



UNIVERSITAT DE
BARCELONA

Facultat de Matemàtiques
i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

Aproximació del moviment Brownià

Autor: Pau López Gil-Pérez

Director: David Márquez Carreras

Realitzat a: Departament de Probabilitat i Estadística

Barcelona, 14 d'octubre de 2025

Índex

Introducció	i
1 El moviment brownià	1
1.1 Definició i propietats bàsiques	1
1.2 Variants del moviment brownià	1
2 Convergència cap al moviment Brownià	2
2.1 La topologia feble	2
2.2 Convergència feble, en llei i en probabilitat	2
2.3 Ajustament i Teorema de Prohorov	4
2.4 L'espai $C[0, \infty]$	5
2.5 El principi d'invariància	6

Introducció

Capítol 1

El moviment brownià

1.1 Definició i propietats bàsiques

1.2 Variants del moviment brownià

Capítol 2

Convergència cap al moviment Brownià

En aquest capítol, donarem les principals definicions i resultats que ens permetran estudiar la convergència de certs processos estocàstics cap al moviment Brownià. El resultat principal que desenvoluparem és l'anomenat *principi d'invariància de Donsker*, també conegut com a *teorema de Donsker* o *teorema central del límit funcional*, que estableix la convergència de certs processos estocàstics discrets cap al moviment Brownià.

2.1 La topologia feble

A partir d'ara, treballarem en un espai mètric (S, ρ) polonès (i.e. separable i complet), junt amb la seva σ -àlgebra de Borel $\mathcal{B}(S)$. Denotarem per $\mathcal{P}(S)$ l'espai de totes les mesures de probabilitat en $(S, \mathcal{B}(S))$.

Definició 2.1.1. *La topologia feble és la topologia menys fina per la qual l'aplicació que a cada mesura $\mathbb{P} \in \mathcal{P}(S)$ li fa corresponder l'aplicació*

$$\mathbb{P} \rightarrow \int_S f(s) d\mathbb{P}(s)$$

és contínua per a tota funció $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ contínua i acotada.

Com veurem a posteriorment, és possible definir una mètrica en $\mathcal{P}(S)$ compatible amb la topologia feble.

2.2 Convergència feble, en llei i en probabilitat

Definició 2.2.1. *Sigui $\{\mathbb{P}_n\}_n \subset \mathcal{P}(S)$ una successió de mesures de probabilitat i $\mathbb{P} \in \mathcal{P}(S)$ una altra mesura de probabilitat. Diem que $\{\mathbb{P}_n\}_n$ convergeix feblement cap a \mathbb{P} , i escrivim $\mathbb{P}_n \xrightarrow{w} \mathbb{P}$, si per a tota funció $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ contínua i acotada es compleix que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_S f(s) d\mathbb{P}_n(s) = \int_S f(s) d\mathbb{P}(s). \quad (2.1)$$

Observació 2.2.2. En particular, el límit feble \mathbb{P} és una mesura de probabilitat, ja que si prenem $f \equiv 1$ obtenim que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_S 1 d\mathbb{P}_n(s) = \int_S 1 d\mathbb{P}(s) \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_n(S) = \mathbb{P}(S) \implies \mathbb{P}(S) = 1.$$

Ara, considerem una variable aleatòria X en un espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ amb valors a $(S, \mathcal{B}(S))$. Recordem que la llei de X es defineix com la mesura de probabilitat $\mathbb{P}X^{-1}$ definida per

$$\mathbb{P}X^{-1}(B) := \mathbb{P}(X^{-1}(B)) = \mathbb{P}(X \in B) \quad \forall B \in \mathcal{S}.$$

Definició 2.2.3. Sigui $\{(\Omega_n, \mathcal{F}_n, \mathbb{P}_n)\}_n$ una successió d'espais de probabilitat, on $\mathbb{P}_n \in \mathcal{P}(S)$ $\forall n \in \mathbb{N}$, i considerem en cada un d'ells una variable aleatòria X_n amb valors a $(S, \mathcal{B}(S))$. Sigui (Ω, \mathcal{F}, P) un altre espai de probabilitat, on $\mathbb{P} \in \mathcal{P}(S)$, i sigui X una variable aleatòria en aquest espai amb valors a $(S, \mathcal{B}(S))$. Diem que la successió $\{X_n\}_n$ convergeix en llei cap a X , i escrivim $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$, si les lleis de les variables aleatòries X_n convergeixen feblement cap a la llei de X , és a dir, si $\mathbb{P}X_n^{-1} \xrightarrow{w} \mathbb{P}X^{-1}$.

Observació 2.2.4. Aquesta definició és equivalent a dir que per a tota funció $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ contínua i acotada es compleix que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[f(X_n)] = \mathbb{E}[f(X)],$$

ja que mitjançant un canvi de variable tenim que

$$\mathbb{E}[f(X_n)] = \int_{\Omega_n} f(X_n(\omega)) d\mathbb{P}_n(\omega) = \int_S f(s) d\mathbb{P}X_n^{-1}(s),$$

i de manera anàloga,

$$\mathbb{E}[f(X)] = \int_{\Omega} f(X(\omega)) d\mathbb{P}(\omega) = \int_S f(s) d\mathbb{P}X^{-1}(s).$$

Finalment, introduim un altre mode de convergència que ens serà útil més endavant.

Definició 2.2.5. Sigui $\{X_n\}_n$ una successió de variables aleatòries en un espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ amb valors a $(S, \mathcal{B}(S))$. Sigui X una variable aleatòria en el mateix espai de probabilitat amb valors a $(S, \mathcal{B}(S))$. Diem que $\{X_n\}_n$ convergeix en probabilitat cap a X , i escrivim $X_n \xrightarrow{P} X$, si per a tot $\varepsilon > 0$ es compleix que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\rho(X_n, X) > \varepsilon) = 0.$$

Com a cas particular, diem que $\{X_n\}_n$ convergeix en probabilitat cap a $a \in S$, i escrivim $X_n \xrightarrow{P} a$, si $\{X_n\}_n$ convergeix en probabilitat cap a la variable aleatòria constant $X \equiv a$. És a dir, si per a tot $\varepsilon > 0$ es compleix que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\rho(X_n, a) > \varepsilon) = 0.$$

2.3 Ajustament i Teorema de Prohorov

Definició 2.3.1. Diem que un conjunt A és relativament compacte si la seva adherència \bar{A} és compacta.

Sovint es troba a la literatura una definició alternativa de relativitat compacta¹. En aquest treball, hem elavorat una demostració de l'equivalència entre la definició anterior i la caracterització habitual. Per a aquest propòsit, necessitem introduir la mètrica de Prokhorov i establir la seva relació amb la convergència feble de mesures de probabilitat.

Definició 2.3.2. La mètrica de Prokhorov en $\mathcal{P}(S)$ és la mètrica definida per

$$\pi(\mathbb{P}, \mathbb{Q}) := \inf \{\varepsilon > 0 : \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{Q}(A^\varepsilon) + \varepsilon \text{ i } \mathbb{Q}(A) \leq \mathbb{P}(A^\varepsilon) + \varepsilon, \forall A \in \mathcal{B}(S)\},$$

$$\text{on } A^\varepsilon := \{x \in S : \rho(x, A) < \varepsilon\} = \bigcup_{p \in A} B_\varepsilon(p)$$

Lema 2.3.3. Si (S, ρ) és un espai mètric separable, aleshores la convergència feble de mesures de probabilitat en $\mathcal{P}(S)$ és equivalent a la convergència de mesures en la mètrica de Prokhorov. Per tant, la mètrica de Prokhorov metritzà la topologia feble en $\mathcal{P}(S)$.

Prova. Billingsley 1999, pàg 72 □

Proposició 2.3.4. Una família $\Pi \subset \mathcal{P}(S)$ de mesures de probabilitat és relativament compacte si i només si tota successió d'elements de Π admet una subsuccessió feblement convergent. És a dir, si donat $\{\mathbb{P}_n\}_n \subset \Pi$, existeix una subsuccessió $\{\mathbb{P}_{n_k}\}_k \subset \{\mathbb{P}_n\}_n$ i una mesura de probabilitat $\mathbb{P} \in \mathcal{P}(S)$ tals que $\mathbb{P}_{n_k} \xrightarrow{w} \mathbb{P}$.

Prova. Primer, suposem que Π és relativament compacte i sigui $\{\mathbb{P}_n\}_n \subset \Pi$ una successió qualsevol. Volem veure que admet una subsuccessió feblement convergent.

Com que Π és relativament compacte, per definició la seva adherència $\bar{\Pi}$ és compacta. Ja hem vist en el lema 2.3.3 que $\mathcal{P}(S)$ és un espai mètric i que la convergència en la mètrica de Prokhorov és equivalent a la convergència feble. Per tant, $\bar{\Pi}$ és compacte per successions, i.e. tota successió en $\bar{\Pi}$ admet una subsuccessió feblement convergent. En particular, la successió $\{\mathbb{P}_n\}_n \subset \Pi \subset \bar{\Pi}$ admet una subsuccessió $\{\mathbb{P}_{n_k}\}_k$ feblement convergent cap a una mesura de probabilitat $\mathbb{P} \in \bar{\Pi} \subset \mathcal{P}(S)$.

Recíprocament, suposem que tota successió d'elements de Π admet una subsuccessió feblement convergent. Per demostrar que Π és relativament compacte, hem de veure que la seva adherència $\bar{\Pi}$ és compacta. Com que per el lema 2.3.3, $\mathcal{P}(S)$ és un espai mètric, hem de veure que $\bar{\Pi}$ és compacte per successions. És a dir, hem de veure que tota successió en $\bar{\Pi}$ admet una subsuccessió feblement convergent. Novament per el lema 2.3.3, això és equivalent a veure que tota successió en $\bar{\Pi}$ admet una subsuccessió convergent en la mètrica de Prokhorov.

Sigui doncs $\{\mathbb{P}_n\}_n \subset \bar{\Pi}$ una successió qualsevol. Per la definició d'adherència, per a cada $n \in \mathbb{N}$ existeix una successió $\{\mathbb{P}_{n_k}\}_k \subset \Pi$ tal que $\mathbb{P}_{n_k} \rightarrow \mathbb{P}_n$ quan $m \rightarrow \infty$. Considerem doncs la família de probabilitats $\{\mathbb{P}_{n_m} : n, m \in \mathbb{N} \wedge \mathbb{P}_{n_k} \rightarrow \mathbb{P}_n\}$ i la seva successió diagonal $\{\mathbb{P}_{n_n}\}_n \subset \Pi$. Per hipòtesi, aquesta successió admet una subsuccessió $\{\mathbb{P}_{n_{n_k}}\}_k$ que convergeix cap a una mesura de probabilitat $\mathbb{P} \in \mathcal{P}(S)$, tal i com voliem demostrar. □

Definició 2.3.5. Una família $\Pi \subset \mathcal{P}(S)$ de mesures de probabilitat és ajustada si per a tot $\varepsilon > 0$ existeix un conjunt compacte $K_\varepsilon \subset S$ tal que $\mathbb{P}(K_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon$ per a tota $\mathbb{P} \in \Pi$.

¹Veure Billingsley 1999, pàg 57 o Karatzas i Shreve 1991, def. 4.6.

El següent resultat és necessari per a demostrar el teorema de Donsker i en particular l'aproximació del moviment Brownià mitjançant processos estocàstics discrets.

Teorema 2.3.6. (*Teorema de Prohorov*) Una família $\Pi \subset \mathcal{P}(S)$ de mesures de probabilitat és relativament compacte si i només si és ajustada.

Prova. M'agradaria comentar si podem evitar aquesta demostració. \square

2.4 L'espai $C[0, \infty]$

En el cas particular del moviment brownià, és útil treballar amb l'espai $C[0, \infty)$ de funcions contínues definides a l'interval $[0, \infty)$ i amb valors reals.

Proposició 2.4.1. La funció $\rho : C[0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ definida per

$$\rho(f, g) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \max_{0 \leq t \leq n} (\min(|f(t) - g(t)|, 1)).$$

és una mètrica a $C[0, \infty)$.

Prova. [Karatzas i Shreve 1991, exercici 4.1](#) \square

A continuació, donarem una caracterització de l'ajustament en l'espai $C[0, \infty)$. Per a fer-ho, necessitarem la noció de *mòdul de continuïtat* i el *Teorema d'Arzelà-Ascoli*.

Definició 2.4.2. Sigui $T > 0$. El mòdul de continuïtat a $[0, T]$ és la funció $m^T : C[0, \infty) \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ definida per

$$m^T(f, \delta) := \sup_{\substack{|s-t| \leq \delta \\ 0 \leq s, t \leq T}} |f(s) - f(t)|, \quad \delta \geq 0.$$

Teorema 2.4.3. (*Teorema d'Arzelà-Ascoli*) Un conjunt $A \subset C[0, \infty)$ és relativament compacte si i només si

$$\sup_{f \in A} |f(0)| < \infty$$

i a més, per a tot $T > 0$,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{f \in A} m^T(f, \delta) = 0.$$

Prova. [Karatzas i Shreve 1991, pàg 62, Billingsley 1999, pàg 81](#)

Teorema 2.4.4. Una seqüència de mesures de probabilitat $\{\mathbb{P}_n\}_n \subset \mathcal{P}(C[0, \infty))$ és ajustada si i només si

$$\limsup_{\lambda \uparrow \infty} \limsup_{n \geq 1} \mathbb{P}_n [f : |f(0)| \geq \lambda] = 0,$$

i per a tot $T > 0$, $\epsilon > 0$,

$$\limsup_{\delta \downarrow 0} \limsup_{n \geq 1} \mathbb{P}_n [f : m^T(f, \delta) \geq \epsilon] = 0.$$

Prova. [Karatzas i Shreve 1991, pàg 63](#) \square

2.5 Convergència en llei cap al moviment Brownià

Sigui $\{\xi_n\}_n$ una seqüència de variables aleatòries independents i idènticament distribuïdes amb esperança 0 i variància σ^2 , $0 < \sigma < \infty$. Considerem la successió de sumes parcials $S_0 = 0$ i $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$ per a $n \geq 1$. Per a cada $n \in \mathbb{N}$, considerem el procés de sumes parcials

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}S_{\lfloor nt \rfloor}, \quad t \in [0, \infty],$$

i la corresponent interpolació lineal d'aquest procés,

$$X_t^{(n)} = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}(S_{\lfloor nt \rfloor} + (nt - \lfloor nt \rfloor)\xi_{\lfloor nt \rfloor + 1}), \quad t \in [0, \infty]. \quad (2.2)$$

En aquest capítol, demostrarem que la successió de processos $\{X^{(n)}\}_n$ convergeix en llei cap al moviment Brownià estàndard B .

Lema 2.5.1. *Siguin $\{X^n\}_n$, $\{Y^n\}_n$ i X variables aleatòries definides en un mateix espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ i amb valors a $\mathcal{B}(S)$. Suposem que $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ i que $\rho(X^n, Y^n) \xrightarrow{P} 0$. Aleshores, $Y^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.*

Prova. *Karatzas i Shreve 1991, problema 4.16* □

Lema 2.5.2. *Siguin $\{X^n\}_n$ i X variables aleatòries amb valors a un espai mètric (S_1, ρ_1) . Sigui (S_2, ρ_2) un altre espai mètric i sigui $f : S_1 \rightarrow S_2$ una funció contínua. Si $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$, aleshores $f(X^n) \xrightarrow{\mathcal{L}} f(X)$.*

Prova. *Karatzas i Shreve 1991, problema 4.5* □

Teorema 2.5.3. *Sigui $\{X^{(n)}\}_n$ la successió de processos definits a l'equació (2.2). Siguin $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_d < \infty$. Aleshores, el vector aleatori*

$$(X_{t_1}^{(n)}, X_{t_2}^{(n)}, \dots, X_{t_d}^{(n)}) \xrightarrow{\mathcal{L}} (B_{t_1}, B_{t_2}, \dots, B_{t_d}) \quad \text{quan } n \rightarrow \infty,$$

on $\{B_t, \mathcal{F}_t^B; t \geq 0\}$ és un moviment Brownià estàndard.

Prova. *Karatzas i Shreve 1991, teorema 4.15, pàg 67* □

Teorema 2.5.4. *Sigui $\{X^{(n)}\}_n$ una seqüència ajustada de processos contínus tal que per a qualssevol $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_d \leq \infty$, la seqüència de vectors aleatoris $\{(X_{t_1}^{(n)}, \dots, X_{t_d}^{(n)})\}_n$ convergeix en llei cap a un vector aleatori $(X_{t_1}, \dots, X_{t_d})$. És a dir,*

$$(X_{t_1}^{(n)}, \dots, X_{t_d}^{(n)}) \xrightarrow{\mathcal{L}} (X_{t_1}, \dots, X_{t_d})$$

Aleshores,

Bibliografia

- Billingsley, Patrick (1999). *Convergence of Probability Measures*. 2a ed. New York: John Wiley & Sons.
- Karatzas, Ioannis i Steven E. Shreve (1991). *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. 2a ed. Vol. 113. Graduate Texts in Mathematics. New York i Berlin: Springer.