



UNIVERSITAT DE
BARCELONA

Facultat de Matemàtiques
i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

Aproximació del moviment Brownià

Autor: Pau López Gil-Pérez

Director: David Márquez Carreras

Realitzat a: Departament de Probabilitat i Estadística

Barcelona, 15 d'octubre de 2025

Índex

Introducció	i
1 El moviment brownià	1
1.1 Definició i propietats bàsiques	1
1.2 Variants del moviment brownià	1
2 Convergència cap al moviment Brownià	2
2.1 Convergència feble i convergència en llei	2
2.2 Ajustament i Teorema de Prohorov	3
2.3 L'espai $C[0, \infty]$	3
2.4 El principi d'invariància	4

Introducció

Capítol 1

El moviment brownià

1.1 Definició i propietats bàsiques

1.2 Variants del moviment brownià

Capítol 2

Convergència cap al moviment Brownià

En aquest capítol, donarem les principals definicions i resultats que ens permetran estudiar la convergència de certs processos estocàstics cap al moviment Brownià. El resultat principal que desenvoluparem és l'anomenat *principi d'invariància de Donsker*, també conegut com a *teorema de Donsker* o *teorema central del límit funcional*, que estableix la convergència de certs processos estocàstics discrets cap al moviment Brownià.

2.1 Convergència feble i convergència en llei

A partir d'ara, treballarem en un espai mètric (S, ρ) separable i complet, junt amb la seva σ -àlgebra de Borel \mathcal{S} . Denotarem per $\mathcal{P}(S)$ l'espai de totes les mesures de probabilitat en (S, \mathcal{S}) .

És habitual dotar $\mathcal{P}(S)$ amb la anomenada *topologia feble*¹, i metritzar-la mitjançant diverses mètriques. Una de les més conegudes és la *mètrica de Prokhorov*, per la qual la convergència de mesures de probabilitat és equivalent a la convergència feble que veurem a continuació². Si més no, aquests resultats no seran necessaris per al treball que desenvoluparem.

Definició 2.1.1. Sigui $\{\mathbb{P}_n\}_n \subset \mathcal{P}(S)$ una successió de mesures de probabilitat i $\mathbb{P} \in \mathcal{P}(S)$ una altra mesura de probabilitat. Diem que $\{\mathbb{P}_n\}_n$ convergeix feblement cap a \mathbb{P} , i escrivim $\mathbb{P}_n \xrightarrow{w} \mathbb{P}$, si per a tota funció $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ contínua i acotada es compleix que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_S f(s) d\mathbb{P}_n(s) = \int_S f(s) d\mathbb{P}(s).$$

Observació 2.1.2. En particular, el límit feble \mathbb{P} és una mesura de probabilitat, ja que si prenem $f \equiv 1$ obtenim que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_S 1 d\mathbb{P}_n(s) = \int_S 1 d\mathbb{P}(s) \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_n(S) = \mathbb{P}(S) \implies \mathbb{P}(S) = 1.$$

Ara, considerem una variable aleatòria X en un espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ amb valors a (S, \mathcal{S}) . Recordem que la *llei de X* es defineix com la mesura de probabilitat $\mathbb{P}X^{-1}$

¹Vegeu Dudley 2002 - pàg 194.

²Per a més informació, vegeu Billingsley 1999 - pàg 72 o Dudley 2002 - cap. 11.3

definida per

$$\mathbb{P}X^{-1}(B) := \mathbb{P}(X^{-1}(B)) = \mathbb{P}(X \in B) \quad \forall B \in \mathcal{S}.$$

Definició 2.1.3. Sigui $\{(\Omega_n, \mathcal{F}_n, \mathbb{P}_n)\}_n$ una successió d'espais de probabilitat, on $\mathbb{P}_n \in \mathcal{P}(S)$ $\forall n \in \mathbb{N}$, i considerem en cada un d'ells una variable aleatòria X_n amb valors a (S, \mathcal{S}) . Sigui $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un altre espai de probabilitat, on $\mathbb{P} \in \mathcal{P}(S)$, i sigui X una variable aleatòria en aquest espai amb valors a (S, \mathcal{S}) . Diem que la successió $\{X_n\}_n$ convergeix en llei cap a X , i escrivim $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$, si les lleis de les variables aleatòries X_n convergeixen feblement cap a la llei de X , és a dir, si $\mathbb{P}X_n^{-1} \xrightarrow{w} \mathbb{P}X^{-1}$.

Observació 2.1.4. Aquesta definició és equivalent a dir que per a tota funció $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ contínua i acotada es compleixi que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[f(X_n)] = \mathbb{E}[f(X)],$$

ja que mitjançant un canvi de variable tenim que

$$\mathbb{E}[f(X_n)] = \int_{\Omega_n} f(X_n(\omega)) d\mathbb{P}_n(\omega) = \int_S f(s) d\mathbb{P}X_n^{-1}(s),$$

i de manera anàloga,

$$\mathbb{E}[f(X)] = \int_{\Omega} f(X(\omega)) d\mathbb{P}(\omega) = \int_S f(s) d\mathbb{P}X^{-1}(s).$$

2.2 Ajustament i Teorema de Prohorov

Definició 2.2.1. Diem que una família $\Pi \subset \mathcal{P}(S)$ de mesures de probabilitat és relativament compacte si i només si tota successió d'elements de Π admet una subsuccessió feblement convergent. És a dir, si donada $\{\mathbb{P}_n\}_n \subset \Pi$, existeix una subsuccessió $\{\mathbb{P}_{n_k}\}_k \subset \{\mathbb{P}_n\}_n$ i una mesura de probabilitat $\mathbb{P} \in \mathcal{P}(S)$ tals que $\mathbb{P}_{n_k} \xrightarrow{w} \mathbb{P}$.

Definició 2.2.2. Diem que una família $\Pi \subset \mathcal{P}(S)$ de mesures de probabilitat és ajustada si per a tot $\varepsilon > 0$ existeix un conjunt compacte $K_\varepsilon \subset S$ tal que $\mathbb{P}(K_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon$ per a tota $\mathbb{P} \in \Pi$.

Teorema 2.2.3. (Teorema de Prohorov) Una família $\Pi \subset \mathcal{P}(S)$ de mesures de probabilitat és relativament compacte si i només si és ajustada.

Prova. M'agradaria comentar si podem evitar aquesta demostració. □

2.3 L'espai $C[0, \infty]$

En el cas particular del moviment brownià, és útil treballar amb l'espai $C[0, \infty)$ de funcions contínues definides a l'interval $[0, \infty)$ i amb valors reals. Per aquest motiu, en aquesta secció donarem una caracterització de l'ajustament en l'espai $C[0, \infty)$.

Proposició 2.3.1. La funció $\rho : C[0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ definida per

$$\rho(f, g) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \max_{0 \leq t \leq n} (\min(|f(t) - g(t)|, 1)).$$

és una mètrica a $C[0, \infty)$.

Prova. Karatzas i Shreve 1991, exercici 4.1 □

Definició 2.3.2. Sigui $T > 0$. El mòdul de continuïtat a $[0, T]$ és la funció $m^T : C[0, \infty) \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ definida per

$$m^T(f, \delta) := \sup_{\substack{|s-t| \leq \delta \\ 0 \leq s, t \leq T}} |f(s) - f(t)|, \quad \delta \geq 0.$$

Teorema 2.3.3. (Teorema d'Arzelà-Ascoli) Un conjunt $A \subset C[0, \infty)$ és relativament compacte si i només si

$$\sup_{f \in A} |f(0)| < \infty$$

i a més, per a tot $T > 0$,

$$\limsup_{\delta \downarrow 0} \sup_{f \in A} m^T(f, \delta) = 0.$$

Prova. Karatzas i Shreve 1991, pàg 62, Billingsley 1999, pàg 81 \square

Teorema 2.3.4. Una seqüència de mesures de probabilitat $\{\mathbb{P}_n\}_n \subset \mathcal{P}(C[0, \infty))$ és ajustada si i només si

$$\limsup_{\lambda \uparrow \infty} \sup_{n \geq 1} \mathbb{P}_n [f : |f(0)| \geq \lambda] = 0,$$

i per a tot $T > 0$, $\epsilon > 0$,

$$\limsup_{\delta \downarrow 0} \sup_{n \geq 1} \mathbb{P}_n [f : m^T(f, \delta) \geq \epsilon] = 0.$$

Prova. Karatzas i Shreve 1991, pàg 63 \square

2.4 El principi d'invariància de Donsker

Sigui $\{\xi_n\}_n$ una seqüència de variables aleatòries independents i idènticament distribuïdes amb esperança 0 i variància σ^2 , $0 < \sigma < \infty$. Considerem la successió de sumes parcials $S_0 = 0$ i $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$ per a $n \geq 1$. Per a cada $n \in \mathbb{N}$, considerem el procés de sumes parcials

$$\frac{1}{\sigma \sqrt{n}} S_{\lfloor nt \rfloor}, \quad t \in [0, \infty],$$

i la corresponent interpolació lineal d'aquest procés,

$$X_t^{(n)} = \frac{1}{\sigma \sqrt{n}} (S_{\lfloor nt \rfloor} + (nt - \lfloor nt \rfloor) \xi_{\lfloor nt \rfloor + 1}), \quad t \in [0, \infty]. \quad (2.1)$$

En aquest capítol, demostrarem que la successió de processos $\{X^{(n)}\}_n$ convergeix en llei cap al moviment Brownià estàndard B .

Lema 2.4.1. Siguin $\{X^n\}_n$, $\{Y^n\}_n$ i X variables aleatòries definides en un mateix espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ i amb valors a \mathcal{S} . Suposem que $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ i que $\rho(X^n, Y^n) \xrightarrow{P} 0$. Aleshores, $Y^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

Prova. Karatzas i Shreve 1991, problema 4.16 \square

Lema 2.4.2. Siguin $\{X^n\}_n$ i X variables aleatòries amb valors a un espai mètric (S_1, ρ_1) . Sigui (S_2, ρ_2) un altre espai mètric i sigui $f : S_1 \rightarrow S_2$ una funció contínua. Si $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$, aleshores $f(X^n) \xrightarrow{\mathcal{L}} f(X)$.

Prova. Karatzas i Shreve 1991, problema 4.5 \square

Teorema 2.4.3. Sigui $\{X^{(n)}\}_n$ la successió de processos definits a l'equació (2.1). Sigui $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_d < \infty$. Aleshores,

$$\left(X_{t_1}^{(n)}, X_{t_2}^{(n)}, \dots, X_{t_d}^{(n)} \right) \xrightarrow{\mathcal{L}} (B_{t_1}, B_{t_2}, \dots, B_{t_d}) \quad \text{quan } n \rightarrow \infty,$$

on $\{B_t, \mathcal{F}_t^B; t \geq 0\}$ és un moviment Brownià estàndard.

Prova. [Karatzas i Shreve 1991, teorema 4.15, pàg 67](#) □

Teorema 2.4.4. Sigui X un procés continu i sigui $\{X^{(n)}\}_n$ una seqüència ajustada de processos continuos tal que per a qualssevol $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_d \leq \infty$,

$$\left(X_{t_1}^{(n)}, \dots, X_{t_d}^{(n)} \right) \xrightarrow{\mathcal{L}} (X_{t_1}, \dots, X_{t_d}).$$

Aleshores, $\{X^{(n)}\}_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

Prova. [Karatzas i Shreve 1991, teorema 4.15, pàg 65](#) □

Teorema 2.4.5. (Teorema de Donsker) Sigui $\{X^{(n)}\}_n$ la successió de processos definits a l'equació (2.1). Aleshores, $X^{(n)} \xrightarrow{\mathcal{L}} B$, on $\{B_t, \mathcal{F}_t^B; t \geq 0\}$ és un moviment Brownià estàndard.

Prova. És conseqüència dels teoremes 2.4.3 i 2.4.4. A més, cal demostrar l'ajustament de la successió $\{X^{(n)}\}_n$, que es fa servir en el teorema 2.4.4. El mètode per a demostrar l'ajustament és diferent a Karatzas i Shreve 1991 i Billingsley 1999. M'agradaria comentar-ho més endavant. □

Bibliografia

- Billingsley, Patrick (1999). *Convergence of Probability Measures*. 2a ed. New York: John Wiley & Sons.
- Dudley, R. M. (2002). *Real Analysis and Probability*. 2a ed. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press.
- Karatzas, Ioannis i Steven E. Shreve (1991). *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. 2a ed. Vol. 113. Graduate Texts in Mathematics. New York i Berlin: Springer.