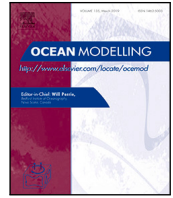


Listas de conteúdos disponíveis em [Science Direct](#)

## Modelagem Oceânica

Página inicial do jornal: [www.elsevier.com/locate/ocemod](http://www.elsevier.com/locate/ocemod)



# Assimilação de dados para as equações bidimensionais de águas rasas: condições iniciais ótimas para modelagem de tsunami

RA Khan\*, NK-R. Kevlahan

McMaster University, 1280 Main St West, Hamilton, ON, Canada

## ARTIGOINFO

*Palavras-chave:*

## Equações de águas rasas

Observações

### Características

Grade

Arco

## ABSTRATO

A modelagem precisa das ondas do tsunami requer limites completos e dados iniciais, juntamente com o modelo matemático apropriado. No entanto, os dados necessários geralmente estão ausentes ou imprecisos e podem não ter resolução suficiente para capturar a dinâmica de tais ondas não-lineares com precisão. Demonstramos que a assimilação de dados variacionais para as equações contínuas de águas rasas (SWE) é uma abordagem viável para recuperar as condições iniciais.

Mostramos que as condições necessárias para a reconstrução das condições iniciais unidimensionais em Kevlahan et al. (2019) pode ser estendido para a distância euclidiana máxima entre observações pareadas para duas dimensões. Usamos simulações de volume finito de diferenças finitas de Sadowny para verificar se a convergência para as verdadeiras condições iniciais pode ser alcançada para configurações dispostas em configurações múltiplas, para condições iniciais isotrópicas e anisotrópicas, e com dados batimétricos realistas em duas dimensões. Comparamos observações dispostas em linhas retas, em uma grade e ao longo de círculos concêntricos, e avaliamos o número e a configuração ideais de pontos de observação de modo que a convergência para as verdadeiras condições iniciais seja alcançada. Esses resultados idealizados com geometria bidimensional simplificada são um primeiro passo para configurações fisicamente mais realistas. Avanços recentes em dados de observação de altimetria agora permitem medições muito mais densas da altura da superfície do mar do que é possível com uma rede de boias fixas. Isso oferece a oportunidade de usar o método desenvolvido aqui para previsões de tsunami mais precisas em ambientes reais. Comparamos observações dispostas em linhas retas, em uma grade e ao longo de círculos concêntricos, e avaliamos o número e a configuração ideais de pontos de observação de modo que a convergência para as verdadeiras condições iniciais seja alcançada. Esses resultados idealizados com geometria bidimensional simplificada são um primeiro passo para configurações fisicamente mais realistas. Avanços recentes em dados de observação de altimetria agora permitem medições muito mais densas da altura da superfície do mar do que é possível com uma rede de boias fixas. Isso oferece a oportunidade de usar o método desenvolvido aqui para previsões de tsunami mais precisas em ambientes reais. Comparamos observações dispostas em linhas retas, em uma grade e ao longo de círculos concêntricos, e avaliamos o número e a configuração ideais de pontos de observação de modo que a convergência para as verdadeiras condições iniciais seja alcançada. Esses resultados idealizados com geometria bidimensional simplificada são um primeiro passo para configurações fisicamente mais realistas. Avanços recentes em dados de observação de altimetria agora permitem medições muito mais densas da altura da superfície do mar do que é possível com uma rede de boias fixas. Isso oferece a oportunidade de usar o método desenvolvido aqui para previsões de tsunami mais precisas em ambientes reais. Resultados idealizados com geometria bidimensional simplificada são um primeiro passo para configurações fisicamente mais realistas. Avanços recentes em dados de observação de altimetria agora permitem medições muito mais densas da altura da superfície do mar do que é possível com uma rede de boias fixas. Isso oferece a oportunidade de usar o método desenvolvido aqui para previsões de tsunami mais precisas em ambientes reais. Resultados idealizados com geometria bidimensional simplificada são um primeiro passo para configur

## 1. Introdução

O tsunami no oceano Índico em 2004 e o tsunami no Japão em 2011 destacaram a necessidade de modelos de previsão mais eficazes que possam ser usados para criar e implementar protocolos de evacuação e emergência de forma eficaz em um período limitado de tempo. No entanto, os métodos existentes são desafiados pelas limitações dos conjuntos de dados necessários (Nakamura et al., 2006). Consequentemente, as informações sobre as condições iniciais dos tsunamis provavelmente serão incompletas ou imprecisas. Os tsunamis são séries de ondas causadas por distúrbios de grande escala no oceano, como a atividade sísmica. Neste estudo focamos na propagação do tsunami no oceano profundo e não na interação das ondas do tsunami com a costa (onde a equação dispersiva de Boussinesq pode ser um modelo melhor). Eles são caracterizados por comprimentos de onda muito longos em relação à profundidade do oceano (às vezes centenas de quilômetros), categorizando-os como ondas de águas rasas. No entanto, a perturbação da superfície livre no oceano profundo pode ser inferior a um metro, tornando-a praticamente imperceptível longe da costa. A velocidade da onda  $c$  é diretamente proporcional à raiz quadrada da profundidade da água, e com uma profundidade média do oceano profundo de 4000 m,

Neste estudo, formulamos um esquema de assimilação de dados variacional para as equações bidimensionais de águas rasas (SWE), onde as observações da altura da superfície do mar são usadas para reconstruir os dados das condições iniciais ausentes. O sistema SWE bidimensional inclui uma equação adicional de conservação da quantidade de movimento na horizontal -direção. O vetor de estado é subsequentemente ( ), e o sistema completo é dado em (2.1).

Para o SWE unidimensional considerado em [Kevlahan et al.\(2019\)](#), a frente de onda é simplesmente um ponto em movimento (de um lado). Portanto, em uma dimensão, os únicos graus de liberdade no posicionamento da observação são seu espaçamento e seu número. No entanto, na extensão bidimensional considerada aqui, a frente de onda é uma curva unidimensional e as observações podem ser colocadas ao longo de curvas ou em várias matrizes bidimensionais. Recursos adicionais que aumentam a complexidade deste caso incluem curvas características não lineares da equação diferencial parcial hiperbólica e os efeitos de foco de onda de recursos batimétricos bidimensionais. Nosso objetivo é investigar se a exigência de espaçamento mínimo em [Kevlahan et al.\(2019\)](#) pode ser estendido para duas dimensões. Estamos particularmente interessados em explorar os efeitos de uma maior escolha no posicionamento da observação e a geometria não linear mais rica da frente de onda permitida pelo problema bidimensional.

\*Correspondência para: Departamento de Meteorologia (MISU), Universidade de Estocolmo, Estocolmo, Suécia.  
Endereço de email: [ramsha.khan@misu.su.se](mailto:ramsha.khan@misu.su.se) (RA Khan).

Na prática, Zou et al. (1992) demonstraram que o SWE bidimensional discretizado é observável mesmo com medições de apenas uma das três variáveis  $u$ ,  $v$ ,  $\eta$ . No entanto, os métodos de assimilação de dados existentes foram aplicados principalmente para previsões de tsunami na América do Norte e no Japão, onde existem redes de observação relativamente grandes (Wang et al., 2019). Fontes primárias de observações incluem o sistema de bóias Deep-ocean Assessment and Reporting of Tsunamis (DART), que consiste em um registrador de pressão de fundo localizado no fundo do oceano que transmite dados para uma bóia de superfície. Os dados são então retransmitidos para a costa via Satélite Ambiental Operacional Geostacionário da NOAA (GOES) (González e cols., 1998). O grande investimento necessário para tal aparato limita a viabilidade de uma rede densa, e atualmente a rede global consiste em aproximadamente 60 sistemas, espalhados por todo o Oceano Pacífico e localizados principalmente perto da costa, em profundidades de 1 a 6 km. Outras observações usadas para detecção e relatórios de tsunami incluem medidores de pressão do sismômetro de fundo do oceano (OBS), no entanto, eles são distribuídos esparsamente no oceano Índico (Wang et al., 2019).

Angove et al. (2019) afirmam que uma das principais limitações para previsões precisas de tsunami é a incapacidade de medir e representar rapidamente a origem do tsunami. A localização e o número de tsunameters DART e sismômetros de fundo oceânico (OBS) atualmente não são extensos o suficiente para fornecer simultaneamente (i) alerta precoce de tsunamis iminentes e (ii) dados observacionais suficientes para métodos de assimilação de dados para reconstruir com precisão o deslocamento no fonte e, subsequentemente, prever a altura e a velocidade das ondas nas costas. Portanto, nosso objetivo com este trabalho é delinear uma estrutura teórica de assimilação de dados que possa fazer uso de dados de altimetria de satélite, onde um progresso considerável foi feito na disponibilidade e precisão dos dados.

Os esquemas de assimilação de dados existentes são capazes de utilizar múltiplas fontes e técnicas para assimilar observações offshore. Maeda et al. (2015) assimilou dados em tempo real de uma rede de tsunameters no fundo do oceano para simular o campo de onda diretamente em tempo real, em vez de aproximar as condições iniciais e, assim, atenuar as incertezas da modelagem da fonte sísmica. Wang et al. (2019) usou a interpolação de formas de onda observadas para criar dados observacionais virtuais e demonstrou o sucesso do esquema de assimilação quando aplicado a simulações de previsão do tsunami de 2004 no Oceano Índico.

As técnicas de filtragem de Kalman também foram usadas extensivamente para estimativa de parâmetros e reconstrução da condição inicial em modelos oceânicos. Mayo et al. (2014) usam variantes de um filtro EnKF de Kalman de conjunto (onde as estatísticas de erro do modelo são representadas por um conjunto de estados do modelo previsto) para estimar os termos de tensão do fundo no modelo costeiro de Circulação Avançada (ADCIRC) usando observações de elevações da superfície do mar. Eles demonstram estimativas precisas de parâmetros de atrito em lagoas e estuários, e destacam a influência da rugosidade da superfície do fundo, motivando a necessidade de batimetria de alta resolução. Ghorbanidehno et al. (2019) também usam a filtragem de Kalman para estimar batimetria perto da costa, usando um novo filtro de Kalman de estado comprimido para recuperar perfis de batimetria constantes e de evolução temporal e demonstrar precisão superior em comparação com métodos baseados em conjuntos com custos computacionais comparáveis. A assimilação de dados estatísticos também foi usada nos esforços de modelagem de tsunami. Yang e outros. (2019) usam o Optimal Interpolation (OI), uma variante do EnKF para reconstruir campos de ondas de tsunami em tempo real usando medições de mudanças de pressão no fundo do oceano. No entanto, a previsão precisa em tempo real usando técnicas de filtragem de Kalman pode ser desafiadora, pois a precisão da previsão depende da escolha das matrizes de covariância de erro inicial e, muitas vezes, as estatísticas de erro para variáveis de estado verdadeiro não estão disponíveis nem são facilmente estimadas. Além disso, a capacidade de resolver detalhes da estrutura de covariância é proporcional ao tamanho do conjunto, e conjuntos maiores podem ser muito caros computacionalmente para previsões em tempo real.

No entanto, a comparação entre a filtragem de Kalman e a assimilação variacional de dados (dado um modelo perfeito e as mesmas observações e domínio), determinou que o desempenho era equivalente para ambos (Fletcher,

2017; Lorenc, 1986). Neste estudo implementamos um esquema variacional de assimilação de dados, usando a teoria de controle ótimo para minimizar o erro entre as variáveis de estado e as observações. A novidade de nossa abordagem variacional é que consideramos o caso dimensional infinito, ao contrário de trabalhos anteriores em 4D-VAR para o SWE como Zou et al. (1992) e Maeda et al. (2015) e técnicas de filtragem de Kalman.

Consequentemente, nosso algoritmo de assimilação de dados é independente da discretização utilizada em sua implementação numérica.

Nosso modelo para propagação de ondas de tsunami é baseado no SWE bidimensional não dispersivo, no entanto, ondas de tsunami também podem ser modeladas usando a aproximação de onda de água Boussinesq. Embora as aproximações de águas rasas e Boussinesq sejam amplamente usadas para analisar a propagação de ondas solitárias, estudos como Dongfang et al. (2013) compararam os dois processos, descobrindo que em certos processos de aceleração as duas aproximações são idênticas e que a aproximação de Boussinesq é mais frequentemente usada para modelar o comportamento hidrodinâmico perto da costa. No entanto, nossa análise aborda a configuração ótima de observações oceânicas necessárias para reconstruir com precisão as condições iniciais e batimétricas e as condições necessárias e/ou suficientes para a convergência, antes que a dinâmica costeira seja observada. Portanto, não levamos em consideração o comportamento próximo à costa em nossa análise.

Além disso, negligenciamos os efeitos de Coriolis, atrito inferior e viscosidade cinemática. Esta configuração idealizada com geometria bidimensional simplificada pretende ser um primeiro passo para análises mais complexas. Por esta razão, também assumimos que não há erros nas medições. Nosso objetivo é validar a abordagem básica demonstrando a viabilidade da assimilação de dados variacionais para previsão de ondas de tsunami e investigar questões fundamentais para o caso idealizado antes de considerar configurações fisicamente mais realistas.

O objetivo do presente estudo não é determinar a colocação ideal de observações ou desenvolver novas técnicas de assimilação com base em critérios de observabilidade. Em vez disso, entendemos nossa técnica de assimilação variacional de condição inicial unidimensional (Kevlahan et al., 2019) de uma dimensão para duas dimensões e analisar os resultados de uma variedade de experimentos numéricos avaliando seu desempenho e flexibilidade.

O problema de encontrar uma configuração ótima de observação foi considerado em Rei e outros. (2015). Eles derivam uma medida de quão bem as informações sobre o estado do sistema podem ser inferidas usando sensores de observação e fornecem uma aproximação para um índice de observabilidade parcial. Suas descobertas sugerem que as observações otimizadas reduziram a raiz quadrada do erro médio (RMSE) em aproximadamente 20% em comparação com observações igualmente espaçadas. De forma similar, Kang e Xu (2014) também apresentam um método de projeção de gradiente para maximizar a observabilidade parcial. No entanto, Rei e outros. (2015) fornecem resultados mostrando a eficácia de seu índice de observabilidade para as equações unidimensionais de águas rasas e as observações ótimas são dispostas em linha reta, com espaçamento variável. As comparações são dadas com pontos equidistantes, e a extensão para dimensões superiores não é discutida. Kang e Xu (2014) também fornecem apenas resultados para a equação unidimensional de Burger. Notamos que a principal contribuição desses trabalhos é a aproximação matemática da observabilidade parcial, enquadrando-a como um problema de otimização de autovalor, enquanto nosso objetivo não é desenvolver um algoritmo para determinar o posicionamento ótimo das observações, mas estender o algoritmo unidimensional derivado em Kevlahan et al. (2019) para duas dimensões, e verificar seu desempenho em uma situação onde há muito mais liberdade no posicionamento da observação.

Em Kevlahan et al. (2019), provamos condições suficientes para a reconstrução ideal das verdadeiras condições iniciais usando observações esparsas para o SWE unidimensional. Nosso objetivo foi determinar o número ideal e os locais das medições de altura de onda, de modo que as condições iniciais reconstruídas de maneira otimizada obtidas por meio da assimilação de dados convergissem para a forma verdadeira. A fim de estender a análise para dinâmicas mais realistas em modelos de tsunami, aqui implementamos um esquema análogo no sistema SWE bidimensional e investigamos se os principais resultados de nosso estudo anterior se estendem ao caso mais complexo com dimensionalidade total.

Devido à escassez de observações em modelos de tsunami, nosso objetivo para o caso bidimensional é encontrar a informação mínima, na forma de observações de altura de onda de superfície (como sua configuração, número e espaçamento entre pontos adjacentes), necessária para a convergência para as verdadeiras condições iniciais.

Esse foco também diferencia o trabalho atual da literatura existente sobre assimilação de dados para o SWE bidimensional como Zou et al. (1992), pois não analisam a escolha da configuração de observação, mas focam no número mínimo de campos observacionais. Além disso, enquanto eles derivam um esquema variacional para o sistema SWE bidimensional discreto, uma novidade de nossa abordagem é que consideramos o caso dimensional infinito, ao contrário de trabalhos anteriores em 4D-VAR. Nosso propósito é estender o esquema de assimilação de dados unidimensional derivado em Kevlahan et al. (2019) para bidimensionais.

Posteriormente, investigamos se as condições de convergência observadas para o caso unidimensional também valem para o sistema bidimensional mais complexo. Lembramos que para a assimilação unidimensional, a convergência ótima para as verdadeiras condições iniciais ocorre quando pelo menos um par de pontos de observação está espaçado mais próximo do que a metade do comprimento de onda mínimo efetivo do espectro de energia das condições iniciais.

No caso unidimensional, fomos capazes de explorar o fato de que o sistema linear unidimensional SWE pode ser formulado como a equação de onda unidimensional e, subsequentemente, usamos suas propriedades analíticas para derivar uma solução exata para o sistema adjunto resolvido na equação variacional esquema. Esta solução foi utilizada para provar condições suficientes para a convergência para as verdadeiras condições iniciais. No entanto, este método não se estende ao caso bidimensional, pois a solução analítica para o sistema adjunto não é facilmente encontrada. As obras existentes, como Iacono (2005) em soluções analíticas do SWE bidimensional, envolvem simplificações drásticas do problema de equilíbrio. Tais simplificações não nos ajudariam a investigar adequadamente as informações mínimas de observação necessárias para modelos de tsunami com alta dimensionalidade.

Portanto, nossa abordagem está focada em uma investigação qualitativa da aplicabilidade dos resultados da análise unidimensional para a assimilação de dados bidimensionais, e na comparação de diferentes espaçamentos, configurações e números de observação. Começamos na Seção 2 estendendo a assimilação de dados para bidimensionais e implementando este algoritmo numericamente na Seção 3. Os resultados e análises complementares estão divididos em três tópicos a seguir.

1. Seção 4: Avaliar o número e a configuração ideais dos pontos de observação de modo que a convergência para as verdadeiras condições iniciais seja alcançada na assimilação de dados para o SWE bidimensional.
2. Seção 4.1: Investigar se as condições suficientes para a convergência em Kevlahan et al. (2019) para o caso unidimensional estende-se à assimilação de dados bidimensionais.
3. Seção 5: Implementar o algoritmo de assimilação de dados para um modelo de previsão de tsunami relativamente realista, usando batimetria não plana. Nossa análise final usa dados de batimetria realistas do banco de dados de relevo topográfico global ETOPO2 e as configurações de observação ideais identificadas neste estudo.

Concluimos com um resumo dos principais resultados e considerações futuras na Seção 6.

## 2. Derivação

As equações bidimensionais de águas rasas (SWE) são

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} \eta^2 \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{2} \eta^2 \right) = 0, \quad (2.1a)$$

$$-\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} \eta^2 \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{2} \eta^2 \right) = 0, \quad (2.1b)$$

$$-\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} \eta^2 \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{2} \eta^2 \right) = 0, \quad (2.1c)$$

$$(\eta, 0) = (\eta, 0), \quad (2.1d)$$

$$(\eta, 0) = 0, \quad (2.1e)$$

$$(\eta, 0) = 0, \quad (2.1f)$$

onde  $\eta$  é a média√ profundidade do fluido e o sistema foi normalizado de tal forma que  $\frac{1}{\sqrt{gH}} = 1$ . e são a perturbação do superfície livre e fundo do mar, respectivamente, e  $u$  e  $v$  são as velocidades no  $x$  e direção. Assumimos as condições iniciais  $\eta(x, y, 0)$  é compactamente suportado no domínio espacial  $\Omega = \{(x, y) \in [-1, 1] \times [-1, 1]\}$  e é periódica nas fronteiras. A notação usada no algoritmo de assimilação de dados é resumida em tabela 1.

Vamos definir  $\eta(x, y, t)$  ser observações da onda de superfície em posições  $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^N$  para  $i=1, \dots, N$  em tempos contínuos. Nosso objetivo é minimizar o erro de mínimos quadrados entre as observações  $\eta(x_i, y_i, t)$  e a solução de previsão da altura da onda  $\eta(x, y, t)$  dadas algumas condições iniciais. Expressamos isso como um funcional de custo  $J(\eta) : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ , limitado pelo sistema (2.1),

$$J(\eta) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_0^T (\eta(x_i, y_i, t) - \eta_i(x_i, y_i, t))^2 dt. \quad (2.2)$$

Então as condições iniciais ótimas  $\eta_0$  é o minimizador definido como

$$\eta_0 = \argmin_{\eta \in \mathcal{H}} J(\eta). \quad (2.3)$$

Desde o mínimo de (2.2) é alcançado quando

$$\nabla J(\eta_0) = 0, \quad (2.4)$$

formulamos um sistema adjunto duplo em termos de algumas variáveis adjuntas apropriadamente escolhidas, de modo que  $\nabla J(\eta_0)$  pode ser derivado de forma mais eficiente do que o cálculo direto do gradiente de (2.2), dado.

A primeira variação de  $J$ , dada alguma perturbação arbitrária de escala é dada pela derivada Gateaux,

$$J'(\eta; \delta\eta) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{J(\eta + \epsilon \delta\eta) - J(\eta)}{\epsilon}. \quad (2.5)$$

Expandindo a perturbação para  $\delta\eta$ , podemos reformular (2.5) como

$$J'(\eta; \delta\eta) = - \int_0^T \int_{\Omega} (\delta\eta(x, y, t) - \eta(x, y, t))' \delta\eta(x, y, t) dx dy dt, \quad (2.6)$$

onde  $(\cdot)'$  são as soluções do sistema perturbado dada a perturbação nas condições iniciais  $\delta\eta_0$ , encontrado pela linearização sobre  $(\eta, 0)$  e extraindo o  $\delta\eta$  sistema.

Como a derivada Gateaux é uma derivada direcional na direção da perturbação  $\delta\eta$ , podemos expressar (2.6) como o produto interno entre  $\nabla J(\eta_0)$  e  $\delta\eta$ ,

$$J'(\eta; \delta\eta) = \langle \nabla J(\eta_0), \delta\eta \rangle = \int_0^T \int_{\Omega} \nabla J(\eta_0) \delta\eta dx dy dt. \quad (2.7)$$

Então as seguintes formas de  $J'(\eta; \delta\eta)$  são equivalentes,

$$J'(\eta; \delta\eta) = - \int_0^T \int_{\Omega} (\delta\eta(x, y, t) - \eta(x, y, t))' \delta\eta(x, y, t) dx dy dt = \int_0^T \int_{\Omega} \nabla J(\eta_0) \delta\eta dx dy dt. \quad (2.8)$$

Se formarmos um Lagrangiano de nosso sistema de águas rasas linearizado com algumas variáveis adjuntas arbitrárias  $(\lambda, \mu, \nu)$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \int_0^T \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} \eta^2 \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{2} \eta^2 \right) \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left( -\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} \eta^2 \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{2} \eta^2 \right) \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left( -\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} \eta^2 \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{2} \eta^2 \right) \right)^2 \right] dx dy dt \\ &\quad + \int_0^T \int_{\Omega} \left[ \lambda \left( \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} \eta^2 \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{2} \eta^2 \right) \right) \right. \\ &\quad \left. + \mu \left( -\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} \eta^2 \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{2} \eta^2 \right) \right) \right. \\ &\quad \left. + \nu \left( -\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} \eta^2 \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{2} \eta^2 \right) \right) \right] dx dy dt = 0, \end{aligned} \quad (2.9)$$

**tabela 1**

Notação utilizada na derivação do esquema de assimilação de dados do SWE bidimensional para encontrar as condições iniciais ótimas.

Símbolo	Definição
$(x, y)$	Solução geral para a perturbação de altura
$(x_0, y_0)$	Condições iniciais verdadeiras
$(x, y)$	Batimetria independente do tempo
$(x_0, y_0)$	Estimativa inicial para condições iniciais
$(x_n, y_n)$	Batimetria aproximada na iteração $n$ do algoritmo de assimilação Melhor aproximação da batimetria (por exemplo, ponto fixo das iterações)
$(x_i, y_i)$	Observações da verdadeira perturbação da altura nas posições $\{x_i, y_i\}, i=1, \dots, m$
$(\hat{x}, \hat{y})$	Solução aproximada ("previsão") gerada por batimetria aproximada
$J_n$	Função de custo na iteração $n$
$(\cdot)^*$	Adjunto

observamos que, ao formular o seguinte sistema em termos das variáveis adjuntas  $(\lambda, \mu, \nu)$ ,

$$\frac{*}{\text{---}} + \frac{*}{\text{---}} + \frac{*}{\text{---}} + \frac{*}{\text{---}} + \frac{*}{\text{---}} = ( \quad , \quad , \quad ) - ( \quad , \quad , \quad ; \quad ), \quad (2.10a)$$

$$\begin{array}{c} \cdot^* \\ + \\ \cdot^* \\ + \\ \cdot^* \\ + (+-) \end{array} \quad \frac{\cdot^*}{\text{---}} = 0, \quad (2.10b)$$

$$\begin{matrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix} + (+ -) \frac{\cdot}{\cdot} = 0, \quad (2.10c)$$

$$*(, , ) = 0, \quad (2.10d)$$

$$*(, , ) = 0, \quad (2.10e)$$

$$*(\cdot, \cdot, \cdot) = 0, \quad (2.10f)$$

e integrando (2.9) por partes no espaço e no tempo, devido à periodicidade das condições de contorno o Lagrangeano (2.9) é reduzido a

$$[0] \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = - \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) \cdot \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) = - \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) \cdot \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) = 0, \quad (2.11)$$

Combinando este resultado com a equivalência dada por(2.8), Nós temos

$$-\int_{\Gamma} \left. \frac{\partial \psi}{\partial \nu} \right|_{\Gamma} = -\int_{\Gamma} \left. \frac{\partial \psi}{\partial \nu} \right|_{\Gamma} = \int_{\Gamma} \nabla \psi \cdot \nu, \quad (2.12)$$

e, portanto, como nosso funcional é linear e limitado e pertence ao espaço de funções integráveis ao quadrado, podemos usar o teorema de representação de Riesz para a equivalência de produtos internos para extrair  $\nabla z^-$ , dando-nos

$$\nabla_{2^-}(\cdot) = -\ast(\cdot, 0). \quad (2.13)$$

Para uma derivação detalhada, encaminhamos o leitor para [Kevlahan et al. \(2019\)](#). Utilizamos um algoritmo iterativo de descida mais íngreme para encontrar nosso minimizador ( $\hat{\gamma}$ ) produzindo  $\nabla \mathcal{L}(\hat{\gamma}) \approx 0$ , dado algum palpite inicial ( $\gamma_0$ ). Também usamos um método de descida de gradiente conjugado de Polak-Ribière e descobrimos que os resultados são equivalentes à descida mais íngreme. As etapas do processo em cada iteração são resumidas no algoritmo 1.

### 3. Implementação numérica

Nosso domínio espacial é  $[-1, 1] \times [-1, 1]$ , onde  $\Delta x = \Delta y = 0.3$ . A assimilação é realizada no intervalo de tempo  $[0, 24]$  onde a hora final  $t_f = 24$  é selecionado de forma que não haja efeitos de limite.

Para a discretização espacial, implementamos um esquema de conservação de energia Sadourny de volume finito de diferença finita de segunda ordem em um Cgrid. O esquema de Sadourny garante que essa discretização herde as propriedades de conservação (como conservação de energia ou enstrofia) do sistema original (Sadourny, 1975).

Se o SWE for expresso na seguinte forma equivalente,

$$-\frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \right) = 0 \quad (3.3)$$

$$-\frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \right) = 0 \quad (3.4)$$

$$- + \left( \begin{array}{c} \text{---} \end{array} \right) + \left( \begin{array}{c} \text{---} \end{array} \right) + \frac{1}{2^{2+2}} \frac{1}{2} = 0, \quad (3.5)$$

**Algoritmo 1** Algoritmo de assimilação de dados para estimativa de condições iniciais para o SWE bidimensional.

1: Escolha a estimativa inicial para  $(\theta)$ .

2: Resolva o problema de valor inicial para  $(\theta, \dot{\theta})$  de  $\theta = 0$  para  $\theta = \pi$ .

3: Resolva o problema adjunto para  $(*, *, *)$  para trás no tempo de  $=$  para  $= 0$  encontrar  $*(, , 0)$ .

4: Definir  $\nabla_2 = - * ( , , 0)$ .

5: Calcule o intervalo de tempo ideal na  $i$ -ésima iteração através de um algoritmo de minimização de linha

$$= \operatorname{argmin}_{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^n} \left( \frac{1}{2} \|\mathbf{r}\|^2 - \nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{r}}{2} \right) \right) \quad (3.1)$$

6: Use um algoritmo de descida de gradiente para calcular o palpite para no próxima vez passo

$${}^{(+1)}(\rho, \theta) = {}^{(0)}(\rho, \theta) - \nabla_{2-} {}^{(0)}(\rho, \theta). \quad (3.2)$$

7: Repita até  $\|*(, , 0)\| \approx 0$ .

8: Definir  $(\cdot)(\cdot, \cdot) := (\cdot)(\cdot, \cdot)$ .

Então a discretização

$$- = \frac{1}{2} + \left( \frac{1}{2} + 2\frac{1}{2} \right) \left( - - - \right) \overline{\overline{(1+)}}, \quad (3.6)$$

$$- = \frac{1}{2} \left( + \frac{1}{2} 2 + \frac{1}{2} 2 + - - - \right) \left( \frac{1}{(1+)} \right), \quad (3.7)$$

onde

$$= +1_{-} - 1_{+} \quad (3.8)$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ +1 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad (3.9)$$

garante que a energia total seja conservada, de modo que

$$\begin{aligned}
0 = & \sum_{\substack{1,2,3,4 \\ (1+2-3-4)}} \left[ - + \left( \frac{1}{2} 2^+ + \frac{1}{2} 2^- \right) \cdot (1+ -) \right] \\
& + \sum_{(1+ -)} \left[ - \right] \\
& + \sum_{(1+ -)} \left[ - \right]
\end{aligned} \quad (3.10)$$

onde o operador de diferença de centro escalonado (3.8) e o operador de interpolação linear central (3.9) garantir que as velocidades e e suas derivadas de tempo são discretizadas no centro dos limites da célula, e e e seus derivados estão localizados nos centros das células. As derivações espaciais são discretizadas usando um esquema de diferenças finitas de segunda ordem com condições de contorno periódicas. O sistema é então integrado usando um esquema Runge-Kutta de terceira ordem de quatro estágios (Spiteri e Ruuth, 2002). A resolução é  $128 \times 128$  devido a considerações de custo computacional, pois os requisitos de memória para o solucionador são bastante altos. O passo de tempo  $\Delta t = 1/3$  é escolhido para satisfazer o Courant- condição de Friedrichs-Lewy (CFL) e, posteriormente, as soluções para  $u$ ,  $v$ ,  $\theta$  são  $128 \times 128 \times 193$  matrizes, que precisam ser armazenadas para todos

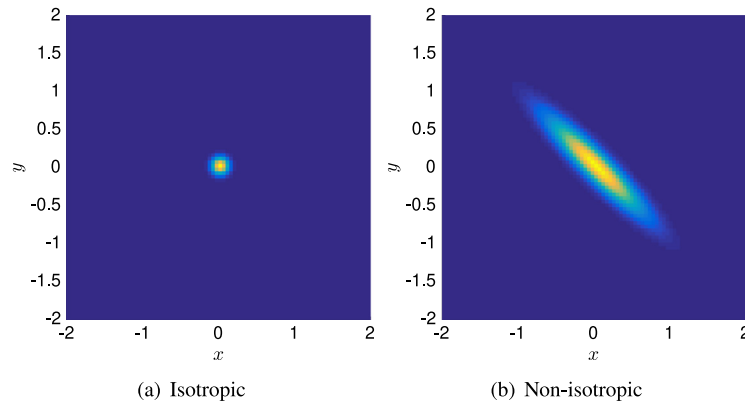


Figura 1. Visão planar das verdadeiras condições iniciais  $(\phi_0)$ .

passos de tempo. A minimização da linha para 3.1s realizados usando a função `Matlabfminunc`.

Consideramos as seguintes condições iniciais gaussianas isotrópicas, onde a gaussiana tem a mesma variância e propriedades físicas em todas as direções,

$$(\phi_0, \psi_0) = \frac{1}{20} \exp\left(-\frac{z^2 + \psi^2}{0.12}\right). \quad (3.11)$$

Para casos onde condições iniciais anisotrópicas são usadas, a variância do gaussiano no e direções é diferente, e o gaussiano foi girado por  $\pi/4$  radianos.

$$(\phi_0, \psi_0) = \frac{1}{20} \exp\left(-\frac{z^2 + (\psi/5)^2}{0.153}\right), \quad (3.12)$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \exp\left(-\frac{z^2 + \psi^2}{0.153}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \exp\left(-\frac{z^2 + \psi^2}{0.153}\right), \quad (3.13)$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \exp\left(-\frac{z^2 + \psi^2}{0.153}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \exp\left(-\frac{z^2 + \psi^2}{0.153}\right). \quad (3.14)$$

Figura 1 mostra as condições iniciais isotrópicas e anisotrópicas. Nos resultados, indicamos uma aproximação desse suporte (domínio espacial onde a condição inicial é diferente de zero) para destacar a posição dos pontos de observação em relação às condições iniciais. Embora as condições iniciais gaussianas não sejam suportadas tecnicamente de forma compacta, elas são, na prática, para simulações numéricas, por exemplo, quando o exponencial é menor que a precisão da máquina.

Os resultados na Seção 4 são para assimilação com batimetria plana  $(\phi_0, \psi_0) = 0$  como em Kevlahan et al. (2019). No entanto, na seção 5 implementamos o algoritmo de assimilação de dados com (i) uma batimetria de forma gaussiana, e (ii) dados batimétricos realistas retirados do banco de dados ETOPO2 para topografia global e batimetria.

### 3.1. teste de verificação

Para verificar nossa implementação numérica, realizamos um teste usando as formas equivalentes para  $(\phi_0, \psi_0)$  usados em nossa derivação, a derivada de Gateaux e o gradiente de Riesz. Se a implementação estiver correta, o parâmetro deve convergir para 1 como  $\epsilon \rightarrow 0$ ,

$$(\phi_0, \psi_0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1 - \langle \phi_0, \psi_0 \rangle - \langle \phi_0, \psi_0 \rangle}{\int_{\Omega} (\phi_0, \psi_0)^2}. \quad (3.15)$$

Os resultados do teste de verificação são mostrados em Figura 2, com uma batimetria diferente de zero.

## 4. Resultados numéricos

A análise para a assimilação de dados bidimensionais é mais complexa do que o caso unidimensional devido à geometria mais complexa das frentes de onda não lineares que se propagam em duas dimensões e ao aumento da complexidade geométrica na colocação da observação

pontos. Com isso em mente, nesta seção exploramos o efeito da configuração e do número de observações na convergência geral das condições iniciais reconstruídas. Classificamos um resultado como convergente se a relação zero é inferior a 10% com base na convergência observada em Kevlahan et al. (2019), observando que todos os resultados onde o critério de distância mínima (4.1) não foi atendido teve um erro relativo de convergência superior a 10% no caso 1-D.

Em Kevlahan et al. (2019), todos os pontos de observação foram localizados em um dos lados da condição inicial de suporte. Na presente análise, consideramos observações em todos os quadrantes do nosso domínio espacial (onde as condições iniciais estão centradas em (0,0)). Notamos que na maioria dos casos nossas condições iniciais são isotrópicas e a propagação da onda subsequente é radialmente simétrica dada uma batimetria plana. Esta propriedade de simetria azimutal não pode ser observada por pontos de observação ao longo das características em um único quadrante sozinho. Isso sugere que para capturar a natureza isotrópica das condições iniciais, pode ser benéfico colocar observações ao longo de um arco do círculo  $z^2 + \psi^2 = (r/2)^2$ , onde  $(r)$  é a posição radial da propagação da onda  $(z, \psi)$  a cada vez  $\in [0, 1]$ . Investigamos qualitativamente essa afirmação analisando os resultados de três configurações de observação. (i) Em uma grade quadrada centrada em (0,0), (ii) ao longo das características  $z = \psi$ , e (iii) em arcos circulares ao longo  $z^2 + \psi^2 = 2$  para  $r = 1, 2$ . Na seção 4.1 nós estendemos a análise para espaçamento de observação do caso unidimensional como em Kevlahan et al. (2019) para cada configuração. Para todos os casos, assumimos a estimativa inicial  $(\phi_0, \psi_0) = 0$ . Na seção 4.2 desenvolvemos os resultados ideais para o espaçamento de observação e investigamos se a convergência melhora ao aumentar o número de pontos de observação. Na realidade, é improvável que haja muitas observações dentro do suporte das condições iniciais de um tsunami. Portanto, também investigamos o efeito da remoção de todos os pontos de observação localizados dentro do suporte de condições iniciais isotrópicas e anisotrópicas na convergência.

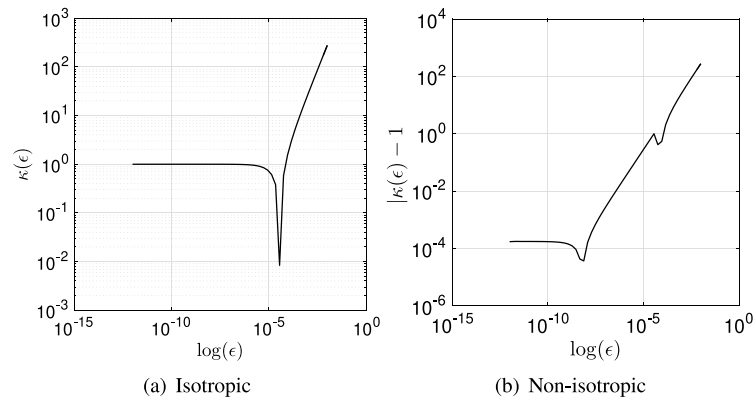
### 4.1. Espaçamento de observação

Para investigar o efeito do espaçamento de observação para a assimilação das condições iniciais bidimensionais, utilizamos os resultados de Kevlahan et al. (2019) como referência. Lembramos que para o assimilação unidimensional, convergência ótima para a verdadeira inicial condições  $(\phi_0, \psi_0)$  ocorre quando pelo menos um par de pontos de observação são espaçados mais próximos do que a metade do comprimento de onda mínimo efetivo do espectro de energia das condições iniciais. Posteriormente dado um par de pontos de observação  $(z_1, \psi_1)$  e  $(z_2, \psi_2)$  nós exigimos

$$|z_1 - z_2| \leq \frac{\lambda}{2}, \quad (4.1)$$

onde  $\lambda$  é o maior número de onda efetivo de  $(\phi_0, \psi_0)$ . Na ausência de um resultado equivalente rigoroso para a assimilação bidimensional, investigamos qualitativamente se a convergência melhora quando (4.1) é satisfeita para os números de onda bidimensionais e  $\lambda$ . Encontrar





**Figura 2.** Teste de verificação para implementação numérica. (a) é o gráfico loglog de  $K(\epsilon)$  como  $\epsilon \rightarrow 0$ , e (b) é a diferença  $|K(\epsilon) - 1|$  como  $\epsilon \rightarrow 0$ .

e, examinamos o espectro de energia das condições iniciais bidimensionais isotrópicas verdadeiras. Observamos que os modos de  $\geq 40$  têm magnitudes relativamente desprezíveis e, portanto,  $\approx 40$  é uma boa aproximação. Assim, a distância entre pelo menos dois pontos de observação deve ser inferior a 0,0785.

No caso unidimensional, pelo menos um par de pontos foi necessário para satisfazer (4.1). No entanto, pode ser que um maior número de pontos que satisfaçam esta condição esteja correlacionado com uma melhor convergência no caso bidimensional, devido à necessidade de resolver a forma bidimensional das condições iniciais (eg simetria azimutal). Para investigar isso, comparamos os resultados com diferentes espaçamentos de observações  $\Delta x = \Delta y$  (para as configurações de arco) em uma grade, ao longo de características  $\pm x$ , e em arcos radiais centrados nas condições iniciais. Também investigamos a convergência com diferentes números de observações emparelhadas com uma distância euclidiana cumprindo (4.1). Começamos com observações ao longo de linhas características  $\pm x$ .

#### 4.1.1. Observações ao longo da característica $\pm x$

Para este caso, escolhemos inicialmente  $N = 36$ . Essa escolha inicial de  $N$  é maior do que os considerados em Kevlahan et al. (2019) onde  $N \leq 5$  foi considerado. No entanto, dada a maior dimensionalidade do problema bidimensional, aumentamos nossa escolha inicial de  $N$ . Avaliamos resultados para  $\Delta x = 0,07, 0,0785, 0,1$ , e  $0,2$ . Esses valores foram escolhidos para incluir casos tanto quando (4.1) é satisfeita e quando é violada. Como as observações são colocadas ao longo da característica  $\pm x$ , a distância euclidiana entre os pontos é  $\Delta x \sqrt{2} = \Delta x \sqrt{2}$ . Comparando distâncias pareadas entre quaisquer dois pontos de observação na configuração, observamos que pelo menos 8 de um total de  $36(36 - 1)$  observações emparelhadas têm uma distância euclidiana inferior a 0,0785 para  $\Delta x = 0,07, 0,0785$ , e  $0,1$ . Não há pares satisfatórios (4.1) para  $\Delta x = 0,2$ .

As configurações características podem ser vistas em Fig. 3(a), (b), (c) e (d). O círculo vermelho representa o limite da condição inicial. É uma representação aproximada destinada apenas para referência, e a região real onde  $\phi \neq 0$  pode ser um pouco maior, e corresponde a Figura 1. As configurações em 3(a), 3(b) e 3(c) satisfazem (4.1), e as de 3(d) não. Queremos determinar se a convergência é pior onde o espaçamento é maior que 0,0785.

Os resultados de convergência para ambos os casos são dados em 3(e), o parente zero na reconstrução após 1000 iterações. Observamos que o assim com lação beira para o trio 185 é os casos com  $\Delta x \leq 0,07$ . Como 0,07

apenas um  $N$  estimativa do mínimo  $N$  agindo, é  $N = 36$  e não surpreende que o leve  $N$  maior 0.1 caso também convergir. Lá eu  $N$  não significa não pode diferir  $N$  entre no terceiro e os casos a  $N$  erro ou é reduzido para  $N = 3$ . Como sempre, o caso  $N$  configuração  $N$  com  $\Delta x = 0,2$  falha converter  $w$ . Esses resultados confirmam a condição (4.1) e daí os mínimos são consistentes com o mínimo  $N$  para a teorizar estou em Kevlahan et al. (2019), a  $N = 0$ . 2 foi o  $N$  único caso onde lá  $N$  não há pares de observações com um euclidiana distância menos que 0,0785. para análise a delicadeza do caso  $N$  convergência, nós consideramos deferido

o relativo zero para uma faixa estendida de  $\Delta x$ , e observou que o erro com espaçamento das observações tal que  $0,1 < \Delta x \leq 0,2$  ainda convergiu apesar de ter um erro maior em comparação com  $\Delta x \leq 0,1$ , e nenhuma configuração com  $\Delta x \geq 0,2$  alcançou a convergência do zero inferior a 10%.

Observamos que a colocação ao longo das características em todos os quatro quadrantes parece capturar suficientemente a simetria radial da propagação da onda e reconstruir as condições iniciais com precisão. Verificamos se esses resultados consideram observações colocadas em uma grade e ao longo de círculos concêntricos centrados nas condições iniciais.

#### 4.1.2. Observações em uma formação de grade

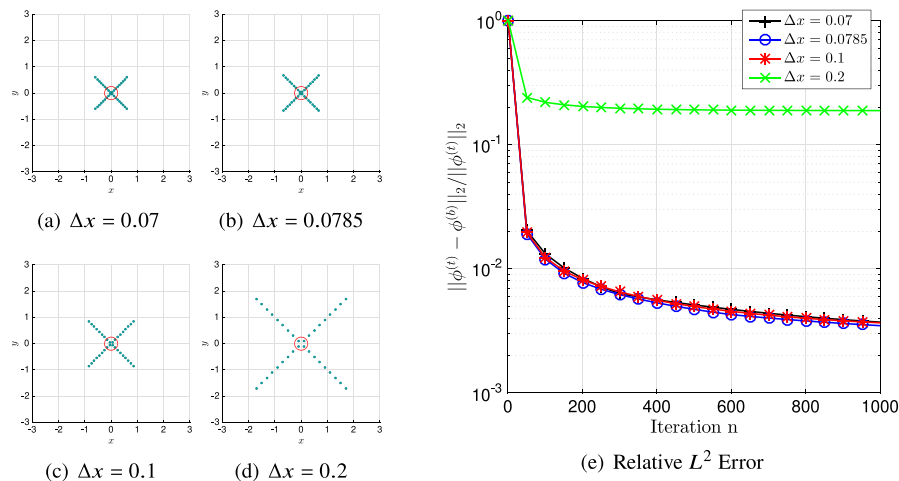
A segunda configuração de pontos de observação que consideramos é um layout de grade no avião. Para manter a comparação com a configuração característica, escolhemos inicialmente  $N = 62$ , e as observações são organizadas em uma grade quadrada de seis por seis centrada em (0,0). Essas configurações são apresentadas em Fig. 4(a), (b), (c) e (d) com os mesmos valores de  $\Delta x$  quanto ao caso característico. A tendência na diminuição do erro relativo ao longo 1000 iterações são apresentadas em Fig. 4(e).

Podemos ver que, como na configuração característica, os resultados das observações em uma configuração de grade mostram uma convergência crescente para zero à medida que o espaçamento entre os pontos de observação adjacentes no e  $x$  e  $y$  as direções diminuem. Mesmo a configuração de pior desempenho 4(d) tem um erro relativo na iteração final de  $\approx 10^{-2}$ . Isso sugere que, dados os critérios de convergência de um zero menor que 10%, cada espaçamento considerado na Fig. 4 convergências, embora seja claro os valores mais baixos  $\Delta x = 0,07$  e  $\Delta x = 0,0785$  desempenho melhor por uma ordem de grandeza. Mais uma vez, notamos que essas configurações tiveram 64 observações par a par satisfazendo (4.1), enquanto os com  $\Delta x = 0,1$  e  $\Delta x = 0,2$  não tinham nenhum, confirmando a hipótese de que (4.1) é uma condição suficiente para convergência com uma configuração de grade, para o caso bidimensional. Enquanto a convergência com  $\Delta x = 0,07$  é marginalmente melhor para a configuração de grade do que para a configuração característica, ambos são  $\approx 10^{-3}$  e podemos considerá-los equivalentes em desempenho até agora. Notamos que esses resultados também são consistentes com o teorema unidimensional em Kevlahan et al. (2019).

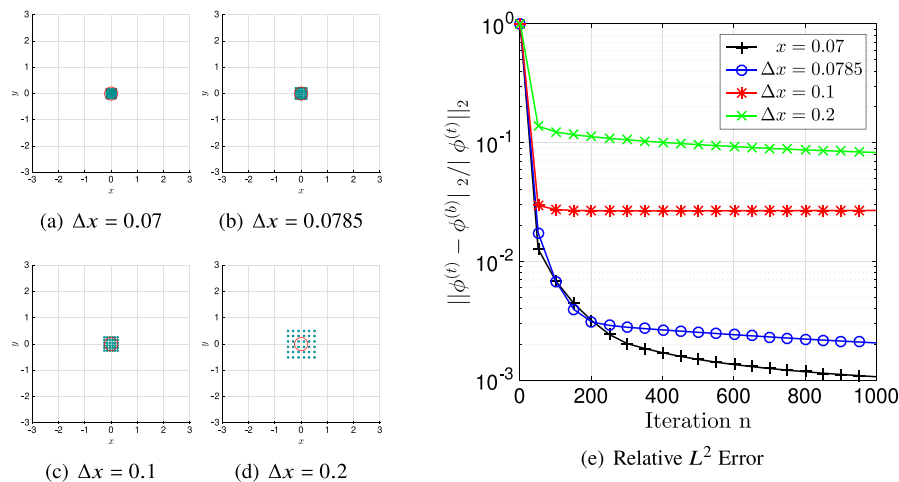
Deve-se notar, no entanto, que em Fig. 4, a maioria das observações são colocadas dentro do suporte das condições iniciais. Isso é consequência de ter uma grade centrada nas condições iniciais suportadas com apenas  $N = 36$  espaçamento pequeno  $\Delta x$  entre observações adjacentes. Consequentemente na Seção 4.2 investigamos o efeito de aumentar o número de pontos de observação e, posteriormente, na Seção 4.3 o efeito de remover todos os pontos que estão nas condições iniciais de suporte.

#### 4.1.3. Observações ao longo de arcos

Observações atuais usadas para detecção e previsão de tsunamis, como boias DART, geralmente são dispostas em uma formação semelhante a um arco ao longo da costa (González e cols., 1998). Portanto, consideramos uma circular



**Figura 3.** Observações ao longo das características  $\pm$  com espaçamento variável tal que  $\Delta x = 0.07, 0.0785, 0.1, 0.2$ . Os círculos verdes representam os pontos de observação, e a área dentro do círculo vermelho aproxima o suporte das condições iniciais. O tempo de assimilação é  $t \in [0, 2]$ . (d) mostra a convergência da função de custo após 1000 iterações e (e) representa o relativo erro na reconstrução das condições iniciais. Notamos que a configuração (d) com  $\Delta x = 0.2$  não consegue convergir.



**Figura 4.** Configuração da observação em formato de grade com espaçamento variável tal que  $\Delta x = 0.07, 0.0785, 0.1, 0.2$ . (d) mostra a convergência da função de custo após 1000 iterações e (e) representa o relativo erro na reconstrução das condições iniciais. Todas as configurações convergem (erro menor que 10%), porém é marginal para (d).

configuração de arco para observações, como mostrado em Fig. 5 (de Anúncios). Os pontos de observação são colocados ao longo de dois círculos concêntricos  $2\pi \pm 2$  para  $\Delta x = 1, 2$ . Variamos o espaçamento  $\Delta x = |1 - 2|$  de tal modo que Figs. 5(a) e 5(b) satisfazem (4.1) e Figs. 5(c) e 5(d) não, semelhante às configurações características e de grade.

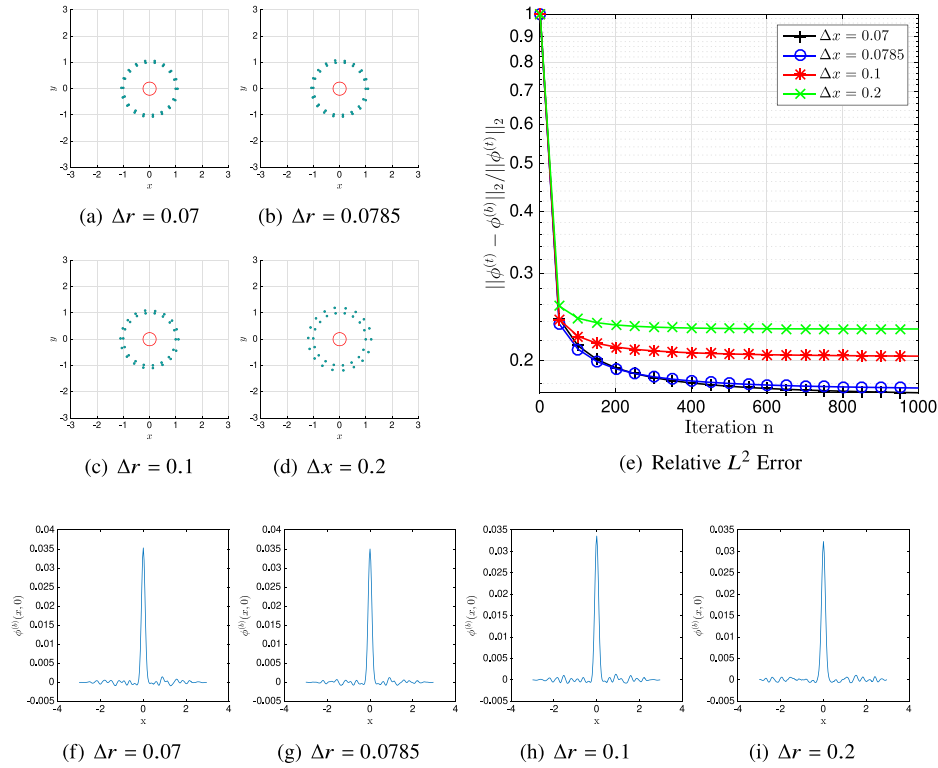
Nós observamos em Fig. 5(e) que o erro não converge para nenhum dos valores de  $\Delta x$  considerado, e é  $\sim 10^{-1}$ . Isto apesar do fato de que existem 14 observações por  $\Delta x$  satisfazendo (4.1) para  $\Delta x = 0.07$  e 8 pares para  $\Delta x = 0.0785$ . Apresentamos as condições iniciais reconstruídas para cada  $\Delta x$  em Fig. 5(f)–(i). Observamos que em cada caso, o gaussiano exato não é resolvido e a amplitude é significativamente menor do que a verdadeira. Além disso, a reconstrução não é estável.

Em nossa observação, o espaçamento entre os pontos de observação ao longo das características é muito grande para capturar a propagação radial da onda de superfície livre em todas as direções, no entanto, o teste resulta em uma configuração de arco, ou no número de observações por  $\Delta x$  satisfazendo (4.1) está bem próximo ao número necessário para a convergência. Isso sugere que o número de observações por  $\Delta x$  é muito pequeno para capturar a propagação radial da onda de superfície livre em todas as direções, no entanto, o teste resulta em uma configuração de arco, ou no número de observações por  $\Delta x$  satisfazendo (4.1) está bem próximo ao número necessário para a convergência. Isso sugere que o número de observações por  $\Delta x$  é muito pequeno para capturar a propagação radial da onda de superfície livre em todas as direções, no entanto, o teste resulta em uma configuração de arco, ou no número de observações por  $\Delta x$  satisfazendo (4.1) está bem próximo ao número necessário para a convergência.

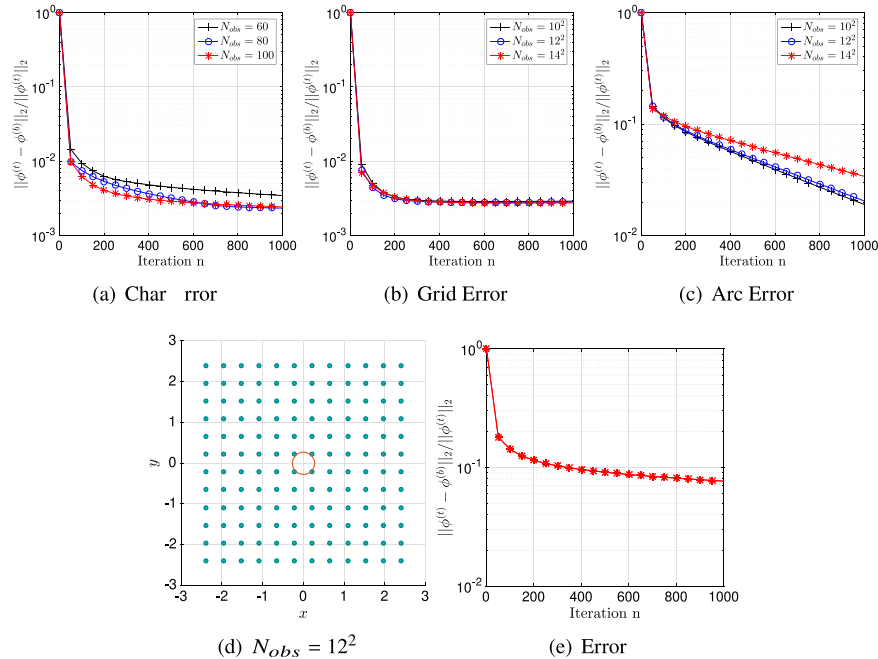
#### 4.2. Resultados com grande ou pequeno número de observações

Nesta seção, observe a convergência da assimilação quando o número de pontos de observação é grande ou pequeno para as configurações de característica, grade e arco, respectivamente. O espaçamento  $\Delta x$  é fixado no caso de melhor desempenho considerado na Seção 4.1 ( $\Delta x = 0.07$  ou  $\Delta x = 0.0785$ ). Primeiro mostramos a convergência para grandes  $N$ , e, posteriormente, investigamos o número mínimo de observações necessárias para a convergência. Para as configurações de grade e arco, inicialmente consideramos  $N = 10, 12, 14$  respectivamente, com  $\Delta x = 0.07$ . Para a configuração característica que escolhemos  $N = 60, 80, 100$  e  $\Delta x = 0.0785$ . Os valores comparativamente menores para a configuração característica devem-se ao fato de que exigimos todos os pontos de observação para interagir com a propagação da onda no tempo de assimilação, e isso não seria possível para valores maiores de  $N$  colocado ao longo das características.

Os resultados para a convergência do erro dada uma configuração característica das observações são apresentados em Fig. 6(a). Observamos que o erro de reconstrução relativo não muda significativamente com o número de pontos de observação, e é  $\sim 10^{-3}$ . Notamos que o mesmo nível de convergência foi alcançado com apenas 36 observações, como visto



**Figura 5.** Observações ao longo dos dois círculos concêntricos  $z = \pm 1$ , com espaçamento entre círculos  $= |1 - z| = 36$ . (d) mostra a convergência da função de custo após 1000 iterações e (e) representa o relativo erro na reconstrução das condições iniciais. (f)-(i): Seções transversais das condições iniciais reconstruídas em  $z = 0$  para casos em Fig. 5 com espaçamento  $= |1 - z| = 36$ . Observamos que o pico do gaussiano não está totalmente resolvido (a amplitude real é 0,05) e há ruído de pequena escala na reconstrução para todos os casos.



**Fig. 6.** (a)-(c) apresentam a convergência do relativo erro com aumento do número de pontos e  $\Delta r = 0.0785$  para cada configuração de observações. (d) mostra uma formação de grade com maior número de pontos e  $\Delta r = 0.44$ , e (e) destaca a não convergência do relativo erro.

em Fig. 3(e), o erro é menor quando o número de pontos é maior. Isso ocorre porque, com mais pontos, a reconstrução da função de custo é mais precisa. No entanto, a convergência do erro relativo não muda significativamente para o número de pontos considerado aqui, o que é consistente com os resultados de Fig. 6(e).

O erro de convergência do relativo erro para observações em um grid com  $N_{obs} = 12^2$  é de aproximadamente 0,44, conforme mostrado em Fig. 6(b). Isso indica que a assimilação não converge para este número de pontos.

Assim como na configuração característica, observamos que a convergência do erro relativo não muda significativamente para o número de pontos considerado aqui, o que é consistente com os resultados de Fig. 6(e). Para determinar se ter um número de pontos maior é uma condição suficiente para a convergência, nós observamos os resultados onde  $N_{obs} = 122$ , mas  $\Delta r = 0.44$ . Vemos de Fig. 6(e) que a assimilação não converge e, portanto, grandes



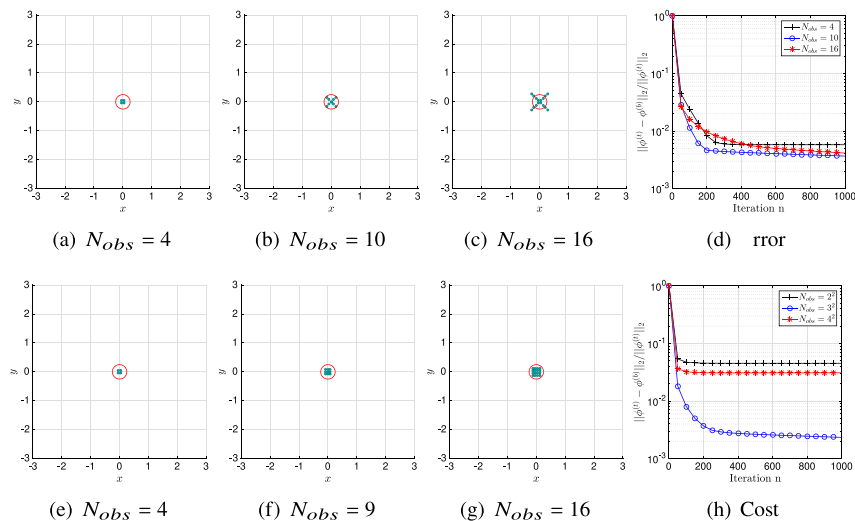


Figura 7.(a)–(d) Formação de características, e (e)–(h) Formação de grades, com um pequeno número de pontos e  $\epsilon=0.0785$ .

não é uma condição suficiente para a convergência. Para verificar se é uma condição necessária para a convergência, exploramos resultados quando é pequeno, na Seção 4.2.1.

Nós observamos em Fig. 5 que, ao contrário das configurações de característica ou grade, os resultados para a configuração do arco falharam em convergir para todos os espaçamentos. Consequentemente, seria de grande interesse ver se esses resultados podem ser melhorados aumentando-se. Apresentamos as configurações para  $\epsilon=102, 122$ , e  $142$  em Fig. 6(c). O relativo zero converge para  $\approx 10^{-2}$  para cada valor de  $\epsilon$  e consequentemente todos os três casos são convergentes. Este resultado sugere que uma rede relativamente maior de observações é necessária para resolver completamente as condições iniciais para configurações de arco. Uma verificação rigorosa seria analisar resultados com valores maiores de  $\epsilon > 0.2$ . No entanto, isso não é possível com nossa configuração de problema atual, pois é um caso em que ambos  $\epsilon$  (ou  $|\epsilon|$ ) com um único arco circular) são grandes o suficiente para que nenhum ponto satisfaça (4.1), resultaria em algumas observações não interagindo com a onda de superfície livre no tempo de assimilação  $\approx 2$ . Como este último foi escolhido para evitar que efeitos de contorno afetem a reconstrução, ele não pode ser alterado sem impactar os resultados.

#### 4.2.1. Resultados com pequenos

Nesta seção, investigamos o número mínimo de pontos de observação necessários para a convergência. Mostramos que quando  $\epsilon$  é grande (maior que 60), aumentar o número de pontos não tem um impacto significativo na convergência do erro mínimo relativo para as configurações de característica e grade. Agora consideramos os resultados quando  $4 \leq \epsilon \leq 16$ , para determinar se há um aumento significativo na relação erro de reconstrução quando  $\epsilon$  é pequeno. nós não consideramos  $\epsilon=1, 2$ , ou  $3$  como o menor número de pontos que podemos ter enquanto ainda temos pontos posicionados em cada quadrante (para capturar a simetria azimutal das condições iniciais) é 4.

Para  $\epsilon=4$ ,  $10$ , and  $16$  (o espaçamento  $\epsilon=0.0785$  é apresentado em Fig. 7(a)–(d)). Nós observamos que o erro mínimo relativo é  $\approx 1\%$  focado a  $\epsilon=4$  antes de nós concluirmos que a configuração de pontos necessários para a convergência é  $\epsilon=4$ .

Resultados para observações em uma configuração de grade para  $\epsilon=22, 32$ , e  $42$  são apresentados em Fig. 7(eh). Observamos que o parente zero para todas as três configurações converge. Configurações com  $22$  e  $42$  têm um erro mínimo relativo de  $5\%$  e  $3\%$  respectivamente. O melhor desempenho é para  $\epsilon=32$ , com um erro mínimo relativo de  $2\%$ , suggesting that convergence is not necessarily improved with increasing  $\epsilon$ , e um pequeno número de pontos é suficiente para a convergência.

Resumindo, demonstramos que a convergência pode ser alcançada para as configurações características e de grade com um número relativamente pequeno de pontos, e não melhora necessariamente conforme  $\epsilon$  está melhorado. E assim concluímos que, com base nos resultados até agora, ter um grande número de pontos de observação não é necessário nem suficiente para convergência com observações em uma grade ou ao longo de duas características.

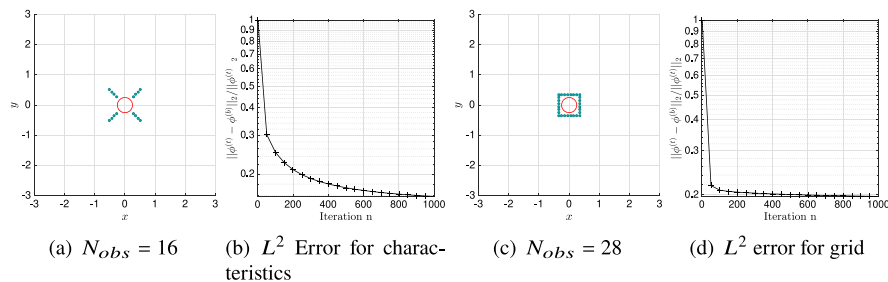
Nos resultados observados até aqui, notamos que para todos os casos que convergem (como em Fig. 7), houve múltiplas observações dentro do suporte das condições iniciais. No entanto, não havia pontos dentro das condições iniciais de suporte para a configuração do arco. Consequentemente, devemos considerar se a convergência pode ser alcançada para as características e configurações da grade quando não há pontos de observação dentro do suporte das condições iniciais. Em modelos de tsunami, não é realista supor que tais observações estejam disponíveis e, portanto, um esquema de previsão logisticamente aplicável deve evitar tais suposições. Os resultados desta análise são apresentados na Seção 4.3.

#### 4.3. Resultados sem observações dentro do suporte das condições iniciais

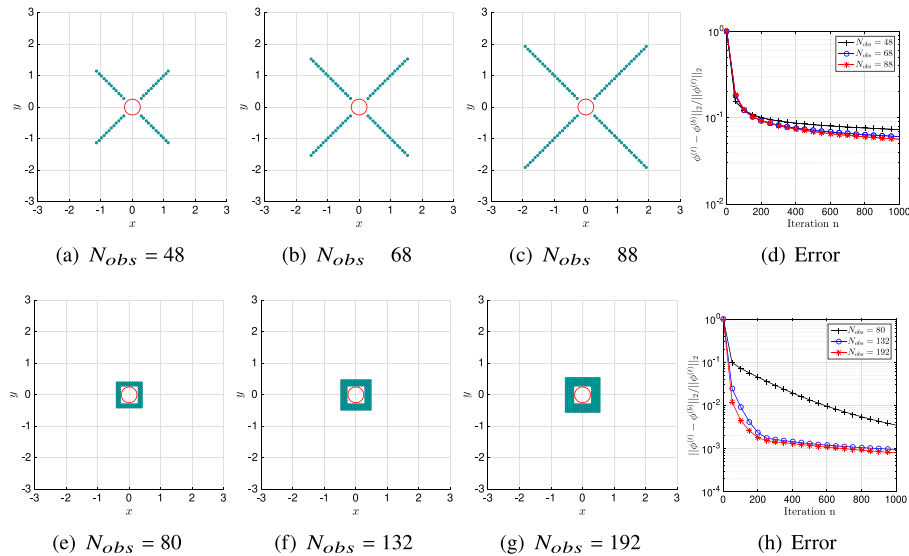
Nesta seção, apresentamos resultados para as configurações de característica e grade, com pontos dentro das condições iniciais de suporte removidos. O espaçamento  $\epsilon$  é fixado no valor suficiente para a convergência de  $0.07$ . Como a remoção desses pontos resulta em valores menores de  $\epsilon$ , o número inicial de pontos antes da remoção é aumentada ligeiramente para que o número restante de pontos de observação seja comparável aos resultados na Seção 4.2. Primeiro, consideramos resultados para pequenos números de pontos de observação, tais que  $\epsilon=0.07$ , e não há pontos dentro do suporte da condição inicial, em Fig. 8.

Observamos que mesmo com  $\epsilon=28$ , a configuração em Fig. 8(c) (com observações em uma grade) não converge quando não há pontos no suporte das condições iniciais, apesar de terem convergido quando  $\epsilon=4$  em Fig. 7(e). Da mesma forma, uma configuração de 16 observações em características  $\pm$  falha em convergir quando não há uniões dentro do suporte das condições iniciais, conforme mostrado em Fig. 8(a). Consequentemente, investigamos se a convergência pode ser alcançada quando  $\epsilon$  é relativamente grande.

Fig. 9(a)–(d) mostra as configurações e os resultados das observações juntamente com as características, com  $\epsilon=48, 68, 88$  (após a remoção). O relativo zero na iteração final para cada caso é de aproximadamente  $7\%$ , conforme mostrado na Fig. 9(d). Notamos que o erro é de quase duas ordens de magnitude maior do que em Fig. 6(a). Esses resultados não são surpreendentes, pois ter observações capazes de medir as verdadeiras condições iniciais pode melhorar significativamente as condições iniciais reconstruídas. Portanto, é de se esperar que a convergência seja ligeiramente



**Figura 8.** Convergência do relativo zero para observações em uma (a) configuração característica, e (b) configuração de grade, com pequenas  $\epsilon = 0.07$ , e pontos dentro do suporte das condições iniciais removidas.



**Figura 9.** (a)-(d): Configuração característica, e (e)-(h) Configuração da malha com pontos dentro do suporte das condições iniciais removidas.

pior quando tais observações não são mais incluídas na assimilação. Porém com base na tolerância que o parente 2Se o erro for inferior a 10%, esses resultados ainda são convergentes.

As configurações e o resultado das observações em formato de grade são apresentados em Fig. 9(Eh). Notamos algumas diferenças significativas entre os resultados aqui e aqueles em Fig. 6(b). Em primeiro lugar, fica claro a partir Fig. 9(h) que há convergência melhorada para casos com  $N_{obs} > 80$ , sugerindo que o número de observações é um fator importante quando não temos observações que suportem as condições iniciais. Em contrapartida, os resultados em Fig. 6(b) não indicou diferença na convergência para os diferentes valores de  $\epsilon$ . Em segundo lugar, a melhor convergência em Fig. 9 (h) é um parente zero de aproximadamente 0,1%, indicando melhor convergência do que o observado em Fig. 6(b), apesar de o número total de observações ser comparável. É interessante notar que em Fig. 6 (b) o erro estagnou por aproximadamente 40 iterações. Esse sugere que isso se deve ao overfitting, pois os resultados em escala não foram reconstruídos a partir de condições iniciais, mas sim a partir de observações de pontos dentro do suporte das condições iniciais. A convergência de um algoritmo de descent sobre os dados de assimilação. Em comparação, em Fig. 9(h) o erro converge mais rapidamente para zero, o que sugere que a convergência é melhor. Para verificar essa hipótese, Fig. 10 mostra os espectros de energia do relativo erro absoluto das condições iniciais construídas para configurações 6(b) e 9(h) com  $N_{obs} = 144$  e  $N_{obs} = 132$  respectivamente.

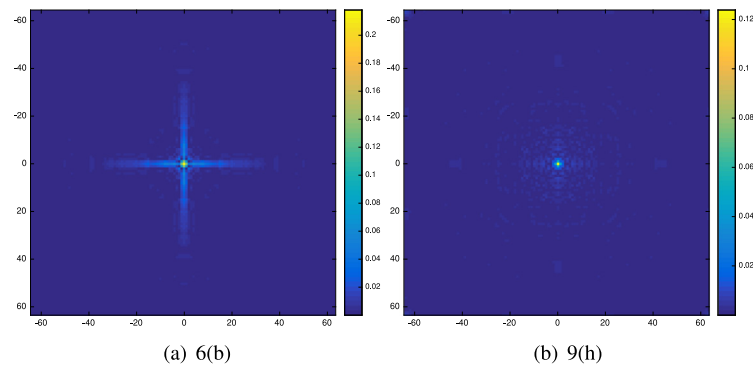
Cum se sabe que a energia de maiores ondas é reconstruída a partir de condições iniciais, e a energia de menores ondas é reconstruída a partir de observações, a hipótese de que a convergência é melhor para a configuração de grade (Fig. 9(h)) é verificada. A hipótese de que a convergência é melhor para a configuração de grade (Fig. 9(h)) é verificada. A hipótese de que a convergência é melhor para a configuração de grade (Fig. 9(h)) é verificada.

energia do espectro de erro para configuração 9(h) é principalmente restrito a números de onda menores. Isso pode explicar porque este último mostrou convergência do zero para 0,1% enquanto o primeiro convergiu para 0,3%.

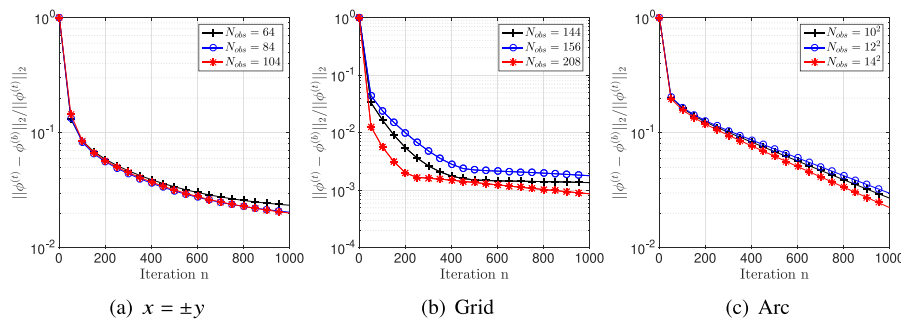
Em resumo, concluímos que uma condição necessária (mas não suficiente para todas as configurações) para a convergência é que a distância euclidiana entre algumas observações pareadas satisfaça a condição (4.1). As configurações convergentes para a configuração da grade em Fig. 4 tiveram 64 observações pareadas satisfazendo a condição de espaçamento (4.1), enquanto os casos não convergentes com espaçamento  $\geq 0.1$  não tinham nenhum. Da mesma forma, as configurações de arco não convergentes em Fig. 5 tinham no máximo 14 observações pairwise com uma distância euclidiana inferior a 0,0785. Isso pode sugerir que há um número mínimo de observações emparelhadas necessárias para satisfazer a condição de espaçamento (4.1). No entanto, como o espaçamento mínimo observado nesta análise é uma qualidade estatística e não derivada analiticamente, não podemos determinar conclusivamente o número mínimo de observações com base neste valor alone.

Adicionalmente, observamos que um número muito maior de observadores é necessário para a convergência na configuração do arco, e isso também é verdade para a configuração da grade quando as observações dentro do apoio das condições iniciais foram removidas. De fato, descobrimos que o erro de assimilação foi menor na configuração da grade quando não havia observações dentro do suporte das condições iniciais. Isto é provavelmente devido ao overfitting gerando ruído de pequena escala nas condições iniciais reconstruídas, como mostrado em Fig. 10.

To estender esses resultados para condições mais realistas, realizamos equidistantes com as condições iniciais anisotrópicas dadas em (3.12).



**Figura 10.** Espectro de energia do erro  $\|(\phi - \phi^0)/\phi^0\|_2$  para as configurações de grade em 6(b) (pontos dentro do suporte de  $\phi$ ) e 9(h) (nenhum ponto dentro do suporte de  $\phi$ ) com  $N_{obs} = 144$  e  $N_{obs} = 132$  respectivamente.



**Figura 11.** Convergência do zero com condições iniciais anisotrópicas, com pontos dentro do suporte das condições iniciais removidos, para cada configuração de observação e  $\epsilon = 0.07$ .

#### 4.4. Resultados para condições iniciais anisotrópicas

Observamos convergência para cada uma das configurações de pontos de observação consideradas neste estudo (característica, grade e arco) variando o espaçamento entre as observações e o número de pontos de observação. Também demonstramos convergência mesmo quando não há observações dentro do suporte das condições iniciais. Agora verificamos se a convergência ainda é alcançada com condições iniciais anisotrópicas. Nosso objetivo é investigar a observabilidade em pontos de medição quando a onda de superfície não é mais azimutalmente simétrica, e contrastar com resultados para condições iniciais gaussianas isotrópicas. Nosso objetivo é fornecer resultados mais comparáveis com cenários realistas para observações de tsunamis, onde tanto as condições iniciais quanto a batimetria produzem ondas de superfície altamente anisotrópicas.

Resumidamente, descobrimos que não houve impacto significativo na convergência com condições iniciais anisotrópicas (como dado em (3.12)), em comparação com os resultados na Seção 4.3. A convergência do relativo zero para cada uma das três configurações é apresentado em Fig. 11. Observamos que a convergência da relativa zero para as configurações de arco e característica é  $-(10^{-2})$ , e há pouca diferença entre os resultados com diferentes valores de  $N_{obs}$ . A convergência para a configuração da grade é  $-(10^{-4})$  com  $N_{obs} = 208$ , e  $-(10^{-3})$  para os outros valores de  $N_{obs}$ .

##### 4.4.1. Resumo dos principais resultados para configurações de observação (batimetria plana)

Em resumo, os principais resultados que observamos são os seguintes:

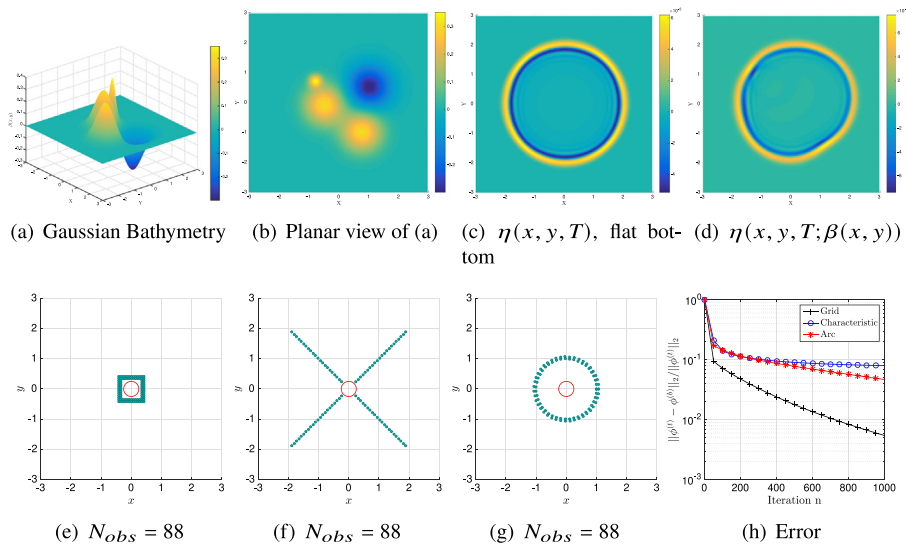
- A convergência foi alcançada (um parente zero menos than um 10%) para cada um dos três tipos de configuração tanto com isotrópico quanto com condições iniciais anisotrópicas respectivamente.
- O melhor local de observação convergente em uma griforização. Mesmo com o número de pontos dentro da inicial condições sapoia, o parente zero de observação erro de reconstrução era 0,1% com isotrópico e anisotrópico.

condições iniciais. A convergência foi alcançada para as configurações de característica e grade com apenas 4 pontos de observação, o número mínimo necessário para capturar a simetria azimutal das condições iniciais.

- Uma condição necessária para a convergência era que o espaçamento para configurações de grade e característica ser escolhido de modo que pelo menos algumas observações pareadas satisfizessem (4.1). No entanto, a convergência não foi alcançada para a configuração do arco mesmo com pequenas (a diferença entre os raios das observações colocadas em dois círculos concêntricos), sugerindo que esta não é uma condição suficiente para a convergência, ou há um número mínimo de observações aos pares com uma distância euclidiana satisfatória (4.1), que a configuração do arco não satisfaz (tendo apenas 14 tais pontos, enquanto os resultados convergentes para as configurações de grade em Fig. 4 teve 64 dessas observações pareadas).
- Aumentar o número de pontos de observação melhorou a convergência da configuração do arco, mas teve pouco efeito na grade e nas configurações características quando havia pontos colocados dentro do suporte das condições iniciais. No entanto, sem nenhuma observação em apoio às condições iniciais, um número maior de observações resultou em uma melhor convergência com a configuração da grade, e até superou a convergência alcançada no primeiro caso (pontos dentro das condições iniciais de suporte). Isso sugere que observações das verdadeiras condições iniciais podem levar a overfitting e ruído de pequena escala na reconstrução, como demonstrado em Fig. 10.

#### 5. Resultados com batimetria diferente de zero

E agora considere resultados para simulações onde a batimetria não é plana. A batimetria pode ter um significativo impacto na propagação de ondas de água, onde a velocidade da onda  $c = \sqrt{gH}$  muda como a profundidade  $H$  varia. O fluxo de energia de um tsunami permanece relativamente constante e, assim como a velocidade do tsunami varia, também varia a altura da onda (efeitos de cardume).



**Figura 12.**(a)–(b): Batimetria gaussiana com 3 picos e uma bacia conforme descrito em(5.1). O eixo representa a amplitude da batimetria em relação à profundidade média, que foi normalizado para =1.Vista plana da onda de superfície livre (c) sem batimetria e (d) com batimetria fornecida em(5.1)na hora final, mostrando o efeito da batimetria na distorção da onda de superfície. (e)–(h): Resultados com batimetria gaussiana. Observe que a configuração em (f) não pode mais ser referida como observações colocadas ao longo das características, pois elas não são mais características da onda distorcida.

O objetivo desta seção é pegar os melhores resultados observados até agora e integrá-los em um modelo mais realista, adicionando algumas características de um modelo operacional de previsão de tsunamis. Para isso, limitamos nossos resultados a  $N_{obs} = 88$ . Embora tenhamos observado maior convergência com um maior número de (por exemplo em Fig. 9(h)), há dificuldades práticas em empregar redes de observação tão densas. Portanto, limitamos o número máximo de locais de observação, com base na convergência do relativo zero para  $(-10^{-2})$  nas condições iniciais a reconstrução foi conseguida com  $\leq 88$  pontos em cada uma das três configurações consideradas neste estudo.

Começamos com um modelo simples de batimetria gaussiana simulando picos e bacias e, posteriormente, estendemos nossa análise a uma subamostra de ETOPO2, um banco de dados digital de elevação terrestre e topografia do fundo do mar, onde o datum representa o desvio vertical em metros do nível médio do mar.

### 5.1. batimetria gaussiana

Nesta seção analisamos resultados com a batimetria gaussiana descrita por

$$\begin{aligned} \eta(x, y) = & \frac{3}{10} \exp \left[ -\frac{((+0.5)_x + (+0.1)_y)^2}{0.652} \right] \\ & - \frac{3}{10} \exp \left[ -\frac{((-1)_x + (-0.5)_y)^2}{0.72} \right] \\ & + \frac{3}{10} \exp \left[ -\frac{((-0.75)_x + (+1)_y)^2}{0.652} \right] \\ & + \frac{3}{10} \exp \left[ -\frac{((+0.8)_x + (-0.7)_y)^2}{0.22} \right] \end{aligned} \quad (5.1)$$

onde uma representação é dada em Fig. 12. Esta forma foi escolhida porque contém picos Gaussianos que são 30% da profundidade média e com larguras variadas, simulando montanhas subaquáticas. Além disso, um Gaussiano negativo representa uma bacia, e todos os recursos são colocados de forma que haja mudanças relativamente rápidas na profundidade, dentro do canal de onda. Telesouvidade de e trvetatinal viganista dno s eu s definir para 001, eu não rdert o accurately simulatet sunsoic ondção sw definir a amplitude do es urfás caeu em deep ocean can ser justa alguns metros (depriming sobre o e generating mechanén).

Demonstramos o efeito da batimetria na propagação da superfície livre em Fig. 12, onde Fig. 12(c) é a onda de superfície livre  $(\eta, \zeta) = 0$  com uma batimetria de fundo plano, e Fig. 12(d) é a superfície livre  $(\eta, \zeta) = 0$  com a batimetria dada em (5.1).

Nós observamos em Fig. 12(d) que devido aos efeitos da batimetria não temos mais simetria azimutal na propagação da onda de superfície livre, e a amplitude da onda é maior em posições próximas a  $(-1, 1)$  e  $(-3, -3)$ . Isso sugere a influência dos picos em Fig. 12(a). Da mesma forma, a amplitude da onda é ligeiramente amortecida no primeiro quadrante, indicando o efeito da bacia.

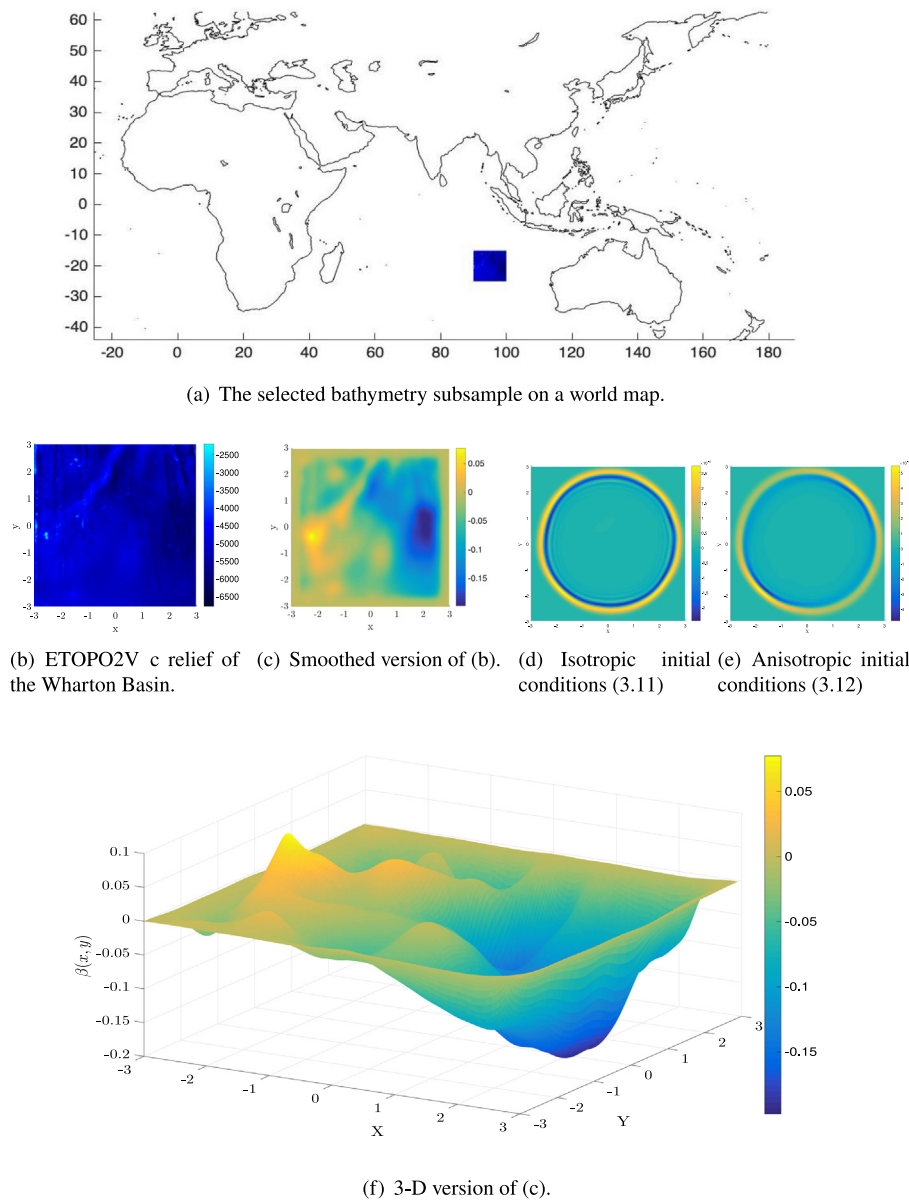
Os resultados com condições iniciais isotrópicas (e nenhum ponto dentro das condições iniciais suportadas) são mostrados em Fig. 12(h). Notamos que as observações colocadas ao longo das linhas  $\pm 45^\circ$  não podem mais ser referidas como observações colocadas ao longo das características, pois estas não são mais características da onda distorcida, devido aos efeitos da batimetria. No entanto, incluímos a configuração para demonstrar a convergência quando as observações são colocadas ao longo das linhas.

Em cada caso temos  $N_{obs} = 88$  e  $\epsilon = 0.07$ . Observamos que a configuração da grade tem a melhor convergência do relativo zero, a 0,5%. Os resultados para a configuração linha e arco também convergem, porém com erro maior de 5%. Há uma diminuição relativa na convergência em comparação com os resultados de uma batimetria de fundo plano, conforme mostrado na Seção 4.3. Isso provavelmente se deve ao fato de que não há mais simetria azimutal na propagação da onda de superfície e nem todos os pontos de observação são capazes de capturar a interação da onda de superfície livre com a batimetria localizada. Apesar disso, notamos que os resultados para cada caso convergem. Isso é encorajador, considerando que nossos resultados incluíram efeitos de características batimétricas localizadas com amplitudes de até 30% da profundidade do fluido. Outra razão possível para a convergência é que a amplitude das condições iniciais é relativamente pequeno, o que atenuaria os efeitos de quebra de onda que poderiam impedir a convergência.

Agora investigamos se resultados semelhantes podem ser observados com batimetria realista.

### 5.2. Batimetria ETOPO2

ETOPO2 é um banco de dados de dados de relevo global de dois minutos hospedado pelo Centro de Dados Geofísicos na NOAA (2006). Este é um mapeamento de dados coletados por meio de várias fontes, incluindo observações de satélite e medições de eco-sondagem a bordo (NOAA



**Figura 13.** Relevo de batimetria Etopo2v2c suavizado dentro de  $[15^{\circ}\text{S}, 25^{\circ}\text{S}] \times [90^{\circ}\text{E}, 100^{\circ}\text{E}]$ . de: Vista plana da onda de superfície livre com batimetria ETOPO2 e (d) Condições iniciais isotrópicas (3.11), e (e) Condições iniciais anisotrópicas (5.1), na hora final.

Centro Nacional de Dados Geofísicos, 2006). Os valores da grade representam a elevação nas bordas da célula, com média sobre a área da célula. O espaçamento da grade horizontal é de 2 min de latitude e longitude, onde 1 min de latitude representa 1,853 km no Equador, e a precisão vertical é 1 m, o que  $z=0$  representa o nível médio do mar.

Para a análise atual, um subintervalo quadrado do banco de dados ETOPO2V2c foi escolhido dentro dos limites de latitude e longitude especificados  $[15^{\circ}\text{S}, 25^{\circ}\text{S}]$  e  $[90^{\circ}\text{E}, 100^{\circ}\text{E}]$  respectivamente. Isso é equivalente a uma grade retangular de aproximadamente  $1100 \text{ km} \times 1100 \text{ km}$  (respondendo por pequenas diferenças entre os graus de longitude devido ao bojo equatorial, onde a variação máxima é de aproximadamente 60 km). Esta seção de batimetria representa a bacia de Wharton, uma característica topográfica no fundo do oceano localizada na costa oeste da Austrália. Foi escolhido porque inclui feições de bacia e cumeadas, e por causa da relativa facilidade com que condições de contorno periódicas podem ser implementadas. Além disso, tem sido uma fonte documentada de atividade sísmica e eventos de deslizamento, como os eventos de 2012 e 2016 na região. Como a maioria dos terremotos são de mecanismos transcorrentes, tais eventos são fontes potenciais de tsunamis na bacia de Wharton (Heidarzadeh

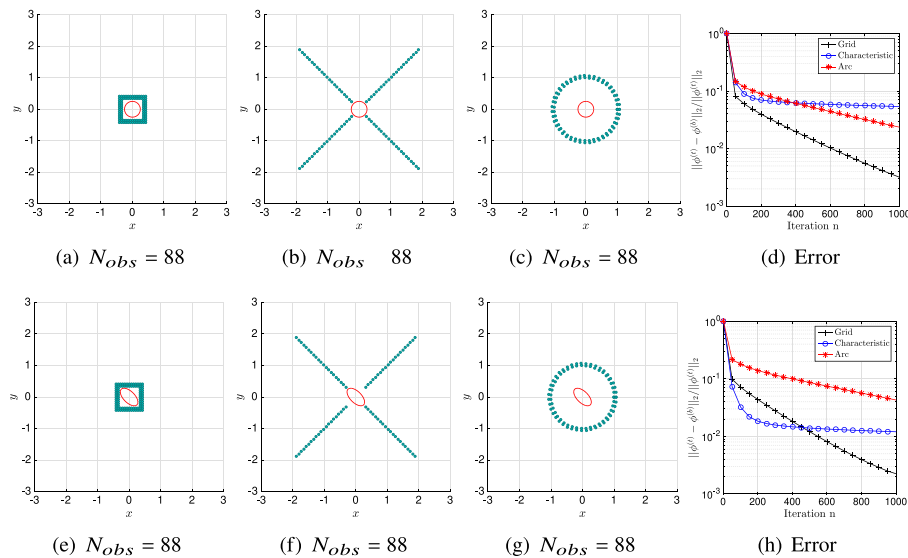
e outros, 2017). Uma representação visual da região e um mapa de relevo retirados diretamente do banco de dados ETOPO2v2c são fornecidos em Fig. 13(a) e 13(b).

Para encontrar soluções clássicas das equações de águas rasas, precisamos da batimetria ( $b$ ) e sua primeira derivada ser mais suave do que os dados brutos de ETOPO2. Além disso, exigimos limites periódicos. Assim, os limites são artificialmente preenchidos com zeros e um filtro passa-baixo é usado para amortecer todas as frequências após os modos de 5% mais baixos para zero. Um filtro de média móvel foi implementado para remover curvas acentuadas nos limites, usando o `MatlabSuave` função. o tempo de controle foi ajustado para que a onda de superfície livre não alcance realmente a região de contorno acolchoada.

A profundidade média  $= -5000 \text{ m}$  foi normalizado para 1 e as escalas de comprimento ajustadas para  $[-1, 1]$  em ambos e instruções. A amplitude das condições iniciais foi ajustada para 0.001 (equivalente a 5 m). O mapa de relevo suavizado e dimensionado e o gráfico 3-D da batimetria podem ser vistos em Fig. 13(c) e 13(f).

Implementamos a assimilação de dados para observações ao longo das linhas  $x = \pm 3$ , uma grade e um arco, com condições iniciais isotrópicas e





**Figura 14.** Resultados com ETOPO2 e (a)–(d) condições iniciais isotrópicas. Observamos melhor convergência com uma configuração de arco de observações do que com uma configuração de linha reta, apesar desta última estar mais próxima da região de condição inicial. (e)–(h): Resultados com ETOPO2 e condições iniciais anisotrópicas.

condições iniciais anisotrópicas, respectivamente. *figos. 13(d) e 13(e)* mostrar a onda de superfície livre no tempo final para cada caso de condições iniciais. O efeito da batimetria na onda de superfície livre é relativamente pequeno em comparação com o caso de fundo plano em *Fig. 12(c)*, do que para a batimetria Gaussiana como em *Fig. 12(d)*. No entanto, notamos que a maior amplitude na batimetria ETOPO2 (como mostrado em *Fig. 13(c)*) é apenas aproximadamente 0,06, o que é significativamente menor do que a batimetria em (5.1). No entanto, observamos depressões ligeiramente mais profundas na onda de superfície livre indicadas pelas regiões azuis escuras em *13(d)*, que são indicativos de efeitos de batimetria. Concluímos que mudanças na velocidade da onda devido à estrutura da batimetria podem resultar em diferentes comunidades costeiras com tempo de chegada e energia das ondas variados.

As configurações de observação e resultados com condições iniciais isotrópicas e condições iniciais anisotrópicas estão presentes em *Fig. 14*. Para as condições iniciais isotrópicas, vemos em *Fig. 14(d)* que o menor erro relativo é para a configuração da grade, com erro mínimo de 0,3%. A configuração da linha reta tem um erro relativo mínimo de 5% e, portanto, é convergente. No entanto, como no caso idealizado com batimetria gaussiana, é novamente a configuração de pior desempenho. Os resultados para a configuração do arco são um pouco melhores do que os observados para a batimetria gaussiana, com erro mínimo de 5%. Posteriormente concluímos que os principais resultados deste estudo se estendem à batimetria realista, como a topografia suavizada da bacia de Wharton.

Consideramos resultados análogos com condições iniciais anisotrópicas em *Fig. 14(e)–(h)*. As principais tendências no relativo zero mostrado são semelhantes aos resultados com condições iniciais isotrópicas como mostrado em *Fig. 14(d)*, em que a formação da grade tem o mínimo mais baixo de erro, com erro relativo de 0,3%. No entanto, a configuração da linha reta é convergente, com erro relativo de 5%. A configuração do arco é a melhor, com erro relativo de 5%. Posteriormente concluímos que os principais resultados deste estudo se estendem à batimetria realista, como a topografia suavizada da bacia de Wharton.

## 6. Conclusão e considerações adicionais

Em *Fig. 14*, vemos que a configuração da grade apresenta a melhor convergência, com erro relativo de 0,3%. A configuração da linha reta é convergente, com erro relativo de 5%. A configuração do arco é a melhor, com erro relativo de 5%. Posteriormente concluímos que os principais resultados deste estudo se estendem à batimetria realista, como a topografia suavizada da bacia de Wharton.

configurações de observações que minimizam o erro de reconstrução na presença de maior complexidade (em comparação com uma dimensão). Esses novos recursos incluem frentes de onda não lineares curvas e recursos de batimetria. Fizemos isso comparando casos em que as observações satisfizeram o critério de distância mínima (4.1) entre observações pareadas (Kevlahan et al., 2019) e quando não o fizeram. Comparamos observações colocadas ao longo de linhas retas (ou seja, características da onda de superfície com condições iniciais isotrópicas e batimetria plana), em uma matriz de grade e ao longo de arcos concêntricos. Analisamos o efeito de um pequeno ou grande número de observações, e o efeito na convergência quando as observações dentro das condições iniciais de suporte foram removidas. O algoritmo foi implementado para condições iniciais verdadeiras isotrópicas e anisotrópicas, tanto com batimetria plana quanto não plana.

Resumindo os principais resultados, observamos que uma condição necessária (mas não suficiente) para a convergência era que algumas das observações aos pares estivessem suficientemente espaçadas para observar as escalas de comprimento mínimo da condição inicial, ou seja, satisfazer a Eq. (4.1). Embora isso confirme em parte os resultados do caso unidimensional, a principal diferença é que, para a assimilação unidimensional, a condição de espaçamento (4.1) foi suficiente para a convergência. Nós demonstramos que este não é o caso (como para resultados em *Fig. 5*) na assimilação bidimensional, podendo exigir um número mínimo de pontos satisfazendo (4.1) para alcançar a convergência. Isso pode ser devido à necessidade de capturar a forma de condições iniciais verdadeiras com maior dimensionalidade. Lembramos que a Eq. (4.1) não foi derivado analiticamente para o caso bidimensional e, portanto, não se espera que explique suas complexidades. No entanto, é uma ferramenta de referência útil para a análise qualitativa neste estudo.

Foi na configuração de arco, observamos que um número maior de observações foi necessário para a convergência, enquanto a convergência foi alcançada para as configurações de linha reta e grade com poucos pontos de observação. No entanto, pequeno número de observações foi suficiente para converter a condição inicial em uma condição isotrópica. Aumentar o número de pontos de observação melhorou a convergência para a grade e configurações características quando os pontos de observação foram removidos do suporte das condições iniciais. A configuração da grade apresentou a melhor convergência do relativo 2 erro nas condições iniciais reconstruídas. Concluímos que observações não são necessários dentro do suporte das condições iniciais, pois é isso que degrada os resultados devido ao ajuste excessivo. O erro era  $\sim 10^{-4}$  com uma batimetria de fundo plano, e  $\sim 10^{-3}$  com uma batimetria realista e batimetria do banco de dados ETOPO2v2.



## **mesa 2**

Resumo do relativo mínimo zero para as diferentes análises realizadas neste estudo para observações ao longo de (i) linhas retas, (ii) em uma matriz de grade e (iii) ao longo de arcos. As entradas destacadas em vermelho indicam resultados não convergentes. A convergência foi alcançada para todas as configurações sem pontos dentro do suporte das verdadeiras condições iniciais (i), com grande  $\epsilon = 0.07$  (satisfazendo a condição necessária para a convergência dada em(4.1).

Análise	Linhas $\pm$	Grade	Arco
$\approx 36$ , espaçamento mínimo $\leq 0.1$	0,3%	0,1%	18%
Grande $\epsilon$ , $\approx 0.07$ Pequeno $\epsilon$ , $\approx 0.07$	0,2%	0,3%	2%
	0,4%	0,3%	Nenhum
Nenhuma observação em apoio a (i), pequeno $\epsilon$ , $\approx 0.07$	18%	20%	Nenhum
Nenhuma observação em apoio a (i), grande $\epsilon$ , $\approx 0.07$	7%	0,1%	2%

A convergência foi um pouco pior para a configuração característica com condições iniciais anisotrópicas e quando os recursos batimétricos foram incluídos, mas no geral todas as configurações mostraram convergência (um erro relativo nas condições iniciais reconstruídas inferior a 10%) com 88 observações para ambas as condições iniciais isotrópicas e anisotrópicas, e com batimetria. Os principais resultados das análises realizadas neste estudo estão resumidos em **mesa 2**.

Agora consideramos a viabilidade de integrar essas descobertas idealizadas com um modelo realista de tsunami. As perguntas primordiais são:

- (1) É realista supor que temos um número suficiente de observações para convergência, no caso de uma grade de observações centrada nas condições iniciais?
- (2) É realista ter um número suficiente de observações de alturas de ondas de superfície para locais potenciais de condições iniciais (ou seja, associadas a regiões sismicamente ativas conhecidas)?

Abordando-os, notamos que os tsunamis mais destrutivos são aqueles gerados por terremotos rasos, com epicentros ao longo das falhas geológicas. Destes, a subducção tectônica nos limites das placas são as causas mais prováveis de tsunamis e, posteriormente, sua posição coincide com o suporte das condições iniciais. [Schellart et al.\(2011\)](#) fornecem uma visão abrangente dos locais de subducção global, bem como as velocidades das respectivas placas. Concentrar as observações em torno das zonas de subducção pode captar suficientemente a propagação das ondas desencadeadas por eventos sísmicos aqui originados. No entanto, isso não é necessariamente exaustivo; Como indicamos, a bacia de Wharton (que não se encontra em uma zona de subducção) é uma zona potencial para pequenos tsunamis devido a terremotos transcorrentes ([Heidarzadeh et al., 2017](#)), e existem muitas dessas regiões. No entanto, os tsunamis mais destrutivos da história recente, como o tsunami do oceano Índico em 2004, foram causados por terremotos com epicentros caindo em zonas de subducção e, portanto, merecem foco principal.

O escopo das observações de posicionamento em todos os locais possíveis nos leva à viabilidade logística de tais configurações. [Angove et al.\(2019\)](#) fornecem uma revisão abrangente das principais limitações para previsões precisas de tsunami hoje e detalham as principais áreas onde as incertezas associadas à observação de tsunamis podem ser quantificadas e reduzidas. Eles destacam a necessidade de métodos atualizados para capturar com precisão o deslocamento inicial e detalham possíveis soluções, como o uso de dados do Sistema Global de Navegação por Satélite (GNSS) em constante expansão, gravadores de pressão de fundo (BPRs) e sistemas de observação por cabo de área limitada. Eles concluem que a instrumentação de cabos de fibra óptica comerciais com BPRs e acelerômetros é a abordagem mais promissora, mas vem com complexidades e custos que não podem ser cobertos apenas por fluxos de receita científicos.

Isso é especialmente problemático quando consideramos que exigir configurações de observação em torno de zonas de subducção com maior probabilidade de ocorrência de tsunamis requer um grande número de observações. Na presente análise, demonstramos convergência com  $\approx 88$  colocados em torno de uma única fonte de tsunamis potenciais e, na realidade, existem várias dessas regiões. No entanto, como observamos anteriormente, métodos inovadores já foram introduzidos para gerar observações mesmo quando as redes existentes são relativamente esparsas. Por exemplo, introduzindo dados de observação virtual interpolados de observações reais vizinhas, conforme demonstrado por [Wang et al.\(2019\)](#). Esses

metodologias podem ser implementadas para preencher a rede observacional existente, de modo que os requisitos para  $\epsilon$  estão satisfeitos. Além disso, houve avanços significativos nas observações de altimetria obtidas a partir de dados de satélites geoespaciais. [Angove et al.\(2019\)](#) observam que o processo para restringir uma fonte de tsunami a partir de dados altimétricos é semelhante ao empregado atualmente e tem a vantagem de fornecer variações espaciais e temporais não presentes na série temporal estática relatada pelos tsunameters. Apesar disso, eles estipulam que, devido a limitações de sensibilidade, cobertura limitada de satélite e tempos de processamento de dados estendidos, o uso operacional de altimetria por satélite na previsão de tsunami em tempo real não tem sido uma solução viável até o momento.

No entanto, melhorias no sensoriamento remoto de ondas oceânicas usando altimetria percorreram um longo caminho desde que o satélite Geodynamics Experimental Ocean Satellite 3 (GEOS-3) foi lançado pela primeira vez em 1975. Mesmo assim, o sensoriamento remoto da altura das ondas oceânicas a partir do espaço foi previsto para fornecer um aumento quântico nas capacidades de previsão ([Barrick e Fedor, 1978](#)). Projetos recentes, como o projeto GLOBWAVE da ESA (2010–2013), expandiram isso, fornecendo acesso a conjuntos de dados consolidados sobre ondas oceânicas à comunidade científica para fins de modelagem e previsão. Em 2017, o Copernicus Marine Environment Monitoring Service (CMEMS) lançou o primeiro produto de onda global em tempo real, contendo dados de altura de onda coletados por vários satélites, disponíveis dentro de três horas após a aquisição. Além disso, essas observações foram coletadas e disponibilizadas para modelos de previsão, como em [Ribal e jovem\(2019\)](#). Com uma resolução espacial global de  $7 \text{ km} \times 7 \text{ km}$ , a rede de observação é muito semelhante à configuração de grade ótima observada neste estudo e, portanto, tem o potencial de gerar resultados semelhantes.

Enquanto as ondas do tsunami são características de amplitudes relativamente pequenas, [Smith e outros.\(2005\)](#) demonstraram que ainda é possível medir tsunamis usando dados de altimetria, e as restrições para previsão em tempo real foram devido ao atraso no acesso aos dados. Com produtos inovadores, como os conjuntos de dados CMEMS acessíveis em menos de três horas, essas restrições podem ser mitigadas e recursos de previsão em tempo real para tsunamis usando dados de altimetria estão no horizonte.

Em última análise, a eficácia de tais estruturas de modelagem em um cenário realista também depende de fatores relacionados não considerados no presente trabalho, como o posicionamento das observações de forma que o tempo de detecção das ondas do tsunami seja otimizado. [Ferrolo e cols.\(2020\)](#) demonstram uma metodologia promissora usando algoritmos baseados em população que otimiza a colocação de sensores oceânicos profundos em torno de zonas de subducção e encontra o tempo mínimo necessário para que a perturbação na fonte chegue aos locais dos sensores. Embora este trabalho não se concentre na reconstrução de informações de condição inicial ausentes ou na precisão das ondas à medida que se afastam da fonte, é, no entanto, uma consideração necessária para as necessidades realistas de observação de tsunamis. A detecção precoce pode potencialmente atenuar o atraso no recebimento e processamento de dados de altimetria.

Como este trabalho se restringe à extensão dos resultados em [Kevlahan et al.\(2019\)](#) para duas dimensões, o desenvolvimento futuro se beneficiaria ao considerar a estrutura de observabilidade delineada por [Kang e Xu\(2014\)](#) e [Rei e outros.\(2015\)](#). Isso pode fornecer uma justificativa matemática mais rigorosa para configurações bidimensionais ideais de observações. Lembramos que a prova matemática do teorema(4.1)

é aplicável apenas para o caso unidimensional e, consequentemente, os resultados aqui apresentados são qualitativos. Um conceito semelhante ao critério de distância mínima considerado aqui foi fornecido em Hinson (2014), onde foi encontrado um limite inferior no raio de atração para satisfazer a observabilidade. O trabalho futuro destinado a determinar configurações ótimas de observações em duas dimensões se beneficiaria da exploração dos efeitos da colocação de sensores dentro e fora desse raio de observabilidade.

A análise fornecida aqui também pode ser mais rigorosa considerando a boa colocação do problema inverso e os possíveis problemas de não unicidade e descontinuidades no mapeamento usado para reconstruir parâmetros ausentes, como condições iniciais, do modelo e das observações. Essas considerações são abordadas em detalhes por Navon (1998), onde métodos de regularização, como a regularização de Tikhonov, inclusão de informações básicas e análises de sensibilidade, são sugeridos para abordar essas questões e identificar parâmetros influentes no sistema. Posteriormente, um próximo passo para este trabalho seria realizar análises de sensibilidade como em Kevlahan e Khan (2020) e Khan e Kevlahan (2021), e incluir termos de regularização e background information na otimização da função custo.

A otimização global pode ser um método mais eficiente e confiável para minimizar a função de custo do que o método de minimização de gradiente usado aqui. Em particular, a otimização global pode evitar que o algoritmo fique preso em um mínimo local. Ferreira-Ferreiro et al. (2020) consideram um problema semelhante para modelos de tsunami, onde o modelo de águas rasas é discretizado usando um esquema de volume finito conservativo de caminho de segunda ordem de preservação de positividade, e o problema de assimilação de dados é colocado em uma estrutura de otimização global. Nosso trabalho é baseado na abordagem "otimizar e depois discretizar", e nosso objetivo é estender a metodologia derivada em Kevlahan et al. (2019) para duas dimensões. Portanto, a assimilação de dados com um algoritmo de otimização global está fora do escopo do trabalho atual. No entanto, extensões realistas de nossos resultados podem se beneficiar muito dos métodos de assimilação automática de dados fornecidos por Ferreira-Ferreiro et al. (2020).

Em conclusão, desenvolvemos um algoritmo de assimilação de dados variacionais bidimensionais para a reconstrução das condições iniciais das ondas de superfície, com o objetivo principal de estender os resultados da assimilação variacional unidimensional delineada em Kevlahan et al. (2019). Confirmamos a viabilidade da assimilação variacional de dados para ondas de tsunami em configurações 2D idealizadas e demonstramos qualitativamente as condições necessárias e/ou suficientes para a convergência das condições iniciais reconstruídas para a forma verdadeira. Analisamos diferentes configurações de observações, seu espaçamento e seu número, com uma variedade de batimetria e condições iniciais. É importante ressaltar que estendemos os resultados unidimensionais em relação às condições necessárias para a distância máxima entre as observações aos pares, conforme fornecido pela Eq. (4.1) (ou seja, resolvendo as menores escalas de deslocamento inicial da superfície) e, adicionalmente, mostramos que, para o caso bidimensional, essa condição não é suficiente. Demonstramos que quando não há observações dentro do suporte das condições iniciais, um número suficientemente grande de observações é uma condição necessária para a convergência. Com base nesses critérios, mostramos que a convergência pode ser alcançada para observações dispostas em linhas retas, grades e ao longo de arcos circulares concêntricos, tanto para condições iniciais isotrópicas quanto anisotrópicas, e com dados batimétricos realistas. Com os avanços na disponibilidade e precisão dos dados de observação de altimetria, há espaço para usar esses resultados para modelos de tsunami mais precisos, com dados de observação reais.

#### Declaração de contribuição de autoria do CRediT

**RA Khan:** Conceitualização, Metodologia, Análise formal, Software, curadoria de dados, redação – rascunho original, visualização, investigação. **NK-R. Kevlahan:** Supervisão, Conceptualização, Metodologia, Validação, Redação – revisão e edição, Obtenção de financiamento.

#### Declaração de interesse concorrente

Os autores declaram que não têm interesses financeiros concorrentes conhecidos ou relacionamentos pessoais que possam parecer influenciar o trabalho relatado neste artigo.

#### Reconhecimentos

Gostaríamos de agradecer ao Dr. Bartosz Protas por sua contribuição contínua e feedback sobre esta pesquisa. Além disso, gostaríamos de agradecer ao Dr. Laurent Debreau e ao Dr. Arthur Vidard do Laboratoire Jean Kuntzmann por suas sugestões.

#### Financiamento

Este projeto foi financiado pelo NSERC, Canada Discovery Grant do Dr. Nicholas Kevlahan, e o intercâmbio de pesquisas no Laboratoire Jean Kuntzmann foi facilitado pelo McMaster-CNRS, Canada Fund travel grant.

#### Referências

- Angove, M., Arcas, D., Bailey, R., Carrasco, P., Coetzee, D., Fry, B., Gledhill, K., Harada, S., von Hillebrandt-Andrade, C., Kong, L., McCreery, C., McCurrach, S.J., Miao, Y., Sakya, A.E., Schindel, F., 2019. Observações oceânicas necessárias para minimizar a incerteza em previsões globais de tsunami, avisos e resposta de emergência. *Front. Mar. Sci.* 6, <http://dx.doi.org/10.3389/fmars.2019.00350>, <https://www.frontiersin.org/article/10.3389/fmars.2019.00350>.
- Barrick, D.E., Fedor, L.S., 1978. Medição da altura das ondas oceânicas com um satélite altímetro radar. *EOS Trans. Am. Geophys. Union* 59 (9), 843–847. <http://dx.doi.org/10.1029/EO059i009p00843>, URL <https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1029/EO059i009p00843>.
- Dongfang, L., et al., 2013. Comparação entre Boussinesq e modelos de águas rasas na previsão do aparecimento de ondas solitárias em praias planas. *Costa. Eng. J.* 55 (4).
- Ferreira-Ferreiro, A., García-Rodríguez, J., López-Salas, J., Escalante, C., Castro, M., 2020. Otimização global para assimilação de dados em modelos de tsunami de deslizamento de terra. *J. Comput. Física* 403, 109069. <http://dx.doi.org/10.1016/j.jcp.2019.109069>, <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999119307>.
- Ferrolino, A.R., Lope, J.E.C., Mendoza, R.G., 2020. Localização ideal de sensores para primeiros detecção de ondas de tsunami. In: Krzhizhanovskaya, V.V., Závodszy, G., Lees, M.H., Dongarra, J.J., Sloot, P.M.A., Brissos, S., Teixeira, J. (Eds.), *Computational Science ICCS 2020*. Springer International Publishing, Cham, pp. 562–575.
- Fletcher, S., 2017. Assimilação de Dados para as Geociências, primeira ed. Elsevier.
- Ghorbanidehno, H., Lee, J., Farthing, M., Hesser, T., Kitanidis, P.K., Darve, E.F., 2019. Novo algoritmo de assimilação de dados para batimetria nearshore. *J. Atmos. Oceanic Technol.* 36 (4), 699–715. <http://dx.doi.org/10.1175/JTECH-D-18-0067.1>.
- Gonzalez, F.I., Milburn, H.B., Bernard, E., Newman, J., 1998. Avaliação de oceanos profundos e relatórios de tsunamis (dardo): breve visão geral e relatório de status. Heidarzadeh, M., Harada, T., Satake, K., Ishibe, T., Takagawa, T., 2017. Tsunamis de terremotos de deslizamento na Bacia de Wharton, nordeste do Oceano Índico: evento Mw7.8 de março de 2016 e sua relação com o evento Mw 8.6 de abril de 2012. *Geophys. J. Int.* 211 (3), 1601–1612. <http://dx.doi.org/10.1093/gji/ggx395>.
- Hinson, B., 2014. Orientação baseada em observabilidade e posicionamento do sensor (tese de doutorado). Iacono, R., 2005. Soluções analíticas para as equações de águas rasas. *Física Rev. E* 72, 017302. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.72.017302>, URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.72.017302>.
- Kang, W., Xu, L., 2014. Observabilidade parcial para alguns sistemas de parâmetros distribuídos. *Int. J. Din. Controle* 2, 587–596. <http://dx.doi.org/10.1007/s40435-014-0087-4>.
- Kevlahan, N., Khan, R., Protas, B., 2019. Sobre a convergência da assimilação de dados para equações unidimensionais de águas rasas com observações esparsas. *Adv. Comput. Matemática* 45, 3195–3216. <http://dx.doi.org/10.1007/s10444-019-09733-6>.
- Khan, R.A., Kevlahan, N.K.R., 2021. Assimilação variacional de dados de ondas de superfície para reconstrução batimétrica. parte I: algoritmo e casos de teste. *Telo A* 73, 125. <http://dx.doi.org/10.1080/16000870.2021.1976907>.
- King, S., Kang, W., Xu, L., 2015. Observabilidade para localizações ideais de sensores em dados de assimilação. *Int. J. Din. Controle* 3, 416–424. <http://dx.doi.org/10.1007/s40435-014-0120-7>.
- Lorenz, A.C., 1986. Métodos de análise para previsão numérica do tempo. *J. R. Meteorol. Soc.* 112 (474), 1177–1194.
- Maeda, T., Obara, K., Shinohara, M., Kanazawa, T., Uehira, K., 2015. Sucessivos estimativa de um campo de ondas de tsunami sem dados de fonte de terremoto: uma abordagem de assimilação de dados para previsão de tsunami em tempo real. *Geophys. Res. Lett.* 42 (19), 7923–7932. <http://dx.doi.org/10.1002/2015GL065588>, URL <https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/2015GL065588>.

- Mayo, T., Butler, T., Dawson, C., Hoteit, I., 2014. Assimilação de dados no avançado framework de modelagem de circulação (ADCIRC) para a estimativa do coeficiente de atrito de tripulação. *Modelo Oceano*. 76, 43–58. <http://dx.doi.org/10.1016/j.ocemod.2014.01.001>, URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S146350031400002X>. Nakamura, K., et al., 2006. Assimilação sequencial de dados: fusão de informações de um simulação numérica e dados de observação em grande escala. *J. Univ. Comput.* 12 (6), 608–626.
- Centro Nacional de Dados Geofísicos, 2006. Dados de relevo global em grade de 2 minutos (ETOPO2) v2. Centro Nacional de Dados Geofísicos, NOAA. <http://dx.doi.org/10.7289/V5J1012Q>, URL <https://www.ngdc.noaa.gov/mgg/global/etopo2.html>. (Acessado em julho de 2020).
- Navon, I., 1998. Aspectos práticos e teóricos da estimativa de parâmetros adjuntos informação e identificabilidade em meteorologia e oceanografia. *Din. Atmos. Oceanos* 27, 55–79. [http://dx.doi.org/10.1016/S0377-0265\(97\)00032-8](http://dx.doi.org/10.1016/S0377-0265(97)00032-8), <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377026597000328>.
- Centro Nacional de Dados Geofísicos NOAA, 2006. Dados de relevo global em grade de 2 minutos 955 (etopo2) v2. <http://dx.doi.org/10.7289/V5J1012Q>, Acessado em 22 de julho de 2020. Ribal, A., Young, IR, 2019. 33 anos de altura de onda e vento calibrados globalmente dados de velocidade baseados em observações do altímetro. *ciência Dados* 6 (1), 77. <http://dx.doi.org/10.1038/s41597-019-0083-9>.
- Sadourny, R., 1975. A dinâmica dos modelos de diferenças finitas da equação de águas rasas ções. *J. Atmos. ciência* 32 (4), 680–689. [http://dx.doi.org/10.1175/1520-0469\(1975\)032<0680:TDOFDM>2.0.CO;2](http://dx.doi.org/10.1175/1520-0469(1975)032<0680:TDOFDM>2.0.CO;2).
- Schellart, WP, Stegman, DR, Farrington, RJ, Moresi, L., 2011. Influência da lateral distância da borda da laje na velocidade da placa, velocidade da trincheira e particionamento de subducção. *J. Geophys. Res. Terra Sólida* 116 (B10), <http://dx.doi.org/10.1029/2011JB008535>, URL <https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1029/2011JB008535>. Smith, WH, Scharroo, R., Titov, VV, Arcas, D., Sao, J., Arbic, BK, 2005. Satélite altímetros medem tsunami - estimativas de modelos iniciais confirmadas. *Oceanografia* <http://dx.doi.org/10.5670/oceanog.2005.62>.
- Spiteri, RJ, Ruuth, SJ, 2002. Uma nova classe de estabilidade forte de alta ordem ideal preservando métodos de discretização de tempo. *SIAM J. Número. Anal.* 40 (2), 469–491. <http://dx.doi.org/10.1137/S0036142901389025>.
- Wang, Y., Maeda, T., Satake, K., Heidarzadeh, M., Su, H., Sheehan, AF, Gusman, AR, 2019. Assimilação de dados de tsunami sem uma densa rede de observação. *Geophys. Res. Deixes* 46 (4), 2045–2053. <http://dx.doi.org/10.1029/2018GL080930>, URL <https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1029/2018GL080930>. Yang, Y., Dunham, EM, Barnier, G., Almquist, M., 2019. Reconhecimento do campo de ondas do tsunami construção e previsão usando o filtro ensemble Kalman. *Geophys. Res. Deixes* 46 (2), 853–860. <http://dx.doi.org/10.1029/2018GL080644>, URL <https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1029/2018GL080644>.
- Zou, X., Navon, IM, Dimet, FXL, 1992. Observações incompletas e controle de Ondas de gravidade na assimilação de dados variacionais. *Tellus A* 44 (4), 273–296. <http://dx.doi.org/10.3402/tellusa.v44i4.14961>.