Universitat de Barcelona

Facultat de Matemàtiques i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

Aproximació del moviment Brownià

Autor: Pau López Gil-Pérez

Director: David Màrquez Carreras

Realitzat a: Departament de Probabilitat i Estadística

Barcelona, 3 d'octubre de 2025

Índex

Introducció

Capítol 1

El moviment brownià

El moviment brownià és el nom que rep el moviment irregular del pol·len suspès en aigua, el qual va ser observat pel botànic Robert Brown el 1828. Aquest moviment aleatori, que ara s'atribueix als cops que les molècules d'aigua donen al pol·len, resulta en una dispersió o difusió del pol·len a l'aigua. L'abast d'aplicació del moviment brownià, tal com es defineix aquí, va molt més enllà de l'estudi de partícules microscòpiques en suspensió i inclou la modelització de preus d'accions, de soroll tèrmic en circuits elèctrics, de certs comportaments límit en sistemes de cues i d'inventari, i de pertorbacions aleatòries en una varietat d'altres sistemes físics, biològics, econòmics i de gestió. A més, la integració respecte al moviment brownià ens ofereix una representació unificadora per a una gran classe de martingales i processos de difusió. Els processos de difusió representats d'aquesta manera mostren una rica connexió amb la teoria de les equacions en derivades parcials. En particular, a cada procés d'aquests li correspon una equació parabòlica de segon ordre que governa les probabilitats de transició del procés.

El primer treball quantitatiu sobre el moviment brownià es deu a Bachelier (1900), qui estava interessat en les fluctuacions dels preus de les accions. Einstein (1905) va derivar la densitat de transició per al moviment brownià a partir de la teoria molecular-cinètica de la calor. Posteriorment, N. Wiener (1923, 1924a) va dur a terme un tractament matemàtic rigorós i va proporcionar la primera demostració d'existència.

L'obra més profunda d'aquest primer període relativa al moviment brownià és la de P. Lévy (1939, 1948); va introduir la construcció per interpolació, va estudiar en detall els temps de pas i altres funcionals relacionats, va descriure detalladament l'anomenada estructura fina de la trajectòria mostral típica i va descobrir la noció i les propietats de la mesure du voisinage o "temps local". El més sorprenent és que va dur a terme aquest programa sense els conceptes i eines formals de filtracions, temps d'aturada o la propietat forta de Markov.

Definició 1.0.1 (Moviment brownià unidimensional)**.** *Un **moviment brownià** (estàndard, unidimensional) és un procés continu i adaptat $B = \{B_t, \mathcal{F}_t; 0 \leq t < \infty\}$, definit en un espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, amb les propietats següents:*

- $B_0 = 0$ *q.s. (quasi segurament).*
- *Per a* $0 \leq s < t$*, l'increment* $B_t - B_s$ *és independent de* $\mathcal{F}_s$ *i està distribuït normalment amb mitjana zero i variància* $t - s$*.*

De vegades parlarem d'un moviment brownià $B = \{B_t, \mathcal{F}_t; 0 \leq t \leq T\}$ *en* $[0, T]$*, per a* *algun $T > 0$, i el significat d'aquesta terminologia és evident.*

1.1 Definició i propietats bàsiques

1.2 Variants del moviment brownià

Capítol 2

El principi d'invariància de Donsker

Per a desenvolupar els resultats que ens permetran aproximar el *moviment Brownià*, treballarem en el marc de l'espai $C[0,\infty)$ de funcions contínues definides a l'interval $[0,\infty)$ i amb valors reals. En aquest espai, considerarem la mètrica següent:

$$\rho(f,g) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \max_{0\le t\le n} \left(\min\left(|f(t)-g(t)|, 1\right)\right). \tag{2.1}$$

Aquesta aproximació es fonamenta en el *principi d'invariància de Donsker*, també conegut com a *teorema de Donsker* o *teorema central del límit funcional*, que estableix la convergència de certs processos estocàstics discrets cap al moviment Brownià.

2.1 Convergència feble i convergència en llei

Definició 2.1.1. *Sigui (S,ρ) un espai mètric amb la σ-àlgebra de Borel $\mathcal{B}(S)$. Sigui $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ una successió de mesures de probabilitat en $(S,\mathcal{B}(S))$ i P una mesura en el mateix espai. Diem que $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$* convergeix feblement *cap a P, i escrivim $P_n \xrightarrow{w} P$, si per a tota funció $f: S\to\mathbb{R}$ contínua i acotada es compleix que*

$$\lim_{n\to\infty}\int_S f(s)dP_n(s) = \int_S f(s)dP(s).$$

Observació 2.1.2. En particular, el límit feble P és una mesura de probabilitat, ja que si prenem $f\equiv 1$ obtenim que

$$\lim_{n\to\infty}\int_S 1\,dP_n(s) = \int_S 1\,dP(s) \implies \lim_{n\to\infty} P_n(S) = P(S) \implies P(S)=1.$$

Ara, considerem una variable aleatòria X en un espai de probabilitat $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ amb valors a un espai mesurable $(S,\mathcal{S})$. Recordem que *la llei de X* és la mesura de probabilitat PX^{-1} definida per

$$PX^{-1}(B) := \mathbb{P}(X^{-1}(B)) = \mathbb{P}(X\in B) \quad \forall B\in\mathcal{S}.$$

Definició 2.1.3. *Sigui (S,ρ) un espai mètric amb la σ-àlgebra de Borel $\mathcal{B}(S)$. Sigui $\{(\Omega_n,\mathcal{F}_n,\mathbb{P}_n)\}_{n=1}^{\infty}$ una successió d'espais de probabilitat i considerem en cada un d'ells una* *variable aleatòria X_n amb valors a $(S, \mathcal{B}(S))$. Sigui $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un altre espai de probabilitat i X una variable aleatòria en aquest espai amb valors a $(S, \mathcal{B}(S))$. Diem que la successió* $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ convergeix en llei *cap a X, i escrivim $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$, si les lleis de les variables aleatòries X_n convergeixen feblement cap a la llei de X, és a dir, si $PX_n^{-1} \xrightarrow{w} PX^{-1}$.*

Observació 2.1.4. Aquesta definició és equivalent a dir que per a tota funció $f : S \to \mathbb{R}$ contínua i acotada es compleix que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[f(X_n)] = \mathbb{E}[f(X)],$$

ja que mitjançant un canvi de variable tenim que

$$\mathbb{E}[f(X_n)] = \int_{\Omega_n} f(X_n(\omega))d\mathbb{P}_n(\omega) = \int_S f(s)dPX_n^{-1}(s),$$

i de manera anàloga,

$$\mathbb{E}[f(X)] = \int_{\Omega} f(X(\omega))d\mathbb{P}(\omega) = \int_S f(s)dPX^{-1}(s).$$

2.2 Ajustament

Definició 2.2.1. *Sigui (S, ρ) un espai mètric. Sigui Π una familia de mesures de probabilitat en $(S, \mathcal{B}(S))$. Diem que Π és* relativament compacte *si tota successió d'elements de Π admet una subsuccessió feblement convergent. És a dir, si donat $\{P_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \Pi$, existeix una subsuccessió $\{P_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ i una mesura de probabilitat P en $(S, \mathcal{B}(S))$ tals que $P_{n_k} \xrightarrow{w} P$.*

Definició 2.2.2. *Sigui (S, ρ) un espai mètric complet i separable. Sigui Π una familia de mesures de probabilitat en $(S, \mathcal{B}(S))$. Diem que Π és* ajustada *si per a tot $\varepsilon > 0$ existeix un conjunt compacte $K_\varepsilon \subset S$ tal que $P(K_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon$ per a tota $P \in \Pi$.*

El següent resultat és necessari per a demostrar el teorema de Donsker i en particular l'aproximació del moviment Brownià mitjançant processos estocàstics discrets. Si més no, la seva demostració és extensa i s'escapa dels objectius d'aquest treball. Per a més detalls, es pot consultar Billingsley 1999, pàg 60-64.

Teorema 2.2.3. *(Teorema de Prohorov) Sigui (S, ρ) un espai mètric. Una familia Π de mesures de probabilitat en $(S, \mathcal{B}(S))$ és relativament compacte si i només si és ajustada.*

A continuació, presentem la solució a un exercici proposat per Billingsley en Billingsley 1999, pàg 64

Bibliografia

Billingsley, Patrick (1999). *Convergence of Probability Measures*. 2a ed. New York: John Wiley & Sons.