

INSTITUTO FEDERAL DE  
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
SUL DE MINAS GERAIS  
Campus Machado



# Matemática Financeira



e-Tec Brasil  
Escola Técnica Aberta do Brasil

Técnico em Vendas



# Matemática Financeira

*Maria Elaine dos Santos Soares*



Cuiabá-MT  
2015



**Presidência da República Federativa do Brasil**  
**Ministério da Educação**  
**Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica**  
**Diretoria de Integração das Redes de Educação Profissional e Tecnológica**

© Este caderno foi elaborado e revisado em parceria entre o Instituto de Educação, Ciência e Tecnologia Sul-Rio-grandense, o Ministério da Educação e a Universidade Federal de Mato Grosso para a Rede e-Tec Brasil.

**Equipe de Revisão**  
Universidade Federal de Mato Grosso –  
UFMT

**Coordenação Institucional**  
Carlos Rinaldi

**Coordenação de Produção de Material**  
**Didático Impresso**  
Pedro Roberto Piloni

**Designer Educacional**  
Neusa Blasques

**Designer Máster**  
Daniela Mendes

**Ilustração e Diagramação**  
Tatiane Hirata

**Revisão de Língua Portuguesa**  
Verônica Hirata

**Revisão Final**  
Neusa Blasques

**Instituto Federal de Educação, Ciência e**  
**Tecnologia Sul Rio-Grandense**

**Coordenação Institucional**  
Cinara Ourique do Nascimento

**Coordenação do Curso**  
Antonio Oliveira

**Projeto Gráfico**  
Rede e-Tec Brasil / UFMT



# Apresentação Rede e-Tec Brasil

Prezado(a) estudante,

Bem-vindo (a) à Rede e-Tec Brasil!

Você faz parte de uma rede nacional de ensino que, por sua vez, constitui uma das ações do Pronatec - Programa Nacional de Acesso ao Ensino Técnico e Emprego. O Pronatec, instituído pela Lei nº 12.513/2011, tem como objetivo principal expandir, interiorizar e democratizar a oferta de cursos de Educação Profissional e Tecnológica (EPT) para a população brasileira propiciando caminho de acesso mais rápido ao emprego.

É neste âmbito que as ações da Rede e-Tec Brasil promovem a parceria entre a Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica (Setec) e as instâncias promotoras de ensino técnico, como os institutos federais, as secretarias de educação dos estados, as universidades, as escolas e colégios tecnológicos e o Sistema S.

A educação a distância no nosso país, de dimensões continentais e grande diversidade regional e cultural, longe de distanciar, aproxima as pessoas ao garantir acesso à educação de qualidade e ao promover o fortalecimento da formação de jovens moradores de regiões distantes, geograficamente ou economicamente, dos grandes centros.

A Rede e-Tec Brasil leva diversos cursos técnicos a todas as regiões do país, incentivando os estudantes a concluir o ensino médio e a realizar uma formação e atualização contínuas. Os cursos são ofertados pelas instituições de educação profissional e o atendimento ao estudante é realizado tanto nas sedes das instituições quanto em suas unidades remotas, os polos.

Os parceiros da Rede e-Tec Brasil acreditam em uma educação profissional qualificada – integradora do ensino médio e da educação técnica – capaz de promover o cidadão com capacidades para produzir, mas também com autonomia diante das diferentes dimensões da realidade: cultural, social, familiar, esportiva, política e ética.

Nós acreditamos em você!

Desejamos sucesso na sua formação profissional!

Ministério da Educação  
Junho de 2015

Nosso contato  
[etecbrasil@mec.gov.br](mailto:etecbrasil@mec.gov.br)





# Indicação de ícones

Os ícones são elementos gráficos utilizados para ampliar as formas de linguagem e facilitar a organização e a leitura hipertextual.



**Atenção:** indica pontos de maior relevância no texto.



**Saiba mais:** oferece novas informações que enriquecem o assunto ou “curiosidades” e notícias recentes relacionadas ao tema estudado.



**Glossário:** indica a definição de um termo, palavra ou expressão utilizada no texto.



**Mídias integradas:** remete o tema para outras fontes: livros, filmes, músicas, *sites*, programas de TV.



**Atividades de aprendizagem:** apresenta atividades em diferentes níveis de aprendizagem para que o estudante possa realizá-las e conferir o seu domínio do tema estudado.



**Refletira:** momento de uma pausa na leitura para refletir/escrever sobre pontos importantes e/ou questionamentos.





## Palavra do Professor-autor

Prezado(a) estudante,

Bem-vindo(a) a mais uma disciplina do Curso Técnico em Contabilidade, a Matemática Financeira!

É com imensa satisfação que preparamos esta disciplina para você. Com certeza você já vivenciou algumas situações envolvendo essa área, pois quem de nós ainda não precisou calcular as parcelas para a aquisição de um automóvel, os juros do cartão de crédito quando se deixou de pagar o total da fatura ou, ainda, quem não fez algum depósito na caderneta de poupança? Esses são alguns exemplos da utilização da Matemática Financeira no nosso cotidiano. No decorrer das aulas, você poderá comprovar que a Matemática Financeira sempre fez parte do nosso dia a dia. Recomendamos que você separe uma parte do seu tempo para ler os conteúdos de cada aula e realizar as atividades de aprendizagem. Sempre que tiver uma dúvida, volte à aula que tratou do assunto e releia o texto com atenção. Acreditamos que esta disciplina poderá ser de grande auxílio no desempenho das funções para a qual você está se preparando.

Saudações, um abraço e bom estudo!

Maria Elaine dos Santos Soares





# Apresentação da Disciplina

Prezado(a) estudante,

O objetivo da disciplina é aprendermos a utilizar conceitos básicos dessa área, visando a auxiliar na resolução de problemas presentes em nosso dia a dia, tais como cálculo de valor de prestações, pagamento de impostos, rendimentos de poupança e outros, valendo-nos desse conhecimento para não sermos lesados.

Nossa disciplina será desenvolvida em seis aulas. Na primeira, veremos conceitos básicos de Matemática Financeira. Na aula seguinte, abordaremos regime de capitalização simples. Dando continuidade aos estudos, trataremos do regime de capitalização composto. A quarta aula será destinada ao estudo das taxas. Na aula cinco trabalharemos os descontos. Na última aula, veremos séries de pagamentos. Dada a importância desta disciplina na sua vida profissional e pessoal, desejamos que o seu processo de aprendizagem transcorra de forma a acrescentar o suficiente para um bom desempenho na área para a qual está se qualificando.

Maria Elaine dos Santos Soares





# Sumário

<b>Aula 1. Matemática Financeira.....</b>	<b>13</b>
1.1 Conceitos básicos de Matemática Financeira.....	13
1.2 A precisão matemática e seus cuidados .....	17
<b>Aula 2. Regimes de capitalização simples.....</b>	<b>21</b>
2.1 Juro simples .....	21
<b>Aula 3. Regime de capitalização composto.....</b>	<b>31</b>
3.1 Juro composto .....	31
<b>Aula 4. Taxas.....</b>	<b>39</b>
4.1 Taxas equivalentes (regime de capitalização simples) .....	39
4.2 Taxas equivalentes (regime de capitalização composta) .....	40
4.3 Taxa nominal e taxa efetiva .....	42
<b>Aula 5. Descontos.....</b>	<b>47</b>
5.1 Desconto.....	47
5.2 Desconto simples (regime de juros simples) .....	48
5.3 Desconto composto (regime de juro composto) .....	53
<b>Aula 6. Série de pagamentos.....</b>	<b>57</b>
6.1 Série de pagamentos.....	57
6.2 Classificação das séries de pagamentos (rendas certas).....	58
6.3 Anuidades (série de pagamentos) constantes, imediatas e posticipadas.....	59
6.4 Anuidades (séries de pagamentos) constantes, imediatas e antecipadas .....	63
6.5 Anuidades (séries de pagamentos) diferidas .....	66
<b>Palavras Finais.....</b>	<b>68</b>
<b>Guia de Soluções.....</b>	<b>69</b>
<b>Referências.....</b>	<b>71</b>
<b>Curriculum do Professor-autor.....</b>	<b>72</b>





# Aula 1. Matemática Financeira

## Objetivos:

- conceituar juros, taxas de juros, capital e montante; e
- identificar o capital inicial, taxa de juros, tempo de aplicação do capital e montante.

Caro(a) estudante,

Em nossa primeira aula, abordaremos conceitos básicos de matemática financeira, tais como: juros, principal, taxa de juros, montante e tempo de aplicação.

Sendo o cálculo uma ferramenta muito utilizada em nossa disciplina trataremos também da precisão matemática. Animado(a)? Vamos aos conteúdos!

### 1.1 Conceitos básicos de Matemática Financeira

Antes de tratarmos sobre os conceitos básicos da Matemática Financeira, vamos ver qual é o seu objetivo.

Segundo Zot,

tendo em vista que o crédito está relacionado com o tempo e com o juro, e que é fundamental estabelecer regras que quantifiquem os valores envolvidos nos contratos, surge, então, a disciplina de Matemática Financeira. Os juros somados ao capital emprestado representam acréscimo de valor ao longo do tempo. Assim sendo, a Matemática Financeira tem por objetivo estudar a evolução do valor do dinheiro ao longo do tempo (1999, p. 17).

É importante compreender que "a Matemática Financeira tem por objetivo básico o de efetuar análises e comparações dos vários fluxos de entrada



e saída de dinheiro de caixa verificados em diferentes momentos” (NETO, 2008, p. 9).

Agora que você já viu qual é o objetivo da Matemática Financeira, vamos introduzir os termos básicos utilizados nessa disciplina.

Considere os seguintes exemplos:

- I. Suponha que uma pessoa aplique certa quantia (capital) em uma cederneta de poupança, por um determinado período (tempo). A aplicação é como se ela tivesse fazendo um empréstimo ao banco. Então, ao final desse período, essa pessoa recebe uma quantia como compensação (juros). O valor dessa quantia é estabelecido por uma porcentagem (taxa de juros). Ao final da aplicação, a pessoa terá uma quantia correspondente ao capital + juros (montante).
- II. João pede emprestado a Maria a quantia de R\$ 60,00 (capital), para ser paga depois de três meses (tempo), comprometendo-se a pagar, naquela data, além do R\$ 60,00 emprestado (capital), a quantia de R\$ 15,00 (juros), equivalente a 25% do capital (taxa de juros), no final dos três meses.

Assim sendo, o valor pago a Maria foi de R\$ 75,00 (montante).

Com esses dois exemplos, introduzimos os termos básicos utilizados na Matemática Financeira, bem como sua simbologia. Agora, vamos aos conceitos.

### **1.1.1 Juro (J)**

O conceito de juro surgiu no momento em que o homem percebeu a existência de uma afinidade entre o dinheiro e o tempo. Juro é a remuneração do capital empregado em alguma atividade produtiva, ou, ainda, é a quantia que se paga a título de compensação pelo uso do dinheiro emprestado. Assim, no exemplo II, o juro ( $J$ ) é de R\$ 15,00.

### **1.1.2 Principal (P)**

É o valor aplicado através de alguma operação financeira; é o dinheiro sobre o qual recairão os juros. No exemplo II, o principal ( $P$ ) é de R\$ 60,00, o valor que João tomou emprestado de Maria. Também é chamado de capital, capital inicial, valor atual ou valor presente.



Outro símbolos

- Capital (C)
- Capital inicial ( $V_0$ )
- Valor presente (PV – de *present value*).

Notação de juro e principal:

Juro	j
Principal	P

### 1.1.3 Taxa de juros

A taxa de juros é o coeficiente que determina o valor do juro. É a razão entre o juro produzido e o capital emprestado, na unidade de tempo. A taxa de juros (i) é dada pela fórmula:

$$i = \frac{j}{P}$$

**Exemplos de taxas:**

8% a.a. (oito por cento ao ano)

8% a.m. (oito por cento ao mês)

8% a.t. (oito por cento ao trimestre)

No exemplo II, dividindo 15 por 60 obtemos a taxa ao final dos três meses.

$$i = \frac{15,00}{60,00} = 0,25 = \frac{25}{100} = 25\% \text{ ao final dos três meses}$$

Todas as movimentações financeiras são baseadas na estipulação prévia de taxa de juros.

Notação de juro, principal e taxa de juros

Juro	j
Principal	P
Taxa de juros (na forma unitária)	i



**A taxa de juros pode ser apresentada de duas formas:**

- **Forma unitária:** é o juro recebido por unidade de capital financiado, numa determinada unidade de tempo.

No exemplo II

$$i = \frac{15,00}{60,00} = 0,25 \quad (0,25 \text{ é a forma unitária})$$

- **Forma percentual:** é o juro recebido para cada centésima parte do capital financiado, numa determinada unidade de tempo.

$$i = \frac{15,00}{60,00} = 0,25 \cdot 100 = 25\% \quad (25\% \text{ é a forma porcentual})$$

Forma porcentual	Transformação	Forma unitária
25%	$\frac{25}{100}$	0,25
8%	$\frac{08}{100}$	0,08



**Para transformar a taxa percentual em forma unitária, basta dividir por 100 a taxa expressa na forma percentual.**

**De modo análogo, para transformar a taxa de juros da forma unitária para a forma percentual, basta que se multiplique a taxa de juros unitária por 100.**

### 1.1.4 Tempo de aplicação

O tempo de aplicação (n), também conhecido como período de capitalização, é o intervalo de tempo após o qual aplicamos os juros sobre o capital inicial, somando-se os valores. O tempo pode ser mês, bimestre, trimestre, semestre, ano. No exemplo II, o período de capitalização foi de 3 meses, ou seja, 1 trimestre.

Notação de juro, principal, taxa de juros e período de capitalização

Juro	j
Principal	p
Taxa de juros	i
Período de capitalização	n



Ano civil = 365 dias



Ano comercial = 360 dias

Mês comercial = 30 dias

Nas aplicações práticas é adotada a convenção “ano comercial” e “mês comercial”.

### 1.1.5 Montante

É o valor resultante da soma do principal (capital inicial) e do juro aplicado, ao fim do período de capitalização.

$$\text{Montante (S)} = \text{Principal (P)} + \text{Juros (j)}$$

Juro	j
Principal	p
Taxa de juros	i
Período de capitalização	n
Montante	S

Acabamos de conceituar os termos básicos utilizados na Matemática Financeira. Dando continuidade aos conteúdos desta aula, vamos tratar da precisão matemática.

## 1.2 A precisão matemática e seus cuidados

Os aspectos de precisão com os números são extremamente importantes na área financeira, à semelhança de outras disciplinas que se valem de cálculos matemáticos.

Agora veremos as regras para garantir essa precisão.

### 1.2.1 Número de casas decimais nos resultados

O número de casas decimais em que os resultados serão apresentados deve ser previamente estabelecido. Assim, por exemplo, pode-se convencionar:

- Taxa de juros - na forma percentual, com duas casas decimais. Ex.: 13,57%.



- Taxa de juros - na forma unitária, com quatro casas decimais. Ex.: 0,1357.
- Valores referentes a dinheiro: devem concordar com as normas oficiais vigentes, com duas casas decimais. Ex.: R\$ 131,25.

### 1.2.2 Arredondamentos

Uma vez que os resultados deverão ser apresentados com uma precisão convencionada previamente, vamos adotar para os nossos cálculos quatro casas decimais, isto é, quatro casas após a vírgula, sendo a última com arredondamento, ou seja, se a quinta casa decimal for igual ou maior do que cinco, acrescenta-se uma unidade na quarta casa decimal; se a quinta casa for inferior a cinco, a quarta casa mantém o seu valor.

#### Exemplos:

234,15499 arredondar para 234,1550;

2,67864 usar 2,6786;

2,67865 arredondar para 2,6787;

1,32578 arredondar para 1,3258.

### Resumo

Discorremos sobre conceitos básicos de Matemática Financeira. Vimos que juro é a remuneração do capital empregado em alguma atividade produtiva e principal é o capital sobre o qual ele recairá. Taxas são a razão entre o juro produzido e o capital emprestado, podendo ser representadas na forma decimal ou percentual. O tempo de aplicação é o intervalo de tempo após o qual aplicamos os juros sobre o capital inicial, somando-se os valores. Por último, apontamos que, somando o principal com o juro aplicado, ao final do período de capitalização temos o montante. Para finalizar a aula, mostramos a precisão matemática, ou seja, como fazer os arredondamentos.

Vamos praticar!



### Atividades de aprendizagem

1. Numere a segunda coluna de acordo com a primeira:

a) Uma pessoa aplicou R\$ 18.000,00 em uma instituição financeira, resga-



tando R\$ 21.456,00 num período de quatro meses.

(a) Montante ( ) R\$ 18.000,00

(b) Juro ( ) R\$ 21.456,00

(c) Capital ( ) R\$ 3.456,00

**2.** Complete a frase:

**a)** A taxa de juros produzida no período de 4 meses foi de \_\_\_\_\_, o que representa em cada mês a taxa de \_\_\_\_\_.

**3.** Escreva as taxas unitárias na forma percentual:

**a)**  $0,015 = \underline{\hspace{2cm}}$

**b)**  $0,17 = \underline{\hspace{2cm}}$

**c)**  $1,20 = \underline{\hspace{2cm}}$

**4.** Escreva as taxas percentuais na forma unitária:

**a)**  $86\% = \underline{\hspace{2cm}}$

**b)**  $8\% = \underline{\hspace{2cm}}$

**c)**  $130\% = \underline{\hspace{2cm}}$

Assim, concluímos os conceitos básicos de Matemática Financeira. Na próxima aula, trataremos dos regimes de capitalização. Até lá!





# Aula 2. Regimes de capitalização simples

## Objetivos:

- resolver problemas que envolvam juros simples;
- fazer uso de calculadora para resolver problemas; e
- aplicar conhecimentos matemáticos da área financeira nas atividades cotidianas.

Caro(a) estudante,

Dando continuidade à nossa disciplina, abordaremos os regimes de capitalização, que são os processos de formação do juro. Há dois regimes de capitalização: a juro simples (ou linear) e a juro composto (ou exponencial). Nesta aula, nos deteremos ao estudo dos juros simples, com a resolução de vários problemas que o envolvem. Vamos lá!

### 2.1 Juro simples

O regime de capitalização é o processo de formação do juro. Há dois regimes de capitalização: a juro simples (ou linear) e a juro composto (ou exponencial).

O regime de capitalização simples comporta-se como se fosse uma progressão aritmética (PA), crescendo os juros de uma forma linear ao longo do tempo.

O juro simples é aquele calculado unicamente sobre o principal (capital inicial).

Suponha que se tome emprestado a quantia de R\$ 1.000,00, pelo prazo de 5 anos, à taxa de juros simples de 10% ao ano. Observe a tabela abaixo e veja o juro produzido em cada ano e o saldo devedor no final do quinto ano.



	Saldo no início de cada ano (\$)	Juros apurados para cada ano (\$)	Crescimento anual do saldo devedor (\$)	Saldo devedor no final de cada ano (\$)
Valor emprestado	-	-	R\$ 1.000,00	-
Primeiro ano	R\$ 1.000,00	$0,10 \cdot R\$ 1.000,00 = 100,00$	R\$ 100,00	R\$ 1.100,00
Segundo ano	R\$ 1.100,00	$0,10 \cdot R\$ 1.000,00 = 100,00$	R\$ 100,00	R\$ 1.200,00
Terceiro ano	R\$ 1.200,00	$0,10 \cdot R\$ 1.000,00 = 100,00$	R\$ 100,00	R\$ 1.300,00
Quarto ano	R\$ 1.300,00	$0,10 \cdot R\$ 1.000,00 = 100,00$	R\$ 100,00	R\$ 1.400,00
Quinto ano	R\$ 1.400,00	$0,10 \cdot R\$ 1.000,00 = 100,00$	R\$ 100,00	R\$ 1.500,00

Observamos, na tabela acima, que os juros apurados ao final de cada ano foram sempre valores iguais.

$$J = 0,10 \cdot R\$ 1.000,00 = R\$ 100,00$$

Totalizando, ao final dos cinco anos, R\$ 500,00. O valor final da operação (montante) foi de  $R\$ 1.500,00 = 1.000,00$  (principal) +  $R\$ 500,00$  (juros), que é o resultado da soma das parcelas que compõem a coluna “crescimento anual do saldo devedor”.

### 2.1.1 Cálculo do juro simples

O juro simples é diretamente proporcional ao capital inicial e ao tempo de aplicação, cujo fator de proporcionalidade é a taxa de juro por período.

A fórmula básica para o cálculo de juros em um regime de capitalização simples é

$$J = P \cdot i \cdot n$$

#### Notação

- $j$  = juros
- $P$  = principal ou capital inicial
- $n$  = período de capitalização (intervalo de tempo)
- $i$  = taxa de juros unitária



**O período de capitalização e a taxa de juros devem estar expressos na mesma unidade de tempo.**



Sabendo que a fórmula básica para o cálculo de juros é  $j = \mathbf{P}in$ , então, pela propriedade simétrica da igualdade, temos:

$$\mathbf{Pin} = j \quad (1)$$

Isolando  $\mathbf{P}$  no primeiro membro da igualdade (1), temos:

$$P = \frac{j}{in}$$

Isolando  $i$  no primeiro membro da igualdade (1), temos:

$$i = \frac{j}{Pn}$$

Isolando  $n$  no primeiro membro da igualdade de (1), temos:

$$n = \frac{j}{Pi}$$

O montante ( $S$ ) é o resultado do principal ( $P$ ) acrescido ao juros ( $J$ ).

Assim:

$$S = P + j$$

Substituindo  $j$  por  $\mathbf{Pin}$ , na fórmula acima, obtemos:

$$S = P + Pin,$$

Colocando  $\mathbf{P}$  em evidência no segundo membro da equação, obtemos:

$$S = P(1 + in)$$

Então, a expressão que determina o montante, num sistema de capitalização simples, é

$$S = P(1 + in) ,$$

em que  $1 + in$  é o fator de capitalização.



Animado? Então, vamos praticar!

**1.** Resolva o exemplo da tabela acima com o uso da fórmula  $j = P \cdot n$ .

**Solução:**

Dados:

$$P = R\$ 1.000,00$$

$$n = 5 \text{ anos}$$

$$i = 10\% \text{ a.a.} = 0,1 \text{ a.a.}$$

Como:  $j = P \cdot n$ , temos:

$$j = R\$ 1.000,00 \cdot 0,1 \cdot 5 = R\$ 500,00$$

**Logo, o juro produzido na operação foi de R\$ 500,00, e o montante, R\$ 1.500,00.**

**2.** Qual foi o capital (principal) que, aplicado a taxa de juros simples de 1,5% ao mês, rendeu R\$ 90,00 em um trimestre?

Esse problema pode ser resolvido de duas maneiras.

**Solução: (1)**

Dados:

$$J = R\$ 90,00$$

$$n = 1 \text{ trimestre} = 3 \text{ meses}$$

$$i = 1,5\% \text{ a.m.} = 0,015 \text{ a.m.}$$

**Observe que passamos a unidade do período de capitalização de trimestre para meses, para que ambos ficassem na mesma unidade da taxa – no caso, ao mês.**

Como

$$P = \frac{j}{in} = \frac{90,00}{(0,015 \cdot 3)} = \frac{90,00}{0,045} = 2.000,00$$

Logo, o capital é de R\$ 2.000,00.



Esse problema também pode ser resolvido da seguinte forma:

### Solução (2)

Dados:

$$J = R\$ 90,00$$

$$n = 1 \text{ trimestre} = 3 \text{ meses}$$

$$i = 1,5\% \text{ a.m.} = 1,5 \times 3 \text{ meses} = 4,5\% \text{ a.t.}$$

$$P = \frac{j}{in} = \frac{90,00}{(0,045 \cdot 1)} = \frac{90,00}{0,045} = 2.000,00$$

**Observe que passamos a unidade da taxa de mês para trimestre, para que ambos ficassem na mesma unidade do período de capitalização – no caso, ao trimestre.**

**Cabe a você, aluno(a), escolher qual das resoluções lhe inspira maior confiança na hora da transformação das unidades.**



Agora que você constatou que não é difícil, vamos a mais exemplos.

**3.** Uma dívida de R\$ 750,00 foi paga oito meses depois de contraída e os juros pagos foram de R\$ 60,00. Sabendo que o cálculo foi feito usando juros simples, qual foi a taxa de juros?

### Solução:

Dados:

$$P = R\$ 750,00$$

$$N = 8 \text{ meses}$$

$$J = R\$ 60,00$$

$$\text{Assim, } i = \frac{j}{Pn} = \frac{60,00}{(750,00 \cdot 8)} = \frac{60,00}{6.000,00} = 0,01 \text{ é a taxa unitária.}$$

Multiplicando por 100 encontramos a taxa percentual:  $0,01 \times 100 = 1\%$  a.m. (ao mês porque o período de capitalização foi dado em meses).

**Portanto, a taxa de juros foi de 1% a.m. (taxa percentual).**



- 4.** Qual o total gasto na compra de uma mercadoria cujo preço é de R\$ 200,00 e foi paga em seis meses, com taxa de juros simples de 20% ao ano?

### Solução (1)

Dados:

$$P = \text{R\$ } 200,00$$

$$n = 6 \text{ meses} = \frac{1}{2}$$

$$\text{ano} = 0,5 \text{ ano}$$

$$J = 2\% \text{ a.a.} = 0,20 \text{ a.a.}$$

Observe que, nessa resolução, optamos por transformar a unidade do período de capitalização porque a divisão de  $\frac{1}{2}$  resultou num decimal exato.

Como  $J = P \cdot i \cdot n$ , temos:

$$J = \text{R\$ } 200,00 \cdot 0,20 \cdot 0,5 = \text{R\$ } 20,00$$

**Logo, os juros produzidos no período de seis meses foram de R\$ 20,00, e o total pago foi de R\$ 200,00 + R\$ 20,00 = R\$ 220,00.**

### Solução (2)

Também poderíamos transformar a unidade de taxa.

Dados:

$$i : 20 \text{ a.a.} = \frac{0,20}{12} \text{ a.m.}$$

$$P = \text{R\$ } 200,00$$

$$n = 6 \text{ meses}$$

Como  $j = P \cdot i \cdot n$ , temos:

$$j = \text{R\$ } 200,00 \cdot \frac{0,20}{12} \cdot 6 = \frac{\text{R\$ } 240,00}{12} = \text{R\$ } 20,00$$



**Logo, o juro produzido é de R\$ 20,00, como encontramos na solução 1, e o total pago foi de R\$ 220,00.**

**5.** Em 01/03/2013, uma pessoa tomou emprestada a quantia de R\$ 4.000,00, a juros simples, com taxa de 4% ao mês. Qual será o montante em 01/07/2013?

**Solução:**

Dados:

$$P = \text{R\$ } 4.000,00$$

$$n = 4 \text{ meses}$$

$$i = 4\% \text{ a.m.} = 0,04 \text{ a.m.}$$

**Você pode calcular os juros, depois acrescentar o capital e terá o resultado do montante, ou você pode usar direto a expressão que determina o montante.**



Usando a expressão:

$$S = P(1 + in)$$
, temos

$$S = 4.000,00 (1 + 0,04 \cdot 4) \quad (\text{Dentro dos parênteses, primeiro se efetua a multiplicação e depois a adição.})$$

$$S = \text{R\$ } 4.000,00 (1 + 0,16)$$

$$S = \text{R\$ } 4.000,00 (1,16)$$

$$S = \text{R\$ } 4.640,00$$

**Logo, o total pago em 1º de julho foi de R\$ 4.640,00.**

**6.** Qual é a taxa de juros anual cobrada, em regime de capitalização simples, se uma pessoa aplicou o capital de R\$ 1.000,00 e recebeu R\$ 1.150,00, em 10 meses?



### Solução:

Dados:

$$P = R\$ 1.000,00$$

$n = 10$  meses

$$S = R\$ 1.150,00$$

Como

$$S = P + j, \text{ logo, } j = S - P,$$

então

$$j = R\$ 1.150,00 - R\$ 1.000,00 = R\$ 150,00$$

$$= \frac{150,00}{Pn} = \frac{150,00}{1.000,00 \cdot 10} = 0,015 \text{ a.m., pois o período foi dado em meses.}$$

Como o problema pede a taxa anual, devemos multiplicar 0,015 por 12 meses, então:

$$0,015 \cdot 12 = 0,18 \text{ a.a.}$$

Passando para a forma percentual, teremos:

$$18\% \text{ a.a.}$$

**Logo, a taxa é igual a 18% a.a.**

**Observe que esse problema poderia ser resolvido usando diretamente a fórmula do montante.**

### Resumo

Oportunizamos a você um estudo sobre juros simples e deduzimos fórmulas para cálculo do principal, taxa de juros e tempo de aplicação a partir da fórmula de juros simples. Resolvemos uma série de atividades sobre o tema, envolvendo cálculo de juros simples, de taxa de juros, do tempo de aplicação e do montante.

Sugerimos que refaça todos os exemplos da aula sanando, assim, eventuais dúvidas. A seguir, resolva as atividades propostas, mas, antes de começar, é importantíssimo reler o conteúdo, entendê-lo e refazer os exercícios resolvidos.



## Atividades de aprendizagem



**1.** Qual é o capital que, aplicado a juros simples de 1,5% ao mês, rende R\$ 3.600,00 de juros em 45 dias?

**2.** Qual foi o capital que, aplicado à taxa de juros simples de 2% ao mês, rendeu R\$ 90,00 em um trimestre?

**3.** Qual é o tempo de aplicação para que um capital dobre, considerando uma taxa mensal de juros de 2% ao mês, no regime de capitalização simples?

**4.** Calcule os juros simples produzidos por R\$ 40.000,00 aplicados à taxa de 36% ao ano, durante 25 dias.

**5.** A empresa Dias & Noites Ltda. obteve um empréstimo de R\$ 10.000,00, pelo prazo de seis meses, a juros simples de 3% ao mês. No final do prazo do empréstimo, a empresa vai pagar ao banco o montante de \_\_\_\_\_ três meses, o montante produzido era de R\$ 3.400,00. Qual foi a taxa mensal dessa aplicação?

**7.** Qual é a taxa de juros anual cobrada, se uma pessoa aplicou o capital de R\$ 1.000,00 e recebeu o montante de R\$ 1.420,00, no prazo de dois anos, no regime de capitalização simples?

**8.** Um capital de R\$ 1.000,00 gerou um montante de R\$ 1.350,00 no período de um ano e nove meses, num regime de capitalização simples. Qual foi a taxa anual de juros?

Chegamos ao final de mais uma aula, na qual abordamos regimes de capitalização a juros simples. Na aula três estudaremos regime de capitalização a juros composto.





# Aula 3. Regime de capitalização composto

## Objetivos:

- resolver problemas que envolvam juros compostos;
- fazer uso de calculadora científica do computador para resolver problemas; e
- aplicar conhecimentos matemáticos da área financeira nas atividades cotidianas.

Caro(a) estudante,

Na aula anterior, iniciamos o estudo dos regimes de capitalização. Começamos pelo juro simples, que nos oportunizou a resolução de vários problemas. Nesta aula, abordaremos outro regime de capitalização, o de juros compostos, muito usados na solução de problemas do nosso cotidiano e no exercício da profissão.

### 3.1 Juro composto

O regime de capitalização composta comporta-se como se fosse uma progressão geométrica (PG), crescendo os juros de uma forma exponencial ao longo do tempo. Os juros gerados a cada período são incorporados ao capital para o cálculo dos juros do período seguinte. Também são conhecidos como “juros sobre juros”.

Por exemplo, suponha que se tome emprestada a quantia de R\$ 1.000,00, pelo prazo de 5 anos, à taxa de juros compostos de 10% ao ano.

Observe a tabela abaixo e veja o juro produzido em cada ano e o saldo devedor ao fim do último.



	Saldo no início de cada ano (\$)	Juros apurados para cada ano (\$)	Crescimento anual do saldo devedor (\$)	Saldo devedor no final de cada ano(\$)
<b>Valor emprestado</b>	-	-	1.000,00	-
<b>Primeiro ano</b>	1.000,00	0,10 . 1.000,00 = 100,00	100,00	1.100,00
<b>Segundo ano</b>	1.100,00	0,10 . 1.100,00 = 110,00	110,00	1.210,00
<b>Terceiro ano</b>	1.210,00	0,10 . 1.210,00 = 121,00	121,00	1.331,00
<b>Quarto ano</b>	1.331,00	0,10 . 1.331,00 = 133,10	133,10	1.464,10
<b>Quinto ano</b>	1.464,00	0,10 . 1.464,10 = 146,41	146,41	1.610,51

Podemos concluir que, a partir do segundo período, **o montante no regime de juro composto passa a ser maior do que no regime de juro simples.**

### 3.1.1 Cálculo do juro composto

Consideremos, agora, um capital inicial  $C$ , aplicado em juro composto à taxa  $i$ .

Temos

Período	Montante
1	$S_1 = P + j \cdot I = P + P \times i$ $S_1 = P(1+i)$
2	$S_2 = P(1+i) (1+i)$ $S_2 \Rightarrow P(1+i)^2$
3	$S_3 = P(1+i) (1+i) (1+i)$ $S_3 \Rightarrow P(1+i)^3$
...	...
n	$S_n = P(1+i) (1+i) (1+i) \dots (1+i)$ $S_n \Rightarrow P(1+i)^n$

Isso nos permite escrever, para o enésimo período:

$$S_n = P(1+i)^n, \text{ que é a fórmula do montante em regime de juros composto, para um número inteiro de períodos.}$$

Nessa fórmula,

$S_n$  é o montante no enésimo período;



$P$  é o valor principal;

$i$  é a taxa de juros;

$n$  é o período, o prazo que pode ser em dias, meses, anos, bimestre, trimestre, quadrimestre, semestre;

$j$  é o juro produzido nesse período.

O fator  $(1+i)^n$  é denominado **fator de capitalização**.

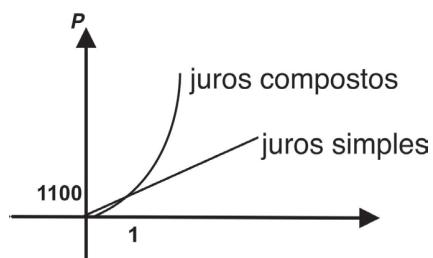
**A taxa de juros  $i$  tem que estar na mesma unidade do período de capitalização  $n$ .**



Para calcularmos os juros, basta subtrair o capital principal do montante, isto é,

$$J = S - P$$

Representação gráfica do juro simples e do juro composto



Fonte: Autora.

Observe que é bem mais vantajoso aplicar um capital a juros compostos!

Como você pode observar, nos cálculos envolvendo juros compostos temos que calcular potências com expoentes maiores dependendo do tempo de aplicação do capital. Não desanime, pois podemos utilizar uma calculadora científica para isso.

**Para usar a calculadora científica do computador, siga os seguintes passos:**



**Iniciar/Todos os Programas/Acessórios/Calculadora  
Na Calculadora: Exibir/Científica**



**Para praticar, calcule as seguintes potências:**

a)  $(1,2)^4$

b)  $(1,1)^{10}$

**Solução:**

a)  $1,2 \times^y 4 = 2,0736$

b)  $1,1 \times^y 10 = 2,5937$

**Vejamos como fica o exemplo da tabela**, com o uso da fórmula.

$$S_n = P(1 + i)^n$$

Temos

$$P = R\$ 1.000,00$$

$$n = 5 \text{ anos}$$

$$i = 10\% \text{ a.a.} = 0,1 \text{ a.a.}$$

### ATENÇÃO

Como:  $S_n = P(1 + i)^n$ , então

$$S_5 = R\$ 1.000,00 \cdot (1 + 0,1)^5$$

$$S_5 = R\$ 1.000,00 \cdot (1,1)^5$$

$$S_5 = R\$ 1.000,00 \cdot R\$ 1,61051$$

Para efetuar  $(1,1)^5$ , utilize a calculadora científica de seu computador, fazendo

$$1,1 \boxed{x^y} 5 = 1.6101$$

$$\mathbf{S_5 = R\$ 1.610,51}$$

Conforme indicado na tabela, a somatória das parcelas da coluna “crescimento anual do saldo devedor” corresponde ao resultado obtido.

Observe que foi escrito  $S_5$  porque o período é igual a cinco anos.

O juro pago é dado pelo montante menos o capital inicial, isto é,



$$j = S - P = R\$ 1.610,51 - R\$ 1.000,00 = R\$ 610,51.$$

Para finalizar esta aula com um entendimento claro do conteúdo, vamos resolver alguns problemas sobre juros compostos. Pronto?

- 1.** Qual é o montante de um capital de R\$ 10.000,00, aplicado a juros compostos, durante um ano, à taxa de 3,5% ao mês.

**Solução:**

Temos:

$$\begin{aligned}P &= R\$ 6.000,00 \\n &= 1 \text{ ano} = 12 \text{ meses} \\i &= 3,5\% \text{ a.m.} = 0,035 \text{ a.m.}\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}S &= P(1+i)^n \\S_{12} &= 6.000,00(1+0,035)^{12} = 6.000,00 \times (1,035)^{12} \\S_{12} &= 6.000,00 \cdot 1,5111 = 9.066,60,\end{aligned}$$

**logo, o montante é igual a R\$ 9.066,60**

- 2.** Calcule o capital inicial que, no prazo de cinco meses, a 3% ao mês, produziu o montante de R\$ 4.058,00, num regime de capitalização composta.

**Solução:**

Temos:

$$\begin{aligned}S &= R\$ 4.058,00 \\n &= 5 \text{ meses} \\i &= 3\% \text{ a.m.} = 0,03 \text{ a.m.}\end{aligned}$$

Sendo:

$$\begin{aligned}S_5 &= P(1+i)^5, \text{ então} \\R\$ 4.058,00 &= P(1+0,03)^5 \\R\$ 4.058,00 &= P(1,03)^5 \\R\$ 4.058,00 &= P \cdot 1,593, \text{ então}\end{aligned}$$

$$P = \frac{4.058,00}{1,593}$$



**Logo, o capital inicial é igual a R\$ 3.500,00.**

Consideramos, aqui, o valor inteiro do capital inicial.

**3.** Uma loja financia um bem de consumo durável, no valor de R\$ 3.200,00, sem entrada, para pagamento em uma única prestação de R\$ 4.049,00, ao final de seis meses. Qual a taxa mensal cobrada pela loja (juros sobre juros)?

**Solução:**

Temos:

$$S = \text{R\$ } 4.049,00$$

$$n = 6 \text{ meses}$$

$$P = \text{R\$ } 3.200,00$$

Sendo

$$S_6 = P(1+i)^6, \text{ então}$$

$$\text{R\$ } 4.049,00 = \text{R\$ } 3.200,00(1+i)^6,$$

$$(1+i)^6 = \frac{4.049,00}{3.200,00} = 1,2653$$

$$(1+i)^6 = 1,2653$$

$$1+i = (1,2653)^{\frac{1}{6}}$$

$$1+i = (1,2653)^{0,1666}$$

$$1+i = 1,0400$$

$$i+ = 1,0400 - 1$$

$$i = 0,040 \text{ (taxa unitária)}$$

#### Atenção

A operação inversa da potenciação é a radiciação.

$$1+i = \sqrt[6]{1,2653}$$

Transformando a raiz em potência com expoente fracionário, obtemos

$$1+i = (1,2653)^{\frac{1}{6}}$$

$$i = 0,0400 \cdot 100 = 4\% \text{ de taxa percentual.}$$

**Logo, a taxa mensal cobrada pela loja é de 4 % a.m.**



4. Durante quanto tempo se deve aplicar R\$ 5.000,00, à taxa de 7% a.m., para produzir um montante de R\$ 12.000,00?

**Solução:**

Temos:

$$S = R \$ 12000,00$$
$$i = 7 \% \text{ a.m.} = 0,07 \text{ a.m.}$$
$$P = R\$ 5.000,00$$

Sendo:

$$S_n = P (1 + i)^n, \text{ então}$$

$$R\$ 12.000 = R\$ 5.000,00(1+0,07)^n$$

$$(1+0,07)^n = \frac{12.000}{5.000}$$

$$(1,07)^n = 2,4$$

Observe: se é válida a igualdade, então é válido dizer que

$$\log (1,07)^n = \log 2,4.$$

Então, pela propriedade dos logaritmos:

$$n \log (1,07) = \log 2,4.$$

Usando a calculadora científica para calcular  $\log 1,07$  e  $\log 2,4$ , temos:

$$\log (1,07) = 0,0294$$

$$\log 2,4 = 0,3802.$$

Substituindo os valores correspondentes na equação  **$n \log (1,07) = \log 2,4$**  temos:

$$n (0,029) = 0,3802$$



$$\text{Logo, } n = \frac{0,3902}{0,0294} = 12,971 \cong 13 \text{ meses}$$

O símbolo  $\cong$  significa aproximadamente.

## Resumo

Dando continuidade ao conteúdo sobre regime de capitalização, nesta aula tratamos de juros compostos, muito utilizados no nosso dia a dia. Vimos que nesse regime de capitalização os juros gerados a cada período são incorporados ao capital para o cálculo dos juros do período seguinte. Visando a aprimorar seus conhecimentos, apresentamos alguns problemas resolvidos com o intuito de auxiliá-lo(a) na resolução das atividades de aprendizagem. Sugiro que faça novamente os exemplos resolvidos antes de iniciar as atividades propostas.



## Atividades de aprendizagem

- 1.** Um capital de R\$ 560,00 é aplicado por dois anos e meio a juros compostos, à taxa de 4% a.m. Qual é o valor resultante da aplicação?
- 2.** Um capital foi aplicado, a juros compostos e à taxa de 2% ao mês, durante três meses. Se, decorrido esse período, o montante produzido foi de R\$ 864,00, qual o capital aplicado?
- 3.** Qual é a taxa de juros mensal paga por uma instituição onde o aplicador recebeu, após dois anos, o montante de R\$ 45.666,57, sendo R\$ 25.666,57 referentes a juros compostos?
- 4.** Qual quantia que, colocada em um banco, a juros compostos de 2% a.m., durante cinco meses, rendeu R\$ 40.000,00?
- 5.** Calcular os juros compostos de R\$ 25.000,00, aplicados durante nove meses à taxa de 6% a.m.
- 6.** Um capital de R\$ 7.500,00 aplicado durante cinco meses produziu um montante de R\$ 9.500,00. Qual foi a taxa mensal aplicada?

Prezado(a) estudante,

Finalizamos mais uma aula. Na próxima, abordaremos as taxas equivalentes, nominal e efetiva. Curioso(a)? Espero você lá!



## Aula 4. Taxas

### Objetivos:

- reconhecer a equivalência de taxa de juros;
- efetuar cálculos envolvendo taxas equivalentes em regime de capitalização simples e composta; e
- calcular taxa efetiva dada a taxa nominal.

Caro(a) estudante,

Animado(a) para avançar em seus estudos? Daremos início a um assunto importante na Matemática Financeira. Trataremos das taxas equivalentes no regime de capitalização simples e composta, taxas nominal e efetiva. Preparado(a)?

### 4.1 Taxas equivalentes (regime de capitalização simples)

Já vimos que a taxa de juros é obtida dividindo-se os juros pelo produto do capital multiplicado pelo tempo de aplicação –  $i = J/(P \cdot n)$ , no regime de capitalização simples. Mas o que são taxas equivalentes? Vejamos:

Duas taxas são equivalentes quando, aplicadas a um mesmo capital, durante o mesmo período, produzem o mesmo juro. Vamos aos exemplos.

**1.** Calcule o juro produzido pelo capital de R\$ 1.000,00, no regime de capitalização simples:

- a) à taxa de 24% ao semestre, durante um semestre;
- b) à taxa de 4% ao mês, durante seis meses.



Fazendo o cálculo de juros simples para "a", obtemos

$$j = Pin = R\$ 1.000,00 \cdot 0,24 \cdot 1 = R\$ 240,00,$$

E para "b", obtemos

$$j = Pin = R\$ 1.000,00 \cdot 0,04 \cdot 6 = R\$ 240,00.$$

Como os juros em "a" e "b" são iguais, dizemos que 24% a.s. é equivalente a 4% a.m. No sistema de juros simples as taxas equivalentes são proporcionais.

Em regime de capitalização simples:

$$i_a = 2i_s = 4i_t = 12i_m = 360i_d,$$

em que  $i_a$  é taxa anual,  $i_s$  é taxa semestral,  $i_t$  é taxa trimestral,  $i_m$  é taxa mensal e  $i_d$  é taxa diária.

**2.** Calcular a taxa anual equivalente a:

- a) 6% a.m.;
- b) 10% ao bimestre.

**Solução:**

- a) 6% a.m. =  $6\% \cdot 12 = 72\%$  a.a.
- b) 10% ao bimestre =  $10\% \cdot 6 = 60\%$  a.a.

## 4.2 Taxas equivalentes (regime de capitalização composta)

Duas taxas são equivalentes quando, aplicadas a um mesmo capital, referente a períodos de tempo diferentes, produzem o mesmo montante num mesmo tempo.

Vamos resolver algumas atividades.



**1.** Calcular o montante, em regime de juro composto, produzido pelo capital de R\$ 1.000,00, no regime de capitalização composta:

a) à taxa de 24% ao ano, durante um ano;

b) à taxa de 2% ao mês, durante 12 meses.

Fazendo o cálculo do montante para "a", obtemos:

$$M = P(1 + i)^n = R\$ 1.000,00 (1 + 0,24)^1 = R\$ 1240,00.$$

E para "b", obtemos:

$$M = P(1 + i)^n = R\$ 1.000,00 (1 + 0,02)^{12} = R\$ 1.268,24.$$

Como os montantes em "a" e "b" são diferentes, dizemos que 24% a.a. é proporcional a 2% a.m., logo, são taxas proporcionais, mas não são equivalentes. No sistema de juros compostos, as taxas proporcionais não são equivalentes.

Em regime de capitalização composta:

$$1 + i_a = (1 + i_s)^2 = (1 + i_t)^4 = (1 + i_m)^{12} = (1 + i_d)360,$$

em que  $i_a$  é taxa anual,  $i_s$  é taxa semestral,  $i_t$  é taxa trimestral,  $i_m$  é taxa mensal e  $i_d$  é taxa diária.

**2.** Qual é a taxa anual equivalente a 2% ao mês?

Solução:

$$1 + i_a = (1 + i_m)^{12}$$

$$1 + i_a = (1 + 0,02)^{12}$$

$$i_a = (1,02)^{12} - 1 = 0,2682 = 26,82\% \text{ a.a.}$$

A taxa anual equivalente a 2% ao mês é 26,82% a.a.



**3.** Determine a taxa mensal equivalente a 0,2% ao dia.

$$1 + i_m = (1 + 0,002)^{30}$$

$$I_m = (1,002)^{30} - 1 = 0,0618 = 6,18\% \text{ a.m.}$$

**A taxa mensal equivalente a 0,2% ao dia é 6,18% a.m.**

### 4.3 Taxa nominal e taxa efetiva

Taxa nominal é aquela cujo período de capitalização não coincide com aquele a que ela se refere. A taxa nominal, geralmente, é anual.

Para se conhecer a taxa efetiva a partir de uma taxa nominal, basta encontrar a taxa proporcional no período de capitalização.

$$1 + i_f = (1 + i_q)^q$$

em que:

$i_f$  é a taxa efetiva;

$i_q$  é a taxa por período de capitalização;

$q$  é o número de capitalizações.

Exemplos:

**1.** Uma taxa nominal de 18% ao ano é capitalizada semestralmente. Calcule a taxa efetiva  $i_f$ .

**Solução:**

$$i = 18\% \text{ a.a.} = 0,18 \text{ a. a}$$

Sendo 1 ano = 2 semestres  $q = 2$

$$i_2 = \frac{0,18}{2} = 0,09 \text{ a.s.}$$



Então:

$$1 + i_f = (1 + 0,09)^2$$

$$i_f = 1,09^2 - 1$$

$$i_f = 0,1881$$

**$i_f = 18,81\%$  Esta é a taxa efetiva. É a maior taxa.**

- 2.** Uma taxa nominal de 40% ao ano é capitalizada semestralmente. Calcule a taxa efetiva  $i_f$ .

**Solução:**

$$1 + i_f = (1 + i_q)^q$$

Sendo

$$i_f = 40\% \text{ a.a.} = 0,40 \text{ a.a.}$$

$$i_2 = 0,40/2 = 0,20 \text{ a.s.}$$

$$1 \text{ ano} = 2 \text{ semestres}, q=2$$

Então

$$1 + i_f = (1 + 0,20)^2$$

$$i_f = 1,20^2 - 1$$

$$i_f = 0,44$$

$i_f = 44\% \text{ a.a.}$  Esta é a taxa efetiva.

- 1.** Uma taxa nominal de 12% ao ano é capitalizada trimestralmente. Calcule a taxa efetiva  $i_f$ .

**Solução:**

Sendo  $i = 12\% \text{ a.a.} = 0,12 \text{ a.a.}$

$$1 \text{ ano} = 4 \text{ trimestres}, q = 4$$

$$i_4 = 0,12/4 = 0,03 \text{ a.t.},$$



então

$$1 + i_f = (1 + 0,03)^4 = 1,1255$$

$$i_f = 1,1255 - 1$$

$$i_f = 0,1255$$

**$i_f = 12,55\% \text{ a.a. Esta é a taxa efetiva.}$**

**3.** Qual é a taxa nominal anual, com capitalizações semestrais, que conduz à taxa efetiva de 40% a.a.?

**Solução:**

Sendo

$$1 + i_f = (1 + i_q)^q$$

$$i_f = 40\% \text{ a.a.} = 0,40 \text{ a.a.}$$

$$1 \text{ ano} = 2 \text{ semestres}, q = 2,$$

então

$$1 + 0,40 = (1 + i_2)^2$$

$$(1 + i_2)^2 = 1,40$$

$$1 + i_2 = \sqrt{1,40}$$

que é o mesmo que

$$1 + i_2 = (1,40)^{\frac{1}{2}} \quad 1 + i_2 = 1,1832$$

$$i_2 = 1,1832 - 1$$

$$i_2 = 0,1832.$$

Então:



a taxa nominal anual é  $0,1832 \times 2 = 0,3664 = 36,64\%$  a.a.



Observe que a taxa nominal é menor que a taxa efetiva.

## Resumo

Acabamos de ver que duas taxas são equivalentes em regime de capitalização simples quando, aplicadas a um mesmo capital, durante o mesmo período, produzem o mesmo juro. Em regime de capitalização composta, são equivalentes quando, aplicadas a um mesmo capital, referentes a períodos de tempo diferentes, produzem o mesmo montante, num mesmo tempo. Por último, tratamos de taxas nominal e efetiva.

Agora é sua vez de praticar!

## Atividades de aprendizagem



1. Em regime de capitalização composta, qual é a taxa equivalente anual às seguintes taxas:

- a) 1% a.m.
- b) 2% ao bimestre
- c) 5% ao trimestre
- d) 2,5% ao quadrimestre
- e) 8% ao semestre

2. Em regime de capitalização composta, que taxas são equivalentes a 25% a.a., se os prazos respectivos forem:

- a) 6 meses (semestral);
- b) 4 meses (quadrimestral);
- c) 3 meses (trimestral);
- d) 2 meses ((bimestral));
- e) 1 mês (mensal);



f) 8 meses;

g) 9 meses;

h) 11 meses.

**3.** Qual é a taxa efetiva anual em:

a) 24% a.a., com capitalização mensal

b) 28% a.a., com capitalização trimestral

c) 21% a.a., com capitalização quadriestral

d) 40% a.a., com capitalização semestral

e) 30% a.a. com capitalização anual

Prezado(a) estudante,

Esperamos que esta aula tenha lhe oportunizado novos conhecimentos. No nosso próximo encontro, abordaremos desconto simples e desconto composto.



# Aula 5. Descontos

## Objetivo:

- resolver problemas que envolvam descontos.

Caro (a) estudante,

Este é mais um encontro no qual trabalharemos um tema de suma importância em Matemática Financeira. Trataremos dos descontos em regime de capitalização simples e composta.

### 5.1 Desconto

Suponhamos que um fabricante tenha vendido um produto a uma rede de supermercados, no valor de R\$ 80.000,00, que deveria ser pago três meses após a entrega. Passado um mês da data da entrega, o fornecedor, precisando de dinheiro, procurou o banco A para tentar descontar a duplicata (documento comprobatório da dívida contraída pela rede). O Banco A ofereceu em troca do título a quantia de R\$ 76.000,00 e passou a ser credor da dívida no valor de R\$ 80.000,00, que será saldada pela rede de supermercados ao Banco A, e não mais o fabricante.

Esse tipo de operação recebe o nome de **desconto de título** e as operações anteriormente citadas são denominadas de **operações de desconto** (IEZZI et al., 2004).

Exemplificando:

- **dia de vencimento** - é o dia fixado no título para o pagamento (ou recebimento) da aplicação;
- **valor nominal** - é o valor indicado no título (importância a ser paga no dia de vencimento). No exemplo acima temos que: **valor nominal = R\$ 80.000,00**;



- **valor atual (valor descontado)** - é o valor líquido pago (ou recebido) antes do vencimento.

No exemplo acima, **valor atual = R\$ 76.000,00**.

- **prazo** - é o número de dias compreendido entre o dia em que se negocia o título e o de seu vencimento, incluindo o primeiro e não o último, ou, então, o último e não o primeiro.
- **desconto** - é a quantia a ser abatida do valor nominal, isto é, a diferença entre o valor nominal e o valor atual.

No exemplo acima:

$$\text{Desconto} = \text{Valor nominal} - \text{Valor atual}$$

$$\text{Desconto} = \text{R\$ } 80.000,00 - \text{R\$ } 76.000,00 = \text{R\$ } 4.000,00$$

Agora vamos estudar os dois tipos de desconto, ou seja, o desconto simples e o desconto composto. Primeiro vamos tratar do desconto simples.

## 5.2 Desconto simples (regime de juros simples)

Existem dois tipos de descontos simples nas operações financeiras: o desconto comercial ou desconto por fora e o desconto racional ou desconto por dentro.

### 5.2.1 Desconto comercial ou por fora

O equivalente ao juro simples, produzido pelo valor nominal do título no período de tempo correspondente e à taxa fixada. Os bancos utilizam o desconto comercial.

Notações:

$N$  = valor nominal

$D_c$  = desconto comercial

$N$  = prazo (número de períodos de antecipação)



I = taxa de desconto

A = valor atual

Cálculo do desconto comercial:

O desconto comercial é o resultado do produto dos fatores valor nominal, taxa e prazo. As duas últimas devem estar na mesma unidade de tempo.

Assim:

$$D_c = N \cdot i \cdot n$$

O valor atual é dado por

$$A = N - D_c \quad (14).$$

Para uma melhor assimilação, vamos acompanhar a resolução das atividades a seguir:

**1.** Um título de R\$ 6.000,00 vai ser descontado à taxa de 2,1% ao mês. Faltando 45 dias para o vencimento do título, determine:

a) o valor do desconto comercial.

b) o valor atual comercial.

Resolução:

Temos:

$$N = R\$ 6.000,00$$

$$i = 2,1\% \text{ a.m.} = 0,021 \text{ a.m.}$$

$$n = 45 \text{ dias} = 1,5 \text{ meses}$$

$$\text{a)} D_c = R\$ 6.000,00 \cdot 0,021 \cdot 1,5 = R\$ 189,00$$

$$\text{b)} A = N - D_c = R\$ 6.000,00 - R\$ 189,00 = R\$ 5.811,00$$



**Assim, o desconto comercial foi de R\$ 189,00 e o valor atual é de R\$ 5.811,00.**

**2.** Uma duplicata título emitido por uma pessoa jurídica contra seu cliente, pessoa física ou pessoa jurídica, comprovando determinada dívida de R\$ 6.900,00 foi resgatada antes do seu vencimento por R\$ 6.072,00. Calcule o tempo de antecipação, sabendo que a taxa de desconto comercial foi de 4% ao mês.

Solução:

Temos:

$$N = R\$ 6\,900,00$$

$$i = 4\% \text{ a.m.} = 0,04 \text{ a.m.}$$

$$A = R\$ 6.072,00$$

$$D_c = R\$ 6.900,00 - R\$ 6.072,00 = R\$ 818,00$$

Como:

$$D_c = N \cdot i \text{, então:}$$

$$R\$ 818,00 = R\$ 6.900,00 \cdot 0,04 \cdot n$$

$$R\$ 818,00 = R\$ 276,00 \cdot n$$

$$n = \frac{818,00}{276,00} = 3 \text{ meses}$$

**O tempo de antecipação foi de 3 meses.**

### **5.2.2 Desconto racional ou por dentro**

Cálculo do desconto racional: o desconto racional é o quociente obtido entre o desconto comercial e a taxa de capitalização, em juro simples.

$$Dr = \frac{N \cdot i}{1 + i \cdot n}$$



$$A = N - D_r$$

Acompanhe a resolução das atividades a seguir.

- 1.** Considere um título cujo valor nominal seja R\$ 10.000,00. Calcule o desconto racional a ser concedido para um resgate do título três meses antes da data de vencimento, a uma taxa de desconto de 5% a.m.

**Solução:**

Temos

$$N = R\$ 10.000,00$$

$$i = 5\% \text{ a.m.} = 0,05 \text{ a.m.}$$

$$n = 3$$

Sendo:

$$D_r = \frac{Nin}{1+in}$$

$$D_r = \frac{10.000,00 \cdot 0,05 \cdot 3}{1+0,05 \cdot 3}$$

$$D_r = \frac{1.500,00}{1+0,15}$$

$$D_r = \frac{1.500,00}{1,15} = 1.304,35.$$

**O desconto racional será de R\$ 1.304,35.**

- 2.** Seja um título de valor nominal de R\$ 4.000,00, vencível em um ano, que está sendo liquidado três meses antes de seu vencimento. Sendo de 42% a.a. a taxa de desconto adotado, determine o desconto comercial e o desconto racional.

**Solução:**

Dados:

$$N = 4.000,00$$



$$i = 42\% \text{ a.a.} = 3,5\% \text{ a.m.} = 0,035 \text{ a.m.}$$
$$n = 3$$

Como:

$$D_c = N \cdot i \cdot n,$$

então:

$$D_c = R\$ 4\,000,00 \cdot 0,035 \cdot 3 = R\$ 420,00$$

$$D_r = \frac{N \cdot i \cdot n}{1 + i \cdot n} = \frac{420,00}{1 + 0,035 \cdot 3} = \frac{420,00}{1 + 0,105} = \frac{420,00}{1,105} = 380,09$$

Nesse exemplo, você pode concluir que o desconto comercial é maior que o desconto racional, isto é,

$$D_c > D_r$$

3. Determine o desconto racional, adotando-se um valor nominal de R\$ 5.000,00, um prazo de antecIPAção de 25 dias e uma taxa de juros 32% ao ano.

**Solução:**

Dados:

$$N = R\$ 5.000,00$$
$$i = 32\% \text{ a.a.} = 0,32 \text{ a.a.} = 0,32/360 \text{ a.d.}$$
$$n = 25$$

$$D_r = \frac{N \cdot i \cdot n}{1 + i \cdot n}$$

Então:

$$\frac{(5.000,00 \cdot \frac{0,32}{360} \cdot 25)}{1 + \frac{0,32}{360} \cdot 25} = \frac{111,11}{1+0,022} = \frac{111,111}{1,0222} = 108,70$$

**O desconto racional é de R\$ 108,70.**



## 5.3 Desconto composto (regime de juro composto)

O conceito de desconto no regime de capitalização composta é idêntico ao visto no regime de juros simples: corresponde ao abatimento por saldar-se um compromisso antes de seu vencimento. A diferença está apenas no regime de juros, juros compostos, sendo o raciocínio financeiro o mesmo.

Existem dois tipos de **descontos compostos**: o desconto bancário composto e o desconto racional composto.

Segundo Crespo (2009), o desconto racional composto é utilizado em operações financeiras de longo prazo e o desconto bancário composto praticamente não é empregado.

Notações:

N = valor nominal

D<sub>r</sub> = desconto racional

n = prazo (número de períodos de antecipação)

i = taxa de desconto

A = valor atual

O valor atual A é dado por:

$$A = \frac{N}{(1+i)^n}$$

E o desconto racional composto é dado por

$$D_r = N - A$$

1. Determine o valor atual de um título de R\$ 800,00, saldado quatro meses antes de seu vencimento, à taxa de desconto racional (composto) de 2% ao mês.



### Solução:

Dados:

$$N = R\$ 800,00$$
$$I = 2\% \text{ a.m.} = 0,02 \text{ a.m.}$$
$$n = 4$$

Sendo:  $A = \frac{N}{(1+i)^n}$

então

$$\frac{800,00}{(1+0,02)^4} = \frac{800,00}{(1,02)^4} = \frac{800,00}{1,0824} = 739,09$$

**Sendo assim, o valor atual é de R\$ 739,09.**

- 2.** Qual é o desconto racional composto que um título de R\$ 5.000,00 sofre ao ser descontado três meses antes do seu vencimento, à taxa de 2,5% ao mês?

### Solução:

Dados:

$$N = R\$ 5.000,00$$
$$I = 2,5\% \text{ a.m.} = 0,025 \text{ a.m.}$$
$$n = 3$$

Sendo:

$$A = \frac{N}{(1+i)^n}$$

então

$$A = \frac{5.000,00}{(1+0,025)^3} = \frac{5.000,00}{(1,025)^3} = \frac{5.000,00}{1,0769} = 4.643,00$$



Assim sendo, o desconto racional composto é o valor nominal menos o valor atual, isto é

$$\text{R\$ } 5.000,00 - \text{R\$ } 4.643,00 = \text{R\$ } 357,00.$$

Segundo Zot (1999, p. 60), “na prática bancária são utilizados o desconto bancário simples nas operações de financiamento de curto prazo, como, por exemplo, desconto de duplicatas; e o desconto racional composto, utilizado nas operações financeiras de longo prazo”. Vamos ao resumo da aula.

## Resumo

Nesta aula vimos que, quando saldamos uma dívida antes de seu vencimento, obtemos um desconto. Esse desconto pode ser simples ou composto, dependendo do regime de juros. Constatamos que o desconto simples pode ser comercial ou racional, sendo o desconto comercial o produto dos fatores *valor nominal, taxa e prazo*, em que prazos dois últimos devem estar numa mesma unidade de tempo. Já o desconto racional é o quociente entre o desconto comercial e a taxa de capitalização, em juro simples. Em seguida, desenvolvemos o conteúdo sobre desconto composto (regime de juro composto). Verificamos que os conceitos de desconto no regime de capitalização composta e no regime de juros simples são idênticos, diferindo apenas no regime de juros. Tratamos dos dois tipos de descontos compostos: o desconto bancário composto e o desconto racional composto. Sugiro que você faça novamente as atividades da aula antes de iniciar a resolução das atividades de aprendizagem a seguir.

## Atividades de aprendizagem



1. (MS 2000) Uma empresa descontou em um banco uma duplicata de R\$ 2.000,00, dois meses e meio antes do seu vencimento, a uma taxa de desconto comercial simples de 4% ao mês. A taxa efetiva de juros dessa operação foi igual a:

- a) 10%
- b) 10,44%
- c) 10,77%
- d) 11,11%



- 2.** Um título de R\$ 5.000,00 vai ser descontado 60 dias antes do vencimento. Sabendo-se que a taxa de juros é de 3% a.m., pede-se calcular o desconto comercial simples e o valor descontado.
- 3.** Uma dívida de R\$ 12.000,00 será saldada quatro meses antes de seu vencimento. Que desconto racional simples será obtido se a taxa de juros contratada for de 2,7% a.a.?
- 4.** Determinar o desconto racional simples adotando-se um valor nominal de R\$ 3.000,00, um prazo de antecipação de 150 dias e uma taxa de juros 20% ao ano.
- 5.** Um título de valor nominal de R\$ 10.000,00, com vencimento em 23/09/2009, é resgatado em 15 de junho de 2009. Qual é o desconto racional simples se a taxa de juros contratada for de 27% a.a.?
- 6.** Um título de R\$ 9.000,00 é resgatado cinco meses antes do seu vencimento e sofre desconto à taxa de 5% a.m. Calcule o desconto bancário simples, o desconto racional simples e o desconto racional composto.

Finalizamos mais uma aula, na qual tratamos dos descontos simples e compostos. Estamos chegando ao final desta disciplina. Só temos mais uma aula e nela abordaremos série de pagamentos. Vamos lá!



# Aula 6. Série de pagamentos

## Objetivos:

- conceituar série de pagamentos; e
- resolver problemas que envolvam série de pagamentos.

Prezado(a) estudante,

Esta é nossa última aula da disciplina de Matemática Financeira. Abordaremos as séries de pagamentos e sua classificação, um assunto relevante para o profissional da área. Vamos lá!

## 6.1 Série de pagamentos

Vamos iniciar apresentando os conceitos de série de pagamentos, anuidades, rendas certas ou prestações.

Séries de pagamento, anuidades, rendas certas ou prestações são sucessões finitas ou infinitas de pagamentos ou recebimentos feitos em determinadas épocas, durante o fluxo de uma operação financeira, destinadas a extinguir uma dívida ou constituir um capital.

As rendas certas, anuidades ou séries de pagamentos ocorrem quando o número de termos, seus vencimentos e seus respectivos valores podem ser prefixados. Ex.: compra de bens a prazo.

As rendas aleatórias ocorrem quando pelo menos um dos elementos não pode ser previamente determinado. Ex.: pagamento de um seguro de vida (o número de termos é indeterminado)

As séries de pagamentos apresentam uma classificação que veremos a seguir.



## 6.2 Classificação das séries de pagamentos (rendas certas)

As séries de pagamento podem ser classificadas:

- **Quanto ao tempo**

**Temporária** - número finito de pagamentos;

**Perpétua** - número infinito de pagamentos – o prazo é ilimitado, não há previsão de terminar. O valor futuro não pode ser definido.

- **Quanto à constância ou periodicidade**

**Periódicas** - quando ocorrem em intervalos de tempo iguais. Se o período é o mês, trimestre ou ano será, respectivamente, renda mensal, trimestral ou anual.

**Não periódicas** - quando ocorrem em intervalos de tempo diferentes.

- **Quanto ao valor dos pagamentos**

**Constante** - quando os pagamentos forem iguais, fixos/uniformes;

**Variáveis** - quando os pagamentos forem variáveis.

- **Quanto ao vencimento do primeiro pagamento**

**Imediato** - quando o primeiro pagamento ocorre exatamente no primeiro período da série. Ex.: compra de um bem a prazo, em prestações mensais, pagando a primeira prestação um mês após a assinatura do contrato.

**Diferido** - quando o primeiro pagamento é feito depois de um prazo contado da época zero até o início dos pagamentos. Ex.: compra de um bem a prazo, em prestações mensais, pagando a primeira prestação no fim de um determinado número de meses.

- **Quanto ao momento dos pagamentos:**

As séries imediatas podem ser:



Antecipadas - quando o pagamento é feito no momento 0 (zero), isto é, no início dos períodos, do tipo crediário com entrada.

Postecipadas - quando os pagamentos ocorrem no final de cada período, isto é, crediário sem entrada.

## 6.3 Anuidades (série de pagamentos) constantes, imediatas e postecipadas

Vamos iniciar os estudos das anuidades. Neste tópico, abordaremos as anuidades (série de pagamentos) constantes, imediatas e postecipadas.

### 6.3.1 Notações

**R** - cada pagamento, termo ou prestação da série;

**P** - valor atual da anuidade (principal, valor presente, capital inicial);

**S** - valor futuro da anuidade (montante, capital a constituir);

**n** - número de prestações;

**i** - taxa unitária de juros.

**Observação:** o montante ou valor futuro da série não é igual ao somatório de pagamentos.

**Sempre que o tipo de renda não for especificado, deveremos supor que se trata de renda imediata, por ser o tipo mais comum.**



Fórmulas para as anuidades (série de pagamentos) postecipadas

$$P = R \frac{(1 + i) - 1}{i \cdot (1 + i)^n}$$

$$R = P \frac{i \cdot (1 + i)^n}{(1 + i)^n - 1}$$

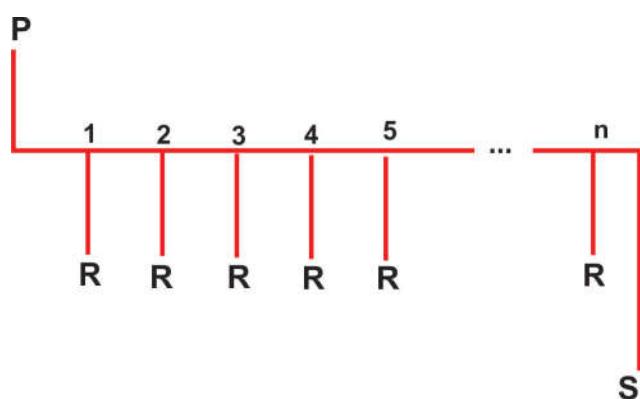
$$S = P(1 + i)^n$$



ou

$$S = R \frac{[(1+i)^n - 1]}{i}$$

### Gráfico das anuidades (série de pagamentos) constantes, imediatas e postecipadas



Fonte: Wili Dal Zot (1999).

1. Qual é o valor atual de uma série de 20 prestações iguais a R\$ 12.500,00, postecipadas, a uma taxa de 1,9% ao mês?

Solução:

Dados:

$$\begin{aligned} R &= R\$ 12.500,00 \\ i &= 1,9\% \text{ a.m.} = 0,019 \text{ a.m.} \\ n &= 20 \end{aligned}$$

Sendo o fator

$$(1 + i)^n = (1 + 0,019)^{20} = (1,019)^{20} = 1,4571,$$



$$P = R \frac{(1+i)^n - 1}{i \cdot (1+i)^n} = 12.500,00$$

$$\frac{1,4571-1}{0,019 \cdot 1,4571} = 12.500,00$$

$$\frac{0,4571}{0,0277} = 12.500,00 \cdot 16,5018 = 206,272,50.$$

**O valor atual é de R\$ 206.272,50.**

- 2.** O gerente de uma loja deseja financiar para um cliente um televisor em cores no valor de R\$ 2.890,00, em quatro prestações iguais sem entrada. Sabendo-se que a loja utiliza uma taxa de juros de 1,2% ao mês, calcule o valor da prestação.

**Solução:**

Dados:

$$\begin{aligned} P &= R\$ 2.890,00 \\ i &= 1,2\% \text{ a.m.} = 0,012 \text{ a.m.} \\ n &= 4 \end{aligned}$$

Para facilitar os cálculos vamos calcular, primeiramente, o fator:

$$(1+i)^n =$$

$$= (1+0,012)^4 =$$

$$= (1,012)^4 =$$

$$= 1,0489.$$

Calculado esse fator, inserimos na fórmula da prestação



$$P = R \frac{(1+i)^n}{i \cdot (1+i)^n - 1}$$

$$R = 2.890,00 \frac{0,012 \cdot 1,0489}{1,0498 - 1} = 2.890,00 \frac{0,0126}{0,0498}$$

$$R = 2.890,00 \cdot 0,2577 = 744,75$$

**O valor da prestação é igual a R\$ 744,75.**

- 3.** Uma pessoa deposita mensalmente a quantia de R\$ 1.500,00 em uma conta de poupança que rende juros de 0,6% ao mês. Qual será o saldo da conta imediatamente após o 8º o depósito?

**Solução:**

Dados:

$$\begin{aligned} R &= R\$ 1.500,00 \\ I &= 0,6\% \text{ a.m.} = 0,006 \text{ a.m.} \\ n &= 8 \end{aligned}$$

Calculando o fator

$$(1+i)^n$$

Então:

$$(1+0,006)^8 = (1,006)^8 = 1,0490$$

Calculando S, o montante:

$$\begin{aligned} S &= \frac{R[(1+i)^n - 1]}{i} \\ S &= 1.500,00 \cdot \frac{1,0490 - 1}{0,006} \end{aligned}$$

$$S = 1.500,00 \cdot \frac{0,0490}{0,006}$$



$$S = 1.500,00 \cdot 8.1667$$

$$S = 12.250,05$$

O saldo será de R\$ 12.250,05.

## 6.4 Anuidades (séries de pagamentos) constantes, imediatas e antecipadas

Dando continuidade ao conteúdo trataremos das anuidades (séries de pagamentos) constantes imediatas e antecipadas

Notações

R - cada pagamento, termo ou prestação da série;

P - valor atual da anuidade (principal, valor presente, capital inicial);

S - valor futuro da anuidade (montante, capital a constituir);

n - número de prestações;

i - taxa unitária de juros.

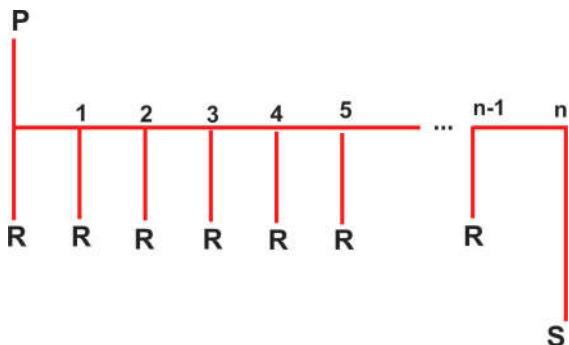
### 6.4.1 Fórmulas para anuidades (séries de pagamentos) antecipadas

$$P = R \frac{(1+i)^n - 1}{i \cdot (1+i)^n - 1}$$

$$R = P \frac{i \cdot (1+i)^{n-1}}{(1+i)^n - 1}$$



## 6.4.2 Gráficos para anuidades (séries de pagamentos) antecipadas



Fonte: Wili Dal Zot (1999).

Vamos praticar

1. Uma loja calculou o financiamento de um conjunto de sofás em seis prestações mensais iguais a R\$ 500,00, uma delas como entrada. Sabemos que o crediário da loja utiliza uma financeira, cuja taxa de juros é de 2,5% ao mês. Calcule qual seria o valor a vista dos sofás.

**Solução:**

Temos

$$\begin{aligned} R &= \text{R\$ } 500,00 \\ I &= 2,5\% \text{ a.m.} = 0,025 \text{ a.m.} \\ n &= 6 \end{aligned}$$

Como

$$P = R \frac{(1+i)^n - 1}{i \cdot (1+i)^n - 1}$$

Calculemos o fator  $(1+i)^n$

$$(1+i)^n = (1+0,025)^6$$

$$(1+i)^n = 1,025^6 = 1,1597.$$

Calculando o numerador da fração:

$$(1+i)^n - 1 = 1,1597 - 1 = 0,1597 \text{ (esse é o resultado do numerador da fração).}$$



Calculando o fator:

$$(1+i)^{n-1} = (1+0,025)^5 = 1,025^5 = 1,1314.$$

Calculado o denominador da fração:

$$i \cdot (1+i)^{n-1} = 0,025 \cdot 1,1314 = 0,0283 \text{ (esse é o resultado do denominador da fração)}$$

$$P = 500,00 \frac{0,1597}{0,0283} = 500,00 \cdot 5,6431 = 2.821,55$$

**O valor a vista do conjunto de sofás é R\$ 2.821,55.**

**2.** Qual é o valor da prestação que o gerente de uma loja oferece a um cliente na compra de um eletrodoméstico no valor á vista de R\$ 6.300,00, financiando em seis prestações mensais constantes, incluindo, entre elas, a entrada, sabendo-se que a taxa de juros utilizada é de 3,5% ao mês?

Solução:

Dados:

$$P = \text{R\$ } 6.300,00$$

$$i = 3,5\% \text{ a.m.} = 0,035 \text{ a.m.}$$

$$n = 6$$

$$(1+i)^{n-1} = (1+0,035)^5 = 1,1877$$

$$i \cdot (1+i)^{n-1} = 0,035 \cdot 1,1877 = 0,0416 \text{ ( numerador da fração)}$$

$$(1+i)^n = (1+0,035)^6 = 0,2293$$

$$(1+i)^n - 1 = 1,2293 - 1 = 0,2293 \text{ (denominador da fração)}$$

$$R = P \frac{i \cdot (1+i)^{n-1}}{(1+i)^n - 1} = 6.300,00 \frac{0,0416}{0,2293} = 6.300,00 \cdot 0,1814 = 1.142,82$$

**O valor da prestação é de R\$ 1.141,82.**



## 6.5 Anuidades (séries de pagamentos) diferidas

Vamos ao último tópico da aula, anuidades (séries de pagamentos) diferidas.

Notações

R - cada pagamento, termo ou prestação da série;

P - valor atual da anuidade (principal, valor presente, capital inicial);

S - valor futuro da anuidade (montante, capital a constituir);

n – número de prestações;

i – taxa unitária de juros.

K = período após a compra, em que não vai ser efetuado nenhum pagamento. Desconsidera-se o primeiro período (entrada).

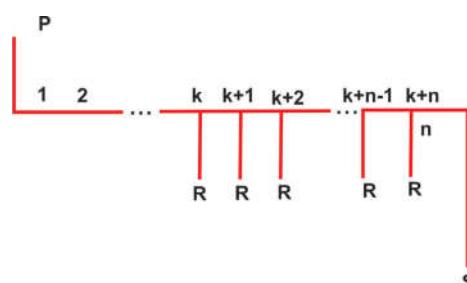
Por exemplo, se o primeiro pagamento for efetuado 3 meses depois de uma determinada compra k = 2, isto é, o diferimento é igual a 2.

Fórmulas para anuidades (séries de pagamentos) diferidas

$$P = R \frac{(1+i)^n - 1}{i \cdot (1+i)^{n+k}}$$

$$R = P \frac{i \cdot (1+i)^{n-k}}{(1+i)^n - 1}$$

### 6.5.1 Gráficos para anuidades (séries de pagamentos) diferidas



Fonte: Wili Dal Zot (1999).



**1.** Calcule o valor atual de uma dívida que pode ser amortizada com dez prestações mensais de R\$ 500,00, sendo de 2% a taxa de juro e devendo a primeira prestação ser paga três meses após a realização do empréstimo.

### Solução:

Temos

$$R = R\$ 500,00$$

$$I = 2\% \text{ a.m.} = 0,02 \text{ a.m.}$$

$$N = 6 \quad k = 2$$

Sendo

$$P = R \frac{(1+i)^n - 1}{i \cdot (1+i)^{n+k}}$$

$$P = 500,00 \frac{(1+0,02)^{10} - 1}{0,02 \cdot (1+0,02)^{12}} = 500,00 \frac{1,2190 - 1}{0,02 \cdot 1,2682}$$

$$P = 500 \cdot 8,65359$$

$$P = R\$ 4.317,80.$$

O valor atual é igual a **R\$ 4.317,80**.

## Resumo

Nesta aula, vimos série de pagamentos e sua classificação. Tratamos também das anuidades. Ao final de cada tópico, resolvemos atividades a fim de sanar algumas dúvidas que possam ter surgido. Antes da atividade proposta, releia a aula e refaça os exercícios resolvidos.

## Atividade de aprendizagem

**1.** Calcular o valor do financiamento a ser quitado através de seis pagamentos mensais de R\$ 1.500,00, vencendo a primeira parcela 30 dias depois da liberação dos recursos, sendo de 3,5% a.m. a taxa de juros negociada na operação.





## Palavras Finais

Chegamos ao final de mais uma disciplina do Curso Técnico em Contabilidade. Queremos cumprimentá-lo pelo esforço e dedicação aos estudos. Esperamos que esta disciplina tenha ampliado seus conhecimentos, proporcionando-lhe uma aprendizagem significativa, abrindo seu campo de visão para conhecimentos novos, atraentes e interessantes. Acreditamos em você! Dê continuidade aos estudos, pois fechamos o conteúdo estabelecido, mas não esgotamos o assunto. Essa área é muito extensa e o mercado de trabalho atual exige profissionais qualificados e sempre atualizados.

Maria Elaine



# Guia de Soluções

## Atividades

### Aula 1

- 1.** c, a, b
- 2.** 19,2%; 4,8%
- 3. a)** 1,5%; **b)** 17%; **c)** 120%
- 4. a)** 0,86; **b)** 0,08; **c)** 1,30

### Aula 2

- 1.** R\$ 160.000,00
- 2.** R\$ 1.500,00
- 3.** 50 meses
- 4.** 1.000,00
- 5.** R\$ 11.800,00
- 6.** 2,4%
- 7.** 21% a.a.
- 8.** 20% ao ano

### Aula 3

- 1.** R\$ 1.816,30
- 2.** R\$ 814,00
- 3.** 3,5% a.m.



**4.** R\$ 384.317,00

**5.** R\$ 17.237,00

**6.** 4,84%

## Aula 4

**1. a)** 12,68% a.a.; **b)** 12,61% a.a; **c)** 21,55% a.a.; **d)** 7,68 % a.a.;

**e)** 16,64% a.a.

**2. a)** 11,80% a.s.; **b)** 7,72% a.q.; **c)** 5,73% a.t.; **d)** 3,78% a.b.;

**e)** 1,87% a.m.; **f)** 16,04% em oito meses; **g)** 18,21% em nove meses;

**h)** 22,69% em 11 meses.

**3. a)** 26,82% a.a.; **b)** 31,08% a.a.; **c)** 22,50% a.a.; **d)** 44,00% a.a.

## Aula 5

**1.** Letra d

**2.** Desconto = R\$ 300,00; valor descontado = R\$ 4.700,00

**3.**  $D_r = R\$ 107,00$

**4.**  $D_r = R\$ 230,77$

**5.**  $D_r = R\$ 697,67$

**6.**  $D_c = R\$ 2.250,00$ ;  $D_r = R\$ 1.800,00$ ;  $D_r$  (composto) = R\$ 1.948,26



## Referências

CRESPO, Antonio Arnot. **Matemática Financeira fácil.** 14. ed. São Paulo: Saraiva, 2009.

IEZZI, Gelson et al. **Matemática:** ciência e aplicações - 1<sup>a</sup> série ensino médio. 2 ed. São Paulo: Atual, 2004.

MATHIAS, Washington Franco; GOMES, José Maria. **Matemática Financeira.** São Paulo: Atlas, 1990.

ZOT, Wili Dal. **Matemática Financeira.** 2 ed. Porto Alegre: Universidade/UFRGS, 1999.

ASSAF Neto, Alexandre. **Matemática Financeira e suas aplicações.** 10 ed. São Paulo: Atlas, 2008.



## Curriculum do Professor-autor



**Maria Elaine dos Santos Soares** possui graduação em Ciências, com habilitação em Matemática, pela Universidade Católica de Pelotas (1982); especialização em Matemática, pela Universidade Federal de Pelotas (1986); e mestrado em Matemática Aplicada, pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul (2002). É professora do CAVG desde 1994 e tem experiências na área de Matemática, nos cursos de nível médio, técnico, tecnológico e superior dessa instituição, bem como na Licenciatura em Matemática da Universidade Católica de Pelotas.