



AULA 8

CENTRÓIDE E BARICENTRO

Professor: Dr. Paulo Sergio Olivio Filho

CENTROIDE E BARICENTRO

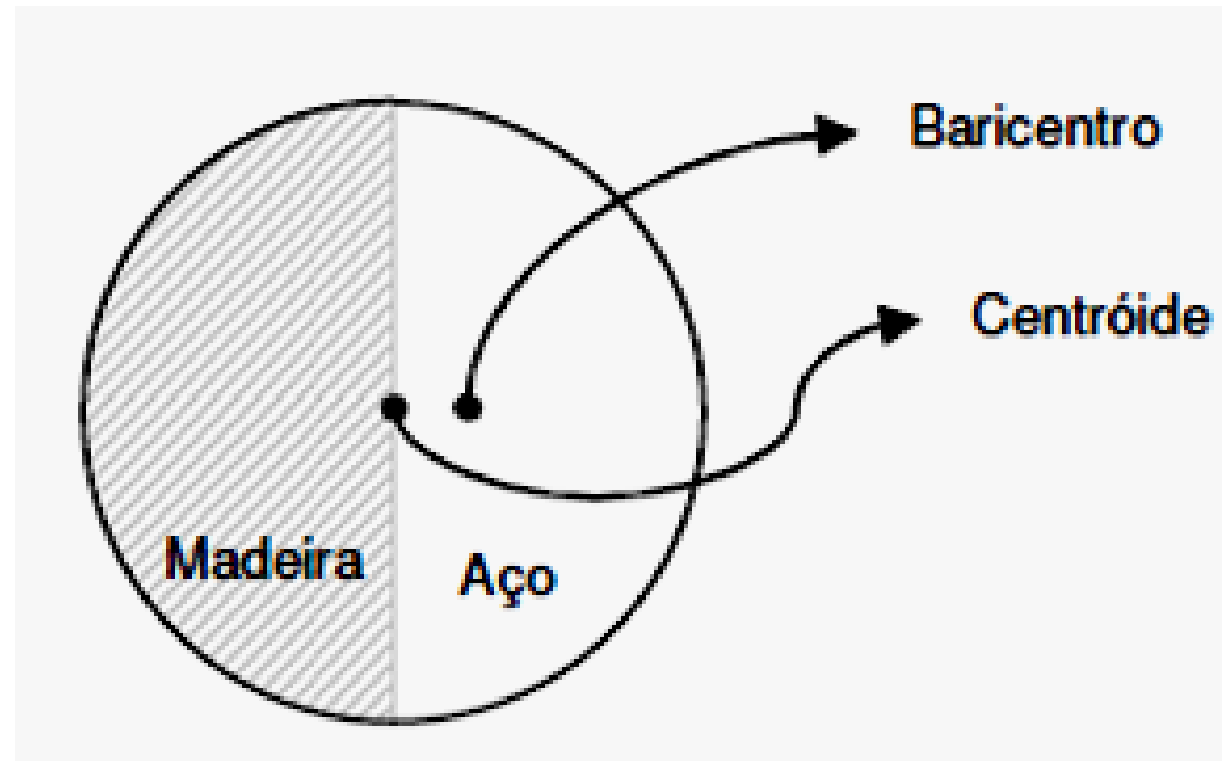
Baricentro: Centro de Gravidade

Centróide: Centro Geométrico

$$P = m \times g = p \times V \times g = p \times t \times A \times g$$

p = peso específico

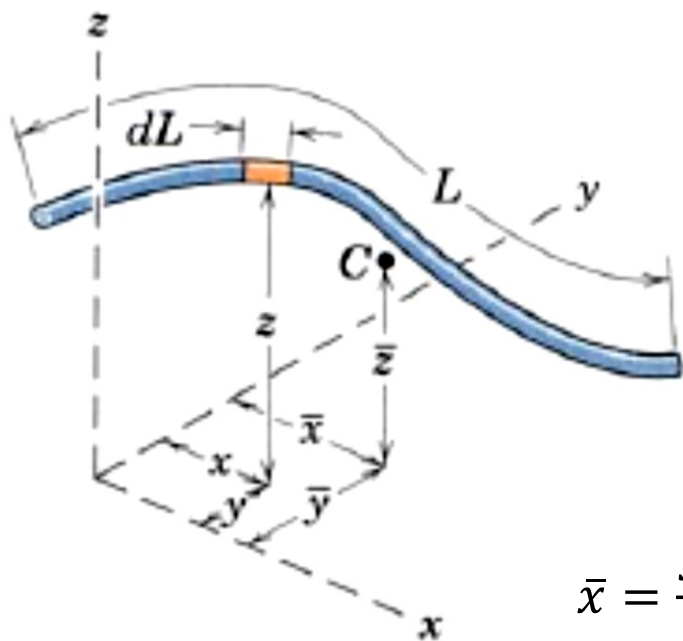
t = espessura



CENTROIDE

CENTROIDE DE VOLUME

$$\bar{x} = \frac{\int x \cdot dV}{V} \quad \bar{y} = \frac{\int y \cdot dV}{V} \quad \bar{z} = \frac{\int z \cdot dV}{V}$$

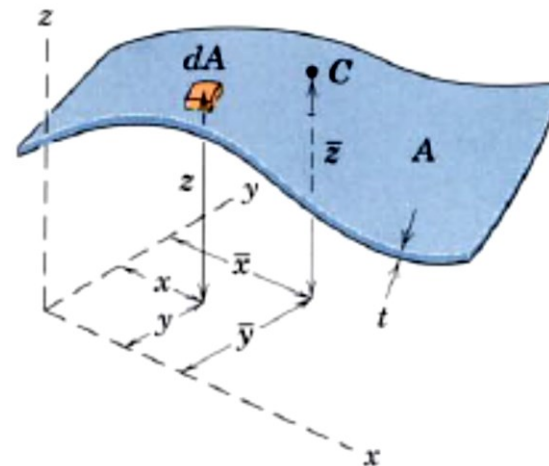


CENTROIDE DE LINHA

$$\bar{x} = \frac{\int x \cdot dL}{L} \quad \bar{y} = \frac{\int y \cdot dL}{L} \quad \bar{z} = \frac{\int z \cdot dL}{L}$$

CENTROIDE DE ÁREA

$$\bar{x} = \frac{\int x \cdot dA}{A} \quad \bar{y} = \frac{\int y \cdot dA}{A} \quad \bar{z} = \frac{\int z \cdot dA}{A}$$



CENTROIDE

Placas

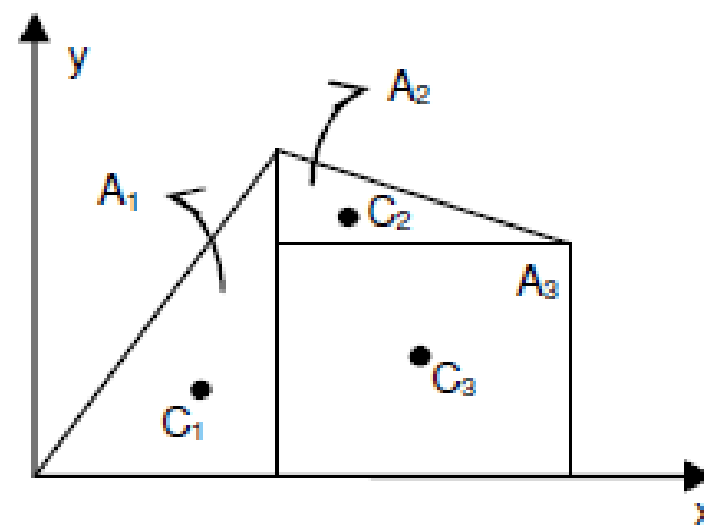
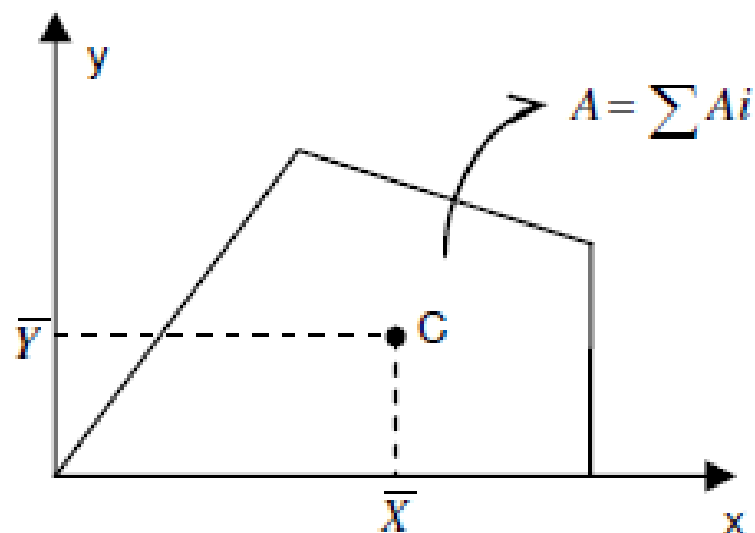
$$\bar{X} \sum A_i = \sum \bar{X}_i \cdot A_i$$

$$\bar{Y} \sum A_i = \sum \bar{Y}_i \cdot A_i$$

Arames

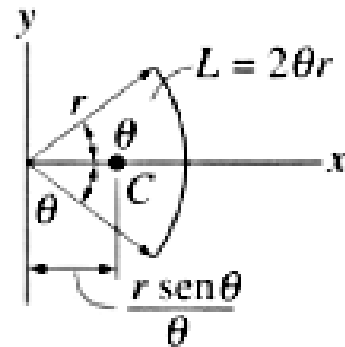
$$\bar{X} L_i = \sum \bar{X}_i \cdot L_i$$

$$\bar{Y} L_i = \sum \bar{Y}_i \cdot L_i$$

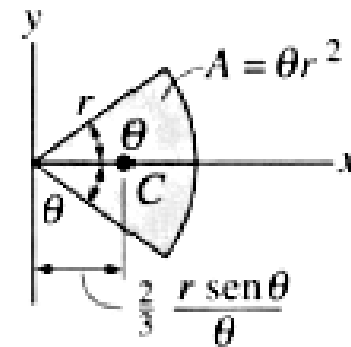


Alguns centróides são tabelados devidos as suas formas comuns como veremos nas tabelas a seguir.

CENTRO E BARICENTRO



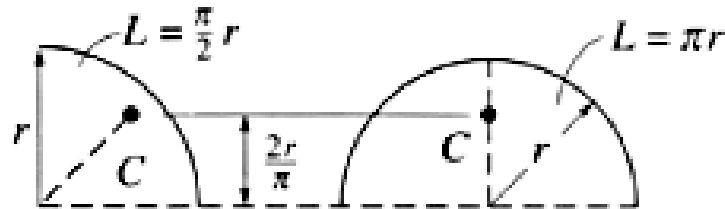
Segmento de arco de circunferência



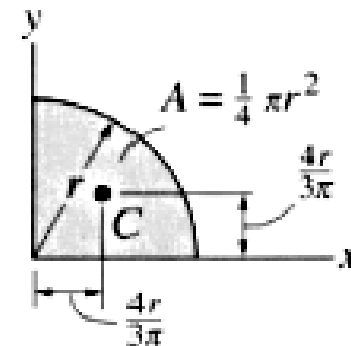
Área de setor circular

$$I_x = \frac{1}{4} r^4 (\theta - \frac{1}{2} \text{sen } 2\theta)$$

$$I_x = \frac{1}{4} r^4 (\theta + \frac{1}{2} \text{sen } 2\theta)$$



Arcos de quarto de circunferência e semicircunferência

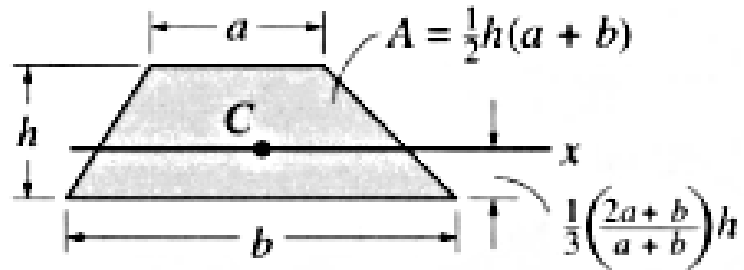


Área de quarto de círculo

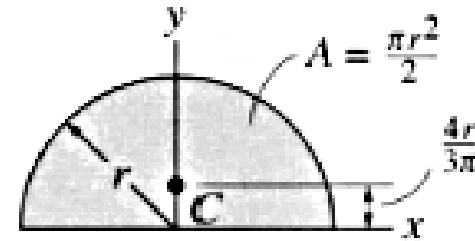
$$I_x = \frac{1}{16} \pi r^4$$

$$I_y = \frac{1}{16} \pi r^4$$

CENTRO E BARICENTRO



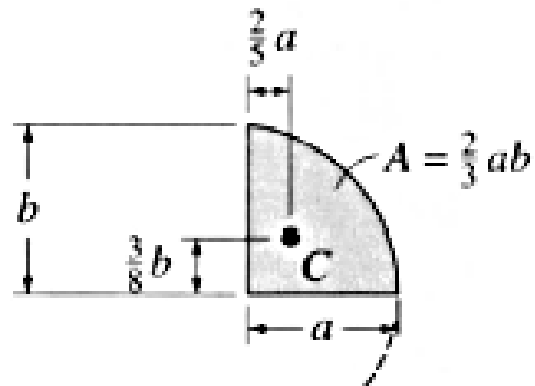
Área do trapézio



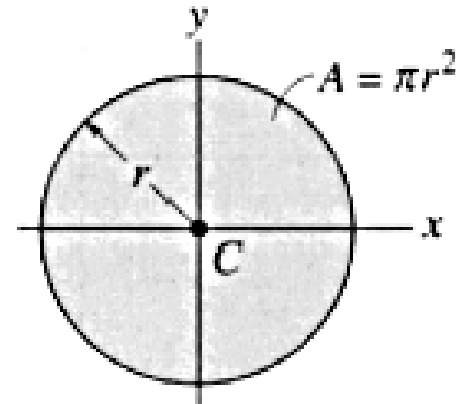
Área de semicírculo

$$I_x = \frac{1}{8}\pi r^4$$

$$I_y = \frac{1}{8}\pi r^4$$



Área semiparabólica

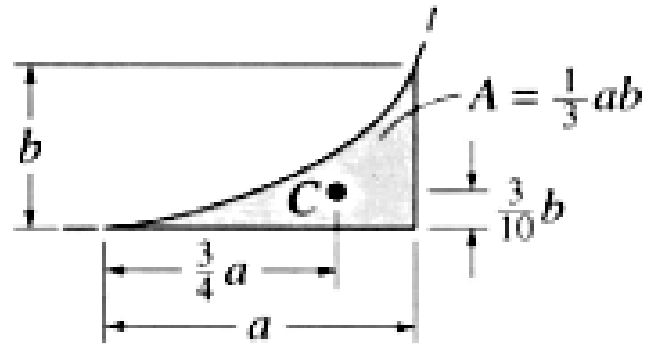


Área do círculo

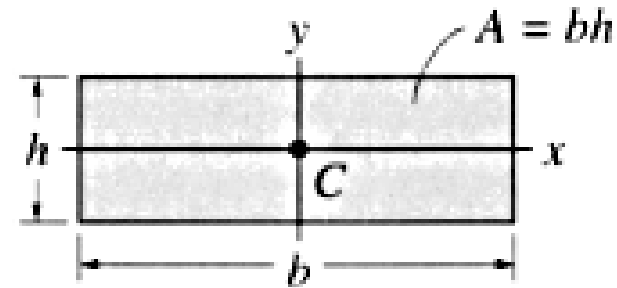
$$I_x = \frac{1}{4}\pi r^4$$

$$I_y = \frac{1}{4}\pi r^4$$

CENTRO E BARICENTRO



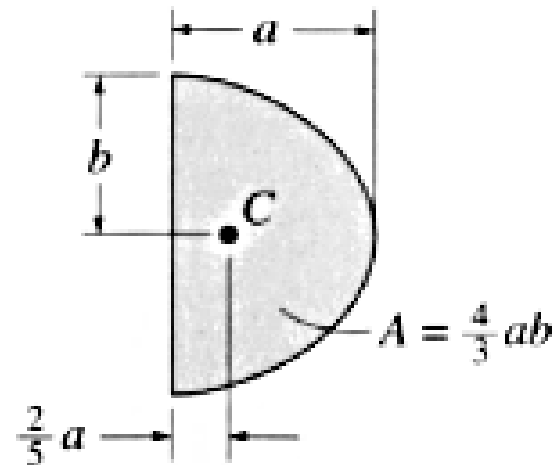
Área sob curva parabólica



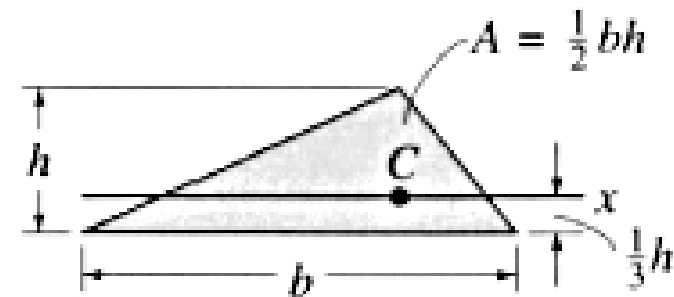
$$I_x = \frac{1}{12}bh^3$$

$$I_y = \frac{1}{12}hb^3$$

Área do retângulo



Área parabólica

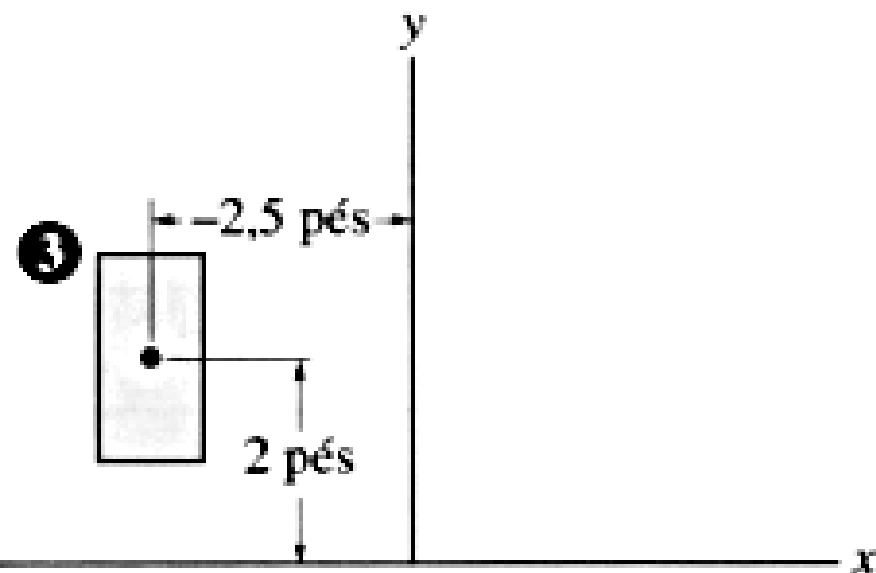
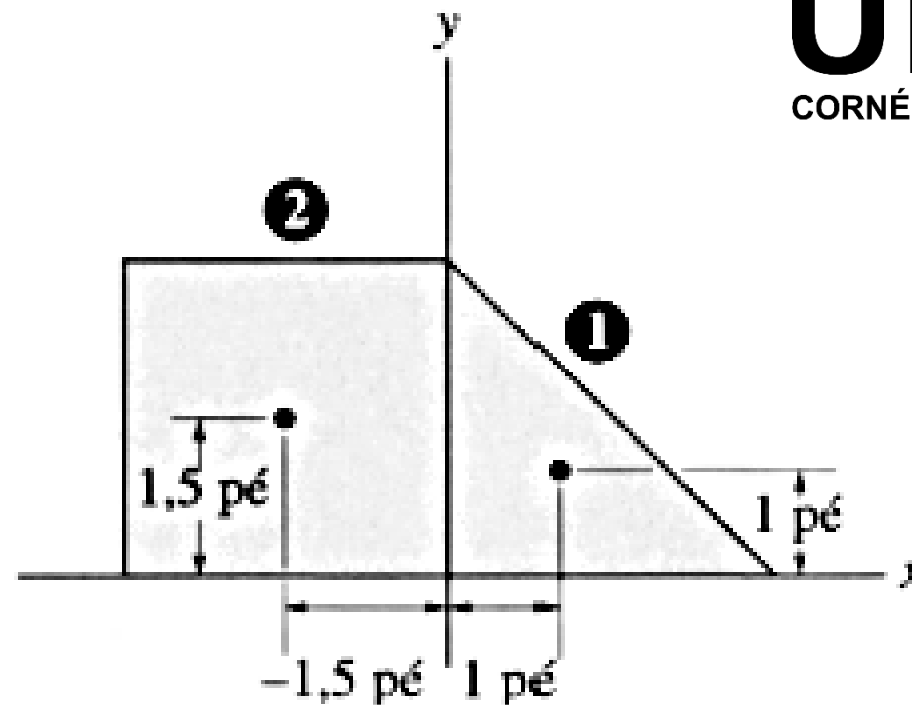
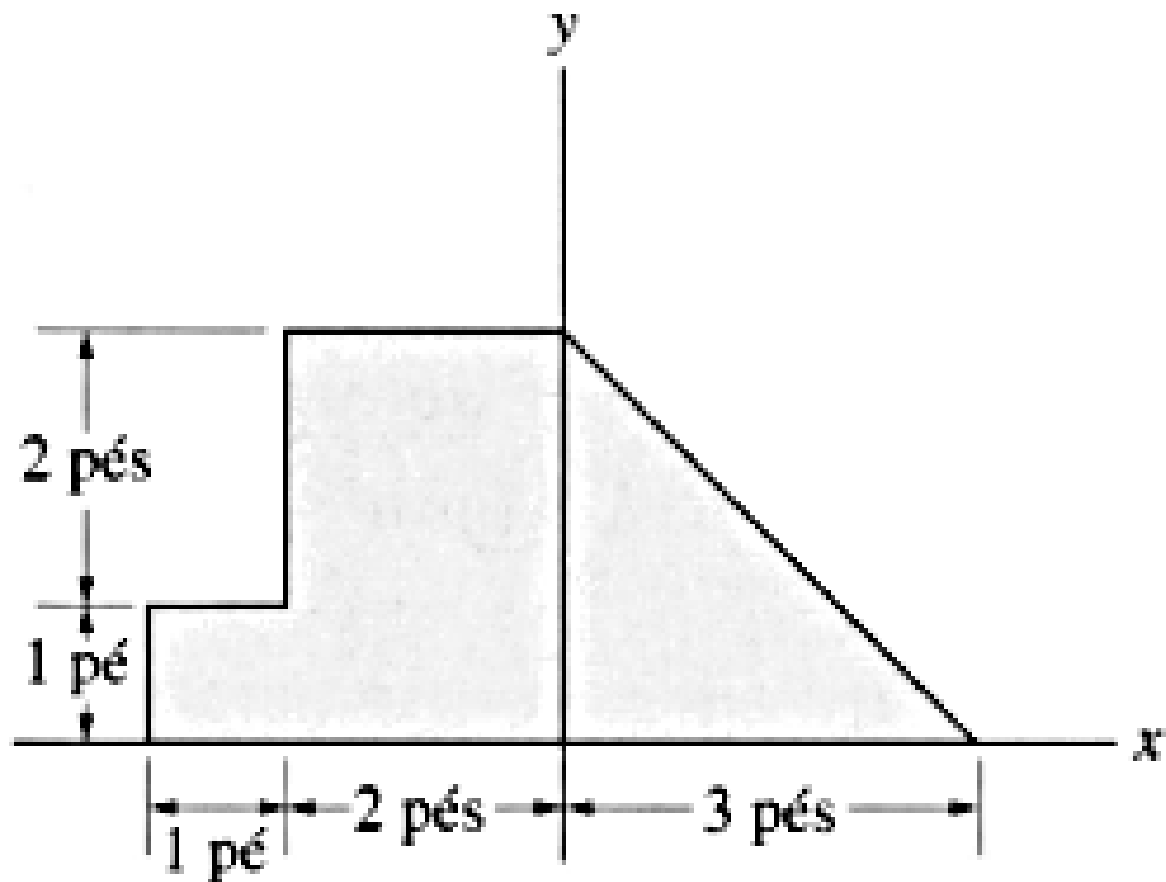


$$I_x = \frac{1}{36}bh^3$$

Área do triângulo

EXEMPLO 1

Localize o centroide da área da placa mostrada na figura abaixo.



EXEMPLO 1

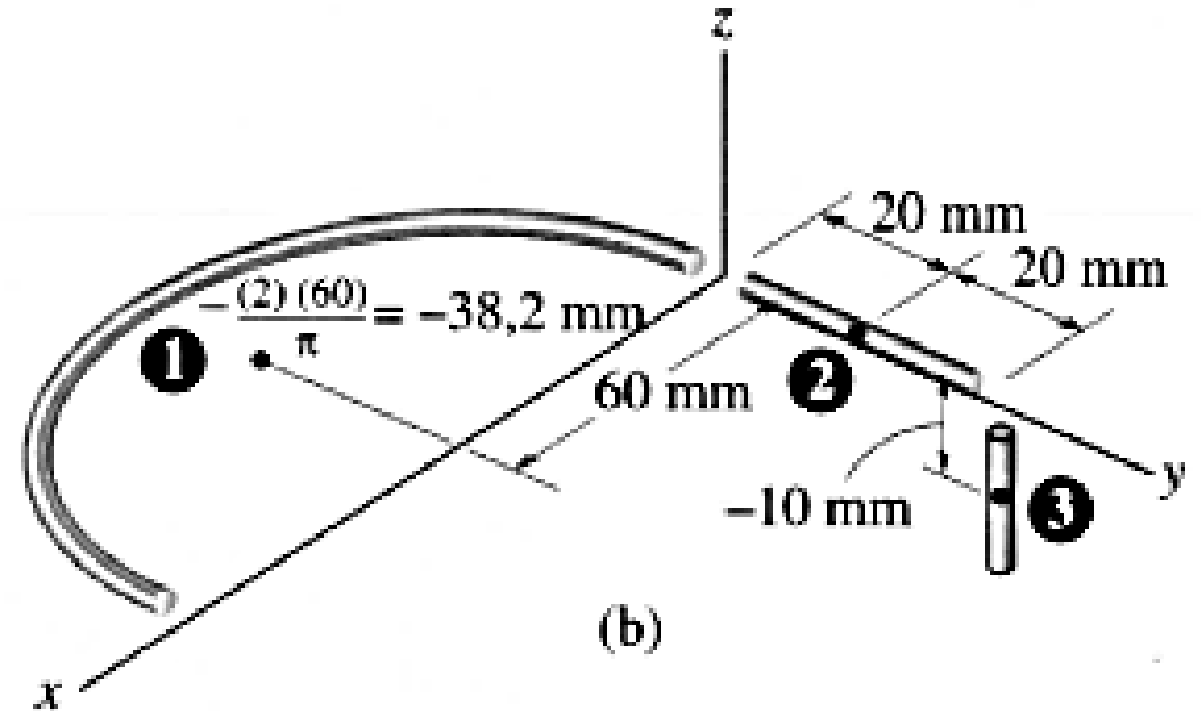
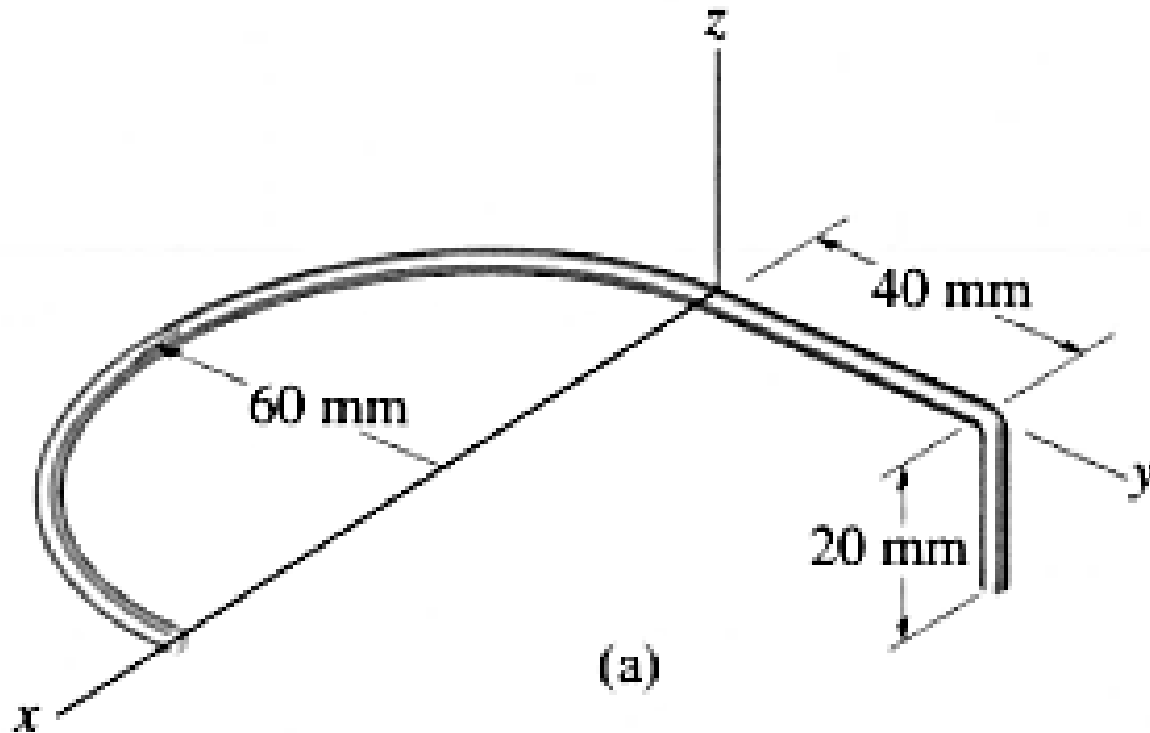
Segmento	$A \text{ (pé}^2\text{)}$	$\tilde{x} \text{ (pé)}$	$\tilde{y} \text{ (pé)}$	$\tilde{x}A \text{ (pé}^3\text{)}$	$\tilde{y}A \text{ (pé}^3\text{)}$
1	$\frac{1}{2}(3)(3) = 4,5$	1	1	4,5	4,5
2	$(3)(3) = 9$	-1,5	1,5	-13,5	13,5
3	<u>$-(2)(1) = -2$</u>	-2,5	2	5	-4
	$\Sigma A = 11,5$			$\Sigma \tilde{x}A = -4$	$\Sigma \tilde{y}A = 14$

$$\bar{x} = \frac{\Sigma \tilde{x}A}{\Sigma A} = \frac{-4}{11,5} = -0,348 \text{ pé}$$

$$\bar{y} = \frac{\Sigma \tilde{y}A}{\Sigma A} = \frac{14}{11,5} = 1,22 \text{ pé}$$

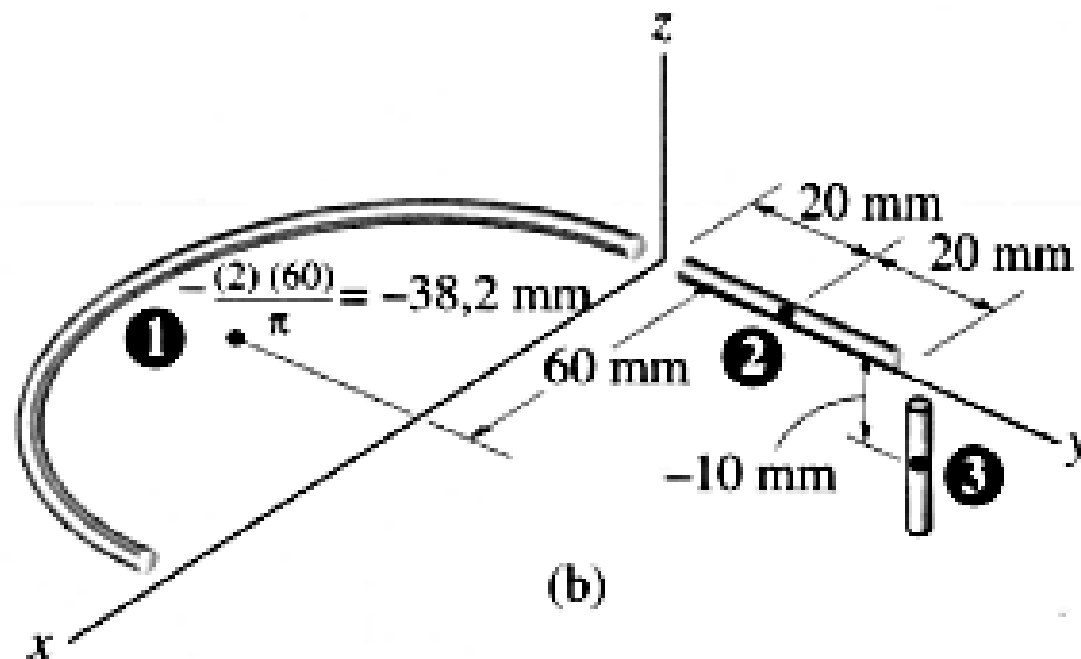
CENTRO E BARICENTRO

Localize o centroide da figura mostrada abaixo.



EXEMPLO 2

Segmento	L (mm)	\tilde{x} (mm)	\tilde{y} (mm)	\tilde{z} (mm)	$\tilde{x}L$ (mm ²)	$\tilde{y}L$ (mm ²)	$\tilde{z}L$ (mm ²)
1	$\pi(60) = 188,5$	60	-38,2	0	11.310	-7.200	0
2	40	0	20	0	0	800	0
3	20	0	40	-10	0	800	-200
	$\Sigma L = 248,5$				$\Sigma \tilde{x}L = 11.310$	$\Sigma \tilde{y}L = -5.600$	$\Sigma \tilde{z}L = -200$



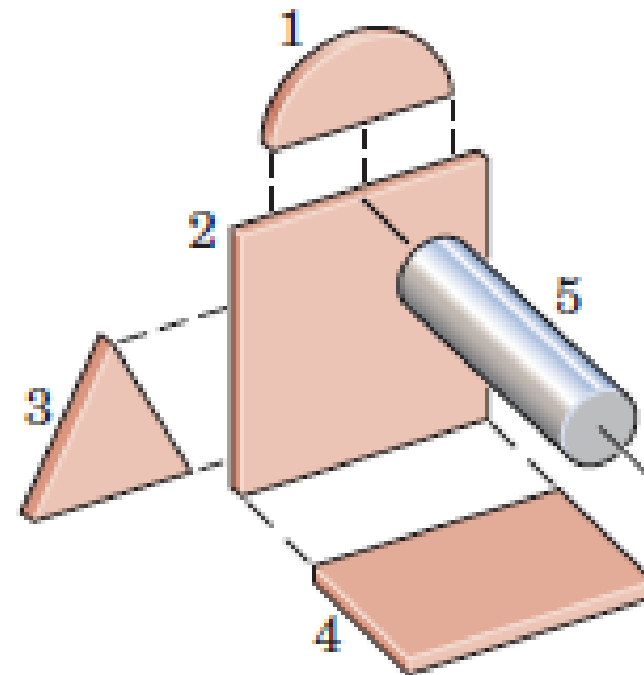
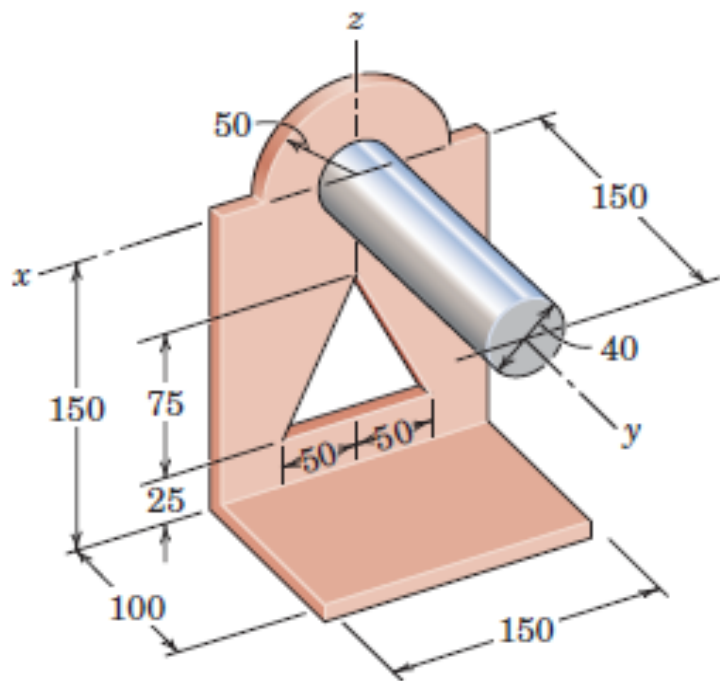
$$\bar{x} = \frac{\Sigma \tilde{x}L}{\Sigma L} = \frac{11.310}{248,5} = 45,5 \text{ mm}$$

$$\bar{y} = \frac{\Sigma \tilde{y}L}{\Sigma L} = \frac{-5.600}{248,5} = -22,5 \text{ mm}$$

$$\bar{z} = \frac{\Sigma \tilde{z}L}{\Sigma L} = \frac{-200}{248,5} = -0,805 \text{ mm}$$

EXEMPLO 3

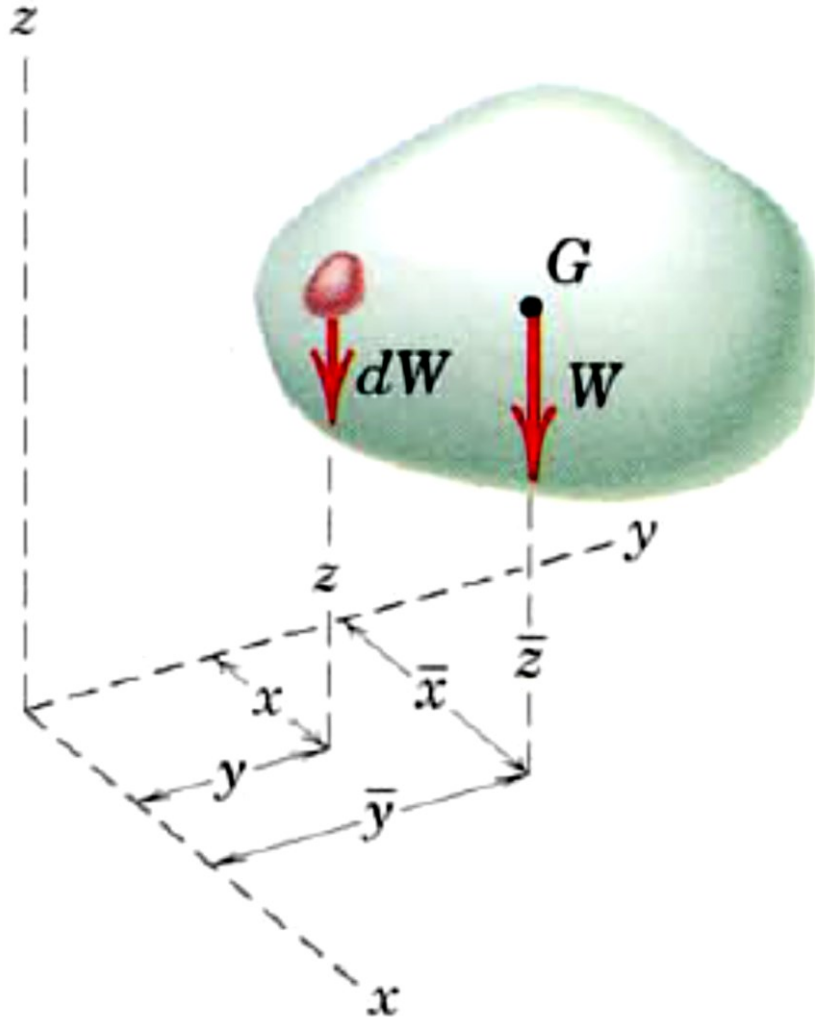
- Corpos Compostos



$$\bar{x} = \frac{\sum m \cdot x}{m} \quad \bar{y} = \frac{\sum m \cdot y}{m} \quad \bar{z} = \frac{\sum m \cdot z}{m}$$

CENTRO DE GRAVIDADE

- Considere um corpo tridimensional de qualquer tamanho e forma com massa m .



CENTRO DE GRAVIDADE

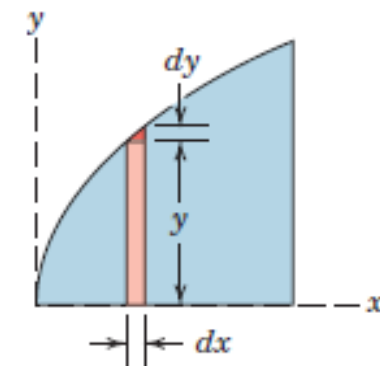
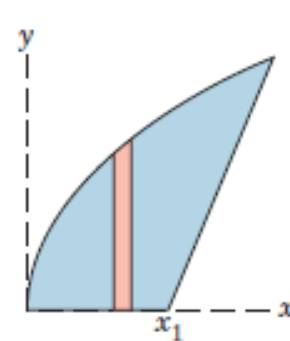
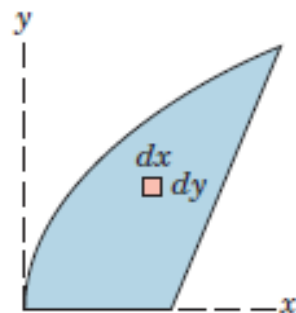
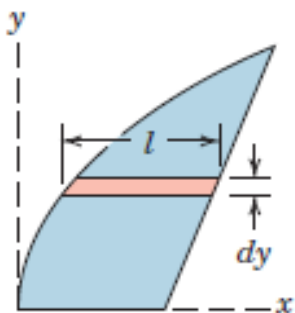
$$\bar{x} = \frac{\int x \cdot dW}{W} \quad \bar{y} = \frac{\int y \cdot dW}{W} \quad \bar{z} = \frac{\int z \cdot dW}{W}$$

CENTRO DE MASSA

$$\bar{x} = \frac{\int x \cdot dm}{m} \quad \bar{y} = \frac{\int y \cdot dm}{m} \quad \bar{z} = \frac{\int z \cdot dm}{m}$$

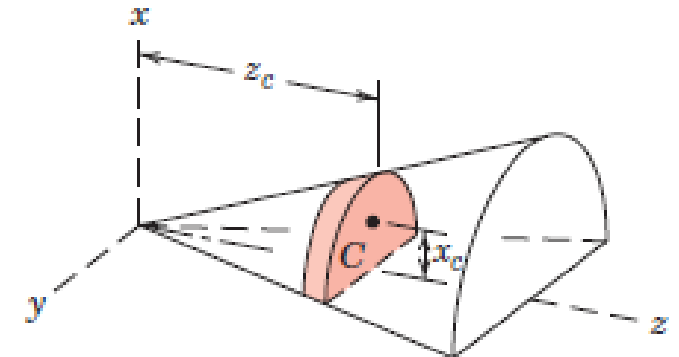
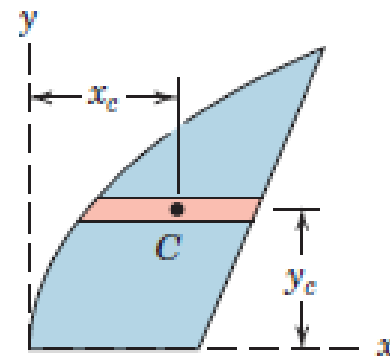
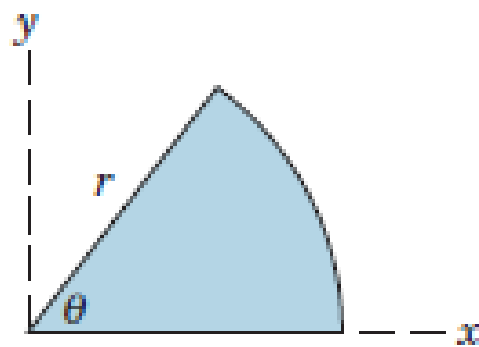
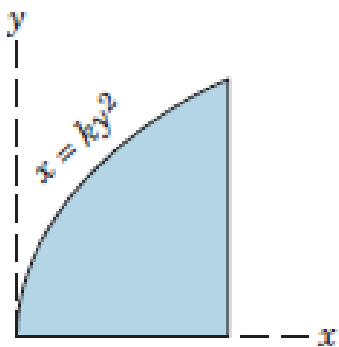
CENTRO DE GRAVIDADE - BARICENTRO

- **Escolha do elemento diferencial**
- **Ordem do elemento:** Sempre que possível seleciona-se um elemento de primeira ordem.
- **Continuidade:** Deve ser possível integrar em uma operação contínua, englobando toda a figura.
- **Eliminação de Termos de Ordem Superior:** Em comparação com termos de primeira ordem, os elementos de ordem superior podem ser desprezados.



CENTRO DE GRAVIDADE - BARICENTRO

- **Escolha do elemento diferencial**
- **Escolha das Coordenadas:** Deve-se escolher o sistema de coordenadas que melhor se ajusta aos contornos da figura.
- **Coordenadas do Centroide de um Elemento:** É essencial utilizar as coordenadas do centroide do elemento para calcular o primeiro momento do elemento.



CENTRO DE GRAVIDADE - BARICENTRO

Corpos compostos consiste em um conjunto de corpos de formatos mais simples como triângulo, quadrado, semicírculos, etc. Para o cálculo do centro de gravidade do corpo todo é necessário que o peso e centro de gravidade de cada “parte” seja conhecido para que sejam considerados como partículas.

$$\bar{x} = \frac{\sum \tilde{x} W}{\sum W} \qquad \bar{y} = \frac{\sum \tilde{y} W}{\sum W} \qquad \bar{z} = \frac{\sum \tilde{z} W}{\sum W}$$

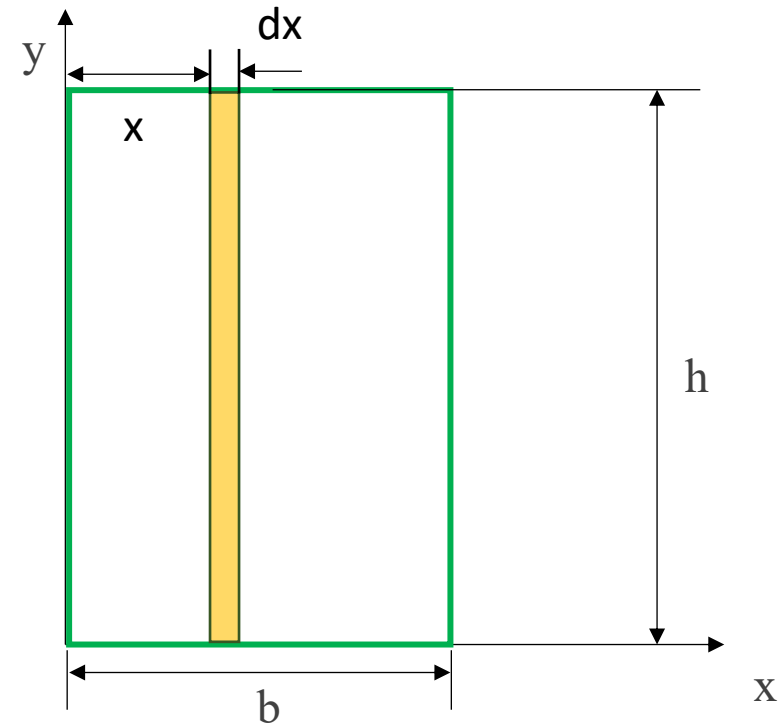
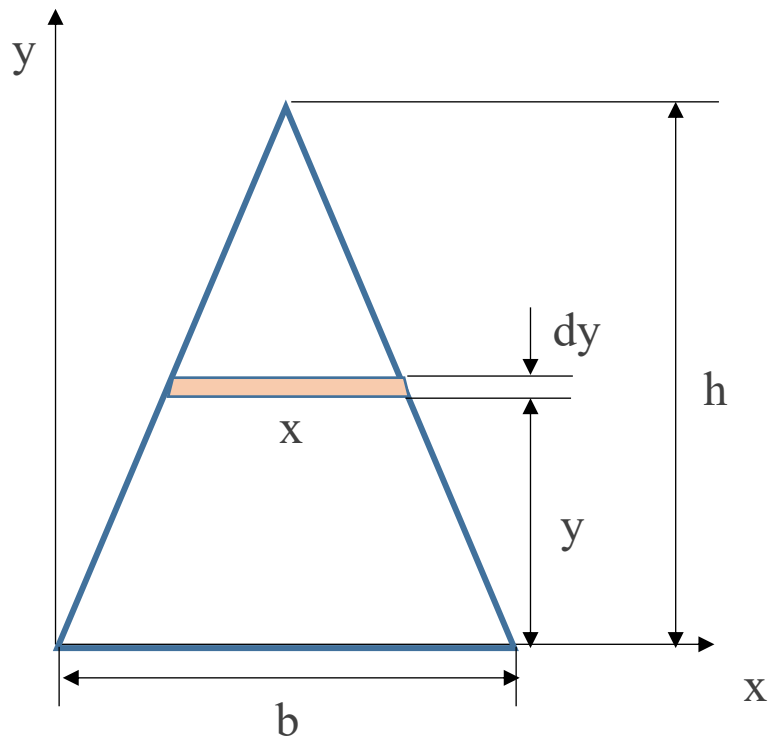
$\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ *representam as coordenadas do centro de gravidade G do corpo composto.*

$\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$ *representam as coordenadas do centro de gravidade de cada parte que constitui o corpo.*

$\sum W$ *é a soma dos pesos de todas as partes que constituem o corpo ou é simplesmente o peso total do corpo composto.*

CENTRO DE GRAVIDADE - BARICENTRO

- Exemplo 1
- Determine o centroide das áreas triangular e retangular.



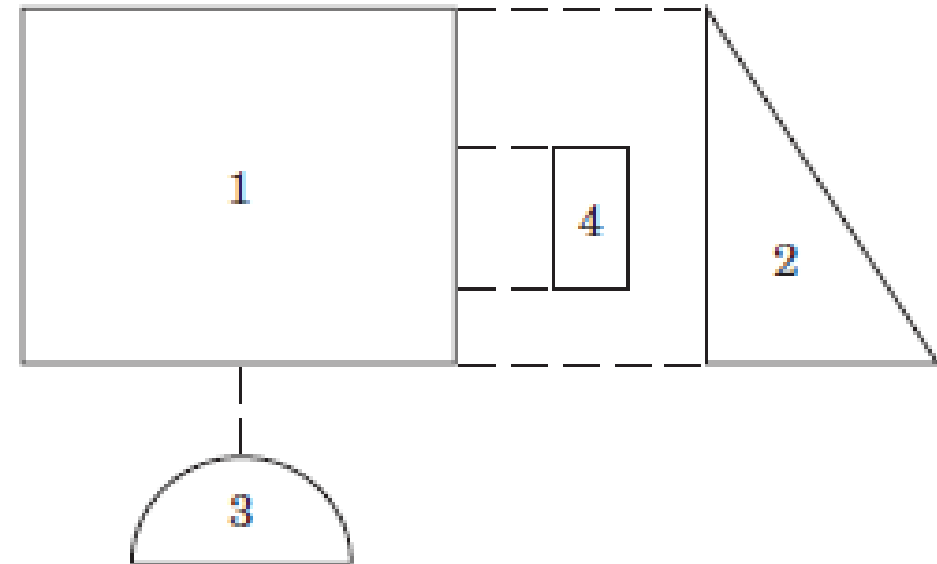
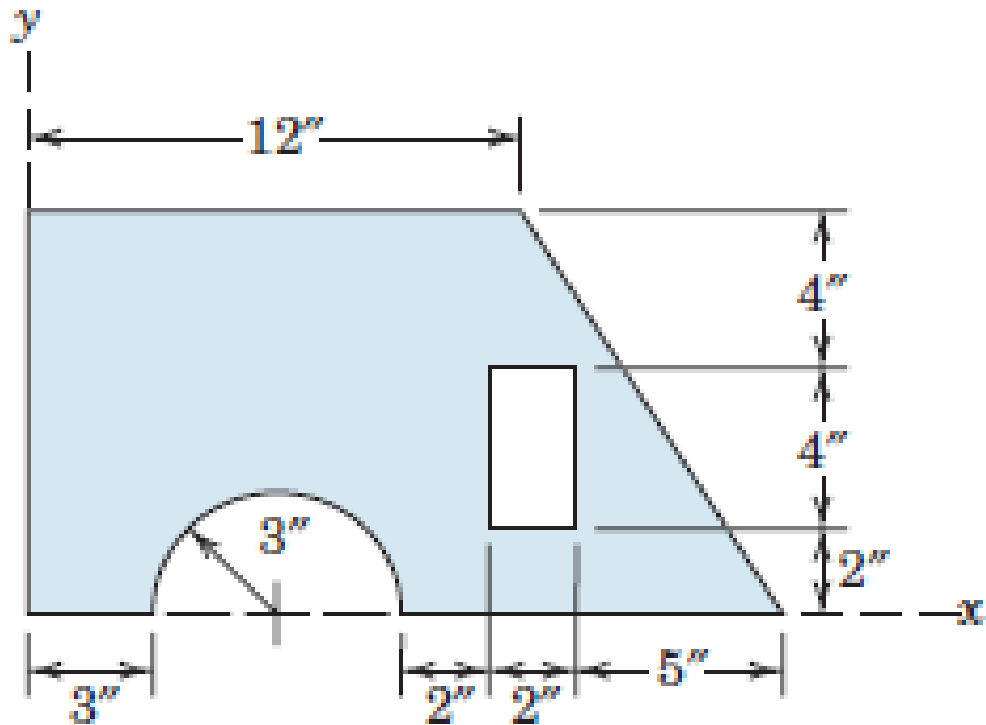
EXERCÍCIOS E ATIVIDADES

Orientação para realização das Atividades:

- Realizar as atividades a mão livre;
- Realizar diagramas e desenhos para compreensão;
- Realizar todas as contas de forma detalhada;
- Colocar as repostas principais a caneta;
- Entregar as atividades e resolução dos exercícios em forma digital no sala virtual da disciplina.

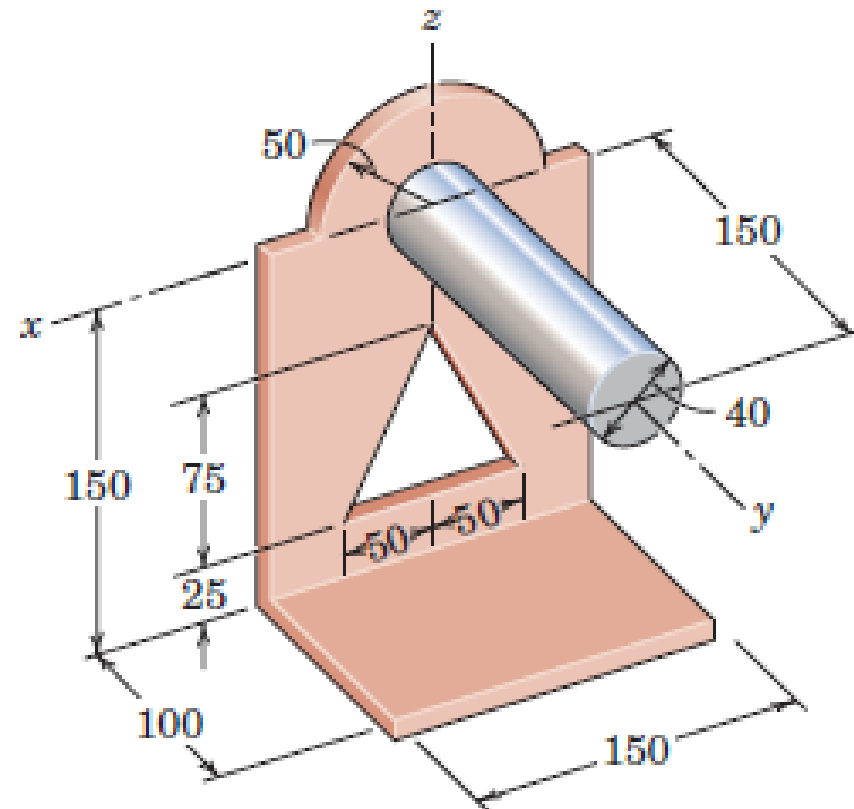
EXERCÍCIO 1

- Localize o centroide da área sombreada



EXERCÍCIO 2

- Localize o centro de massa do conjunto formado por um suporte e um eixo. A face vertical é feita de uma chapa de metal que tem uma massa de $25 \text{ [kg/m}^2\text{]}$. O material da base horizontal tem uma massa de $40 \text{ [kg/m}^2\text{]}$ e o eixo de aço tem uma densidade de $7,83 \text{ [Mg/m}^3\text{]}$.



EXERCÍCIO 3

- Para a área plana mostrada, determine a localização do centroide

