

**Lista 3: Exercício - Cadeias de Markov**

Aluno: Paulo Fylyppe Sell

Professor: Eraldo Silveira e Silva

1. Construir a matriz estocástica  $P$  para o modelo *Slotted Aloha* e *Pure Aloha*, considerando  $N = 10$  e  $a = 0,2$ . Computar os seguintes pontos para cada um:

**Solução:**

A matriz  $P$  para o modelo *Pure Aloha* é dada da seguinte forma:

$$P = \begin{vmatrix} u_0 & 1 - u_0 - u_1 & u_1 \\ u_0 & 1 - u_0 & 0 \\ u_0 & 1 - u_0 & 0 \end{vmatrix}$$

Já para o modelo *Slotted Aloha*, a matriz  $P$  se dá da seguinte maneira:

$$P = \begin{vmatrix} u_0 & 1 - u_0 - u_1 & u_1 \\ u_0 & 1 - u_0 - u_1 & u_1 \\ u_0 & 1 - u_0 - u_1 & u_1 \end{vmatrix}$$

Para ambos os modelos,  $u_k$  é a probabilidade de  $k$  nodos iniciarem uma transmissão na mesma época.

- (a) Vazão em *frames* por época e *frames* por segundo para uma taxa de 10 Mbps

**Solução:** Para o modelo *Pure Aloha*, a vazão por época se dá através da equação:

$$V_s = Na(1 - a)^{2N-1} \quad (1)$$

Sendo assim, a vazão para o modelo *Pure Aloha* é de 0.0288 *bits*/época. Para uma taxa de 10 Mbps, a vazão por segundo neste modelo é de:

$$V'_s = \frac{V_s}{T} = 0.288 \text{ Mbps} \quad (2)$$

A vazão para o modelo *Slotted Aloha* se dá através da seguinte equação:

$$V_s = Na(1 - a)^{N-1} \quad (3)$$

Consequentemente, a vazão por época deste modelo é de 0.2684 *bits*/época. Da mesma forma que no modelo anterior, a vazão por segundo no modelo *Slotted Aloha* é dado como:

$$V'_s = \frac{V_s}{T} = 2.684 \text{ Mbps} \quad (4)$$

(b) Compare as vazões máximas dos dois sistemas

**Solução:** O cálculo do valor de  $a$  que garante a vazão do sistema é dado através da derivada:

$$\frac{dV_s}{da} = 0 \quad (5)$$

Sendo assim, a vazão máxima do modelo *Pure Aloha* se dá da seguinte maneira:

$$a_{max} = \frac{1}{2N} \quad (6)$$

$$V_s^{max} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2N}\right)^{2N-1} = 0.1887 \text{ bits/epoca} \quad (7)$$

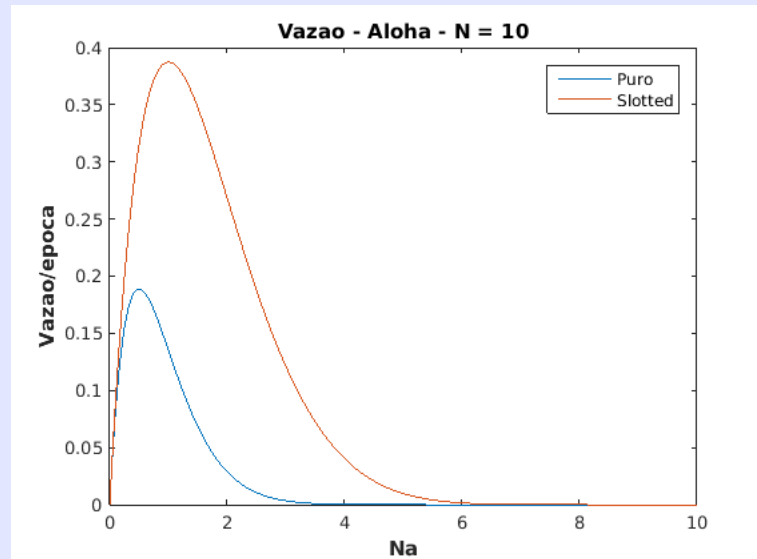
Para o modelo *Slotted Aloha*, a vazão máxima é de:

$$a_{max} = \frac{1}{N} \quad (8)$$

$$V_s^{max} = \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{N-1} = 0.3874 \text{ bits/epoca} \quad (9)$$

2. Plotar no *matlab*, para os dois sistemas, a vazão  $V_s$  por  $N_a$ , variando  $a$  de 0 a 1 com  $N = 10$ .

**Solução:** A vazão dos dois sistemas, em função de  $N_a$  se dá através do gráfico abaixo.



É possível observar na imagem uma ampla melhora na vazão do sistema para o modelo *Slotted Aloha*.

# 1 Apêndice

Os cálculos foram realizados através da ferramenta *Matlab* e o código desenvolvido pode ser visto abaixo.

```
1 clc; clear all; close all;
2
3 %% Aloha puro
4
5 N = 10;
6 a = 0.2;
7
8 uk = zeros(1,2);
9
10 for k = 1:length(uk)
11     uk(k) = nchoosek(N,k-1) * (a^(k-1)) * ((1-a)^(N-(k-1)));
12 end
13
14 P_puro = [uk(1) 1-uk(1)-uk(2) uk(2);
15           uk(1) 1-uk(1) 0;
16           uk(1) 1-uk(1) 0];
17
18 Vazao_puro = N*a*((1-a)^(2*N-1));
19 Rb = 10e6;
20 T = 1/Rb;
21 Vazao_s_puro = Vazao_puro/T;
22 Vmax_puro = ((1-(1/(2*N)))^(2*N-1))/2;
23
24 a = 0:0.001:1;
25 Vazao_puro_vetor = N.*a.*((1-a).^(2*N-1));
26 figure(1)
27 plot(N.*a, Vazao_puro_vetor); hold on
28
29
30 %% Slotted
31
32
33 N = 10;
34 a = 0.2;
35
36 uk = zeros(1,2);
37
38 for k = 1:length(uk)
39     uk(k) = nchoosek(N,k-1) * (a^(k-1)) * ((1-a)^(N-(k-1)));
40 end
41
42 P_slotted = [uk(1) 1-uk(1)-uk(2) uk(2);
43              uk(1) 1-uk(1)-uk(2) uk(2);
44              uk(1) 1-uk(1)-uk(2) uk(2)];
45
46 Vazao_slotted = N*a*(1-a)^(N-1);
47 Rb = 10e6;
48 T = 1/Rb;
49 Vazao_s_slotted = Vazao_slotted/T;
```

```

50 Vmax_slotted = (1-(1/N))^(N-1); % a0 = 1/N
51
52 a = 0:0.001:1;
53 Vazao_slotted_vetor = N.*a.*(1-a).^(N-1);
54
55
56 figure(1)
57 plot(N.*a, Vazao_slotted_vetor);
58 title('Vazao - Aloha - N = 10');
59 xlabel('Na', 'FontWeight', 'bold');
60 ylabel('Vazao/epoca', 'FontWeight', 'bold');
61 legend('Puro', 'Slotted');

```