Universitat de Barcelona
Facultat de Matemàtiques i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

Aproximació del moviment Brownià

Autor: Pau López Gil-Pérez

Director: David Màrquez Carreras
Realitzat a: Facultat de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 16 de novembre de 2025

2020 Mathematics Subject Classification. 60J65, 60F17, 65C05, 60-04

Índex

Introducció

En el primer capítol, introduirem el concepte d'element aleatori i donarem la definició del moviment Brownià, juntament amb algunes de les seves propietats fonamentals. Després, en el segon capítol, donarem les principals definicions i resultats que ens permetran estudiar la convergència de certs processos estocàstics cap al moviment Brownià. Finalment, al tercer capítol discutirem diferents mètodes per simular el moviment Brownià.

Capítol 1

El moviment brownià

El moviment brownià és un procés estocàstic fonamental en la teoria de la probabilitat i les seves aplicacions. Observat per primer cop pel botànic Robert Brown el 1828, el moviment brownià modelitza el moviment irregular del pol·len suspès en aigua.

El primer treball quantitatiu es deu a Louis Bachelier, qui l'any 1900 es va interessar en les fluctuacions dels preus de les accions. L'any 1905, Albert Einstein va derivar la densitat de transició a partir de la teoria molecular-cinètica de la calor. Igualment, Marian Von Smoluchowski va obtenir resultats similars durant el mateix període, motiu pel qual la modelització del moviment brownià com a procés rep el nom de model d'Einstein-Smoluchowski. Posteriorment Norbert Wiener va dur a terme un tractament matemàtic rigorós durant els anys 1923 - 1924, proporcionant la primera demostració d'existència. L'obra més profunda d'aquest període és la de Paul Lévy, qui durant els anys 1939-1948 va introduir la construcció per interpolació i va estudiar els temps de pas, les trajectòries mostrals i el temps local.

Actualment, l'abast d'aplicació del moviment brownià va molt més enllà de l'estudi de partícules microscòpiques en suspensió i inclou la modelització de preus d'accions, soroll tèrmic en circuits elèctrics, i pertorbacions aleatòries en sistemes físics, biològics i econòmics. Concretament, en el camp de les probabilitats, el moviment brownià és un exemple fonamental de procés estocàstic amb trajectòries contínues. Entre les seves principals aplicacions en aquest àmbit destaquen, per exemple, el teorema de Donsker i el càlcul estocàstic en l'estudi d'equacions diferencials estocàstiques.

1.1 Elements aleatoris

Comencem donant un parell de definicions que ens seran útils al llarg d'aquest treball, ja que generalitzen la noció de *variable aleatòria* i la de la seva *llei* a contextos més amplis.

Definició 1.1.1. *Considerem un espai de probabilitat* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$*, un espai mesurable* $(S, \mathcal{S})$ *i una funció* $X : \Omega \to S$*. Diem que* X *és un* element aleatori *si és* $(\mathcal{F}/\mathcal{S})$*-mesurable, és a dir, si* $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ *per a tot* $B \in \mathcal{S}$*. En particular,*

- *Diem que* X *és una* variable aleatòria *si* $S = \mathbb{R}$*.*
- *Diem que* X *és un* vector aleatòri *si* $S = \mathbb{R}^k$*,* $k > 1$*.*
- *Diem que* X *és una* funció aleatòria *si* $S = C[0, \infty]$ *o algun altre espai de funcions.*

Observació 1.1.2. Considerem un procés estocàstic continu $\{X_t : t \in T\}$ amb valors a $\mathbb{R}$, definit en un espai de probabilitat $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$. Aplicant les definicions anteriors,

- Fixat $t \in T$, la funció $X_t : \Omega \to \mathbb{R}$ és una variable aleatòria.
- Fixats $t_1, t_2, \ldots, t_n \in T$, la funció $(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n}) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ definida per

  $$(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n})(\omega) = (X_{t_1}(\omega), X_{t_2}(\omega), \ldots, X_{t_n}(\omega)) \quad \forall \omega \in \Omega$$

  és un vector aleatori (que s'anomena *vector aleatori de dimensió finita*).
- Fixat $\omega \in \Omega$, la funció $X_{\cdot}(\omega) : T \to \mathbb{R}$ definida per

  $$X_{\cdot}(\omega)(t) = X_t(\omega) \quad \forall t \in T$$

  és una funció contínua amb valors reals.
- En conseqüència, la funció $X : \Omega \to C[0, \infty]$ definida per

  $$X(\omega) = X_{\cdot}(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega$$

  és una funció aleatòria.

Definició 1.1.3. *Sigui X un element aleatòri en un espai de probabilitats $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, amb valors a un espai mesurable $(S, \mathcal{S})$. La* llei de X, *que denotem per $\mathcal{L}(X)$, és la mesura de probabilitat a $\mathcal{S}$ definida per*

$$\mathcal{L}(X)(B) := (\mathbb{P} \circ X^{-1})(B) = \mathbb{P}(X \in B) \quad \forall B \in \mathcal{S}.$$

1.2 Funcions característiques i distribucions normals

A continuació, introduïm la *funció característica*, que és una eina fonamental en teoria de probabilitats. En aquest treball ens serà de gran utilitat, donat que permet caracteritzar completament la llei de les variables aleatòries (i per tant, les variables aleatòries en si mateixes). A més, pel teorema de continuïtat de Paul Lévy que veurem més endavant, és una eina adequada per a estudiar la convergència en llei de variables aleatòries.

Definició 1.2.1. *La funció característica d'una mesura de probabilitat μ és la funció $\varphi_\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definida per*

$$\varphi_\mu(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx}\, \mu(dx).$$

Si X és una variable aleatòria amb llei μ, la seva funció característica serà, per definició, la funció característica de la seva llei. És a dir,

$$\varphi_X(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx}\, \mathcal{L}(X)(dx) = \mathbb{E}[e^{itX}].$$

Anàlogament, si μ és una mesura de probabilitat a $\mathbb{R}^n$, la seva funció característica $\varphi_\mu \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ es defineix com

$$\varphi_\mu(t) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle t,x\rangle}\, \mu(dx),$$

i la funció característica d'un vector aleatori $X = (X_1, \dots, X_n)$ serà la funció característica de la seva llei, definida per

$$\varphi_X(t) = \int_{\mathbb{R}^{\ltimes}} e^{i\langle t,x\rangle}\, \mathcal{L}(X)(dx) = \mathbb{E}[e^{i\langle t,X\rangle}].$$

A continuació, recordarem la definició de variable aleatòria gaussiana i obtindrem la seva funció característica. També definirem la variable aleatòria gaussiana multidimensional mitjançant la seva funció característica.

Definició 1.2.2. *Una variable aleatòria X s'anomena* gaussiana *si existeixen $\mu \in \mathbb{R}$ i $\sigma^2 \geq 0$ tals que*

$$\mathbb{P}(X \in B) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_B \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx, \qquad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

En aquest cas, escriurem $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Proposició 1.2.3. *Si $X \sim \mathcal{N}(0,t)$, la seva funció característica és*

$$\varphi_X(u) = e^{-\frac{u^2 t}{2}},$$

Prova. Per definició, tenim que

$$\varphi_X(u) = \mathbb{E}[e^{iuX}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{iux} e^{-\frac{x^2}{2t}}\, dx.$$

Completant el quadrat en l'exponent, obtenim

$$\varphi_X(u) = \frac{e^{-u^2 t/2}}{\sqrt{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-iut)^2}{2t}}\, dx = e^{-\frac{u^2 t}{2}}.$$

□

Teorema 1.2.4. *Siguin $\mu \in \mathbb{R}^n$ i Σ una matriu simètrica d'ordre n definida no negativa. Aleshores, existeix una probabilitat a $\mathbb{R}^n$ que té per funció característica*

$$\varphi(t) = \exp\Big(it^T\mu - \tfrac{1}{2} t^T \Sigma t\Big), \qquad \forall t \in \mathbb{R}^n.$$

Anomenarem aquesta mesura la normal normal n-dimensional *(o* gaussiana n-dimensional*) amb mitjana μ i matriu de covariància Σ i la designarem per $\mathcal{N}(\mu, \Sigma)$.*

Prova. Vegeu [5], pàg 126.

□

Definició 1.2.5. *Direm que un vector aleatori X és* gaussià *si existeixen $\mu \in \mathbb{R}^n$ i una matriu Σ simètrica d'ordre n i definida no negativa tals que $X \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$.*

1.3 Definició i propietats bàsiques

A continuació, definirem formalment el moviment brownià estàndard i en donarem algunes propietats bàsiques que es dedueixen directament de la definició.

Definició 1.3.1. *Un* moviment brownià *és un procés estocàstic* $\{B_t : t \geq 0\}$ *amb valors a* $\mathbb{R}$*, definit en un espai de probabilitat* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$*, tal que compleix les següents propietats:*

1. $B_0 = 0$*, quasi segurament.*
2. $B_{t_n} - B_{t_{n-1}}, B_{t_{n-1}} - B_{t_{n-2}}, \ldots, B_{t_2} - B_{t_1}$ *són variables aleatòries independents, per a tot* $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_n$ *(increments independents).*
3. *Per a tot* $0 \leq s < t$*,* $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$

Observació 1.3.2. De la propietat (3), es dedueix que

$$Var(B_t - B_s) = t - s.$$

En combinació amb la propietat (1), tenim que

$$Var(B_t) = Var(B_t - B_0) = t.$$

Proposició 1.3.3. *Sigui* $\{B_t : t \geq 0\}$ *un moviment brownià. Aleshores, per a qualssevol* $s, t \geq 0$*,*

$$\mathbb{E}(B_s B_t) = min(s,t)$$

Prova. *Suposem, sense pèrdua de generalitat, que* $s \leq t$*. Aleshores,*

$$\mathbb{E}(B_s B_t) = \mathbb{E}\left(B_s(B_t - B_s)\right) + \mathbb{E}\left(B_s^2\right)$$

Com per la propietat (2) del moviment brownià, B_s *i* $B_t - B_s$ *són independents, tenim que*

$$\mathbb{E}(B_s B_t) = \mathbb{E}(B_s)\mathbb{E}(B_t - B_s) + \mathbb{E}\left(B_s^2\right)$$

Finalment, com $\mathbb{E}(B_s) = 0$ *i* $\mathbb{E}(B_s^2) = s$*, obtenim que*

$$\mathbb{E}(B_s B_t) = s = min(s,t),$$

com volíem demostrar.

□

A continuació, donem una proposició que ens serà útil més endavant quan estudiem la convergència cap al moviment brownià. Considerarem el cas 2-dimensional. La demostració del cas general és anàlega però la notació és més pesada.

Proposició 1.3.4. *Sigui* $\{B_t : t \geq 0\}$ *un moviment brownià. Aleshores, per a qualssevol* $0 \leq s < t < \infty$, *la funció característica del vector* $(B_s, B_t - B_s)$ *és*

$$\varphi_{(B_s, B_t - B_s)}(u, v) = \exp\left(-\frac{1}{2}\left(u^2 s + v^2(t-s)\right)\right).$$

Prova. Per la propietat (2) del moviment brownià, sabem que B_s *i* $B_t - B_s$ *són independents. Per tant,*

$$\varphi_{(B_s, B_t - B_s)}(u, v) = \mathbb{E}\left[e^{i(uB_s + v(B_t - B_s))}\right] = \mathbb{E}\left[e^{iuB_s}\right]\mathbb{E}\left[e^{iv(B_t - B_s)}\right]$$

Per la propietat (3) del moviment brownià, sabem que $B_s \sim \mathcal{N}(0, s)$. *Per tant, per la proposició 1.2.3,*

$$\mathbb{E}\left[e^{iuB_s}\right] = \exp\left(-\frac{1}{2}u^2 s\right).$$

Anàlogament, com $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$, *tenim que*

$$\mathbb{E}\left[e^{iv(B_t - B_s)}\right] = \exp\left(-\frac{1}{2}v^2(t-s)\right).$$

Per tant,

$$\mathbb{E}\left[e^{i(uB_s + v(B_t - B_s))}\right] = \exp\left(-\frac{1}{2}\left(u^2 s + v^2(t-s)\right)\right),$$

com volíem demostrar.

□

Finalment, cal comentar que també és habitual definir el moviment Brownià com un procés estocàstic amb trajectòries contínues quasi segurament. Això és, afegir la següent propietat a la definició 1.3.1:

4. La funció $t \mapsto B_t$ és contínua quasi segurament.

Si més no, a partir de la definició 1.3.1 i utilitzant l'anomenat *criteri de continuïtat de Kolmogorov*, es pot demostrar l'existència d'una versió del moviment brownià amb trajectòries contínues quasi segurament [1]. Quan ens referim al *moviment brownià estàndard*, ens referirem a la versió amb trajectòries contínues quasi segurament.

[1] Vegeu [6], pàg 41.

Capítol 2

Convergència cap al moviment Brownià

En aquest capítol estudiarem les condicions sota les quals certes successions de processos estocàstics convergeixen cap al moviment brownià. El resultat principal que desenvoluparem és l'anomenat *principi d'invariància de Donsker*, també conegut com a *teorema de Donsker* o *teorema central del límit funcional.*

D'ara endavant, treballarem en un espai mètric (S, ρ) separable i complet, junt amb la seva σ-àlgebra de Borel $\mathcal{B}(S)$, i denotarem per $\mathcal{P}(S)$ l'espai de mesures de probabilitat en $(S, \mathcal{B}(S))$. En el cas particular del moviment brownià, és útil treballar amb l'espai $S = C[0, \infty]$ de funcions contínues definides a l'interval $[0, \infty)$ i amb valors reals, en el qual és possible definir una mètrica [1], junt amb la seva σ-àlgebra de Borel $\mathcal{B}(C[0, \infty])$.

2.1 Modes de convergència

Existeixen 4 modes principals de convergència per a elements aleatoris:

1. La convergència en llei
2. La convergència en probabilitat
3. La convergència quasi segura
4. La convergència en mitjana d'ordre p

[1] Vegeu [4] - pàg 60.

És un fet ben conegut que tant la convergència quasi segura com la convergència en mitjana d'ordre p impliquen la convergència en probabilitat, i que aquesta última implica la convergència en llei. No obstant això, les implicacions inverses no es compleixen en general.

En aquesta secció, introduïm dos d'aquests modes de convergència: la convergència en llei i la convergència en probabilitat, així com la convergència feble de mesures de probabilitat.

Definició 2.1.1. *Sigui* $\{\mathbb{P}_n\}_n \subset \mathcal{P}(S)$ *una successió de mesures de probabilitat i* $\mathbb{P} \in \mathcal{P}(S)$ *una altra mesura de probabilitat. Diem que* $\{\mathbb{P}_n\}_n$ convergeix feblement *cap a* $\mathbb{P}$*, i escrivim* $\mathbb{P}_n \xrightarrow{w} \mathbb{P}$*, si per a tota funció* $f : S \to \mathbb{R}$ *contínua i acotada es compleix que*

$$\lim_{n\to\infty} \int_S f(s) d\mathbb{P}_n(s) = \int_S f(s) d\mathbb{P}(s).$$

Observació 2.1.2. En particular, el límit feble $\mathbb{P}$ és una mesura de probabilitat, ja que si prenem $f \equiv 1$ obtenim que

$$\lim_{n\to\infty} \int_S 1\, d\mathbb{P}_n(s) = \int_S 1\, d\mathbb{P}(s) \implies \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_n(S) = \mathbb{P}(S) \implies \mathbb{P}(S) = 1.$$

El següent resultat és útil per estudiar la convergència feble de mesures de probabilitat a través de les seves funcions característiques.

Teorema 2.1.3 (Teorema de continuitat de Paul Lévy)**.** *Considerem una successió* $(\mu_n, n \geq 1)$ *de probabilitats en* $\mathbb{R}$ *i denotem per* $(\varphi_n, n \geq 1)$ *la successió de funcions característiques associades. Aleshores,*

(i) Si μ_n *convergeix feblement cap a una probabilitat* μ *quan* $n \to \infty$*, aleshores*

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = \varphi_\mu(t), \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

(ii) Si $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = \varphi(t)$*, on* φ *és una funció contínua en el zero, aleshores* φ *és la funció característica d'una probabilitat* μ*, i*

$$\mu_n \xrightarrow{w} \mu.$$

Definició 2.1.4. *Sigui* $\{X_n\}_n$ *una successió d'elements aleatoris amb valors a* $(S, \mathcal{B}(S))$*. Sigui* X *un altre element aleatori amb valors a* $(S, \mathcal{B}(S))$*. Diem que* $\{X_n\}_n$ convergeix en llei *cap* X*, i escrivim* $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$*, si les lleis dels elements* *aleatoris X_n convergeixen feblement cap a la llei de X. És a dir, si*

$$\mathcal{L}(X_n) \xrightarrow{w} \mathcal{L}(X).$$

Observació 2.1.5. Aquesta condició és equivalent a demanar que per a tota funció $f : S \to \mathbb{R}$ contínua i acotada es compleixi que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[f(X_n)] = \mathbb{E}[f(X)],$$

ja que mitjançant un canvi de variable i recordant que $\mathcal{L}(X_n) := \mathbb{P}_n \circ X_n^{-1}$, tenim que

$$\mathbb{E}[f(X_n)] = \int_{\Omega_n} f(X_n(\omega))d\mathbb{P}_n(\omega) = \int_S f(s)d\mathcal{L}(X_n)(s),$$

i de manera anàloga,

$$\mathbb{E}[f(X)] = \int_{\Omega} f(X(\omega))d\mathbb{P}(\omega) = \int_S f(s)d\mathcal{L}(X)(s).$$

Definició 2.1.6. *Sigui $\{X_n\}_n$ una successió d'elements aleatoris en un mateix espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ i amb valors a $(S, \mathcal{B}(S))$. Sigui X un element aleatori en el mateix espai de probabilitat i amb valors a $(S, \mathcal{B}(S))$. Diem que $\{X_n\}_n$* convergeix en probabilitat *cap a X, i escrivim $X_n \xrightarrow{P} X$, si per a tot $\varepsilon > 0$ es compleix que*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\rho(X_n, X) > \varepsilon) = 0.$$

Com a cas particular, diem que $\{X_n\}_n$ convergeix en probabilitat cap a *$s \in S$, i escrivim $X_n \xrightarrow{P} s$, si $\{X_n\}_n$ convergeix en probabilitat cap a l'element aleatori constant $X \equiv s$. És a dir, si per a tot $\varepsilon > 0$ es compleix que*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\rho(X_n, s) > \varepsilon) = 0.$$

2.2 Ajustament i Teorema de Prohorov

En aquesta secció introduïm els conceptes d'ajustament i compacitat relativa per a famílies de mesures de probabilitat, així com el teorema de Prohorov, que estableix l'equivalència entre aquests dos conceptes en espais mètrics separables complets. Aquest últim resultat és una eina fonamental per demostrar la convergència en llei del passeig aleatori escalat.

Definició 2.2.1. *Diem que una família $\Pi \subset \mathcal{P}(S)$ de mesures de probabilitat és* *relativament compacte si tota successió d'elements de Π admet una subsuccessió feblement convergent. És a dir, si donada $\{\mathbb{P}_n\}_n \subset \Pi$, existeixen una subsuccessió $\{\mathbb{P}_{n_k}\}_k \subset \{\mathbb{P}_n\}_n$ i una mesura de probabilitat $\mathbb{P} \in \mathcal{P}(S)$ tals que $\mathbb{P}_{n_k} \xrightarrow{w} \mathbb{P}$. D'igual manera, diem que una successió d'elements aleatoris $\{X_n\}_n$ és relativament compacta si la família de les seves lleis $\{\mathcal{L}(X_n)\}_n$ ho és.*

Observació 2.2.2. Si una successió $\{\mathbb{P}_n\}_n \subset \mathcal{P}(S)$ de mesures de probabilitat convergeix feblement cap a una mesura de probabilitat $\mathbb{P}$, aleshores és relativament compacta. Per tant, si una successió d'elements aleatoris $\{X_n\}_n$ convergeix en llei cap a un element aleatòri X, aleshores és relativament compacta.

Definició 2.2.3. *Diem que una família $\Pi \subset \mathcal{P}(S)$ de mesures de probabilitat és* ajustada *si $\forall \varepsilon > 0$ existeix un conjunt compacte $K_\varepsilon \subset S$ tal que $\mathbb{P}(K_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon$, $\forall \mathbb{P} \in \Pi$. D'igual manera, diem que una successió d'elements aleatoris $\{X_n\}_n$ amb valors en S és* ajustada *si la família de les seves lleis $\{\mathcal{L}(X_n)\}_n$ ho és. És a dir, si $\forall \varepsilon > 0$ existeix un conjunt compacte $K_\varepsilon \subset S$ tal que $\mathbb{P}_n(X_n \in K_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon$, $\forall n \geq 1$.*

Teorema 2.2.4 (Teorema de Prohorov)**.** *Sigui (S, ρ) un espai mètric separable i complet. Una família $\Pi \subset \mathcal{P}(S)$ de mesures de probabilitat és relativament compacte si i només si és ajustada.*

2.3 El principi d'invariància de Donsker

Sigui $\{\xi_n\}_n$ una seqüència de variables aleatòries independents i idènticament distribuïdes amb esperança 0 i variància σ^2, $0 < \sigma < \infty$. Considerem la successió de sumes parcials $S_0 = 0$ i $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$ per a $n \geq 1$. Per a cada $n \in \mathbb{N}$, considerem el procés de sumes parcials

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} S_{\lfloor nt \rfloor}, \quad t \in [0, \infty],$$

i la corresponent interpolació lineal d'aquest procés,

$$X_t^{(n)} = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \left(S_{\lfloor nt \rfloor} + (nt - \lfloor nt \rfloor) \xi_{\lfloor nt \rfloor + 1} \right), \quad t \in [0, \infty]. \tag{2.1}$$

En aquesta secció, veurem que la successió de processos $\{X^{(n)}\}_n$ convergeix en llei cap al moviment Brownià estàndard. Per a demostrar això, necessitarem dos lemes tècnics que ens permetran establir la convergència en llei de certs vectors aleatòris cap al moviment brownià.

Lema 2.3.1. *Siguin* $\left\{X^{(n)}\right\}_n$, $\left\{Y^{(n)}\right\}_n$ *i* X *elements aleatoris amb valors a* (S, ρ), *tals que per a tot* $n \geq 1$, $X^{(n)}$ *i* $Y^{(n)}$ *estan definides en el mateix espai de probabilitats. Suposem que* $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ *i que* $\rho(X^n, Y^n) \xrightarrow{P} 0$. *Aleshores,* $Y^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

Prova. *Siguin* $\{(\Omega_n, \mathcal{F}_n, \mathbb{P}_n)\}_n$ *els espais de probabilitat on estan definits els elements aleatoris* $X^{(n)}$ *i* $Y^{(n)}$. *Sigui* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un altre espai de probabilitat on està definit l'element aleatori* X. *Sigui* $f : S \to \mathbb{R}$ *una funció contínua i acotada. Per l'observació 2.1.5, és suficient demostrar que*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_n[f(X^{(n)}) - f(Y^{(n)})] = 0.$$

Sigui $M = \sup_{s\in S} |f(s)| < \infty$. *Per l'observació 2.2.2, com* $X^{(n)} \xrightarrow{\mathcal{L}} X$, *aleshores* $\{X^{(n)}\}_n$ *és relativament compacta. Pel teorema de Prohorov, aleshores* $\{X^{(n)}\}_n$ *és ajustada. Per tant, per a tot* $\varepsilon > 0$, *existeix un conjunt compacte* $K_\varepsilon \subset S$ *tal que*

$$\mathbb{P}_n(X^{(n)} \in K_\varepsilon) \geq 1 - \frac{\varepsilon}{6M}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Com f *és continua, existeix* $0 < \delta < 1$ *tal que* $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/3$ *per a qualssevol* $x, y \in K_\varepsilon$ *tals que* $\rho(x, y) < \delta$. *Per altra banda, per hipòtesi* $\rho(X^n, Y^n) \xrightarrow{P} 0$. *Per tant, existeix* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$\mathbb{P}_n\left(\left|\rho(X^{(n)}, Y^{(n)}) - 0\right| > \delta\right) < \frac{\varepsilon}{6M}, \quad \forall n \geq n_0.$$

Per tant, per a tot $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned}\left|\int_{\Omega_n} f(X^{(n)}) - f(Y^{(n)})\, d\mathbb{P}_n\right| \leq\, & \frac{\varepsilon}{3}\mathbb{P}_n\left(X^{(n)} \in K, \rho(X^{(n)}, Y^{(n)}) < \delta\right) \\ & + 2M\,\mathbb{P}_n\left(X^{(n)} \notin K\right) \\ & + 2M\,\mathbb{P}_n\left(\rho(X^{(n)}, Y^{(n)}) > \delta\right) \leq \varepsilon.\end{aligned}$$

□

Lema 2.3.2. *Siguin* $\left\{X^{(n)}\right\}_n$ *i* X *elements aleatoris amb valors a* $(S, \mathcal{B}(S))$. *Sigui* $(S', \mathcal{B}(S'))$ *un altre espai mètric i sigui* $\varphi : S \to S'$ *una funció contínua. Si* $X^{(n)} \xrightarrow{\mathcal{L}} X$, *aleshores* $\varphi(X^{(n)}) \xrightarrow{\mathcal{L}} \varphi(X)$.

Prova. *Sigui* $f : S' \to \mathbb{R}$ *una funció contínua i acotada. Aleshores,* $f \circ \varphi : S \to \mathbb{R}$

és també contínua i acotada. Per l'observació 2.1.5, com $X^{(n)} \xrightarrow{\mathcal{L}} X$*, aleshores*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[f(\varphi(X^{(n)}))] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[(f\circ\varphi)(X^{(n)})] = \mathbb{E}[(f\circ\varphi)(X)] = \mathbb{E}[f(\varphi(X))].$$

Novament per l'observació 2.1.5, això equival a $\varphi(X^{(n)}) \xrightarrow{\mathcal{L}} \varphi(X)$*.*

□

Teorema 2.3.3. *Sigui* $\{X^{(n)}\}_n$ *la successió de processos definits a l'equació* (2.1)*. Siguin* $0 \le t_1 < t_2 < \ldots < t_d < \infty$*. Aleshores,*

$$\left(X^{(n)}_{t_1}, X^{(n)}_{t_2}, \ldots, X^{(n)}_{t_d}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} (B_{t_1}, B_{t_2}, \ldots, B_{t_d}) \quad \text{quan } n \to \infty,$$

on $\{B_t : t \ge 0\}$ *és un moviment Brownià estàndard.*

Prova. Considerarem el cas $d = 2$*. El cas general és anàleg però la notació és més feixuga. Siguin* $s = t_1$ *i* $t = t_2$*. Volem veure que*

$$\big(X^{(n)}_s, X^{(n)}_t\big) \xrightarrow{\mathcal{L}} \big(B_s, B_t\big).$$

Per la definició d'interpolació lineal (2.1)*, per a tot* $u \ge 0$ *tenim*

$$\left| X^{(n)}_u - \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} S_{\lfloor nu \rfloor} \right| \le \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \left|\xi_{\lfloor nu \rfloor + 1}\right|.$$

Ara, sigui $\varepsilon > 0$*. Aplicant la desigualtat de Txebixev,*

$$\mathbb{P}\left(\left| X^{(n)}_u - \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} S_{\lfloor nu \rfloor} \right| > \varepsilon\right) \le \mathbb{P}\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \left|\xi_{\lfloor nu \rfloor + 1}\right| > \varepsilon\right) \le \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2\,\sigma^2 n} = \frac{1}{\varepsilon^2 n} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

En particular, això val per $u = s$ *i* $u = t$*, i per tant*

$$\left\| \big(X^{(n)}_s, X^{(n)}_t\big) - \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \left(S_{\lfloor ns \rfloor},\, S_{\lfloor nt \rfloor}\right) \right\| \xrightarrow{P} 0. \tag{2.2}$$

Per altra banda, siguin $u, v \in \mathbb{R}$*. Aleshores, com les variables aleatòries* $\{\xi_n\}_n$ *són independents per construcció,*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\exp\left\{\frac{iu}{\sigma\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{\lfloor ns\rfloor}\xi_j + \frac{iv}{\sigma\sqrt{n}}\sum_{j=\lfloor ns\rfloor+1}^{\lfloor nt\rfloor}\xi_j\right\}\right] =$$

$$= \mathbb{E}\left[\exp\left\{\frac{iu}{\sigma\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{\lfloor ns\rfloor}\xi_j\right\}\right]\cdot \mathbb{E}\left[\exp\left\{\frac{iv}{\sigma\sqrt{n}}\sum_{j=\lfloor ns\rfloor+1}^{\lfloor nt\rfloor}\xi_j\right\}\right]. \quad (2.3)$$

Fixem-nos en el primer factor (l'altre és idèntic substituïnt s per $t-s$). Com que

$$\left|\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{\lfloor ns\rfloor}\xi_j - \frac{\sqrt{s}}{\sigma\sqrt{\lfloor ns\rfloor}}\sum_{j=1}^{\lfloor ns\rfloor}\xi_j\right| \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0,$$

i pel teorema central del límit

$$\frac{\sqrt{s}}{\sigma\sqrt{\lfloor ns\rfloor}}\sum_{j=1}^{\lfloor ns\rfloor}\xi_j \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,s),$$

aleshores obtenim que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\exp\left\{\frac{iu}{\sigma\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{\lfloor ns\rfloor}\xi_j\right\}\right] = e^{-\frac{u^2 s}{2}}.$$

De manera anàloga,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\exp\left\{\frac{iv}{\sigma\sqrt{n}}\sum_{j=\lfloor ns\rfloor+1}^{\lfloor nt\rfloor}\xi_j\right\}\right] = e^{-\frac{v^2(t-s)}{2}}.$$

Substituïnt aquestes expressions a (2.3)*, obtenim*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\exp\left\{\frac{iu}{\sigma\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{\lfloor ns\rfloor}\xi_j + \frac{iv}{\sigma\sqrt{n}}\sum_{j=\lfloor ns\rfloor+1}^{\lfloor nt\rfloor}\xi_j\right\}\right] = e^{-\frac{u^2 s}{2}}\, e^{-\frac{v^2(t-s)}{2}}.$$

Com hem vist a la proposició 1.3.4, aquesta és la funció característica del vector aleatori $(B_s, B_t - B_s)$. Per tant, pel Teorema de continuïtat de Paul Lévy, tenim que

$$\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{\lfloor ns\rfloor}\xi_j,\ \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\sum_{j=\lfloor ns\rfloor+1}^{\lfloor nt\rfloor}\xi_j\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} (B_s, B_t - B_s).$$

Considerem l'aplicació contínua $\varphi(x,y) = (x, x+y)$. Pel lema 2.3.2, la condició anterior implica que

$$\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}S_{\lfloor ns\rfloor}, \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}S_{\lfloor nt\rfloor}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} (B_s, B_t). \tag{2.4}$$

Per tant, per les condicions (2.2) *i* (2.4)*, i pel lema 2.3.1, tenim que*

$$\left(X_s^{(n)}, X_t^{(n)}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \left(B_s, B_t\right),$$

com volíem demostrar.

□

De fet, sota la hipòtesi d'ajustament, podem demostrar el següent resultat, que és encara més fort:

Teorema 2.3.4. *Sigui X un procés continu i sigui $\left\{X^{(n)}\right\}_n$ una seqüència ajustada de processos continus tal que per a qualssevol $0 \le t_1 \le ... \le t_d < \infty$,*

$$\left(X_{t_1}^{(n)}, ..., X_{t_d}^{(n)}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \left(X_{t_1}, ..., X_{t_d}\right).$$

Aleshores, $\left\{X^{(n)}\right\}_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

Prova. Volem veure que $\left\{X^{(n)}\right\}_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$. És a dir, que $\mathcal{L}(X^{(n)}) \xrightarrow{w} \mathcal{L}(X)$, entenent $\left\{X^{(n)}\right\}_n$ i X com funcions aleatòries amb valors a $(C[0,\infty], \mathcal{B}(C[0,\infty]))$.

Pel teorema de Prohorov, com $\left\{X^{(n)}\right\}_n$ és ajustada, aleshores és relativament compacta. Per tant, tota subsuccessió $\left\{X^{(n_k)}\right\}_k \subset \left\{X^{(n)}\right\}_n$ té una subsuccessió $\left\{Y^{(n)}\right\}_n \subset \left\{X^{(n_k)}\right\}_k$ tal que $\mathcal{L}(Y^{(n)}) \xrightarrow{w} \mathbb{P}$, per a alguna $\mathbb{P} \in \mathcal{P}(C[0,\infty])$.

Suposem que una altra subsuccessió $\left\{Z^{(n)}\right\}_n$ indueix mesures a $(C[0,\infty], \mathcal{B}(C[0,\infty]))$ que convergeixen feblement a una mesura $\mathbb{Q} \in \mathcal{P}(C[0,\infty])$. Aleshores, $\mathbb{P}$ i $\mathbb{Q}$ han de tenir les mateixes distribucions a dimensió finita. És a dir,

$$\mathbb{P}\left[w \in C[0,\infty] : (w(t_1), \dots, w(t_d)) \in A\right] = \mathbb{Q}\left[w \in C[0,\infty] : (w(t_1), \dots, w(t_d)) \in A\right]$$

per a tot $0 \le t_1 < t_2 \ldots < t_d < \infty$, $A \in \mathcal{B}(\mathcal{R}^d)$, $d \ge 1$. Per tant, $\mathbb{P} = \mathbb{Q}$.

Ara, suposem que la seqüència de mesures $\left\{\mathcal{L}(X^{(n)})\right\}_n$ no convergeix feblement a $\mathcal{L}(X)$. Aleshores, existeix una funció $f : C[0,\infty] \to \mathbb{R}$ contínua i acotada tal que el límit

$\lim_{n\to\infty} \int f(w)\mathcal{L}(X_n)(dw)$ no existeix, o bé és diferent de $\int f(w)\mathcal{L}(X)(dw)$. En

qualsevol cas, pel teorema de Prohorov, podem escollir una subseqüència $\left\{\mathcal{L}(X^{(n_k)})\right\}_k$ *tal que* $\lim_{k\to\infty}\int f(w)\mathcal{L}(X_k)(dw)$ *existeix però és diferent de* $\int f(w)\mathcal{L}(X)(dw)$. *Aquesta subseqüència no conté cap subseqüència* $\left\{\mathcal{L}(X^{(n_{kl})})\right\}_l$ *tal que* $\mathcal{L}(X^{(n_{kl})}) \xrightarrow{w} \mathcal{L}(X)$, *cosa que contradiu la conclusió del paràgraf anterior.*

□

Amb tot això, estem en condicions d'introduïr el teorema de Donsker, que estableix la convergència en llei del procés construït a l'equació (2.1) cap al moviment Brownià estàndard.

Teorema 2.3.5 (Teorema de Donsker)**.** *Sigui* $\left\{X^{(n)}\right\}_n$ *la successió de processos definits a l'equació* (2.1). *Aleshores,* $X^{(n)} \xrightarrow{\mathcal{L}} B$, *on* $\{B_t : t \geq 0\}$ *és un moviment Brownià estàndard.*

Prova. Pels teoremes 2.3.3 i 2.3.4 que acabem de veure, només resta demostrar l'ajustament de la successió de processos $\{X^{(n)}\}_n$. *El cas general requereix una caracterització de l'ajustament a l'espai* $C[0,\infty]$, *que es pot trobar detallada a [3] i [4]. En aquest treball, demostrarem l'ajustament per a una família de processos construïts a partir del passeig aleatori com a cas particular.*

□

2.4 Convergència del passeig aleatori cap al moviment brownià

Considerem les variables aleatòries $\{\xi_n\}_n$ independents i idènticament distribuïdes amb valors a $\{-1,1\}$, tals que

$$\mathbb{P}(\xi_n = 1) = \mathbb{P}(\xi_n = -1) = \frac{1}{2} \qquad n \geq 1.$$

Diem que $S_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$ és un passeig aleatòri. Com a cas particular del teorema de Donsker, demostrarem que la corresponent interpolació linial $\{X^{(n)}\}_n$, definida com a (2.1), convergeix en llei al moviment brownià.

Per a veure això, ens serà útil el següent criteri, que va ser demostrat per primer cop per Patrick Billingsley l'any 1968. [2]

[2]Vegeu [2].

Teorema 2.4.1 (Criteri de Billingsley). *Una successió de processos $\{X^{(n)}\}_n$ és ajustada si se satisfan aquestes dues condicions:*

a) La successió $\{X_0^{(n)}\}_n$ és ajustada.

b) Existeixen constants $\gamma \geq 0$ i $\alpha > 1$ i una funció $F \in C[0,\infty]$ no decreixent tal que

$$\mathbb{P}\{|X_t^{(n)} - X_s^{(n)}| \geq \lambda\} \leq \frac{1}{\lambda^\gamma}|F(t) - F(s)|^\alpha \tag{2.5}$$

per a tot $s, t \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ i $\lambda > 0$.

D'una banda, observem que la condició

$$\mathbb{E}[|X_t^{(n)} - X_s^{(n)}|^\gamma] \leq |F(t) - F(s)|^\alpha \tag{2.6}$$

implica (2.5) per la desigualtat de Txebixev. D'altra banda, en el nostre cas, $X_0^{(n)} = 0$ per a tot $n \in \mathbb{N}$. Per tant, per a demostrar l'ajustament de la successió de processos $\{X^{(n)}\}_n$, és suficient provar que existeixen constants $\gamma \geq 0$ i $\alpha > 1$ i una funció contínua $F \in C[0,\infty]$ no decreixent tal que (2.6) es compleixi.

Proposició 2.4.2. *Siguin $\{X^{(n)}\}_n$ les trajectòries del passeig aleatori convenientment normalitzades com a l'equació* (2.1)*. Aleshores, per a tot $s < t < \infty$,*

$$\mathbb{E}[(X_t^{(n)} - X_s^{(n)})^4] \leq C(t-s)^2.$$

Prova. Observem que podem escriure els processos $X_t^{(n)}$ de la següent manera:

$$X_t^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{nt} \theta(x)\,dx, \qquad on \qquad \theta(x) = \sum_{k=1}^\infty \xi_k \mathbf{1}_{[k-1,k)}(x).$$

En efecte, partint de la definició (2.1)*, tenim que*

$$\begin{aligned}
X_t^{(n)} &= \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sum_{j=1}^{\lfloor nt \rfloor} \xi_j + (nt - \lfloor nt \rfloor)\xi_{\lfloor nt \rfloor + 1} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sum_{j=1}^{\lfloor nt \rfloor} \int_{j-1}^{j} \xi_j\,dx + \int_{\lfloor nt \rfloor}^{nt} \xi_{\lfloor nt \rfloor + 1}\,dx \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\int_0^{\lfloor nt \rfloor} \sum_{k=1}^\infty \xi_k \mathbf{1}_{[k-1,k)}(x)\,dx + \int_{\lfloor nt \rfloor}^{nt} \sum_{k=1}^\infty \xi_k \mathbf{1}_{[k-1,k)}(x)\,dx \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{nt} \sum_{k=1}^\infty \xi_k \mathbf{1}_{[k-1,k)}(x)\,dx.
\end{aligned}$$

Aleshores,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big[(X_t^{(n)} - X_s^{(n)})^4\big] &= \frac{1}{n^2}\mathbb{E}\left[\left(\int_{ns}^{nt} \theta(x)\,dx\right)^4\right] \\ &= \frac{1}{n^2}\mathbb{E}\left[\int_{ns}^{nt} \cdots \int_{ns}^{nt} \theta(x_1)\cdots\theta(x_4)\,dx_1\cdots dx_4\right].\end{aligned}$$

Com tenim $4! = 24$ *possibles combinacions d'ordenar les variables* x_1, x_2, x_3, x_4, *aleshores*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big[(X_t^{(n)} - X_s^{(n)})^4\big] &= \frac{24}{n^2}\mathbb{E}\left[\int_{ns}^{nt} \cdots \int_{ns}^{nt} \theta(x_1)\cdots\theta(x_4)\mathbf{1}_{\{x_1\le x_2\le x_3\le x_4\}}\,dx_1\cdots dx_4\right] \\ &= \frac{24}{n^2}\int_{ns}^{nt} \cdots \int_{ns}^{nt} \mathbb{E}\big[\theta(x_1)\cdots\theta(x_4)\mathbf{1}_{\{x_1\le x_2\le x_3\le x_4\}}\big]\,dx_1\cdots dx_4.\end{aligned} \tag{2.7}$$

Observem que

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\big[\theta(x_1)\cdots\theta(x_4)\mathbf{1}_{\{x_1\le x_2\le x_3\le x_4\}}\big] \\ &\quad= \mathbb{E}\left[\sum_{k_1,k_2,k_3,k_4=1}^{\infty} \xi_{k_1}\xi_{k_2}\xi_{k_3}\xi_{k_4}\mathbf{1}_{[k_1-1,k_1)}(x_1)\cdots\mathbf{1}_{[k_4-1,k_4)}(x_4)\mathbf{1}_{\{x_1\le x_2\le x_3\le x_4\}}\right] \\ &\quad= \sum_{k_1,k_2,k_3,k_4=1}^{\infty} \mathbb{E}[\xi_{k_1}\xi_{k_2}\xi_{k_3}\xi_{k_4}]\mathbf{1}_{[k_1-1,k_1)}(x_1)\cdots\mathbf{1}_{[k_4-1,k_4)}(x_4)\mathbf{1}_{\{x_1\le x_2\le x_3\le x_4\}}.\end{aligned} \tag{2.8}$$

Recordem que en el cas del passeig aleatori, $Im(\xi_k) = \{-1,1\}$, $\mathbb{E}[\xi_k] = 0$ *i* $\mathrm{Var}(\xi_k) = 1$ *per a tot* $k \ge 1$. *Per la hipòtesi independència i tenint en compte que* $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ *estan ordenades, obtenim que*

$$\mathbb{E}[\xi_{k_1}\xi_{k_2}\xi_{k_3}\xi_{k_4}] = \begin{cases} 0, & \textit{si existeix } j \textit{ tal que } k_j \neq k_i\ \forall i \neq j, \\ 1, & \textit{si } k_1 = k_2 \neq k_3 = k_4 \\ 1, & \textit{si } k_1 = \cdots = k_4. \end{cases}$$

Substituïnt a l'expressió (2.8), *obtenim que*

$$\mathbb{E}\big[\theta(x_1)\cdots\theta(x_4)\mathbf{1}_{\{x_1\le x_2\le x_3\le x_4\}}\big] = \sum_{k,j=1}^{\infty} \mathbf{1}_{[k-1,k)^2}(x_1,x_2)\mathbf{1}_{[j-1,j)^2}(x_3,x_4)\mathbf{1}_{\{x_1\le x_2\le x_3\le x_4\}}.$$

Aplicant això a l'equació (2.7)*, obtenim la següent expressió:*

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\big[(X_t^{(n)} - X_s^{(n)})^4\big] \\ &\quad = \frac{24}{n^2}\int_{ns}^{nt}\cdots\int_{ns}^{nt}\sum_{k,j=1}^{\infty}\mathbf{1}_{[k-1,k)^2}(x_1,x2)\mathbf{1}_{[j-1,j)^2}(x_3,x_4)\mathbf{1}_{\{x_1\le x_2\le x_3\le x_4\}}\,dx_1\cdots dx_4.\end{aligned}$$

Utilitzant la desigualtat $\mathbf{1}_{\{x_1\le x_2\le x_3\le x_4\}} \le \mathbf{1}_{\{x_1\le x_2\}}\mathbf{1}_{\{x_3\le x_4\}}$ *, obtenim que*

$$\mathbb{E}\big[(X_t^{(n)} - X_s^{(n)})^4\big] \le \frac{24}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\int_{ns}^{nt}\int_{ns}^{nt}\mathbf{1}_{[k-1,k)}(x_1)\mathbf{1}_{[k-1,k)}(x_2)\mathbf{1}_{\{x_1\le x_2\}}\,dx_1dx_2\right)^2.$$

Ara fem el canvi de variables $y_1 = x_1/n$ *i* $y_2 = x_2/n$*:*

$$\mathbb{E}\big[(X_t^{(n)} - X_s^{(n)})^4\big] \le \frac{24}{n^2}n^4\left(\int_s^t\int_s^t\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{1}_{[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n})}(y_1)\mathbf{1}_{[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n})}(y_2)\mathbf{1}_{\{y_1\le y_2\}}\,dy_1dy_2\right)^2.$$

Observem que

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{1}_{\{\frac{k-1}{n}\le y_1<\frac{k}{n}\}}\mathbf{1}_{\{\frac{k-1}{n}\le y_2<\frac{k}{n}\}} \le \mathbf{1}_{\{y_2-y_1\le\frac{1}{n}\}}.$$

Per tant,

$$\mathbb{E}\big[(X_t^{(n)} - X_s^{(n)})^4\big] \le 24n^2\left(\int_s^t\int_s^t\mathbf{1}_{\{y_2-y_1\le\frac{1}{n}\}}\mathbf{1}_{\{y_1\le y_2\}}\,dy_1dy_2\right)^2.$$

Calculant l'integral,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big[(X_t^{(n)} - X_s^{(n)})^4\big] &\le 24n^2\left(\int_s^t\int_{\max(y_2-\frac{1}{n},s)}^{y_2}dy_1\,dy_2\right)^2 \\ &\le 24n^2\left(\int_s^t\int_{y_2-\frac{1}{n}}^{y_2}dy_1\,dy_2\right)^2 \\ &= 24n^2\left(\int_s^t\frac{1}{n}\,dy_2\right)^2 \\ &= 24(t-s)^2.\end{aligned}$$

Prenent $C = 24$*, hem provat la desigualtat desitjada.*

$\square$

Ja hem vist a la secció anterior (concretament, al teorema 2.3.3) que les distribucions finito-dimensionals del procés $\{X^{(n)}\}_n$ convergeixen en llei cap a les del moviment brownià. Per completar la demostració de la convergència en llei del procés, només ens calia verificar la condició d'ajustament de la successió $\{X^{(n)}\}_n$. Mitjançant la proposició 2.4.2 i el criteri de Billingsley, hem provat que aquesta condició es compleix en el cas del passeig aleatori. Per tant, pel teorema 2.3.4, el passeig aleatori convergeix en llei cap al moviment brownià.

Bibliografia

[1] Xavier Bardina. *Del Passeig Aleatori al Moviment Brownià*. Barcelona: Departament de Matemàtiques, Universitat Autònoma de Barcelona, 2015.

[2] Patrick Billingsley. *Convergence of Probability Measures*. 1a ed. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics. New York: John Wiley & Sons, 1968.

[3] Patrick Billingsley. *Convergence of Probability Measures*. 2a ed. Wiley Series in Probability and Statistics. New York: John Wiley & Sons, 1999.

[4] Ioannis Karatzas i Steven E. Shreve. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. 2a ed. Vol. 113. Graduate Texts in Mathematics. New York i Berlin: Springer, 1991.

[5] David Nualart i Marta Sanz. *Curs de Probabilitats*. Facultat de Matemàtiques, Universitat de Barcelona, 1990.

[6] Carles Rovira. *Processos Estocàstics: Un Curs Bàsic*. Facultat de Matemàtiques, Universitat de Barcelona, 2020.

[7] René L. Schilling. *Brownian Motion: A Guide to Random Processes and Stochastic Calculus. With a Chapter on Simulation by Björn Böttcher*. 3a ed. De Gruyter Textbook. Berlin / Boston: Walter de Gruyter, 2021.