



UNIVERSITAT DE
BARCELONA

Facultat de Matemàtiques
i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

Aproximació del moviment Brownià

Autor: Pau López Gil-Pérez

Director: David Márquez Carreras

Realitzat a: Facultat de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 26 d'octubre de 2025

Índex

Introducció	i
1 El moviment brownià	1
1.1 Definició i propietats bàsiques	1
1.2 Variants del moviment brownià	1
2 Convergència cap al moviment Brownià	2
2.1 Modes de convergència	2
2.2 Ajustament i Teorema de Prohorov	3
2.3 El principi d'invariància de Donsker	4

Introducció

En el capítol 2, donarem les principals definicions i resultats que ens permetran estudiar la convergència de certs processos estocàstics cap al moviment Brownià. El resultat principal que desenvoluparem és l'anomenat *principi d'invariància de Donsker*, també conegut com a *teorema de Donsker* o *teorema central del límit funcional*, que estableix la convergència de certs processos estocàstics discrets cap al moviment Brownià.

Capítol 1

El moviment brownià

1.1 Definició i propietats bàsiques

1.2 Variants del moviment brownià

Capítol 2

Convergència cap al moviment Brownià

D'ara endavant, treballarem en un espai mètric (S, ρ) separable i complet, junt amb la seva σ -àlgebra de Borel \mathcal{S} , i denotarem per $\mathcal{P}(S)$ l'espai de mesures de probabilitat en (S, \mathcal{S}) . En el cas particular del moviment brownià, és útil treballar amb l'espai $S = C$ de funcions contínues definides a l'interval $[0, \infty)$ i amb valors reals, en el qual és possible definir una mètrica¹, junt amb la seva σ -àlgebra de Borel \mathcal{C} .

A més, és habitual dotar $\mathcal{P}(S)$ amb l'anomenada *topologia feble*², i metritzar-la mitjançant la *mètrica de Prokhorov*, per la qual la convergència de mesures de probabilitat és equivalent a la convergència feble que veurem a continuació³. Si més no, aquests resultats no seran necessaris per al treball que desenvoluparem.

2.1 Modes de convergència

Definició 2.1.1. Sigui $\{\mathbb{P}_n\}_n \subset \mathcal{P}(S)$ una successió de mesures de probabilitat i $\mathbb{P} \in \mathcal{P}(S)$ una altra mesura de probabilitat. Diem que $\{\mathbb{P}_n\}_n$ convergeix feblement cap a \mathbb{P} , i escrivim $\mathbb{P}_n \xrightarrow{w} \mathbb{P}$, si per a tota funció $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ contínua i acotada es compleix que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_S f(s) d\mathbb{P}_n(s) = \int_S f(s) d\mathbb{P}(s).$$

Observació 2.1.2. En particular, el límit feble \mathbb{P} és una mesura de probabilitat, ja que si prenem $f \equiv 1$ obtenim que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_S 1 d\mathbb{P}_n(s) = \int_S 1 d\mathbb{P}(s) \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_n(S) = \mathbb{P}(S) \implies \mathbb{P}(S) = 1.$$

Ara, considerem una variable aleatòria X en un espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ amb valors a (S, \mathcal{S}) . Recordem que la *lleï de X* és la mesura de probabilitat $\mathcal{L}(X) \in \mathcal{P}(S)$ definida per

$$\mathcal{L}(X)(B) := \mathbb{P}(X^{-1}(B)) = \mathbb{P}(X \in B) \quad \forall B \in \mathcal{S}.$$

¹Vegeu Karatzas i Shreve 1991 - pàg 60.

²Vegeu Dudley 2002 - pàg 194.

³Vegeu Billingsley 1999 - pàg 72 o Dudley 2002 - cap. 11.3

Definició 2.1.3. Sigui $\{X_n\}_n$ una successió de variables aleatòries en un espai amb valors a (S, \mathcal{S}) . Sigui X una altra variable aleatòria amb valors a (S, \mathcal{S}) . Diem que $\{X_n\}_n$ convergeix en llei cap X , i escrivim $X_n \xrightarrow{f} X$, si les lleis de les variables aleatòries X_n convergeixen feblement cap a la llei de X . És a dir, si

$$\mathcal{L}(X_n) \xrightarrow{w} \mathcal{L}(X).$$

Observació 2.1.4. Aquesta condició és equivalent a demanar que per a tota funció $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ contínua i acotada es compleixi que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[f(X_n)] = \mathbb{E}[f(X)],$$

ja que mitjançant un canvi de variable tenim que

$$\mathbb{E}[f(X_n)] = \int_{\Omega_n} f(X_n(\omega)) d\mathbb{P}_n(\omega) = \int_S f(s) d\mathbb{P}_n X_n^{-1}(s),$$

i de manera anàloga,

$$\mathbb{E}[f(X)] = \int_{\Omega} f(X(\omega)) d\mathbb{P}(\omega) = \int_S f(s) d\mathbb{P} X^{-1}(s).$$

Definició 2.1.5. Sigui $\{X_n\}_n$ una successió de variables aleatòries en un mateix espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ amb valors a (S, \mathcal{S}) . Sigui X una variable aleatòria en el mateix espai de probabilitat amb valors a (S, \mathcal{S}) . Diem que $\{X_n\}_n$ convergeix en probabilitat cap a X , i escrivим $X_n \xrightarrow{P} X$, si per a tot $\varepsilon > 0$ es compleix que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\rho(X_n, X) > \varepsilon) = 0.$$

Com a cas particular, diem que $\{X_n\}_n$ convergeix en probabilitat cap a $s \in S$, i escrivим $X_n \xrightarrow{P} s$, si $\{X_n\}_n$ convergeix en probabilitat cap a la variable aleatòria constant $X \equiv s$. És a dir, si per a tot $\varepsilon > 0$ es compleix que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\rho(X_n, s) > \varepsilon) = 0.$$

2.2 Ajustament i Teorema de Prohorov

Definició 2.2.1. Diem que una família $\Pi \subset \mathcal{P}(S)$ de mesures de probabilitat és relativament compacte si i només si tota successió d'elements de Π admet una subsuccessió feblement convergent. És a dir, si donada $\{\mathbb{P}_n\}_n \subset \Pi$, existeixen una subsuccessió $\{\mathbb{P}_{n_k}\}_k \subset \{\mathbb{P}_n\}_n$ i una mesura de probabilitat $\mathbb{P} \in \mathcal{P}(S)$ tals que $\mathbb{P}_{n_k} \xrightarrow{w} \mathbb{P}$. D'igual manera, diem que una successió de variables aleatòries $\{X_n\}_n$ és relativament compacta si la família de les seves lleis $\{\mathcal{L}(X_n)\}_n$ ho és.

Proposició 2.2.2. Si una successió $\{\mathbb{P}_n\}_n \subset \mathcal{P}(S)$ de mesures de probabilitat convergeix feblement cap a una mesura de probabilitat \mathbb{P} , aleshores és relativament compacte.

Prova. Sigui $\{\mathbb{P}_{n_k}\}_k \subset \{\mathbb{P}_n\}_n$ una subsuccessió qualsevol. Aleshores, o bé $\mathbb{P}_{n_k} \xrightarrow{w} \mathbb{P}$, o bé existeix un $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mathbb{P}_{n_k} = \mathbb{P}_{n_{k_0}}$ per a tot $k > k_0$, i per tant $\mathbb{P}_{n_k} \xrightarrow{w} \mathbb{P}_{n_{k_0}}$.

□

Corol·lari 2.2.3. Si una successió de variables aleatòries $\{X_n\}_n$ convergeix en llei cap a una variable aleatòria X , aleshores és relativament compacte.

Prova. Per definició, tenim que $\mathcal{L}(X_n) \xrightarrow{w} \mathcal{L}(X)$. Per la Proposició 2.2.2, aleshores $\{\mathcal{L}(X_n)\}_n$ és relativament compacte. \square

Definició 2.2.4. Diem que una família $\Pi \subset \mathcal{P}(S)$ de mesures de probabilitat és ajustada si $\forall \varepsilon > 0$ existeix un conjunt compacte $K_\varepsilon \subset S$ tal que $\mathbb{P}(K_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon$, $\forall \mathbb{P} \in \Pi$. D'igual manera, diem que una successió de variables aleatòries $\{X_n\}_n$ amb valors en S és ajustada si la família de les seves lleis $\{\mathcal{L}(X_n)\}_n$ és ajustada.

Teorema 2.2.5. (Teorema de Prohorov) Una família $\Pi \subset \mathcal{P}(S)$ de mesures de probabilitat és relativament compacte si i només si és ajustada.

Prova. M'agradaria comentar si podem evitar aquesta demostració. \square

2.3 El principi d'invariància de Donsker

Sigui $\{\xi_n\}_n$ una seqüència de variables aleatòries independents i idènticament distribuïdes amb esperança 0 i variància σ^2 , $0 < \sigma < \infty$. Considerem la successió de sumes parcials $S_0 = 0$ i $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$ per a $n \geq 1$. Per a cada $n \in \mathbb{N}$, considerem el procés de sumes parcials

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}S_{[nt]}, \quad t \in [0, \infty],$$

i la corresponent interpolació lineal d'aquest procés,

$$X_t^{(n)} = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}(S_{[nt]} + (nt - [nt])\xi_{[nt]+1}), \quad t \in [0, \infty]. \quad (2.1)$$

En aquest capítol, veurem que la successió de processos $\{X^{(n)}\}_n$ convergeix en llei cap al moviment Brownià estàndard B .

Lema 2.3.1. Siguin $\{X^{(n)}\}_n$, $\{Y^{(n)}\}_n$ i X variables aleatòries amb valors a (S, ρ) , tals que per a tot $n \geq 1$, $X^{(n)}$ i $Y^{(n)}$ estan definides en el mateix espai de probabilitats. Suposem que $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ i que $\rho(X^n, Y^n) \xrightarrow{P} 0$. Aleshores, $Y^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$. Karatzas i Shreve 1991, pàg 120

Prova. Siguin $\{(\Omega_n, \mathcal{F}_n, \mathbb{P}_n)\}_n$ els espais de probabilitat on estan definides les variables aleatòries $X^{(n)}$ i $Y^{(n)}$. Siguin $\{(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})\}_n$ un altre espai de probabilitat on està definida la variable aleatòria X . Siguin $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ una funció contínua i acotada. Per la observació 2.1.4, és suficient demostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_n[f(X^{(n)}) - f(Y^{(n)})] = 0.$$

Sigui $M = \sup_{s \in S} |f(s)| < \infty$. Per el corol·lari 2.2.3, com $X^{(n)} \xrightarrow{\mathcal{L}} X$, aleshores $\{X^{(n)}\}_n$ és relativament compacta. Per el teorema de Prohorov, aleshores $\{X^{(n)}\}_n$ és ajustada. Per tant, per a tot $\varepsilon > 0$, existeix un conjunt compacte $K_\varepsilon \subset S$ tal que

$$\mathbb{P}_n(X^{(n)} \in K_\varepsilon) \geq 1 - \frac{\varepsilon}{6M}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Com f és continua, existeix $0 < \delta < 1$ tal que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/3$ per a qualssevol $x, y \in K_\varepsilon$ tals que $\rho(x, y) < \delta$. Per altra banda, per hipòtesi $\rho(X^n, Y^n) \xrightarrow{P} 0$. Per tant, existeix $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mathbb{P}_n(\rho(X^{(n)}, Y^{(n)}) > \delta) < \frac{\varepsilon}{6M}, \quad \forall n \geq n_0.$$

Tot plegat, per a tot $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega_n} f(X^{(n)}) - f(Y^{(n)}) d\mathbb{P}_n \right| &\leq \frac{\varepsilon}{3} \mathbb{P}_n \left(X^{(n)} \in K, \rho(X^{(n)}, Y^{(n)}) < \delta \right) \\ &\quad + 2M \mathbb{P}_n \left(X^{(n)} \notin K \right) \\ &\quad + 2M \mathbb{P}_n \left(\rho(X^{(n)}, Y^{(n)}) > \delta \right) \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Lema 2.3.2. Sigui $\{X^{(n)}\}_n$ i X variables aleatòries amb valors a (S, \mathcal{S}) . Sigui (S', \mathcal{S}') un altre espai mètric i sigui $\varphi : S \rightarrow S'$ una funció contínua. Si $X^{(n)} \xrightarrow{\mathcal{L}} X$, aleshores $\varphi(X^{(n)}) \xrightarrow{\mathcal{L}} \varphi(X)$. Billingsley 1999, pàg 20

Prova. Sigui $f : S' \rightarrow \mathbb{R}$ una funció contínua i acotada. Aleshores, $f \circ \varphi : S \rightarrow \mathbb{R}$ és també contínua i acotada. Per l'observació 2.1.4, com $X^{(n)} \xrightarrow{\mathcal{L}} X$, aleshores

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[f(\varphi(X^{(n)})]] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[(f \circ \varphi)(X^{(n)})] = \mathbb{E}[(f \circ \varphi)(X)] = \mathbb{E}[f(\varphi(X))].$$

Novament per l'observació 2.1.4, això equival a $\varphi(X^{(n)}) \xrightarrow{\mathcal{L}} \varphi(X)$.

□

Teorema 2.3.3. Sigui $\{X^{(n)}\}_n$ la successió de processos definits a l'equació (2.1). Sigui $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_d < \infty$. Aleshores,

$$(X_{t_1}^{(n)}, X_{t_2}^{(n)}, \dots, X_{t_d}^{(n)}) \xrightarrow{\mathcal{L}} (B_{t_1}, B_{t_2}, \dots, B_{t_d}) \quad \text{quan } n \rightarrow \infty,$$

on $\{B_t, \mathcal{F}_t^B; t \geq 0\}$ és un moviment Brownià estàndard.

Prova. Karatzas i Shreve 1991, teorema 4.15, pàg 67

□

Teorema 2.3.4. Sigui X un procés continu i sigui $\{X^{(n)}\}_n$ una seqüència ajustada de processos contínus tal que per a qualssevol $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_d \leq \infty$,

$$(X_{t_1}^{(n)}, \dots, X_{t_d}^{(n)}) \xrightarrow{\mathcal{L}} (X_{t_1}, \dots, X_{t_d}).$$

Aleshores, $\{X^{(n)}\}_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

Prova. Karatzas i Shreve 1991, teorema 4.15, pàg 65

□

Teorema 2.3.5. (Teorema de Donsker) Sigui $\{X^{(n)}\}_n$ la successió de processos definits a l'equació (2.1). Aleshores, $X^{(n)} \xrightarrow{\mathcal{L}} B$, on $\{B_t, \mathcal{F}_t^B; t \geq 0\}$ és un moviment Brownià estàndard.

Prova. És conseqüència dels teoremes 2.3.3 i 2.3.4. A més, cal demostrar l'ajustament de la successió $\{X^{(n)}\}_n$, que es fa servir en el teorema 2.3.4. El mètode per a demostrar l'ajustament és diferent a Karatzas i Shreve 1991 i Billingsley 1999. M'agradaria comentar-ho més endavant.

□

Bibliografia

- Billingsley, Patrick (1999). *Convergence of Probability Measures*. 2a ed. New York: John Wiley & Sons.
- Dudley, R. M. (2002). *Real Analysis and Probability*. 2a ed. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press.
- Karatzas, Ioannis i Steven E. Shreve (1991). *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. 2a ed. Vol. 113. Graduate Texts in Mathematics. New York i Berlin: Springer.