Universitat de Barcelona
Facultat de Matemàtiques i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

Aproximació del moviment Brownià

Autor: Pau López Gil-Pérez

Director: David Màrquez Carreras
Realitzat a: Departament de Probabilitat i Estadística

Barcelona, 15 d'octubre de 2025

Índex

Introducció

Capítol 1

El moviment brownià

1.1 Definició i propietats bàsiques

1.2 Variants del moviment brownià

Capítol 2

Convergència cap al moviment Brownià

En aquest capítol, donarem les principals definicions i resultats que ens permetran estudiar la convergència de certs processos estocàstics cap al moviment Brownià. El resultat principal que desenvoluparem és l'anomenat *principi d'invariància de Donsker*, també conegut com a *teorema de Donsker* o *teorema central del límit funcional*, que estableix la convergència de certs processos estocàstics discrets cap al moviment Brownià.

2.1 Convergència feble i convergència en llei

A partir d'ara, treballarem en un espai mètric (S, ρ) separable i complet, junt amb la seva σ-àlgebra de Borel $\mathcal{S}$. Denotarem per $\mathcal{P}(S)$ l'espai de totes les mesures de probabilitat en $(S, \mathcal{S})$.

És habitual dotar $\mathcal{P}(S)$ amb la anomenada *topologia feble* [1], i metritzar-la mitjançant diverses mètriques. Una de les més conegudes és la *mètrica de Prokhorov*, per la qual la convergència de mesures de probabilitat és equivalent a la convergència feble que veurem a continuació [2]. Si més no, aquests resultats no seran necessaris per al treball que desenvoluparem.

Definició 2.1.1. *Sigui* $\{\mathbb{P}_n\}_n \subset \mathcal{P}(S)$ *una successió de mesures de probabilitat i* $\mathbb{P} \in \mathcal{P}(S)$ *una altra mesura de probabilitat. Diem que* $\{\mathbb{P}_n\}_n$ convergeix feblement *cap a* $\mathbb{P}$*, i escrivim* $\mathbb{P}_n \xrightarrow{w} \mathbb{P}$*, si per a tota funció* $f : S \to \mathbb{R}$ *contínua i acotada es compleix que*

$$\lim_{n\to\infty} \int_S f(s)d\mathbb{P}_n(s) = \int_S f(s)d\mathbb{P}(s). \tag{2.1}$$

Observació 2.1.2. En particular, el límit feble $\mathbb{P}$ és una mesura de probabilitat, ja que si prenem $f \equiv 1$ obtenim que

$$\lim_{n\to\infty} \int_S 1\, d\mathbb{P}_n(s) = \int_S 1\, d\mathbb{P}(s) \implies \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_n(S) = \mathbb{P}(S) \implies \mathbb{P}(S) = 1.$$

Ara, considerem una variable aleatòria X en un espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ amb valors a $(S, \mathcal{S})$. Recordem que *la llei de X* es defineix com la mesura de probabilitat $\mathbb{P}X^{-1}$

[1] Vegeu Dudley 2002 - pàg 194.

[2] Per a més informació, vegeu Billingsley 1999 - pàg 72 o Dudley 2002 - cap. 11.3

definida per

$$\mathbb{P}X^{-1}(B) := \mathbb{P}(X^{-1}(B)) = \mathbb{P}(X \in B) \quad \forall B \in \mathcal{S}.$$

Definició 2.1.3. *Sigui $\{(\Omega_n, \mathcal{F}_n, \mathbb{P}_n)\}_n$ una successió d'espais de probabilitat, on $\mathbb{P}_n \in \mathcal{P}(S)$ $\forall n \in \mathbb{N}$, i considerem en cada un d'ells una variable aleatòria X_n amb valors a $(S, \mathcal{S})$. Sigui $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un altre espai de probabilitat, on $\mathbb{P} \in \mathcal{P}(S)$, i sigui X una variable aleatòria en aquest espai amb valors a $(S, \mathcal{S})$. Diem que la successió $\{X_n\}_n$* convergeix en llei *cap a X, i escrivim $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$, si les lleis de les variables aleatòries X_n convergeixen feblement cap a la llei de X, és a dir, si $\mathbb{P}X_n^{-1} \xrightarrow{w} \mathbb{P}X^{-1}$.*

Observació 2.1.4. Aquesta definició és equivalent a dir que per a tota funció $f : S \to \mathbb{R}$ contínua i acotada es compleixi que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[f(X_n)] = \mathbb{E}[f(X)],$$

ja que mitjançant un canvi de variable tenim que

$$\mathbb{E}[f(X_n)] = \int_{\Omega_n} f(X_n(\omega))d\mathbb{P}_n(\omega) = \int_S f(s)d\mathbb{P}X_n^{-1}(s),$$

i de manera anàloga,

$$\mathbb{E}[f(X)] = \int_{\Omega} f(X(\omega))d\mathbb{P}(\omega) = \int_S f(s)d\mathbb{P}X^{-1}(s).$$

2.2 Ajustament i Teorema de Prohorov

Definició 2.2.1. *Diem que una familia $\Pi \subset \mathcal{P}(S)$ de mesures de probabilitat és relativament compacte si i només si tota successió d'elements de Π admet una subsuccessió feblement convergent. És a dir, si donat $\{\mathbb{P}_n\}_n \subset \Pi$, existeix una subsuccessió $\{\mathbb{P}_{n_k}\}_k \subset \{\mathbb{P}_n\}_n$ i una mesura de probabilitat $\mathbb{P} \in \mathcal{P}(S)$ tals que $\mathbb{P}_{n_k} \xrightarrow{w} \mathbb{P}$.*

Definició 2.2.2. *Diem que una familia $\Pi \subset \mathcal{P}(S)$ de mesures de probabilitat és* ajustada *si per a tot $\varepsilon > 0$ existeix un conjunt compacte $K_\varepsilon \subset S$ tal que $\mathbb{P}(K_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon$ per a tota $\mathbb{P} \in \Pi$.*

El següent resultat és necessari per a demostrar el teorema de Donsker i en particular l'aproximació del moviment Brownià mitjançant processos estocàstics discrets.

Teorema 2.2.3. *(Teorema de Prohorov) Una familia $\Pi \subset \mathcal{P}(S)$ de mesures de probabilitat és relativament compacte si i només si és ajustada.*

Prova. M'agradaria comentar si podem evitar aquesta demostració. □

2.3 L'espai $C[0, \infty]$

En el cas particular del moviment brownià, és útil treballar amb l'espai $C[0, \infty)$ de funcions contínues definides a l'interval $[0, \infty)$ i amb valors reals.

Proposició 2.3.1. *La funció $\rho : C[0,\infty) \to [0,\infty)$ definida per*

$$\rho(f,g) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \max_{0\le t\le n} \left(\min\left(|f(t)-g(t)|,1\right)\right).$$

és una mètrica a $C[0,\infty)$.

Prova. *Karatzas i Shreve 1991, exercici 4.1* □

A continuació, donarem una caracterització de l'ajustament en l'espai $C[0,\infty)$. Per a fer-ho, necessitarem la noció de *mòdul de continuïtat* i el *Teorema d'Arzelà-Ascoli.*

Definició 2.3.2. *Sigui $T > 0$. El* mòdul de continuïtat *a $[0,T]$ és la funció $m^T : C[0,\infty)\times[0,\infty) \to [0,\infty)$ definida per*

$$m^T(f,\delta) := \sup_{\substack{|s-t|\le\delta \\ 0\le s,t\le T}} |f(s)-f(t)|, \quad \delta \ge 0.$$

Teorema 2.3.3. *(Teorema d'Arzelà-Ascoli) Un conjunt $A \subset C[0,\infty)$ és relativament compacte si i només si*

$$\sup_{f\in A} |f(0)| < \infty$$

i a més, per a tot $T > 0$,

$$\lim_{\delta\to 0} \sup_{f\in A} m^T(f,\delta) = 0.$$

Prova. *Karatzas i Shreve 1991, pàg 62, Billingsley 1999, pàg 81*

Teorema 2.3.4. *Una seqüència de mesures de probabilitat $\{\mathbb{P}_n\}_n \subset \mathcal{P}(C[0,\infty))$ és ajustada si i només si*

$$\lim_{\lambda\uparrow\infty} \sup_{n\ge 1} \mathbb{P}_n\left[f : |f(0)| \ge \lambda\right] = 0,$$

i per a tot $T > 0$, $\epsilon > 0$,

$$\lim_{\delta\downarrow 0} \sup_{n\ge 1} \mathbb{P}_n\left[f : m^T(f,\delta) \ge \epsilon\right] = 0.$$

Prova. *Karatzas i Shreve 1991, pàg 63* □

2.4 El principi d'invariància de Donsker

Sigui $\{\xi_n\}_n$ una seqüència de variables aleatòries independents i idènticament distribuïdes amb esperança 0 i variància σ^2, $0 < \sigma < \infty$. Considerem la successió de sumes parcials $S_0 = 0$ i $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$ per a $n \ge 1$. Per a cada $n \in \mathbb{N}$, considerem el procés de sumes parcials

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} S_{\lfloor nt\rfloor}, \quad t \in [0,\infty],$$

i la corresponent interpolació lineal d'aquest procés,

$$X_t^{(n)} = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \left(S_{\lfloor nt\rfloor} + (nt - \lfloor nt\rfloor)\xi_{\lfloor nt\rfloor+1}\right), \quad t \in [0,\infty]. \tag{2.2}$$

En aquest capítol, demostrarem que la successió de processos $\{X^{(n)}\}_n$ convergeix en llei cap al moviment Brownià estàndard B.

Lema 2.4.1. *Siguin* $\{X^n\}_n$, $\{Y^n\}_n$ *i* X *variables aleatòries definides en un mateix espai de probabilitat* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *i amb valors a* $\mathcal{S}$. *Suposem que* $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ *i que* $\rho(X^n, Y^n) \xrightarrow{P} 0$. *Aleshores,* $Y^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

Prova. *Karatzas i Shreve 1991, problema 4.16* □

Lema 2.4.2. *Siguin* $\{X^n\}_n$ *i* X *variables aleatòries amb valors a un espai mètric* (S_1, ρ_1). *Sigui* (S_2, ρ_2) *un altre espai mètric i sigui* $f : S_1 \to S_2$ *una funció contínua. Si* $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$, *aleshores* $f(X^n) \xrightarrow{\mathcal{L}} f(X)$.

Prova. *Karatzas i Shreve 1991, problema 4.5* □

Teorema 2.4.3. *Sigui* $\left\{X^{(n)}\right\}_n$ *la successió de processos definits a l'equació* (2.2). *Siguin* $0 \le t_1 < t_2 < \ldots < t_d < \infty$. *Aleshores,*

$$\left(X^{(n)}_{t_1}, X^{(n)}_{t_2}, \ldots, X^{(n)}_{t_d}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} (B_{t_1}, B_{t_2}, \ldots, B_{t_d}) \quad \text{quan } n \to \infty,$$

on $\left\{B_t, \mathcal{F}^B_t; t \ge 0\right\}$ *és un moviment Brownià estàndard.*

Prova. *Karatzas i Shreve 1991, teorema 4.15, pàg 67* □

Teorema 2.4.4. *Sigui* X *un procés continu i sigui* $\left\{X^{(n)}\right\}_n$ *una seqüència ajustada de processos continus tal que per a qualssevol* $0 \le t_1 \le ... \le t_d \le \infty$,

$$\left(X^{(n)}_{t_1}, ..., X^{(n)}_{t_d}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} (X_{t_1}, ..., X_{t_d}).$$

Aleshores, $\left\{X^{(n)}\right\}_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

Prova. *Karatzas i Shreve 1991, teorema 4.15, pàg 65* □

Teorema 2.4.5. *(Teorema de Donsker) Sigui* $\left\{X^{(n)}\right\}_n$ *la successió de processos definits a l'equació* (2.2). *Aleshores,* $X^{(n)} \xrightarrow{\mathcal{L}} B$, *on* $\left\{B_t, \mathcal{F}^B_t; t \ge 0\right\}$ *és un moviment Brownià estàndard.*

Prova. *És conseqüència dels teoremes 2.4.3 i 2.4.4. A més, cal demostrar l'ajustament de la successió* $\{X^{(n)}\}_n$, *que es fa servir en el teorema 2.4.4. El mètode per a demostrar l'ajustament és diferent a Karatzas i Shreve 1991 i Billingsley 1999. M'agradaria comentar-ho més endavant.* □

Bibliografia

Billingsley, Patrick (1999). *Convergence of Probability Measures*. 2a ed. New York: John Wiley & Sons.

Dudley, R. M. (2002). *Real Analysis and Probability*. 2a ed. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press.

Karatzas, Ioannis i Steven E. Shreve (1991). *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. 2a ed. Vol. 113. Graduate Texts in Mathematics. New York i Berlin: Springer.