Universitat de Barcelona
Facultat de Matemàtiques i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

# Aproximació del moviment Brownià

Autor: Pau López Gil-Pérez

Director: David Màrquez Carreras
Realitzat a: Facultat de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 3 de novembre de 2025

# Índex

# Introducció

En el capítol 2, donarem les principals definicions i resultats que ens permetran estudiar la convergència de certs processos estocàstics cap al moviment Brownià. El resultat principal que desenvoluparem és l'anomenat *principi d'invariància de Donsker*, també conegut com a *teorema de Donsker* o *teorema central del límit funcional*, que estableix la convergència de certs processos estocàstics discrets cap al moviment Brownià.

## Capítol 1

# El moviment brownià

### 1.1 Definició i propietats bàsiques

### 1.2 Variants del moviment brownià

# Capítol 2

# Convergència cap al moviment Brownià

D'ara endavant, treballarem en un espai mètric $(S, \rho)$ separable i complet, junt amb la seva $\sigma$-àlgebra de Borel $\mathcal{S}$, i denotarem per $\mathcal{P}(S)$ l'espai de mesures de probabilitat en $(S, \mathcal{S})$. En el cas particular del moviment brownià, és útil treballar amb l'espai $S = C$ de funcions contínues definides a l'interval $[0, \infty)$ i amb valors reals, en el qual és possible definir una mètrica [1], junt amb la seva $\sigma$-àlgebra de Borel $\mathcal{C}$.

A més, és habitual dotar $\mathcal{P}(S)$ amb l'anomenada *topologia feble* [2], i metritzar-la mitjançant la *mètrica de Prokhorov*, per la qual la convergència de mesures de probabilitat és equivalent a la convergència feble que veurem a continuació [3]. Si més no, aquests resultats no seran necessaris per al treball que desenvoluparem.

## 2.1 Modes de convergència

**Definició 2.1.1.** *Sigui* $\{\mathbb{P}_n\}_n \subset \mathcal{P}(S)$ *una successió de mesures de probabilitat i* $\mathbb{P} \in \mathcal{P}(S)$ *una altra mesura de probabilitat. Diem que* $\{\mathbb{P}_n\}_n$ convergeix feblement *cap a* $\mathbb{P}$*, i escrivim* $\mathbb{P}_n \xrightarrow{w} \mathbb{P}$*, si per a tota funció* $f : S \to \mathbb{R}$ *contínua i acotada es compleix que*

$$\lim_{n\to\infty} \int_S f(s) d\mathbb{P}_n(s) = \int_S f(s) d\mathbb{P}(s).$$

**Observació 2.1.2.** En particular, el límit feble $\mathbb{P}$ és una mesura de probabilitat, ja que si prenem $f \equiv 1$ obtenim que

$$\lim_{n\to\infty} \int_S 1 \, d\mathbb{P}_n(s) = \int_S 1 \, d\mathbb{P}(s) \implies \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_n(S) = \mathbb{P}(S) \implies \mathbb{P}(S) = 1.$$

Ara, considerem una variable aleatòria $X$ en un espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ amb valors a $(S, \mathcal{S})$. Recordem que la *llei de* $X$ és la mesura de probabilitat $\mathcal{L}(X) \in \mathcal{P}(S)$ definida per

$$\mathcal{L}(X)(B) := \mathbb{P}(X^{-1}(B)) = \mathbb{P}(X \in B) \quad \forall B \in \mathcal{S}.$$

[1]Vegeu Karatzas i Shreve 1991 - pàg 60.

[2]Vegeu Dudley 2002 - pàg 194 o Bardina 2015 - pàg 29.

[3]Vegeu Billingsley 1999 - pàg 72 o Dudley 2002 - cap. 11.3

**Definició 2.1.3.** *Sigui $\{X_n\}_n$ una successió de variables aleatòries en un espai amb valors a $(S,\mathcal{S})$. Sigui $X$ una altra variable aleatòria amb valors a $(S,\mathcal{S})$. Diem que $\{X_n\}_n$* convergeix en llei *cap $X$, i escrivim $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$, si les lleis de les variables aleatòries $X_n$ convergeixen feblement cap a la llei de $X$. És a dir, si*

$$\mathcal{L}(X_n) \xrightarrow{w} \mathcal{L}(X).$$

**Observació 2.1.4.** Aquesta condició és equivalent a demanar que per a tota funció $f : S \to \mathbb{R}$ contínua i acotada es compleixi que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[f(X_n)] = \mathbb{E}[f(X)],$$

ja que mitjançant un canvi de variable tenim que

$$\mathbb{E}[f(X_n)] = \int_{\Omega_n} f(X_n(\omega))d\mathbb{P}_n(\omega) = \int_S f(s)d\mathbb{P}_n X_n^{-1}(s),$$

i de manera anàloga,

$$\mathbb{E}[f(X)] = \int_{\Omega} f(X(\omega))d\mathbb{P}(\omega) = \int_S f(s)d\mathbb{P}X^{-1}(s).$$

**Definició 2.1.5.** *Sigui $\{X_n\}_n$ una successió de variables aleatòries en un mateix espai de probabilitat $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ amb valors a $(S,\mathcal{S})$. Sigui $X$ una variable aleatòria en el mateix espai de probabilitat amb valors a $(S,\mathcal{S})$. Diem que $\{X_n\}_n$* convergeix en probabilitat *cap a $X$, i escrivim $X_n \xrightarrow{P} X$, si per a tot $\varepsilon > 0$ es compleix que*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\rho(X_n, X) > \varepsilon) = 0.$$

*Com a cas particular, diem que $\{X_n\}_n$* convergeix en probabilitat cap a *$s \in S$, i escrivim $X_n \xrightarrow{P} s$, si $\{X_n\}_n$ convergeix en probabilitat cap a la variable aleatòria constant $X \equiv s$. És a dir, si per a tot $\varepsilon > 0$ es compleix que*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\rho(X_n, s) > \varepsilon) = 0.$$

## 2.2 Ajustament i Teorema de Prohorov

**Definició 2.2.1.** *Diem que una família $\Pi \subset \mathcal{P}(S)$ de mesures de probabilitat és relativament compacte si i només si tota successió d'elements de $\Pi$ admet una subsuccessió feblement convergent. És a dir, si donada $\{\mathbb{P}_n\}_n \subset \Pi$, existeixen una subsuccessió $\{\mathbb{P}_{n_k}\}_k \subset \{\mathbb{P}_n\}_n$ i una mesura de probabilitat $\mathbb{P} \in \mathcal{P}(S)$ tals que $\mathbb{P}_{n_k} \xrightarrow{w} \mathbb{P}$. D'igual manera, diem que una successió de variables aleatòries $\{X_n\}_n$ és relativament compacta si la família de les seves lleis $\{\mathcal{L}(X_n)\}_n$ ho és.*

**Observació 2.2.2.** Si una successió $\{\mathbb{P}_n\}_n \subset \mathcal{P}(S)$ de mesures de probabilitat convergeix feblement cap a una mesura de probabilitat $\mathbb{P}$, aleshores és relativament compacta. Per tant, si una successió de variables aleatòries $\{X_n\}_n$ convergeix en llei cap a una variable aleatòria $X$, aleshores és relativament compacta.

**Definició 2.2.3.** *Diem que una família $\Pi \subset \mathcal{P}(S)$ de mesures de probabilitat és* ajustada *si $\forall\varepsilon > 0$ existeix un conjunt compacte $K_\varepsilon \subset S$ tal que $\mathbb{P}(K_\varepsilon) \geq 1-\varepsilon$, $\forall \mathbb{P} \in \Pi$. D'igual manera, diem que una successió de variables aleatòries $\{X_n\}_n$ amb valors en $S$ és* ajustada *si la família de les seves lleis $\{\mathcal{L}(X_n)\}_n$ ho és. És a dir, si $\forall\varepsilon > 0$ existeix un conjunt compacte $K_\varepsilon \subset S$ tal que $\mathbb{P}(X_n \in K_\varepsilon) \geq 1-\varepsilon$, $\forall n \geq 1$.*

**Teorema 2.2.4** (Teorema de Prohorov)**.** *Una família $\Pi \subset \mathcal{P}(S)$ de mesures de probabilitat és relativament compacte si i només si és ajustada.*

*Prova.* M'agradaria comentar si podem evitar aquesta demostració.

□

## 2.3 El principi d'invariància de Donsker

Sigui $\{\xi_n\}_n$ una seqüència de variables aleatòries independents i idènticament distribuïdes amb esperança 0 i variància $\sigma^2$, $0 < \sigma < \infty$. Considerem la successió de sumes parcials $S_0 = 0$ i $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$ per a $n \geq 1$. Per a cada $n \in \mathbb{N}$, considerem el procés de sumes parcials

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} S_{\lfloor nt \rfloor}, \quad t \in [0, \infty],$$

i la corresponent interpolació lineal d'aquest procés,

$$X_t^{(n)} = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \left( S_{\lfloor nt \rfloor} + (nt - \lfloor nt \rfloor)\xi_{\lfloor nt \rfloor + 1} \right), \quad t \in [0, \infty]. \tag{2.1}$$

En aquest capítol, veurem que la successió de processos $\{X^{(n)}\}_n$ convergeix en llei cap al moviment Brownià estàndard $B$.

**Lema 2.3.1.** *Siguin $\left\{X^{(n)}\right\}_n$, $\left\{Y^{(n)}\right\}_n$ i $X$ variables aleatòries amb valors a $(S, \rho)$, tals que per a tot $n \geq 1$, $X^{(n)}$ i $Y^{(n)}$ estan definides en el mateix espai de probabilitats. Suposem que $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ i que $\rho(X^n, Y^n) \xrightarrow{P} 0$. Aleshores, $Y^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$. Karatzas i Shreve 1991, pàg 120*

*Prova. Siguin $\{(\Omega_n, \mathcal{F}_n, \mathbb{P}_n)\}_n$ els espais de probabilitat on estan definides les variables aleatòries $X^{(n)}$ i $Y^{(n)}$. Sigui $\{(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})\}_n$ un altre espai de probabilitat on està definida la variable aleatòria $X$. Sigui $f : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ una funció contínua i acotada. Per la observació 2.1.4, és suficient demostrar que*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_n[f(X^{(n)}) - f(Y^{(n)})] = 0.$$

*Sigui $M = \sup_{s \in \mathcal{S}} |f(s)| < \infty$. Per l'observació 2.2.2, com $X^{(n)} \xrightarrow{\mathcal{L}} X$, aleshores $\{X^{(n)}\}_n$ és relativament compacta. Pel teorema de Prohorov, aleshores $\{X^{(n)}\}_n$ és ajustada. Per tant, per a tot $\varepsilon > 0$, existeix un conjunt compacte $K_\varepsilon \subset \mathcal{S}$ tal que*

$$\mathbb{P}_n(X^{(n)} \in K_\varepsilon) \geq 1 - \frac{\varepsilon}{6M}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

*Com $f$ és continua, existeix $0 < \delta < 1$ tal que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/3$ per a qualssevol $x, y \in K_\varepsilon$ tals que $\rho(x, y) < \delta$. Per altra banda, per hipòtesi $\rho(X^n, Y^n) \xrightarrow{P} 0$. Per tant, existeix $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que*

$$\mathbb{P}_n(\rho(X^{(n)}, Y^{(n)}) > \delta) < \frac{\varepsilon}{6M}, \quad \forall n \geq n_0.$$

*Tot plegat, per a tot $n \geq n_0$,*

$$\begin{aligned}\left|\int_{\Omega_n} f(X^{(n)}) - f(Y^{(n)})\, d\mathbb{P}_n\right| \leq \frac{\varepsilon}{3}\mathbb{P}_n\left(X^{(n)} \in K, \rho(X^{(n)}, Y^{(n)}) < \delta\right) \\ + 2M\,\mathbb{P}_n\left(X^{(n)} \notin K\right) \\ + 2M\,\mathbb{P}_n\left(\rho(X^{(n)}, Y^{(n)}) > \delta\right) \leq \varepsilon.\end{aligned}$$

$\square$

**Lema 2.3.2.** *Siguin $\left\{X^{(n)}\right\}_n$ i $X$ variables aleatòries amb valors a $(S, \mathcal{S})$. Sigui $(S', \mathcal{S}')$ un altre espai mètric i sigui $\varphi : S \to S'$ una funció contínua. Si $X^{(n)} \xrightarrow{\mathcal{L}} X$, aleshores $\varphi(X^{(n)}) \xrightarrow{\mathcal{L}} \varphi(X)$. Billingsley 1999, pàg 20*

*Prova. Sigui $f : S' \to \mathbb{R}$ una funció contínua i acotada. Aleshores, $f \circ \varphi : S \to \mathbb{R}$ és també contínua i acotada. Per l'observació 2.1.4, com $X^{(n)} \xrightarrow{\mathcal{L}} X$, aleshores*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[f(\varphi(X^{(n)}))] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[(f \circ \varphi)(X^{(n)})] = \mathbb{E}[(f \circ \varphi)(X)] = \mathbb{E}[f(\varphi(X))].$$

*Novament per l'observació 2.1.4, això equival a $\varphi(X^{(n)}) \xrightarrow{\mathcal{L}} \varphi(X)$.*

$\square$

**Teorema 2.3.3.** *Sigui $\{X^{(n)}\}_n$ la successió de processos definits a l'equació (2.1). Siguin $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_d < \infty$. Aleshores,*

$$\left(X^{(n)}_{t_1}, X^{(n)}_{t_2}, \ldots, X^{(n)}_{t_d}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} (B_{t_1}, B_{t_2}, \ldots, B_{t_d}) \quad \text{quan } n \to \infty,$$

*on $\left\{B_t, \mathcal{F}^B_t; t \geq 0\right\}$ és un moviment Brownià estàndard. Karatzas i Shreve 1991, teorema 4.15, pàg 67*

*Prova. Considerarem el cas $d = 2$. El cas general és anàleg però la notació és més feixuga. Siguin $s = t_1$ i $t = t_2$. Volem veure que*

$$\left(X^{(n)}_s, X^{(n)}_t\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} (B_s, B_t).$$

*Per la definició d'interpolació lineal (2.1), per a tot $u \geq 0$ tenim*

$$\left|X^{(n)}_u - \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} S_{\lfloor nu \rfloor}\right| \leq \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \left|\xi_{\lfloor nu \rfloor + 1}\right|.$$

*Ara, sigui $\varepsilon > 0$. Aplicant la desigualtat de Txebixev,*

$$\mathbb{P}\left(\left|X^{(n)}_u - \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} S_{\lfloor nu \rfloor}\right| > \varepsilon\right) \leq \mathbb{P}\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \left|\xi_{\lfloor nu \rfloor + 1}\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2\,\sigma^2 n} = \frac{1}{\varepsilon^2 n} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

*En particular, això val per $u = s$ i $u = t$, i per tant*

$$\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} S_{\lfloor ns \rfloor}, \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} S_{\lfloor nt \rfloor}\right) \xrightarrow{P} \left(X^{(n)}_s, X^{(n)}_t\right).$$

*Per el lema 2.3.1, és suficient provar que*

$$\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} S_{\lfloor ns \rfloor}, \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} S_{\lfloor nt \rfloor}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} (B_s, B_t).$$

*Considerem l'aplicació contínua $\varphi(x, y) = (x, y - x)$. Per el lema 2.3.2, és equivalent demostrar que*

$$\left( \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{\lfloor ns \rfloor} \xi_j, \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{j=\lfloor ns \rfloor+1}^{\lfloor nt \rfloor} \xi_j \right) \xrightarrow{\mathcal{L}} (B_s, B_t - B_s).$$

*Per construcció, les variables aleatòries $\{\xi_j\}_{j\geq 1}$ són independents. Així doncs, les variables aleatòries dels dos sumatoris son diferents i, per tant, independents. Siguin $u, v \in \mathbb{R}$. Aleshores,*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E} \left[ \exp\left\{ \frac{iu}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{\lfloor ns \rfloor} \xi_j + \frac{iv}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{j=\lfloor ns \rfloor+1}^{\lfloor nt \rfloor} \xi_j \right\} \right] =$$

$$= \mathbb{E} \left[ \exp\left\{ \frac{iu}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{\lfloor ns \rfloor} \xi_j \right\} \right] \cdot \mathbb{E} \left[ \exp\left\{ \frac{iv}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{j=\lfloor ns \rfloor+1}^{\lfloor nt \rfloor} \xi_j \right\} \right]. \quad (2.2)$$

*Fixem-nos en el primer factor (l'altre és idèntic substituïnt s per $t - s$). Com que*

$$\left| \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{\lfloor ns \rfloor} \xi_j - \frac{\sqrt{s}}{\sigma\sqrt{\lfloor ns \rfloor}} \sum_{j=1}^{\lfloor ns \rfloor} \xi_j \right| \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0,$$

*i pel teorema central del límit*

$$\frac{\sqrt{s}}{\sigma\sqrt{\lfloor ns \rfloor}} \sum_{j=1}^{\lfloor ns \rfloor} \xi_j \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, s),$$

*aleshores obtenim que*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E} \left[ \exp\left\{ \frac{iu}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{\lfloor ns \rfloor} \xi_j \right\} \right] = e^{-\frac{u^2 s}{2}}.$$

*De manera anàloga,*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E} \left[ \exp\left\{ \frac{iv}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{j=\lfloor ns \rfloor+1}^{\lfloor nt \rfloor} \xi_j \right\} \right] = e^{-\frac{v^2(t-s)}{2}}.$$

*Substituïnt aquestes expressions a (2.2), obtenim*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E} \left[ \exp\left\{ \frac{iu}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{\lfloor ns \rfloor} \xi_j + \frac{iv}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{j=\lfloor ns \rfloor+1}^{\lfloor nt \rfloor} \xi_j \right\} \right] = e^{-\frac{u^2 s}{2}} e^{-\frac{v^2(t-s)}{2}},$$

□

**Teorema 2.3.4.** *Sigui $X$ un procés continu i sigui $\left\{X^{(n)}\right\}_n$ una seqüència ajustada de processos continus tal que per a qualssevol $0 \leq t_1 \leq ... \leq t_d \leq \infty$,*

$$\left( X_{t_1}^{(n)}, ..., X_{t_d}^{(n)} \right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \left( X_{t_1}, ..., X_{t_d} \right).$$

*Aleshores,* $\left\{X^{(n)}\right\}_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$*.* *Karatzas i Shreve 1991, teorema 4.15, pàg 65*

*Prova. Volem veure que* $\left\{X^{(n)}\right\}_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$*. És a dir, que* $\mathcal{L}(X^{(n)}) \xrightarrow{w} \mathcal{L}(X)$*, entenent* $\left\{X^{(n)}\right\}_n$ *i* $X$ *com variables aleatòries amb valors a* $(C, \mathcal{C})$*.*

*Per el teorema de Prohorov, com* $\left\{X^{(n)}\right\}_n$ *és ajustada, aleshores és relativament compacta. Per tant, tota subsuccessió* $\left\{X^{(n_k)}\right\}_k \subset \left\{X^{(n)}\right\}_n$ *té una subsuccessió* $\left\{Y^{(n)}\right\}_n \subset \left\{X^{(n_k)}\right\}_k$ *tal que* $\mathcal{L}(Y^{(n)}) \xrightarrow{w} \mathbb{P}$*, per a alguna* $\mathbb{P} \in \mathcal{P}(C)$*.*

*Suposem que una altra subsuccessió* $\left\{Z^{(n)}\right\}_n$ *indueix mesures a* $(C, \mathcal{C})$ *que convergeixen feblement a una mesura* $\mathbb{Q} \in \mathcal{P}(C)$*. Aleshores,* $\mathbb{P}$ *i* $\mathbb{Q}$ *han de tenir les mateixes distribucions a dimensió finita. És a dir,*

$$\mathbb{P}\left[w \in \mathcal{C} : (w(t_1), \ldots, w(t_d)) \in A\right] = \mathbb{Q}\left[w \in \mathcal{C} : (w(t_1), \ldots, w(t_d)) \in A\right]$$

*per a tot* $0 \leq t_1 < t_2 \ldots < t_d < \infty$*,* $A \in \mathcal{B}(\mathcal{R}^d)$*,* $d \geq 1$*. Per tant,* $\mathbb{P} = \mathbb{Q}$*.*

*Ara, suposem que la seqüència de mesures* $\left\{\mathcal{L}(X^{(n)})\right\}_n$ *no convergeix feblement a* $\mathcal{L}(X)$*. Aleshores, existeix una funció* $f : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ *contínua i acotada tal que el límit* $\lim_{n\to\infty} \int f(w)\mathcal{L}(X_n)(dw)$ *no existeix, o bé és diferent de* $\int f(w)\mathcal{L}(X)(dw)$*. En qualsevol cas, pel teorema de Prohorov, podem escollir una subseqüència* $\left\{\mathcal{L}(X^{(n_k)})\right\}_k$ *tal que* $\lim_{k\to\infty} \int f(w)\mathcal{L}(X_k)(dw)$ *existeix però és diferent de* $\int f(w)\mathcal{L}(X)(dw)$*. Aquesta subseqüència no conté cap subseqüència* $\left\{\mathcal{L}(X^{(n_{kl})})\right\}_l$ *tal que* $\mathcal{L}(X^{(n_{kl})}) \xrightarrow{w} \mathcal{L}(X)$*, cosa que contradiu la conclusió del paràgraf anterior.*

□

**Teorema 2.3.5** (Teorema de Donsker)**.** *Sigui* $\left\{X^{(n)}\right\}_n$ *la successió de processos definits a l'equació* (2.1)*. Aleshores,* $X^{(n)} \xrightarrow{\mathcal{L}} B$*, on* $\left\{B_t, \mathcal{F}_t^B; t \geq 0\right\}$ *és un moviment Brownià estàndard.*

*Prova. Pels teoremes 2.3.3 i 2.3.4 que acabem de veure, només resta demostrar l'ajustament de la successió de processos* $\{X^{(n)}\}_n$*. Això requereix una caracterització de l'ajustament a l'espai* $\mathcal{C}$*, que es pot trobar detallada a Billingsley 1999 i Karatzas i Shreve 1991. En aquest treball, demostrarem l'ajustament per a una família de processos construïts a partir del passeig aleatori com a cas particular.*

□

## 2.4 Convergència del passeig aleatori cap al moviment brownià

Considerem les variables aleatòries $\{\xi_n\}_n$ independents i idènticament distribuïdes amb valors a $\{-1, 1\}$, tals que

$$\mathbb{P}(\xi_n = 1) = \mathbb{P}(\xi_n = -1) = \frac{1}{2} \qquad n \geq 1.$$

Diem que $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$ és un passeig aleatòri. Com a cas particular del teorema de Donsker, veurem que la corresponent interpolació linial $\{X^{(n)}\}_n$, definida com a (2.1), convergeix en llei al moviment brownià. Per a aquest propòsit, ens serà útil el següent criteri:

**Teorema 2.4.1** (Criteri de Billingsley). *Una successió de processos $\{X^{(n)}\}_n$ és ajustada si se satisfan aquestes dues condicions:*

*a) La successió $\{X_0^{(n)}\}_n$ és ajustada.*

*b) Existeixen constants $\gamma \geq 0$ i $\alpha > 1$ i una funció $F \in \mathcal{C}$ no decreixent tal que*

$$\mathbb{P}\{|X_t^{(n)} - X_s^{(n)}| \geq \lambda\} \leq \frac{1}{\lambda^\gamma}|F(t) - F(s)|^\alpha \tag{2.3}$$

*per a tot $s, t \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ i $\lambda > 0$.*

*Prova.* *Aquest resultat va ser demostrat per primer cop a Billingsley 1968.*

□

D'una banda, observem que la condició

$$\mathbb{E}[|X_t^{(n)} - X_s^{(n)}|^\gamma] \leq |F(t) - F(s)|^\alpha$$

implica (2.3) per la desigualtat de Txebixev. D'altra banda, en el nostre cas, $X_0^{(n)} = 0$ per a tot $n \in \mathbb{N}$. Per tant, per a demostrar l'ajustament, és suficient provar que existeixen constants $\gamma \geq 0$ i $\alpha > 1$ i una funció contínua $F \in \mathcal{C}$ no decreixent tal que

$$\mathbb{E}[|X_t^{(n)} - X_s^{(n)}|^\gamma] \leq |F(t) - F(s)|^\alpha.$$

Concretament, en el nostre cas on $\{X^{(n)}\}_n$ eren les trajectòries del passeig aleatori convenientment normalitzades, demostrarem que

**Proposició 2.4.2.** *Per a tot $s < t < \infty$,*

$$\mathbb{E}[(X_t^{(n)} - X_s^{(n)})^4] \leq C(t-s)^2.$$

*Prova.* *Recordem que en el cas del passeig aleatori, $\mathbb{E}[\xi_k] = 0$ i $\mathrm{Var}(\xi_k) = 1$ per a tot $k \geq 1$. Observem que podem escriure els processos $X_t^{(n)}$ de la següent manera:*

$$X_t^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{nt} \theta(x)\, dx, \qquad \text{on} \qquad \theta(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \mathbf{1}_{[k-1,k)}(x).$$

*En efecte, partint de la definició (2.1), tenim que*

$$\begin{aligned}
X_t^{(n)} &= \frac{1}{\sqrt{n}} \left( \sum_{j=1}^{\lfloor nt \rfloor} \xi_j + (nt - \lfloor nt \rfloor)\xi_{\lfloor nt \rfloor + 1} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} \left( \sum_{j=1}^{\lfloor nt \rfloor} \int_{j-1}^{j} \xi_j\, dx + \int_{\lfloor nt \rfloor}^{nt} \xi_{\lfloor nt \rfloor + 1}\, dx \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} \left( \int_0^{\lfloor nt \rfloor} \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \mathbf{1}_{[k-1,k)}(x)\, dx + \int_{\lfloor nt \rfloor}^{nt} \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \mathbf{1}_{[k-1,k)}(x)\, dx \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{nt} \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \mathbf{1}_{[k-1,k)}(x)\, dx.
\end{aligned}$$

*Aleshores,*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big[(X_t^{(n)}-X_s^{(n)})^4\big] &= \frac{1}{n^2}\mathbb{E}\left[\left(\int_{ns}^{nt}\theta(x)\,dx\right)^4\right]\\ &= \frac{1}{n^2}\mathbb{E}\left[\int_{ns}^{nt}\cdots\int_{ns}^{nt}\theta(x_1)\cdots\theta(x_4)\,dx_1\cdots dx_4\right].\end{aligned}$$

*Com tenim* $4! = 24$ *possibles combinacions d'ordenar les variables* $x_1, x_2, x_3, x_4$*, aleshores*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big[(X_t^{(n)}-X_s^{(n)})^4\big] &= \frac{24}{n^2}\mathbb{E}\left[\int_{ns}^{nt}\cdots\int_{ns}^{nt}\theta(x_1)\cdots\theta(x_4)\mathbf{1}_{\{x_1\le x_2\le x_3\le x_4\}}\,dx_1\cdots dx_4\right]\\ &= \frac{24}{n^2}\int_{ns}^{nt}\cdots\int_{ns}^{nt}\mathbb{E}\big[\theta(x_1)\cdots\theta(x_4)\mathbf{1}_{\{x_1\le x_2\le x_3\le x_4\}}\big]\,dx_1\cdots dx_4.\end{aligned} \tag{2.4}$$

*Observem que*

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\big[\theta(x_1)\cdots\theta(x_4)\mathbf{1}_{\{x_1\le x_2\le x_3\le x_4\}}\big]\\ &\quad= \mathbb{E}\left[\sum_{k_1,k_2,k_3,k_4=1}^{\infty}\xi_{k_1}\xi_{k_2}\xi_{k_3}\xi_{k_4}\mathbf{1}_{[k_1-1,k_1)}(x_1)\cdots\mathbf{1}_{[k_4-1,k_4)}(x_4)\mathbf{1}_{\{x_1\le x_2\le x_3\le x_4\}}\right]\\ &\quad= \sum_{k_1,k_2,k_3,k_4=1}^{\infty}\mathbb{E}[\xi_{k_1}\xi_{k_2}\xi_{k_3}\xi_{k_4}]\mathbf{1}_{[k_1-1,k_1)}(x_1)\cdots\mathbf{1}_{[k_4-1,k_4)}(x_4)\mathbf{1}_{\{x_1\le x_2\le x_3\le x_4\}}.\end{aligned} \tag{2.5}$$

*D'altra banda, per la independència i* $\mathbb{E}[\xi_k] = 0$ *s'obté*

$$\mathbb{E}[\xi_{k_1}\xi_{k_2}\xi_{k_3}\xi_{k_4}] = \begin{cases}0, & \textit{si existeix } j \textit{ tal que } k_j \neq k_i\ \forall i \neq j,\\ 1, & \textit{si } k_1 = k_2 \neq k_3 = k_4\\ 1, & \textit{si } k_1 = \cdots = k_4.\end{cases}$$

*Per tant, l'expressió* (2.5) *és igual a*

$$\sum_{k,j=1}^{\infty}\mathbf{1}_{[k-1,k)^2}(x_1,x_2)\mathbf{1}_{[j-1,j)^2}(x_3,x_4)\mathbf{1}_{\{x_1\le x_2\le x_3\le x_4\}}.$$

*Substituint a* (2.4)*, obtenim la següent expressió:*

$$\frac{24}{n^2}\int_{ns}^{nt}\cdots\int_{ns}^{nt}\sum_{k,j=1}^{\infty}\mathbf{1}_{[k-1,k)^2}(x_1,x2)\mathbf{1}_{[j-1,j)^2}(x_3,x_4)\mathbf{1}_{\{x_1\le x_2\le x_3\le x_4\}}\,dx_1\cdots dx_4.$$

*Utilitzant la desigualtat* $\mathbf{1}_{\{x_1\le x_2\le x_3\le x_4\}} \le \mathbf{1}_{\{x_1\le x_2\}}\mathbf{1}_{\{x_3\le x_4\}}$ *, obtenim que*

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\big[(X_t^{(n)}-X_s^{(n)})^4\big]\\ &\quad= \frac{24}{n^2}\int_{ns}^{nt}\cdots\int_{ns}^{nt}\sum_{k,j=1}^{\infty}\mathbf{1}_{[k-1,k)^2}(x_1,x_2)\mathbf{1}_{[j-1,j)^2}(x_3,x_4)\mathbf{1}_{\{x_1\le x_2\le x_3\le x_4\}}\,dx_1\cdots dx_4\\ &\quad\le \frac{24}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\int_{ns}^{nt}\int_{ns}^{nt}\mathbf{1}_{[k-1,k)}(x_1)\mathbf{1}_{[k-1,k)}(x_2)\mathbf{1}_{\{x_1\le x_2\}}\,dx_1dx_2\right)^2.\end{aligned}$$

*Ara fem el canvi de variables $y_1 = x_1/n$ i $y_2 = x_2/n$. Així la quantitat anterior esdevé*

$$\frac{24}{n^2} n^4 \left( \int_s^t \int_s^t \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{1}_{[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n})}(y_1) \mathbf{1}_{[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n})}(y_2) \mathbf{1}_{\{y_1 \le y_2\}} \, dy_1 dy_2 \right)^2 .$$

*Observem que*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{\frac{k-1}{n} \le y_1 < \frac{k}{n}\}} \mathbf{1}_{\{\frac{k-1}{n} \le y_2 < \frac{k}{n}\}} \le \mathbf{1}_{\{y_2 - y_1 \le \frac{1}{n}\}}.$$

*Per tant la nostra expressió està acotada per*

$$24n^2 \left( \int_s^t \int_s^t \mathbf{1}_{\{y_2 - y_1 \le \frac{1}{n}\}} \mathbf{1}_{\{y_1 \le y_2\}} \, dy_1 dy_2 \right)^2 .$$

*Calculant l'integral,*

$$\begin{aligned} 24n^2 \left( \int_s^t \int_{\max(y_2 - \frac{1}{n}, s)}^{y_2} dy_1 \, dy_2 \right)^2 &\le 24n^2 \left( \int_s^t \int_{y_2 - \frac{1}{n}}^{y_2} dy_1 \, dy_2 \right)^2 \\ &= 24n^2 \left( \int_s^t \frac{1}{n} \, dy_2 \right)^2 = 24(t-s)^2. \end{aligned}$$

*Prenent $C = 24$, hem provat la desigualtat desitjada.*

□

Ja hem vist a la secció anterior (concretament, al teorema 2.3.3) que les distribucions finito-dimensionals del procés $\{X^{(n)}\}_n$ convergeix en llei cap a les del moviment brownià. Per completar la demostració de la convergència en llei del procés, només ens calia verificar la condició d'ajustament de la successió $\{X^{(n)}\}_n$. Mitjançant la proposició 2.4.2 i el criteri de Billingsley, hem provat que aquesta condició es compleix en el cas del passeig aleatori. Per tant, pel teorema 2.3.4, el passeig aleatori convergeix en llei cap al moviment brownià.

# Bibliografia

Bardina, Xavier (2015). *Del passeig aleatori al moviment brownià*. Barcelona: Departament de Matemàtiques, Universitat Autònoma de Barcelona.

Billingsley, Patrick (1968). *Convergence of Probability Measures*. 1a ed. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics. New York: John Wiley & Sons.

— (1999). *Convergence of Probability Measures*. 2a ed. Wiley Series in Probability and Statistics. New York: John Wiley & Sons.

Dudley, R. M. (2002). *Real Analysis and Probability*. 2a ed. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press.

Karatzas, Ioannis i Steven E. Shreve (1991). *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. 2a ed. Vol. 113. Graduate Texts in Mathematics. New York i Berlin: Springer.