Del passeig aleatori al moviment Brownià

Xavier Bardina
Xavier.Bardina@uab.cat
http://mat.uab.cat/~bardina

19 d'octubre de 2015

1 Processos estocàstics

Un procés estocàstic és una família de variables aleatòries reals $\{X_t,\, t \geq 0\}$ definides en un espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

El conjunt de paràmetres $[0, \infty)$ representa el temps i en alguns casos ens pot interessar suposar que és un interval fitat $[0, T]$, o el conjunt dels nombres naturals (processos a temps discret).

Per a cada $\omega \in \Omega$, l'aplicació

$$t \longrightarrow X_t(\omega)$$

s'anomena trajectòria del procés estocàstic.

Si fixem un conjunt finit d'instants $\{0 \leq t_1 < \cdots < t_n\}$ tindrem un vector aleatori

$$(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n.$$

Les distribucions de probabilitat $P_{t_1,\ldots,t_n} = P \circ (X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})^{-1}$ s'anomenen les distribucions en dimensió finita del procés.

El següent teorema, demostrat per Kolmogorov, assegura l'existència d'un procés estocàstic associat a una família de distribucions en dimensió finita que satisfacin una condició de compatibilitat.

Teorema 1.1. *Considerem una família de probabilitats*

$$\{P_{t_1,\ldots,t_n},\, 0 \leq t_1 < \cdots < t_n,\, n \geq 1\}$$

tals que:

1. *$P_{t_1,\dots,t_n}$ és una probabilitat a $\mathbb{R}^n$.*

2. *(Condició de compatibilitat): Si $\{0 \leq s_1 < \cdots < s_m\} \subset \{0 \leq t_1 < \cdots < t_n\}$, aleshores*

$$P_{t_1,\dots,t_n} \circ \pi^{-1} = P_{s_1,\dots,s_m}$$

   on $\pi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ és la projecció natural associada als dos conjunts d'índexs.

Aleshores, existeix un procés estocàstic $\{X_t, t \geq 0\}$ que té la família $\{P_{t_1,\dots,t_n}\}$ com a distribucions en dimensió finita.

La mitjana i l'autocovariància d'un procés estocàstic es defineixen així:

$$\begin{aligned} m_X(t) &= E(X_t) \\ \Gamma_X(s,t) &= \mathrm{Cov}(X_s, X_t) \\ &= E((X_s - m_X(s))(X_t - m_X(t)). \end{aligned}$$

La variància del procés X es defineix com

$$\sigma_X^2(t) = \Gamma_X(t,t) = \mathrm{Var}(X_t).$$

Avui veurem dos exemples de processos estocàstics molt importants com són el passeig aleatori i el moviment Brownià. Veurem també la relació que hi ha entre ells.

Comencem pel passeig aleatori: un individu surt tan begut de la taverna que no recorda on és casa seva. Decideix llavors caminar aleatòriament pel carrer de la següent forma: tira una moneda, si li surt cara fa un pas cap endavant i si li surt creu fa un pas enrera. Tornarà a la taverna? Arribarà a casa seva? I si enlloc de moure's per un carrer és mou per tota una ciutat i a cada cruïlla ha d'escollir entre 4 possibilitats: davant, darrera, dreta o esquerra? I si es mou a l'espai i ha d'escollir entre sis possibilitats diferents: davant, darrera, dreta, esquerra, amunt o avall?

El passeig aleatori és un problema clàssic de probabilitat que es pot resoldre de diferents formes. Nosaltres però resoldrem el problema directament. Això ens obligarà a treballar amb sèries, però aquest altre mètode té l'avantatge que és fàcilment generalitzable a dues o més dimensions.

Una propietat important del passeig aleatori és que permet obtenir aproximacions per al moviment Brownià. Més concretament, a partir d'un passeig aleatori es poden construir uns processos, que per un resultat molt important de probabilitats, el *Teorema Central del Límit Funcional* se sap que convergeixen cap al moviment Brownià.

El *moviment Brownià* és el nom donat a l'irregular moviment del pol·len suspès en l'aigua observat pel botànic Robert Brown el 1828. A. Einstein, vegeu [7], va començar a desenvolupar el 1905 una teoria física d'aquest moviment. Einstein va argumentar que si la teoria molecular era correcta, les molècules d'aigua colpejarien el fluid aleatòriament per totes direccions, fent descriure a la partícula de pol·len un moviment de l'estil de l'observat per Brown. Cal esmentar que en aquella època la teoria molecular encara no era totalment acceptada. Als anys 20 Norbert Wiener va presentar un model matemàtic per aquest moviment basat en la teoria dels processos estocàstics. En un sentit més ampli, hom anomena també moviment brownià la classe de models matemàtics que permeten descriure aquest procés físic i altres fenòmens anàlegs. Actualment, el moviment brownià i el càlcul estocàstic que se'n deriva s'utilitzen en molts models de la física i de l'economia on surten equacions diferencials amb pertorbacions aleatòries.

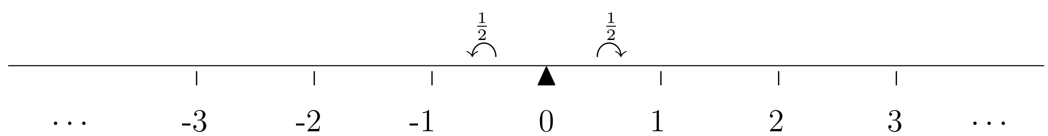
Pólya (1921), vegeu [11], va ser el primer en demostrar que en un passeig aleatori en dimensions 1 i 2 es retorna amb probabilitat 1 a l'origen mentre que això no passa en dimensions superiors. Montroll (1956), vegeu [9], va trobar una representació integral que permet calcular la probabilitat de retorn per dimensions iguals o superiors a 3. La integral que permet calcular la probabilitat pel cas de dimensió 3 havia estat resolta per Watson (1939), vegeu [12].

2 Passeig aleatori en una dimensió

Considerem un individu que surt tan begut de la taverna que no recorda on és casa seva i decideix caminar a l'atzar pel carrer de la següent manera: tira una moneda, si li surt cara fa un pas endavant i si li surt creu fa un pas enrera. Volem calcular quina és la probabilitat que retorni a la taverna i quina és la probabilitat que arribi a casa seva.

2.1 Retorn a la taverna

El problema, des del punt de vista matemàtic, és un passeig aleatori pels enters partint del zero (la taverna) i avançant o retrocedint un enter cada cop amb probabilitat $\frac{1}{2}$. Ens preguntem quina és la probabilitat de tornar al zero.



Gràfic 1: Passeig aleatori en una dimensió.

Considerarem les variables $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ que representaran els resultats dels llançaments de la moneda. Aquestes variables valdran 1 o -1 segons si el resultat del llançament ha estat cara (un pas endavant) o creu (un pas enrera).

D'altra banda, com que aquestes variables són el resultat del llançament d'una moneda és igual de probable que prenguin el valor 1 que el valor -1, és a dir,

$$P(X_n = 1) = P(X_n = -1) = \frac{1}{2} \qquad n = 1, 2, ...$$

Definim ara les variables S_n que ens diran en quina posició estem a l'instant n. Com que sortim de la taverna, a l'instant zero estem a la posició 0 (la taverna), és a dir, $S_0 = 0$ i a l'instant n hem fet tantes passes endavant com cares han sortit i tantes passes enrera com creus han sortit. Això és el mateix que sumar 1 quan surt cara (fem un pas endavant) i restar 1 quan surt creu (fem un pas enrera), per tant, tenim que la posició a l'instant n ve donada per

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n.$$

Per exemple, suposem que en els successius llançaments l'individu treu la següent sèrie de cares i creus:

$$C\,C\,X\,X\,C\,C\,X\,C\,X \cdots$$

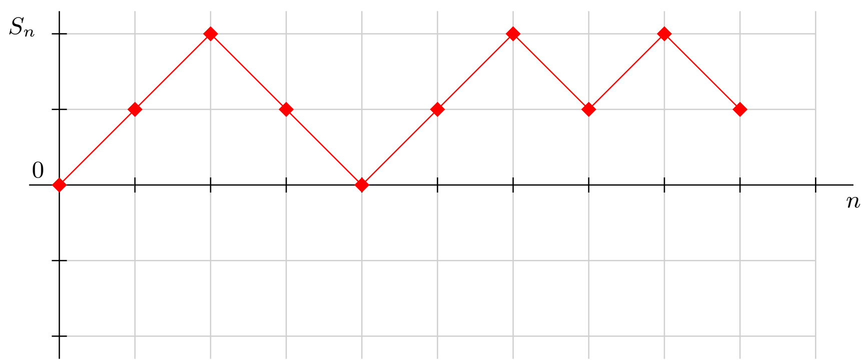
Aleshores, les primeres variables que hem introduït valdran

$$X_1 = 1,\ X_2 = 1,\ X_3 = -1,\ X_4 = -1,\ X_5 = 1,$$
$$X_6 = 1,\ X_7 = -1,\ X_8 = 1,\ X_9 = -1,\ \cdots$$

I les variables que ens donen la posició en cada instant prendran els següents valors:

$$\begin{aligned}
S_1 &= X_1 = 1\\
S_2 &= X_1 + X_2 = 1+1 = 2\\
S_3 &= X_1 + X_2 + X_3 = 1+1-1 = 1\\
S_4 &= X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 1+1-1-1 = 0\\
S_5 &= X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 = 1+1-1-1+1 = 1\\
S_6 &= X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_6 = 1+1-1-1+1+1 = 2\\
S_7 &= X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_7 = 1+1-1-1+1+1-1 = 1\\
S_8 &= X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_8 = 1+1-1-1+1+1-1+1 = 2\\
S_9 &= X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_9 = 1+1-1-1+1+1-1+1-1 = 1\\
&\ldots
\end{aligned}$$

El **Gràfic 2** mostra una forma de representar aquesta sèrie.



Gràfic 2: Representació gràfica d'un passeig aleatori.

Volem calcular la probabilitat que l'individu retorni a la taverna. És a dir, la probabilitat que existeixi un $n \geq 1$ tal que $S_n = 0$. Això ho escriurem de la següent forma

$$P\{\exists\, n \geq 1 \text{ tal que } S_n = 0\}.$$

Per poder calcular aquesta probabilitat introduirem dos esdeveniments. D'una banda, anomenarem A_n l'esdeveniment que correspon al fet que l'individu torna a la taverna per primer cop a l'instant de temps n. És a dir, a l'instant 0, $A_0 = \emptyset$ (el conjunt buit), ja que l'individu no ha pogut tornar a la taverna perquè encara no n'ha sortit. A l'instant 1 altre cop, $A_1 = \emptyset$, perquè no podem tornar a la taverna amb una sola passa. Per $n > 1$,

$$A_n := \{S_n = 0,\ S_1 \neq 0,\ S_2 \neq 0,\ \ldots, S_{n-1} \neq 0\,\}.$$

I d'altra banda, anomenarem B_n l'esdeveniment d'estar a la taverna a l'instant n independentment de si és o no el primer retorn. És a dir,

$$B_n := \{S_n = 0\}.$$

Definim ara les següents probabilitats,

$$a_n := P(A_n) \qquad b_n := P(B_n).$$

Com que $A_0 = \emptyset$ tenim que $a_0 = 0$. D'altra banda, $B_0 = \Omega$ (l'esdeveniment segur) i per tant $b_0 = 1$, ja que a l'instant 0 l'individu és a la taverna.

Observem que per $n \geq 1$,

$$B_n = \bigcup_{k=0}^{n} (B_n \cap A_k).$$

Com que aquests esdeveniments són disjunts tenim que

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} P\{B_n \cap A_k\}.$$

D'altra banda, si $k \leq n$,

$$\begin{aligned} P\{B_n \cap A_k\} &= P\{A_k, X_{k+1} + X_{k+2} + \cdots + X_n = 0\} \\ &= P\{A_k\} \cdot P\{X_{k+1} + X_{k+2} + \cdots + X_n = 0\}, \end{aligned}$$

on hem utilitzat que els esdeveniments $\{A_k\}$ i $\{X_{k+1} + X_{k+2} + \cdots + X_n = 0\}$ són independents.

Observem que,

$$P\{X_{k+1} + X_{k+2} + \cdots + X_n = 0\} = P\{X_1 + X_2 + \cdots + X_{n-k} = 0\},$$

per tant, hem demostrat que

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \qquad \text{per } n = 1, 2, ...$$

Veurem a continuació el següent resultat:

Lema 2.1. *Amb les definicions que hem introduït es compleix que*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 1 - \frac{1}{\sum_{n=0}^{+\infty} b_n}.$$

Prova: Observem que les sèries $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n s^n$ i $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n s^n$ són convergents per valors de $s \in (-1,1)$. En efecte, com que a_n i b_n són probabilitats, estan fitades per 1 i per tant, en ambdós casos, la sèrie formada pels valors absoluts es pot fitar per

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |s|^n = \frac{1}{1-|s|} < \infty \qquad \text{per } s \in (-1,1).$$

Si fem el producte d'aquestes dues sèries n'obtindrem una de nova. Denotarem per c_n els coeficients dels termes s^n d'aquesta nova sèrie:

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n s^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n s^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n s^n,$$

observem que $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ perquè són els coeficients que corresponen al terme s^n ja que $s^k s^{n-k} = s^n$. Però, d'una banda, $c_0 = 0$ perquè $a_0 = 0$ i d'altra banda havíem vist que $\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = b_n$, per $n \geq 1$, per tant,

$$\begin{aligned}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n s^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n s^n\right) &= \sum_{n=1}^{+\infty} b_n s^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} b_n s^n - 1.\end{aligned}$$

Així doncs, per a tot $s \in (-1,1)$ tenim que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n s^n = 1 - \frac{1}{\sum_{n=0}^{+\infty} b_n s^n}.$$

Tots els coeficients a_n i b_n són positius perquè són probabilitats. Per tant, si fem el límit quan la s tendeix a 1 per l'esquerra tenim una successió monòtona creixent. Aleshores, pel Teorema de la Convergència Monòtona per sèries, en fer aquest límit, obtenim la següent igualtat:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 1 - \frac{1}{\sum_{n=0}^{+\infty} b_n}.$$

$\square$

Tornem ara a la probabilitat que volíem calcular, la probabilitat que l'individu retorni a la taverna. Utilitzant que els esdeveniments $\{A_n\}_n$ són disjunts dos a dos i el lema que acabem de demostrar tenim que

$$\begin{aligned} P\{\exists\, n \geq 1 \text{ tal que } S_n = 0\} &= P\left\{\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right\} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \\ &= 1 - \frac{1}{\sum_{n=0}^{+\infty} b_n}. \end{aligned}$$

Veurem a continuació que $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n = +\infty$. Observem que si demostrem això ja haurem provat que l'individu retornarà a la taverna amb probabilitat 1. Tenim que per $n \geq 1$,

$$b_n = P\{S_n = 0\} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ és senar} \\ \binom{2k}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^k & \text{si } n = 2k. \end{cases}$$

En efecte, per tal que l'individu a l'instant n estigui a l'origen cal que hagi fet el mateix nombre de passes endavant que enrera. Per tant, cal que n sigui parell ($n = 2k$) i la probabilitat que hagi fet k passes endavant i k passes enrera és la probabilitat que una binomial de paràmetres $2k$ (ha fet en total $2k$ passes) i probabilitat d'èxit $\frac{1}{2}$ (cada cop fa un pas endavant amb aquesta probabilitat) prengui el valor k (k èxits, és a dir k passes endavant, i per tant també k fracassos, és a dir, k passes enrera).

Recordem que la fórmula de Stirling ens diu que quan k és prou gran, $k!$ es pot aproximar per $\left(\frac{k}{e}\right)^k \sqrt{2k\pi}$. Això és conseqüència del fet que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k!}{\left(\frac{k}{e}\right)^k \sqrt{2k\pi}} = 1$$

i s'acostuma a escriure de la següent forma

$$k! \sim \left(\frac{k}{e}\right)^k \sqrt{2k\pi}.$$

Per tant utilitzem aquest símbol, $\sim$, per referirnos a que el quocient entre les dues expressions tendeix a 1 quan fem tendir k a infinit.

Així doncs, per k prou gran,

$$\begin{aligned} b_{2k} &= \frac{(2k)!}{(k!)^2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k} \\ &\sim \frac{(2k)^{2k}\sqrt{4k\pi}}{k^{2k}2k\pi}\frac{1}{2^{2k}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{k}}. \end{aligned}$$

Per tant,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} b_n = \sum_{k=0}^{+\infty} b_{2k} = +\infty,$$

ja que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} = +\infty$, i per tant hem provat que

$$P\{\exists\, n \geq 1 \text{ tal que } S_n = 0\} = 1,$$

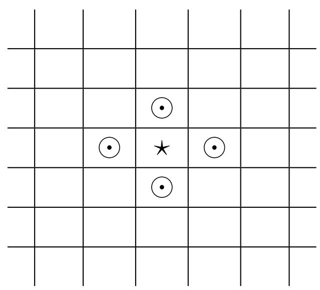
és a dir, hem vist que amb probabilitat 1 l'individu tornarà a la taverna.

Pel que fa a l'altra pregunta que ens hem plantejat, si retornarà o no a casa seva, des del punt de vista matemàtic es tracta de calcular la probabilitat que partint del zero s'arribi, caminant d'aquella forma, a qualsevol $x \in \mathbb{Z}$ (és a dir, sigui quin sigui el x que correspon a casa seva). Es pot demostrar utilitzant un argument d'inducció que aquesta probabilitat és 1 per a tot $x \in \mathbb{Z}$. El lector interessat pot trobar la demostració a [1].

3 Passeig aleatori en dues dimensions

Considerem ara el problema en dues dimensions, és a dir, suposem que no hi ha només un carrer sinó infinits carrers horitzontals i infinits carrers verticals, de forma que a cada cruïlla té quatre opcions igualment probables. Tornarà a la taverna? Tornarà a casa seva?

Ara estem al pla, i partint del zero ens mourem per punts formats per dos enters. El **Gràfic 3** mostra la nova situació. El nostre individu es troba situat on hi ha el símbol $\star$ i pot anar a qualsevol de les quatre posicions marcades amb el símbol $\odot$ amb probabilitat $\frac{1}{4}$.



Gràfic 3: Passeig aleatori en dues dimensions.

Denotarem, com abans, per S_n la posició de l'individu a l'instant n. Així, $S_0 = \vec{0}$ i

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

on $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ és una successió de vectors aleatoris independents tals que per a tot $i \geq 1$,

$$P(X_i = e_1) = P(X_i = e_2) = P(X_i = -e_1) = P(X_i = -e_2) = \frac{1}{4},$$

on $\{e_1, e_2\}$ són dos vectors ortonormals del pla.

Volem calcular la probabilitat que l'individu retorni a la taverna, és a dir,

$$P\{\exists\, n \geq 1 \text{ tal que } S_n = \vec{0}\}.$$

Utilitzarem les mateixes notacions que pel cas d'una sola dimensió:

$$\begin{aligned} b_n &:= P\{S_n = \vec{0}\}, \\ a_n &:= P\{S_n = \vec{0},\, S_1 \neq \vec{0},\, S_2 \neq \vec{0},\, \dots, S_{n-1} \neq \vec{0}\}. \end{aligned}$$

I per tant, igual que abans, obtenim que,

$$\begin{aligned} P\{\exists\, n \geq 1 \text{ tal que } S_n = \vec{0}\} &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \\ &= 1 - \frac{1}{\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n}. \end{aligned}$$

Així doncs, tornarà amb probabilitat 1 a la taverna només si $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n = +\infty$.

Observem que per $n \geq 1$, si n és senar,

$$b_n = P\{S_n = \vec{0}\} = 0,$$

ja que és impossible retornar a l'origen en un nombre senar de passos. Per retornar a l'origen cal haver fet el mateix nombre de passos endavant que endarrera i el mateix nombre de passos a dreta que a esquerra.

Si n és parell ($n = 2k$), aleshores

$$b_n = b_{2k} = P\{S_{2k} = \vec{0}\} = \frac{1}{4^{2k}} \sum_{j=0}^{k} \frac{(2k)!}{j!j!(k-j)!(k-j)!}.$$

En efecte, totes les trajectòries de longitud $2k$ tenen probabilitat $\frac{1}{4^{2k}}$ perquè en cada pas escollim de forma equiprobable entre 4 possibilitats i en total hem fet $2k$ passos. Hem de comptar doncs quantes trajectòries hi ha de longitud $2k$ que acabin a l'origen. Són totes aquelles que fem el mateix nombre de passos endavant (j) que endarrera i el mateix nombre de passos a dreta ($k-j$) que a esquerra. La j pren valors entre 0 (cap pas ni endavant ni enrera i k passos a dreta i k a esquerra) i k (k passos endavant i k enrera i cap pas ni a dreta ni a esquerra). D'aquí surt el sumatori en j. Falta veure d'on surt el darrer nombre combinatori. Hem de comptar quantes trajectòries hi ha que estiguin formades en total per j passos endavant, j passos enrera, $k - j$ passos a dreta i $k - j$ passos a esquerra. Això és el mateix que comptar de quantes formes podem treure $2k$ boles d'una urna si en tenim j de blanques, j de negres, $k - j$ de vermelles i $k - j$ de blaves. I la resposta a aquest problema combinatori és que es poden extreure les boles de

$$\frac{(2k)!}{j!j!(k-j)!(k-j)!}$$

formes diferents.

Treballarem a continuació una mica amb aquest nombre que hem obtingut:

$$\begin{aligned}
b_{2k} &= \frac{1}{4^{2k}} \sum_{j=0}^{k} \frac{(2k)!}{j!j!(k-j)!(k-j)!} \\
&= \frac{1}{4^{2k}} \sum_{j=0}^{k} \frac{(2k)!}{k!k!} \frac{k!k!}{j!j!(k-j)!(k-j)!} \\
&= \frac{1}{4^{2k}} \binom{2k}{k} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}^2 \\
&= \frac{1}{4^{2k}} \binom{2k}{k}^2.
\end{aligned}$$

En l'últim pas hem utilitzat que

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}^2 = \binom{2k}{k}. \tag{1}$$

Anem a justificar perquè és certa aquesta igualtat. Recordem que el binomi de Newton ens diu que donats dos nombres reals a i b i un enter positiu n es compleix que

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}. \tag{2}$$

Si apliquem el binomi de Newton a $(x+1)^{2k}$ obtenim

$$(x+1)^{2k} = \sum_{i=0}^{2k} \binom{2k}{i} x^i. \tag{3}$$

Però també tenim que

$$(x+1)^{2k} = (x+1)^k (x+1)^k = \left(\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} x^j \right) \left(\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} x^i \right). \tag{4}$$

Però, és clar, tant si apliquem el binomi de Newton directament com si ho fem d'aquesta segona manera el resultat ha de ser el mateix. Per tant, els coeficients de les diferents potències de x de l'expressió (3) i de l'expressió (4) han de coincidir. Ens fixem només amb el coeficient del terme x^k. A l'expressió (3) aquest coeficient és $\binom{2k}{k}$, mentre que a l'expressió (4), en fer el producte, el terme x^k apareixerà en tots els termes tals que $i + j = k$. Obtenim doncs que

$$\binom{2k}{k} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}\binom{k}{k-j} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}\binom{k}{j} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}^2.$$

Hem vist doncs que

$$b_{2k} \;=\; \left(\frac{1}{2^{2k}}\binom{2k}{k}\right)^2,$$

i utilitzant el que havíem obtingut en el cas de dimensió 1 mitjançant la fórmula de Stirling, tenim que

$$\begin{aligned} b_{2k} &\sim \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{k}}\right)^2 \\ &= \frac{1}{\pi k}, \end{aligned}$$

per n prou gran.

Per tant,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} b_n = \sum_{k=0}^{+\infty} b_{2k} = +\infty,$$

ja que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = +\infty$, i per tant hem provat que

$$P\{\exists\, n \geq 1 \text{ tal que } S_n = \vec{0}\} = 1,$$

és a dir, hem vist que encara que l'individu visqui en un món pla, amb probabilitat 1 tornarà a la taverna.

De la mateixa manera també podríem demostrar que amb probabilitat 1 arribarà a qualsevol punt de $\mathbb{Z}^2$.

4 Passeig aleatori en tres dimensions

Considerem ara el problema en dimensió 3. A cada cruïlla l'individu pot escollir entre sis opcions diferents: davant, darrera, dreta, esquerra, amunt o avall. Igual que en els casos precedents, totes les opcions són equiprobables. En aquest cas, escull cada cop una de les 6 opcions amb probabilitat $\frac{1}{6}$. Podem pensar, per exemple, que a cada cruïlla llença un dau per decidir quin dels 6 camins possibles tria. Ens fem les mateixes preguntes: tornarà a la taverna? arribarà a casa seva?

Veurem que en aquest cas, la probabilitat que torni a l'origen o que passi per tot punt, sorprenentment, ja no és 1.

Denotarem, com en els casos anteriors, per S_n la posició de l'individu a l'instant n.

Volem calcular la probabilitat que l'individu retorni a la taverna, és a dir,

$$P\{\exists\, n \geq 1 \ \text{ tal que } S_n = \vec{0}\}.$$

Utilitzarem les mateixes notacions que pels casos d'una i dues dimensions:

$$\begin{aligned} b_n &:= P\{S_n = \vec{0}\}, \\ a_n &:= P\{S_n = \vec{0},\, S_1 \neq \vec{0},\, S_2 \neq \vec{0},\, \ldots, S_{n-1} \neq \vec{0}\,\}. \end{aligned}$$

I per tant, igual que abans, obtenim que,

$$\begin{aligned} P\{\exists\, n \geq 1 \ \text{ tal que } S_n = \vec{0}\} &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \\ &= 1 - \frac{1}{\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n}. \end{aligned}$$

Així doncs, tornarà amb probabilitat 1 a la taverna només si $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n = +\infty$.

Observem que per $n \geq 1$, si n és senar,

$$b_n = P\{S_n = \vec{0}\} = 0,$$

ja que és impossible retornar a l'origen en un nombre senar de passos. Per retornar a l'origen cal haver fet el mateix nombre de passos endavant que endarrera, el mateix nombre de passos amunt que avall i el mateix nombre de passos a dreta que a esquerra.

Si n és parell ($n = 2k$), aleshores

$$b_n = b_{2k} = P\{S_{2k} = \vec{0}\} = \frac{1}{6^{2k}} \sum_{j=0}^{k} \sum_{i=0}^{k-j} \frac{(2k)!}{j!j!i!i!(k-j-i)!(k-j-i)!}.$$

En efecte, podem fer un raonament semblant al que havíem fet pel cas de dues dimensions. D'una banda totes les trajectòries de longitud $2k$ tenen probabilitat $\frac{1}{6^{2k}}$ perquè en cada pas escollim de forma equiprobable entre 6 possibilitats i en total hem fet $2k$ passos. Hem de comptar doncs quantes trajectòries hi ha de longitud $2k$ que acabin a l'origen. Són totes aquelles que fem el mateix nombre de passos endavant (j) que endarrera, el mateix nombre de passos amunt (i) que avall i el mateix nombre de passos a dreta ($k - j - i$) que a esquerra. La j pren valors entre 0 (cap pas ni endavant ni enrera) i k (k passos endavant i k enrera). D'aquí surt el sumatori en j. La i pren valors entre 0 (cap pas ni amunt ni avall i per tant $k - j$ passos a dreta i $k - j$ a esquerra) i $k - j$ ($k - j$ passos amunt i $k - j$ passos avall i per tant cap pas ni a dreta ni a esquerra). Falta veure d'on surt el darrer nombre combinatori. Hem de comptar quantes trajectòries hi ha que estiguin formades en total per j passos endavant, j passos enrera, i passos amunt, i passos avall, $k - j - i$ passos a dreta i $k - j - i$ passos a esquerra. Això és el mateix que comptar de quantes formes podem treure $2k$ boles d'una urna si en tenim j de blanques, j de negres, i de vermelles, i de blaves, $k - j - i$ de grogues i $k - j - i$ de verdes. I la resposta és que es poden extreure les boles de

$$\frac{(2k)!}{j!j!i!i!(k-j-i)!(k-j-i)!}$$

formes diferents.

Observem que

$$\begin{aligned} b_{2k} &= \frac{1}{6^{2k}} \sum_{j=0}^{k} \sum_{i=0}^{k-j} \frac{(2k)!}{j!j!i!i!(k-j-i)!(k-j-i)!} \\ &= \frac{1}{2^{2k}} \frac{1}{3^{2k}} \sum_{j=0}^{k} \sum_{i=0}^{k-j} \frac{(2k)!}{k!k!} \frac{k!k!}{j!j!i!i!(k-j-i)!(k-j-i)!} \\ &= \frac{1}{2^{2k}} \binom{2k}{k} \sum_{j=0}^{k} \sum_{i=0}^{k-j} \left(\frac{1}{3^k} \frac{k!}{j!i!(k-j-i)!} \right)^2. \qquad (5) \end{aligned}$$

Els termes que apareixen en aquest sumatori són els termes d'una distribució trinomial. En efecte, suposem que tenim 3 boles (una blanca, una negra i una vermella) en una urna. Fem k extraccions amb reposició i definim les variables aleatòries:

$$\begin{aligned} X &= \text{nombre de boles blanques en les } k \text{ extraccions,} \\ Y &= \text{nombre de boles negres en les } k \text{ extraccions,} \\ Z &= \text{nombre de boles vermelles en les } k \text{ extraccions.} \end{aligned}$$

Aleshores, per a tot $j, i \in 1, 2, \ldots, k$ amb $j + i \leq k$ tenim que

$$P\{X = j,\, Y = i,\, Z = k - j - i\} = \frac{1}{3^k} \frac{k!}{j!i!(k-j-i)!}.$$

Per tant, sabem que

$$\sum_{j=0}^{k} \sum_{i=0}^{k-j} \frac{1}{3^k} \frac{k!}{j!i!(k-j-i)!} = 1.$$

En l'expressió però que hem trobat per b_{2k}, vegeu (5), tenim cada terme elevat al quadrat.

Utilitzarem ara que quan tenim una variable que només pot prendre n valors diferents amb probabilitats $p_1, p_2, ..., p_n$ respectivament, llavors

$$p_1^2 + p_2^2 + \cdots + p_n^2 \leq \max_i p_i.$$

En efecte,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} p_j^2 &\leq \sum_{j=1}^{n} p_j \left(\max_{1 \leq i \leq n} p_i \right) \\ &\leq \left(\max_{1 \leq i \leq n} p_i \right) \sum_{j=1}^{n} p_j \\ &= \left(\max_{1 \leq i \leq n} p_i \right) \cdot 1 \\ &= \left(\max_{1 \leq i \leq n} p_i \right). \end{aligned}$$

Així doncs,

$$b_{2k} \leq \frac{1}{2^{2k}} \binom{2k}{k} \max_{0 \leq i,j \leq k} \left(\frac{1}{3^k} \frac{k!}{j!i!(k-j-i)!} \right).$$

La probabilitat màxima de la distribució trinomial s'obté quan X, Y i Z prenen totes tres el mateix valor (o el més semblant possible). Més concretament, si $k = 3m$ (amb $m \in \mathbb{N}$), la probabilitat màxima s'obté quan totes tres prenen el valor m. Si k és de la forma $k = 3m + 1$ la probabilitat màxima s'obté quan dues variables prenen el valor m i l'altra el valor $m + 1$. Finalmente, si k és de la forma $k = 3m - 1$ el valor màxim s'obté quan dues variables prenen el valor m i l'altra el valor $m - 1$.

Així doncs, si k és de la forma $k = 3m$,

$$b_{2k} \leq \frac{1}{2^{2k}} \binom{2k}{k} \left(\frac{1}{3^{3m}} \frac{(3m)!}{m!m!m!} \right).$$

Utilitzant la fórmula de Stirling i els càlculs fets pel cas de dimensió 1, on havíem vist que

$$\frac{1}{2^{2k}} \binom{2k}{k} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{k}},$$

tenim que aquest darrer terme es comporta com,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{1}{3^{3m}} \frac{\left(\frac{3m}{e}\right)^{3m} \sqrt{6m\pi}}{\left(\left(\frac{m}{e}\right)^m \sqrt{2m\pi}\right)^3} \\
= \; & \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{k}} \frac{\sqrt{3}}{2\pi m} \\
= \; & \frac{3\sqrt{3}}{2\pi\sqrt{\pi}} \frac{1}{k\sqrt{k}} \\
= \; & \frac{C_1}{k\sqrt{k}},
\end{aligned}$$

on $C_1 = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi\sqrt{\pi}}$.

Si $k = 3m + 1$, utilitzant de nou la formula de Stirling, s'obté també que b_{2k} és menor que un terme que es comporta com

$$\frac{C_2}{k\sqrt{k}},$$

per una certa constant C_2 i el mateix passa si k és de la forma $k = 3m - 1$, per una certa constant C_3.

Si prenem

$$C := \max\{C_1, C_2, C_3\}$$

tenim que,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} b_n &= \sum_{k=0}^{+\infty} b_{2k} \\
&\leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2k}} \binom{2k}{k} \max_{0 \leq i,j \leq k} \left(\frac{1}{3^k} \frac{k!}{j!i!(k-j-i)!} \right),
\end{aligned}$$

i aquesta sèrie es pot fitar per una altra que té el mateix comportament que

$$C \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k\sqrt{k}} < +\infty.$$

Per tant, la probabilitat de tornar a l'origen ja no és 1. De fet, es pot demostrar que la probabilitat de tornar a l'origen en el passeig aleatori de dimensió 3 és aproximadament 0.34.

Si la probabilitat de retornar a l'origen ja no és 1, tampoc no ho és la probabilitat de visitar un punt qualsevol x de $\mathbb{Z}^3$.

5 Dimensions superiors i llei del 0-1

5.1 Què passa en dimensions superiors?

En dimensions superiors a tres, com és d'esperar, passa el mateix que en dimensió tres. És a dir, la probabilitat de tornar a l'origen o a casa seva ja no és 1. Montroll, vegeu [9], va demostrar que es pot donar una representació en forma d'integral de la suma de la sèrie dels b_n que recordem que representen la probabilitat d'estar a l'origen a l'instant n.

Concretament, va demostrar que, si denotem per d la dimensió del nostre passeig aleatori, per $d \geq 3$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} b_n = \sum_{k=0}^{+\infty} b_{2k} = \frac{d}{(2\pi)^d} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cdots \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{d - \sum_{j=1}^{d} \cos(x_j)} dx_1 dx_2 \cdots dx_d.$$

En el cas de dimensió tres, $d = 3$, aquesta integral havia estat resolta per Watson, vegeu [12], i s'obté que

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} b_n &= \sum_{k=0}^{+\infty} b_{2k} \\
&= \frac{3}{(2\pi)^3} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{3 - (\cos(x) + \cos(y) + \cos(z))} dxdydz \\
&= \frac{\sqrt{6}}{32\pi^3} \Gamma\left(\frac{1}{24}\right) \Gamma\left(\frac{5}{24}\right) \Gamma\left(\frac{7}{24}\right) \Gamma\left(\frac{11}{24}\right) \\
&= 1.516386059\ldots,
\end{aligned}$$

on hem utilitzat la funció Gamma d'Euler que ve definida per

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

D'aquí, obtenim que la probabilitat de retornar a l'origen, quan $d = 3$ és,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 1 - \frac{1}{\sum_{n=0}^{+\infty} b_n} = 1 - \frac{1}{1.516386059\ldots} = 0.340537329\cdots$$

Per dimensions superiors a 3 només se saben trobar aproximacions numèriques d'aquesta integral. Denotem per $p(d)$ la probabilitat de retorn a l'origen en un passeig aleatori de dimensió d. A la **Taula 1** s'observen els valors obtinguts mitjançant aproximacions numèriques d'aquestes probabilitats.

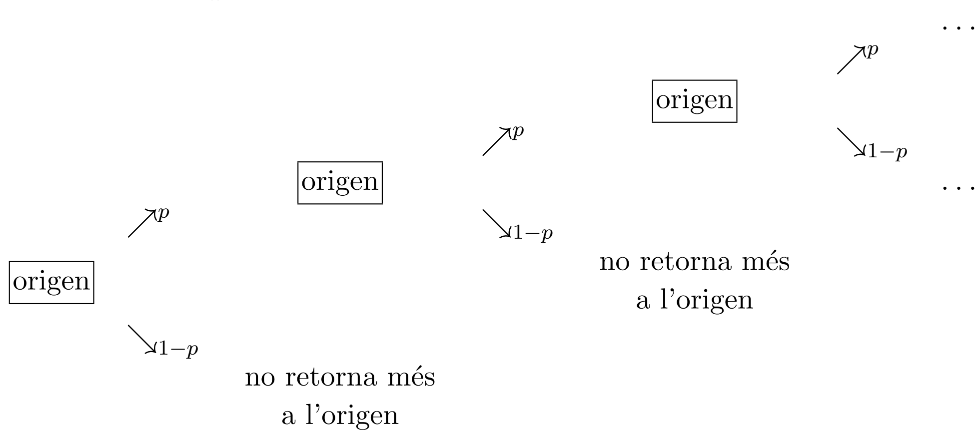
d	$p(d)$
3	0.340537
4	0.193206
5	0.135178
6	0.104715
7	0.085845
8	0.072913

Taula 1: Probabilitats de retorn a l'origen en un passeig aleatori de dimensió d.

5.2 Llei del 0-1

Hem vist que en dimensió 1 i 2, amb probabilitat 1 l'individu retorna a l'origen i arriba a casa seva. Observem que si hi retorna almenys un cop amb probabilitat 1 també hi retorna infinites vegades amb probabilitat 1. En efecte, ja que un cop s'ha produït el primer retorn, podem considerar que comencem un nou passeig aleatori, en el qual tornarà a tenir probabilitat 1 de retornar a l'origen, i així successivament. Una cosa semblant passa amb l'arribada a casa seva. Un cop ha arribat a casa seva, podem suposar que comencem un nou passeig aleatori, en el qual retornarà al nou origen (casa seva) amb probabilitat 1. Per tant, passarà infinites vegades per casa seva. És a dir, en un passeig aleatori en 1 o 2 dimensions tots els punts es visiten infinites vegades amb probabilitat 1.

En dimensions superiors però, la probabilitat que retorni almenys un cop a l'origen és estrictament menor que 1 (recordem que en el cas $d = 3$ és aproximadament 0.34). La denotarem per p i sabem que $p < 1$. Igual que abans, si s'ha produït un primer retorn a l'origen, podem considerar que comencem un nou passeig aleatori en el qual tornarà a tenir probabilitat p de retornar a l'origen, i així successivament. Per tant, usant l'argument que acabem de descriure, la probabilitat que retorni almenys 2 cops a l'origen serà $p \cdot p$, la probabilitat que hi retorni almenys n vegades serà p^n, etc... El **Gràfic 4** mostra aquest fet.



Gràfic 4: Retorns a l'origen pel passeig aleatori en tres dimensions ($p \approx 0.34$) o més.

Així, la probabilitat que retorni infinites vegades a l'origen serà

$$\lim_{n\to\infty} p^n = 0,$$

ja que $p < 1$. El mateix passarà amb el retorn d'infinites vegades a casa seva. L'individu surt de l'origen i la probabilitat que arribi a casa seva és estrictament menor que 1. Però si hi arribés, començaríem un nou passeig aleatori amb aquest nou origen i on tindria per tant probabilitat p de retornar a casa seva. Per tant la probabilitat que hi retorni infinites vegades també serà 0.

Hem vist doncs que la probabilitat que l'individu retorni infinites vegades a la taverna i infinites vegades a casa seva és 1 en un passeig aleatori en una o en dues dimensions, mentre que és 0 en un passeig aleatori en tres o més dimensions.

Dit d'una altra manera, en un passeig aleatori en una o dues dimensions tots els punts es visiten infinites vegades amb probabilitat 1, mentre que en un passeig aleatori en tres o més dimensions tot punt té probabilitat 0 de ser visitat infinites vegades.

6 Moviment Brownià

Es diu que un procés estocàstic $\{X_t,\, t \geq 0\}$ és gaussià o normal si les seves distribucions en dimensió finita són lleis normals multidimensionals.

Observem que en el cas d'un procés gaussià, la mitjana $m_X(t)$ i l'autocovariància $\Gamma_X(s,t)$ determinen les distribucions en dimensió finita del procés.

Es diu que un procés estocàstic $\{X_t,\, t \geq 0\}$ és una versió d'un altre procés $\{X'_t,\, t \geq 0\}$ si per a tot $t \geq 0$

$$P\{X_t = X'_t\} = 1.$$

Es diu també que ambdós processos són equivalents. Dos processos equivalents poden tenir trajectòries diferents.

El següent resultat, demostrat per Kolmogorov, mostra que l'obtenció de fites adequades dels moments dels increments del procés, permet deduir la continuïtat de les trajectòries.

Proposició 6.1. (Criteri de continuïtat) *Suposem que un procés estocàstic $\{X_t,\, t \geq 0\}$ compleix la condició següent:*

$$E(|X_t - X_s|^p) \leq C_T |t-s|^\alpha$$

per a tot $0 \leq s < t \leq T$, on $\alpha > 1$ i $p > 0$. Aleshores existeix una versió del procés estocàstic X_t que té trajectòries contínues.

Com ja hem comentat, el 1828 el botànic anglès Robert Brown va observar que els grans de pol·len en suspensió es movien de forma irregular. Posteriorment es va descobrir que aquest fenomen és a causa dels xocs aleatoris de les partícules de pol·len amb les mol·lecules del líquid. Als anys 20 Norbert Wiener va presentar un model matemàtic per a aquest moviment basat en la teoria dels processos estocàstics. La posició d'una partícula en cada instant $t \geq 0$ és un vector variable aleatori 3-dimensional B_t.

En el cas unidimensional la definició del moviment Brownià com a procés estocàstic és la següent:

Definició 1. *Un procés estocàstic* $\{B_t, \, t \geq 0\}$ *és un moviment Brownià si es compleixen les condicions següents:*

i) $B_0 = 0$

ii) Fixats n *instants* $0 \leq t_1 < \cdots < t_n$ *els increments*

$$B_{t_n} - B_{t_{n-1}}, \ldots, B_{t_2} - B_{t_1},$$

són variables aleatòries independents

iii) Si $s < t$*, l'increment* $B_t - B_s$ *té una llei normal* $N(0, t-s)$

iv) Les trajectòries del procés són funcions contínues.

6.0.1 Observacions

1. El moviment Brownià és un procés gaussià. En efecte, la llei un vector aleatori $(B_{t_1}, \ldots, B_{t_n})$ és normal ja que aquest vector és una transformació lineal del vector $(B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \ldots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}})$ que té llei normal ja que té les components independents i normals.

2. La mitjana i l'autocovariància del moviment Brownià es calculen fàcilment:

$$\begin{aligned} E(B_t) &= 0 \\ E(B_s B_t) &= E(B_s(B_t - B_s + B_s)) \\ &= E(B_s(B_t - B_s)) + E(B_s^2) = s = \min(s,t) \end{aligned}$$

   si $s < t$. Pot comprovar-se fàcilment que si un procés gaussià té mitjana zero i funció d'autocovariància $\Gamma_X(s,t) = \min(s,t)$, llavors compleix les condicions i), ii) i iii) de la definició anterior.

3. Pot demostrar-se que existeix un procés estocàstic que compleix les condicions anteriors. Per a això, es parteix de les seves distribucions en dimensió finita, que són lleis normals $N(0, \Gamma)$ on Γ és la la matriu

$$\begin{pmatrix} t_1 & t_1 & \cdots & t_1 \\ t_1 & t_2 & \cdots & t_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_1 & t_2 & \cdots & t_n \end{pmatrix}.$$

El teorema d'extensió de Kolmogorov permet construir un procés estocàstic fixades les distribucions en dimensió finita, sempre que siguin compatibles, la qual cosa aquí és certa. Finalment cal demostrar que es poden modificar les variables B_t amb conjunts de probabilitat zero de manera que les trajectòries siguin contínues. Per a això s'aplica el criteri de continuïtat de Kolmogorov. Com que els increments $B_t - B_s$ tenen llei normal $N(0, t-s)$, per a tot nombre enter k tindrem

$$E\left[(B_t - B_s)^{2k}\right] = \frac{(2k)!}{2^k k!}(t-s)^k.$$

Per tant prenent $k = 2$, ja podem assegurar que existeix una versió contínua, ja que

$$E\left[(B_t - B_s)^4\right] = 3(t-s)^2.$$

4. En la definició de moviment Bronwià, se suposa que l'espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ és arbitrari. Tanmateix, mitjançant l'aplicació

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & C([0,\infty), \mathbb{R}) \\ \omega & \longrightarrow & B_{\cdot}(\omega) \end{array}$$

podem suposar que l'espai de probabilitat és el conjunt de les funcions contínues $C([0,\infty), \mathbb{R})$ amb la $\sigma-$àlgebra de Borel (generada pels conjunts oberts relatius a l'estructura d'espai mètric separable i complet) i amb una probabilitat igual a la llei del moviment Brownià: $P \circ B^{-1}$. Aleshores les variables aleatòries són les avaluacions $\omega(t)$ i aquest espai de probabilitat s'anomena *espai canònic*.

5. Tot i existir una versió del moviment Brownià amb trajectòries contínues, es pot demostrar que les trajectòries no són diferenciables en cap punt. Això no ho demostrarem avui per manca de temps, però vegem que el moviment Brownià no pot tenir intervals de monotonicitat.

Proposició 6.2. *Per a tot $a, b \in [0, +\infty)$ amb $a < b$ el moviment Brownià no és monòton en l'interval $[a, b]$ quasi segurament.*

Prova: Fixem un interval $[a, b]$. Si $[a, b]$ fos un interval de monotonicitat creixent, aleshores

$$B_s \leq B_t,$$

per a tot $a \leq s \leq t \leq b$. Simètricament, si fos un interval de monotonicitat decreixent, aleshores tindríem que

$$B_s \geq B_t,$$

per a tot $a \leq s \leq t \leq b$. Escollim una partició Π_n de $[a, b]$ que divideixi $[a, b]$ en n sub-intervals $[a_i, a_{i+1}]$:

$$a = a_1 \leq \cdots \leq a_{n+1} = b.$$

Observem que si $[a, b]$ fos un interval de monotonicitat aleshores tots els increments $B_{a_{i+1}} - B_{a_i}$ tindrien el mateix signe. Per tant per a tot $n \in \mathbb{N}$ i tota partició Π_n

$$\begin{aligned}
& P\left(\{[a,b] \text{és un interval de monotonicitat}\}\right) \\
\leq \; & P\left(\left(\cap_{i=1}^{n}\{B_{a_{i+1}} - B_{a_i} > 0\}\right) \cup \left(\cap_{i=1}^{n}\{B_{a_{i+1}} - B_{a_i} < 0\}\right)\right) \\
= \; & P\left(\cap_{i=1}^{n}\{B_{a_{i+1}} - B_{a_i} > 0\}\right) + P\left(\cap_{i=1}^{n}\{B_{a_{i+1}} - B_{a_i} < 0\}\right).
\end{aligned}$$

Utilitzant ara que el moviment Brownià té increments independents obtenim que aquesta darrera expressió és igual a:

$$\begin{aligned}
& \prod_{i=1}^{n} P\left(B_{a_{i+1}} - B_{a_i} > 0\right) + \prod_{i=1}^{n} P\left(B_{a_{i+1}} - B_{a_i} < 0\right) \\
= \; & \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{2} + \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{2} = 2 \cdot 2^{-n},
\end{aligned}$$

on hem usat en aquest darrer pas que $B_{a_{i+1}} - B_{a_i}$ es distribueix seguint una $N(0, a_{i+1} - a_i)$.

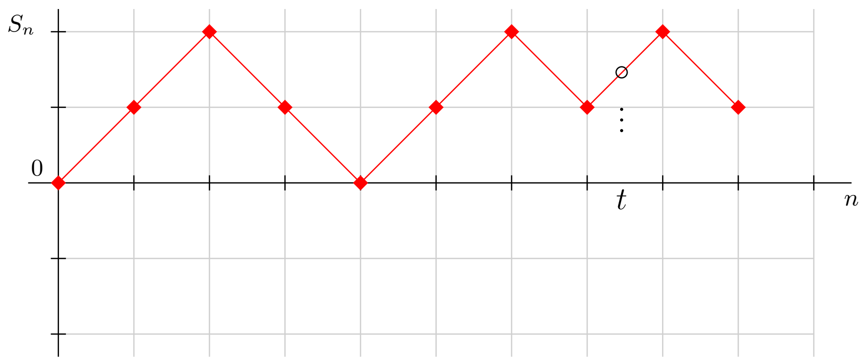
$\square$

7 Tornem al passeig aleatori

Definirem ara el procés S_t que ens donava la trajectòria del passeig aleatori per a tot $t \geq 0$ mitjançant interpol·lació lineal:

$$S_t = \sum_{j=1}^{[t]} X_j + (t - [t]) X_{[t]+1}.$$

És a dir, a cada punt t li farem correspondre el punt que marca el gràfic següent:



Gràfic 3: Interpol·lació lineal per a definir les trajectòries del passeig aleatori per a tot $t \geq 0$.

Observem que

$$\begin{aligned} E(S_t) &= \sum_{j=1}^{[t]} E(X_j) + (t - [t]) E(X_{[t]+1}) \\ &= 0. \\ \mathrm{Var}(S_t) &= \sum_{j=1}^{[t]} \mathrm{Var}(X_j) + (t - [t])^2 \mathrm{Var}(X_{[t]+1}) \\ &= [t] + (t - [t])^2. \end{aligned}$$

On hem utilitzat que $E(X_j) = 0$, $\mathrm{Var}(X_j) = 1$ i, en el càlcul de la variància, que les variables X_j són independents.

Considerem ara els processos

$$Y_t^n = \frac{1}{\sqrt{n}} S_{nt}.$$

Veurem, de moment de manera informal, perquè és raonable esperar que aquests processos convergeixin cap al moviment Brownià quan $n \to \infty$. Hem vist que el moviment Brownià es caracteritza per ser un procés Gaussià, centrat i amb funció de covariància $\mathrm{Cov}(B_s, B_t) = \min(s,t)$ (en particular, $\mathrm{Var}(B_t) = t$).

Observem que

$$\begin{aligned} E(Y_t^n) &= \frac{1}{\sqrt{n}} S_{nt} = 0 \\ \mathrm{Var}(Y_t^n) &= \frac{1}{n}\mathrm{Var}(S_{nt}) = \frac{1}{n}\left([nt] + (nt - [nt])^2\right) \end{aligned}$$

Si ara fem el límit quan la n tendeix a infinit observem que

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} E(Y_t^n) &= 0 \\ \lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}(Y_t^n) &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\left([nt] + (nt - [nt])^2\right)\right) = t, \end{aligned}$$

ja que d'una banda

$$\frac{(nt - [nt])^2}{n} \leq \frac{1}{n} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

i d'altra banda,

$$\frac{[nt]}{n} = t - \frac{nt - [nt]}{n}$$

i el terme $\frac{nt-[nt]}{n}$ convergeix a zero perquè també es pot fitar per $\frac{1}{n}$.

Observem que els processos Y_t^n venen definits per l'expressió següent:

$$Y_t^n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{[nt]} X_j + \frac{(nt - [nt])}{\sqrt{n}} X_{[nt]+1}. \tag{6}$$

I sabem, pel **Teorema Central del Límit** que

$$Y_t^n \stackrel{d}{\longrightarrow} \mathrm{Normal}(0, t).$$

En efecte, el primer terme de l'expressió (6) és una suma de v.a.i.i.d. amb variància finita. De fet, el Teorema Central del Límit ens assegura que

$$\frac{1}{\sqrt{[nt]}} \sum_{j=1}^{[nt]} X_j \stackrel{d}{\longrightarrow} \mathrm{Normal}(0, 1).$$

Ara, per n prou gran, $[nt] \approx nt$ i, per tant,

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{[nt]} X_j \approx \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{nt} X_j = \sqrt{t} \frac{1}{\sqrt{nt}} \sum_{j=1}^{nt} X_j \xrightarrow{d} \text{Normal}(0, t).$$

El terme addicional de l'expressió (6) convergeix a zero, per exemple, en $L^1(\Omega)$:

$$E \left| \frac{(nt - [nt])}{\sqrt{n}} X_{[nt]+1} \right| \leq \frac{(nt - [nt])}{\sqrt{n}} E|X_{[nt]+1}| = \frac{(nt - [nt])}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Per tant tenim que el procés límit, quan $n \to \infty$ dels processos Y_t^n, en cas d'existir, hauria de ser un procés Gaussià, centrat i calcularem ara quina hauria de ser la funció de covariància: Suposem $s < t$. Aleshores,

$$\begin{aligned}
& E(Y_s^n Y_t^n) \\
= \; & E\left[\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{[ns]} X_j + \frac{(ns - [ns])}{\sqrt{n}} X_{[ns]+1} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{[nt]} X_j + \frac{(nt - [nt])}{\sqrt{n}} X_{[nt]+1} \right) \right] \\
= \; & \frac{1}{n} E\left[\left(\sum_{j=1}^{[ns]} X_j \right) \left(\sum_{j=1}^{[nt]} X_j \right) \right] \\
& + \frac{1}{n} (ns - [ns]) E\left[X_{[ns]+1} \left(\sum_{j=1}^{[nt]} X_j \right) \right] \\
& + \frac{1}{n} (nt - [nt]) E\left[X_{[nt]+1} \left(\sum_{j=1}^{[ns]} X_j \right) \right] \\
& + \frac{1}{n} (ns - [ns])(nt - [nt]) E\left[X_{[ns]+1} X_{[nt]+1} \right].
\end{aligned}$$

Observem que per a n prou gran, com que $s < t$, podem suposar que $[ns] \neq [nt]$. D'altra banda,

$$\begin{aligned}
\text{si } j = k \qquad X_j X_k &= 1 \\
\text{si } j \neq k \qquad X_j X_k &= \begin{cases} 1 & \text{amb probabilitat } \frac{1}{2} \\ -1 & \text{amb probabilitat } \frac{1}{2} \end{cases}
\end{aligned}$$

Per tant,

$$E[X_jX_k] = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq k \\ 1 & \text{si } j = k \end{cases}$$

Així doncs,

$$\begin{aligned}
& E\left[\left(\sum_{j=1}^{[ns]} X_j\right)\left(\sum_{j=1}^{[nt]} X_j\right)\right] \\
= \; & E\left[\left(\sum_{j=1}^{[ns]} X_j\right)\left(\sum_{k=1}^{[ns]} X_k + \sum_{k=[ns]+1}^{[nt]} X_k\right)\right] \\
= \; & E\left[\left(\sum_{j=1}^{[ns]} X_j\right)\left(\sum_{k=1}^{[ns]} X_k\right)\right] + E\left[\left(\sum_{j=1}^{[ns]} X_j\right)\left(\sum_{k=[ns]+1}^{[nt]} X_k\right)\right] \\
= \; & \sum_{j,k=1}^{[ns]} E[X_jX_k] + \sum_{j=1}^{[ns]} \sum_{k=[ns]+1}^{[nt]} E[X_jX_k] \\
= \; & \sum_{j=1}^{[ns]} 1 = [ns].
\end{aligned}$$

De la mateixa manera,

$$\begin{aligned}
E\left[X_{[ns]+1}\left(\sum_{j=1}^{[nt]} X_j\right)\right] &= E\left[X_{[ns]+1}X_{[ns]+1}\right] = 1, \\
E\left[X_{[nt]+1}\left(\sum_{j=1}^{[ns]} X_j\right)\right] &= 0, \\
E\left[X_{[ns]+1}X_{[nt]+1}\right] = 0.
\end{aligned}$$

Per tant, per n prou gran,

$$E(Y_s^nY_t^n) = \frac{1}{n}\left([ns] + (ns - [ns])\right) = \frac{ns}{n} = s,$$

i així, el límit quan n tendeix a infinit, també ha de ser $s = \min(s,t)$.

El Teorema Central del Límit Funcional, o principi d'invariància funcional de Donsker, és la formalització matemàtica rigorosa d'aquestes idees que acabem de veure.

8 Teorema Central del Límit Funcional

8.1 Convergència feble de probabilitats

Tot seguit itroduirem algunes definicions i propietats de la convergència feble de probabilitats i de la convergència en llei de variables aleatòries i de processos estocàstics.

Considerem un espai polonès G, és a dir, un espai mètric separable i complet, i considerem també la seva σ-àlgebra de Borel, $\mathcal{E}$. Denotarem per $\mathcal{P}(G)$ l'espai de les mesures de probabilitat en $(G, \mathcal{E})$, i prenem en aquest espai la topologia feble, és a dir, la topologia menys fina per la qual l'aplicació que a cada mesura μ li fa correspondre

$$\mu \longrightarrow \mu(f) := \int_G f d\mu$$

és contínua, per a tota funció contínua i fitada f de G. Existeixen a $\mathcal{P}(G)$ diverses mètriques compatibles amb aquesta topologia, que fan que $\mathcal{P}(G)$ sigui també un espai polonès.

Definició 2. *Es diu que una successió de mesures de probabilitat en* $(G, \mathcal{E})$, $\{\mu_n, n \geq 0\}$, *convergeix feblement cap a una mesura de probabilitat* μ *i ho denotarem per*

$$\mu_n \stackrel{w}{\Rightarrow} \mu$$

si

$$\mu_n(f) \longrightarrow \mu(f)$$

per a tota $f : G \longrightarrow \mathbb{R}$ *contínua i fitada. És a dir, si hi ha convergència de* μ_n *cap a* μ *en la topologia que hem definit abans.*

Definició 3. *Es diu que un conjunt* $A \subset \mathcal{P}(G)$, *és relativament compacte si tota successió d'elements d'aquest conjunt té una subsuccessió feblement convergent.*

Definició 4. *Un conjunt* $A \subset \mathcal{P}(G)$ *és ajustat si per a tot* $\varepsilon > 0$ *existeix un compacte* K *en* G *tal que per a tota* $\mu \in A$, $\mu(G \setminus K) \leq \varepsilon$.

En un espai mètric, una tècnica habitual per a provar la convergència d'una successió és demostrar que és relativament compacta i després, és suficient veure que tota parcial convergent convergeix cap al mateix límit. El Teorema de Prohorov descriu exactament quins són els subconjunts relativament compactes de $\mathcal{P}(G)$,

Teorema 8.1. *(Teorema de Prohorov) Un subconjunt A de $\mathcal{P}(G)$ és relativament compacte (per la topologia feble) si i només si és ajustat.*

Tot seguit recordarem la definició de convergència en llei per a variables aleatòries a valors en un espai polonès. Suposem que tenim en un espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ una variable aleatòria Y, que pren valors en un espai polonès G. Anomenarem llei o distribució de Y, la llei imatge $P \circ Y^{-1}$. Aquesta mesura de probabilitat la denotarem per $\mathcal{L}(Y)$ i pertany a $\mathcal{P}(G)$.

Definició 5. *Considerem una successió de variables aleatòries a valors en G, $\{Y^n,\, n \geq 0\}$, definides en uns certs espais de probabilitat $(\Omega^n, \mathcal{F}^n, P^n)$, amb lleis $\mathcal{L}(Y^n)$.*

Direm que $\{Y^n,\, n \geq 0\}$ convergeix en llei cap a una altra variable aleatòria Y en G, i ho denotarem per

$$Y^n \stackrel{\mathcal{L}}{\Rightarrow} Y,$$

si $\mathcal{L}(Y^n) \stackrel{w}{\Rightarrow} \mathcal{L}(Y)$.

Si denotem per E_Q l'esperança matemàtica sota la probabilitat Q, aquesta definició és equivalent a que per a tota funció contínua i fitada $f : G \longrightarrow \mathbb{R}$

$$E_{P^n}(f(Y^n)) \longrightarrow E_P(f(Y)).$$

Considerem ara que tenim una successió de processos estocàstics a valors en $\mathbb{R}$ parametritzats per un espai mètric compacte T, amb trajectòries contínues, $\{Y^n(t),\, t \in T, n \geq 0\}$. Podem considerar els processos Y^n com variables aleatòries a valors en l'espai de Banach de les funcions contínues $\mathcal{C}(T)$. Per demostrar la convergència en llei dels processos Y^n cap a un cert procés Y, en l'espai $\mathcal{C}(T)$, es pot fer servir el mètode següent,

- (i) Demostrar que la família de lleis $\{\mathcal{L}(Y^n)\}$ és relativament compacta en $\mathcal{P}(\mathcal{C}(T))$, o el que és el mateix pel Teorema de Prohorov, demostrar que és ajustada.

- (ii) Demostrar que tota parcial $\{\mathcal{L}(Y^{n_k})\}$ feblement convergent, convergeix cap al mateix límit, la llei $\mathcal{L}(Y)$.

Aquesta segona condició es pot canviar per aquesta altra,

- (ii') Demostrar que per a tot $k \geq 1$ i per a tot $t_1, \ldots, t_k \in T$,

  $$(Y^n(t_1), \ldots, Y^n(t_k)) \stackrel{\mathcal{L}}{\Rightarrow} (Y(t_1), \ldots, Y(t_k))$$

  en $\mathbb{R}^k$.

8.2 Demostració del principi d'invariància

Observem que per a qualsevol dels dos mètodes que hem introduït cal provar en primer lloc l'ajustament de la família de lleis. Per a provar això últim, habitualment s'utilitzen criteris basats en la caracterització dels compactes que ens dóna el teorema d'Arzelà-Ascoli. Un d'aquests criteris que se solen utilitzar per a provar l'ajustament és el següent, demostrat per Billingsley (veure [4]):

Teorema 8.2. *(Criteri de Billingsley) Una successió $\{Y_n\}$ és ajustada si se satisfan aquestes dues condicions:*

a) La successió $\{Y^n(0)\}$ és ajustada.

b) Existeixen constants $\gamma \geq 0$ i $\alpha > 1$ i una funció contínua no decreixent F en $[0,T]$ tal que

$$P\{|Y_n(t) - Y_n(s)| \geq \lambda\} \leq \frac{1}{\lambda^\gamma}|F(t) - F(s)|^\alpha \tag{7}$$

per a tot $s, t \in [0,T]$, per a tot $n \in \mathbb{N}$ i per a tot $\lambda > 0$.

D'una banda, observem que la condició

$$E\left[|Y_n(t) - Y_n(s)|^\gamma\right] \leq |F(t) - F(s)|^\alpha$$

implica, utilitzant la desigualtat de Txebixev, la condició (7). D'altra banda, en el nostre cas, $Y_n(0) = 0$ per a tot $n \in \mathbb{N}$. Per tant, per a demostrar l'ajustament, en el nostre cas és suficient provar que existeixen constants $\gamma \geq 0$ i $\alpha > 1$ i una funció contínua no decreixent F en $[0,T]$ tal que

$$E\left[|Y_n(t) - Y_n(s)|^\gamma\right] \leq |F(t) - F(s)|^\alpha.$$

Concretament, en el nostre cas on Y_t^n eren les trajectòries del passeig aleatori convenient normalitzades, demostrarem que

Proposició 8.3. *Per a tot $s, t \in [0,T]$ amb $s < t$,*

$$E(Y_t^n - Y_s^n)^4 \leq C(t-s)^2.$$

Prova: Observeu que podem escriure els nostres processos Y_t^n de la següent manera:

$$Y_t^n = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{nt} \theta(x)dx,$$

on $\theta(x) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k I_{[k-1,k)}(x)$.

En efecte,

$$\begin{aligned}
Y_t^n &= \int_0^t \sum_{k=1}^{\infty} X_k \cdot I_{[k-1,k)}(x)\,dx \\
&= \int_0^{[t]} \sum_{k=1}^{\infty} X_k \cdot I_{[k-1,k)}(x)\,dx + \int_{[t]}^t \sum_{k=1}^{\infty} X_k \cdot I_{[k-1,k)}(x)\,dx \\
&= \sum_{j=1}^{[t]} \int_{j-1}^{j} X_j\,dx + \int_{[t]}^t X_{[t]+1}\,dx \\
&= \sum_{j=1}^{[t]} X_j(j-(j-1)) + (t-[t])X_{[t]+1} \\
&= \sum_{j=1}^{[t]} X_j + (t-[t])X_{[t]+1}.
\end{aligned}$$

Aleshores,

$$\begin{aligned}
& E(Y_t^n - Y_s^n)^4 \\
= & \frac{1}{n^2} E\left(\int_{ns}^{nt} \theta(x)dx\right)^4 \\
= & \frac{1}{n^2} E \int_{ns}^{nt} \cdots \int_{ns}^{nt} \theta(x_1)\theta(x_2)\theta(x_3)\theta(x_4)dx_1 \cdots dx_4 \\
= & \frac{24}{n^2} E \int_{ns}^{nt} \cdots \int_{ns}^{nt} \theta(x_1)\theta(x_2)\theta(x_3)\theta(x_4) I_{\{x_1 \le x_2 \le x_3 \le x_4\}} dx_1 \cdots dx_4 \\
= & \frac{24}{n^2} \int_{ns}^{nt} \cdots \int_{ns}^{nt} E(\theta(x_1)\theta(x_2)\theta(x_3)\theta(x_4) I_{\{x_1 \le x_2 \le x_3 \le x_4\}}) dx_1 \cdots dx_4. \quad (8)
\end{aligned}$$

Observem que

$$
\begin{aligned}
& E\left[\theta_1(x_1)\theta_2(x_2)\theta_3(x_3)\theta_4(x_4)I_{\{x_1\le x_2\le x_3\le x_4\}}\right] \\
= \;& E\left[\sum_{k_1,k_2,k_3,k_4=1}^{\infty} X_{k_1}\cdots X_{k_4}\cdot I_{[k_1-1,k_1)}(x_1)\cdots I_{[k_4-1,k_4)}(x_4)\cdot I_{\{x_1\le x_2\le x_3\le x_4\}}\right] \\
= \;& \sum_{k_1,k_2,k_3,k_4=1}^{\infty} E\left[X_{k_1}\cdots X_{k_4}\right]\cdot I_{[k_1-1,k_1)}(x_1)\cdots I_{[k_4-1,k_4)}(x_4)\cdot I_{\{x_1\le x_2\le x_3\le x_4\}} \quad (9)
\end{aligned}
$$

D'altra banda,

$$
E\left[X_{k_1}\cdot X_{k_2}\cdot X_{k_3}\cdot X_{k_4}\right] = \begin{cases} 0 & \text{si existeix una } \; k_j\neq k_i \quad \forall i\in\{1,2,3,4\}\backslash j, \\ & \quad \text{ja que les } X_k \text{ són independents} \\ & \quad \text{i tenen } E(X_k)=0; \\ & \\ 1 & \text{si } k_1=k_2 \text{ y } k_3=k_4, \\ & \quad \text{ja que, com que estan ordenades,} \\ & \quad \text{només serà diferent de zero en aquest cas.} \end{cases}
$$

Observem que pel que fa al darrer cas hi ha dues possibilitats:

- $k_1 = k_2 \neq k_3 = k_4$
- $k_1 = \cdots = k_4$

en ambdós casos $E\left[X_{k_1}\cdot X_{k_2}\cdot X_{k_3}\cdot X_{k_4}\right] = 1$. Aleshores, l'expressió (9) és igual a

$$
\sum_{k,j=1}^{\infty} I_{[k-1,k)^2}(x_1,x_2)\cdot I_{[j-1,j)^2}(x_3,x_4)\cdot I_{\{x_1\le x_2\le x_3\le x_4\}}
$$

Així doncs, podem escriure l'expressió (8) de la següent forma:

$$
\frac{24}{n^2}\int_{ns}^{nt}\cdots\int_{ns}^{nt}\sum_{k,j=1}^{\infty} I_{[k-1,k)^2}(x_1,x_2)\cdot I_{[j-1,j)^2}(x_3,x_4)\cdot I_{\{x_1\le x_2\le x_3\le x_4\}}\,dx_1\cdots dx_4.
$$

Utilitzant ara la desigualtat

$$
I_{\{x_1\le x_2\le x_3\le x_4\}} \le I_{\{x_1\le x_2\}}\cdot I_{\{x_3\le x_4\}},
$$

obtenim que

$$
\begin{aligned}
&\frac{24}{n^2}\int_{ns}^{nt}\cdots\int_{ns}^{nt}\sum_{k,j=1}^{\infty} I_{[k-1,k)^2}(x_1,x_2)\cdot I_{[j-1,j)^2}(x_3,x_4)\cdot I_{\{x_1\le x_2\le x_3\le x_4\}}\,dx_1\cdots dx_4\\
&\quad\le \frac{24}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\int_{ns}^{nt}\int_{ns}^{nt} I_{[k-1,k)^2}(x_1,x_2)\cdot I_{\{x_1\le x_2\}}\,dx_1dx_2\right)\cdot\\
&\qquad\qquad\cdot\left(\sum_{j=1}^{\infty}\int_{ns}^{nt}\int_{ns}^{nt} I_{[j-1,j)^2}(x_3,x_4)\cdot I_{\{x_1\le x_2\}}\,dx_3dx_4\right)\\
&\quad= \frac{24}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\int_{ns}^{nt}\int_{ns}^{nt} I_{[k-1,k)^2}(x_1,x_2)\cdot I_{\{x_1\le x_2\}}\,dx_1dx_2\right)^2\\
&\quad= \frac{24}{n^2}\left(\int_{ns}^{nt}\int_{ns}^{nt}\sum_{k=1}^{\infty} I_{[k-1,k)^2}(x_1,x_2)\cdot I_{\{x_1\le x_2\}}\,dx_1dx_2\right)^2,
\end{aligned}
$$

fent ara el següent canvi de variable

$$y_1=\frac{x_1}{n}\ \text{i}\ y_2=\frac{x_2}{n}$$

la nostra expressió esdevé

$$
\begin{aligned}
&\frac{24}{n^2}\left(\int_{s}^{t}\int_{s}^{t}\sum_{k=1}^{\infty} I_{[k-1,k)^2}(ny_1,ny_2)\cdot I_{\{ny_1\le ny_2\}}\cdot n^2\,dy_1dy_2\right)^2\\
&\quad= \frac{24}{n^2}n^4\left(\int_{s}^{t}\int_{s}^{t}\sum_{k=1}^{\infty} I_{[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n})^2}(y_1,y_2)\cdot I_{\{y_1\le y_2\}}\,dy_1dy_2\right)^2.
\end{aligned}
$$

Observem que

$$\sum_{k=1}^{\infty} I_{\{\frac{k-1}{n}\le y_1\le\frac{k}{n}\}}\cdot I_{\{\frac{k-1}{n}\le y_2\le\frac{k}{n}\}}\le I_{\{y_2-y_1\le\frac{1}{n}\}}.$$

Per tant, la nostra expressió està fitada per

$$\begin{aligned}
& 24n^2 \left(\int_s^t \int_s^t I_{\{y_2 - y_1 \leq \frac{1}{n}\}} I_{\{y_1 \leq y_2\}} \, dy_1 dy_2 \right)^2 \\
= \; & 24n^2 \left(\int_s^t \int_s^{y_2} I_{\{y_2 - y_1 \leq \frac{1}{n}\}} \, dy_1 dy_2 \right)^2 \\
= \; & 24n^2 \left(\int_s^t \int_{\text{màx}(y_2 - \frac{1}{n}, s)}^{y_2} dy_1 dy_2 \right)^2 \\
\leq \; & 24n^2 \left(\int_s^t \int_{y_2 - \frac{1}{n}}^{y_2} dy_1 dy_2 \right)^2 \\
= \; & \leq 24n^2 \left(\int_s^t \frac{1}{n} dy_2 \right)^2 \\
= \; & 24(t-s)^2.
\end{aligned}$$

$\square$

Hem provat l'ajustament, ara ens falta demostrar que per a tot $k \geq 1$ i per a tot $t_1, \ldots, t_k \in T$,

$$(Y^n(t_1), \ldots, Y^n(t_k)) \overset{\mathcal{L}}{\Rightarrow} (B(t_1), \ldots, B(t_k))$$

en $\mathbb{R}^k$. És a dir, la convergència de les distribucions en dimensió finita.

Teorema 8.4. *Sigui $\{Y^n\}$ la successió de processos que hem definit i siguin $0 \leq t_1, < \cdots < t_k < \infty$. Aleshores*

$$(Y^n_{t_1}, \ldots, Y^n_{t_k}) \xrightarrow{\mathcal{L}} (B_{t_1}, \ldots, B_{t_k}) \qquad \textit{quan } n \to \infty,$$

on $\{B_t, \, t \geq 0\}$ és un moviment Brownià estàndard unidimensional.

Prova: Considerarem el cas $d = 2$. El cas general és similar, però la notació és més incòmoda d'escriure. Siguin $t = t_1$ i $s = t_2$. Hem de veure que

$$(Y^n_s, Y^n_t) \xrightarrow{\mathcal{L}} (B_s, B_t).$$

Utilitzant que

$$\left| Y^n_t - \frac{1}{\sqrt{n}} S_{[tn]} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} |X_{[tn]+1}|,$$

obtenim que

$$P\left(\left|Y_t^n - \frac{1}{\sqrt{n}} S_{[tn]}\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2 n} \longrightarrow 0$$

quan $n \to \infty$, ja que

$$\begin{aligned} P\left(\left|Y_t^n - \frac{1}{\sqrt{n}} S_{[tn]}\right| > \varepsilon\right) &\leq P\left(\frac{1}{\sqrt{n}}|X_{[tn]+1}| > \varepsilon\right) \\ &= P\left(|X_{[tn]+1}| > \sqrt{n}\varepsilon\right) \\ &\leq \frac{\mathrm{Var}(X_{[tn]+1})}{\varepsilon^2 n} = \frac{1}{\varepsilon^2 n} \end{aligned}$$

on hem utilitzat la desigualtat de Txevishev.

Així doncs és clar que

$$P\left(\left|(Y_s^n, Y_t^n) - \frac{1}{\sqrt{n}}(S_{[sn]}, S_{[tn]})\right| > \varepsilon\right) \to 0\,;$$

aleshores, utilitzant que, si $X^{(n)} \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ i $P(|X^{(n)} - Y^{(n)}| > \varepsilon) \to 0$ quan $n \longrightarrow \infty$, aleshores $Y^{(n)} \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ quan $n \longrightarrow \infty$, és suficient demostrar que

$$\frac{1}{\sqrt{n}}(S_{[sn]}, S_{[tn]}) \xrightarrow{\mathcal{L}} (B_s, B_t).$$

Recordem que, si $X^{(n)} \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ i φ és una funció contínua, aleshores $\varphi(X^{(n)}) \xrightarrow{\mathcal{L}} \varphi(X)$. Utilitzant com a funció φ la funció $\varphi : (x, y) \mapsto (x, y - x)$, obtenim que és equivalent demostrar que

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\sum_{j=1}^{[sn]} X_j, \sum_{j=[sn]+1}^{[tn]} X_j\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} (B_s, B_t - B_s).$$

Fent això, obtenim que las variables aleatòries dels dos sumatoris són diferents i, per tant, independents. D'altra banda, $X^{(n)} \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ si i només si la sèrie de les funcions característiques $\varphi_{X^{(n)}}(t) := E_n(e^{itX^{(n)}})$ convergeix cap a $\varphi_X(t) := E(e^{itX})$. La independència de les variables aleatòries implica que

$$\lim_{n\to\infty} E\left[\exp\left\{\frac{iu}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{[sn]} X_j + \frac{iv}{\sqrt{n}}\sum_{j=[sn]+1}^{[tn]} X_j\right\}\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} E\left[\exp\left\{\frac{iu}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{[sn]} X_j\right\}\right] \cdot \lim_{n\to\infty} E\left[\exp\left\{\frac{iv}{\sqrt{n}}\sum_{j=[sn]+1}^{[tn]} X_j\right\}\right]$$

Considerem ara el $\lim_{n\to\infty} E[\exp\{(\frac{iu}{\sqrt{n}})\sum_{j=1}^{[sn]} X_j\}]$; l'altre límit es pot tractar de manera similar. Del fet que

$$P\left(\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{[sn]} X_j - \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{[sn]}}\sum_{j=1}^{[sn]} X_j\right| > \varepsilon\right) \to 0$$

i que, pel teorema del central del límit, $(\sqrt{s}/\sqrt{[sn]})\sum_{j=1}^{[sn]} X_j$ convergeix en distribución a una variable normal amb esperança zero i variància s, obtenim que

$$\lim_{n\to\infty} E\left[\exp\left\{\frac{iu}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{[sn]} X_j\right\}\right] = e^{\frac{-u^2 s}{2}},$$

on $e^{\frac{-u^2 s}{2}}$ és la funció característica de B_s, ja que $B_s \sim \mathrm{Normal}(0, s)$.

De forma semblant,

$$\lim_{n\to\infty} E\left[\exp\left\{\frac{iu}{\sqrt{n}}\sum_{j=[sn]+1}^{[tn]} X_j\right\}\right] = e^{\frac{-v^2(t-s)}{2}},$$

que és la funció característica de $B_t - B_s$. Aleshores,

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} E\left[\exp\left\{\frac{iu}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{[sn]} X_j + \frac{iv}{\sqrt{n}}\sum_{j=[sn]+1}^{[tn]} X_j\right\}\right] \\
&\quad = \lim_{n\to\infty} E\left[\exp\left\{\frac{iu}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{[sn]} X_j\right\}\right] \cdot \lim_{n\to\infty} E\left[\exp\left\{\frac{iv}{\sqrt{n}}\sum_{j=[sn]+1}^{[tn]} X_j\right\}\right] \\
&\quad = e^{\frac{-u^2 s}{2}} \cdot e^{\frac{-v^2(t-s)}{2}}
\end{aligned}$$

la qual cosa completa la demostració.

□

8.3 Versió general del Principi d'Invariància Funcional

Nosaltres hem demostrat la convergència cap al moviment Brownià en el cas concret del passeig aleatori, on les variables originals podien prendre els valors $+1$ i -1 amb igual probabilitat. Amb el Principi d'Invariància

Funcional de Donsker però passa el mateix que amb el Teorema Central del Límit: és cert en general per a qualsevol variable aleatòria amb moment d'ordre 2 finit. Concretament, podem considerar una successió $\{X_j\}_{j=1}^{\infty}$ de variables aleatòries independents idènticament distribuïdes amb esperança zero i variància σ^2, amb $\sigma^2 < \infty$, i la successió de les sumes parcials $S_0 = 0$, $S_k = \sum_{j=1}^{k} X_j$, amb $k \geq 1$. Obtenim un procés a temps continu $S = \{S_t; t \geq 0\}$ a partir de la successió $\{S_k\}_{k=0}^{\infty}$ fent una interpolació lineal, és a dir,

$$S_t = S_{[t]} + (t - [t])X_{[t]+1}\,, \qquad t \geq 1,$$

on $[t]$ denota la part entera de t. A partir del procés S obtenim una successió de processos $\{Y^n\}$:

$$Y_t^n = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} S_{nt}\,, \qquad t \geq 0.$$

Aleshores els processos Y^n convergeixen en llei cap a un moviment Brownià estàndard unidimensional. Aquest resultat general es pot demostrar adaptant els passos de la demostració que hem fet pel cas concret del passeig aleatori.

Observeu finalment que el fet de suposar que les variables X_j tenen esperança zero no és cap hipòtesi restrictiva, perquè recordeu que en general si les variables aleatòries X_j tenen esperança μ, aleshores les variables $X_j - \mu$ tenen esperança zero.

9 Comentaris finals

Aquest tipus de resultats són importants per diverses raons. Una d'elles és la simulació de processos. Ja hem dit que actualment el moviment Brownià s'utilitza en molts models de la física i de l'economia. Sovint es necessita fer simulacions d'aquests models per estudiar-ne el seu comportament. El resultat que hem vist ens permet obtenir de manera senzilla processos que convergeixen, és a dir, que aproximen al moviment Brownià. I per tant, podrem obtenir aproximacions dels models que estiguem estudiant.

D'altra banda, per a demostrar algunes propietats del moviment Brownià és més fàcil treballar amb els processos aproximadors, que són discrets i després traslladar la propietat al procés límit que és el moviment Brownià. Podeu veure'n alguns exemples al llibre [10].

Hem vist com es pot obtenir un moviment Brownià a partir d'un passeig aleatori, però també podem fer el pas al revés: obtenir un passeig aleatori a partir d'un moviment Brownià. En efecte, la idea és que, donada qualsevol variable aleatòria X centrada i amb variància finita, es pot definir una successió $T_1 < T_2 < \dots$ de temps d'atur del moviment Brownià, tals que la successió $\{S_n,\, n \geq 1\}$ definida per $S_n = B(T_n)$ és un passeig aleatori amb increments distribuïts igual que la variable aleatòria X. Podeu trobar diferents formes de definir aquests temps d'atur a la referència [10].

Això ens permet fer el pas invers: algunes propietats són més fàcils de demostrar per al moviment Brownià, que és continu, i traslladar-les després al passeig aleatori. També en la mateixa referència, [10], en trobareu exemples.

Òbviament, a més a més del moviment Brownià, en les aplicacions de la física i l'economia s'utilitzen molts altres processos. Concretament, els processos gaussians, que hem esmentat breument aquí, són dels processos més utilitzats. Molts esforços de la recerca actual estan destinats a intentar estendre la nostra comprensió del moviment Brownià a d'altres processos gaussians generals com per exemple el moviment Brownià fraccional.

Entre els diferents temes que ha estudiat el nostre grup de recerca hi ha l'extensió del principi d'invariància de Donsker per a d'altres processos gaussians diferents del moviment Brownià.

Com hem comentat anteriorment, un procés gaussià queda determinat per la seva esperança i la seva funció de covariància. Així, alguns dels processos importants són:

9.0.1 El moviment Brownià fraccional

El moviment Brownià fraccional, $B^H = \{B^H(t), t \geq 0\}$ és un procés Gaussià, centrat amb funció de covariància:

$$\mathrm{Cov}(B_t^H, B_s^H) = \frac{1}{2}\left(s^{2H} + t^{2H} - |s-t|^{2H}\right) \tag{10}$$

on $H \in (0,1)$.

Observeu que es tracta d'una generalització del moviment Brownià, ja que si prenem el paràmetre $H = \frac{1}{2}$ obtenim que $\mathrm{Cov}(B_t^H, B_s^H) = \min(s,t)$.

9.0.2 El moviment Bifraccional

Houdré i Villa en [8] introdueixen el moviment Brownià bifraccional $B^{H,K} = \left(B_t^{H,K}; t \geq 0\right)$ amb paràmetres $H \in (0,1)$ i $K \in (0,1]$ que es defineix com un procés gaussià centrat, amb funció de covariància

$$R^{H,K}(t,s) = E\left(B_t^{H,K} B_s^{H,K}\right) = \frac{1}{2^K}\left(\left(t^{2H}+s^{2H}\right)^K - |t-s|^{2HK}\right); \quad s;\ t \geq 0.$$

El cas $K = 1$ correspon al moviment Brownià fraccional. Bardina i Es-Sebaiy en [3] van demostrar l'existència d'aquest procés per a valors de K en l'interval $(1,2)$.

9.0.3 El moviment subfraccional

El moviment Brownià subfraccional, $S^H = \{S^H(t), t \geq 0\}$, és un procés Gaussià, centrat amb funció de covariància:

$$\mathrm{Cov}(S_t^H, S_s^H) = s^H + t^H - \frac{1}{2}\left[(s+t)^H + |s-t|^H\right] \tag{11}$$

on $H \in (0,2)$.

Aquest procés fou introduït per Bojdecki, Gorostiza i Talarczyk l'any 2004 (vegeu [5]) com un procés intermedi entre el moviment Brownià estàndard i el moviment fraccional. En la seva tesi doctoral, en David Bascompte va demostrar com podem obtenir aproximacions en llei cap a aquest procés. Podeu consultar aquests resultats al treball [2].

9.0.4 Altres exemples

Podem trobar d'altres exemples de processos gaussians centrats amb funció de covariància de la forma

$$R\,(s,\,t) = \int_0^1 K\,(t,\,r)\,K\,(s,\,r)\,dr\,,$$

per un cert nucli K. El propi moviment Brownià fraccional satisfà aquesta propietat.

Delgado i Jolis [6] van obtenir aproximacions en llei per aquest tipus de processos, suposant certes condicions de regularitat per al nucli K. Entre els exemples que queden coberts pel treball de Delgado i Jolis hi ha el moviment Brownià fraccional, el procés Ornstein-Uhlenbeck o la integral fraccional de Holmgren-Riemann-Liouville.

Referències

[**1**] Bardina, X. Caminant a l'atzar tots els camins porten a Roma. *Materials Matemàtics* **3**, 29pp, 2008.

[**2**] Bardina, X. i Bascompte, D. Weak convergence towards two independent Gaussian processes from a unique Poisson process. *Collectanea Mathematica*, 61(2), 191-204, 2010.

[**3**] Bardina, X. i Es-Sebaiy, K. An Extension of bifractional Brownian motion.*Communications on Stochastic Analysis* 5(2), 333-340, 2011.

[**4**] Billingsley, P. Convergence of probability measures *John Wiley & Sons Inc.*, 1968.

[**5**] Bojdecki, T., Gorostiza, L.G. i Talarczyk, A. Sub-fractional Brownian motion and its relation to occupation times. *Statistics & Probability Letters* **69(4)**, 405-419, 2004.

[**6**] Delgado, R. i Jolis, M. Weak approximation for a class of Gaussian processes. *Journal of Applied Probability* **37(2)**, 400-407, 2000.

[**7**] Einstein, A. On the movement of small particles suspended in a stationary liquid demanded by the molecular-kinetic theory of heat. *Ann. Physik* **17**, 1905.

[**8**] Houdré, C. i Villa, J. An Example of Infinite Dimensional Quasi-Helix. *Contemporary Mathematics* **336**, 195-201, 2003.

[**9**] Montroll, E. W. Random Walks in Multidimensional Spaces, Especially on Periodic Lattices. *J. SIAM* **4**, 241-260, 1956.

[**10**] Mörters, P. i Peres, Y. Bownian motion *http://www.stat.berkeley.edu/∼peres/bmbook.pdf*

[**11**] Pólya, G. Über eine Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung betreffend die Irrfahrt im Straßennetz. *Math. Ann.* **84** 149-160, 1921.

[**12**] Watson, G. N. Three Triple Integrals. *Quart. J. Math., Oxford Ser.* **2(10)**, 266-276, 1939.