

Explicació textual del treball (Abstracte)

Aquest treball de final de grau té com a objectiu estudiar el moviment brownià des d'un punt de vista probabilístic i analític, centrant-se en la seva aproximació mitjançant processos discrets. El moviment brownià és un dels processos estocàstics més fonamentals i apareix com límit de diversos processos discrets, com el passeig aleatori o processos construïts a partir del procés de Poisson.

El treball s'estructura en una primera part teòrica, on es defineixen els conceptes de processos estocàstics, tipus de convergència (en llei, en probabilitat), i es presenta el moviment brownià amb les seves propietats. A continuació, s'estudien dues aproximacions clàssiques al moviment brownià: el passeig aleatori i el procés de Poisson, demostrant la convergència en llei cap al moviment brownià mitjançant el teorema central del límit funcional (Donsker).

Posteriorment, es discuteix la convergència en probabilitat, comparant-la amb la convergència en llei, i s'exploren condicions sota les quals es pot obtenir una convergència més forta. Finalment, es presenten algunes aplicacions i simulacions, així com extensions cap a processos gaussians més generals com el moviment brownià fraccional.

El treball utilitza resultats clàssics com el teorema de Prohorov, el criteri de Billingsley per a l'ajustament de mesures, el teorema de Donsker, i el teorema de Kolmogorov-Centsov per a la continuïtat de trajectòries. També es presenten exemples i construccions explícites, amb suport gràfic i computacional.

Índex detallat del treball

1. Introducció

Continguts:

- **Motivació: aplicacions del moviment brownià en física, economia, etc.**
 - *Springer: Chapter 5.8 (Applications to Economics)*
 - *Giulia: Introduction*
- **Objectius del treball.**
 - *Giulia: Introduction*
- **Metodologia: aproximació mitjançant processos discrets.**
 - *Bardina: Sections 1–2*
 - *Giulia: Chapters 2–3*

Fonts: Bardina (Intro), Springer (2.1, 5.8), Billingsley (Intro)

Explicació: Aquest capítol introduceix el moviment brownià i el seu paper com a model fonamental en probabilitat. S'explica com es pot aproximar mitjançant processos discrets, i es presenta l'objectiu del treball: estudiar aquestes aproximacions i les seves propietats de convergència.

2. Fonaments teòrics dels processos estocàstics

Continguts:

- **Definició de procés estocàstic.**
 - *Springer: Chapter 1.1*
- **Espais de probabilitat i trajectòries.**
 - *Springer: Chapter 2.2 (Kolmogorov–Centsov)*
- **Classificació: discret vs. continu, gaussians, martingales.**
 - *Springer: Chapters 1.3, 2.1, 2.2*
- **Exemples: passeig aleatori, moviment brownià.**
 - *Giulia: Chapters 1–2*
 - *Bardina: Sections 2–3*

Fonts: Bardina (cap. 1–2), Springer (1.1, 2.2), Billingsley (1.1)

Explicació: Aquí definim què és un procés estocàstic i com es modela matemàticament. S'introdueixen exemples clàssics i es prepara el terreny per entendre el moviment brownià.

3. El moviment brownià

Continguts:

- **Definició formal del moviment brownià.**
 - *Springer: Chapter 2.2, 2.4*
 - *Giulia: Chapter 1*
- **Propietats: increments independents, llei normal, trajectòries contínues.**
 - *Springer: Chapter 2.2*
 - *Giulia: Chapter 1.1*
- **No diferenciabilitat.**
 - *Springer: Chapter 2.2*
- **Mesura de Wiener.**

- ***Springer: Chapter 2.4***
- ***Billingsley: Chapter 2.8***

Fonts: Bardina (cap. 6), Springer (2.2–2.4), Billingsley (2.9)

Explicació: S'explica què és el moviment brownià, com es construeix, i quines propietats té. També es presenta la mesura de Wiener, que descriu la distribució de les trajectòries.

4. Tipus de convergència

Continguts:

- **Convergència en llei vs. en probabilitat.**
 - ***Billingsley: Chapter 1.3, Chapter 5.20***
 - ***Giulia: Chapter 1.1***
- **Topologia feble.**
 - ***Billingsley: Chapter 1.2, Chapter 2.7***
- **Teorema de Prohorov.**
 - ***Billingsley: Chapter 1.5***
 - ***Giulia: Chapter 1.1***
- **Criteri de Billingsley.**
 - ***Billingsley: Chapter 1.2, Chapter 2.7***
 - ***Giulia: Chapter 2.1.2***

Fonts: Giulia (1.1), Bardina (8.1–8.2), Billingsley (1.2, 1.5, 2.7)

Explicació: Aquest capítol compara diferents formes de convergència de processos. S'explica què significa que una successió de processos convergeixi en llei o en probabilitat, i s'introdueixen teoremes que ens permeten demostrar-ho.

5. Aproximació del moviment brownià mitjançant processos discrets

5.1. Passeig aleatori

- **Teorema central del límit funcional (Donsker).**
 - ***Billingsley: Chapter 2.8, Chapter 3.14***
 - ***Giulia: Chapter 2.1***
- **Interpolació lineal.**
 - ***Giulia: Chapter 2.1***

- Simulacions.
 - *Bardina*: Section 2
- Fonts: *Giulia* (cap. 2), *Bardina* (cap. 7), *Billingsley* (2.8, 3.14)

5.2. Procés de Poisson

- Aproximació al moviment brownià real i complex.
 - *Bardina*: “The complex Brownian motion as a strong limit of processes”
- Resultats de Stroock i Bardina.
 - *Springer*: Chapter 5.3–5.4
 - *Bardina*: “Weak convergence towards two independent Gaussian processes”
- Convergència feble i forta.
 - *Giulia*: Chapter 3.2
- Fonts: *Giulia* (cap. 2), *Bardina* (cap. 7–8), *Billingsley* (2.8, 5.20)

5.3. Procés de renovació

- Aproximació forta al moviment brownià.
 - *Bardina*: “Strong limit of processes constructed from a renewal process”
- Resultats de *Bardina* i *Rovira*.
 - *Bardina*: cap. 8
- Taxa de convergència.
 - *Springer*: Chapter 5.4
- Fonts: *Bardina* (cap. 8), *Springer* (5.4)

5.4. Procés de Lévy

- Aproximació feble al moviment brownià complex.
 - *Bardina*: “Approximations of a Complex Brownian Motion by Processes Constructed from a Lévy Process”
- Condicions sobre la funció característica.
 - *Springer*: Chapter 5.3
- Extensió al cas multidimensional.

- *Springer: Chapter 6.3*
- **Fonts:** Bardina (cap. 8), Springer (5.3, 6.3)

Explicació: Aquest capítol és el cor del treball. S'hi estudien diferents maneres d'aproximar el moviment brownià mitjançant processos discrets. Cada subapartat presenta un tipus de procés i els resultats teòrics que en garanteixen la convergència.

6. Aproximacions complexes i multidimensionals

Continguts:

- Aproximació al moviment brownià complex amb Poisson i Lévy.
- Aproximació a múltiples moviments brownians independents.
- Simulació de trajectòries complexes.

Resultats:

- Prova d'ajustament.
- Prova de convergència en llei.
- Exemple: trajectòria amb increments Poisson.

Fonts: Giulia (cap. 3), Bardina (cap. 9), Springer (6.2), Billingsley (4.17).

Explicació: Aquí s'estudia com construir aproximacions al moviment brownià complex (amb part real i imaginària) i com fer-ho de manera multidimensional. Es basa en els articles de Bardina i Rovira.

7. Convergència en probabilitat i forta

Continguts:

- **Comparació amb la convergència en llei:** s'explica com la convergència en probabilitat és més forta que la en llei.
- **Teoremes de convergència forta:** construcció de versions que convergeixen quasi segur.
- **Taxa de convergència:** càlcul explícit de la velocitat amb què convergeixen les aproximacions.
- **Condicions per a la convergència en probabilitat.**
- **Versió forta del teorema de Donsker.**

Fonts: Billingsley (5.20), Springer (5.3, 5.4).

Explicació: Aquest capítol mostra com podem obtenir convergència forta, és a dir, que les trajectòries convergeixen quasi segur. S'utilitzen resultats dels articles per demostrar-ho i calcular la taxa de convergència.

8. Extensions i aplicacions

Continguts:

- Simulació de trajectòries.
- Aplicacions en economia: preus d'opcions, consum.
- Extensions: moviment brownià fraccional, bifraccional, subfraccional.

Explicació: Es presenten aplicacions pràctiques dels resultats obtinguts, com la simulació de trajectòries per a models econòmics. També s'exploren extensions cap a processos més generals.

Fonts: Bardina (cap. 9), Springer (5.8, 6), Billingsley (3.14).

9. Conclusions

Continguts:

- Resum dels resultats.
- Importància de les aproximacions.
- Possibles línies futures: altres tipus de convergència, processos més generals.

Explicació: Es fa balanç del treball, es comparen les diferents aproximacions, i es proposen línies de recerca futura.

10. Bibliografia

Bardina i Rovira – Els següents articles:

- Del passeig aleatori al moviment brownià
- Approximations of a Complex Brownian Motion by Processes Constructed from a Lévy Process
- Strong limit of processes constructed from a renewal process
- The complex Brownian motion as a strong limit of processes
- Weak convergence towards two independent Gaussian processes from a unique Poisson process

Giulia Binotto - Convergència en llei cap al moviment brownià

Patrick Billingsley – Convergence of probability measures

Karatzas & Shreve – Brownian Motion and Stochastic calculus