Universitat de Barcelona
Facultat de Matemàtiques i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

Aproximació del moviment Brownià

Autor: Pau López Gil-Pérez

Director: David Màrquez Carreras
Realitzat a: Facultat de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 23 d'octubre de 2025

Índex

Introducció

En el capítol 2, donarem les principals definicions i resultats que ens permetran estudiar la convergència de certs processos estocàstics cap al moviment Brownià. El resultat principal que desenvoluparem és l'anomenat *principi d'invariància de Donsker*, també conegut com a *teorema de Donsker* o *teorema central del límit funcional*, que estableix la convergència de certs processos estocàstics discrets cap al moviment Brownià.

Capítol 1

El moviment brownià

1.1 Definició i propietats bàsiques

1.2 Variants del moviment brownià

Capítol 2

Convergència cap al moviment Brownià

D'ara endavant, treballarem en un espai mètric (S, ρ) separable i complet, junt amb la seva σ-àlgebra de Borel $\mathcal{S}$, i denotarem per $\mathcal{P}(S)$ l'espai de mesures de probabilitat en $(S, \mathcal{S})$. En el cas particular del moviment brownià, és útil treballar amb l'espai $S = C$ de funcions contínues definides a l'interval $[0, \infty)$ i amb valors reals, junt amb la seva σ-àlgebra de Borel $\mathcal{C}$.

Addicionalment, és possible definir una mètrica a C [1]. A més, és habitual dotar $\mathcal{P}(S)$ amb l'anomenada *topologia feble* [2], i metritzar-la mitjançant la *mètrica de Prokhorov*, per la qual la convergència de mesures de probabilitat és equivalent a la convergència feble que veurem a continuació [3]. Si més no, aquests resultats no seran necessaris per al treball que desenvoluparem.

2.1 Modes de convergència

Definició 2.1.1. *Sigui* $\{\mathbb{P}_n\}_n \subset \mathcal{P}(S)$ *una successió de mesures de probabilitat i* $\mathbb{P} \in \mathcal{P}(S)$ *una altra mesura de probabilitat. Diem que* $\{\mathbb{P}_n\}_n$ convergeix feblement *cap a* $\mathbb{P}$*, i escrivim* $\mathbb{P}_n \xrightarrow{w} \mathbb{P}$*, si per a tota funció* $f : S \to \mathbb{R}$ *contínua i acotada es compleix que*

$$\lim_{n\to\infty} \int_S f(s) d\mathbb{P}_n(s) = \int_S f(s) d\mathbb{P}(s).$$

Observació 2.1.2. En particular, el límit feble $\mathbb{P}$ és una mesura de probabilitat, ja que si prenem $f \equiv 1$ obtenim que

$$\lim_{n\to\infty} \int_S 1\, d\mathbb{P}_n(s) = \int_S 1\, d\mathbb{P}(s) \implies \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_n(S) = \mathbb{P}(S) \implies \mathbb{P}(S) = 1.$$

Ara, considerem una variable aleatòria X en un espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ amb valors a $(S, \mathcal{S})$. Recordem que *la llei de* X es defineix com la mesura de probabilitat $\mathbb{P}X^{-1}$ definida per

$$\mathbb{P}X^{-1}(B) := \mathbb{P}(X^{-1}(B)) = \mathbb{P}(X \in B) \quad \forall B \in \mathcal{S}.$$

[1] Vegeu Karatzas i Shreve 1991 - pàg 60.
[2] Vegeu Dudley 2002 - pàg 194.
[3] Vegeu Billingsley 1999 - pàg 72 o Dudley 2002 - cap. 11.3

Definició 2.1.3. *Sigui* $\{(\Omega_n, \mathcal{F}_n, \mathbb{P}_n)\}_n$ *una successió d'espais de probabilitat, on* $\mathbb{P}_n \in \mathcal{P}(S)$ $\forall n \in \mathbb{N}$*, i considerem en cada un d'ells una variable aleatòria* X_n *amb valors a* $(S, \mathcal{S})$*. Sigui* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un altre espai de probabilitat, on* $\mathbb{P} \in \mathcal{P}(S)$*, i sigui* X *una variable aleatòria en aquest espai amb valors a* $(S, \mathcal{S})$*. Diem que la successió* $\{X_n\}_n$ convergeix en llei *cap a* X*, i escrivim* $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$*, si les lleis de les variables aleatòries* X_n *convergeixen feblement cap a la llei de* X*, és a dir, si* $\mathbb{P}X_n^{-1} \xrightarrow{w} \mathbb{P}X^{-1}$*.*

Observació 2.1.4. Aquesta definició és equivalent a dir que per a tota funció $f : S \to \mathbb{R}$ contínua i acotada es compleixi que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[f(X_n)] = \mathbb{E}[f(X)],$$

ja que mitjançant un canvi de variable tenim que

$$\mathbb{E}[f(X_n)] = \int_{\Omega_n} f(X_n(\omega))d\mathbb{P}_n(\omega) = \int_S f(s)d\mathbb{P}X_n^{-1}(s),$$

i de manera anàloga,

$$\mathbb{E}[f(X)] = \int_{\Omega} f(X(\omega))d\mathbb{P}(\omega) = \int_S f(s)d\mathbb{P}X^{-1}(s).$$

Definició 2.1.5. *Sigui* $\{X_n\}_n$ *una successió de variables aleatòries en un espai de probabilitat* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *amb valors a* $(S, \mathcal{B}(S))$*. Sigui* X *una variable aleatòria en el mateix espai de probabilitat amb valors a* $(S, \mathcal{B}(S))$*. Diem que* $\{X_n\}_n$ convergeix en probabilitat *cap a* X*, i escrivim* $X_n \xrightarrow{P} X$*, si per a tot* $\varepsilon > 0$ *es compleix que*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\rho(X_n, X) > \varepsilon) = 0.$$

Com a cas particular, diem que $\{X_n\}_n$ convergeix en probabilitat cap a $a \in S$*, i escrivim* $X_n \xrightarrow{P} a$*, si* $\{X_n\}_n$ *convergeix en probabilitat cap a la variable aleatòria constant* $X \equiv a$*. És a dir, si per a tot* $\varepsilon > 0$ *es compleix que*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\rho(X_n, a) > \varepsilon) = 0.$$

2.2 Ajustament i Teorema de Prohorov

Definició 2.2.1. *Diem que una família* $\Pi \subset \mathcal{P}(S)$ *de mesures de probabilitat és relativament compacte si i només si tota successió d'elements de* Π *admet una subsuccessió feblement convergent. És a dir, si donada* $\{\mathbb{P}_n\}_n \subset \Pi$*, existeixen una subsuccessió* $\{\mathbb{P}_{n_k}\}_k \subset \{\mathbb{P}_n\}_n$ *i una mesura de probabilitat* $\mathbb{P} \in \mathcal{P}(S)$ *tals que* $\mathbb{P}_{n_k} \xrightarrow{w} \mathbb{P}$*.*

Observació 2.2.2. Si una successió $\{\mathbb{P}_n\}_n \subset \mathcal{P}(S)$ de mesures de probabilitat convergeix feblement cap a una mesura de probabilitat $\mathbb{P}$, aleshores és relativament compacte, ja que tota subsuccessió $\{\mathbb{P}_{n_k}\}_k$ convergeix feblement o bé cap a $\mathbb{P}$ o bé cap a una altra mesura de probabilitat $\mathbb{Q} \in \{\mathbb{P}_n\}_n$, en el que cas que $\mathbb{P}_{n_k} = \mathbb{Q}$ per a tot $k > n_0$, per algun $n_0 \in \mathbb{N}$.

Definició 2.2.3. *Diem que una família* $\Pi \subset \mathcal{P}(S)$ *de mesures de probabilitat és* ajustada *si* $\forall \varepsilon > 0$ *existeix un conjunt compacte* $K_\varepsilon \subset S$ *tal que* $\mathbb{P}(K_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon$*,* $\forall \mathbb{P} \in \Pi$*.*

Teorema 2.2.4. *(Teorema de Prohorov) Una família* $\Pi \subset \mathcal{P}(S)$ *de mesures de probabilitat és relativament compacte si i només si és ajustada.*

Prova. M'agradaria comentar si podem evitar aquesta demostració. □

2.3 El principi d'invariància de Donsker

Sigui $\{\xi_n\}_n$ una seqüència de variables aleatòries independents i idènticament distribuïdes amb esperança 0 i variància σ^2, $0 < \sigma < \infty$. Considerem la successió de sumes parcials $S_0 = 0$ i $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$ per a $n \geq 1$. Per a cada $n \in \mathbb{N}$, considerem el procés de sumes parcials

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} S_{\lfloor nt \rfloor}, \quad t \in [0, \infty],$$

i la corresponent interpolació lineal d'aquest procés,

$$X_t^{(n)} = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \left(S_{\lfloor nt \rfloor} + (nt - \lfloor nt \rfloor)\xi_{\lfloor nt \rfloor + 1} \right), \quad t \in [0, \infty]. \tag{2.1}$$

En aquest capítol, demostrarem que la successió de processos $\{X^{(n)}\}_n$ convergeix en llei cap al moviment Brownià estàndard B.

Lema 2.3.1. *Siguin $\{X^{(n)}\}_n$, $\{Y^{(n)}\}_n$ i X variables aleatòries amb valors a $(\mathcal{S}, \rho)$, tals que per a tot $n \geq 1$, $X^{(n)}$ i $Y^{(n)}$ estan definides en el mateix espai de probabilitats. Suposem que $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ i que $\rho(X^n, Y^n) \xrightarrow{P} 0$. Aleshores, $Y^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$. Karatzas i Shreve 1991, pàg 120*

Prova. *Siguin $\{(\Omega_n, \mathcal{F}_n, \mathbb{P}_n)\}_n$ els espais de probabilitat on estan definides les variables aleatòries $X^{(n)}$ i $Y^{(n)}$. Sigui $\{(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})\}_n$ un altre espai de probabilitat on està definida la variable aleatòria X. Sigui $f : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ una funció contínua i acotada. Per la observació 2.1.4, és suficient demostrar que*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_n[f(X^{(n)}) - f(Y^{(n)})] = 0.$$

Sigui $M = \sup_{s\in\mathcal{S}} |f(s)| < \infty$. Per la observació 2.2.2, com $X^{(n)} \xrightarrow{\mathcal{L}} X$, aleshores $\{X^{(n)}\}_n$ és relativament compacte. Per el teorema de Prohorov, aleshores $\{X^{(n)}\}_n$ és ajustada. Per tant, per a tot $\varepsilon > 0$, existeix un conjunt compacte $K_\varepsilon \subset \mathcal{S}$ tal que

$$\mathbb{P}_n(X^{(n)} \in K_\varepsilon) \geq 1 - \frac{\varepsilon}{6M}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Com f és continua, existeix $0 < \delta < 1$ tal que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ per a qualssevol $x, y \in K_\varepsilon$ tals que $\rho(x, y) < \delta$. Sigui $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mathbb{P}_n(\rho(X^{(n)}, Y^{(n)}) > \delta) < \frac{\varepsilon}{6M}, \quad \forall n \geq n_0.$$

Aleshores, per a tot $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned}\left| \int_{\Omega_n} f(X^{(n)}) - f(Y^{(n)})\, d\mathbb{P}_n \right| &\leq \frac{\varepsilon}{3}\mathbb{P}_n \left(X^{(n)} \in K, \rho(X^{(n)}, Y^{(n)}) < \delta \right) \\ &\quad + 2M\, \mathbb{P}_n \left(X^{(n)} \notin K \right) \\ &\quad + 2M\, \mathbb{P}_n \left(\rho(X^{(n)}, Y^{(n)}) \geq \delta \right) \leq \varepsilon.\end{aligned}$$

□

Lema 2.3.2. *Siguin* $\{X^{(n)}\}_n$ *i* X *variables aleatòries amb valors a un espai mètric* (S_1, ρ_1). *Sigui* (S_2, ρ_2) *un altre espai mètric i sigui* $f : S_1 \to S_2$ *una funció contínua. Si* $X^{(n)} \xrightarrow{\mathcal{L}} X$, *aleshores* $f(X^{(n)}) \xrightarrow{\mathcal{L}} f(X)$. *Billingsley 1999, pàg 20*

Prova. Utilitzant la observació 2.1.4, tenim que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[f(X^{(n)})] = \mathbb{E}[f(X)].$$

□

Teorema 2.3.3. *Sigui* $\{X^{(n)}\}_n$ *la successió de processos definits a l'equació* (2.1). *Siguin* $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_d < \infty$. *Aleshores,*

$$\left(X_{t_1}^{(n)}, X_{t_2}^{(n)}, \ldots, X_{t_d}^{(n)}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} (B_{t_1}, B_{t_2}, \ldots, B_{t_d}) \quad \text{quan } n \to \infty,$$

on $\left\{B_t, \mathcal{F}_t^B; t \geq 0\right\}$ *és un moviment Brownià estàndard.*

Prova. *Karatzas i Shreve 1991, teorema 4.15, pàg 67* □

Teorema 2.3.4. *Sigui* X *un procés continu i sigui* $\{X^{(n)}\}_n$ *una seqüència ajustada de processos continus tal que per a qualssevol* $0 \leq t_1 \leq ... \leq t_d \leq \infty$,

$$\left(X_{t_1}^{(n)}, ..., X_{t_d}^{(n)}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} (X_{t_1}, ..., X_{t_d}).$$

Aleshores, $\{X^{(n)}\}_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

Prova. *Karatzas i Shreve 1991, teorema 4.15, pàg 65* □

Teorema 2.3.5. *(Teorema de Donsker) Sigui* $\{X^{(n)}\}_n$ *la successió de processos definits a l'equació* (2.1). *Aleshores,* $X^{(n)} \xrightarrow{\mathcal{L}} B$, *on* $\left\{B_t, \mathcal{F}_t^B; t \geq 0\right\}$ *és un moviment Brownià estàndard.*

Prova. *És conseqüència dels teoremes 2.3.3 i 2.3.4. A més, cal demostrar l'ajustament de la successió* $\{X^{(n)}\}_n$, *que es fa servir en el teorema 2.3.4. El mètode per a demostrar l'ajustament és diferent a Karatzas i Shreve 1991 i Billingsley 1999. M'agradaria comentar-ho més endavant.* □

Bibliografia

Billingsley, Patrick (1999). *Convergence of Probability Measures*. 2a ed. New York: John Wiley & Sons.

Dudley, R. M. (2002). *Real Analysis and Probability*. 2a ed. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press.

Karatzas, Ioannis i Steven E. Shreve (1991). *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. 2a ed. Vol. 113. Graduate Texts in Mathematics. New York i Berlin: Springer.