UNIVERSITAT DE BARCELONA

Facultat de Matemàtiques i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

# Aproximació del moviment Brownià

Autor: Pau López Gil-Pérez

Director: David Màrquez Carreras
Realitzat a: Departament de Probabilitat i Estadística

Barcelona, 14 d'octubre de 2025

# Índex

# Introducció

# Capítol 1

# El moviment brownià

## 1.1 Definició i propietats bàsiques

## 1.2 Variants del moviment brownià

# Capítol 2

# Convergència cap al moviment Brownià

En aquest capítol, donarem les principals definicions i resultats que ens permetran estudiar la convergència de certs processos estocàstics cap al moviment Brownià. El resultat principal que desenvoluparem és l'anomenat *principi d'invariància de Donsker*, també conegut com a *teorema de Donsker* o *teorema central del límit funcional*, que estableix la convergència de certs processos estocàstics discrets cap al moviment Brownià.

## 2.1 Convergència feble, en llei i en probabilitat

**Definició 2.1.1.** *Sigui $\{\mathbb{P}_n\}_n \subset \mathcal{P}(S)$ una successió de mesures de probabilitat i $\mathbb{P} \in \mathcal{P}(S)$ una altra mesura de probabilitat. Diem que $\{\mathbb{P}_n\}_n$* convergeix feblement *cap a $\mathbb{P}$, i escrivim $\mathbb{P}_n \xrightarrow{w} \mathbb{P}$, si per a tota funció $f : S \to \mathbb{R}$ contínua i acotada es compleix que*

$$\lim_{n\to\infty} \int_S f(s)d\mathbb{P}_n(s) = \int_S f(s)d\mathbb{P}(s). \tag{2.1}$$

**Observació 2.1.2.** En particular, el límit feble $\mathbb{P}$ és una mesura de probabilitat, ja que si prenem $f \equiv 1$ obtenim que

$$\lim_{n\to\infty} \int_S 1\, d\mathbb{P}_n(s) = \int_S 1\, d\mathbb{P}(s) \implies \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_n(S) = \mathbb{P}(S) \implies \mathbb{P}(S) = 1.$$

Ara, considerem una variable aleatòria $X$ en un espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ amb valors a $(S, \mathcal{B}(S))$. Recordem que *la llei de $X$* es defineix com la mesura de probabilitat $\mathbb{P}X^{-1}$ definida per

$$\mathbb{P}X^{-1}(B) := \mathbb{P}(X^{-1}(B)) = \mathbb{P}(X \in B) \quad \forall B \in \mathcal{S}.$$

**Definició 2.1.3.** *Sigui $\{(\Omega_n, \mathcal{F}_n, \mathbb{P}_n)\}_n$ una successió d'espais de probabilitat, on $\mathbb{P}_n \in \mathcal{P}(S)$ $\forall n \in \mathbb{N}$, i considerem en cada un d'ells una variable aleatòria $X_n$ amb valors a $(S, \mathcal{B}(S))$. Sigui $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un altre espai de probabilitat, on $\mathbb{P} \in \mathcal{P}(S)$, i sigui $X$ una variable aleatòria en aquest espai amb valors a $(S, \mathcal{B}(S))$. Diem que la successió $\{X_n\}_n$* convergeix en llei *cap a $X$, i escrivim $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$, si les lleis de les variables aleatòries $X_n$ convergeixen feblement cap a la llei de $X$, és a dir, si $\mathbb{P}X_n^{-1} \xrightarrow{w} \mathbb{P}X^{-1}$.*

**Observació 2.1.4.** Aquesta definició és equivalent a dir que per a tota funció $f : S \to \mathbb{R}$ contínua i acotada es compleix que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[f(X_n)] = \mathbb{E}[f(X)],$$

ja que mitjançant un canvi de variable tenim que

$$\mathbb{E}[f(X_n)] = \int_{\Omega_n} f(X_n(\omega))d\mathbb{P}_n(\omega) = \int_S f(s)d\mathbb{P}X_n^{-1}(s),$$

i de manera anàloga,

$$\mathbb{E}[f(X)] = \int_{\Omega} f(X(\omega))d\mathbb{P}(\omega) = \int_S f(s)d\mathbb{P}X^{-1}(s).$$

Finalment, introduim un altre mode de convergència que ens serà útil més endavant.

**Definició 2.1.5.** *Sigui $\{X_n\}_n$ una successió de variables aleatòries en un espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ amb valors a $(S, \mathcal{B}(S))$. Sigui $X$ una variable aleatòria en el mateix espai de probabilitat amb valors a $(S, \mathcal{B}(S))$. Diem que $\{X_n\}_n$* convergeix en probabilitat *cap a $X$, i escrivim $X_n \xrightarrow{P} X$, si per a tot $\varepsilon > 0$ es compleix que*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\rho(X_n, X) > \varepsilon) = 0.$$

*Com a cas particular, diem que $\{X_n\}_n$* convergeix en probabilitat cap a *$a \in S$, i escrivim $X_n \xrightarrow{P} a$, si $\{X_n\}_n$ convergeix en probabilitat cap a la variable aleatòria constant $X \equiv a$. És a dir, si per a tot $\varepsilon > 0$ es compleix que*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\rho(X_n, a) > \varepsilon) = 0.$$

## 2.2 Ajustament i Teorema de Prohorov

**Definició 2.2.1.** *Diem que un conjunt $A$ és* relativament compacte *si la seva adherència $\overline{A}$ és compacta.*

Sovint es troba a la literatura una definició alternativa de relativitat compacta [1]. En aquest treball, hem elavorat una demostració de l'equivalència entre la definició anterior i la caracterització habitual. Per a aquest propòsit, necessitem introduir la mètrica de Prokhorov i establir la seva relació amb la convergència feble de mesures de probabilitat.

**Definició 2.2.2.** *La mètrica de Prokhorov en $\mathcal{P}(S)$ és la mètrica definida per*

$$\pi(\mathbb{P}, \mathbb{Q}) := \inf\left\{\varepsilon > 0 : \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{Q}(A^\varepsilon) + \varepsilon \text{ i } \mathbb{Q}(A) \leq \mathbb{P}(A^\varepsilon) + \varepsilon, \forall A \in \mathcal{B}(S)\right\},$$

*on $A^\varepsilon := \{x \in S : \rho(x, A) < \varepsilon\} = \bigcup_{p\in A} B_\varepsilon(p)$*

**Lema 2.2.3.** *Si $(S, \rho)$ és un espai mètric separable, aleshores la convergència feble de mesures de probabilitat en $\mathcal{P}(S)$ és equivalent a la convergència de mesures en la mètrica de Prokhorov. Per tant, la mètrica de Prokhorov metritza la topologia feble en $\mathcal{P}(S)$.*

[1] Veure Billingsley 1999, pàg 57 o Karatzas i Shreve 1991, def. 4.6.

*Prova.* Billingsley 1999, pàg 72 □

**Proposició 2.2.4.** *Una familia $\Pi \subset \mathcal{P}(S)$ de mesures de probabilitat és relativament compacte si i només si tota successió d'elements de $\Pi$ admet una subsuccessió feblement convergent. És a dir, si donat $\{\mathbb{P}_n\}_n \subset \Pi$, existeix una subsuccessió $\{\mathbb{P}_{n_k}\}_k \subset \{\mathbb{P}_n\}_n$ i una mesura de probabilitat $\mathbb{P} \in \mathcal{P}(S)$ tals que $\mathbb{P}_{n_k} \xrightarrow{w} \mathbb{P}$.*

*Prova.* Primer, suposem que $\Pi$ és relativament compacte i sigui $\{\mathbb{P}_n\}_n \subset \Pi$ una successió qualsevol. Volem veure que admet una subsuccessió feblement convergent.

Com que $\Pi$ és relativament compacte, per definició la seva adherència $\overline{\Pi}$ és compacta. Ja hem vist en el lema 2.2.3 que $\mathcal{P}(S)$ és un espai mètric i que la convergència en la mètrica de Prokhorov és equivalent a la convergència feble. Per tant, $\overline{\Pi}$ és compacte per successions, i.e. tota successió en $\overline{\Pi}$ admet una subsuccessió feblement convergent. En particular, la successió $\{\mathbb{P}_n\}_n \subset \Pi \subset \overline{\Pi}$ admet una subsuccessió $\{\mathbb{P}_{n_k}\}_k$ feblement convergent cap a una mesura de probabilitat $\mathbb{P} \in \overline{\Pi} \subset \mathcal{P}(S)$.

Recíprocament, suposem que tota successió d'elements de $\Pi$ admet una subsuccessió feblement convergent. Per demostrar que $\Pi$ és relativament compacte, hem de veure que la seva adherència $\overline{\Pi}$ és compacta. Com que per el lema 2.2.3, $\mathcal{P}(S)$ és un espai mètric, hem de veure que $\overline{\Pi}$ és compacte per successions. És a dir, hem de veure que tota successió en $\overline{\Pi}$ admet una subsuccessió feblement convergent. Novament per el lema 2.2.3, això és equivalent a veure que tota successió en $\overline{\Pi}$ admet una subsuccessió convergent en la mètrica de Prokhorov.

Sigui doncs $\{\mathbb{P}_n\}_n \subset \overline{\Pi}$ una successió qualsevol. Per la definició d'adherència, per a cada $n \in \mathbb{N}$ existeix una successió $\{\mathbb{P}_{n_k}\}_k \subset \Pi$ tal que $\mathbb{P}_{n_k} \to \mathbb{P}_n$ quan $m \to \infty$. Considerem doncs la família de probabilitats $\{\mathbb{P}_{n_m} : n, m \in \mathbb{N} \wedge \mathbb{P}_{n_k} \to \mathbb{P}_n\}$ i la seva successió diagonal $\{\mathbb{P}_{n_n}\}_n \subset \Pi$. Per hipòtesi, aquesta successió admet una subsuccessió $\{\mathbb{P}_{n_{n_k}}\}_k$ que convergeix cap a una mesura de probabilitat $\mathbb{P} \in \mathcal{P}(S)$, tal i com voliem demostrar. □

**Definició 2.2.5.** *Una familia $\Pi \subset \mathcal{P}(S)$ de mesures de probabilitat és* ajustada *si per a tot $\varepsilon > 0$ existeix un conjunt compacte $K_\varepsilon \subset S$ tal que $\mathbb{P}(K_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon$ per a tota $\mathbb{P} \in \Pi$.*

El següent resultat és necessari per a demostrar el teorema de Donsker i en particular l'aproximació del moviment Brownià mitjançant processos estocàstics discrets.

**Teorema 2.2.6.** *(Teorema de Prohorov) Una familia $\Pi \subset \mathcal{P}(S)$ de mesures de probabilitat és relativament compacte si i només si és ajustada.*

*Prova.* M'agradaria comentar si podem evitar aquesta demostració. □

## 2.3 L'espai $C[0, \infty]$

En el cas particular del moviment brownià, és útil treballar amb l'espai $C[0, \infty)$ de funcions contínues definides a l'interval $[0, \infty)$ i amb valors reals.

**Proposició 2.3.1.** *La funció $\rho : C[0, \infty) \to [0, \infty)$ definida per*

$$\rho(f, g) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \max_{0 \leq t \leq n} \left(\min\left(|f(t) - g(t)|, 1\right)\right).$$

*és una mètrica a $C[0, \infty)$.*

*Prova.* *Karatzas i Shreve 1991, exercici 4.1* □

A continuació, donarem una caracterització de l'ajustament en l'espai $C[0, \infty)$. Per a fer-ho, necessitarem la noció de *mòdul de continuïtat* i el *Teorema d'Arzelà-Ascoli*.

**Definició 2.3.2.** *Sigui* $T > 0$. *El* mòdul de continuïtat *a* $[0, T]$ *és la funció* $m^T : C[0, \infty) \times [0, \infty) \to [0, \infty)$ *definida per*

$$m^T(f, \delta) := \sup_{\substack{|s-t|\leq\delta \\ 0\leq s,t\leq T}} |f(s) - f(t)|, \quad \delta \geq 0.$$

**Teorema 2.3.3.** *(Teorema d'Arzelà-Ascoli) Un conjunt* $A \subset C[0, \infty)$ *és relativament compacte si i només si*

$$\sup_{f\in A} |f(0)| < \infty$$

*i a més, per a tot* $T > 0$,

$$\lim_{\delta\to 0} \sup_{f\in A} m^T(f, \delta) = 0.$$

*Prova.* *Karatzas i Shreve 1991, pàg 62, Billingsley 1999, pàg 81*

**Teorema 2.3.4.** *Una seqüència de mesures de probabilitat* $\{\mathbb{P}_n\}_n \subset \mathcal{P}(C[0, \infty))$ *és ajustada si i només si*

$$\lim_{\lambda\uparrow\infty} \sup_{n\geq 1} \mathbb{P}_n [f : |f(0)| \geq \lambda] = 0,$$

*i per a tot* $T > 0$, $\epsilon > 0$,

$$\lim_{\delta\downarrow 0} \sup_{n\geq 1} \mathbb{P}_n \left[f : m^T(f, \delta) \geq \epsilon\right] = 0.$$

*Prova.* *Karatzas i Shreve 1991, pàg 63* □

## 2.4 Convergència en llei cap al moviment Brownià

Sigui $\{\xi_n\}_n$ una seqüència de variables aleatòries independents i idènticament distribuïdes amb esperança 0 i variància $\sigma^2$, $0 < \sigma < \infty$. Considerem la successió de sumes parcials $S_0 = 0$ i $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$ per a $n \geq 1$. Per a cada $n \in \mathbb{N}$, considerem el procés de sumes parcials

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} S_{\lfloor nt\rfloor}, \quad t \in [0, \infty],$$

i la corresponent interpolació lineal d'aquest procés,

$$X_t^{(n)} = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \left(S_{\lfloor nt\rfloor} + (nt - \lfloor nt\rfloor)\xi_{\lfloor nt\rfloor+1}\right), \quad t \in [0, \infty]. \tag{2.2}$$

En aquest capítol, demostrarem que la successió de processos $\{X^{(n)}\}_n$ convergeix en llei cap al moviment Brownià estàndard $B$.

**Lema 2.4.1.** *Siguin* $\{X^n\}_n$, $\{Y^n\}_n$ *i* $X$ *variables aleatòries definides en un mateix espai de probabilitat* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *i amb valors a* $\mathcal{B}(S)$. *Suposem que* $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ *i que* $\rho(X^n, Y^n) \xrightarrow{P} 0$. *Aleshores,* $Y^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

*Prova.* *Karatzas i Shreve 1991, problema 4.16* □

**Lema 2.4.2.** *Siguin* $\{X^n\}_n$ *i* $X$ *variables aleatòries amb valors a un espai mètric* $(S_1, \rho_1)$*. Sigui* $(S_2, \rho_2)$ *un altre espai mètric i sigui* $f : S_1 \to S_2$ *una funció contínua. Si* $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$*, aleshores* $f(X^n) \xrightarrow{\mathcal{L}} f(X)$*.*

*Prova.* Karatzas i Shreve 1991, problema 4.5 □

**Teorema 2.4.3.** *Sigui* $\{X^{(n)}\}_n$ *la successió de processos definits a l'equació* (2.2)*. Siguin* $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_d < \infty$*. Aleshores, el vector aleatori*

$$\left(X_{t_1}^{(n)}, X_{t_2}^{(n)}, \ldots, X_{t_d}^{(n)}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} (B_{t_1}, B_{t_2}, \ldots, B_{t_d}) \quad \text{quan } n \to \infty,$$

*on* $\left\{B_t, \mathcal{F}_t^B; t \geq 0\right\}$ *és un moviment Brownià estàndard.*

*Prova.* Karatzas i Shreve 1991, teorema 4.15, pàg 67 □

**Teorema 2.4.4.** *Sigui* $\left\{X^{(n)}\right\}_n$ *una seqüència ajustada de processos continus tal que per a qualssevol* $0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_d \leq \infty$*, la seqüència de vectors aleatòris* $\{(X_{t_1}^{(n)}, \ldots, X_{t_d}^{(n)})\}_n$ *convergeix en llei cap a un vector aleatori* $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_d})$*. És a dir,*

$$(X_{t_1}^{(n)}, \ldots, X_{t_d}^{(n)}) \xrightarrow{\mathcal{L}} (X_{t_1}, \ldots, X_{t_d})$$

*Aleshores,* $\{X^{(n)}\}_n$

# Bibliografia


Billingsley, Patrick (1999). *Convergence of Probability Measures*. 2a ed. New York: John Wiley & Sons.

Karatzas, Ioannis i Steven E. Shreve (1991). *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. 2a ed. Vol. 113. Graduate Texts in Mathematics. New York i Berlin: Springer.