Ministério da Educação
UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
Campus Cornélio Procópio

AULA 9

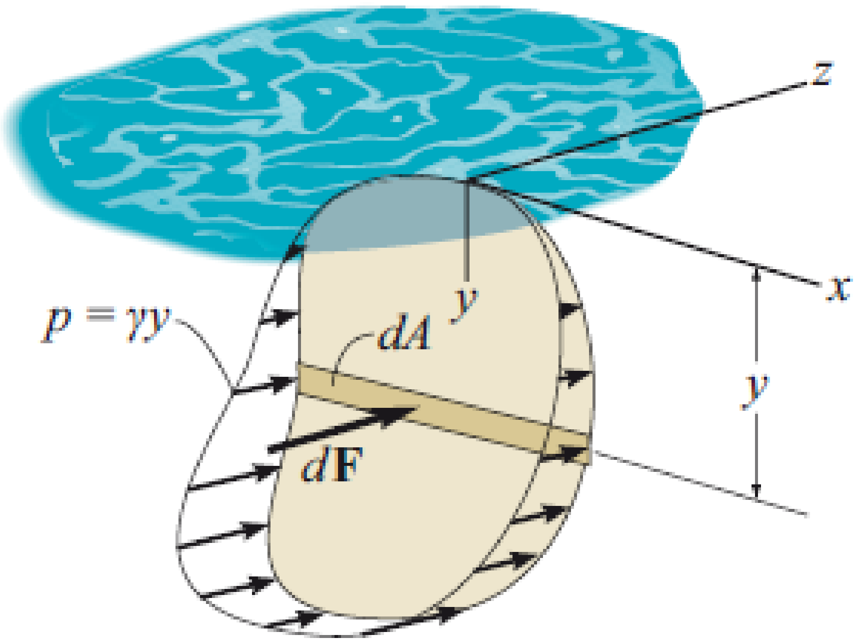
MOMENTO DE INÉRCIA DE ÁREA

Professor: Dr. Paulo Sergio Olivio Filho

MOMENTO DE INÉRCIA DE ÁREA

UTFPR CORNÉLIO PROCÓPIO

- Sempre que uma carga distribuída atua perpendicularmente a uma área e sua intensidade varia linearmente, o cálculo do momento da distribuição de carga em relação a um eixo envolverá uma quantidade chamada Momento de Inércia de Área.

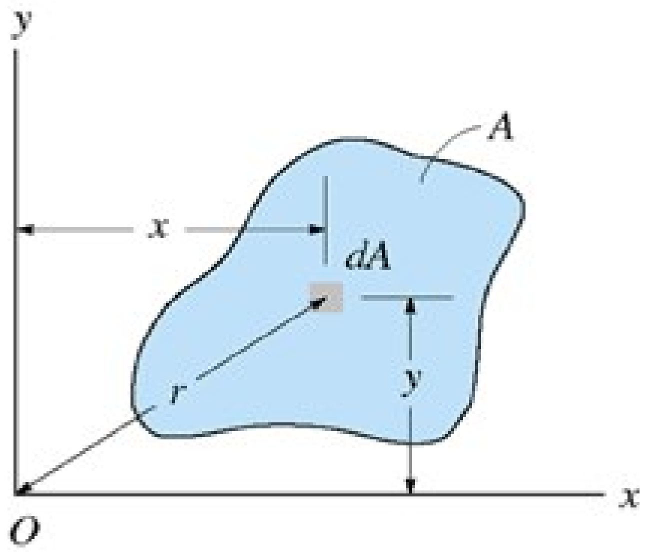


MOMENTO DE INÉRCIA DE ÁREA

➢ Os momentos de inércia de uma área infinitesimal em relação aos eixos x e y são:

$$dI_x = y^2.dA \quad dI_y = x^2.dA$$

$$I_x = \int_A y^2.dA \quad I_y = \int_A x^2.dA$$



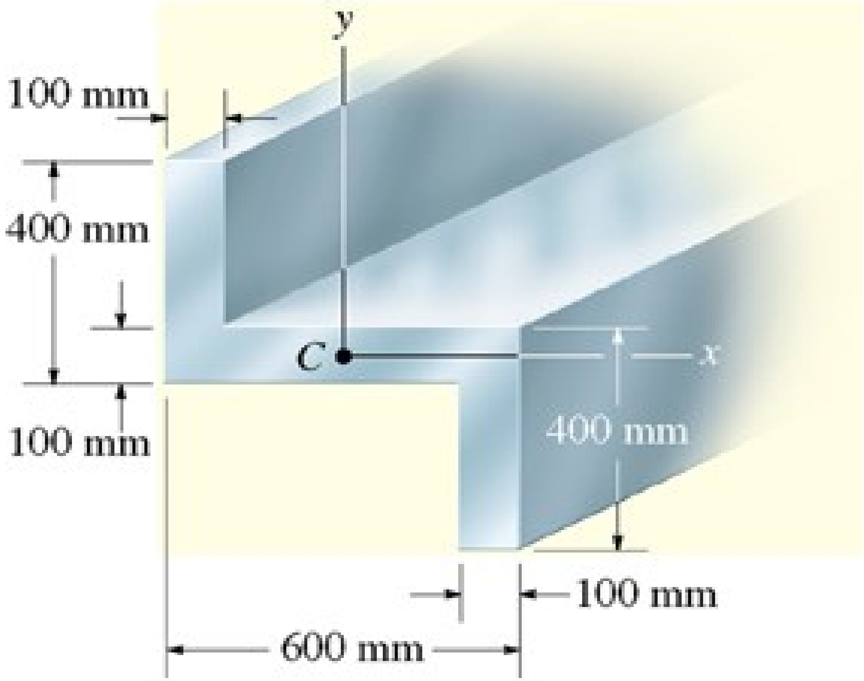
➢ Calcula-se também o momento de inércia em relação a origem ou ao eixo z, o qual é chamado de momento polar de inércia:

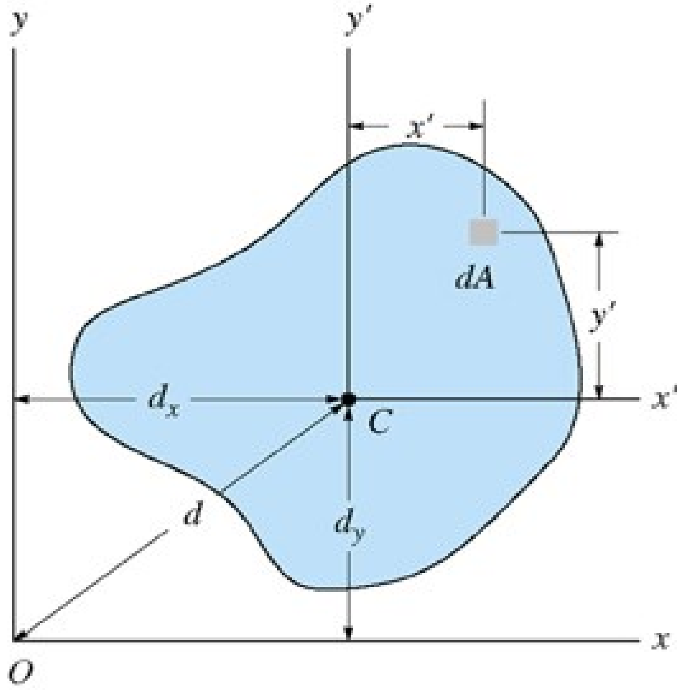
$$J_o = \int_A r^2.dA = I_x + I_y$$

TEOREMA DOS EIXOS PARALELOS

Há casos em que um objeto em estudo é formado por vários elementos de formas básicas. Ex: perfil T, I, etc.

$$dI_x = (y' + dy)^2 . dA$$



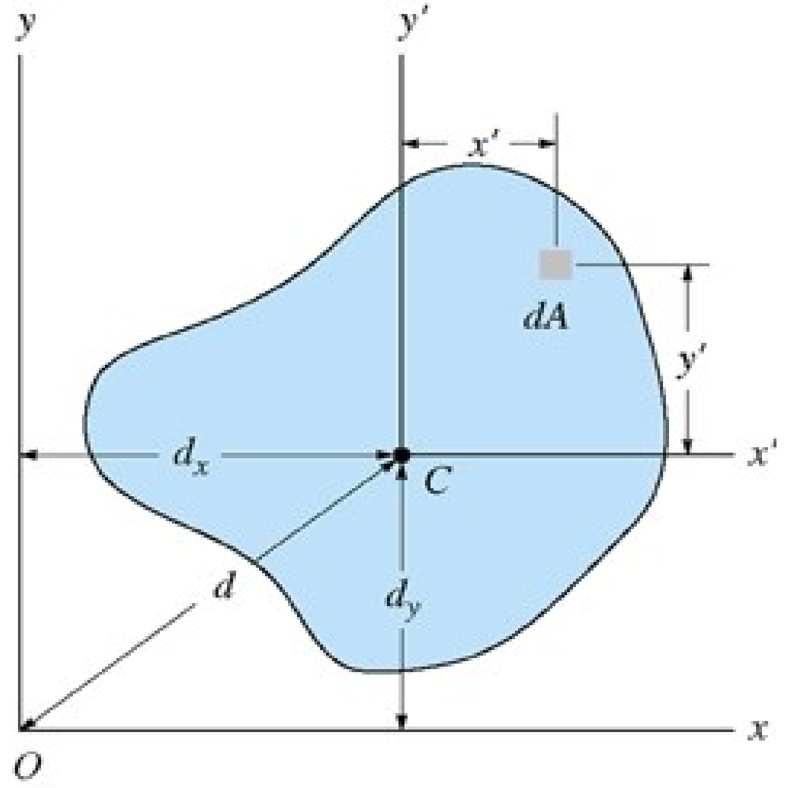


TEOREMA DOS EIXOS PARALELOS

UTFPR CORNÉLIO PROCÓPIO

$$I_x = \int_A (y' + d_y)^2 . dA$$

$$I_x = \int_A y'^2 . dA + 2.d_y \int_A y' . dA + d_y^2 \int_A dA$$



Onde:

- A primeira integral representa o momento de inércia com relação ao sistema local;
- A segunda integral é zero, porque y’ passa pelo centróide C;
- A terceira representa a área total.

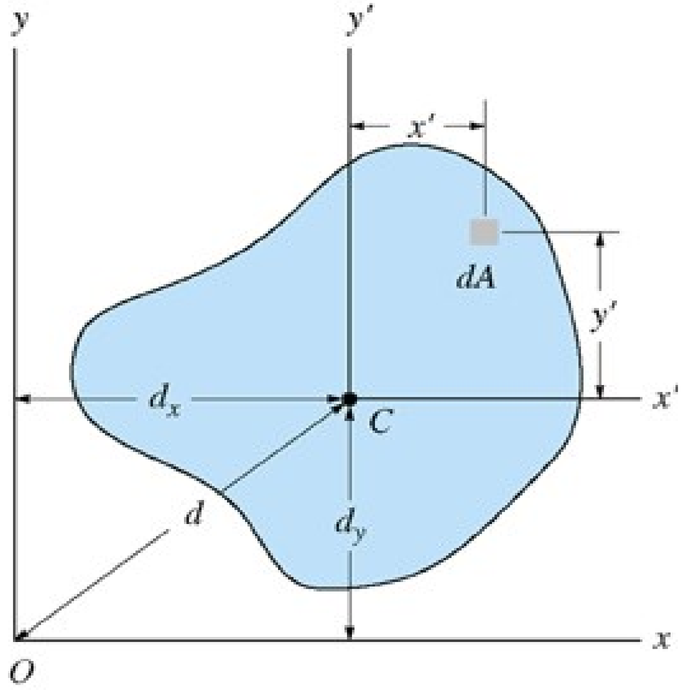
TEOREMA DOS EIXOS PARALELOS

CORNÉLIO PROCÓPIO

$$I_x = \bar{I}_{x'} + A.d_y^2$$

$$I_y = \bar{I}_{y'} + A.d_x^2$$

$$J_o = \bar{J}_C + A.d^2$$

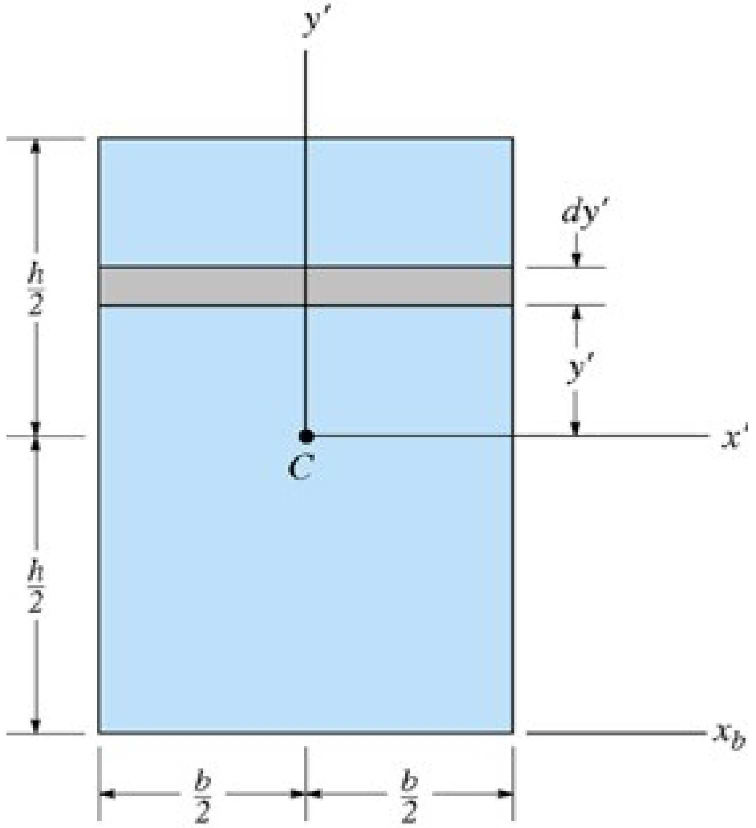


EXEMPLO 1

Determine o momento de inércia para a área retangular mostrada na figura, em relação (a) ao eixo x' que passa pelo centróide, (b) ao eixo x_b que passa pela base do retângulo e (c) ao pólo ou eixo z' perpendicular ao plano x'-y' e que passa pelo centróide C.

$$\bar{I}_{x'} = \int_A y'^2 \, dA = \int_{-h/2}^{h/2} y'^2 (b\,dy') = b \int_{-h/2}^{h/2} y'^2 \, dy'$$

$$= \frac{1}{12} bh^3$$



EXEMPLO 1

Parte (b)

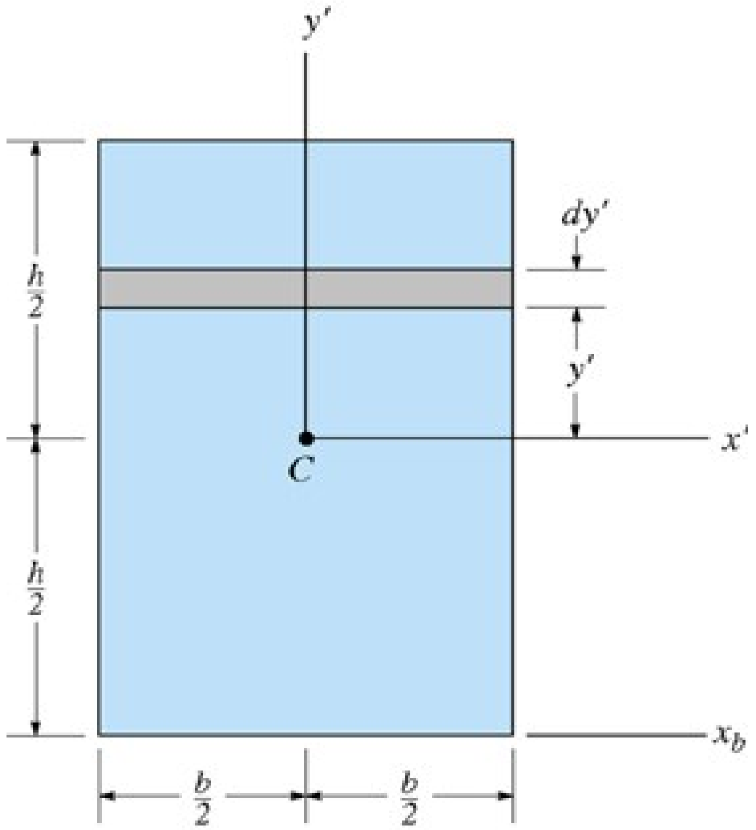
$$I_{x_b} = \bar{I}_{x'} + Ad_y^2$$

$$= \frac{1}{12}bh^3 + bh\left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}bh^3$$

Parte (c)

$$\bar{I}_{y'} = \frac{1}{12}hb^3$$

$$\bar{J}_C = \bar{I}_{x'} + \bar{I}_{y'} = \frac{1}{12}bh\left(h^2 + b^2\right)$$

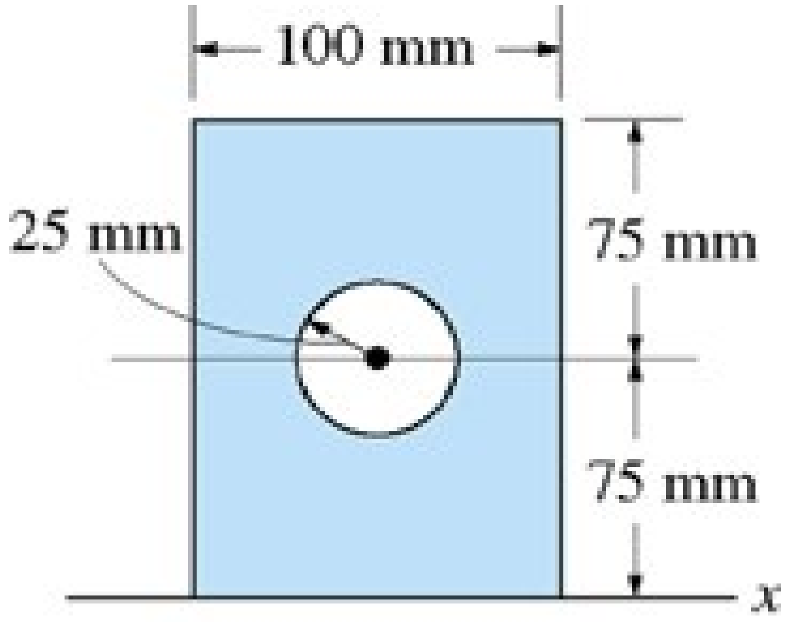


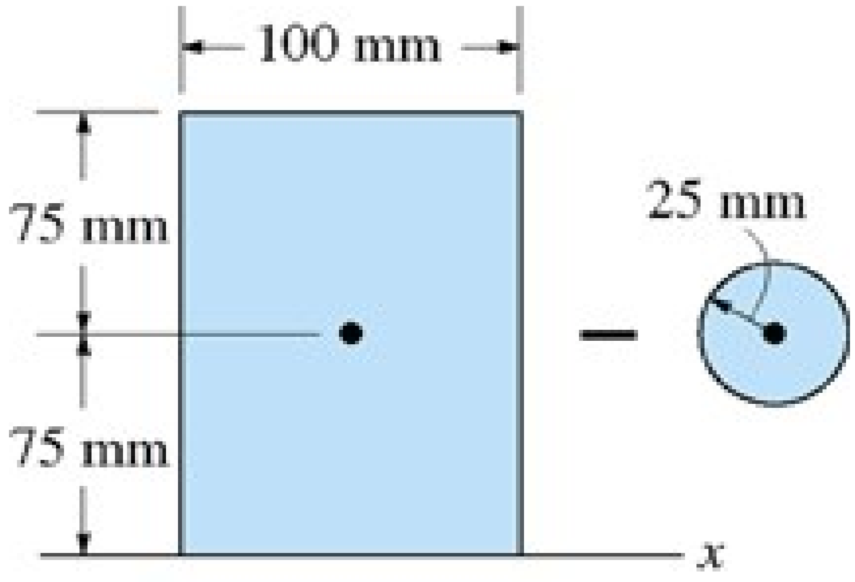
EXEMPLO 2

Calcule o momento de inércia da área composta mostrada na figura em relação ao eixo x.

Solução:

A área composta é obtida pela subtração do círculo do retângulo





EXEMPLO 2

UTFPR CORNÉLIO PROCÓPIO

Circulo

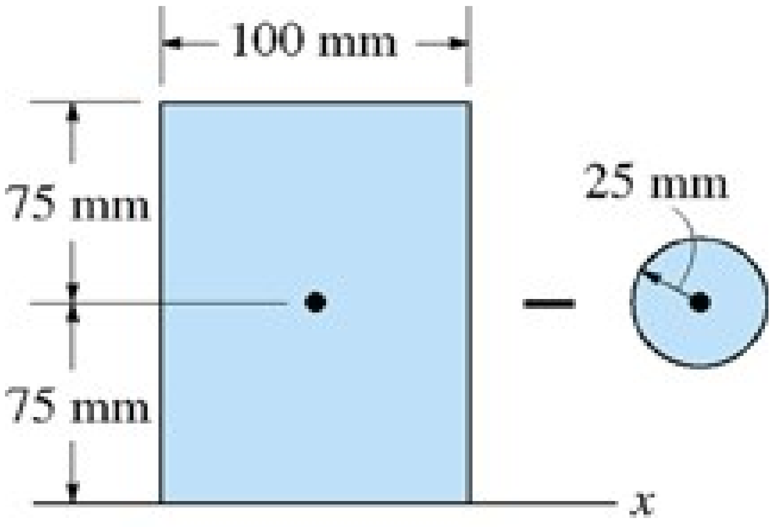
$$I_x = \bar{I}_{x'} + Ad_y^2$$

$$\frac{1}{4}\pi(25)^4 + \pi(25)^2(75)^2 = 11,4\left(10^6\right)mm^4$$

Retângulo

$$I_x = \bar{I}_{x'} + Ad_y^x$$

$$= \frac{1}{12}(100)(150)^3 + (100)(150)(75)^2 = 112,5\left(10^6\right)mm^4$$



(b)

Somatório

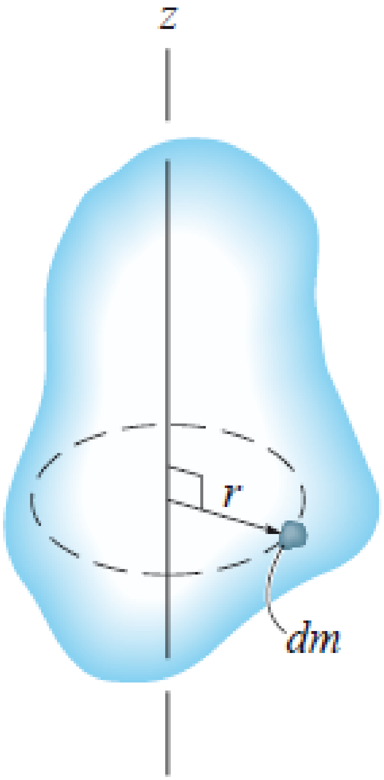
$$I_x = -11,4\left(10^6\right) + 112,5\left(10^6\right)$$

$$= 101\left(10^6\right)mm^4$$

MOMENTO DE INÉRCIA DE MASSA

UTFPR CORNÉLIO PROCÓPIO

O momento de inércia da massa de um corpo é uma medida da resistência do corpo à aceleração angular.
Considere o corpo rígido mostrado na figura abaixo:



$$I = \int_m r^2 . dm$$

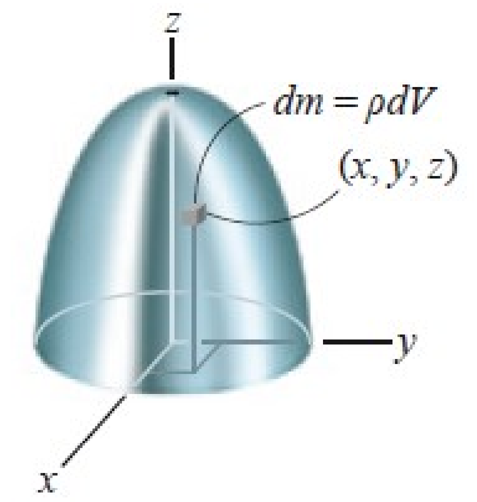
Ou também,

$$I = \int_V r^2 \rho . dV$$

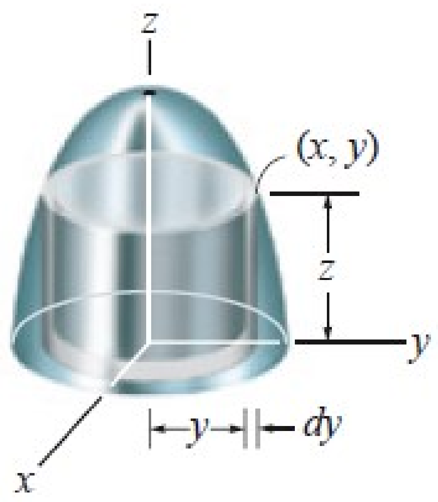
MOMENTO DE INÉRCIA DE MASSA

Procedimentos de Análise

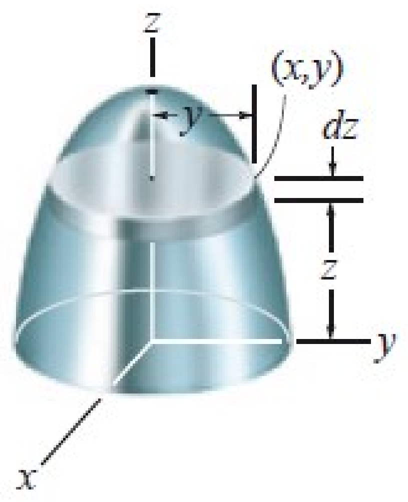
Se um corpo é simétrico em relação a um eixo, então seu momento de inércia de massa com relação a esse eixo pode ser determinado usando-se uma integração isolada.



Elemento de Casca

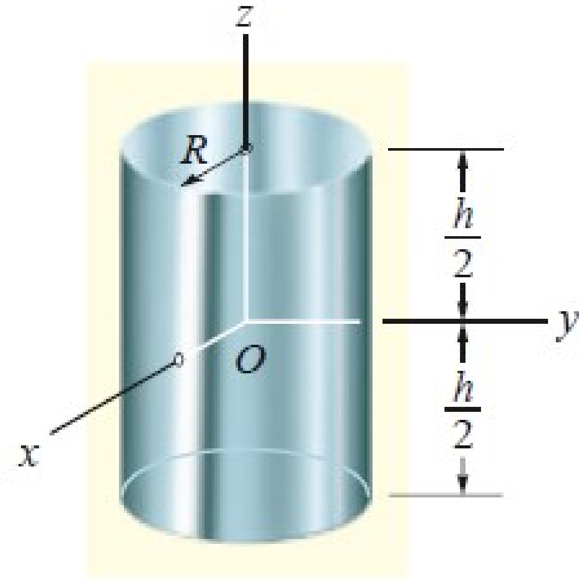


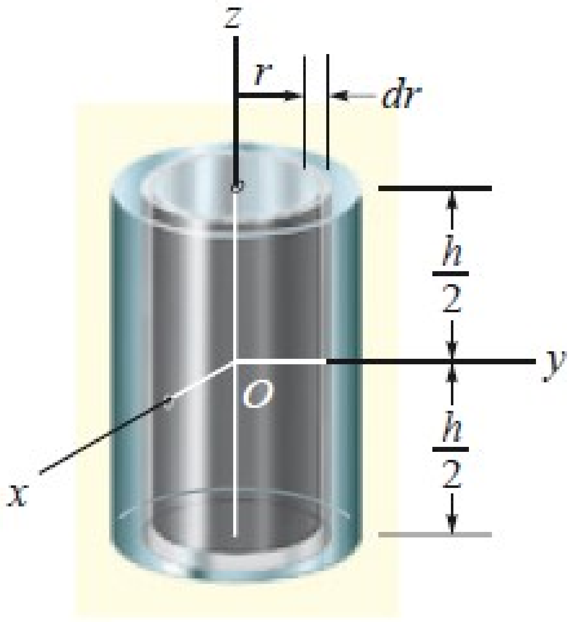
Elemento de Disco



EXEMPLO 3

Determine o momento de inércia da massa do cilindro mostrado em relação ao eixo z. A densidade do material é constante.





RAIO DE GIRAÇÃO

O raio de giração é freqüentemente utilizado em projetos de colunas em mecânica estrutural. Conhecendo-se os momentos de inércia, pode-se determinar os raios de giração para o Momento de Inércia de Área:

$$k_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \qquad k_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \qquad k_o = \sqrt{\frac{J_o}{A}}$$

Ou para o Momento de Inércia de Massa:

$$k_x = \sqrt{\frac{I_x}{M}} \qquad k_y = \sqrt{\frac{I_y}{M}} \qquad k_o = \sqrt{\frac{J_o}{M}}$$

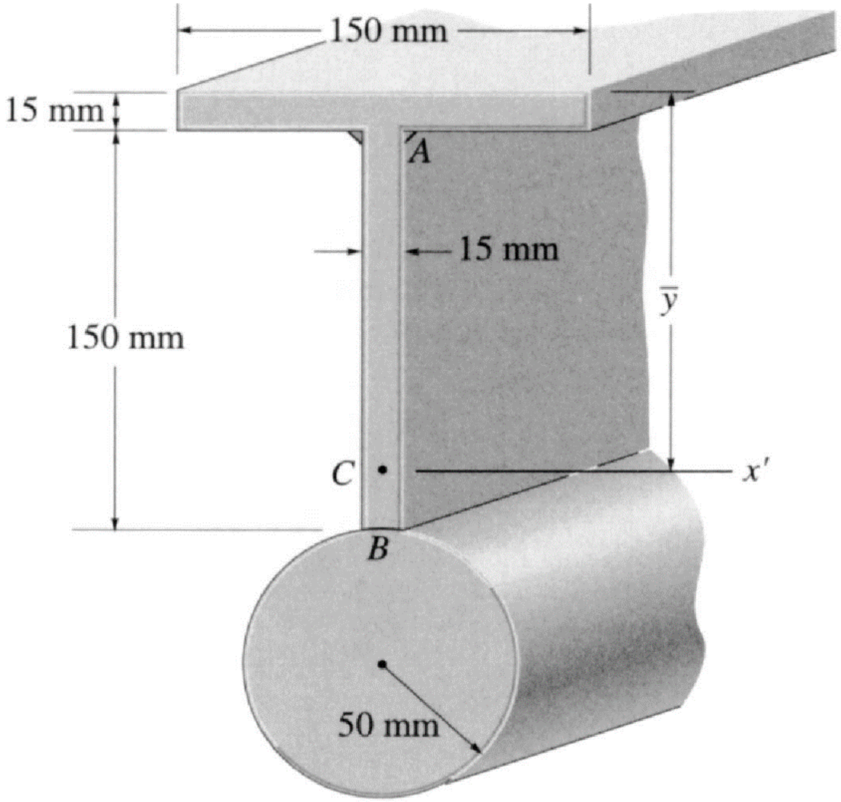
EXERCÍCIOS E ATIVIDADES

Orientação para realização das Atividades:

- Realizar as atividade a mão livre;
- Realizar diagramas e desenhos para compreensão;
- Realizar todas as contas de forma detalhada;
- Colocar as repostas principais a caneta;
- Entregar as atividades e resolução dos exercícios em forma digital no sala virtual da disciplina.

EXERCÍCIO 1

- Determine o momento de inércia da área de seção transversal da viga em relação ao eixo x'. Despreze as dimensões das soldas nos cantos em A e B para esses cálculos e considere $\bar{y} = 154{,}4$ [mm].



EXERCÍCIO 2

- Determine $\bar{y}$, que localiza o eixo x' que passa pelo centroide da área de seção transversal da viga T, e encontre os momentos de inércia $\bar{I}_{x'}$ e $\bar{I}_{y'}$.