Universitat de Barcelona

Facultat de Matemàtiques i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

Aproximació del moviment Brownià

Autor: Pau López Gil-Pérez

Director: David Màrquez Carreras
Realitzat a: Departament de Probabilitat i Estadística

Barcelona, 6 d'octubre de 2025

Índex

Introducció

Capítol 1

El moviment brownià

1.1 Definició i propietats bàsiques

1.2 Variants del moviment brownià

Capítol 2

El principi d'invariància de Donsker

En aquest capítol, donarem les principals definicions i resultats que ens permetran estudiar la convergència de certs processos estocàstics cap al moviment Brownià. El resultat principal que desenvoluparem és l'anomenat *principi d'invariància de Donsker*, també conegut com a *teorema de Donsker* o *teorema central del límit funcional*, que estableix la convergència de certs processos estocàstics discrets cap al moviment Brownià.

2.1 La topologia feble

A partir d'ara, treballarem en un espai mètric (S, ρ) polonès (i.e. separable i complet), junt amb la seva σ-àlgebra de Borel $\mathcal{B}(S)$. Denotarem per $\mathcal{P}(S)$ l'espai de totes les mesures de probabilitat en $(S, \mathcal{B}(S))$.

Definició 2.1.1. *La topologia feble és la topologia menys fina per la qual l'aplicació que a cada mesura $\mathbb{P} \in \mathcal{P}(S)$ li fa correspondre l'aplicació*

$$\mathbb{P} \to \int_S f(s) d\mathbb{P}(s)$$

és contínua per a tota funció $f : S \to \mathbb{R}$ contínua i acotada.

Com veurem a posteriorment, és possible definir una mètrica en $\mathcal{P}(S)$ compatible amb la topologia feble.

2.2 Convergència feble i convergència en llei

Definició 2.2.1. *Sigui $\{\mathbb{P}_n\}_n \subset \mathcal{P}(S)$ una successió de mesures de probabilitat i $\mathbb{P} \in \mathcal{P}(S)$ una altra mesura de probabilitat. Diem que $\{\mathbb{P}_n\}_n$* convergeix feblement *cap a $\mathbb{P}$, i escrivim $\mathbb{P}_n \xrightarrow{w} \mathbb{P}$, si per a tota funció $f : S \to \mathbb{R}$ contínua i acotada es compleix que*

$$\lim_{n\to\infty} \int_S f(s) d\mathbb{P}_n(s) = \int_S f(s) d\mathbb{P}(s). \tag{2.1}$$

Observació 2.2.2. En particular, el límit feble $\mathbb{P}$ és una mesura de probabilitat, ja que si prenem $f \equiv 1$ obtenim que

$$\lim_{n\to\infty} \int_S 1\, d\mathbb{P}_n(s) = \int_S 1\, d\mathbb{P}(s) \implies \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_n(S) = \mathbb{P}(S) \implies \mathbb{P}(S) = 1.$$

Ara, considerem una variable aleatòria X en un espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ amb valors a un espai mesurable $(S, \mathcal{S})$. Recordem que *la llei de X* es defineix com la mesura de probabilitat $\mathbb{P}X^{-1}$ definida per

$$\mathbb{P}X^{-1}(B) := \mathbb{P}(X^{-1}(B)) = \mathbb{P}(X \in B) \quad \forall B \in \mathcal{S}.$$

Definició 2.2.3. *Sigui $\{(\Omega_n, \mathcal{F}_n, \mathbb{P}_n)\}_n$ una successió d'espais de probabilitat, on $\mathbb{P}_n \in \mathcal{P}(S)$ $\forall n \in \mathbb{N}$, i considerem en cada un d'ells una variable aleatòria X_n amb valors a $(S, \mathcal{B}(S))$. Sigui $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un altre espai de probabilitat, on $\mathbb{P} \in \mathcal{P}(S)$, i sigui X una variable aleatòria en aquest espai amb valors a $(S, \mathcal{B}(S))$. Diem que la successió $\{X_n\}_n$* convergeix en llei *cap a X, i escrivim $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$, si les lleis de les variables aleatòries X_n convergeixen feblement cap a la llei de X, és a dir, si $\mathbb{P}X_n^{-1} \xrightarrow{w} \mathbb{P}X^{-1}$.*

Observació 2.2.4. Aquesta definició és equivalent a dir que per a tota funció $f : S \to \mathbb{R}$ contínua i acotada es compleix que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[f(X_n)] = \mathbb{E}[f(X)],$$

ja que mitjançant un canvi de variable tenim que

$$\mathbb{E}[f(X_n)] = \int_{\Omega_n} f(X_n(\omega)) d\mathbb{P}_n(\omega) = \int_S f(s) d\mathbb{P}X_n^{-1}(s),$$

i de manera anàloga,

$$\mathbb{E}[f(X)] = \int_{\Omega} f(X(\omega)) d\mathbb{P}(\omega) = \int_S f(s) d\mathbb{P}X^{-1}(s).$$

2.3 Ajustament i Teorema de Prohorov

Definició 2.3.1. *Diem que un conjunt A és* relativament compacte *si la seva adherència $\overline{A}$ és compacta.*

Sovint es troba a la literatura una definició alternativa de relativitat compacta [1]. En aquest treball, hem elavorat una demostració de l'equivalència entre la definició anterior i la caracterització habitual. Per a aquest propòsit, necessitem introduir la mètrica de Prokhorov i establir la seva relació amb la convergència feble de mesures de probabilitat.

Definició 2.3.2. *La mètrica de Prokhorov en $\mathcal{P}(S)$ és la mètrica definida per*

$$\pi(\mathbb{P}, \mathbb{Q}) := \inf \{\varepsilon > 0 : \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{Q}(A^\varepsilon) + \varepsilon \text{ } i \text{ } \mathbb{Q}(A) \leq \mathbb{P}(A^\varepsilon) + \varepsilon, \forall A \in \mathcal{B}(S)\},$$

on $A^\varepsilon := \{x \in S : \rho(x, A) < \varepsilon\} = \bigcup_{p\in A} B_\varepsilon(p)$

Lema 2.3.3. *Si (S, ρ) és un espai mètric separable, aleshores la convergència feble de mesures de probabilitat en $\mathcal{P}(S)$ és equivalent a la convergència de mesures en la mètrica de Prokhorov. Per tant, la mètrica de Prokhorov metritza la topologia feble en $\mathcal{P}(S)$.*

Prova: He trobat vàries fonts que m'agradaria comentar.

[1] Veure Billingsley 1999, pàg 57 o Karatzas i Shreve 1991, def. 4.6.

Proposició 2.3.4. *Una familia $\Pi \subset \mathcal{P}(S)$ de mesures de probabilitat és relativament compacte si i només si tota successió d'elements de Π admet una subsuccessió feblement convergent. És a dir, si donat $\{\mathbb{P}_n\}_n \subset \Pi$, existeix una subsuccessió $\{\mathbb{P}_{n_k}\}_k \subset \{\mathbb{P}_n\}_n$ i una mesura de probabilitat $\mathbb{P} \in \mathcal{P}(S)$ tals que $\mathbb{P}_{n_k} \xrightarrow{w} \mathbb{P}$.*

Prova: Primer, suposem que Π és relativament compacte i sigui $\{\mathbb{P}_n\}_n \subset \Pi$ una successió qualsevol. Volem veure que admet una subsuccessió feblement convergent.

Com que Π és relativament compacte, la seva adherència $\overline{\Pi}$ és compacta. Ja hem vist en el lema 2.3.3 que $\mathcal{P}(S)$ és un espai mètric i que la convergència en la mètrica de Prokhorov és equivalent a la convergència feble. Per tant, $\overline{\Pi}$ és compacte per successions, i.e. tota successió en $\overline{\Pi}$ admet una subsuccessió feblement convergent. En particular, la successió $\{\mathbb{P}_n\}_n \subset \Pi \subset \overline{\Pi}$ admet una subsuccessió $\{\mathbb{P}_{n_k}\}_k$ feblement convergent cap a una mesura de probabilitat $\mathbb{P} \in \overline{\Pi} \subset \mathcal{P}(S)$.

Recíprocament, suposem que tota successió d'elements de Π admet una subsuccessió feblement convergent. Per demostrar que Π és relativament compacte, hem de veure que la seva adherència $\overline{\Pi}$ és compacta. Com que per el lema 2.3.3 $\mathcal{P}(S)$ és un espai mètric, hem de veure que $\overline{\Pi}$ és compacte per successions. És a dir, hem de veure que tota successió en $\overline{\Pi}$ admet una subsuccessió feblement convergent. Novament per el lema 2.3.3, això és equivalent a veure que tota successió en $\overline{\Pi}$ admet una subsuccessió convergent en la mètrica de Prokhorov.

Sigui doncs $\{\mathbb{P}_n\}_n \subset \overline{\Pi}$ una successió qualsevol. Per la definició d'adherència, per a cada $n \in \mathbb{N}$ existeix una successió $\{\mathbb{P}_{n_k}\}_k \subset \Pi$ tal que $\mathbb{P}_{n_k} \to \mathbb{P}_n$ quan $m \to \infty$. Considerem doncs la família de probabilitats $\{\mathbb{P}_{n_m} : n, m \in \mathbb{N} \wedge \mathbb{P}_{n_k} \to \mathbb{P}_n\}$ i la seva successió diagonal $\{\mathbb{P}_{n_n}\}_n \subset \Pi$. Per hipòtesi, aquesta successió admet una subsuccessió $\{\mathbb{P}_{n_{n_k}}\}_k$ que convergeix cap a una mesura de probabilitat $\mathbb{P} \in \mathcal{P}(S)$, tal i com voliem demostrar.

□

Definició 2.3.5. *Una familia $\Pi \subset \mathcal{P}(S)$ de mesures de probabilitat és* ajustada *si per a tot $\varepsilon > 0$ existeix un conjunt compacte $K_\varepsilon \subset S$ tal que $\mathbb{P}(K_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon$ per a tota $\mathbb{P} \in \Pi$.*

El següent resultat és necessari per a demostrar el teorema de Donsker i en particular l'aproximació del moviment Brownià mitjançant processos estocàstics discrets.

Teorema 2.3.6. *(Teorema de Prohorov) Una familia $\Pi \subset \mathcal{P}(S)$ de mesures de probabilitat és relativament compacte si i només si és ajustada.*

Prova: M'agradaria comentar si podem evitar aquesta demostració.

2.4 L'espai $C[0, \infty]$

En el cas particular del moviment brownià, és útil treballar amb l'espai $C[0, \infty)$ de funcions contínues definides a l'interval $[0, \infty)$ i amb valors reals.

Proposició 2.4.1. *(Karatzas i Shreve 1991, exercici 4.1) La funció $\rho : C[0, \infty) \to [0, \infty)$ definida per*

$$\rho(f, g) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \max_{0 \leq t \leq n} \left(\min\left(|f(t) - g(t)|, 1\right)\right).$$

és una mètrica a $C[0, \infty)$.

Prova:

A continuació, donarem una caracterització de l'ajustament en l'espai $C[0,\infty)$. Per a fer-ho, necessitarem la noció de *mòdul de continuïtat* i el *Teorema d'Arzelà-Ascoli.*

Definició 2.4.2. *El* mòdul de continuïtat *és la funció* $m : C[0,\infty) \times [0,\infty) \to [0,\infty)$ *definida per*

$$m(f,\delta) := \sup_{|s-t|\leq\delta} |f(s) - f(t)|, \quad \delta \geq 0.$$

Teorema 2.4.3. *(Teorema d'Arzelà-Ascoli) Un conjunt* $K \subset C[0,\infty)$.

Bibliografia

Billingsley, Patrick (1999). *Convergence of Probability Measures*. 2a ed. New York: John Wiley & Sons.

Karatzas, Ioannis i Steven E. Shreve (1991). *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. 2a ed. Vol. 113. Graduate Texts in Mathematics. New York i Berlin: Springer.