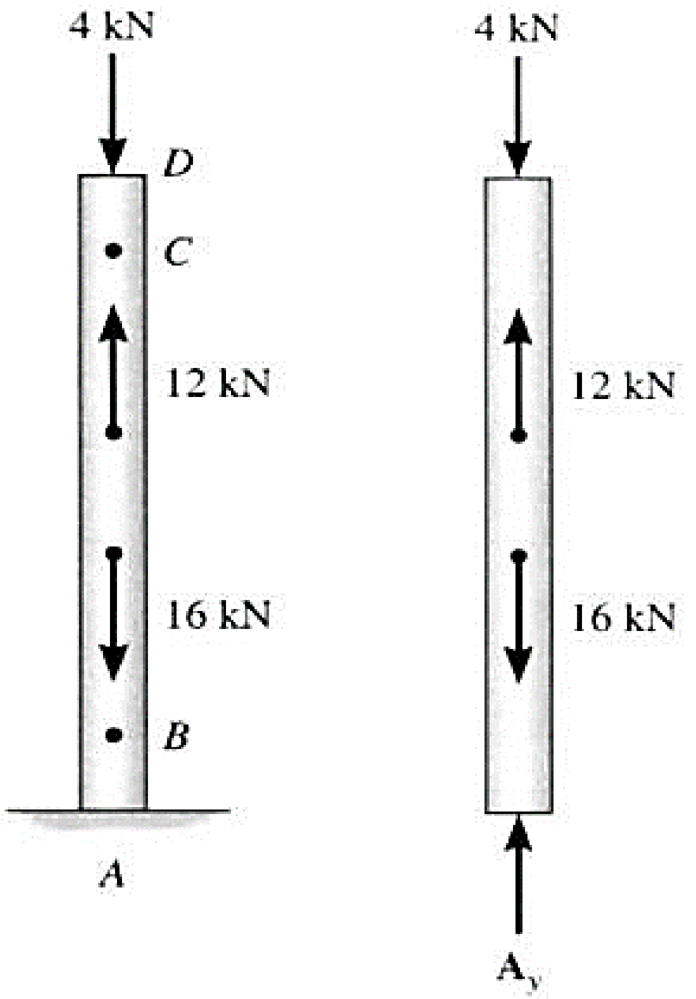
- ✓ Reações de apoio;
- ✓ Diagrama de corpo livre;
- ✓ Equações de equilíbrio.





EXEMPLO 1

Uma barra é fixada em suas extremidades e é carregada como mostra a Figura. Determine as forças normais internas nos pontos B e C



Reações de apoio:

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0;$$

$$A_y - 16\text{ kN} + 12\text{ kN} - 4\text{ kN} = 0$$

$$A_y = 8\text{ kN}$$

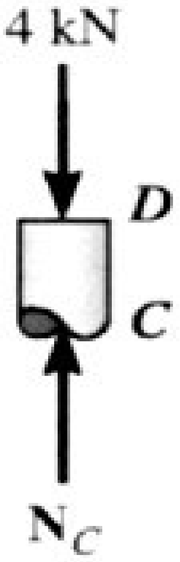
EXEMPLO 1

Seguimento AB:

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0;$$

$$8\ \text{kN} - N_B = 0$$

$$N_B = 8\ \text{kN}$$



Seguimento BC:

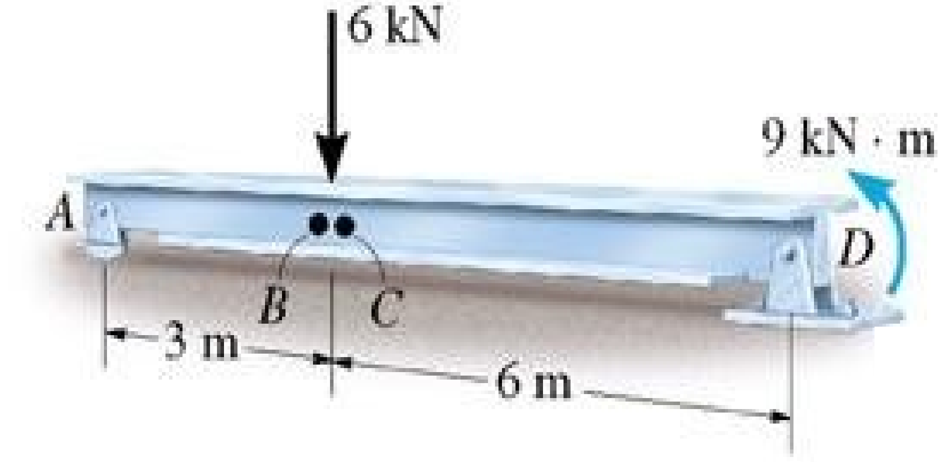
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0;$$

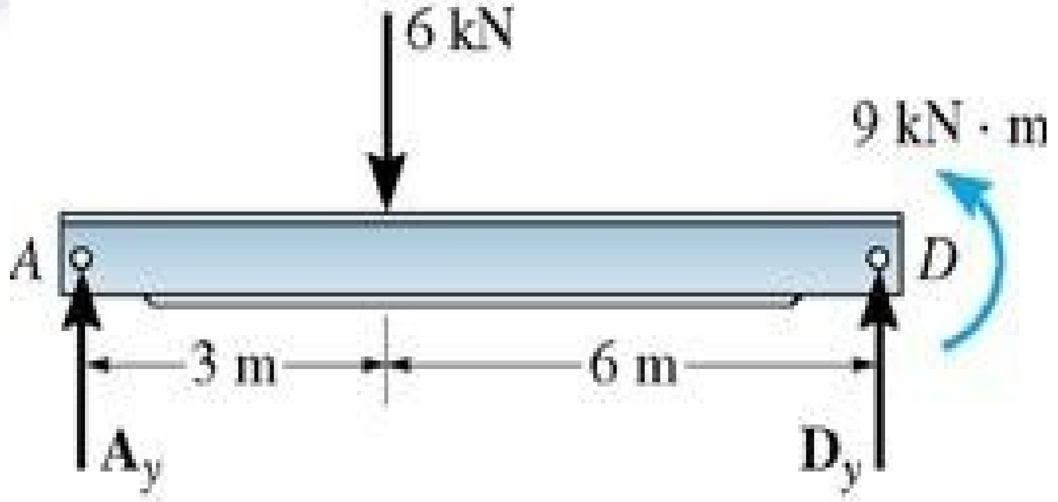
$$N_C - 4\ \text{kN} = 0$$

$$N_C = 4\ \text{kN}$$

EXEMPLO 2

A viga sustenta o carregamento, conforme figura. Determine as forças internas normal, de cisalhamento e o momento fletor que atuam nos pontos *B* e *C*, localizados, respectivamente, à esquerda e à direita do ponto de aplicação da força de 6 kN.





EXEMPLO 2

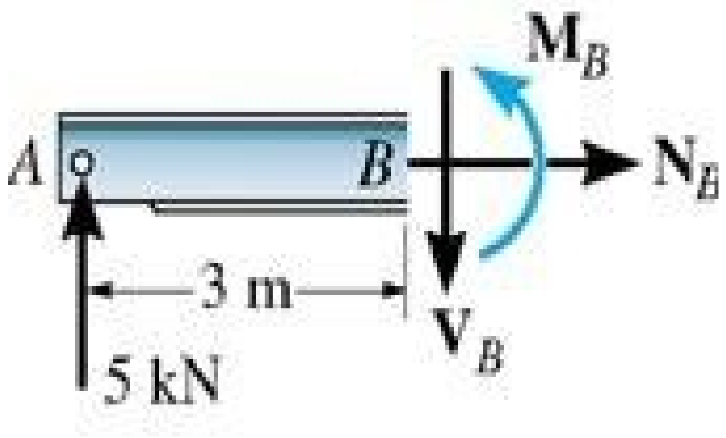
Reações de apoio:

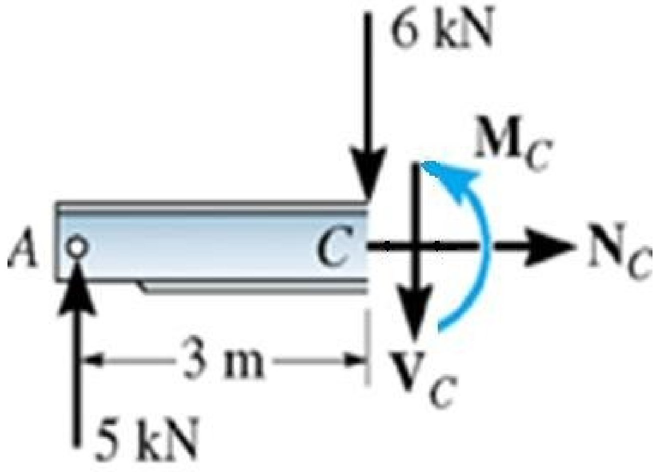
$\Sigma M_D = 0$

$9\text{kN}\cdot\text{m} + (6\text{kN})(6\text{m}) - A_y(9\text{m}) = 0$

$A_y = 5\text{kN}$

Diagrama de corpo livre:





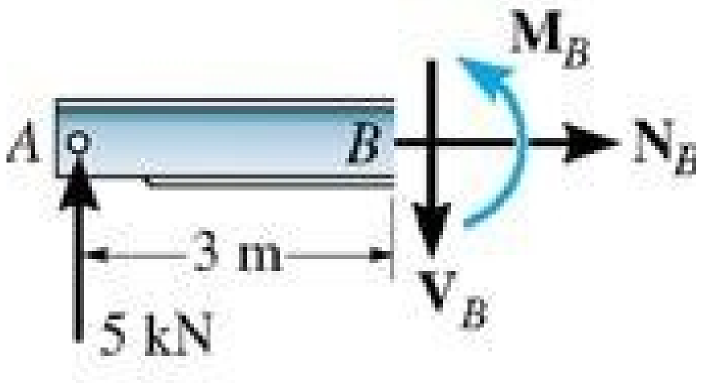
EXEMPLO 2

Equações de equilíbrio:

➢ ***Segmento AB***

$\Sigma F_x = 0;$

$N_B = 0$



$\Sigma F_y = 0;$

$5kN - V_B = 0$

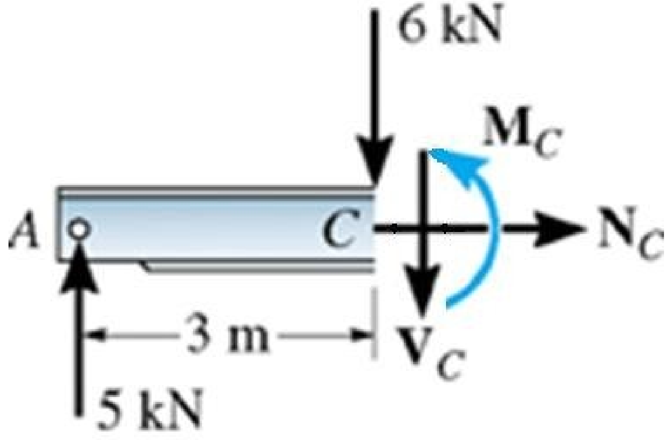
$V_B = 5\ kN$

$\Sigma M_B = 0;$

$-(5kN)(3m) + M_B = 0$

$M_B = 15kN{\cdot}m$

➢ ***Segmento AC***



$\Sigma F_x = 0;$

$N_C = 0$

$\Sigma F_y = 0;$

$5kN – 6kN – V_C = 0$

$V_C = – 1\ kN$

$\Sigma M_C = 0;$

$-(5kN)(3m) + M_C = 0$

$M_C = 15kN{\cdot}m$

TENSÃO

A relação atribuída entre a intensidade da força interna do membro rígido sobre um plano específico que passa por determinado ponto (área) é chamado de tensão.

A tensão pode ser descrita como tensão normal, cisalhante ou admissível. Sua unidade de medida é expressa em Pa (Pascal) no sistema internacional.

MEDIDA	SISTEMA INTERNACIONAL	SISTEMA INGLÊS
TENSÃO	N/m^2 ou Pa	lb/in^2 ou psi
FORÇA	N (Newton)	lb (Libras)
COMPRIMENTO	m (metros)	In (polegadas)
ÁREA	m^2 (metros quadrada)	In (polegadas quadrada)

Ksi - quilolibra por polegada quadrada 1 Kip = 1000 libras

TENSÃO NORMAL MÉDIA

CORNÉLIO PROCÓPIO

A carga normal P, que atua na peça, origina nesta, uma tensão normal que é determinada através da relação entre a intensidade da carga aplicada, e a área da secção transversal da peça.

$$\boxed{\sigma = \frac{P}{A}}$$

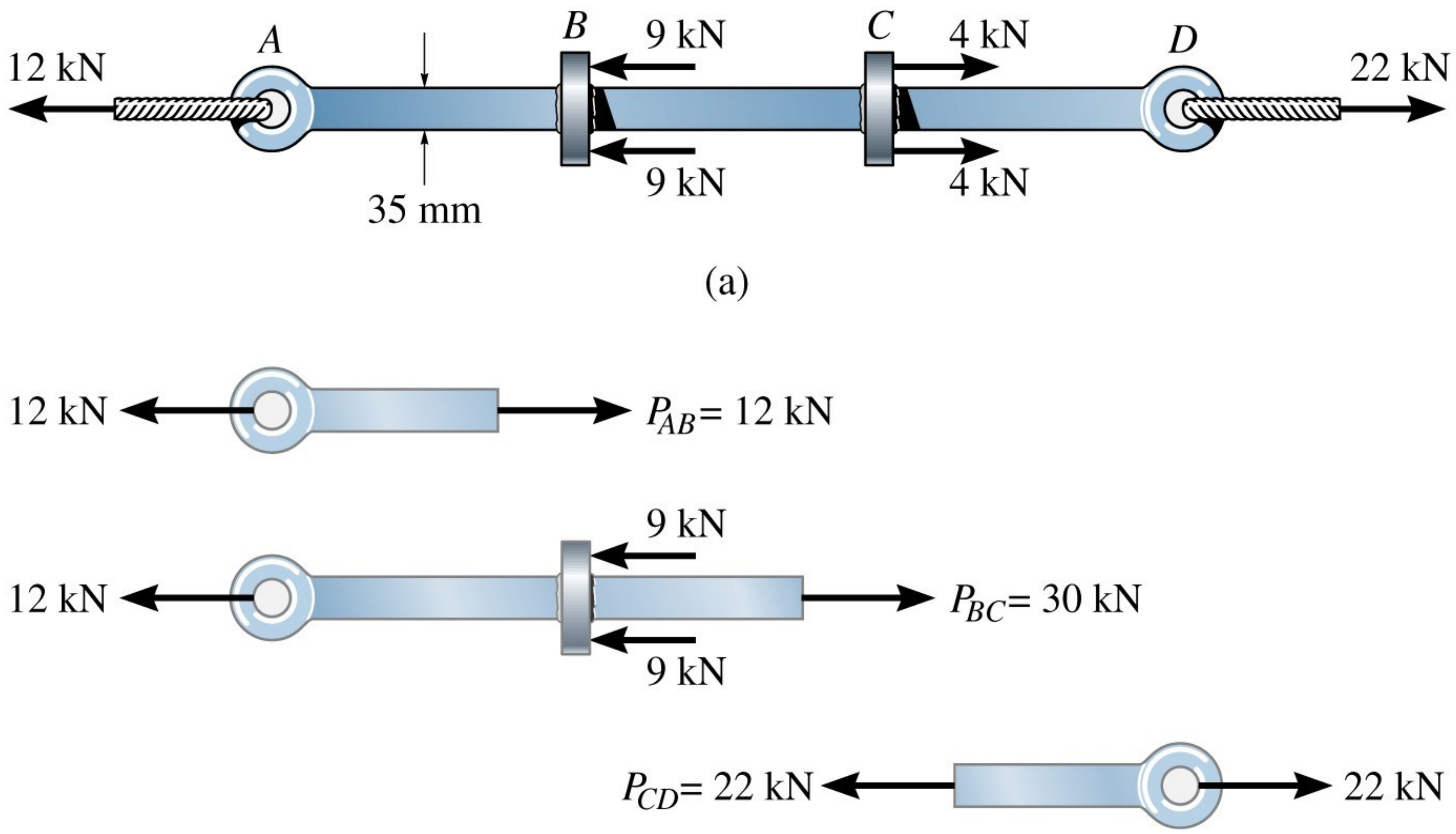
Tensão de tração (puxa)
Tensão de compressão (empurra)

Onde:

σ - tensão normal [Pa];
P - força normal ou axial [N];
A - área da secção transversal da peça [m²];

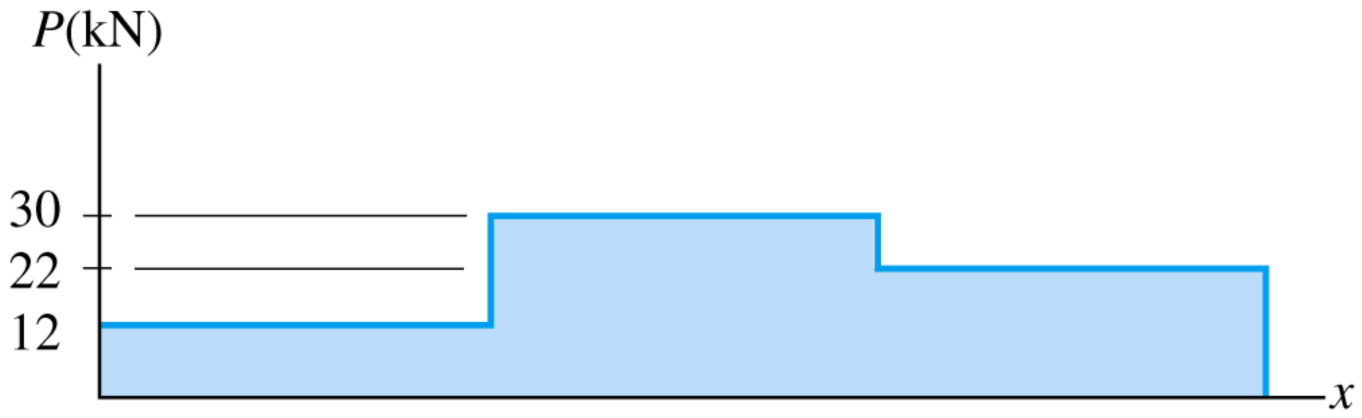
EXEMPLO 3

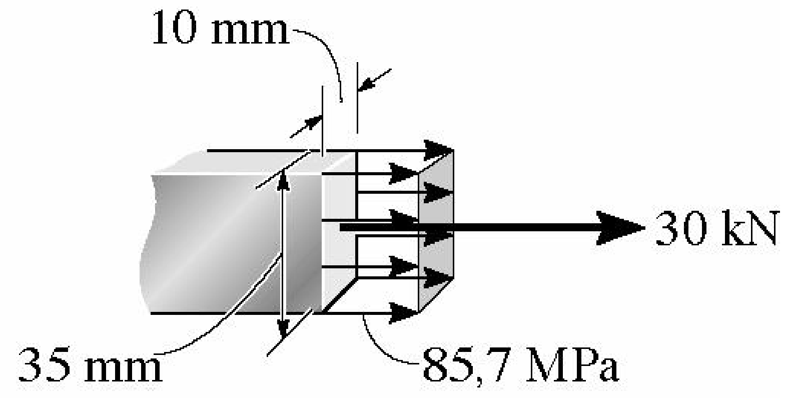
A barra da Figura tem largura constante de 35 mm e espessura de 10 mm. Determinar a tensão normal média máxima da barra quando submetida ao carregamento mostrado.



EXEMPLO 3

DIAGRAMA DE TENSÃO NORMAL:



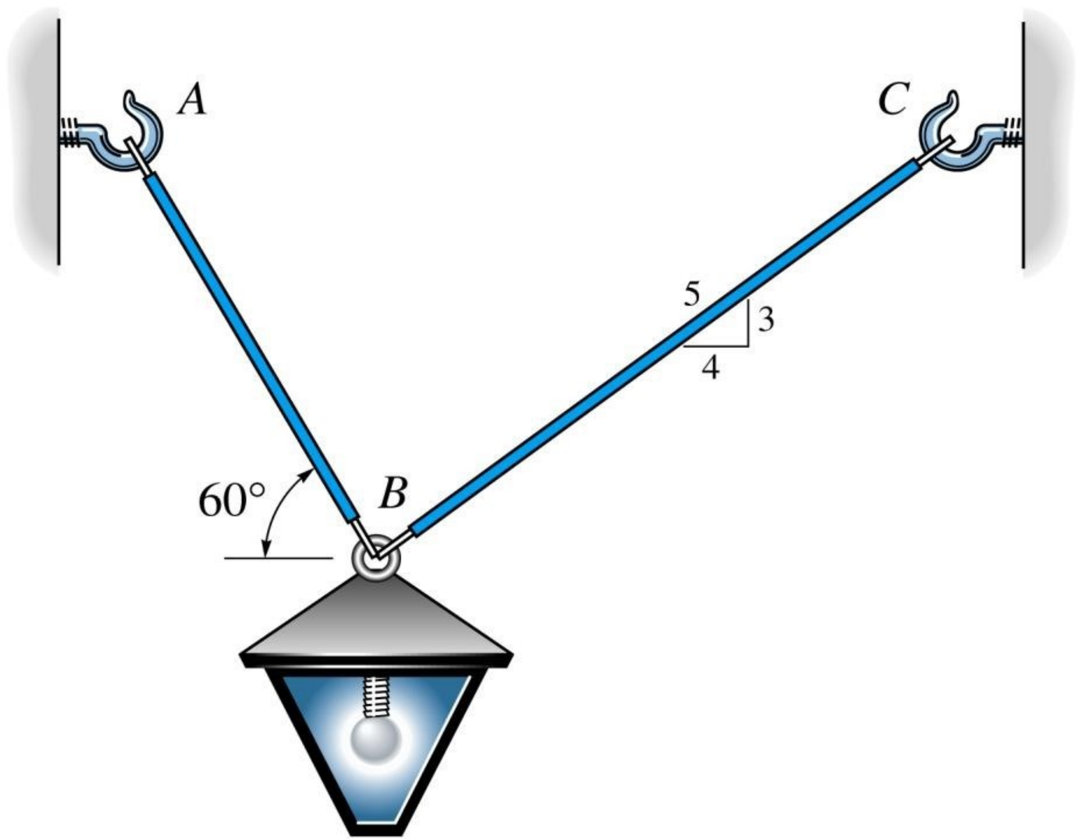


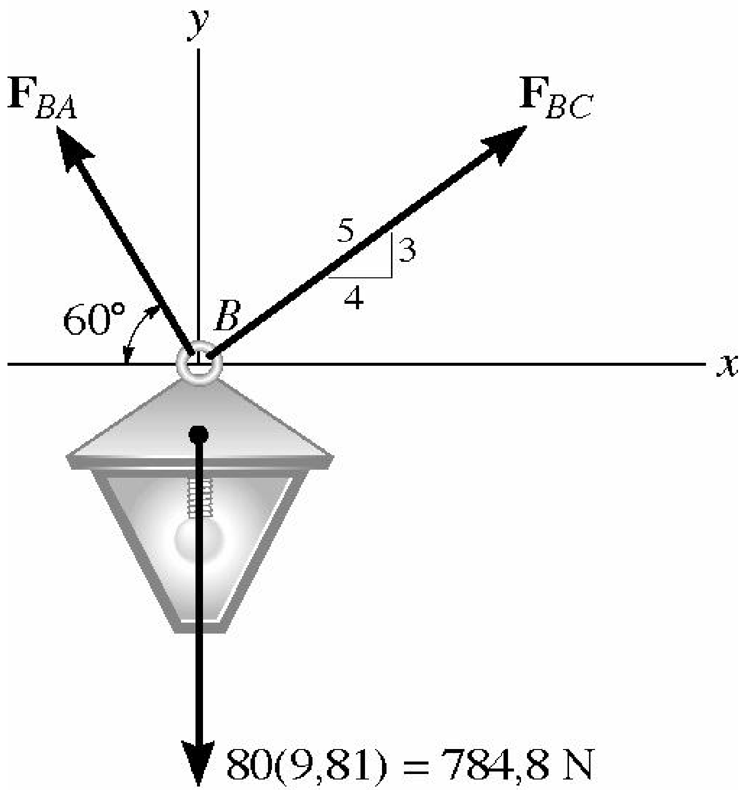
TENSÃO NORMAL MÉDIA:

$$\sigma_{BC} = \frac{P_{BC}}{A} = \frac{30(10^3)\ \text{N}}{(0{,}035\ \text{m}) \times 0{,}010\ \text{m})} = 85{,}7\ \text{MPa}$$

EXEMPLO 4

A luminária de 80 kg é suportada por duas hastes AB e BC como mostra a Figura. Se AB tem diâmetro de 10 mm, e BC tem diâmetro de 8 mm, determinar a tensão normal média em cada haste.





EXEMPLO 4

EQUAÇÕES DE EQUILIBRIO:

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0; \qquad F_{BC}(\tfrac{4}{5}) - F_{BA} \cos 60^\circ = 0$$

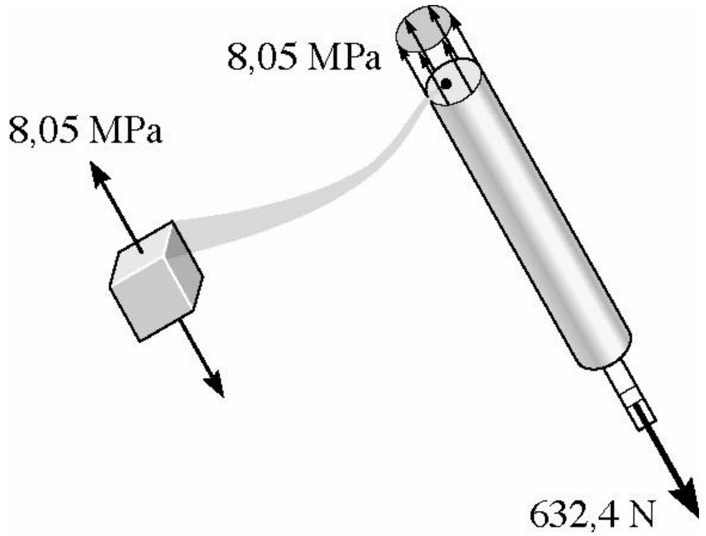
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad F_{BC}(\tfrac{3}{5}) + F_{BA} \operatorname{sen} 60^\circ - 784{,}8 \text{ N} = 0$$

$$F_{BC} = 395{,}2 \text{ N}, \qquad F_{BA} = 632{,}4 \text{ N}$$

TENSÃO NORMAL MÉDIA:

$$\sigma_{BC} = \frac{F_{BC}}{A_{BC}} = \frac{395{,}2 \text{ N}}{\pi(0{,}04 \text{ m})^2} = 7{,}86 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{BA} = \frac{F_{BA}}{A_{BA}} = \frac{632{,}4 \text{ N}}{\pi(0{,}005 \text{ m})^2} = 8{,}05 \text{ MPa}$$



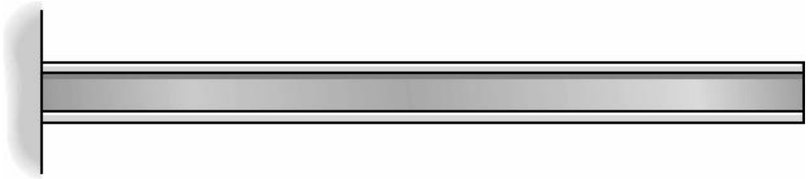
MOMENTO FLETOR EM VIGAS

Elementos estreitos que suportam cargas aplicadas perpendicularmente ao seu eixo longitudinal são chamados vigas.

Em geral, as vigas são barras compridas e retas com área de seção transversal constante. Elas são classificadas conforme seus apoio.

Vida simplesmente apoiada
Viga em balanço
Viga apoiada com extremidade em balanço

Viga simplesmente apoiada



Viga em balanço

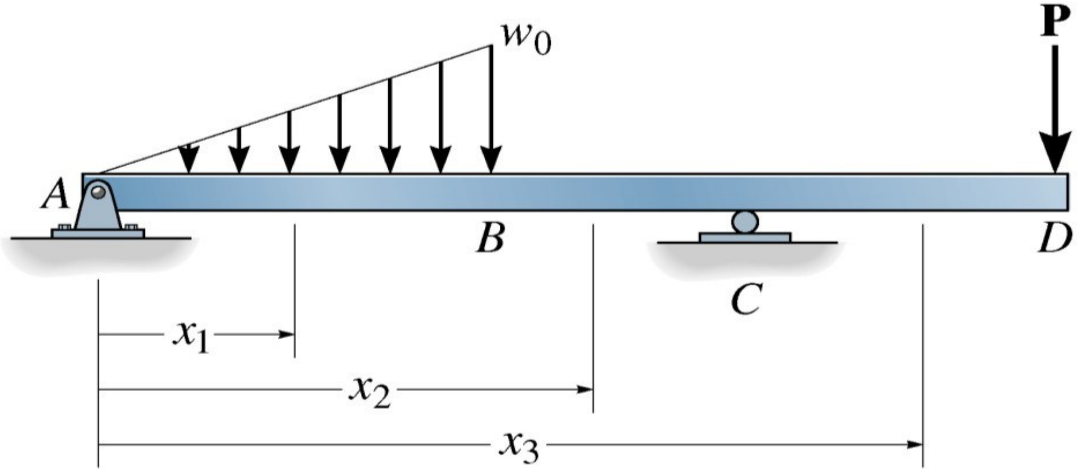
Viga apoiada com extremidade em balanço

DIAGRAMA M.F. - F.C.

UTFPR
CORNÉLIO PROCÓPIO

Devido as cargas aplicadas, as vigas desenvolvem força cortante (cisalhante) interna e momento fletor que, em geral, variam de ponto para ponto ao longo do eixo da viga..

A fim de projetar a viga adequadamente é necessário primeiro determinar o cisalhante e o momento fletor máximo na viga.



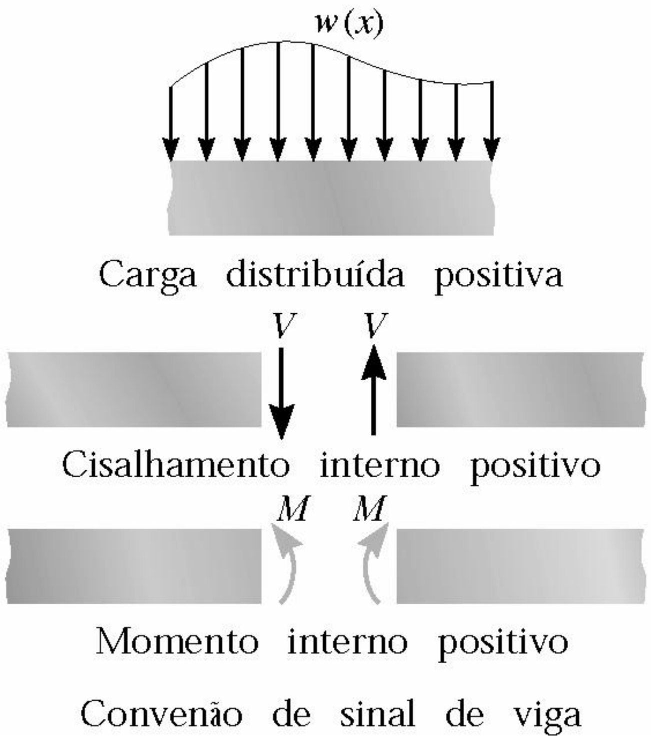
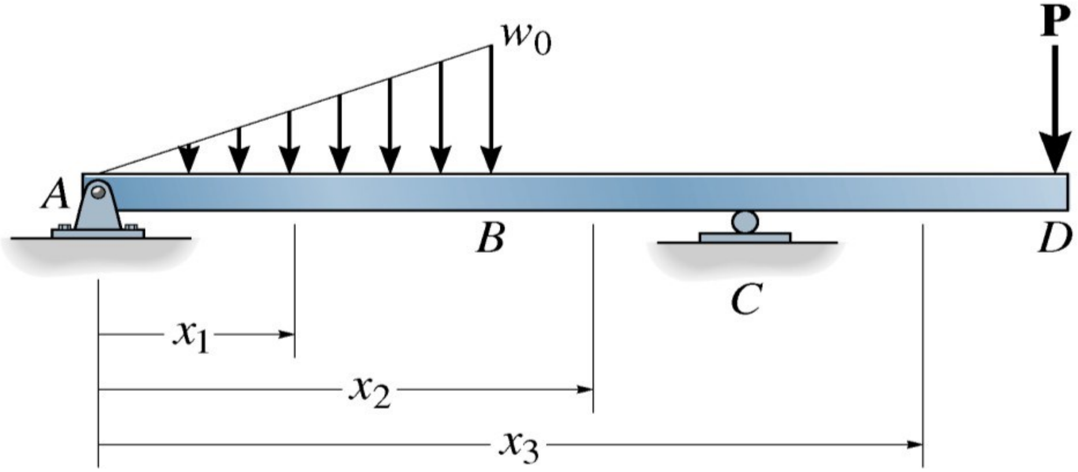


DIAGRAMA M.F. - F.C.

Uma maneira de se expressar V e M é por meio de funções arbitrarias, as quais são representadas por gráficos, denominados diagrama de força cortante e momento fletor.

Os valores máximos de V e M são então obtidos a partir desse gráficos , que fornecem também informações detalhadas sobre a variação do cisalhamento e do momento fletor ao longo do eixo da viga.



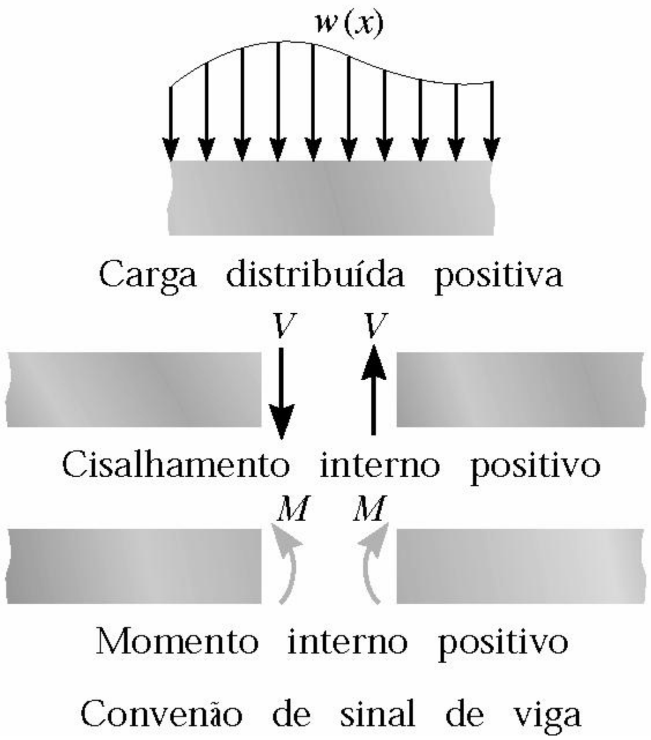
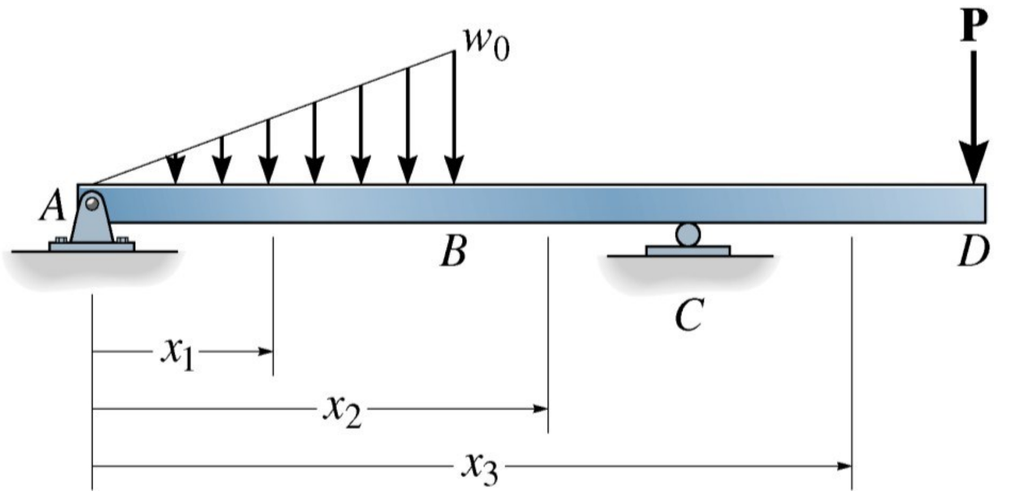


DIAGRAMA M.F. - F.C.

Em geral, as funções de cisalhamento interno e momento fletor obtidas em função de x (deslocamento) são descontinuas nos pontos em que a carga distribuída muda ou estão aplicadas forças concentradas ou conjugados.
Tais funções devem ser determinadas para cada região da viga localizada entre quaisquer duas descontinuidades da carga.

A figura ao lado mostras que as coordenadas x1, x2 e x3 tem de ser usadas para descrever a variação de V e M em todo o comprimento da viga.

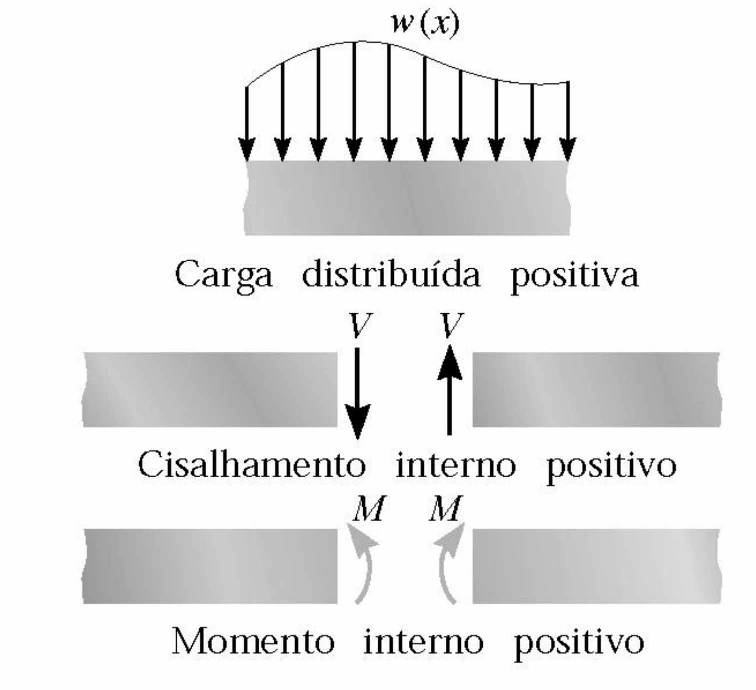


CONVENÇÃO DE SINAL

Antes de apresentar um método para determinar o cisalhamento e o momento fletor como funções de x e depois relacionar as funções (diagrama de força cortante e momento fletor), é necessário estabelecer uma convenção de sinal.

Apesar da convenção de sinal ser arbitrária usamos:

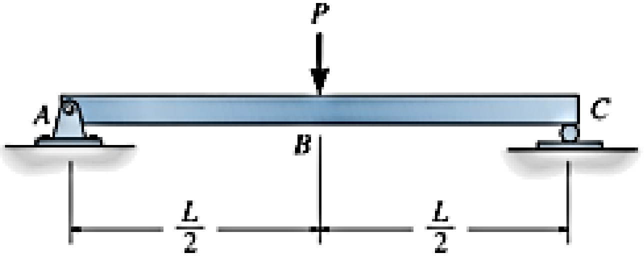
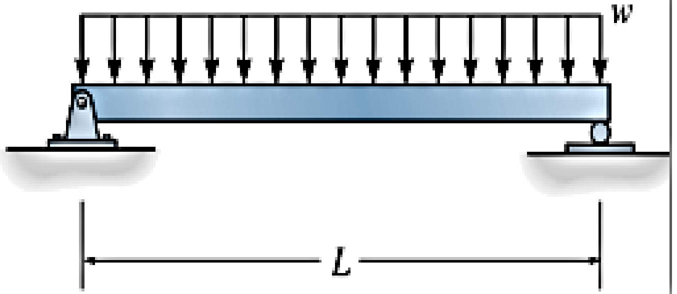
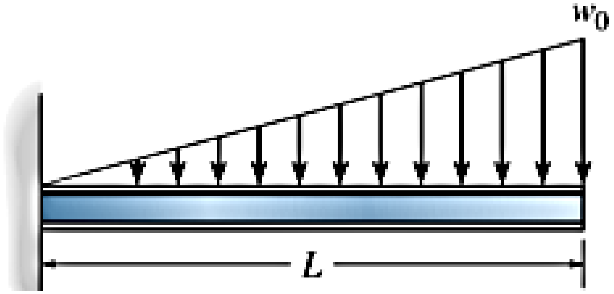
Direções positivas: as cargas distribuídas ao longo da viga atuam no sentido de cima para baixo, gerando uma força cortante interna atuante para baixo gerando rotação no sentido horário e momento interno no sentido anti-horário fazendo a viga sorrir ou de modo a reter água.



Convenão de sinal de viga

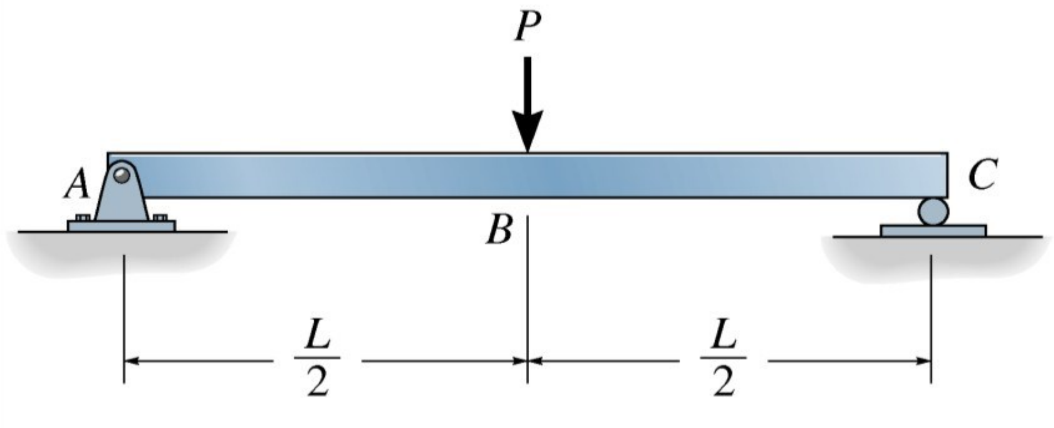
TABELA DE FUNÇÕES

UTFPR
CORNÉLIO PROCÓPIO

TIPO DE CARGA	FORÇA CORTANTE (V)	MOMENTO FLETOR (M)
	$V = \frac{P}{2}$ $V = -\frac{P}{2}$	$M = \frac{P}{2}(L - x)$
	$V = w\left(\frac{L}{2} - x\right)$	$M_{máx} = \frac{wL^2}{8}$
	$V = \frac{w_0}{2L}(L^2 - x^2)$	$M = \frac{w_0}{6L}(-2L^3 + 3L^2x - x^3)$

EXEMPLO 5

Desenhar os diagramas de força cortante e momento fletor da viga abaixo.

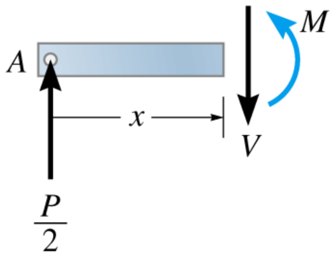


(a)

Utilizem:
P = 2kN
L = 5m

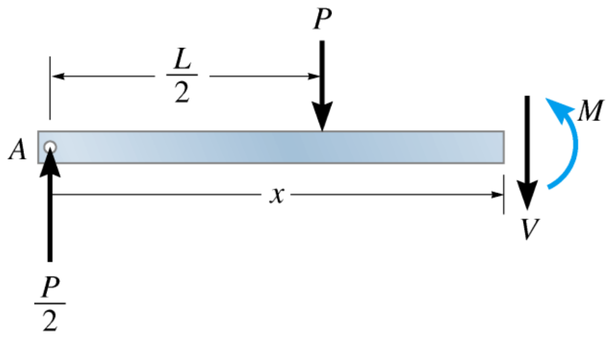
Verifiquem os cálculos com o Autodesk ForceEffect

Corte1:



(b)

Corte2:



(c)

EXEMPLO 5

Equações de equilíbrio no Corte 1:

$+\uparrow \Sigma F_y = 0;\qquad V = \frac{P}{2}$

$\circlearrowleft + \Sigma M = 0;\qquad M = \frac{P}{2}x$

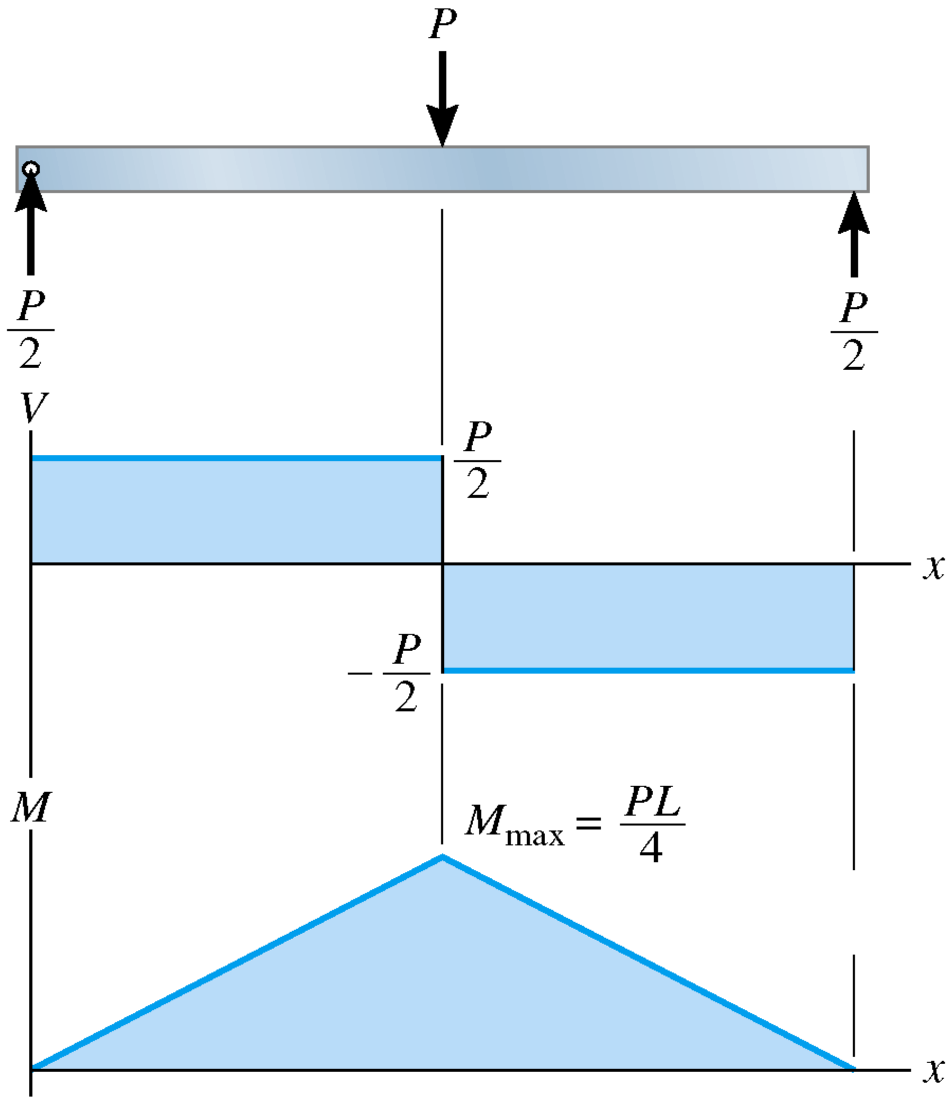
Equações de equilíbrio no Corte 2:

$+\uparrow \Sigma F_y = 0;\qquad \frac{P}{2} - P - V = 0$

$$V = -\frac{P}{2}$$

$\circlearrowleft + \Sigma M = 0;\qquad M + P\left(x - \frac{L}{2}\right) - \frac{P}{2}x = 0$

$$M = \frac{P}{2}(L - x)$$



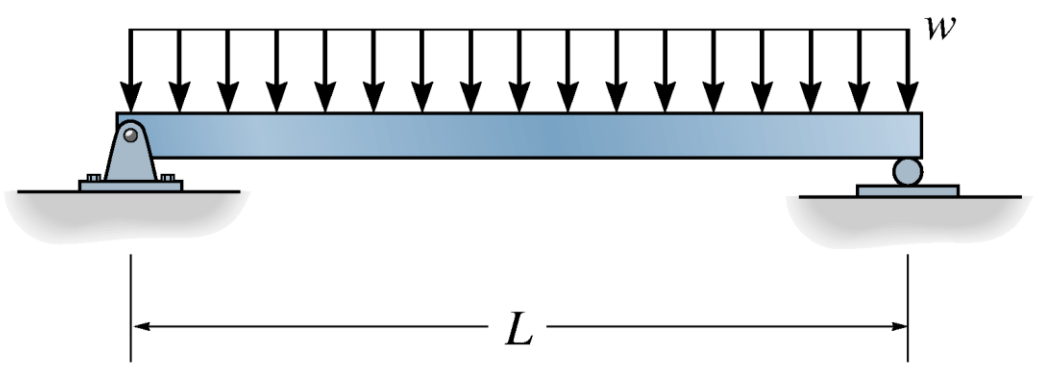
EXEMPLO 6

Desenhar os diagramas de força cortante e momento fletor da viga abaixo.

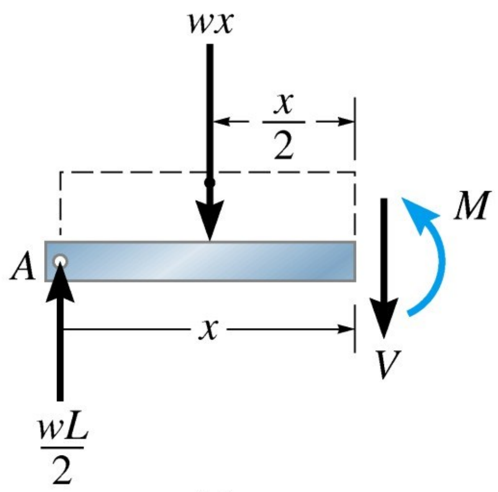
Utilizem:
w = 200N/m
L = 10m

Verifiquem os cálculos com o Autodesk ForceEffect

Corte:



(a)



(b)

EXEMPLO 6

Equações de equilíbrio no Corte:

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad \frac{wL}{2} - wx - V = 0$$

$$V = w\left(\frac{L}{2} - x\right)$$

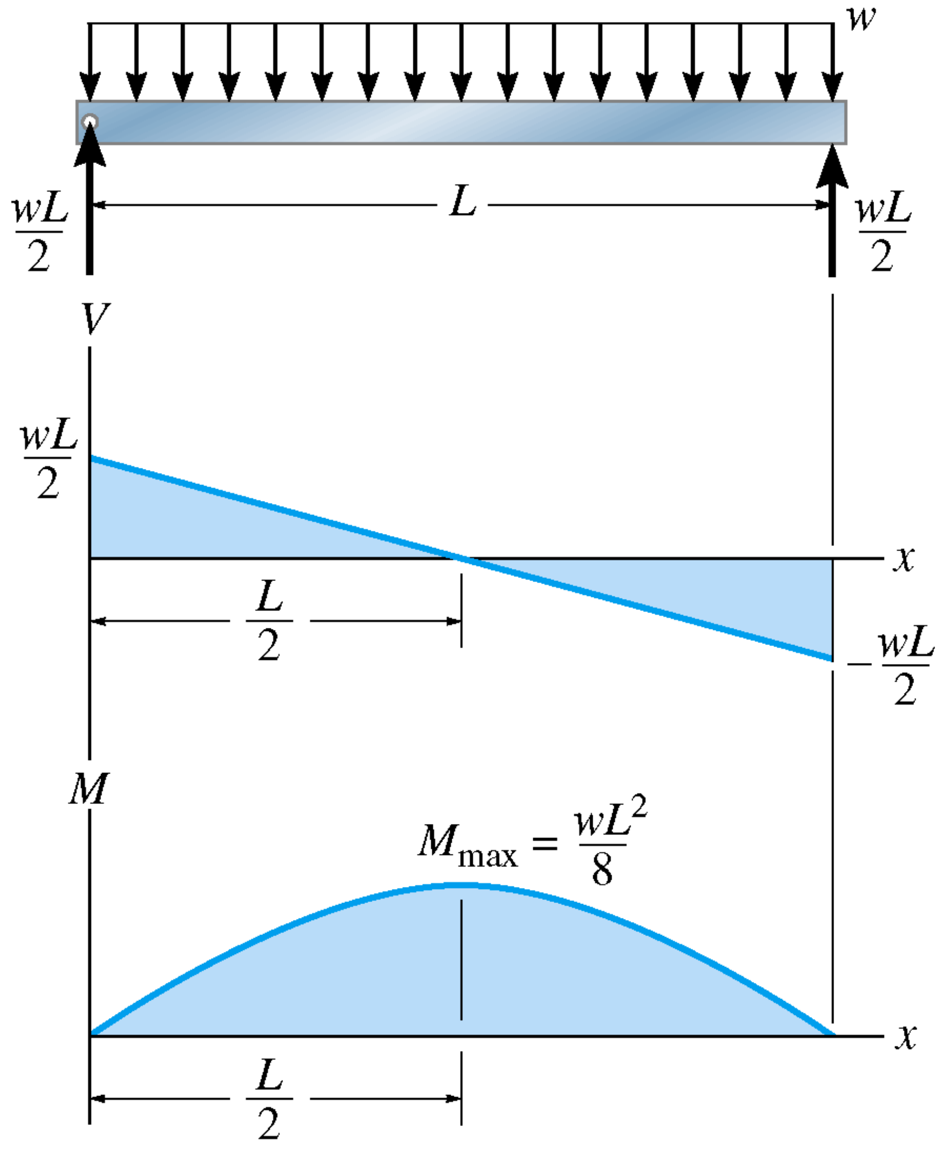
$$\circlearrowleft + \Sigma M = 0; \qquad -\left(\frac{wL}{2}\right)x + (wx)\left(\frac{x}{2}\right) + M = 0$$

$$M = \frac{w}{2}(Lx - x^2)$$

Montando o diagrama:

$$V = w\left(\frac{L}{2} - x\right) = 0 \qquad M_{máx} = \frac{w}{2}\left[L\left(\frac{L}{2}\right) - \left(\frac{L}{2}\right)^2\right]$$

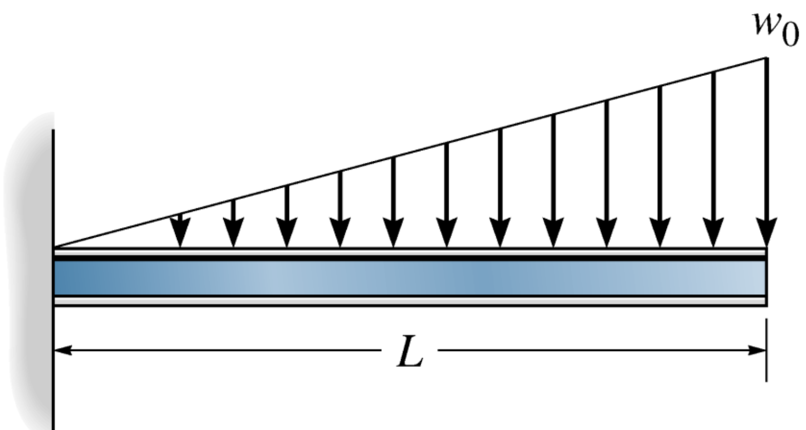
$$x = \frac{L}{2} \qquad = \frac{wL^2}{8}$$



(c)

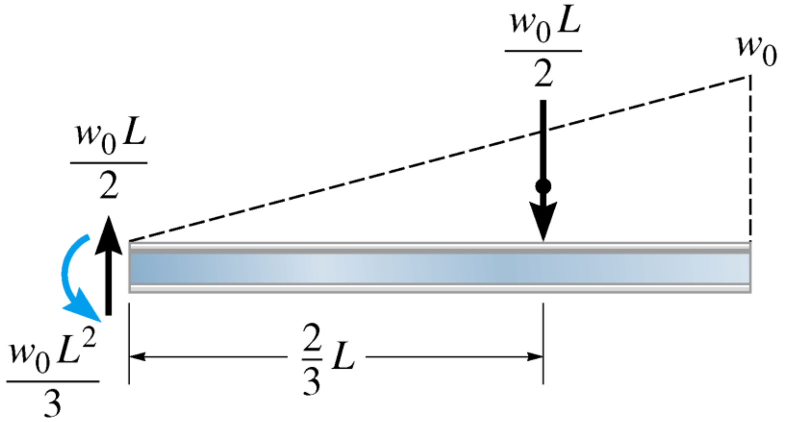
EXEMPLO 7

Desenhar os diagramas de força cortante e momento fletor da viga abaixo.



(a)

Corte:



(b)

Utilizem:
w = 200N/m
L = 10m

Verifiquem os cálculos com o Autodesk ForceEffect

EXEMPLO 7

Equações de Equilíbrio no Corte:

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad \frac{w_0 L}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{w_0 x}{L}\right)x - V = 0$$

$$V = \frac{w_0}{2L}(L^2 - x^2)$$

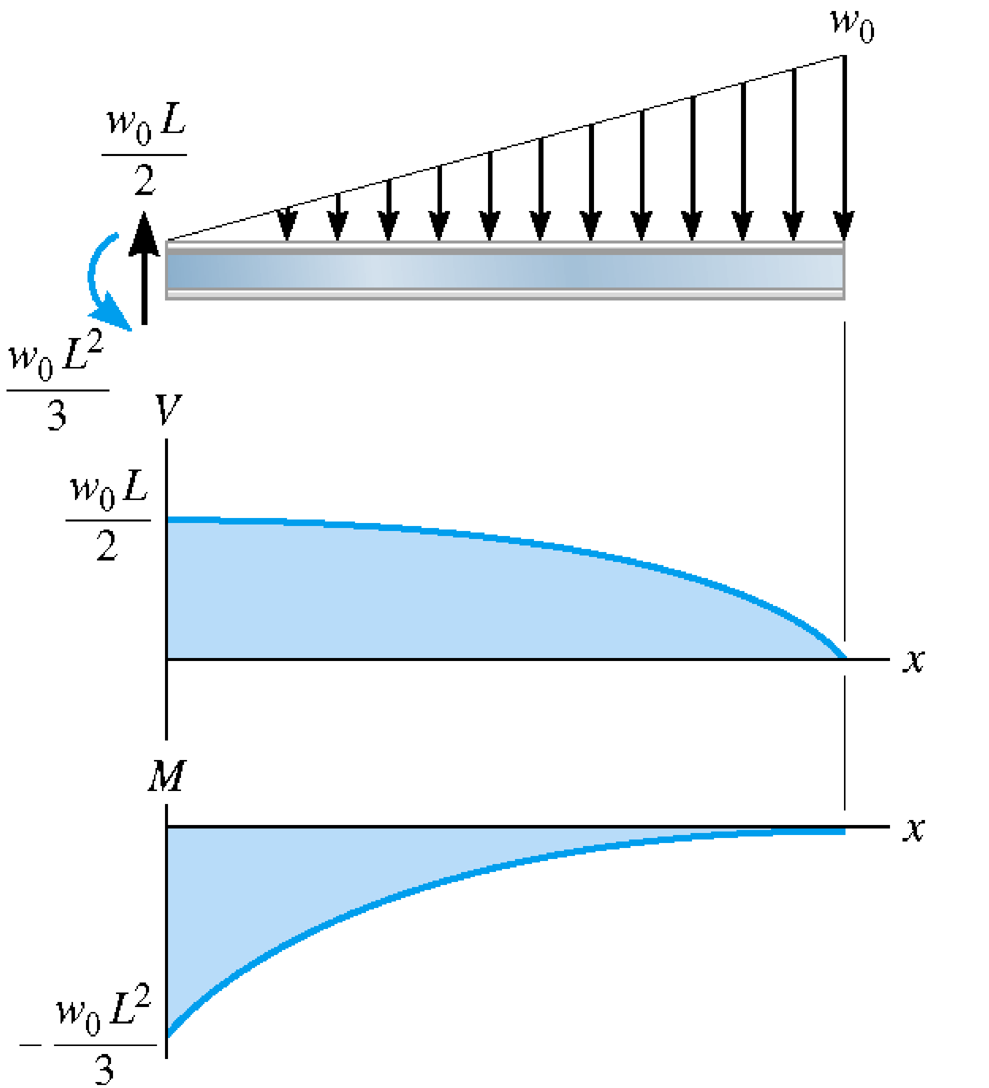
$$\circlearrowleft + \Sigma M = 0; \qquad \frac{w_0 L^2}{3} - \frac{w_0 L}{2}(x) + \frac{1}{2}\left(\frac{w_0 x}{L}\right) x \left(\frac{1}{3}x\right) + M = 0$$

$$M = \frac{w_0}{6L}(-2L^3 + 3L^2 x - x^3)$$

Verificando os resultados:

$$w = -\frac{dV}{dx} = -\frac{w_0}{2L}(0 - 2x) = \frac{w_0 x}{L}$$

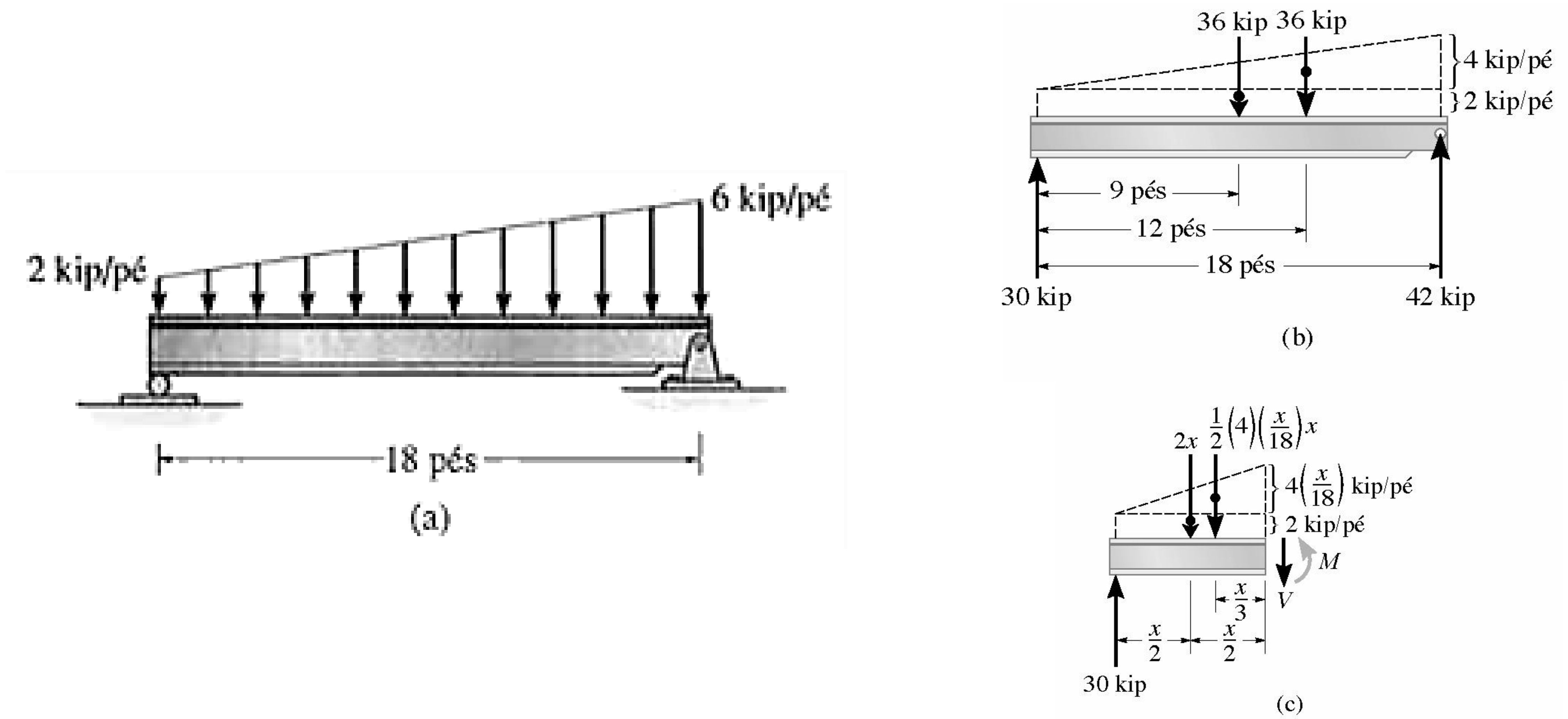
$$V = \frac{dM}{dx} = \frac{w_0}{6L}(-0 + 3L^2 - 3x^2) = \frac{w_0}{2L}(L^2 - x^2)$$



(d)

EXEMPLO 8

Desenhar os diagramas de força cortante e momento fletor da viga abaixo.



EXEMPLO 8

Equações de equilíbrio:

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad 30 \text{ kip} - (2 \text{ kip/pé})x - \frac{1}{2}(4 \text{ kip/pé})\left(\frac{x}{18 \text{ pés}}\right)x - V = 0$$

$$V = \left(30 - 2x - \frac{x^2}{9}\right) \text{kip}$$

$$\circlearrowright + \Sigma M = 0;$$

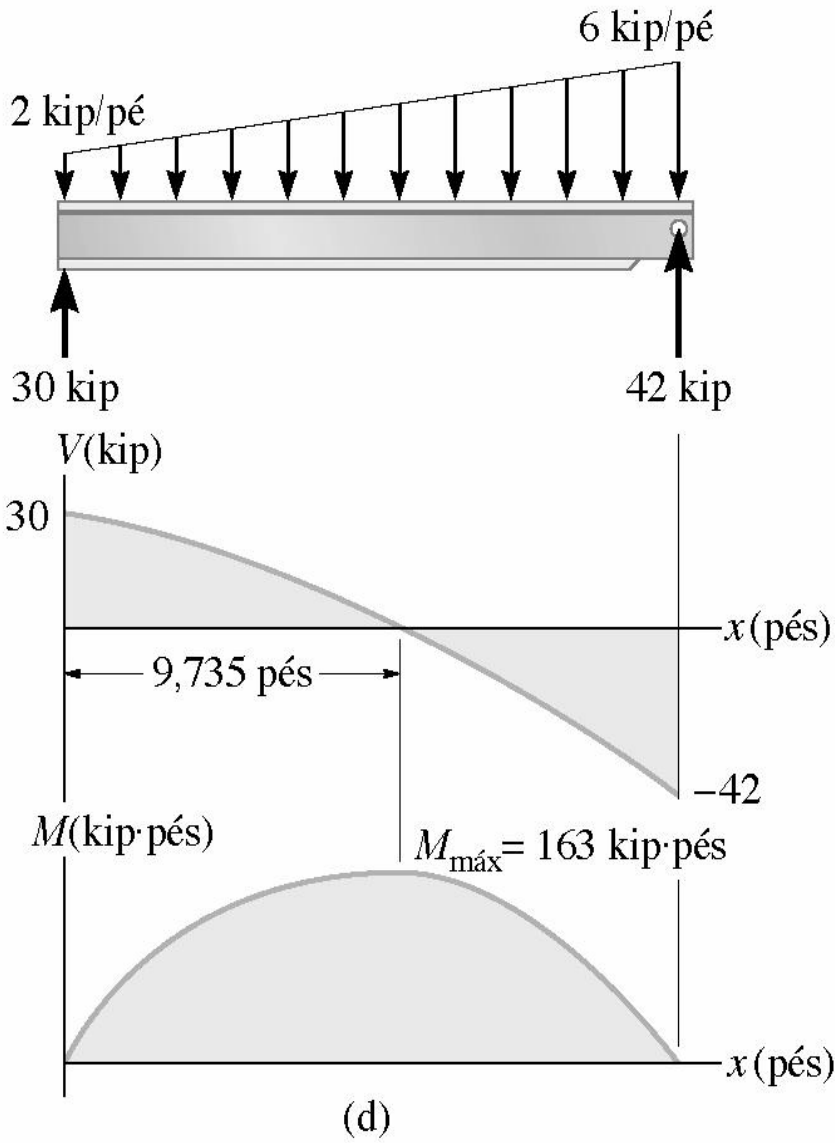
$$-30 \text{ kip}(x) + (2 \text{ kip/pé})\, x\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2}(4 \text{ kip/pé})\left(\frac{x}{18 \text{ pés}}\right) x \left(\frac{x}{3}\right) + M = 0$$

$$M = \left(30x - x^2 - \frac{x^3}{27}\right) \text{kip} \cdot \text{pés}$$

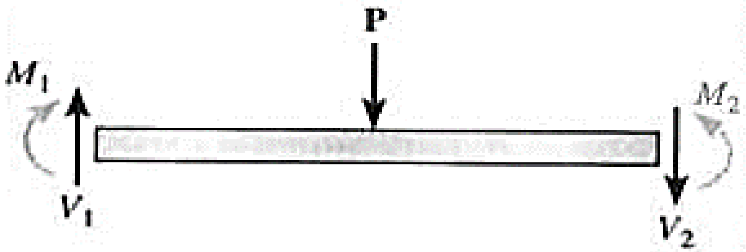
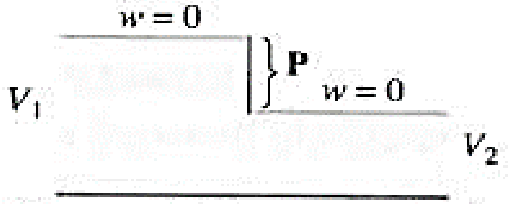
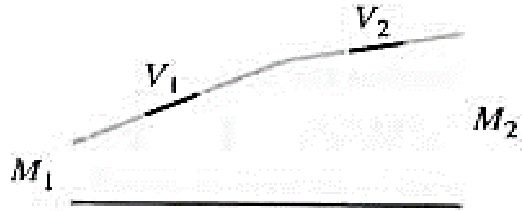
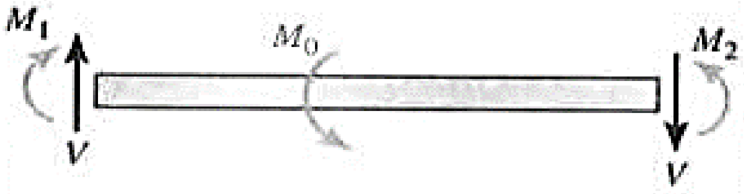
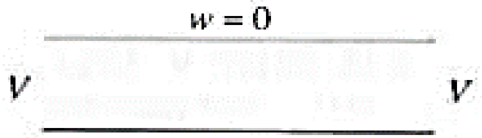
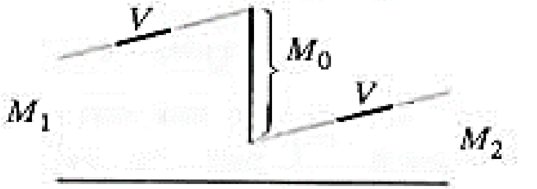
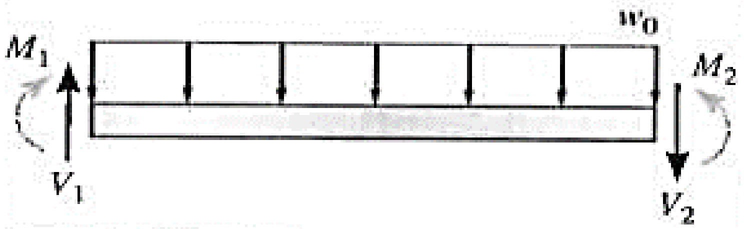
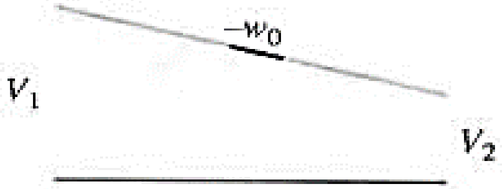
Força cortante e o Momento máximo

$$V = 0 = 30 - 2x - \frac{x^2}{9} \quad \Longrightarrow \quad x = 9{,}735 \text{ pés}$$

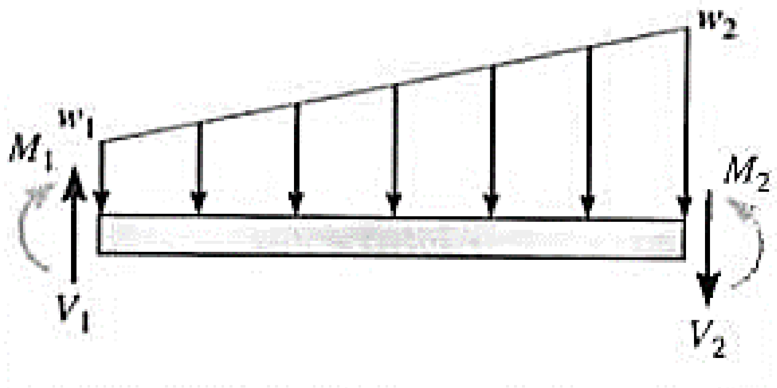
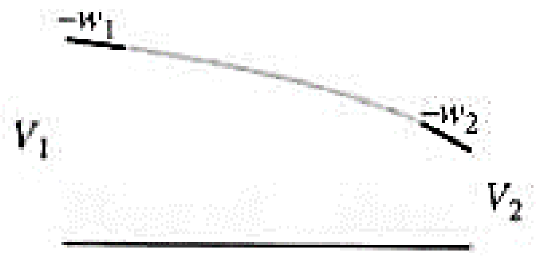
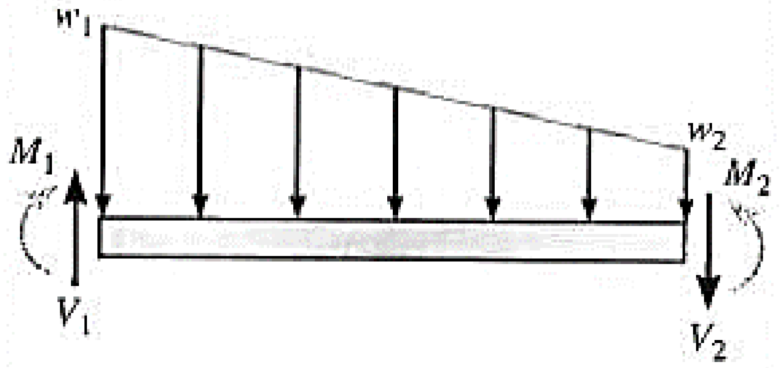
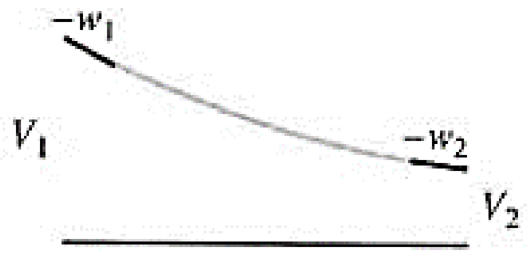
$$M_{máx} = 30(9{,}735) - (9{,}735)^2 - \frac{(9{,}735)^3}{27} \quad \Longrightarrow \quad = 163 \text{ kip} \cdot \text{pés}$$



ANÁLISE COM MÉTODO GRÁFICO

Carga	Diagrama de Força Cortante $\frac{dV}{dx} = -w$	Diagrama de Momento $\frac{dM}{dx} = V$
	 A força **P** de cima para baixo faz V 'saltar' para baixo de V_1 para V_2.	 O declive constante muda de V_1 para V_2.
	 Não há mudança na força cortante visto que o declive $w = 0$.	 Declive positivo constante. $\mathbf{M_0}$ no sentido anti-horário faz M 'saltar' para baixo.
	 Declive negativo constante.	 Declive positivo que diminui de V_1 para V_2.

ANÁLISE COM MÉTODO GRÁFICO

Carga	Diagrama de Força Cortante $\frac{dV}{dx} = -w$	Diagrama de Momento $\frac{dM}{dx} = V$
	 Declive negativo que aumenta de $-w_1$ para $-w_2$.	 Declive positivo que diminui de V_1 para V_2.
	 Declive negativo que diminui de $-w_1$ para $-w_2$.	 Declive positivo que diminui de V_1 para V_2.

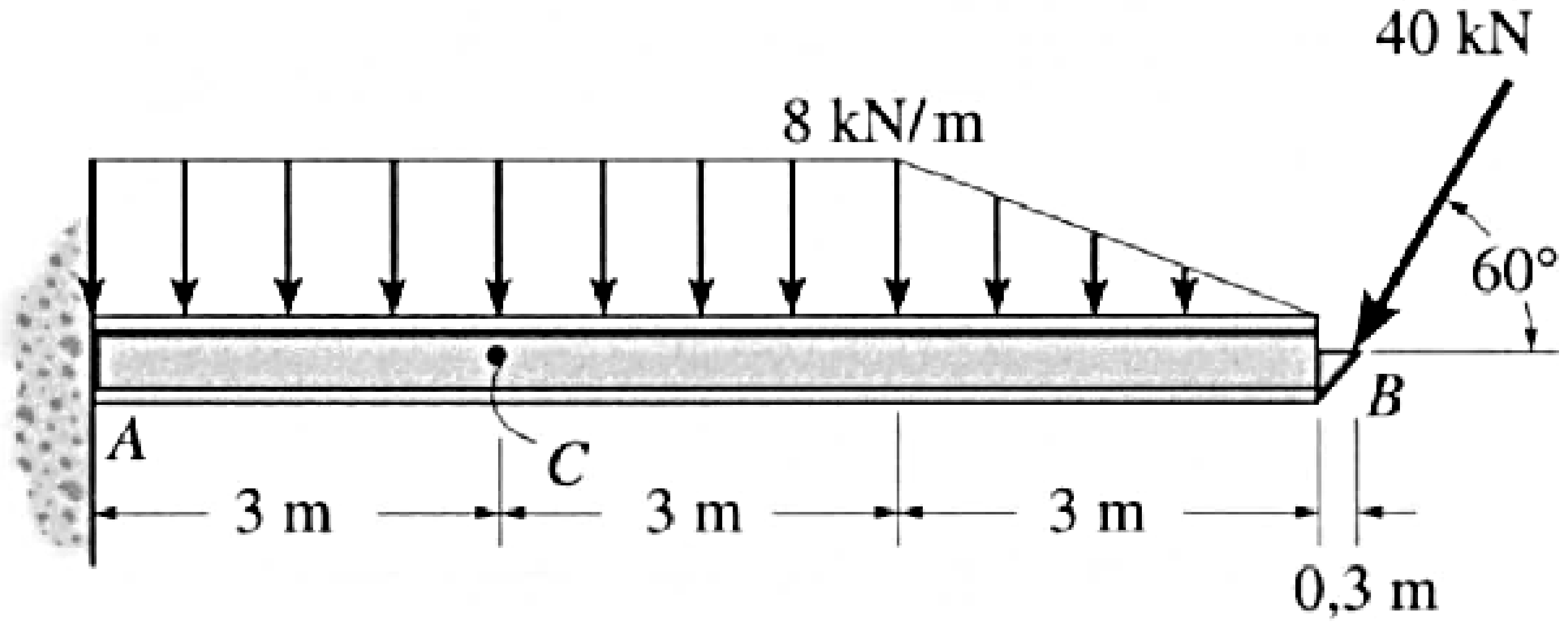
EXERCÍCIOS E ATIVIDADES

Orientação para realização das Atividades:

- Realizar as atividade a mão livre;
- Realizar diagramas e desenhos para compreensão;
- Realizar todas as contas de forma detalhada;
- Colocar as repostas principais a caneta;
- Entregar as atividades e resolução dos exercícios em forma digital no sala virtual da disciplina.

EXERCÍCIO 1

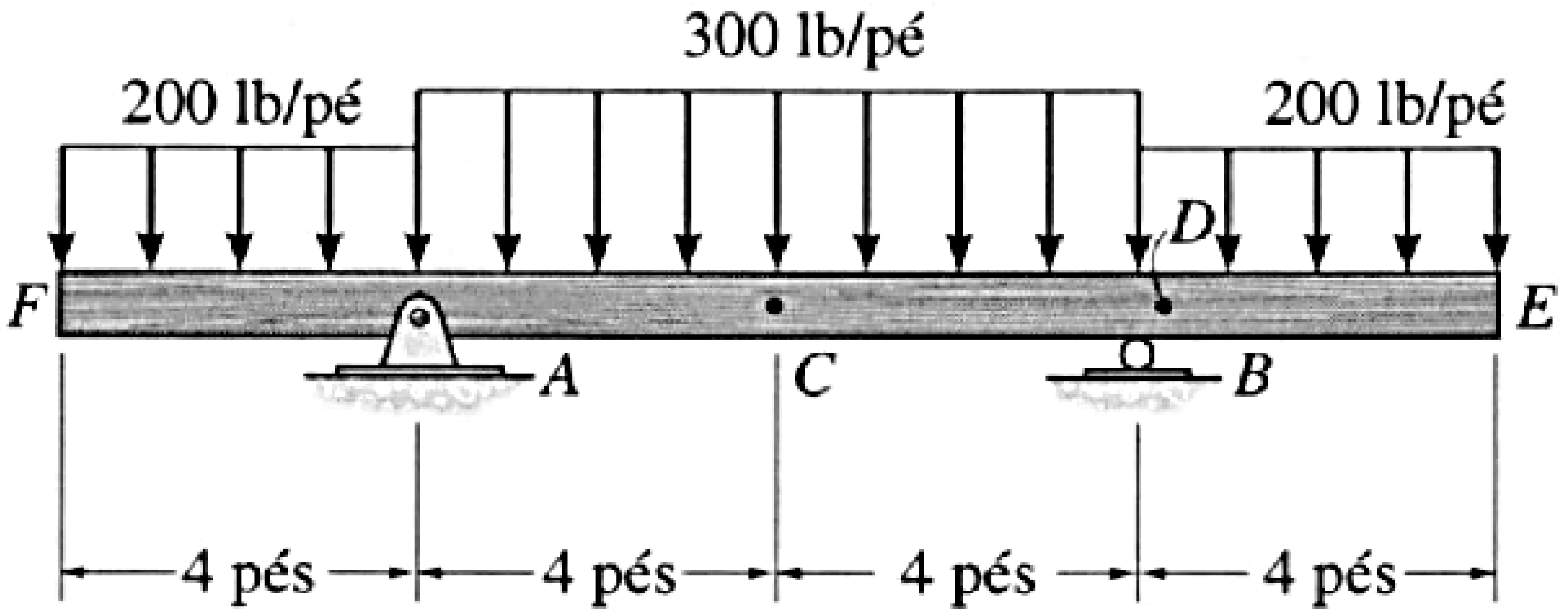
Determine as forças internas normal e de cisalhamento e o momento fletor no ponto C. Construa os diagramas



Respostas:
N_C = 10 kN; V_C = 70,6 kN; M_C = -302 kN*m;

EXERCÍCIO 2

Determine as forças internas normal e de cisalhamento e o momento interno atuante no ponto C e no ponto D, o qual está localizado imediatamente a direita do suporte tipo rolete em B.



Respostas:

$N_D = 0$;

$V_D = 800$ lb;

$M_D = -1{,}6$ kip*pés;

$N_C = 0$;

$V_C = 0$;

$M_C = 800$ lb*pés;