Convergència en llei cap al moviment Brownià

Giulia Binotto
Departament de Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona

Tutor del treball:
Xavier Bardina Simorra

Índex

Intruducció

Amb el terme moviment Brownià es refereix al moviment desordenat de les partícules presents en els fluids i en les suspensions fluides. Tot i que l'observació d'aquest moviment per part de Jan Ingenhousz va ocórrer el 1785, aquest fenomen va ser descobert el 1828 per Robert Brown i va tenir una tractació matemàtica rigorosa només al començament del segle XX amb Louis Bachelier i Albert Einstein.

Matemàticament és un model utilitzat per descriure moviments a l'atzar. El model matemàtic del moviment Brownià té diverses aplicacions al món real. Un exemple citat sovint són les fluctuacions del mercat dels valors.

El moviment Brownià és un dels més simples processos estocàstic a temps continu i és límit tant de processos estocàstics més simples com de més complicats.

En aquest treball anem a veure com dos processos estocàstics molts coneguts, el passeig aleatori i el procés de Poisson, convergeixen en llei cap al moviment Brownià. Al primer capítol veurem una definició general del moviment Brownià i una definició matemàtica d'aquest fenomen. Després, amb l'ajuda d'algunes definicions i teoremes, veurem un mètode per demostrar com un un procés convergeix cap a aquest moviment. Al segon capítol donarem una definició del passeig aleatori com procés estocàstic i demostrarem com utilitzar els resultats del capítol un per explicar la convergència del passeig aleatori cap al moviment Brownià. Al tercer capítol definirem el procés de Poisson i demostrarem algunes proprietats que ho descriuen. Després, amb el mètode descrit al primer capítol, veurem com un procés construït amb el procés de Poisson convergeix cap al moviment Brownià. En fi, donarem algunes conclusions del resultats obtinguts.

Capítol 1

El moviment Brownià

El moviment Brownià és el nom donat al moviment irregular del pol·len suspès a l'aigua observat pel botànic anglés Robert Brown. Albert Einstein va començar a desenvolupar en 1905 una teoria física d'aquest fenomen. Einstein va argumentar que, si la teoria mol·lecular era correcta, les mol·lècules d'aigua afectarien el líquid aleatoriament en totes les direccions, de manera que la partícula de pol·len descriuria un moviment com aquell observat per Brown. Recordem que, en aquell temps, la teoria mol·lecular no era totalment acceptada. En els anys 20 Norbert Wiener va presentar un model matemàtic per aquest moviment basat en la teoria dels processos estocàstics. En un sentit més ampli, es diu moviment Brownià també la classe de models matemàtics que permeten descriure aquest procés físic i altres fenomens semblants. Actualment, el moviment Brownià i el càlcul estocàstic són utilizats en molts models de la física i de l'economia.

Veiem la definició matemàtica.

En el cas unidimensional la definició del moviment Brownià com procés estocàstic és la següent:

Definició 1. *Un procés estocàstic $\{B_t,\, t \geq 0\}$ és un moviment Brownià si es compleixen les següents condicions:*

i) $B_0 = 0$

ii) Fixats n instants $0 \leq t_1 < \cdots < t_n$, els increments

$$B_{t_n} - B_{t_{n-1}}, \ldots, B_{t_2} - B_{t_1}$$

són variables aleatòries independents

iii) Si $s < t$, l'increment $B_t - B_s$ té una llei normal $N(0, t-s)$

iv) Les trajectòries del procés són funcions contínues.

Observacions

Veiem algunes propietats del moviment Brownià:

1. El moviment Brownià és un procés gaussià o normal, és a dir, les seves distribucions en dimensió finita són lleis normals multidimensionals. De fet, el vector aleatori $(B_{t_1}, \ldots, B_{t_n})$ és normal, perquè és una trasformació lineal del vector $(B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \ldots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}})$ que té llei normal, ja que les seves components són independents i normals.

2. La mitjana i l'autocovariància del moviment Brownià es calculen fàcilment:

$$\begin{aligned} E(B_t) &= 0 \\ E(B_s B_t) &= E(B_s(B_t - B_s + B_s)) \\ &= E(B_s(B_t - B_s)) + E(B_s^2) = s = \min(s,t) \end{aligned}$$

   si $s < t$.

3. En el cas en que estem treballant amb un moviment Brownià amb trajectòries contínues, es pot demostrar que les trajectòries no són diferenciables en cap punt. En particular, el movimequitar el capitulo zeront Brownià no pot tenir intervals de monotonicitat.

1.1 Convergència cap al moviment Brownià

Donem algunes definicions i proprietats de la convergència feble de probabilitats i de la convergència en llei de variables aleatòries i de processos estocàstics que ens permetran explicar com un procés convergeix cap al moviment Brownià.

Sigui G un espai polonès, és a dir, un espai mètric separable i complet, i sigui $\mathcal{E}$ la seva σ-àlgebra de Borel, és a dir, la σ-àlgebra que conté tots els oberts de la topologia. Denotarem amb $\mathcal{P}(G)$ l'espai de les mesures de probabilitat en $(G, \mathcal{E})$ i prenem en aquest espai la topologia feble, que és la topologia menys fina per la qual l'applicació que a cada mesura μ li fa correspondre

$$\mu \longrightarrow \mu(f) := \int_G f d\mu$$

és contínua, per a tota funció contínua i fitada f de G.

Definició 2. *Es diu que una successió de mesures de probabilitat en $(G, \mathcal{E})$, $\{\mu_n,\, n \geq 0\}$, convergeix feblemente cap a una mesura de probabilitat μ i ho denotarem per*

$$\mu_n \stackrel{w}{\Rightarrow} \mu$$

si

$$\mu_n(f) \longrightarrow \mu(f)$$

per tota $f : G \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua i fitada.

Definició 3. *Es diu que un conjunt $A \subset \mathcal{P}(G)$ és relativament compacte si tota successió d'elements d'aquest conjunt té una subsuccessió feblement convergent.*

Definició 4. *Un conjunt $A \subset \mathcal{P}(G)$ és ajustat si per a tot $\varepsilon > 0$ existeix un compacte K en G tal que per a tota $\mu \in A$, $\mu(G \setminus K) \leq \varepsilon$.*

El següent teorema, que es diu Teorema de Prohorov, relaciona la definició de relativament compacte amb la d'ajustat, que acabem de descriure:

Teorema 1.1.1. *(Teorema de Prohorov) Un conjunt A de $\mathcal{P}(G)$ és relativament compacte (per la topologia feble) si i només si és ajustat.*

Ara definim la convergència en llei per variables aleatòries a valors en un espai polonès. Suposem que tenim en un espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, una variable aleatòria Y, que pren valors en un espai polonès G. Anomenarem llei o distribució de Y, la llei imatge $P \circ Y^{-1}$. Aquesta mesura de probabilitat la denotarem $\mathcal{L}(Y)$ i pertany a $\mathcal{P}(G)$.

Definició 5. *Considerem una successió de variables aleatòries a valors en G, $\{Y^n,\, n \geq 0\}$, definides en uns certs espais de probabilitat $(\Omega^n, \mathcal{F}^n, P^n)$, amb lleis $\mathcal{L}(Y^n)$.*

Direm que $\{Y^n,\, n \geq 0\}$ convergeix en llei cap a una altra variable aleatòria Y en G, i ho denotem per

$$Y^n \stackrel{\mathcal{L}}{\Rightarrow} Y,$$

si $\mathcal{L}(Y^n) \overset{w}{\Rightarrow} \mathcal{L}(Y)$.

Si denotem per E_Q *l'esperança matemàtica sota la probabilitat* Q*, aquesta definició és equivalent a que, per a tota funció contínua i fitada* $f : G \longrightarrow \mathbb{R}$*,*

$$E_{P^n}(f(Y^n)) \longrightarrow E_P(f(Y)).$$

Considerem ara que tenim una successió de processos estocàstics a valors en $\mathbb{R}$ parametritzats per un espai mètric compacte T, amb trajectòries contínues, $\{Y^n(t),\, t \in T, n \geq 0\}$. Podem considerar els processos Y^n com variables aleatòries a valors en l'espai de Banach de les funcions contínues $\mathcal{C}(T)$. Per demostrar la convergència en llei dels processos Y^n cap a un cert procés Y, en l'espai $\mathcal{C}(T)$, es pot fer servir el mètode següent,

- (i) Demostrar que tota parcial $\{\mathcal{L}(Y^{n_k})\}$ feblement convergent convergeix cap al mateix límit, la llei $\mathcal{L}(Y)$.
- (ii) Demostrar que la família de lleis $\{\mathcal{L}(Y^n)\}$ és relativament compacta en $\mathcal{P}(\mathcal{C}(T))$, o el que és el mateix pel Teorema de Prohorov, demostrar que és ajustada.

La primera condició es pot canviar per aquesta altra,

- (i') Demostrar que per a tot $k \geq 1$ i per a tot $t_1, \ldots, t_k \in T$,

  $$(Y^n(t_1), \ldots, Y^n(t_k)) \overset{\mathcal{L}}{\Rightarrow} (Y(t_1), \ldots, Y(t_k))$$

  en $\mathbb{R}^k$.

Apliquem el que acabem de veure al passeig aleatori i al procés de Poisson i demostrem aquestes últimes afirmacions. D'aquesta manera, podrem concloure que tant el passeig aleatori, convenientment normalitzat, com el procés de Poisson convergeixen cap al moviment Brownià.

Capítol 2

El passeig aleatori

El passeig aleatori és una formalització matemàtica de la trajectòria que resulta de fer successius passos aleatoris. És un problema clàssic de probabilitat que té aplicacions en el camp de la computació, de la física, de l'ecologia i de l'economia. En el cas de dimensió un es sol pensar en una recta on, cada vegada que fem un pas, podem elegir entre dues direccions diferents amb igual probabilitat.

Anomenem $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ les variables que indiquen si al n-èssim instant avancem o retrocedim a la recta real. El valor d'aquestes variables pot ser 1 o -1: en el primer cas es fa un pas endavant, en el segon cas un pas enrere.

Amb aquesta notació, observem que, com que la probabilitat d'avançar o retrocedir a la recta real és la mateixa, obtenim que:

$$P(X_n = 1) = P(X_n = -1) = \frac{1}{2} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Amb el mètode que hem vist en el primer capítol, vam a veure com el passeig aleatori convergeix cap al moviment Brownià.

2.1 Convergència del passeig aleatori cap al moviment Brownià

2.1.1 Demostració de la convergència en llei

Considerem una successió $\{X_j\}_{j=1}^{\infty}$ de variables aleatòries independents idènticament distribuides amb esperança zero i variància σ^2, amb $0 < \sigma^2 < \infty$, i la successió de les sumes parcials $S_0 = 0$, $S_k = \sum_{j=1}^{k} X_j$, amb $k \geq 1$. En el cas del passeig aleatori les X_j són les nostres variables aleatòries que només podien prendre els valors 1 i -1 amb probabilitat $\frac{1}{2}$ i que per tant tenien esperança 0 i variància 1. Un procés a temps continu $Y = \{Y_t; t \geq 0\}$ es pot obtenir de la succesió $\{S_k\}_{k=0}^{\infty}$ amb una interpolació lineal, es a dir,

$$Y_t = S_{[t]} + (t - [t])X_{[t]+1}\,, \qquad t \geq 1,$$

on $[t]$ denota la part entera més petita o igual a t.

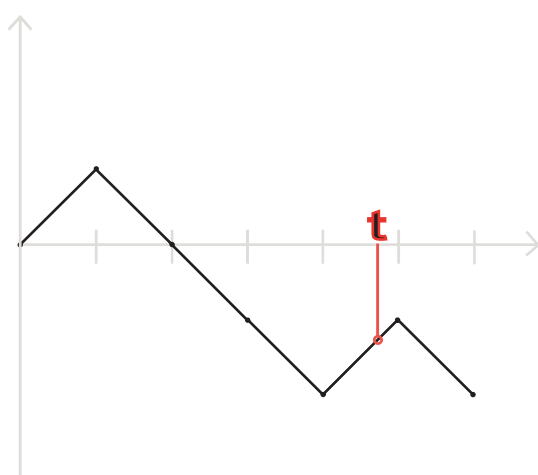

Figura 2.1: Interpolació lineal de la successió $\{S_k\}_{k=0}^{\infty}$.

De Y es pot obtenir una successió de processos $\{N^{(n)}\}$:

$$N_t^{(n)} = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} Y_{nt}\,, \qquad t \geq 0.$$

Observem que definint $s = k/n$ i $t = (k+1)/n$ l'increment $N_t^{(n)} - N_s^{(n)} = (1/\sigma\sqrt{n})X_{k+1}$ és independent de $F_s^{X^{(n)}} = \sigma(X_1, \ldots, X_k)$.

A més a més, $N_t^{(n)} - N_s^{(n)}$ té esperança zero i variància $t-s$. Veurem que $\{N_t^{(n)}; t \geq 0\}$ és approximadament un moviment Brownià. Sabem que, tot i que les variables aletòries no siguin necessariament normals, el teorema del límit central afirma que la distribució dels increments de $N^{(n)}$ són asimptòticament normals.

Teorema 2.1.1. *Sigui $\{N^{(n)}\}$ la successió de processos que acabem de definir i siguin $0 \leq t_1, < \cdots < t_d < \infty$, tenim que*

$$(N_{t_1}^{(n)}, \ldots, N_{t_d}^{(n)}) \xrightarrow{\mathcal{L}} (B_{t_1}, \ldots, B_{t_d}) \qquad \text{per } n \to \infty,$$

on $\{B_t, F_t^B; t \geq 0\}$ és un moviment Brownià estàndard unidimensional.

Prova: Considerem el cas $d = 2$. El cas general és similar, però la notació és més incòmoda d'escriure. Siguin $t = t_1$ i $s = t_2$. Hem de veure que

$$(N_s^{(n)}, N_t^{(n)}) \xrightarrow{\mathcal{L}} (B_s, B_t).$$

Utilitzant que

$$\left| Y_t^n - \frac{1}{\sqrt{n}} S_{[tn]} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} |X_{[tn]+1}|,$$

obtenim que

$$P\left(\left| Y_t^n - \frac{1}{\sqrt{n}} S_{[tn]} \right| > \varepsilon \right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2 n} \longrightarrow 0$$

quan $n \to \infty$, ja que

$$\begin{aligned} P\left(\left| Y_t^n - \frac{1}{\sqrt{n}} S_{[tn]} \right| > \varepsilon \right) &\leq P\left(\frac{1}{\sqrt{n}} |X_{[tn]+1}| > \varepsilon \right) \\ &= P\left(|X_{[tn]+1}| > \sqrt{n}\varepsilon \right) \\ &\leq \frac{\mathrm{Var}(X_{[tn]+1})}{\varepsilon^2 n} = \frac{1}{\varepsilon^2 n} \end{aligned}$$

on hem utilitzat la desigualtat de Txevishev:

$$P(|X - \mu| > k\sigma) \leq \frac{1}{k^2},$$

amb X una variable aleatòria de mitjana μ i variància finita σ^2 i k qualsevol nombre real positiu.

Així doncs és clar que

$$P\left(\left|(Y_s^n, Y_t^n) - \frac{1}{\sqrt{n}}(S_{[sn]}, S_{[tn]})\right| > \varepsilon\right) \to 0\,;$$

aleshores, utilitzant que, si $X^{(n)} \stackrel{\mathcal{L}}{\longrightarrow} X$ i $P(|X^{(n)} - Y^{(n)}| > \varepsilon) \to 0$ quan $n \longrightarrow \infty$, aleshores $Y^{(n)} \stackrel{\mathcal{L}}{\longrightarrow} X$ quan $n \longrightarrow \infty$, és suficient demostrar que

$$\frac{1}{\sqrt{n}}(S_{[sn]}, S_{[tn]}) \stackrel{\mathcal{L}}{\longrightarrow} (B_s, B_t).$$

Recordem que, si $X^{(n)} \stackrel{\mathcal{L}}{\longrightarrow} X$ i φ és una funció contínua, aleshores $\varphi(X^{(n)}) \stackrel{\mathcal{L}}{\longrightarrow} \varphi(X)$. Utilitzant com a funció φ la funció $\varphi : (x, y) \mapsto (x, y - x)$, obtenim que és equivalent demostrar que

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\sum_{j=1}^{[sn]} X_j, \sum_{j=[sn]+1}^{[tn]} X_j\right) \stackrel{\mathcal{L}}{\longrightarrow} (B_s, B_t - B_s),$$

d'aquesta manera podem concloure que les variables aleatòries dels sumatoris són distintes i, per tant, independents.

D'altra banda, $X^{(n)} \stackrel{\mathcal{L}}{\longrightarrow} X$ si i només si la sèrie de les funcions característiques $\varphi_{X^{(n)}}(t) := E_n(e^{itX^{(n)}})$ convergeix cap a $\varphi_X(t) := E(e^{itX})$. La independència de les variables aleatòries implica que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} E\left[\exp\left\{\frac{iu}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{[sn]} X_j + \frac{iv}{\sqrt{n}}\sum_{j=[sn]+1}^{[tn]} X_j\right\}\right] &= \\ = \lim_{n\to\infty} E\left[\exp\left\{\frac{iu}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{[sn]} X_j\right\}\right] \cdot \lim_{n\to\infty} E\left[\exp\left\{\frac{iv}{\sqrt{n}}\sum_{j=[sn]+1}^{[tn]} X_j\right\}\right]\end{aligned}$$

Considerem ara el $\lim_{n\to\infty} E[\exp\{(\frac{iu}{\sqrt{n}})\sum_{j=1}^{[sn]} X_j\}]$; l'altre límit es pot tractar de manera similar. Del fet que

$$P\left(\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{[sn]} X_j - \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{[sn]}}\sum_{j=1}^{[sn]} X_j\right| > \varepsilon\right) \to 0$$

i que, pel teorema central del límit, $(\sqrt{s}/\sqrt{[sn]})\sum_{j=1}^{[sn]} X_j$ convergeix en distribució a una variable normal amb esperança zero i variància s, obtenim que

$$\lim_{n\to\infty} E\left[\exp\left\{\frac{iu}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{[sn]} X_j\right\}\right] = e^{\frac{-u^2 s}{2}},$$

on $e^{\frac{-u^2 s}{2}}$ és la funció característica de B_s, ja que $B_s \sim \text{Normal}(0, s)$.

De forma semblant,

$$\lim_{n\to\infty} E\left[\exp\left\{\frac{iu}{\sqrt{n}}\sum_{j=[sn]+1}^{[tn]} X_j\right\}\right] = e^{\frac{-v^2(t-s)}{2}},$$

que és la funció característica de $B_t - B_s$. Aleshores,

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} E\left[\exp\left\{\frac{iu}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{[sn]} X_j + \frac{iv}{\sqrt{n}}\sum_{j=[sn]+1}^{[tn]} X_j\right\}\right] \\
&\quad = \lim_{n\to\infty} E\left[\exp\left\{\frac{iu}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{[sn]} X_j\right\}\right] \cdot \lim_{n\to\infty} E\left[\exp\left\{\frac{iv}{\sqrt{n}}\sum_{j=[sn]+1}^{[tn]} X_j\right\}\right] \\
&\quad = e^{\frac{-u^2 s}{2}} \cdot e^{\frac{-v^2(t-s)}{2}}
\end{aligned}$$

la qual cosa completa la demostració.

□

2.1.2 Demostració de l'ajustament d'una família de lleis

Abans de procedir amb la demostració, enunciem un teorema molt útil per provar l'ajustament d'una família de lleis:

Teorema 2.1.2. *(Criteri de Billingsley) Una successió $\{Y_n\}$ és ajustada si se satisfan aquestes dues condicions:*

a) La successió $\{Y^n(0)\}$ és ajustada.

b) Existeixen constants $\gamma \geq 0$ i $\alpha > 1$ i una funció contínua no decreixent F en $[0, T]$ tal que

$$P\{|Y_n(t) - Y_n(s)| \geq \lambda\} \leq \frac{1}{\lambda^\gamma}|F(t) - F(s)|^\alpha \qquad (2.1)$$

per a tot $s, t \in [0,T]$, per a tot $n \in \mathbb{N}$ i per a tot $\lambda > 0$.

D'una banda, observem que la condició

$$E\left[|Y_n(t) - Y_n(s)|^\gamma\right] \leq |F(t) - F(s)|^\alpha$$

implica, utilitzant la desigualtat de Txebixev, la condició (2.1). D'altra banda, en el nostre cas, $Y_n(0) = 0$ per a tot $n \in \mathbb{N}$. Per tant, per a demostrar l'ajustament, en el nostre cas és suficient provar que existeixen constants $\gamma \geq 0$ i $\alpha > 1$ i una funció contínua no decreixent F en $[0,T]$ tal que

$$E\left[|Y_n(t) - Y_n(s)|^\gamma\right] \leq |F(t) - F(s)|^\alpha.$$

Hem definit $Y_t = S_{[t]} + (t-[t])X_{[t]+1}$. Una manera equivalent d'escriure-ho és:

$$Y_t = \int_0^t \sum_{k=1}^\infty X_k \cdot I_{[k-1,k)}(x)\, dx.$$

Demostrem-ho:

$$\begin{aligned}
Y_t &= \int_0^t \sum_{k=1}^\infty X_k \cdot I_{[k-1,k)}(x)\, dx = \\
&= \int_0^{[t]} \sum_{k=1}^\infty X_k \cdot I_{[k-1,k)}(x)\, dx + \int_{[t]}^t \sum_{k=1}^\infty X_k \cdot I_{[k-1,k)}(x)\, dx = \\
&= \sum_{j=1}^{[t]} \int_{j-1}^j X_j\, dx + \int_{[t]}^t X_{[t]+1}\, dx = \\
&= \sum_{j=1}^{[t]} \int_{j-1}^j X_j\, dx + (t-[t])X_{[t]+1} = \\
&= \sum_{j=1}^{[t]} X_j(j-(j-1)) + (t-[t])X_{[t]+1} = \\
&= \sum_{j=1}^{[t]} X_j + (t-[t])X_{[t]+1}.
\end{aligned}$$

Definim

$$X_t^n := \frac{1}{\sqrt{n}} Y_{nt} = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{nt} \sum_{k=1}^\infty X_k \cdot I_{[k-1,k)}(x)\, dx.$$

Recordem que, pel resultat vist al principi de la secció, n'hi ha prou demostrant que

$$E\left[(X_t^n - X_s^n)\right]^4 \le C(t-s)^2\,,$$

on C és una constant qualsevol. En efecte:

$$E\left[(X_t^n - X_s^n)\right]^4 = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^4 E\left[\int_{ns}^{nt}\left(\sum_{k=1}^{\infty} X_k I_{[k-1,k)}(x)\right)dx\right]^4;$$

si ara definim $\theta(x) := \sum_{k=1}^{\infty} X_k I_{[k-1,k)}(x)$, l'última expressió és igual a:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n^2}E\left[\left(\int_{ns}^{nt}\theta_1(x_1)dx_1\right)\left(\int_{ns}^{nt}\theta_2(x_2)dx_2\right)\left(\int_{ns}^{nt}\theta_3(x_3)dx_3\right)\left(\int_{ns}^{nt}\theta_4(x_4)dx_4\right)\right] = \\
&\quad = \frac{1}{n^2}E\left[\int_{ns}^{nt}\int_{ns}^{nt}\int_{ns}^{nt}\int_{ns}^{nt}\theta_1(x_1)\theta_2(x_2)\theta_3(x_3)\theta_4(x_4)\,dx_1dx_2dx_3dx_4\right] = \\
&\text{tenim} \quad 4! = 24 \quad \text{possibles combinacions} \\
&\quad = 24\cdot\frac{1}{n^2}E\left[\int_{ns}^{nt}\cdots\int_{ns}^{nt}\theta_1(x_1)\theta_2(x_2)\theta_3(x_3)\theta_4(x_4)I_{\{x_1\le x_2\le x_3\le x_4\}}\,dx_1\cdots dx_4\right] = \\
&\quad = \frac{24}{n^2}\int_{ns}^{nt}\cdots\int_{ns}^{nt}E\left[\theta_1(x_1)\theta_2(x_2)\theta_3(x_3)\theta_4(x_4)I_{\{x_1\le x_2\le x_3\le x_4\}}\right]\,dx_1\cdots dx_4. \qquad (2.2)
\end{aligned}$$

Ara utilitzem el canvi de notació

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} X_j\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{\infty} X_k\right) = \sum_{j,k=1}^{\infty} X_j X_k\,,$$

observem que

$$\begin{aligned}
&E\left[\theta_1(x_1)\theta_2(x_2)\theta_3(x_3)\theta_4(x_4)I_{\{x_1\le x_2\le x_3\le x_4\}}\right] = \\
&\quad = E\left[\sum_{k_1,k_2,k_3,k_4=1}^{\infty} X_{k_1}\cdots X_{k_4}\cdot I_{[k_1-1,k_1)}(x_1)\cdots I_{[k_4-1,k_4)}(x_4)\cdot I_{\{x_1\le x_2\le x_3\le x_4\}}\right] = \\
&\quad = \sum_{k_1,k_2,k_3,k_4=1}^{\infty} E\left[X_{k_1}\cdots X_{k_4}\right]\cdot I_{[k_1-1,k_1)}(x_1)\cdots I_{[k_4-1,k_4)}(x_4)\cdot I_{\{x_1\le x_2\le x_3\le x_4\}}
\end{aligned}$$

D'on tenim dues possibilitats:

$$E\left[X_{k_1}\cdot X_{k_2}\cdot X_{k_3}\cdot X_{k_4}\right]=\begin{cases} 0 & \text{si existeix una } \ k_j\neq k_i \quad \forall i\in\{1,2,3,4\}\backslash j, \\ & \quad \text{ja que les } X_k \text{ són independents} \\ & \quad \text{i tenen } E(X_k)=0; \\ \\ 1 & \text{si } k_1=k_2 \text{ y } k_3=k_4, \\ & \quad \text{ja que, com que estan ordenades,} \\ & \quad \text{només serà diferent de zero en aquest cas.} \end{cases}$$

Observem que pel que fa al darrer cas hi ha altres dues possibilitats:

- $k_1 = k_2 \neq k_3 = k_4$
- $k_1 = \cdots = k_4$

en ambdós casos $E\left[X_{k_1}\cdot X_{k_2}\cdot X_{k_3}\cdot X_{k_4}\right]=1$. Aleshores, la nostra expressió és igual a

$$\sum_{k,j=1}^{\infty} E\left[X_k X_k X_j X_j\right]\cdot I_{[k-1,k)}(x_1)\cdot I_{[k-1,k)}(x_2)\cdot I_{[j-1,j)}(x_3)\cdot I_{[j-1,j)}(x_4)\cdot I_{\{x_1\leq x_2\leq x_3\leq x_4\}} =$$

$$= \sum_{k,j=1}^{\infty} I_{[k-1,k)^2}(x_1,x_2)\cdot I_{[j-1,j)^2}(x_3,x_4)\cdot I_{\{x_1\leq x_2\leq x_3\leq x_4\}}.$$

Així doncs, podem escriure l'expressió (2.2) de la següent forma:

$$\frac{24}{n^2}\int_{ns}^{nt}\cdots\int_{ns}^{nt}\sum_{k,j=1}^{\infty} I_{[k-1,k)^2}(x_1,x_2)\cdot I_{[j-1,j)^2}(x_3,x_4)\cdot I_{\{x_1\leq x_2\leq x_3\leq x_4\}}\, dx_1\cdots dx_4.$$

Utilitzant ara la desigualtat

$$I_{\{x_1\leq x_2\leq x_3\leq x_4\}}\leq I_{\{x_1\leq x_2\}}\cdot I_{\{x_3\leq x_4\}},$$

obtenim que

$$\begin{aligned}
&\frac{24}{n^2}\int_{ns}^{nt}\cdots\int_{ns}^{nt}\sum_{k,j=1}^{\infty} I_{[k-1,k)^2}(x_1,x_2)\cdot I_{[j-1,j)^2}(x_3,x_4)\cdot I_{\{x_1\le x_2\le x_3\le x_4\}}\,dx_1\cdots dx_4\\
&\quad\le \frac{24}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\int_{ns}^{nt}\int_{ns}^{nt} I_{[k-1,k)^2}(x_1,x_2)\cdot I_{\{x_1\le x_2\}}\,dx_1dx_2\right)\cdot\\
&\qquad\qquad\cdot\left(\sum_{j=1}^{\infty}\int_{ns}^{nt}\int_{ns}^{nt} I_{[j-1,j)^2}(x_3,x_4)\cdot I_{\{x_1\le x_2\}}\,dx_3dx_4\right)=\\
&\quad=\frac{24}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\int_{ns}^{nt}\int_{ns}^{nt} I_{[k-1,k)^2}(x_1,x_2)\cdot I_{\{x_1\le x_2\}}\,dx_1dx_2\right)^2=\\
&\quad=\frac{24}{n^2}\left(\int_{ns}^{nt}\int_{ns}^{nt}\sum_{k=1}^{\infty} I_{[k-1,k)^2}(x_1,x_2)\cdot I_{\{x_1\le x_2\}}\,dx_1dx_2\right)^2
\end{aligned}$$

Fent ara el següent canvi de variable

$$y_1=\frac{x_1}{n}\quad dx_1=ndy_1$$

$$y_2=\frac{x_2}{n}\quad dx_2=ndy_2,$$

la nostra expressió esdevé:

$$\begin{aligned}
&\frac{24}{n^2}\left(\int_s^t\int_s^t\sum_{k=1}^{\infty} I_{[k-1,k)^2}(ny_1,ny_2)\cdot I_{\{ny_1\le ny_2\}}\cdot n^2\,dy_1dy_2\right)^2=\\
&\quad=\frac{24}{n^2}n^4\left(\int_s^t\int_s^t\sum_{k=1}^{\infty} I_{[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n})^2}(y_1,y_2)\cdot I_{\{y_1\le y_2\}}\,dy_1dy_2\right)^2,
\end{aligned}$$

on hem fet els següents canvis:

$$\left\{\begin{array}{l} k-1 \leq ny_1 \leq k \\ k-1 \leq ny_2 \leq k \end{array}\right. = \left\{\begin{array}{l} \dfrac{k-1}{n} \leq y_1 \leq \dfrac{k}{n} \\ \\ \dfrac{k-1}{n} \leq y_2 \leq \dfrac{k}{n} \end{array}\right.$$

$$= \left\{\begin{array}{l} \dfrac{k}{n} - \dfrac{1}{n} \leq y_1 \leq \dfrac{k}{n} \\ \\ \dfrac{k}{n} - \dfrac{1}{n} \leq y_2 \leq \dfrac{k}{n} \end{array}\right. .$$

Observem que:

$$\sum_{k=1}^{\infty} I_{\{\frac{k-1}{n} \leq y_1 \leq \frac{k}{n}\}} \cdot I_{\{\frac{k-1}{n} \leq y_2 \leq \frac{k}{n}\}} \leq I_{\{y_2 - y_1 \leq \frac{1}{n}\}}.$$

Per tant, podem escriure:

$$\frac{24}{n^2} n^4 \left(\int_s^t \int_s^t \sum_{k=1}^{\infty} I_{[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n})^2}(y_1, y_2) \cdot I_{\{y_1 \leq y_2\}} \, dy_1 dy_2 \right)^2 \leq$$

$$\leq 24n^2 \left(\int_s^t \int_s^t I_{\{y_2 - y_1 \leq \frac{1}{n}\}} I_{\{y_1 \leq y_2\}} \, dy_1 dy_2 \right)^2 =$$

$$= 24n^2 \left(\int_s^t \int_s^{y_2} I_{\{y_2 - y_1 \leq \frac{1}{n}\}} \, dy_1 dy_2 \right)^2 =$$

$$= 24n^2 \left(\int_s^t \int_{\max\{y_2 - \frac{1}{n}, s\}}^{y_2} dy_1 dy_2 \right)^2 \leq$$

$$\leq 24n^2 \left(\int_s^t \int_{y_2 - \frac{1}{n}}^{y_2} dy_1 dy_2 \right)^2 =$$

$$= 24n^2 \left(\int_s^t \frac{1}{n} \, dy_2 \right)^2 =$$

$$= 24n^2 \frac{1}{n^2} (t-s)^2 =$$

$$= 24(t-s)^2$$

com volíem demostrar.

□

D'aquesta manera hem demostrat que el passeig aleatori com a procés estocàstic convergeix cap al moviment Brownià descrit al primer capítol.

Capítol 3

El procés de Poisson

En estadística i simulació el procés de Poisson és un procés estocàstic de temps continu en el qual els seus esdeveniments ocorren de forma contínua i indipendent l'un de l'altre. El procés de Poisson serveix per explicar esdeveniment rars que ocorren al llarg del temps. La majoria dels processos puntuals són generalitzacions o modificacions del procés de Poisson, ja que aquest procés dóna una bona descripció de molts processos de la vida real. Exemples de processos que s'aproximen a un procés de Poisson inclouen la desintegració radioactiva dels àtoms, les trucades telefòniques que arriben a una centraleta i la pluja.

El procés de Poisson és un conjunt $\{N(t) : t \geq 0\}$ de variables aleatòries, on $N(t)$ és el nombre d'esdeveniments que han ocorregut fins al instant t (a partir del temps $t_0 = 0$). El nombre d'esdeveniments entre el temps a i el temps b és donat per $N(b) - N(a)$ i té una distribució de Poisson. Cada realització del procés $N(t)$ és una funció no negativa amb valors enters que és no decreixent; en general es pot pensar com un modelo de punts en $[0, \infty)$ on els punts representen els moments en que es produeix un esdeveniment.

Matemàticament es pot donar la següent definició del procés de Poisson:

Definició 6. *Un procés estocàstic $\{N_t, t \geq 0\}$ és un procés de Poisson si es compleixen les següents condicions:*

i) $N_0 = 0$

ii) Fixats n instants $0 \leq t_1 < \cdots < t_n$, els increments

$$N_{t_n} - N_{t_{n-1}}, \ldots, N_{t_2} - N_{t_1}$$

són variables aleatòries independents

iii) Si $s < t$, es compleix

$$N_t - N_s \sim Poisson(t-s)$$

3.1 Propietats

Veiem ara algunes importants propietats del procés de Poisson i anem a demostrar-les.

Proprietat 3.1.1. *Si definim $T_i = \inf\{t > 0 : N_t = i\}$ es compleix que*

$$T_1, T_2 - T_1, T_3 - T_2, \ldots, \sim Exponencials(\lambda)$$

Prova: Siguin $0 = T_0 < T_1 < \cdots < T_n < \cdots$ els instants en que ocorren els esdeveniment del procés de Poisson de taxa λ. Definim $Z_n = T_n - T_{n-1}$ com el temps trascorreguts entre dos esdeveniment successius.

Calculem la funció de supervivència $1 - F_{Z_n}(x)$ per tot $x \in \mathbb{R}^+$:

$$\begin{aligned}
1 - F_{Z_n}(x) &= P(Z_n > x) = \\
&= P(T_n - T_{n-1} > x) = \\
&= P(\text{No passi cap esdeveniment entre } T_{n-1} \text{ y } T_{n-1} + x) = \\
&= P(N_{T_{n-1}+x} - N_{T_{n-1}} = 0) = \\
&= P(N_x = 0) = \\
&= \frac{e^{-\lambda x}}{0!}(\lambda x)^0 = e^{-\lambda x}
\end{aligned}$$

on hem utilitzat que $N_x = Poiss(\lambda x)$.

D'aquesta manera, per tot $x \in \mathbb{R}^+$ obtenim que

$$F_{Z_n}(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

y per tant

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} I_{(o,\infty)}(x).$$

Doncs podem concloure que $Z_n \sim exp(\lambda)$.

$\square$

Proprietat 3.1.2. *Siguin $T_1, T_2 \dots, T_j, \dots$ temps d'arribada d'un procès de Poisson Y_t de paràmetre k. Aleshores la distribució condicional de $(T_1, \dots, T_k)$, donat $\{N_t = k\}$, és la mateixa de k variables aletòries independents ordenades amb distribució uniforme en $(0, t]$.*

Prova: Siguin $U_1, U_2, \dots, U_k$ k v.a.i.i.d. con distribució uniforme en $(0, t]$. Siguin $U_{(1)}$ el més petit de $U_1, U_2, \dots, U_k$, $U_{(2)}$ el següent més petit, etc., així que amb probabilitat un tenim que $U_{(1)} < U_{(2)} < \dots < U_{(k)}$. A cada realització de $(U_{(1)}, U_{(2)}, \dots, U_{(k)})$ corresponen $k!$ permutacions de $(U_1, U_2, \dots, U_k)$, cada una amb la mateixa densitat $\frac{1}{t^k}$. La densitat conjunta de $(U_{(1)}, U_{(2)}, \dots, U_{(k)})$ està donada per

$$g(s_1, \dots, s_k) = \begin{cases} \dfrac{k!}{t^k} & \text{si } 0 < s_1 < s_2 < \dots < s_k \leq t \\ \\ 0 & \text{en cas contrari.} \end{cases}$$

Per la propietat (3.1.1), $T_1, T_2 - T_1, \dots, T_{k+1} - T_k$ són independents identicament distribuides amb densitat conjunta donada per

$$f(x_1, \dots, x_{k+1}) = \begin{cases} \lambda^{k+1} \exp\left\{ -\lambda \displaystyle\sum_{i=1}^{k+1} x_i \right\} & \text{si } x_i > 0 \text{ per cada } i \\ \\ 0 & \text{en cas contrari.} \end{cases}$$

Com que el Jacobià de la transformació

$$(x_1, \dots, x_{k+1}) \to (x_1, x_2 + x_1, \dots, x_1 + \dots + x_{k+1})$$

és 1, la densitat conjunta de $T_1, T_2, \dots, T_{k+1}$ està donada per

$$f_1(t_1, t_2, \dots, t_{k+1}) = \lambda^{k+1} e^{-\lambda t_{k+1}} \quad \text{per } 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{k+1}.$$

La densitat de la distribució condicional de $T_1, T_2, \dots, T_{k+1}$, donat $\{T_k \leq t < T_{k+1}\}$, és

$$\begin{aligned} f_2(s_1, s_2, \dots, s_{k+1}) &= \begin{cases} \dfrac{\lambda^{k-1} e^{-\lambda s_{k+1}}}{P(T_k \leq t < T_{k+1})} & \text{si } 0 < s_1 < s_2 < \dots < s_{k+1} \text{ i } s_k \leq t < s_{k+1} \\ \\ 0 & \text{en cas contrari} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \dfrac{\lambda^{k-1} e^{-\lambda s_{k+1}}}{e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}} = \dfrac{\lambda k! e^{-\lambda s_{k+1}}}{e^{-\lambda t} t^k} & \text{si } 0 < s_1 < s_2 < \dots < s_{k+1} \text{ i } s_k \leq t < s_{k+1} \\ \\ 0 & \text{en cas contrari,} \end{cases} \end{aligned}$$

on hem utilitzat que $P(T_k \leq t < T_{k+1}) = P(N_t = k)$.

Integrant respecte s_{k+1} obtenim que la densitat condicional de $T_1, T_2, \ldots, T_{k+1}$, donat $N_t = k$, és

$$f_3(s_1, s_2, \ldots, s_k) = \begin{cases} \dfrac{\lambda k!}{e^{-\lambda t} t^k} \displaystyle\int_t^{\infty} e^{-\lambda s_{k+1}}\, ds_{k+1} = \dfrac{k!}{e^{-\lambda t} t^k} e^{-\lambda t} = \dfrac{k!}{t^k} & \text{si } 0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_k \\ \\ 0 & \text{en cas contrari.} \end{cases}$$

Per tant hem demostrat que f_3 és igual a g, com volíem.

$\square$

3.2 Convergència d'uns processos construïts amb el procés de Poisson cap al moviment Brownià

Com hem fet pel passeig aleatori en el capítol anterior, veiem que un procés construït amb el procés de Poisson convergeix en llei cap al moviment Brownià.

Per fer-ho, considerem el següent procés

$$X_t^n := \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{nt} (-1)^{N(x)}\, dx$$

on $\{N(t) : t \geq 0\}$ és un procés de Poisson.

3.2.1 Demostració de l'ajustament d'una família de lleis

Utilitzem la mateixa demostració que per la convergència del passeig aleatori cap al moviment Browniá. Hem de demostrar que

$$E\left[(X_t^n - X_s^n)\right]^4 \leq C(t-s)^2 \,,$$

on C és una constant qualsevol.

$$E\left[(X_t^n - X_s^n)\right]^4 = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^4 E\left[\int_{ns}^{nt} (-1)^{N(x)} dx\right]^4 ;$$

on ara $\theta(x) := (-1)^{N(x)}$, aleshores l'última expressió és igual a:

$$\frac{1}{n^2}E\left[\left(\int_{ns}^{nt}\theta_1(x_1)dx_1\right)\left(\int_{ns}^{nt}\theta_2(x_2)dx_2\right)\left(\int_{ns}^{nt}\theta_3(x_3)dx_3\right)\left(\int_{ns}^{nt}\theta_4(x_4)dx_4\right)\right] =$$
$$= \frac{1}{n^2}E\left[\int_{ns}^{nt}\int_{ns}^{nt}\int_{ns}^{nt}\int_{ns}^{nt}\theta_1(x_1)\theta_2(x_2)\theta_3(x_3)\theta_4(x_4)\, dx_1dx_2dx_3dx_4\right] =$$

tenim $4! = 24$ possibles combinacions

$$= 24\cdot\frac{1}{n^2}E\left[\int_{ns}^{nt}\cdots\int_{ns}^{nt}\theta_1(x_1)\theta_2(x_2)\theta_3(x_3)\theta_4(x_4)I_{\{x_1\le x_2\le x_3\le x_4\}}\, dx_1\cdots dx_4\right] =$$
$$= \frac{24}{n^2}\int_{ns}^{nt}\cdots\int_{ns}^{nt}E\left[\theta_1(x_1)\theta_2(x_2)\theta_3(x_3)\theta_4(x_4)I_{\{x_1\le x_2\le x_3\le x_4\}}\right]\, dx_1\cdots dx_4. \quad (3.1)$$

Ara observem que

$$E\left[\theta_1(x_1)\theta_2(x_2)\theta_3(x_3)\theta_4(x_4)I_{\{x_1\le x_2\le x_3\le x_4\}}\right] =$$
$$= E\left[(-1)^{N(x_1)+N(x_2)}\cdot(-1)^{N(x_3)+N(x_4)}\cdot I_{\{x_1\le x_2\le x_3\le x_4\}}\right] \quad (3.2)$$

El que ens interessa és si $N(x_1)+N(x_2)$ i $N(x_3)+N(x_4)$ són parells o senars. Observem que $N(x_2)-N(x_1)$ té la mateixa paritat de $N(x_1)+N(x_2)$, i el mateix passa per $N(x_4)-N(x_3)$; per tant l'expressió (3.2) és equivalent a

$$E\left[(-1)^{N(x_2)-N(x_1)}\cdot(-1)^{N(x_4)-N(x_3)}\cdot I_{\{x_1\le x_2\le x_3\le x_4\}}\right] =$$

com que $(-1)^{N(x_2)-N(x_1)}$ i $(-1)^{N(x_4)-N(x_3)}$ són independents,

$$= E\left[(-1)^{N(x_2)-N(x_1)}\right]\cdot\left[(-1)^{N(x_4)-N(x_3)}\right]\cdot I_{\{x_1\le x_2\le x_3\le x_4\}} \le$$
$$\le E\left[(-1)^{N(x_2)-N(x_1)C_1}I_{\{x_1\le x_2\}}\right]\cdot \le E\left[(-1)^{N(x_4)-N(x_3)}I_{\{x_3\le x_4\}}\right]$$

on hem utilizat el fet que $I_{\{x_1\le x_2\le x_3\le x_4\}} \le I_{\{x_1\le x_2\}}\cdot I_{\{x_3\le x_4\}}$.

Calculem quant val $E[(-1)^Z]$ si $Z \sim Poiss(\lambda)$:

$$\begin{aligned} E[(-1)^Z] &= \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k P(Z=k) = \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \\ &= e^{-\lambda} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) = \\ &= e^{-\lambda} \left(\frac{e^{\lambda}+e^{-\lambda}}{2} - \frac{e^{\lambda}-e^{-\lambda}}{2} \right) = \\ &= e^{-2\lambda} \end{aligned}$$

on hem utilitzat que

$$\begin{aligned} e^x &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \\ e^{-x} &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-x)^k}{k!} \end{aligned}$$

per tant

$$\begin{aligned} e^x + e^{-x} &= 2\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \\ e^x - e^{-x} &= 2\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}. \end{aligned}$$

Llavors, com que $N(x_2) - N(x_1) \sim Poiss(x_2 - x_1)$,

$$E[(-1)^{N(x_2)-N(x_1)}] \cdot I_{\{x_1 \le x_2\}} = e^{-2(x_2-x_1)} I_{\{x_1 \le x_2\}}$$

Aleshores, l'equació (3.1) és

$$\begin{aligned} &\le \frac{24}{n^2} \int_{ns}^{nt} \cdots \int_{ns}^{nt} e^{-2(x_2-x_1)} I_{\{x_1 \le x_2\}} \cdot e^{-2(x_2-x_1)} I_{\{x_1 \le x_2\}}\, dx_1 \cdots dx_4 \\ &= \frac{24}{n^2} \left(\int_{ns}^{nt} \int_{ns}^{nt} e^{-2(x_2-x_1)} I_{\{x_1 \le x_2\}}\, dx_1 dx_2 \right)^2 \qquad (3.3) \end{aligned}$$

Observem que

$$\begin{aligned}
\int_{ns}^{nt}\int_{ns}^{nt} e^{-2(x_2-x_1)} I_{\{x_1\le x_2\}}\, dx_1 dx_2 &= \int_{ns}^{nt} e^{-2x_2}\left(\int_{ns}^{x_2} e^{2x_1}\, dx_1\right) dx_2 = \\
&= \int_{ns}^{nt} e^{-2x_2}\left[\frac{1}{2}e^{2x_1}\right]_{ns}^{x_2} dx_2 = \\
&= \int_{ns}^{nt} e^{-2x_2}\left[\frac{1}{2}(e^{2x_2}-e^{2ns})\right] dx_2 = \\
&= \int_{ns}^{nt} \frac{1}{2}\, dx_2 - \frac{e^{2ns}}{2}\int_{ns}^{nt} e^{-2x_2}\, dx_2 = \\
&= \frac{1}{2}\left[x_2\right]_{ns}^{nt} + \frac{e^{2ns}}{4}\left[e^{-2x_2}\right]_{ns}^{nt} = \\
&= \frac{n}{2}(t-s) + \frac{1}{4}e^{-2n(t-s)} - \frac{1}{4} \le \\
&\le \frac{n}{2}(t-s)
\end{aligned}$$

com que, donat $s < t$,

$$\frac{1}{4}e^{-2n(t-s)} - \frac{1}{4} \le 0.$$

Llavors, l'expressió (3.3) esdevé

$$\le \frac{24}{n^2}\left(\frac{n}{2}(t-s)^2\right) = \frac{24}{n^2}\cdot\frac{n^2}{4}\cdot(t-s)^2 = 6(t-s)^2$$

Per tant, hem demostrat que

$$E\left[(X_t^n - X_s^n)\right]^4 \le C(t-s)^2\,,$$

on C pren el valor $C = 6$.

Doncs acabem de demostrar la primera part del procediment que ens permit provar que el procés de Poisson convergeix cap al moviment Brownià.

3.2.2 Demostració de la convergència en llei

Demostrem que el procés X_n^t convergeix feblement en llei cap al moviment Brownià d'una manera diferent respecte a com ho haviem explicat pel passeig aleatori. Per fer-ho utilitzarem el teorema de Paul Levy. Abans d'enunciar el teorema és útil donar algunes definicions:

Definició 7. *X é adaptat a la filtració $\Im_t$ si X_t és $\Im_t$-mesurable.*

Definició 8. *Si $s < t$, X és martingala si $E(X_t|\Im_s) = X_s$*

Explicat d'una altra manera, una variable X és *martingala* si, per tot $s \leq t$, el valor condicional esperat de X_t respecte als valors de X_r amb $r \leq s$ és igual a X_s, es a dir, el valor condicional esperat d'una observació en algun moment t, tenint en compte totes les observacions fetes en temps anteriors, és igual a l'observació realitzada al temps s. Una martingala ś un model d'un joc just.

Donc, enunciem el teorema:

Teorema 3.2.1 (Teorema de Paul Levy)**.** *Sigui $X = \{X_t, \Im_t, 0 \leq t \leq +\infty\}$ un procés continu, adaptat en $\mathbb{R}$ tal que:*

- $X_0 = 0$*;*
- X_t *és martingala respecte* $\Im_t$*;*
- $< X, X >_s = s$

Aleshores X és un moviment Brownià.

Com primer pas, demostrem que X és martingala, és a dir, demostrem que
$$E(X_t|\Im_s) = X_s.$$
Això és equivalent a
$$E(X_t - X_s|\Im_s) = 0.$$
Per demostrar això és suficient demostrar que per tota funció $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua i fitada i $\forall s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq s_m \leq s$ tenim que

$$E[\varphi(X_{s_1}, X_{s_2}, \ldots, X_{s_m}) \cdot (X_t - X_s)] = 0.$$

En el nostre cas, tenim que $X_t - X_s = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{ns}^{nt} (-1)^{N(x)}\, dx$ és independent de $(X_{s_1}, X_{s_2}, \ldots, X_{s_m})$.

Veiem, per el teorema de la convergència dominada, que

$$\lim_{n \to +\infty} E[\varphi(X^n_{s_1}, X^n_{s_2}, \ldots, X^n_{s_m}) \cdot (X^n_t - X^n_s)] = E[\varphi(X_{s_1}, X_{s_2}, \ldots, X_{s_m}) \cdot (X_t - X_s)]$$

Utilitzem el fet que φ és fitada (suponem per una constante C_1) per poder aplicar el teorema de la convergència dominada:

$$\begin{aligned}
E[\varphi(X^n_{s_1}, X^n_{s_2}, \dots, X^n_{s_m}) \cdot (X^n_t - X^n_s)] \leq \\
&\leq E[|\varphi(X^n_{s_1}, X^n_{s_2}, \dots, X^n_{s_m})| \cdot |(X^n_t - X^n_s)|] \leq \\
&\leq C_1 \cdot E[|(X^n_t - X^n_s)|] \leq \\
&\leq C_1 \cdot (E[|(X^n_t - X^n_s)|]^2)^{\frac{1}{2}} \leq C_2(t-s)
\end{aligned}$$

Doncs, com que és fitada, podem aplicar el teorema de la convergència dominada:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} E[\varphi(X^n_{s_1}, X^n_{s_2}, \dots, X^n_{s_m}) \cdot (X^n_t - X^n_s)] = \\
&= \lim_{n\to+\infty} E[\varphi(X^n_{s_1}, X^n_{s_2}, \dots, X^n_{s_m})] \cdot E[(X^n_t - X^n_s)] \leq \\
&\leq \lim_{n\to+\infty} C_1 \cdot |E[(X^n_t - X^n_s)]| = \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{C_1}{\sqrt{n}} |\int_{ns}^{nt} E(-1)^{N(x)}\, dx| = \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{C_1}{\sqrt{n}} \int_{ns}^{nt} e^{-2x}\, dx = \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{C_1}{2\sqrt{n}} (e^{-2ns} - e^{-2nt}) = 0
\end{aligned}$$

Ara demostrem que $< X, X >_s = s$.

Per fer-ho, donem algunes deficions importants:

Definició 9. *Sigui $X = \{X_t, \Im_t, 0 \leq t \leq +\infty\}$ martingala. Diem que X és de quadrat integrable si $E[X_t^2] < \infty$ per cada $t \geq 0$. A més a més, si $X_0 = 0$ escrivim $X \in \mathcal{M}_2$, on $\mathcal{M}_2$ és el conjunt de martingales de quadrat integrable.*

Definició 10. *Per $X \in \mathcal{M}_2$ definim la variació quadràtica de X com el procés $< X >$ que és l'únic procés natural creixent adaptat amb $X_0 = 0$ tal que $X^2 - < X >$ és martingala.*

Hem de veure que $Y = \{X_t^2 - t, t \in \mathbb{R}\}$ és martingala. Això és equivalent a demostrar que $\forall s < t$, per tota funció contínua i fitada φ i $\forall s_1 \leq \dots \leq s_m \leq s$

$$E[\varphi(X_{s_1}, \dots, X_{s_m}) \cdot (Y_t - Y_s)] = 0$$

on $Y_t = X_t^2 - t$.

Pel que hem demostrat abans sabem que

$$\begin{aligned}
&E[\varphi(X_{s_1}, \ldots, X_{s_m}) \cdot (Y_t - Y_s)] = \\
&\quad = \lim_{n\to+\infty} E[\varphi(X^n_{s_1}, \ldots, X^n_{s_m}) \cdot (Y_t - Y_s)] = \\
&\quad \leq \lim_{n\to+\infty} E[|\varphi(X^n_{s_1}, \ldots, X^n_{s_m})|] \cdot E[(Y_t - Y_s)] \leq \\
&\quad \leq \lim_{n\to+\infty} C_1 \cdot |E[Y_t - Y_s]| = \\
&\quad = \lim_{n\to+\infty} C_1 \cdot |E[(X^n_t)^2 - (X^n_s)^2 - (t-s)]| = \\
&\quad = \lim_{n\to+\infty} C_1 \cdot |E[(X^n_t - X^n_s)^2] - (t-s)|
\end{aligned}$$

D'on, al últim pas, hem utilitzat que

$$\begin{aligned}
E[(X^n_t - X^n_s)^2] &= E[(X^n_t)^2 + (X^n_s)^2 - 2X^n_t X^n_s] = \\
&= E[(X^n_t)^2] + E[(X^n_s)^2] - 2E\left[[(X^n_t - X^n_s) + X^n_s]X^n_s\right] = \\
&= E[(X^n_t)^2] + E[(X^n_s)^2] - 2E[X^n_t - X^n_s]E[X^n_s] - 2E[(X^n_s)^2] = \\
&= E[(X^n_t)^2] - E[(X^n_s)^2] - 2E[X^n_t - X^n_s]E[X^n_s] = \\
&= E[(X^n_t)^2] - E[(X^n_s)^2]
\end{aligned}$$

ja que $X^n_t - X^n_s$ i X^n_s són independents i, com que $E[X^n_t - X^n_s] \to 0$ i $E[X^n_s] \to 0$ quan $n \to \infty$,

$$\lim_{n\to+\infty} 2E[X^n_t - X^n_s]E[X^n_s] = 0.$$

Ara calculem el valor de $E[(X^n_t - X^n_s)^2]$. Utilitzem la mateixa notació d'abans: $\theta(x) := (-1)^{N(x)}$.

$$\begin{aligned}
E[(X_t^n - X_s^n)^2] &= \frac{1}{n}E\left[\int_{ns}^{nt}\theta_1(x_1)\,dx_1\int_{ns}^{nt}\theta_2(x_2)\,dx_2\right] = \\
&= \frac{1}{n}E\left[\int_{ns}^{nt}\int_{ns}^{nt}\theta_1(x_1)\theta_2(x_2)(I_{x_1\leq x_2}+I_{x_2\leq x_1})\,dx_1dx_2\right] = \\
&= \frac{1}{n}\int_{ns}^{nt}\int_{ns}^{x_2}e^{-2(x_2-x_1)}\,dx_1dx_2 + \frac{1}{n}\int_{ns}^{nt}\int_{ns}^{x_1}e^{-2(x_1-x_2)}\,dx_2dx_1 = \\
&= \frac{2}{n}\int_{ns}^{nt}\int_{ns}^{x_2}e^{-2(x_2-x_1)}\,dx_1dx_2 = \\
&= \frac{2}{n}\int_{ns}^{nt}e^{-2x_2}\left[\frac{1}{2}e^{2x_1}\right]_{ns}^{x_2}\,dx_2 = \\
&= \frac{2}{n}\int_{ns}^{nt}e^{-2x_2}\left[\frac{1}{2}e^{2x_2}-\frac{1}{2}e^{2ns}\right]\,dx_2 = \\
&= \frac{1}{n}\int_{ns}^{nt}1-e^{-2(x_2-ns)}\,dx_2 = \\
&= \frac{1}{n}[x_2]_{ns}^{nt} - \frac{1}{n}e^{2ns}\left[-\frac{1}{2}e^{-2x_2}\right]_{ns}^{nt} = \\
&= \frac{1}{n}n(t-s)+\frac{1}{n}\frac{e^{2ns}}{2}(e^{-2nt}-e^{-2ns}) = \\
&= (t-s)+\frac{1}{2n}(e^{-2n(t-s)}-1)
\end{aligned}$$

Per tant, tenim que

$$\lim_{n\to+\infty}E[(X_t^n - X_s^n)^2] = t-s$$

i acabem de demostrar que

$$E[\varphi(X_{s_1},\ldots,X_{s_m})\cdot(Y_t-Y_s)] = 0$$

Per tant, hem demostrat com un procés construït amb el procés de Poisson convergeix en cap al moviment Brownià.

Conclusions

En aquest treball hem donat una definició matemàtica del moviment Brownià i hem descrit un mètode que demostra la convergència de un procés cap a aquest moviment. Als següents capítols hem definit i descrit el passeig aleatori i el procés de Poisson com processos estocàstics, i d'aquest últim hem estudiat algunes propietats importants. Utilitzant el mètode que hem descrit, hem demostrat com aquests dos processos convergeix cap al moviment Brownià.

Aquest tipus de resultats és molt important per diverses motivacions i es pot utilitzar en varis àmbits. Una de les seves utilitzacions és la simulació de processos. Actualment, el moviment Brownià troba aplicació en molts models de la física i de l'economia. Sovint és necessari fer algunes simulacions d'aquests models per estudiar-ne el comportament. Els resultat que hem vist en aquest treball ens permiten obtenir de manera senzilla processos que convergeixen i aproximen el moviment Brownià. D'aquesta manera, per tant, podem obtenir aproximacions dels models que volem estudiar i que ens simplifiquen el estudi.

Aquests resultats troben més utilitzacions pràtiques. En general per demostrar algunes propietats d'un moviment a vegades és més senzill estudiar els processos que l'aproximen i transportar les propietats al procés límit. En el nostre cas, això es tradueix en estudiar determinats comportaments i determinades propietats del passeig aleatori i del procés de Poisson i aplicar els resultats que trobem al moviment Brownià.

Per tant, en aquest treball hem demostrat alguns resultats relatius al moviment Brownià, al passeig aleatori i al procés de Poisson que poden ser aplicats per simplicar el estudi de processos que a vegades podrien resultar més complicats.

Referències

[**1**] Bailey, D. H., Borwein, J.M., Kapoor, V., Weisstein, E.W. Ten Problems in Experimental Mathematics, *Amer. Math. Monthly* 113, 481-509, 2006.

[**2**] Bardina, X. The complex Brownian Motion as a weak limit of processes constructited from a Poisson process, *Proceedings of the 7-th Workshop on Stochastic Analysis and Related Fields*, 2000.

[**3**] Bardina, X. Del passeig aletori al moviment Brownià. *Article*, 2010.

[**4**] Billingsley, P. Convergence of probability measures. *John Wiley & Sons Inc.*, 1968.

[**5**] Einstein, A. On the movement of small particles suspended in a stationary liquid demanded by the molecular-kinetic theory of heat. *Ann. Physik*, 1905.

[**6**] Karatzas, I., Shreve, S.E. Brownian motion and stochastic calculus. (Second edition) *Springer-verlag*, 1991.

[**7**] Kunita, H., Watanabe, S. On square-integrable martingales. *Nagoya Math. J.*, 1967.

[**8**] Levy, P. Processus stochastiques et mouvement Brownien. *Gauthier-Villars*, Paris, 1948.