

Prova: Observeu que podem escriure els nostres processos Y_t^n de la següent manera:

$$Y_t^n = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{nt} \theta(x) dx,$$

on $\theta(x) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k I_{[k-1,k)}(x)$.

En efecte,

$$\begin{aligned} Y_t^n &= \int_0^t \sum_{k=1}^{\infty} X_k \cdot I_{[k-1,k)}(x) dx \\ &= \int_0^{[t]} \sum_{k=1}^{\infty} X_k \cdot I_{[k-1,k)}(x) dx + \int_{[t]}^t \sum_{k=1}^{\infty} X_k \cdot I_{[k-1,k)}(x) dx \\ &= \sum_{j=1}^{[t]} \int_{j-1}^j X_j dx + \int_{[t]}^t X_{[t]+1} dx \\ &= \sum_{j=1}^{[t]} X_j (j - (j-1)) + (t - [t]) X_{[t]+1} \\ &= \sum_{j=1}^{[t]} X_j + (t - [t]) X_{[t]+1}. \end{aligned}$$

Aleshores,

$$\begin{aligned} &E(Y_t^n - Y_s^n)^4 \\ &= \frac{1}{n^2} E \left(\int_{ns}^{nt} \theta(x) dx \right)^4 \\ &= \frac{1}{n^2} E \int_{ns}^{nt} \cdots \int_{ns}^{nt} \theta(x_1) \theta(x_2) \theta(x_3) \theta(x_4) dx_1 \cdots dx_4 \\ &= \frac{24}{n^2} E \int_{ns}^{nt} \cdots \int_{ns}^{nt} \theta(x_1) \theta(x_2) \theta(x_3) \theta(x_4) I_{\{x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4\}} dx_1 \cdots dx_4 \\ &= \frac{24}{n^2} \int_{ns}^{nt} \cdots \int_{ns}^{nt} E(\theta(x_1) \theta(x_2) \theta(x_3) \theta(x_4) I_{\{x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4\}}) dx_1 \cdots dx_4. \quad (8) \end{aligned}$$

Observem que

$$\begin{aligned}
& E \left[\theta_1(x_1) \theta_2(x_2) \theta_3(x_3) \theta_4(x_4) I_{\{x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4\}} \right] \\
= & E \left[\sum_{k_1, k_2, k_3, k_4=1}^{\infty} X_{k_1} \cdots X_{k_4} \cdot I_{[k_1-1, k_1)}(x_1) \cdots I_{[k_4-1, k_4)}(x_4) \cdot I_{\{x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4\}} \right] \\
= & \sum_{k_1, k_2, k_3, k_4=1}^{\infty} E [X_{k_1} \cdots X_{k_4}] \cdot I_{[k_1-1, k_1)}(x_1) \cdots I_{[k_4-1, k_4)}(x_4) \cdot I_{\{x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4\}} \quad (9)
\end{aligned}$$

D'altra banda,

$$E [X_{k_1} \cdot X_{k_2} \cdot X_{k_3} \cdot X_{k_4}] = \begin{cases} 0 & \text{si existeix una } k_j \neq k_i \quad \forall i \in \{1, 2, 3, 4\} \setminus j, \\ & \text{ja que les } X_k \text{ són independents} \\ & \text{i tenen } E(X_k) = 0; \\ 1 & \text{si } k_1 = k_2 \text{ y } k_3 = k_4, \\ & \text{ja que, com que estan ordenades,} \\ & \text{només serà diferent de zero en aquest cas.} \end{cases}$$

Observem que pel que fa al darrer cas hi ha dues possibilitats:

- $k_1 = k_2 \neq k_3 = k_4$
- $k_1 = \cdots = k_4$

en ambdós casos $E [X_{k_1} \cdot X_{k_2} \cdot X_{k_3} \cdot X_{k_4}] = 1$. Aleshores, l'expressió (9) és igual a

$$\sum_{k, j=1}^{\infty} I_{[k-1, k)^2}(x_1, x_2) \cdot I_{[j-1, j)^2}(x_3, x_4) \cdot I_{\{x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4\}}$$

Així doncs, podem escriure l'expressió (8) de la següent forma:

$$\frac{24}{n^2} \int_{ns}^{nt} \cdots \int_{ns}^{nt} \sum_{k, j=1}^{\infty} I_{[k-1, k)^2}(x_1, x_2) \cdot I_{[j-1, j)^2}(x_3, x_4) \cdot I_{\{x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4\}} dx_1 \cdots dx_4.$$

Utilitzant ara la desigualtat

$$I_{\{x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4\}} \leq I_{\{x_1 \leq x_2\}} \cdot I_{\{x_3 \leq x_4\}},$$

obtenim que

$$\begin{aligned}
& \frac{24}{n^2} \int_{ns}^{nt} \cdots \int_{ns}^{nt} \sum_{k,j=1}^{\infty} I_{[k-1,k)^2}(x_1, x_2) \cdot I_{[j-1,j)^2}(x_3, x_4) \cdot I_{\{x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4\}} dx_1 \cdots dx_4 \\
& \leq \frac{24}{n^2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \int_{ns}^{nt} \int_{ns}^{nt} I_{[k-1,k)^2}(x_1, x_2) \cdot I_{\{x_1 \leq x_2\}} dx_1 dx_2 \right) \cdot \\
& \quad \cdot \left(\sum_{j=1}^{\infty} \int_{ns}^{nt} \int_{ns}^{nt} I_{[j-1,j)^2}(x_3, x_4) \cdot I_{\{x_1 \leq x_2\}} dx_3 dx_4 \right) \\
& = \frac{24}{n^2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \int_{ns}^{nt} \int_{ns}^{nt} I_{[k-1,k)^2}(x_1, x_2) \cdot I_{\{x_1 \leq x_2\}} dx_1 dx_2 \right)^2 \\
& = \frac{24}{n^2} \left(\int_{ns}^{nt} \int_{ns}^{nt} \sum_{k=1}^{\infty} I_{[k-1,k)^2}(x_1, x_2) \cdot I_{\{x_1 \leq x_2\}} dx_1 dx_2 \right)^2,
\end{aligned}$$

fent ara el següent canvi de variable

$$y_1 = \frac{x_1}{n} \text{ i } y_2 = \frac{x_2}{n}$$

la nostra expressió esdevé

$$\begin{aligned}
& \frac{24}{n^2} \left(\int_s^t \int_s^t \sum_{k=1}^{\infty} I_{[k-1,k)^2}(ny_1, ny_2) \cdot I_{\{ny_1 \leq ny_2\}} \cdot n^2 dy_1 dy_2 \right)^2 \\
& = \frac{24}{n^2} n^4 \left(\int_s^t \int_s^t \sum_{k=1}^{\infty} I_{[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n})^2}(y_1, y_2) \cdot I_{\{y_1 \leq y_2\}} dy_1 dy_2 \right)^2.
\end{aligned}$$

Observem que

$$\sum_{k=1}^{\infty} I_{\{\frac{k-1}{n} \leq y_1 \leq \frac{k}{n}\}} \cdot I_{\{\frac{k-1}{n} \leq y_2 \leq \frac{k}{n}\}} \leq I_{\{y_2 - y_1 \leq \frac{1}{n}\}}.$$

Per tant, la nostra expressió està fitada per

$$\begin{aligned}
& 24n^2 \left(\int_s^t \int_s^t I_{\{y_2 - y_1 \leq \frac{1}{n}\}} I_{\{y_1 \leq y_2\}} dy_1 dy_2 \right)^2 \\
&= 24n^2 \left(\int_s^t \int_s^{y_2} I_{\{y_2 - y_1 \leq \frac{1}{n}\}} dy_1 dy_2 \right)^2 \\
&= 24n^2 \left(\int_s^t \int_{\max(y_2 - \frac{1}{n}, s)}^{y_2} dy_1 dy_2 \right)^2 \\
&\leq 24n^2 \left(\int_s^t \int_{y_2 - \frac{1}{n}}^{y_2} dy_1 dy_2 \right)^2 \\
&= \leq 24n^2 \left(\int_s^t \frac{1}{n} dy_2 \right)^2 \\
&= 24(t - s)^2.
\end{aligned}$$

□

Hem provat l'ajustament, ara ens falta demostrar que per a tot $k \geq 1$ i per a tot $t_1, \dots, t_k \in T$,

$$(Y^n(t_1), \dots, Y^n(t_k)) \xrightarrow{\mathcal{L}} (B(t_1), \dots, B(t_k))$$

en \mathbb{R}^k . És a dir, la convergència de les distribucions en dimensió finita.

Teorema 8.4. *Segui $\{Y^n\}$ la successió de processos que hem definit i siguin $0 \leq t_1 < \dots < t_k < \infty$. Aleshores*

$$(Y_{t_1}^n, \dots, Y_{t_k}^n) \xrightarrow{\mathcal{L}} (B_{t_1}, \dots, B_{t_k}) \quad \text{quan } n \rightarrow \infty,$$

on $\{B_t, t \geq 0\}$ és un moviment Brownià estàndard unidimensional.

Prova: Considerarem el cas $d = 2$. El cas general és similar, però la notació és més incòmoda d'escriure. Siguin $t = t_1$ i $s = t_2$. Hem de veure que

$$(Y_s^n, Y_t^n) \xrightarrow{\mathcal{L}} (B_s, B_t).$$

Utilitzant que

$$\left| Y_t^n - \frac{1}{\sqrt{n}} S_{[tn]} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} |X_{[tn]+1}|,$$