Ministério da Educação
UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
Campus Cornélio Procópio

UTFPR
CORNÉLIO PROCÓPIO

AULA 6

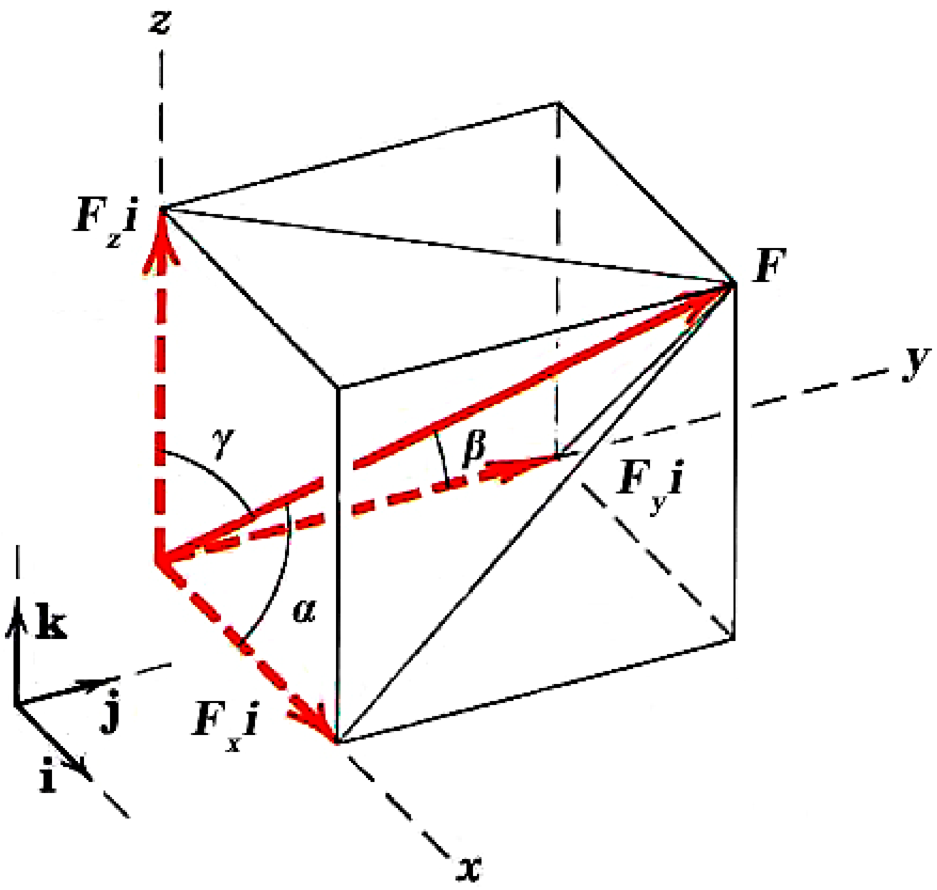
FORÇAS E MOMENTOS TRIDIMENSIONAIS

Professor: Dr. Paulo Sergio Olivio Filho

SISTEMA DE FORÇAS TRIDIMENSIONAIS

UTFPR CORNÉLIO PROCÓPIO

- Muitos problemas requerem a análise em três dimensões e para essa análise serão utilizadas as componentes retangulares da força **F**.



$\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k}$ $\qquad F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$

$F_x = F \cdot \cos\alpha$ $\qquad F_y = F \cdot \cos\beta$ $\qquad F_z = F \cdot \cos\gamma$

$cos\alpha = \frac{F_x}{F}$ $\qquad cos\beta = \frac{F_y}{F}$ $\qquad cos\gamma = \frac{F_z}{F}$

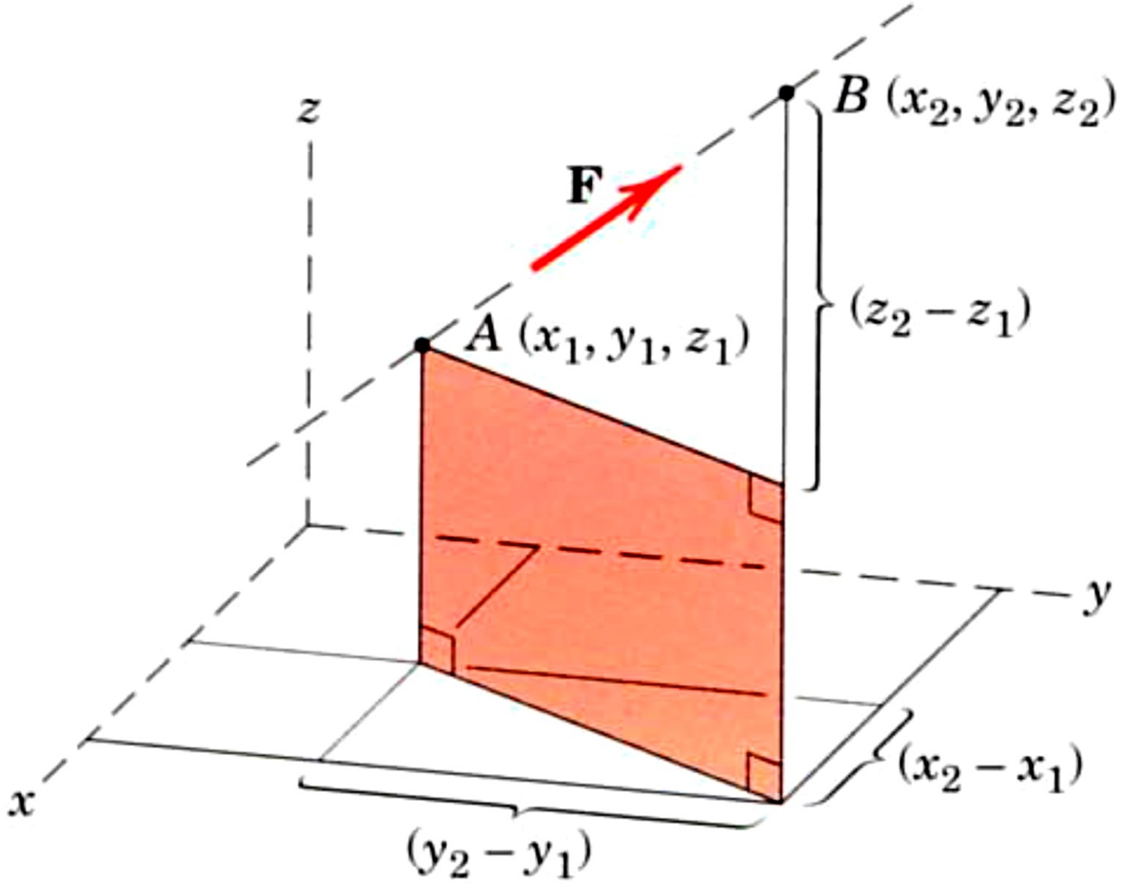
$\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1$

SISTEMA DE FORÇAS TRIDIMENSIONAIS

- A direção de uma força **F** pode ser descrita por:
  - Dois pontos sobre a linha de ação da força (ex. cabos, fios, cordas);

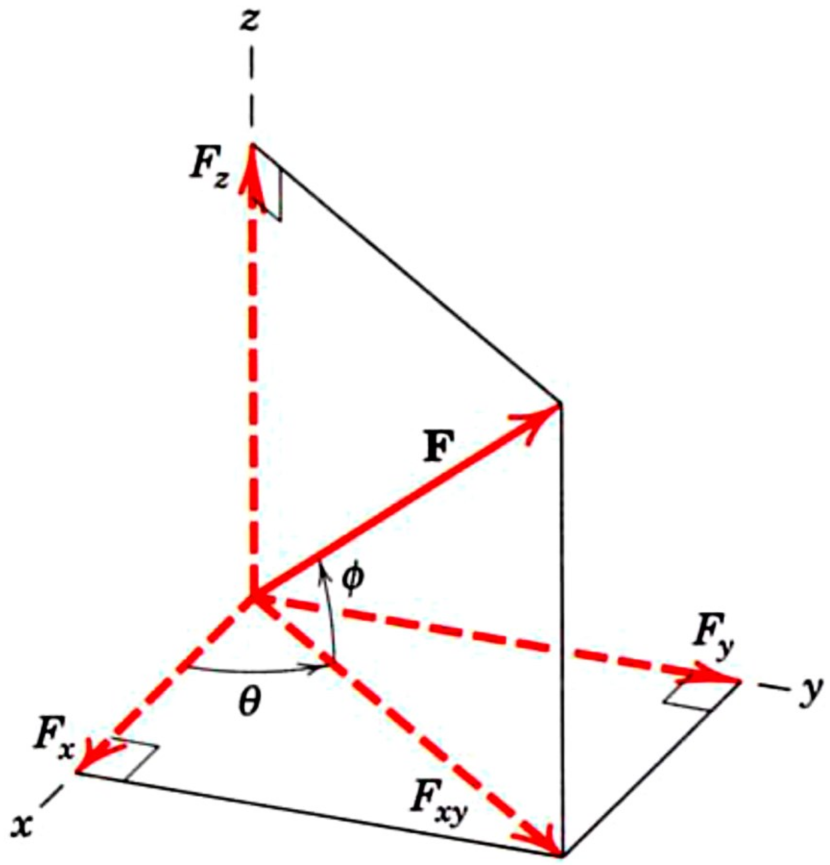
$$\vec{F} = F\,.\vec{u} = F\,.\frac{\overrightarrow{AB}}{\overline{AB}}$$

$$F.\frac{(x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}$$



SISTEMA DE FORÇAS TRIDIMENSIONAIS

- A direção de uma força **F** pode ser descrita por:
  - Dois ângulos que orientam a linha de ação.



$$F_z = F \,.\, \text{sen}\ \phi$$

$$F_{xy} = F \,.\, \cos \phi$$

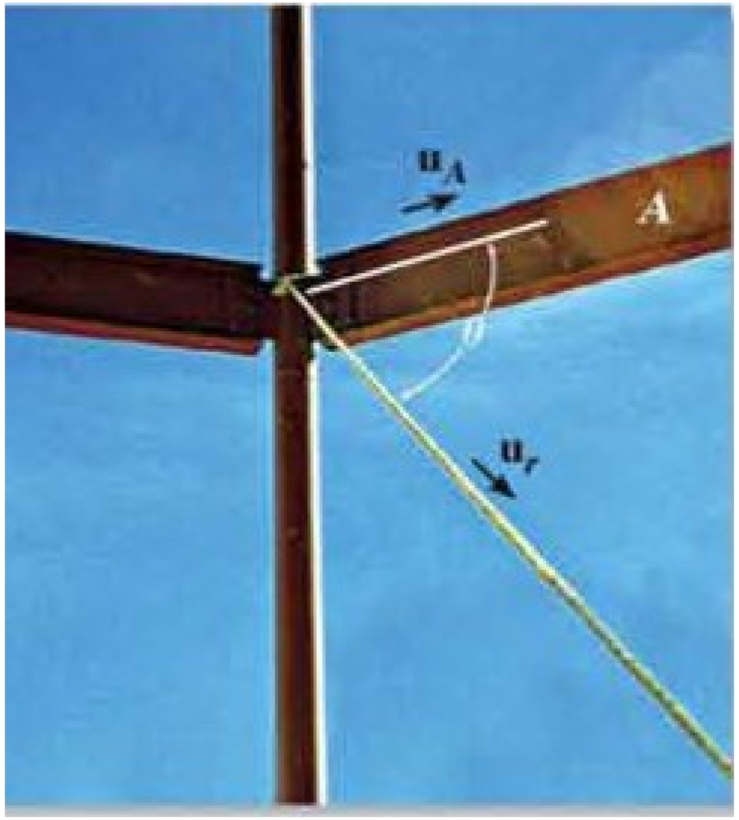
$$F_x = F \,.\, \cos \varphi \,.\, \cos \theta \qquad F_y = F \,.\, \cos \varphi \,.\, \text{sen}\ \theta$$

SISTEMA DE FORÇAS TRIDIMENSIONAIS

CORNÉLIO PROCÓPIO

Produto Escalar

- As componentes retangulares de um vetor qualquer podem ser expressas com o auxílio do produto escalar.



$$\vec{\boldsymbol{P}}.\vec{\boldsymbol{Q}} = P\ Q\ cos\alpha$$

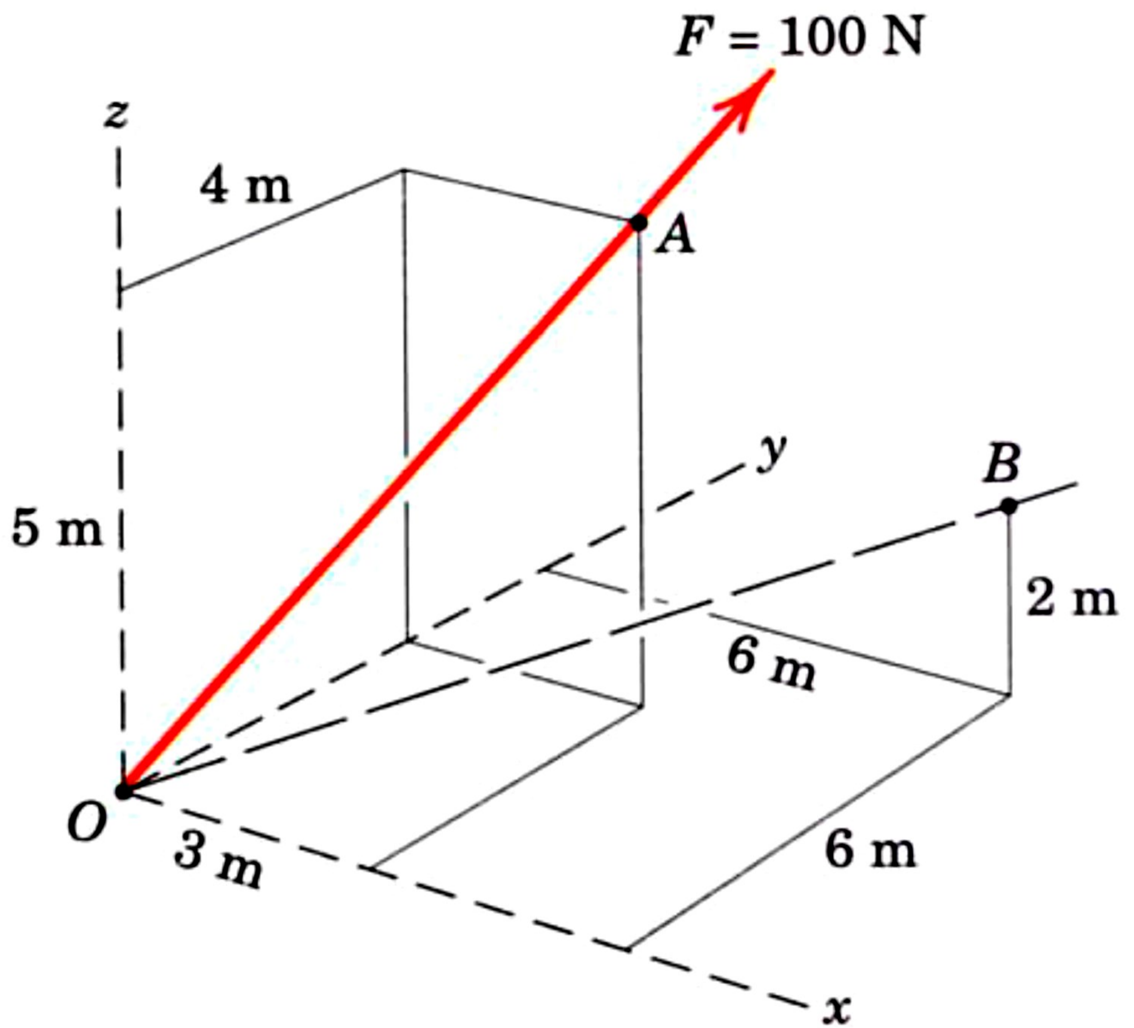
- Assim, podemos expressar a projeção de uma força **F** em uma dada direção **n**:

$$\boxed{F_n = \vec{\boldsymbol{F}}.\vec{\boldsymbol{n}}}$$

- Onde, **n** é o vetor unitário que representa a direção desejada.

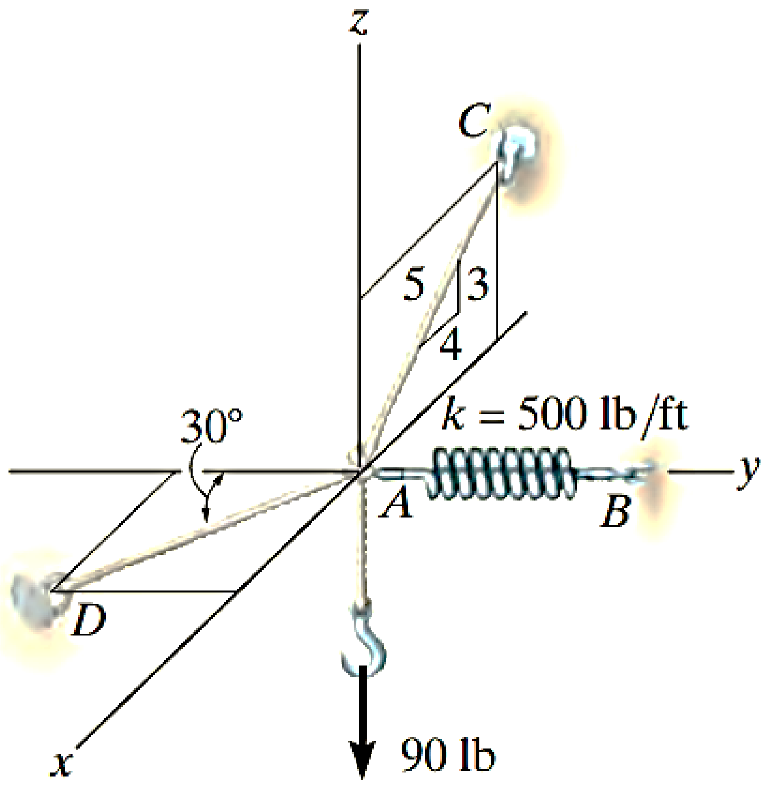
EXEMPLO 1

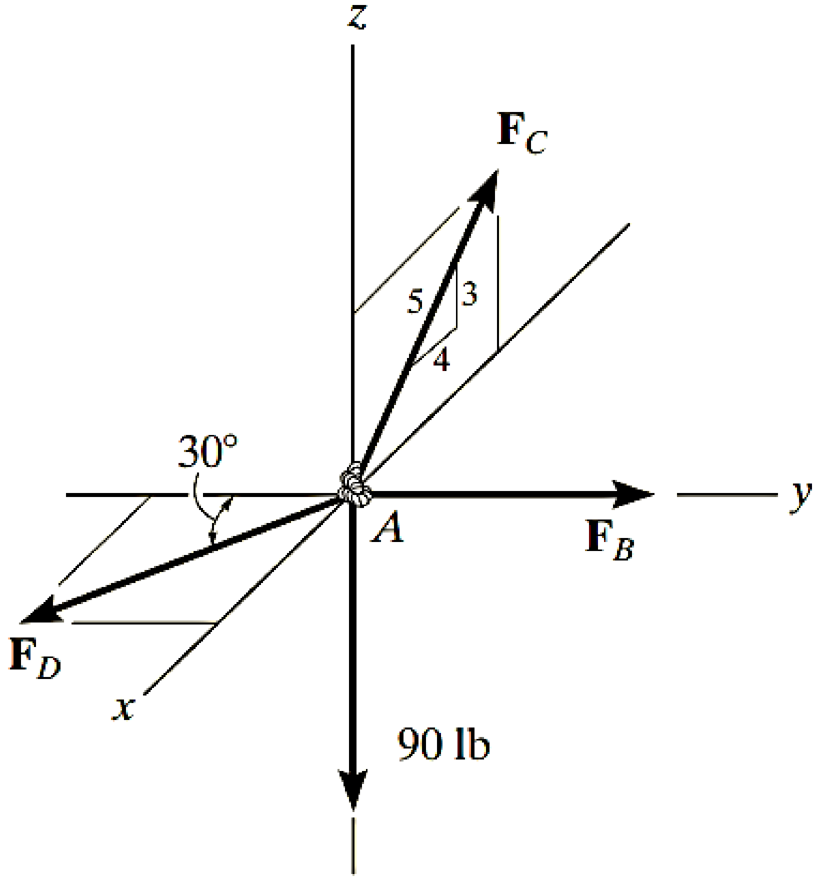
Uma força de módulo 100 [N] é aplicada na origem O dos eixos x-y-z como mostrado. A linha de ação de **F** passa por um ponto A cujas coordenadas são 3 [m], 4 [m] e 5 [m] em x, y e z, respectivamente. Determine: a) as componentes escalares x, y e z da força **F**; b) a projeção F_{xy} de **F** no plano x-y e; b) a projeção F_{OB} de **F** ao longo da linha OB.



EXEMPLO 2

Uma carga de 90lb é suspensa pelo gancho mostrado na figura. Se ela é apoiada por dois cabos e uma mola de constante elástica 500lb/ft, determine a força no cabos e a elongação da mola para manter o equilíbrio. O cabo AD está no plano xy e o cabo AC no plano xz.

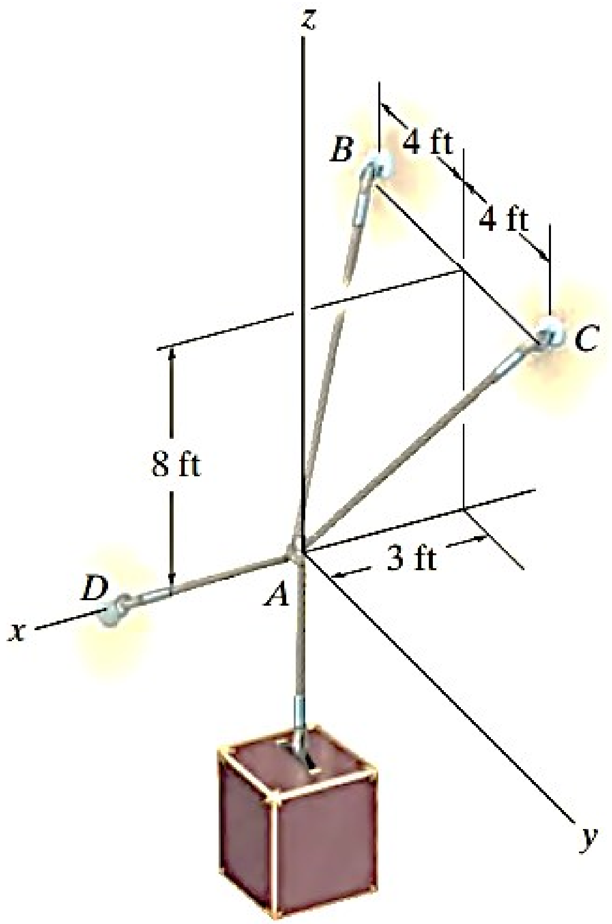


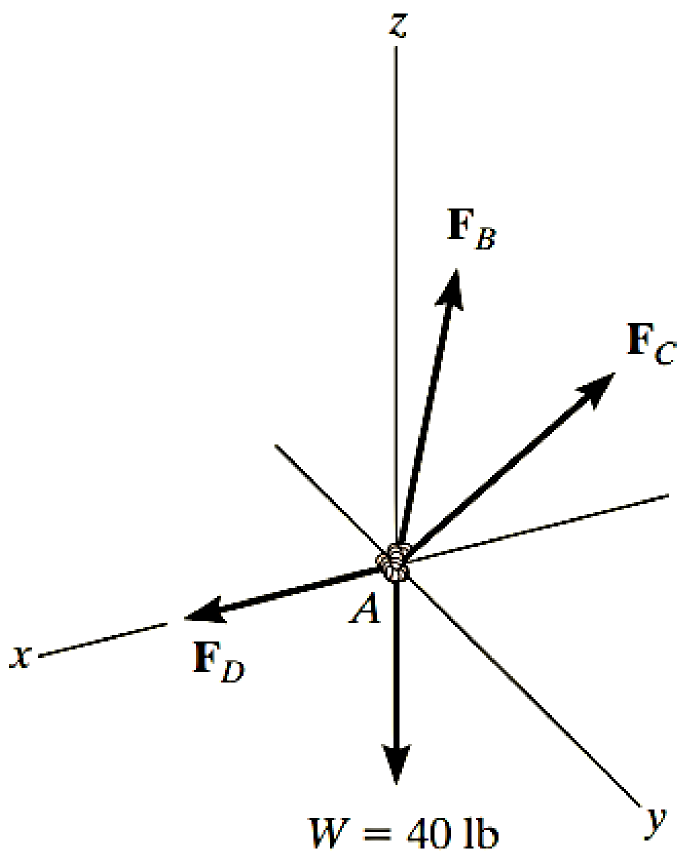


EXEMPLO 3

CORNÉLIO PROCÓPIO

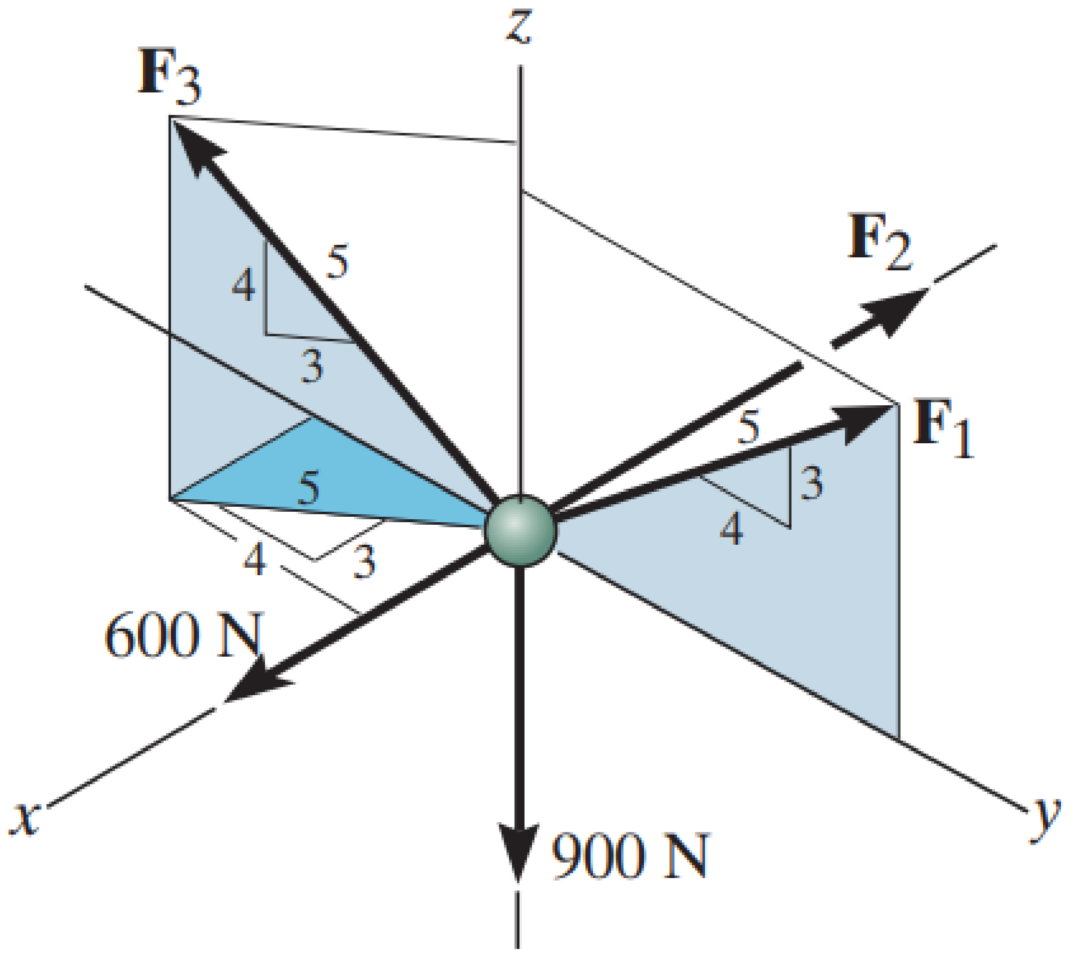
Determine as forças em cada cabo utilizado para suspender o caixote de peso W=40lb da figura abaixo.





EXEMPLO 4

Determine as intensidades das forças na figura abaixo de tal modo que a partícula esteja em equilíbrio.

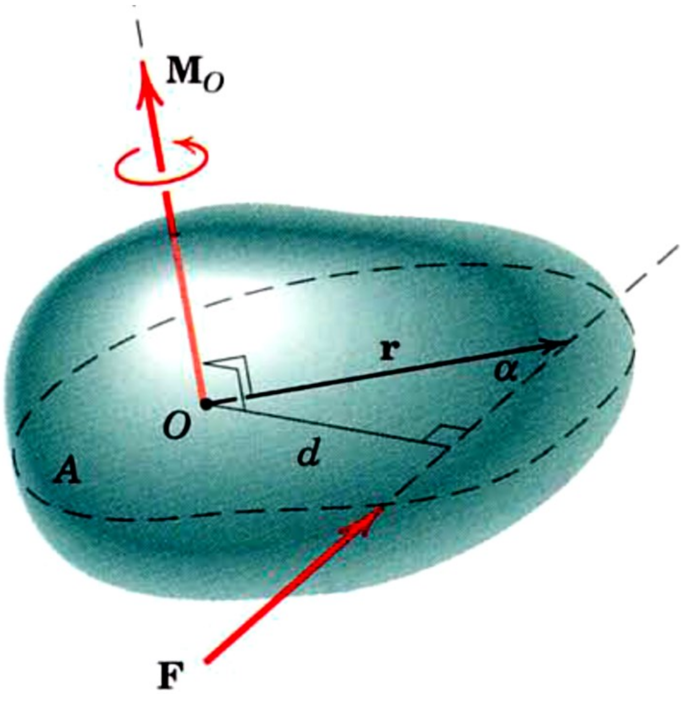


MOMENTO DE FORÇAS TRIDIMENSIONAIS

UTFPR CORNÉLIO PROCÓPIO

Momento

- Em três dimensões a determinação da distancia perpendicular entre um ponto ou eixo e a linha de ação da força pode ser um calculo tedioso, por isso o produto vetorial se torna vantajoso:



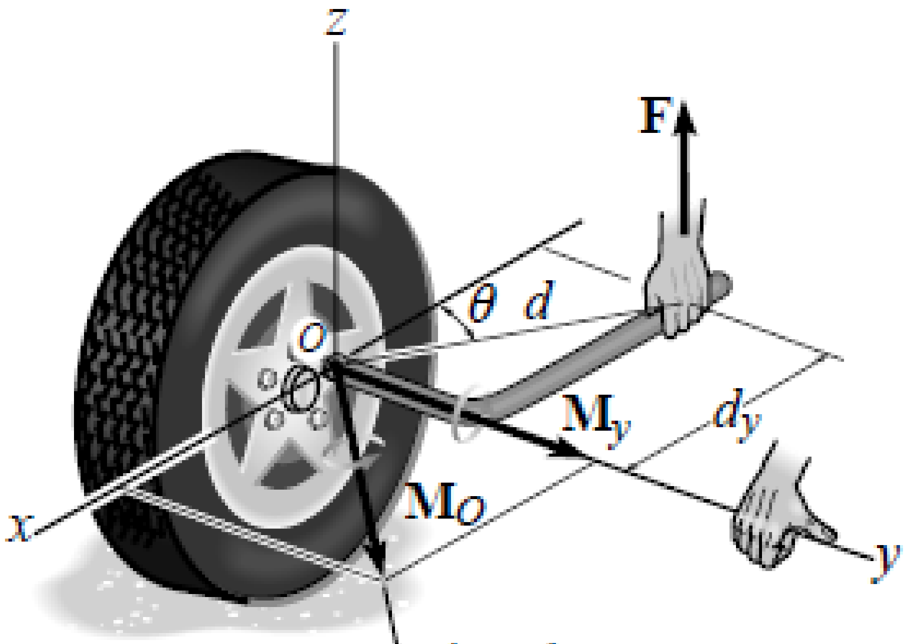
$$\vec{M}_O = \vec{r} \, x \, \vec{F}$$

$$\vec{M}_0 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

MOMENTO DE FORÇAS TRIDIMENSIONAIS

Momento em um eixo específico

- Pode ser obtido a partir de um produto escalar triplo:

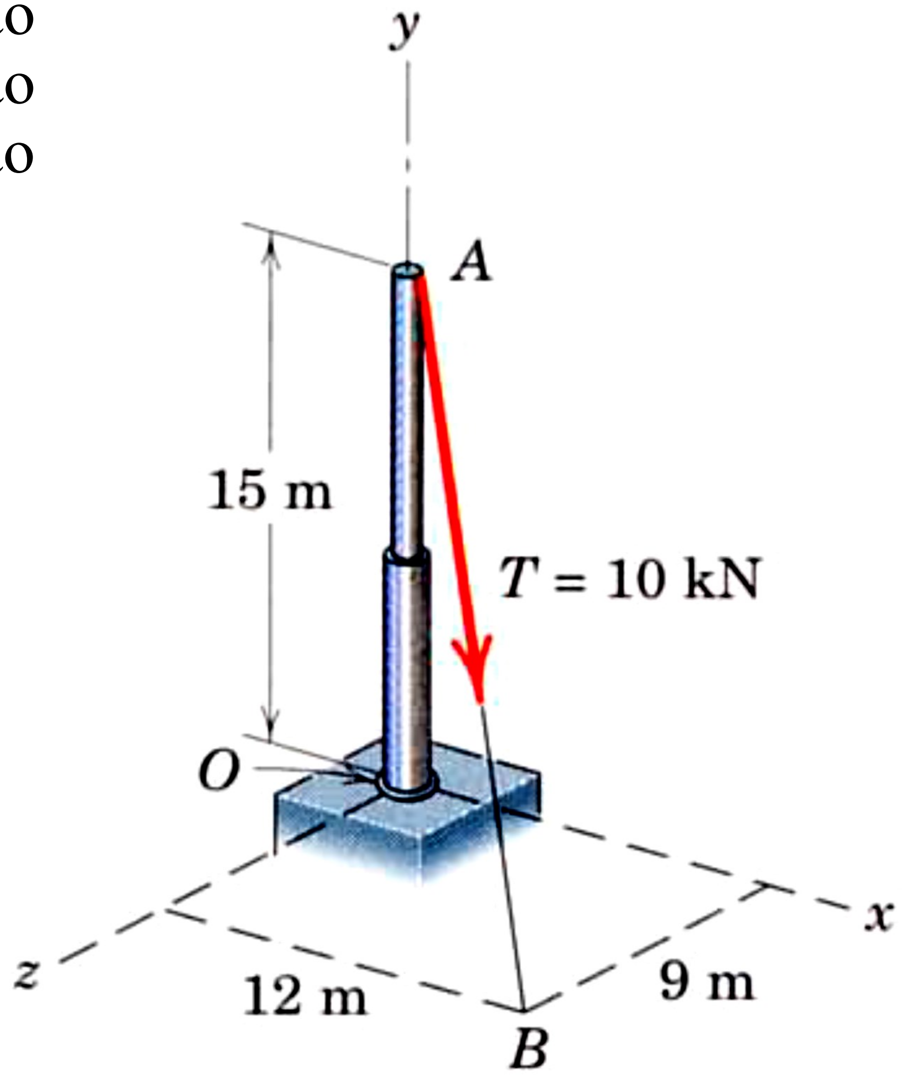


$$M_O = \vec{\boldsymbol{u}}\,.\,(\vec{\boldsymbol{r}}\;\boldsymbol{x}\;\vec{\boldsymbol{F}})$$

$$M_0 = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

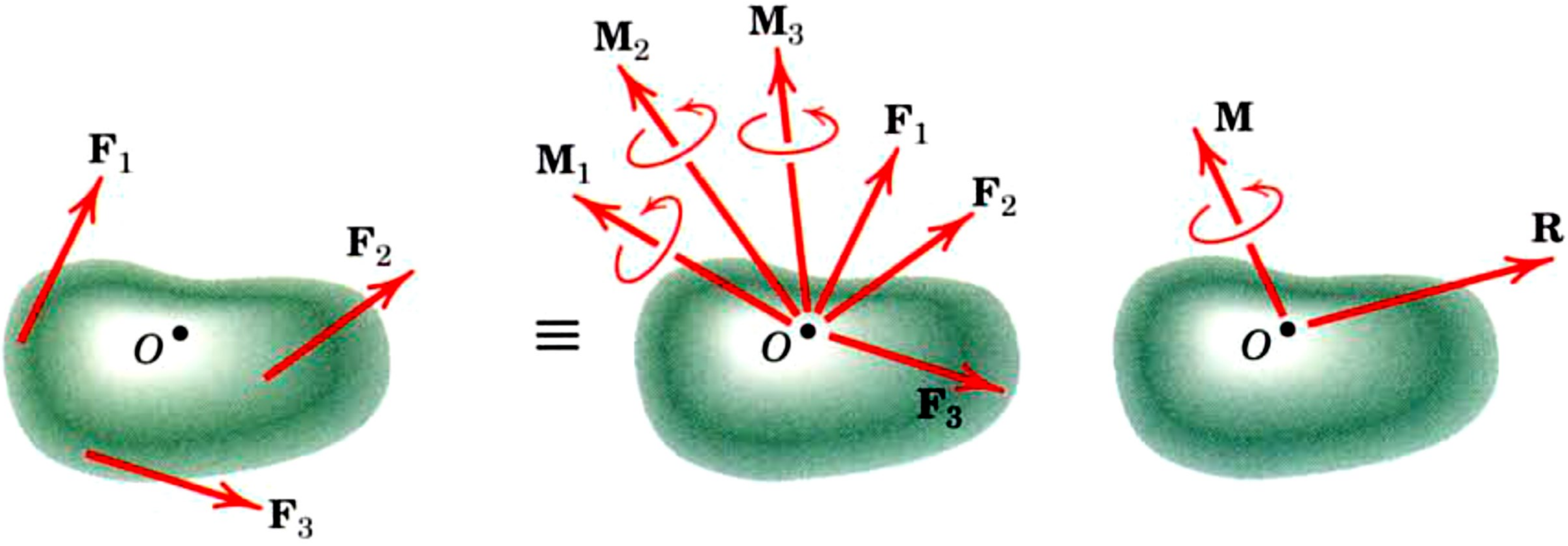
EXEMPLO 3

Uma força de tração **T** de módulo 10 [kN] é aplicada ao cabo preso no topo do mastro rígido, em A, e preso ao chão em B. Determine o momento M_z de **T** em relação ao eixo z que passa pela base O.



RESULTANTE DE FORÇAS TRIDIMENSIONAIS

- Método Algébrico



RESULTANTE DE FORÇAS TRIDIMENSIONAIS

UTFPR CORNÉLIO PROCÓPIO

Método Algébrico

1º - Escolha um ponto de referência conveniente e mova todas as forças para esse ponto;

2º - Some todas as forças e todos os momentos em O para obter a resultante **R** e o momento resultante **M**;

3º - Ache a linha de ação de **R** forçando **R** a ter o mesmo momento resultante em relação a O.

$$\vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{F}}_1 + \vec{\boldsymbol{F}}_2 + \vec{\boldsymbol{F}}_3 + \cdots = \sum \vec{\boldsymbol{F}}$$

$$R_x = \sum F_x \quad R_y = \sum F_y \quad R_z = \sum F_z$$

$$R = \sqrt{{R_x}^2 + {R_y}^2 + {R_z}^2}$$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{M}_O} = \overrightarrow{\boldsymbol{F}_1}\, x\, \overrightarrow{\boldsymbol{r}_1} + \overrightarrow{\boldsymbol{F}_2}\, x\, \overrightarrow{\boldsymbol{r}_2} + \overrightarrow{\boldsymbol{F}_3}\, x\, \overrightarrow{\boldsymbol{r}_3} + \cdots = \sum (\vec{\boldsymbol{F}}\, x\, \vec{\boldsymbol{r}})$$

$$M_x = F_x \,.\, d_x \qquad M_y = F_y \,.\, d_y \qquad M_z = F_z \,.\, d_z$$

$$M_O = \sqrt{{M_x}^2 + {M_y}^2 + {M_z}^2}$$

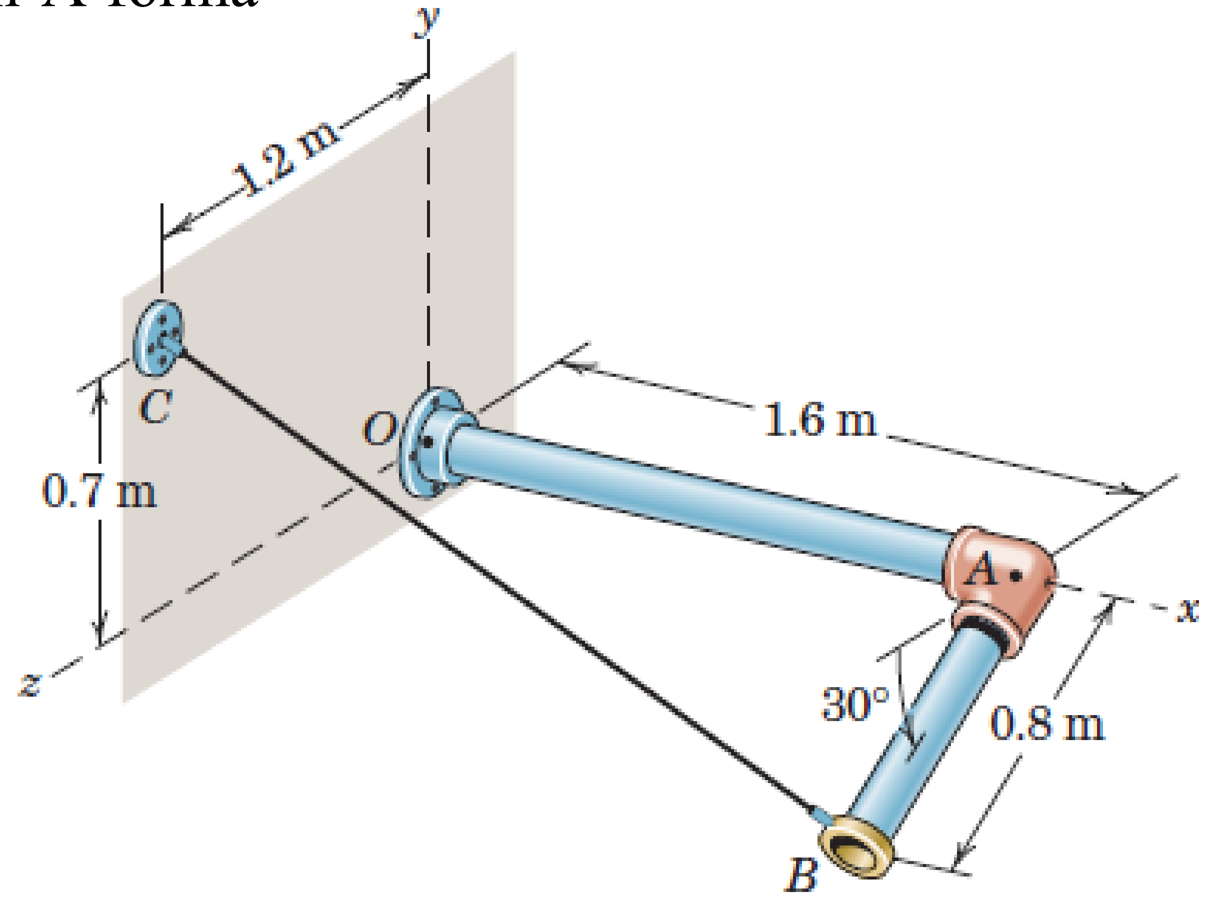
EXERCÍCIOS E ATIVIDADES

Orientação para realização das Atividades:

- Realizar as atividade a mão livre;
- Realizar diagramas e desenhos para compreensão;
- Realizar todas as contas de forma detalhada;
- Colocar as repostas principais a caneta;
- Entregar as atividades e resolução dos exercícios em forma digital no sala virtual da disciplina.

EXERCÍCIO 1

O cabo BC carrega uma tensão de 750 N. Escreva isto tensão como uma força T agindo no ponto B em termos de os vetores unitários i, j e k. O cotovelo em A forma um ângulo certo.

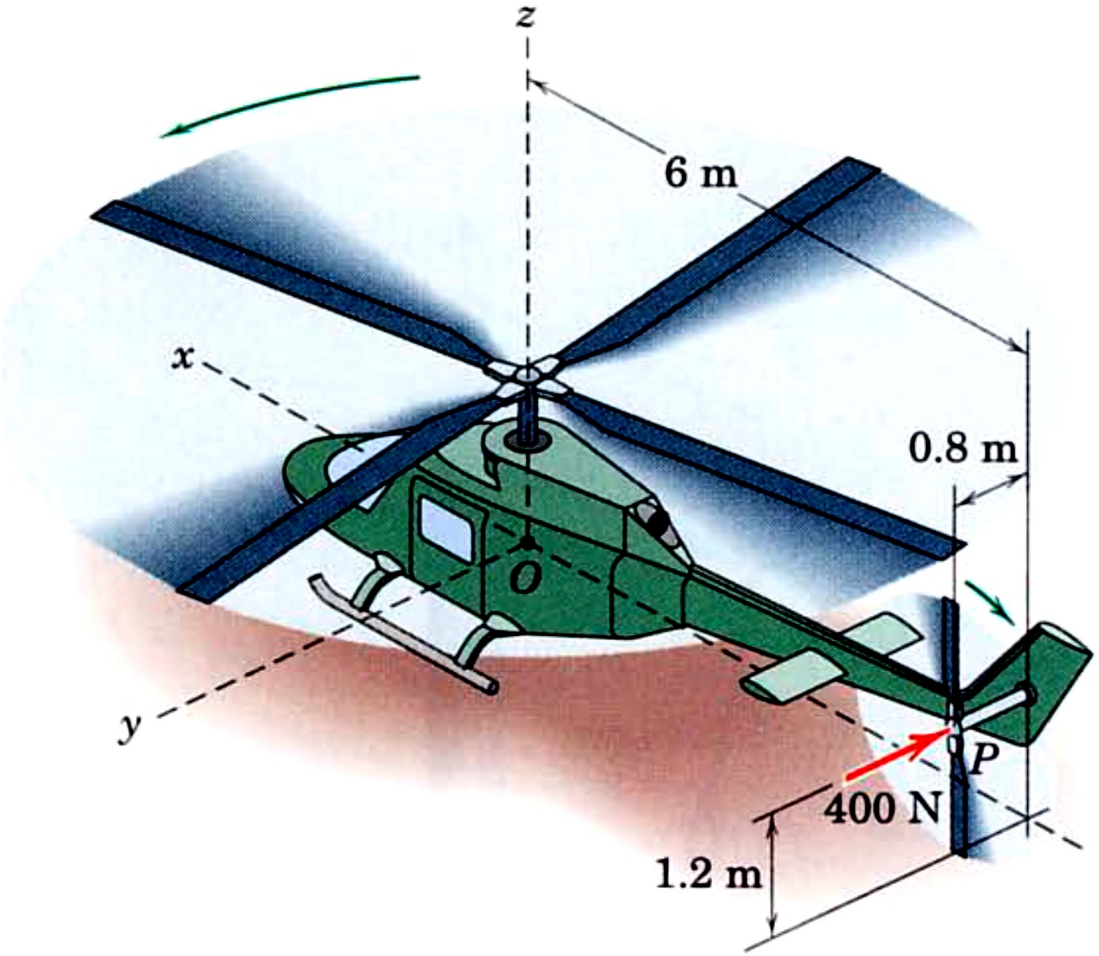


Respostas:

T = - 598**i +** 411**j** + 189.5**k** N

EXERCÍCIO 2

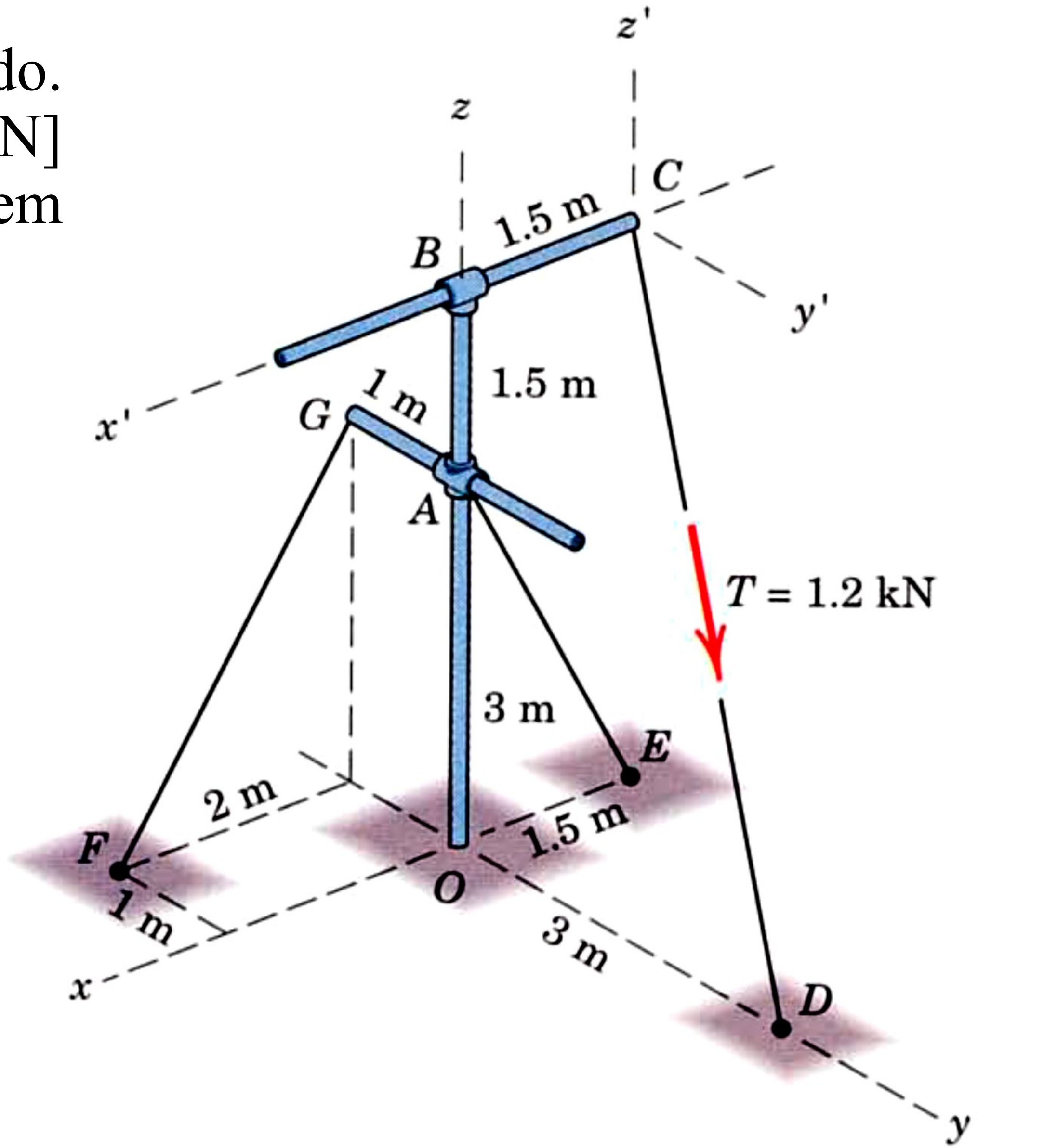
Durante um teste no solo, uma força aerodinâmica de 400 [N] é aplicada ao rotor da cauda em P, como mostrado. Determine o momento dessa força em relação ao ponto O na fuselagem.



Respostas:
$\mathbf{M}_O = +480\mathbf{i} + 2400\mathbf{k}$ N*m

EXERCÍCIO 3

O poste rígido com barras cruzadas é mostrado. Determine o momento da força de tração de 1,2 [kN] de forma vetorial a) em relação ao ponto O e; b) em relação ao eixo z do poste.



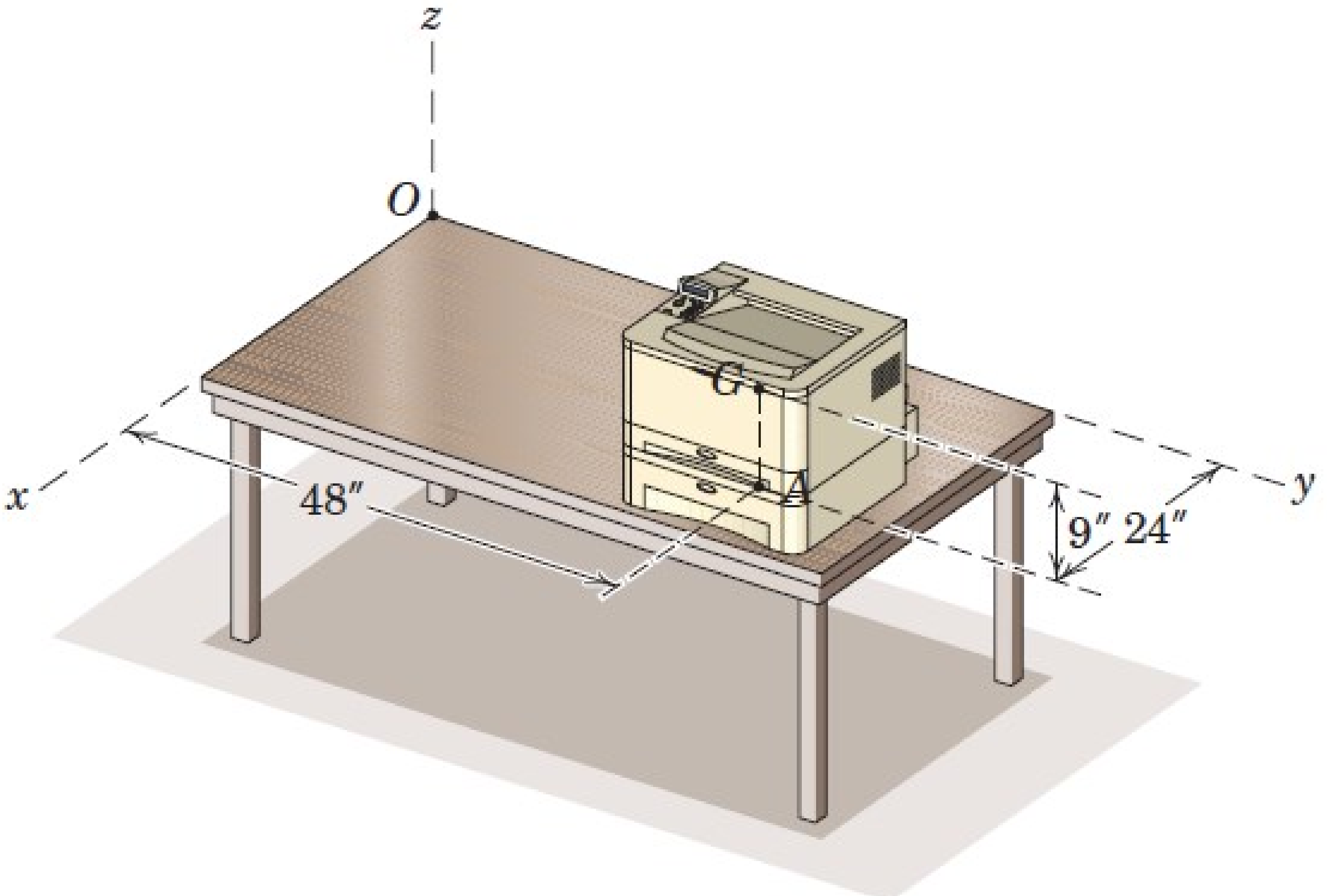
Respostas:

$\mathbf{M}_O$ = -2.89**i** - 0.962**k** kN*m

Mz = -0.962**k** kN*m

EXERCÍCIO 4

O peso da impressora é de 80 lb com centro de gravidade no ponto G. Determine o momento de este peso sobre o ponto O na mesa horizontal principal. Encontre a magnitude de MO.



Respostas:

$\mathbf{M}_O$ = -320**i** +160**j** lb-ft,

M_O = 358 lb-ft