



UNIVERSITAT DE  
BARCELONA

Facultat de Matemàtiques  
i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

---

# Aproximació del moviment Brownià

---

Autor: Pau López Gil-Pérez

Director: David Màrquez Carreras

Realitzat a: Facultat de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 26 d'octubre de 2025

# Índex

<b>Introducció</b>	<b>i</b>
<b>1 El moviment brownià</b>	<b>1</b>
1.1 Definició i propietats bàsiques . . . . .	1
1.2 Variants del moviment brownià . . . . .	1
<b>2 Convergència cap al moviment Brownià</b>	<b>2</b>
2.1 Modes de convergència . . . . .	2
2.2 Ajustament i Teorema de Prohorov . . . . .	3
2.3 El principi d'invariància de Donsker . . . . .	4

## Introducció

En el capítol 2, donarem les principals definicions i resultats que ens permetran estudiar la convergència de certs processos estocàstics cap al moviment Brownià. El resultat principal que desenvoluparem és l'anomenat *principi d'invariància de Donsker*, també conegut com a *teorema de Donsker* o *teorema central del límit funcional*, que estableix la convergència de certs processos estocàstics discrets cap al moviment Brownià.

# Capítol 1

## El moviment brownià

### 1.1 Definició i propietats bàsiques

### 1.2 Variants del moviment brownià

## Capítol 2

# Convergència cap al moviment Brownià

D'ara endavant, treballarem en un espai mètric  $(S, \rho)$  separable i complet, junt amb la seva  $\sigma$ -àlgebra de Borel  $\mathcal{S}$ , i denotarem per  $\mathcal{P}(S)$  l'espai de mesures de probabilitat en  $(S, \mathcal{S})$ . En el cas particular del moviment brownià, és útil treballar amb l'espai  $S = C$  de funcions contínues definides a l'interval  $[0, \infty)$  i amb valors reals, junt amb la seva  $\sigma$ -àlgebra de Borel  $\mathcal{C}$ , en el qual és possible definir una mètrica <sup>1</sup>.

A més, és habitual dotar  $\mathcal{P}(S)$  amb l'anomenada *topologia feble* <sup>2</sup>, i metritzar-la mitjançant la *mètrica de Prokhorov*, per la qual la convergència de mesures de probabilitat és equivalent a la convergència feble que veurem a continuació <sup>3</sup>. Si més no, aquests resultats no seran necessaris per al treball que desenvoluparem.

### 2.1 Modes de convergència

**Definició 2.1.1.** *Sigui  $\{\mathbb{P}_n\}_n \subset \mathcal{P}(S)$  una successió de mesures de probabilitat i  $\mathbb{P} \in \mathcal{P}(S)$  una altra mesura de probabilitat. Diem que  $\{\mathbb{P}_n\}_n$  convergeix feblement cap a  $\mathbb{P}$ , i escrivim  $\mathbb{P}_n \xrightarrow{w} \mathbb{P}$ , si per a tota funció  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  contínua i acotada es compleix que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_S f(s) d\mathbb{P}_n(s) = \int_S f(s) d\mathbb{P}(s).$$

**Observació 2.1.2.** En particular, el límit feble  $\mathbb{P}$  és una mesura de probabilitat, ja que si prenem  $f \equiv 1$  obtenim que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_S 1 d\mathbb{P}_n(s) = \int_S 1 d\mathbb{P}(s) \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_n(S) = \mathbb{P}(S) \implies \mathbb{P}(S) = 1.$$

Ara, considerem una variable aleatòria  $X$  en un espai de probabilitat  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  amb valors a  $(S, \mathcal{S})$ . Recordem que la *lleï de  $X$*  és la mesura de probabilitat  $\mathcal{L}(X) \in \mathcal{P}(S)$  definida per

$$\mathcal{L}(X)(B) := \mathbb{P}(X^{-1}(B)) = \mathbb{P}(X \in B) \quad \forall B \in \mathcal{S}.$$

<sup>1</sup>Vegeu Karatzas i Shreve 1991 - pàg 60.

<sup>2</sup>Vegeu Dudley 2002 - pàg 194 o Bardina 2015 - pàg 29.

<sup>3</sup>Vegeu Billingsley 1999 - pàg 72 o Dudley 2002 - cap. 11.3

**Definició 2.1.3.** Sigui  $\{X_n\}_n$  una successió de variables aleatòries en un espai amb valors a  $(S, \mathcal{S})$ . Sigui  $X$  una altra variable aleatòria amb valors a  $(S, \mathcal{S})$ . Diem que  $\{X_n\}_n$  convergeix en llei cap a  $X$ , i escrivim  $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ , si les lleis de les variables aleatòries  $X_n$  convergeixen feblement cap a la llei de  $X$ . És a dir, si

$$\mathcal{L}(X_n) \xrightarrow{w} \mathcal{L}(X).$$

**Observació 2.1.4.** Aquesta condició és equivalent a demanar que per a tota funció  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  contínua i acotada es compleixi que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[f(X_n)] = \mathbb{E}[f(X)],$$

ja que mitjançant un canvi de variable tenim que

$$\mathbb{E}[f(X_n)] = \int_{\Omega_n} f(X_n(\omega)) d\mathbb{P}_n(\omega) = \int_S f(s) d\mathbb{P}_n X_n^{-1}(s),$$

i de manera anàloga,

$$\mathbb{E}[f(X)] = \int_{\Omega} f(X(\omega)) d\mathbb{P}(\omega) = \int_S f(s) d\mathbb{P} X^{-1}(s).$$

**Definició 2.1.5.** Sigui  $\{X_n\}_n$  una successió de variables aleatòries en un mateix espai de probabilitat  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  amb valors a  $(S, \mathcal{S})$ . Sigui  $X$  una variable aleatòria en el mateix espai de probabilitat amb valors a  $(S, \mathcal{S})$ . Diem que  $\{X_n\}_n$  convergeix en probabilitat cap a  $X$ , i escrivim  $X_n \xrightarrow{P} X$ , si per a tot  $\varepsilon > 0$  es compleix que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\rho(X_n, X) > \varepsilon) = 0.$$

Com a cas particular, diem que  $\{X_n\}_n$  convergeix en probabilitat cap a  $s \in S$ , i escrivim  $X_n \xrightarrow{P} s$ , si  $\{X_n\}_n$  convergeix en probabilitat cap a la variable aleatòria constant  $X \equiv s$ . És a dir, si per a tot  $\varepsilon > 0$  es compleix que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\rho(X_n, s) > \varepsilon) = 0.$$

## 2.2 Ajustament i Teorema de Prohorov

**Definició 2.2.1.** Diem que una família  $\Pi \subset \mathcal{P}(S)$  de mesures de probabilitat és relativament compacte si i només si tota successió d'elements de  $\Pi$  admet una subsuccessió feblement convergent. És a dir, si donada  $\{\mathbb{P}_n\}_n \subset \Pi$ , existeixen una subsuccessió  $\{\mathbb{P}_{n_k}\}_k \subset \{\mathbb{P}_n\}_n$  i una mesura de probabilitat  $\mathbb{P} \in \mathcal{P}(S)$  tals que  $\mathbb{P}_{n_k} \xrightarrow{w} \mathbb{P}$ . D'igual manera, diem que una successió de variables aleatòries  $\{X_n\}_n$  és relativament compacta si la família de les seves lleis  $\{\mathcal{L}(X_n)\}_n$  ho és.

**Proposició 2.2.2.** Si una successió  $\{\mathbb{P}_n\}_n \subset \mathcal{P}(S)$  de mesures de probabilitat convergeix feblement cap a una mesura de probabilitat  $\mathbb{P}$ , aleshores és relativament compacte.

*Prova.* Sigui  $\{\mathbb{P}_{n_k}\}_k \subset \{\mathbb{P}_n\}_n$  una subsuccessió qualsevol. Aleshores, o bé  $\mathbb{P}_{n_k} \xrightarrow{w} \mathbb{P}$ , o bé existeix un  $k_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\mathbb{P}_{n_k} = \mathbb{P}_{n_{k_0}}$  per a tot  $k > k_0$ , i per tant  $\mathbb{P}_{n_k} \xrightarrow{w} \mathbb{P}_{n_{k_0}}$ . □

**Corol·lari 2.2.3.** *Si una successió de variables aleatòries  $\{X_n\}_n$  convergeix en llei cap a una variable aleatòria  $X$ , aleshores és relativament compacta.*

*Prova.* Per definició,  $\mathcal{L}(X_n) \xrightarrow{w} \mathcal{L}(X)$ . Per tant,  $\{\mathcal{L}(X_n)\}_n$  és relativament compacta.  $\square$

**Definició 2.2.4.** *Diem que una família  $\Pi \subset \mathcal{P}(S)$  de mesures de probabilitat és ajustada si  $\forall \varepsilon > 0$  existeix un conjunt compacte  $K_\varepsilon \subset S$  tal que  $\mathbb{P}(K_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon$ ,  $\forall \mathbb{P} \in \Pi$ . D'igual manera, diem que una successió de variables aleatòries  $\{X_n\}_n$  amb valors en  $S$  és ajustada si la família de les seves lleis  $\{\mathcal{L}(X_n)\}_n$  ho és.*

**Teorema 2.2.5.** (Teorema de Prohorov) *Una família  $\Pi \subset \mathcal{P}(S)$  de mesures de probabilitat és relativament compacte si i només si és ajustada.*

*Prova.* M'agradaria comentar si podem evitar aquesta demostració.  $\square$

## 2.3 El principi d'invariància de Donsker

Sigui  $\{\xi_n\}_n$  una seqüència de variables aleatòries independents i idènticament distribuïdes amb esperança 0 i variància  $\sigma^2$ ,  $0 < \sigma < \infty$ . Considerem la successió de sumes parcials  $S_0 = 0$  i  $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$  per a  $n \geq 1$ . Per a cada  $n \in \mathbb{N}$ , considerem el procés de sumes parcials

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} S_{[nt]}, \quad t \in [0, \infty],$$

i la corresponent interpolació lineal d'aquest procés,

$$X_t^{(n)} = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} (S_{[nt]} + (nt - [nt])\xi_{[nt]+1}), \quad t \in [0, \infty]. \quad (2.1)$$

En aquest capítol, veurem que la successió de processos  $\{X^{(n)}\}_n$  convergeix en llei cap al moviment Brownià estàndard  $B$ .

**Lema 2.3.1.** *Siguin  $\{X^{(n)}\}_n$ ,  $\{Y^{(n)}\}_n$  i  $X$  variables aleatòries amb valors a  $(S, \rho)$ , tals que per a tot  $n \geq 1$ ,  $X^{(n)}$  i  $Y^{(n)}$  estan definides en el mateix espai de probabilitats. Suposem que  $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$  i que  $\rho(X^n, Y^n) \xrightarrow{P} 0$ . Aleshores,  $Y^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ . [Karatzas i Shreve 1991, pàg 120](#)*

*Prova.* Siguin  $\{(\Omega_n, \mathcal{F}_n, \mathbb{P}_n)\}_n$  els espais de probabilitat on estan definides les variables aleatòries  $X^{(n)}$  i  $Y^{(n)}$ . Siguin  $\{(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})\}_n$  un altre espai de probabilitat on està definida la variable aleatòria  $X$ . Siguin  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  una funció contínua i acotada. Per la observació 2.1.4, és suficient demostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_n[f(X^{(n)}) - f(Y^{(n)})] = 0.$$

Sigui  $M = \sup_{s \in S} |f(s)| < \infty$ . Per el corol·lari 2.2.3, com  $X^{(n)} \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ , aleshores  $\{X^{(n)}\}_n$  és relativament compacta. Per el teorema de Prohorov, aleshores  $\{X^{(n)}\}_n$  és ajustada. Per tant, per a tot  $\varepsilon > 0$ , existeix un conjunt compacte  $K_\varepsilon \subset S$  tal que

$$\mathbb{P}_n(X^{(n)} \in K_\varepsilon) \geq 1 - \frac{\varepsilon}{6M}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Com  $f$  és continua, existeix  $0 < \delta < 1$  tal que  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/3$  per a qualssevol  $x, y \in K_\varepsilon$  tals que  $\rho(x, y) < \delta$ . Per altra banda, per hipòtesi  $\rho(X^n, Y^n) \xrightarrow{P} 0$ . Per tant, existeix  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$\mathbb{P}_n(\rho(X^{(n)}, Y^{(n)}) > \delta) < \frac{\varepsilon}{6M}, \quad \forall n \geq n_0.$$

Tot plegat, per a tot  $n \geq n_0$ ,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega_n} f(X^{(n)}) - f(Y^{(n)}) d\mathbb{P}_n \right| &\leq \frac{\varepsilon}{3} \mathbb{P}_n \left( X^{(n)} \in K, \rho(X^{(n)}, Y^{(n)}) < \delta \right) \\ &\quad + 2M \mathbb{P}_n \left( X^{(n)} \notin K \right) \\ &\quad + 2M \mathbb{P}_n \left( \rho(X^{(n)}, Y^{(n)}) > \delta \right) \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

□

**Lema 2.3.2.** Siguin  $\{X^{(n)}\}_n$  i  $X$  variables aleatòries amb valors a  $(S, \mathcal{S})$ . Sigui  $(S', \mathcal{S}')$  un altre espai mètric i sigui  $\varphi : S \rightarrow S'$  una funció contínua. Si  $X^{(n)} \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ , aleshores  $\varphi(X^{(n)}) \xrightarrow{\mathcal{L}} \varphi(X)$ . [Billingsley 1999, pàg 20](#)

*Prova.* Sigui  $f : S' \rightarrow \mathbb{R}$  una funció contínua i acotada. Aleshores,  $f \circ \varphi : S \rightarrow \mathbb{R}$  és també contínua i acotada. Per l'observació 2.1.4, com  $X^{(n)} \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ , aleshores

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[f(\varphi(X^{(n)}))] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[(f \circ \varphi)(X^{(n)})] = \mathbb{E}[(f \circ \varphi)(X)] = \mathbb{E}[f(\varphi(X))].$$

Novament per l'observació 2.1.4, això equival a  $\varphi(X^{(n)}) \xrightarrow{\mathcal{L}} \varphi(X)$ .

□

**Teorema 2.3.3.** Sigui  $\{X^{(n)}\}_n$  la successió de processos definits a l'equació (2.1). Siguin  $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_d < \infty$ . Aleshores,

$$(X_{t_1}^{(n)}, X_{t_2}^{(n)}, \dots, X_{t_d}^{(n)}) \xrightarrow{\mathcal{L}} (B_{t_1}, B_{t_2}, \dots, B_{t_d}) \quad \text{quan } n \rightarrow \infty,$$

on  $\{B_t, \mathcal{F}_t^B; t \geq 0\}$  és un moviment Brownià estàndard. [Karatzas i Shreve 1991, teorema 4.15, pàg 67](#)

*Prova.* Considerarem el cas  $d = 2$ . El cas general és anàleg però la notació és més feixuga. Siguin  $s = t_1$  i  $t = t_2$ . Volem veure que

$$(X_s^{(n)}, X_t^{(n)}) \xrightarrow{\mathcal{L}} (B_s, B_t).$$

Per la definició d'interpolació lineal (2.1), per a tot  $u \geq 0$  tenim

$$\left| X_u^{(n)} - \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} S_{[nu]} \right| \leq \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} |\xi_{[nu]+1}|.$$

Ara, sigui  $\varepsilon > 0$ . Aplicant la desigualtat de Tchebixev,

$$\mathbb{P}\left(\left| X_u^{(n)} - \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} S_{[nu]} \right| > \varepsilon\right) \leq \mathbb{P}\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} |\xi_{[nu]+1}| > \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 \sigma^2 n} = \frac{1}{\varepsilon^2 n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$



En particular, això val per  $u = s$  i  $u = t$ , i per tant

$$\left( \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} S_{[ns]}, \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} S_{[nt]} \right) \xrightarrow{P} (X_s^{(n)}, X_t^{(n)}).$$

Per el lema 2.3.1, és suficient provar que

$$\left( \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} S_{[ns]}, \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} S_{[nt]} \right) \xrightarrow{\mathcal{L}} (B_s, B_t).$$

Considerem l'aplicació contínua  $\varphi(x, y) = (x, y - x)$ . Per el lema 2.3.2, és equivalent demostrar que

$$\left( \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{[ns]} \xi_j, \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{j=[ns]+1}^{[nt]} \xi_j \right) \xrightarrow{\mathcal{L}} (B_s, B_t - B_s).$$

Per construcció, les variables aleatòries  $\{\xi_j\}_{j \geq 1}$  són independents. Així doncs, les variables aleatòries dels dos sumatoris són diferents i, per tant, independents. Siguin  $u, v \in \mathbb{R}$ . Aleshores,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[ \exp \left\{ \frac{i u}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{[ns]} \xi_j + \frac{i v}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{j=[ns]+1}^{[nt]} \xi_j \right\} \right] &= \\ &= \mathbb{E} \left[ \exp \left\{ \frac{i u}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{[ns]} \xi_j \right\} \right] \cdot \mathbb{E} \left[ \exp \left\{ \frac{i v}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{j=[ns]+1}^{[nt]} \xi_j \right\} \right]. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Fixem-nos en el primer factor (l'altre és idèntic substituïnt  $s$  per  $t - s$ ). Com que

$$\left| \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{[ns]} \xi_j - \frac{\sqrt{s}}{\sigma\sqrt{[ns]}} \sum_{j=1}^{[ns]} \xi_j \right| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} 0,$$

i pel teorema central del límit

$$\frac{\sqrt{s}}{\sigma\sqrt{[ns]}} \sum_{j=1}^{[ns]} \xi_j \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, s),$$

aleshores obtenim que

$$\mathbb{E} \left[ \exp \left\{ \frac{i u}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{[ns]} \xi_j \right\} \right] = e^{-\frac{u^2 s}{2}}.$$

De manera anàloga,

$$\mathbb{E} \left[ \exp \left\{ \frac{i v}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{j=[ns]+1}^{[nt]} \xi_j \right\} \right] = e^{-\frac{v^2 (t-s)}{2}}.$$

Substituïnt aquestes expressions a (2.2), obtenim

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[ \exp \left\{ \frac{i u}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{[ns]} \xi_j + \frac{i v}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{j=[ns]+1}^{[nt]} \xi_j \right\} \right] = e^{-\frac{u^2 s}{2}} e^{-\frac{v^2 (t-s)}{2}},$$

□

**Teorema 2.3.4.** *Sigui  $X$  un procés continu i sigui  $\{X^{(n)}\}_n$  una seqüència ajustada de processos continus tal que per a qualssevol  $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_d \leq \infty$ ,*

$$\left(X_{t_1}^{(n)}, \dots, X_{t_d}^{(n)}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} (X_{t_1}, \dots, X_{t_d}).$$

*Aleshores,  $\{X^{(n)}\}_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ .*

*Prova.* [Karatzas i Shreve 1991, teorema 4.15, pàg 65](#)

□

**Teorema 2.3.5.** *(Teorema de Donsker) Sigui  $\{X^{(n)}\}_n$  la successió de processos definits a l'equació (2.1). Aleshores,  $X^{(n)} \xrightarrow{\mathcal{L}} B$ , on  $\{B_t, \mathcal{F}_t^B; t \geq 0\}$  és un moviment Brownià estàndard.*

*Prova.* És conseqüència dels teoremes 2.3.3 i 2.3.4. A més, cal demostrar l'ajustament de la successió  $\{X^{(n)}\}_n$ , que es fa servir en el teorema 2.3.4. El mètode per a demostrar l'ajustament és diferent a [Karatzas i Shreve 1991](#) i [Billingsley 1999](#). M'agradaria comentar-ho més endavant.

□

# Bibliografia

- Bardina, Xavier (2015). *Del passeig aleatori al moviment brownià*. Barcelona: Departament de Matemàtiques, Universitat Autònoma de Barcelona.
- Billingsley, Patrick (1999). *Convergence of Probability Measures*. 2a ed. New York: John Wiley & Sons.
- Dudley, R. M. (2002). *Real Analysis and Probability*. 2a ed. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press.
- Karatzas, Ioannis i Steven E. Shreve (1991). *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. 2a ed. Vol. 113. Graduate Texts in Mathematics. New York i Berlin: Springer.