Universitat de Barcelona
Facultat de Matemàtiques i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

Aproximació del moviment Brownià

Autor: Pau López Gil-Pérez

Director: David Màrquez Carreras
Realitzat a: Facultat de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 3 de novembre de 2025

Índex

Introducció

En el capítol 2, donarem les principals definicions i resultats que ens permetran estudiar la convergència de certs processos estocàstics cap al moviment Brownià. El resultat principal que desenvoluparem és l'anomenat *principi d'invariància de Donsker*, també conegut com a *teorema de Donsker* o *teorema central del límit funcional*, que estableix la convergència de certs processos estocàstics discrets cap al moviment Brownià.

Capítol 1

El moviment brownià

1.1 Definició i propietats bàsiques

1.2 Variants del moviment brownià

Capítol 2

Convergència cap al moviment Brownià

D'ara endavant, treballarem en un espai mètric (S, ρ) separable i complet, junt amb la seva σ-àlgebra de Borel $\mathcal{S}$, i denotarem per $\mathcal{P}(S)$ l'espai de mesures de probabilitat en $(S, \mathcal{S})$. En el cas particular del moviment brownià, és útil treballar amb l'espai $S = C$ de funcions contínues definides a l'interval $[0, \infty)$ i amb valors reals, junt amb la seva σ-àlgebra de Borel $\mathcal{C}$, en el qual és possible definir una mètrica [1].

A més, és habitual dotar $\mathcal{P}(S)$ amb l'anomenada *topologia feble* [2], i metritzar-la mitjançant la *mètrica de Prokhorov*, per la qual la convergència de mesures de probabilitat és equivalent a la convergència feble que veurem a continuació [3]. Si més no, aquests resultats no seran necessaris per al treball que desenvoluparem.

2.1 Modes de convergència

Definició 2.1.1. *Sigui $\{\mathbb{P}_n\}_n \subset \mathcal{P}(S)$ una successió de mesures de probabilitat i $\mathbb{P} \in \mathcal{P}(S)$ una altra mesura de probabilitat. Diem que $\{\mathbb{P}_n\}_n$* convergeix feblement *cap a $\mathbb{P}$, i escrivim $\mathbb{P}_n \xrightarrow{w} \mathbb{P}$, si per a tota funció $f : S \to \mathbb{R}$ contínua i acotada es compleix que*

$$\lim_{n\to\infty} \int_S f(s) d\mathbb{P}_n(s) = \int_S f(s) d\mathbb{P}(s).$$

Observació 2.1.2. En particular, el límit feble $\mathbb{P}$ és una mesura de probabilitat, ja que si prenem $f \equiv 1$ obtenim que

$$\lim_{n\to\infty} \int_S 1 \, d\mathbb{P}_n(s) = \int_S 1 \, d\mathbb{P}(s) \implies \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_n(S) = \mathbb{P}(S) \implies \mathbb{P}(S) = 1.$$

Ara, considerem una variable aleatòria X en un espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ amb valors a $(S, \mathcal{S})$. Recordem que la *llei de X* és la mesura de probabilitat $\mathcal{L}(X) \in \mathcal{P}(S)$ definida per

$$\mathcal{L}(X)(B) := \mathbb{P}(X^{-1}(B)) = \mathbb{P}(X \in B) \quad \forall B \in \mathcal{S}.$$

[1] Vegeu Karatzas i Shreve 1991 - pàg 60.
[2] Vegeu Dudley 2002 - pàg 194 o Bardina 2015 - pàg 29.
[3] Vegeu Billingsley 1999 - pàg 72 o Dudley 2002 - cap. 11.3

Definició 2.1.3. *Sigui $\{X_n\}_n$ una successió de variables aleatòries en un espai amb valors a $(S, \mathcal{S})$. Sigui X una altra variable aleatòria amb valors a $(S, \mathcal{S})$. Diem que $\{X_n\}_n$* convergeix en llei *cap X, i escrivim $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$, si les lleis de les variables aleatòries X_n convergeixen feblement cap a la llei de X. És a dir, si*

$$\mathcal{L}(X_n) \xrightarrow{w} \mathcal{L}(X).$$

Observació 2.1.4. Aquesta condició és equivalent a demanar que per a tota funció $f : S \to \mathbb{R}$ contínua i acotada es compleixi que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[f(X_n)] = \mathbb{E}[f(X)],$$

ja que mitjançant un canvi de variable tenim que

$$\mathbb{E}[f(X_n)] = \int_{\Omega_n} f(X_n(\omega))d\mathbb{P}_n(\omega) = \int_S f(s)d\mathbb{P}_n X_n^{-1}(s),$$

i de manera anàloga,

$$\mathbb{E}[f(X)] = \int_{\Omega} f(X(\omega))d\mathbb{P}(\omega) = \int_S f(s)d\mathbb{P}X^{-1}(s).$$

Definició 2.1.5. *Sigui $\{X_n\}_n$ una successió de variables aleatòries en un mateix espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ amb valors a $(S, \mathcal{S})$. Sigui X una variable aleatòria en el mateix espai de probabilitat amb valors a $(S, \mathcal{S})$. Diem que $\{X_n\}_n$* convergeix en probabilitat *cap a X, i escrivim $X_n \xrightarrow{P} X$, si per a tot $\varepsilon > 0$ es compleix que*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\rho(X_n, X) > \varepsilon) = 0.$$

Com a cas particular, diem que $\{X_n\}_n$ convergeix en probabilitat cap a $s \in S$, *i escrivim $X_n \xrightarrow{P} s$, si $\{X_n\}_n$ convergeix en probabilitat cap a la variable aleatòria constant $X \equiv s$. És a dir, si per a tot $\varepsilon > 0$ es compleix que*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\rho(X_n, s) > \varepsilon) = 0.$$

2.2 Ajustament i Teorema de Prohorov

Definició 2.2.1. *Diem que una família $\Pi \subset \mathcal{P}(S)$ de mesures de probabilitat és relativament compacte si i només si tota successió d'elements de Π admet una subsuccessió feblement convergent. És a dir, si donada $\{\mathbb{P}_n\}_n \subset \Pi$, existeixen una subsuccessió $\{\mathbb{P}_{n_k}\}_k \subset \{\mathbb{P}_n\}_n$ i una mesura de probabilitat $\mathbb{P} \in \mathcal{P}(S)$ tals que $\mathbb{P}_{n_k} \xrightarrow{w} \mathbb{P}$. D'igual manera, diem que una successió de variables aleatòries $\{X_n\}_n$ és relativament compacta si la família de les seves lleis $\{\mathcal{L}(X_n)\}_n$ ho és.*

Proposició 2.2.2. *Si una successió $\{\mathbb{P}_n\}_n \subset \mathcal{P}(S)$ de mesures de probabilitat convergeix feblement cap a una mesura de probabilitat $\mathbb{P}$, aleshores és relativament compacte.*

Prova. *Sigui $\{\mathbb{P}_{n_k}\}_k \subset \{\mathbb{P}_n\}_n$ una subsuccessió qualsevol. Aleshores, o bé $\mathbb{P}_{n_k} \xrightarrow{w} \mathbb{P}$, o bé existeix un $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mathbb{P}_{n_k} = \mathbb{P}_{n_{k_0}}$ per a a tot $k > k_0$, i per tant $\mathbb{P}_{n_k} \xrightarrow{w} \mathbb{P}_{n_{k_0}}$.*

□

Corol·lari 2.2.3. *Si una successió de variables aleatòries $\{X_n\}_n$ convergeix en llei cap a una variable aleatòria X, aleshores és relativament compacta.*

Prova. *Per definició, $\mathcal{L}(X_n) \xrightarrow{w} \mathcal{L}(X)$. Per tant, $\{\mathcal{L}(X_n)\}_n$ és relativament compacta.* □

Definició 2.2.4. *Diem que una família $\Pi \subset \mathcal{P}(S)$ de mesures de probabilitat és* ajustada *si $\forall \varepsilon > 0$ existeix un conjunt compacte $K_\varepsilon \subset S$ tal que $\mathbb{P}(K_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon$, $\forall \mathbb{P} \in \Pi$. D'igual manera, diem que una successió de variables aleatòries $\{X_n\}_n$ amb valors en S és* ajustada *si la família de les seves lleis $\{\mathcal{L}(X_n)\}_n$ ho és.*

Teorema 2.2.5 (Teorema de Prohorov)**.** *Una família $\Pi \subset \mathcal{P}(S)$ de mesures de probabilitat és relativament compacte si i només si és ajustada.*

Prova. M'agradaria comentar si podem evitar aquesta demostració. □

2.3 El principi d'invariància de Donsker

Sigui $\{\xi_n\}_n$ una seqüència de variables aleatòries independents i idènticament distribuïdes amb esperança 0 i variància σ^2, $0 < \sigma < \infty$. Considerem la successió de sumes parcials $S_0 = 0$ i $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$ per a $n \geq 1$. Per a cada $n \in \mathbb{N}$, considerem el procés de sumes parcials

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} S_{\lfloor nt \rfloor}, \quad t \in [0, \infty],$$

i la corresponent interpolació lineal d'aquest procés,

$$X_t^{(n)} = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \left(S_{\lfloor nt \rfloor} + (nt - \lfloor nt \rfloor)\xi_{\lfloor nt \rfloor + 1} \right), \quad t \in [0, \infty]. \tag{2.1}$$

En aquest capítol, veurem que la successió de processos $\{X^{(n)}\}_n$ convergeix en llei cap al moviment Brownià estàndard B.

Lema 2.3.1. *Siguin $\{X^{(n)}\}_n$, $\{Y^{(n)}\}_n$ i X variables aleatòries amb valors a (S, ρ), tals que per a tot $n \geq 1$, $X^{(n)}$ i $Y^{(n)}$ estan definides en el mateix espai de probabilitats. Suposem que $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ i que $\rho(X^n, Y^n) \xrightarrow{P} 0$. Aleshores, $Y^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$. Karatzas i Shreve 1991, pàg 120*

Prova. *Siguin $\{(\Omega_n, \mathcal{F}_n, \mathbb{P}_n)\}_n$ els espais de probabilitat on estan definides les variables aleatòries $X^{(n)}$ i $Y^{(n)}$. Sigui $\{(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})\}_n$ un altre espai de probabilitat on està definida la variable aleatòria X. Sigui $f : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ una funció contínua i acotada. Per la observació 2.1.4, és suficient demostrar que*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_n[f(X^{(n)}) - f(Y^{(n)})] = 0.$$

Sigui $M = \sup_{s \in \mathcal{S}} |f(s)| < \infty$. Per el corol·lari 2.2.3, com $X^{(n)} \xrightarrow{\mathcal{L}} X$, aleshores $\{X^{(n)}\}_n$ és relativament compacta. Per el teorema de Prohorov, aleshores $\{X^{(n)}\}_n$ és ajustada. Per tant, per a tot $\varepsilon > 0$, existeix un conjunt compacte $K_\varepsilon \subset \mathcal{S}$ tal que

$$\mathbb{P}_n(X^{(n)} \in K_\varepsilon) \geq 1 - \frac{\varepsilon}{6M}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Com f és continua, existeix $0 < \delta < 1$ tal que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/3$ per a qualssevol $x, y \in K_\varepsilon$ tals que $\rho(x, y) < \delta$. Per altra banda, per hipòtesi $\rho(X^n, Y^n) \xrightarrow{P} 0$. Per tant, existeix $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mathbb{P}_n(\rho(X^{(n)}, Y^{(n)}) > \delta) < \frac{\varepsilon}{6M}, \quad \forall n \geq n_0.$$

Tot plegat, per a tot $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned}\left| \int_{\Omega_n} f(X^{(n)}) - f(Y^{(n)})\, d\mathbb{P}_n \right| \leq \frac{\varepsilon}{3} \mathbb{P}_n \left(X^{(n)} \in K, \rho(X^{(n)}, Y^{(n)}) < \delta \right) \\ + 2M\, \mathbb{P}_n \left(X^{(n)} \notin K \right) \\ + 2M\, \mathbb{P}_n \left(\rho(X^{(n)}, Y^{(n)}) > \delta \right) \leq \varepsilon.\end{aligned}$$

$\square$

Lema 2.3.2. *Siguin $\left\{X^{(n)}\right\}_n$ i X variables aleatòries amb valors a $(S, \mathcal{S})$. Sigui $(S', \mathcal{S}')$ un altre espai mètric i sigui $\varphi : S \to S'$ una funció contínua. Si $X^{(n)} \xrightarrow{\mathcal{L}} X$, aleshores $\varphi(X^{(n)}) \xrightarrow{\mathcal{L}} \varphi(X)$. Billingsley 1999, pàg 20*

Prova. Sigui $f : S' \to \mathbb{R}$ una funció contínua i acotada. Aleshores, $f \circ \varphi : S \to \mathbb{R}$ és també contínua i acotada. Per l'observació 2.1.4, com $X^{(n)} \xrightarrow{\mathcal{L}} X$, aleshores

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[f(\varphi(X^{(n)}))] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[(f \circ \varphi)(X^{(n)})] = \mathbb{E}[(f \circ \varphi)(X)] = \mathbb{E}[f(\varphi(X))].$$

Novament per l'observació 2.1.4, això equival a $\varphi(X^{(n)}) \xrightarrow{\mathcal{L}} \varphi(X)$.

$\square$

Teorema 2.3.3. *Sigui $\{X^{(n)}\}_n$ la successió de processos definits a l'equació (2.1). Siguin $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_d < \infty$. Aleshores,*

$$\left(X_{t_1}^{(n)}, X_{t_2}^{(n)}, \ldots, X_{t_d}^{(n)} \right) \xrightarrow{\mathcal{L}} (B_{t_1}, B_{t_2}, \ldots, B_{t_d}) \quad \text{quan } n \to \infty,$$

on $\left\{B_t, \mathcal{F}_t^B; t \geq 0\right\}$ és un moviment Brownià estàndard. Karatzas i Shreve 1991, teorema 4.15, pàg 67

Prova. Considerarem el cas $d = 2$. El cas general és anàleg però la notació és més feixuga. Siguin $s = t_1$ i $t = t_2$. Volem veure que

$$\left(X_s^{(n)}, X_t^{(n)}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \left(B_s, B_t\right).$$

Per la definició d'interpolació lineal (2.1), per a tot $u \geq 0$ tenim

$$\left| X_u^{(n)} - \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} S_{\lfloor nu \rfloor} \right| \leq \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \left|\xi_{\lfloor nu \rfloor + 1}\right|.$$

Ara, sigui $\varepsilon > 0$. Aplicant la desigualtat de Txebixev,

$$\mathbb{P}\left(\left| X_u^{(n)} - \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} S_{\lfloor nu \rfloor} \right| > \varepsilon \right) \leq \mathbb{P}\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \left|\xi_{\lfloor nu \rfloor + 1}\right| > \varepsilon \right) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2\, \sigma^2 n} = \frac{1}{\varepsilon^2 n} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

En particular, això val per $u = s$ i $u = t$, i per tant

$$\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} S_{\lfloor ns \rfloor}, \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} S_{\lfloor nt \rfloor}\right) \xrightarrow{P} \left(X_s^{(n)}, X_t^{(n)}\right).$$

Per el lema 2.3.1, és suficient provar que

$$\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} S_{\lfloor ns \rfloor}, \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} S_{\lfloor nt \rfloor}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} (B_s, B_t).$$

Considerem l'aplicació contínua $\varphi(x, y) = (x, y - x)$. Per el lema 2.3.2, és equivalent demostrar que

$$\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{\lfloor ns \rfloor} \xi_j, \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{j=\lfloor ns \rfloor + 1}^{\lfloor nt \rfloor} \xi_j\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} (B_s, B_t - B_s).$$

Per construcció, les variables aleatòries $\{\xi_j\}_{j \geq 1}$ són independents. Així doncs, les variables aleatòries dels dos sumatoris son diferents i, per tant, independents. Siguin $u, v \in \mathbb{R}$. Aleshores,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\exp\left\{\frac{iu}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{\lfloor ns \rfloor} \xi_j + \frac{iv}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{j=\lfloor ns \rfloor + 1}^{\lfloor nt \rfloor} \xi_j\right\}\right] =$$

$$= \mathbb{E}\left[\exp\left\{\frac{iu}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{\lfloor ns \rfloor} \xi_j\right\}\right] \cdot \mathbb{E}\left[\exp\left\{\frac{iv}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{j=\lfloor ns \rfloor + 1}^{\lfloor nt \rfloor} \xi_j\right\}\right]. \quad (2.2)$$

Fixem-nos en el primer factor (l'altre és idèntic substituïnt s per $t - s$). Com que

$$\left|\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{\lfloor ns \rfloor} \xi_j - \frac{\sqrt{s}}{\sigma\sqrt{\lfloor ns \rfloor}} \sum_{j=1}^{\lfloor ns \rfloor} \xi_j\right| \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0,$$

i pel teorema central del límit

$$\frac{\sqrt{s}}{\sigma\sqrt{\lfloor ns \rfloor}} \sum_{j=1}^{\lfloor ns \rfloor} \xi_j \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, s),$$

aleshores obtenim que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\exp\left\{\frac{iu}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{\lfloor ns \rfloor} \xi_j\right\}\right] = e^{-\frac{u^2 s}{2}}.$$

De manera anàloga,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\exp\left\{\frac{iv}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{j=\lfloor ns \rfloor + 1}^{\lfloor nt \rfloor} \xi_j\right\}\right] = e^{-\frac{v^2(t-s)}{2}}.$$

Substituïnt aquestes expressions a (2.2), obtenim

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\exp\left\{\frac{iu}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{\lfloor ns \rfloor} \xi_j + \frac{iv}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{j=\lfloor ns \rfloor + 1}^{\lfloor nt \rfloor} \xi_j\right\}\right] = e^{-\frac{u^2 s}{2}} e^{-\frac{v^2(t-s)}{2}},$$

□

Teorema 2.3.4. *Sigui X un procés continu i sigui $\left\{X^{(n)}\right\}_n$ una seqüència ajustada de processos continus tal que per a qualssevol $0 \leq t_1 \leq ... \leq t_d \leq \infty$,*

$$\left(X_{t_1}^{(n)}, ..., X_{t_d}^{(n)}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} (X_{t_1}, ..., X_{t_d}).$$

Aleshores, $\left\{X^{(n)}\right\}_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$. Karatzas i Shreve 1991, teorema 4.15, pàg 65

Prova. Volem veure que $\left\{X^{(n)}\right\}_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$. És a dir, que $\mathcal{L}(X^{(n)}) \xrightarrow{w} \mathcal{L}(X)$, entenent $\left\{X^{(n)}\right\}_n$ i X com variables aleatòries amb valors a $(C, \mathcal{C})$.

Per el teorema de Prohorov, com $\left\{X^{(n)}\right\}_n$ és ajustada, aleshores és relativament compacta. Per tant, tota subsuccessió $\left\{X^{(n_k)}\right\}_k \subset \left\{X^{(n)}\right\}_n$ té una subsuccessió $\left\{Y^{(n)}\right\}_n \subset \left\{X^{(n_k)}\right\}_k$ tal que $\mathcal{L}(Y^{(n)}) \xrightarrow{w} \mathbb{P}$, per a alguna $\mathbb{P} \in \mathcal{P}(C)$.

Suposem que una altra subsuccessió $\left\{Z^{(n)}\right\}_n$ indueix mesures a $(C, \mathcal{C})$ que convergeixen feblement a una mesura $\mathbb{Q} \in \mathcal{P}(C)$. Aleshores, $\mathbb{P}$ i $\mathbb{Q}$ han de tenir les mateixes distribucions a dimensió finita. És a dir,

$$\mathbb{P}\left[w \in \mathcal{C} : (w(t_1), \ldots, w(t_d)) \in A\right] = \mathbb{Q}\left[w \in \mathcal{C} : (w(t_1), \ldots, w(t_d)) \in A\right]$$

per a tot $0 \leq t_1 < t_2 \ldots < t_d < \infty$, $A \in \mathcal{B}(\mathcal{R}^d)$, $d \geq 1$. Per tant, $\mathbb{P} = \mathbb{Q}$.

Ara, suposem que la seqüència de mesures $\left\{\mathcal{L}(X^{(n)})\right\}_n$ no convergeix feblement a $\mathcal{L}(X)$. Aleshores, existeix una funció $f : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ contínua i acotada tal que el límit $\lim_{n\to\infty} \int f(w)\mathcal{L}(X_n)(dw)$ no existeix, o bé és diferent de $\int f(w)\mathcal{L}(X)(dw)$. En qualsevol cas, pel teorema de Prohorov, podem escollir una subseqüència $\left\{\mathcal{L}(X^{(n_k)})\right\}_k$ tal que $\lim_{k\to\infty} \int f(w)\mathcal{L}(X_k)(dw)$ existeix però és diferent de $\int f(w)\mathcal{L}(X)(dw)$. Aquesta subseqüència no conté cap subseqüència $\left\{\mathcal{L}(X^{(n_{kl})})\right\}_l$ tal que $\mathcal{L}(X^{(n_{kl})}) \xrightarrow{w} \mathcal{L}(X)$, cosa que contradiu la conclusió del paràgraf anterior.

□

Teorema 2.3.5 (Teorema de Donsker)**.** *Sigui $\left\{X^{(n)}\right\}_n$ la successió de processos definits a l'equació (2.1). Aleshores, $X^{(n)} \xrightarrow{\mathcal{L}} B$, on $\left\{B_t, \mathcal{F}_t^B; t \geq 0\right\}$ és un moviment Brownià estàndard.*

Prova. Pels teoremes 2.3.3 i 2.3.4 que acabem de veure, només resta demostrar l'ajustament de la successió de processos $\{X^{(n)}\}_n$. Això requereix una caracterització de l'ajustament a l'espai $\mathcal{C}$, que es pot trobar detallada a Billingsley 1999 i Karatzas i Shreve 1991. En aquest treball, demostrarem l'ajustament per a una família de processos construïts a partir del passeig aleatori com a cas particular.

□

2.4 Convergència del passeig aleatori cap al moviment brownià

Considerem les variables aleatòries $\{\xi_n\}_n$ independents i idènticament distribuïdes amb valors a $\{-1, 1\}$, tals que

$$\mathbb{P}(\xi_n = 1) = \mathbb{P}(\xi_n = -1) = \frac{1}{2} \qquad n \geq 1.$$

Diem que $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$ és un passeig aleatòri. Com a cas particular del teorema de Donsker, veurem que la corresponent interpolació linial $\{X^{(n)}\}_n$, definida com a (2.1), convergeix en llei al moviment brownià. Per a aquest propòsit, ens serà útil el següent criteri:

Teorema 2.4.1 (Criteri de Billingsley)**.** *Una successió de processos $\{X^{(n)}\}_n$ és ajustada si se satisfan aquestes dues condicions:*

a) La successió $\{X_0^{(n)}\}_n$ és ajustada.

b) Existeixen constants $\gamma \geq 0$ i $\alpha > 1$ i una funció $F \in \mathcal{C}$ no decreixent tal que

$$\mathbb{P}\{|X_t^{(n)} - X_s^{(n)}| \geq \lambda\} \leq \frac{1}{\lambda^\gamma}|F(t) - F(s)|^\alpha \tag{2.3}$$

per a tot $s, t \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ i $\lambda > 0$.

Prova. Aquest resultat va ser demostrat per primer cop a Billingsley 1968. □

D'una banda, observem que la condició

$$\mathbb{E}[|X_t^{(n)} - X_s^{(n)}|^\gamma] \leq |F(t) - F(s)|^\alpha$$

implica (2.3) per la desigualtat de Txebixev. D'altra banda, en el nostre cas, $X_0^{(n)} = 0$ per a tot $n \in \mathbb{N}$. Per tant, per a demostrar l'ajustament, és suficient provar que existeixen constants $\gamma \geq 0$ i $\alpha > 1$ i una funció contínua $F \in \mathcal{C}$ no decreixent tal que

$$\mathbb{E}[|X_t^{(n)} - X_s^{(n)}|^\gamma] \leq |F(t) - F(s)|^\alpha.$$

Concretament, en el nostre cas on $\{X^{(n)}\}_n$ eren les trajectòries del passeig aleatori convenientment normalitzades, demostrarem que

Proposició 2.4.2. *Per a tot $s < t < \infty$,*

$$\mathbb{E}[(X_t^{(n)} - X_s^{(n)})^4] \leq C(t-s)^2.$$

Prova. Recordem que en el cas del passeig aleatori, $\mathbb{E}[\xi_k] = 0$ i $\mathrm{Var}(\xi_k) = 1$ per a tot $k \geq 1$. Observem que podem escriure els processos $X_t^{(n)}$ de la següent manera:

$$X_t^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{nt} \theta(x)\,dx, \qquad on \qquad \theta(x) = \sum_{k=1}^\infty \xi_k \mathbf{1}_{[k-1,k)}(x).$$

En efecte, partint de la definició (2.1), tenim que

$$\begin{aligned}
X_t^{(n)} &= \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\sum_{j=1}^{\lfloor nt \rfloor} \xi_j + (nt - \lfloor nt \rfloor)\xi_{\lfloor nt \rfloor + 1}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\sum_{j=1}^{\lfloor nt \rfloor} \int_{j-1}^{j} \xi_j\,dx + \int_{\lfloor nt \rfloor}^{nt} \xi_{\lfloor nt \rfloor + 1}\,dx\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\int_0^{\lfloor nt \rfloor} \sum_{k=1}^\infty \xi_k \mathbf{1}_{[k-1,k)}(x)\,dx + \int_{\lfloor nt \rfloor}^{nt} \sum_{k=1}^\infty \xi_k \mathbf{1}_{[k-1,k)}(x)\,dx\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{nt} \sum_{k=1}^\infty \xi_k \mathbf{1}_{[k-1,k)}(x)\,dx.
\end{aligned}$$

Aleshores,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big[(X_t^{(n)} - X_s^{(n)})^4\big] &= \frac{1}{n^2}\mathbb{E}\left[\left(\int_{ns}^{nt} \theta(x)\,dx\right)^4\right] \\ &= \frac{1}{n^2}\mathbb{E}\left[\int_{ns}^{nt} \cdots \int_{ns}^{nt} \theta(x_1)\cdots\theta(x_4)\,dx_1\cdots dx_4\right].\end{aligned}$$

Com tenim $4! = 24$ *possibles combinacions d'ordenar les variables* x_1, x_2, x_3, x_4*, aleshores*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big[(X_t^{(n)} - X_s^{(n)})^4\big] &= \frac{24}{n^2}\mathbb{E}\left[\int_{ns}^{nt} \cdots \int_{ns}^{nt} \theta(x_1)\cdots\theta(x_4)\mathbf{1}_{\{x_1\le x_2\le x_3\le x_4\}}\,dx_1\cdots dx_4\right] \\ &= \frac{24}{n^2}\int_{ns}^{nt} \cdots \int_{ns}^{nt} \mathbb{E}\big[\theta(x_1)\cdots\theta(x_4)\mathbf{1}_{\{x_1\le x_2\le x_3\le x_4\}}\big]\,dx_1\cdots dx_4.\end{aligned} \tag{2.4}$$

Observem que

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\big[\theta(x_1)\cdots\theta(x_4)\mathbf{1}_{\{x_1\le x_2\le x_3\le x_4\}}\big] \\ &\quad= \mathbb{E}\left[\sum_{k_1,k_2,k_3,k_4=1}^{\infty} \xi_{k_1}\xi_{k_2}\xi_{k_3}\xi_{k_4}\mathbf{1}_{[k_1-1,k_1)}(x_1)\cdots\mathbf{1}_{[k_4-1,k_4)}(x_4)\mathbf{1}_{\{x_1\le x_2\le x_3\le x_4\}}\right] \\ &\quad= \sum_{k_1,k_2,k_3,k_4=1}^{\infty} \mathbb{E}[\xi_{k_1}\xi_{k_2}\xi_{k_3}\xi_{k_4}]\mathbf{1}_{[k_1-1,k_1)}(x_1)\cdots\mathbf{1}_{[k_4-1,k_4)}(x_4)\mathbf{1}_{\{x_1\le x_2\le x_3\le x_4\}}.\end{aligned} \tag{2.5}$$

D'altra banda, per la independència i $\mathbb{E}[\xi_k] = 0$ *s'obté*

$$\mathbb{E}[\xi_{k_1}\xi_{k_2}\xi_{k_3}\xi_{k_4}] = \begin{cases} 0, & \textit{si existeix } j \textit{ tal que } k_j \neq k_i\ \forall i \neq j, \\ 1, & \textit{si } k_1 = k_2 \neq k_3 = k_4 \\ 1, & \textit{si } k_1 = \cdots = k_4. \end{cases}$$

Per tant, l'expressió (2.5) *és igual a*

$$\sum_{k,j=1}^{\infty} \mathbf{1}_{[k-1,k)^2}(x_1,x_2)\mathbf{1}_{[j-1,j)^2}(x_3,x_4)\mathbf{1}_{\{x_1\le x_2\le x_3\le x_4\}}.$$

Substituint a (2.4)*, obtenim la següent expressió:*

$$\frac{24}{n^2}\int_{ns}^{nt} \cdots \int_{ns}^{nt} \sum_{k,j=1}^{\infty} \mathbf{1}_{[k-1,k)^2}(x_1,x2)\mathbf{1}_{[j-1,j)^2}(x_3,x_4)\mathbf{1}_{\{x_1\le x_2\le x_3\le x_4\}}\,dx_1\cdots dx_4.$$

Utilitzant la desigualtat $\mathbf{1}_{\{x_1\le x_2\le x_3\le x_4\}} \le \mathbf{1}_{\{x_1\le x_2\}}\mathbf{1}_{\{x_3\le x_4\}}$ *, obtenim que*

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\big[(X_t^{(n)} - X_s^{(n)})^4\big] \\ &\quad= \frac{24}{n^2}\int_{ns}^{nt} \cdots \int_{ns}^{nt} \sum_{k,j=1}^{\infty} \mathbf{1}_{[k-1,k)^2}(x_1,x_2)\mathbf{1}_{[j-1,j)^2}(x_3,x_4)\mathbf{1}_{\{x_1\le x_2\le x_3\le x_4\}}\,dx_1\cdots dx_4 \\ &\quad\le \frac{24}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\int_{ns}^{nt}\int_{ns}^{nt} \mathbf{1}_{[k-1,k)}(x_1)\mathbf{1}_{[k-1,k)}(x_2)\mathbf{1}_{\{x_1\le x_2\}}\,dx_1dx_2\right)^2.\end{aligned}$$

Ara fem el canvi de variables $y_1 = x_1/n$ *i* $y_2 = x_2/n$. *Així la quantitat anterior esdevé*

$$\frac{24}{n^2}n^4 \left(\int_s^t \int_s^t \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{1}_{[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n})}(y_1) \mathbf{1}_{[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n})}(y_2) \mathbf{1}_{\{y_1 \le y_2\}}\, dy_1 dy_2 \right)^2 .$$

Observem que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{\frac{k-1}{n} \le y_1 < \frac{k}{n}\}} \mathbf{1}_{\{\frac{k-1}{n} \le y_2 < \frac{k}{n}\}} \le \mathbf{1}_{\{y_2 - y_1 \le \frac{1}{n}\}}.$$

Per tant la nostra expressió està acotada per

$$24n^2 \left(\int_s^t \int_s^t \mathbf{1}_{\{y_2 - y_1 \le \frac{1}{n}\}} \mathbf{1}_{\{y_1 \le y_2\}}\, dy_1 dy_2 \right)^2 .$$

Calculant l'integral,

$$\begin{aligned} 24n^2 \left(\int_s^t \int_{\max(y_2 - \frac{1}{n}, s)}^{y_2} dy_1\, dy_2 \right)^2 &\le 24n^2 \left(\int_s^t \int_{y_2 - \frac{1}{n}}^{y_2} dy_1\, dy_2 \right)^2 \\ &= 24n^2 \left(\int_s^t \frac{1}{n}\, dy_2 \right)^2 = 24(t-s)^2. \end{aligned}$$

Prenent $C = 24$, *hem provat la desigualtat desitjada.*

$\square$

Bibliografia

Bardina, Xavier (2015). *Del passeig aleatori al moviment brownià*. Barcelona: Departament de Matemàtiques, Universitat Autònoma de Barcelona.

Billingsley, Patrick (1968). *Convergence of Probability Measures*. 1a ed. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics. New York: John Wiley & Sons.

— (1999). *Convergence of Probability Measures*. 2a ed. Wiley Series in Probability and Statistics. New York: John Wiley & Sons.

Dudley, R. M. (2002). *Real Analysis and Probability*. 2a ed. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press.

Karatzas, Ioannis i Steven E. Shreve (1991). *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. 2a ed. Vol. 113. Graduate Texts in Mathematics. New York i Berlin: Springer.