

Equação de Águas Rasas

De Física Computacional

Grupo: Gabriel Schmökel e Julia Remus

O objetivo deste trabalho é buscar a solução das equações de águas rasas, por meio de métodos de integração numérica, para resolução de equações diferenciais parciais (EDP's) e posteriormente apresentar uma breve interpretação física das soluções. Demonstramos, nesta página, a derivação das equações, junto com a explicação de cada quantidade física presente. A discretização das equações de águas rasas conservativas e não conservativas são feitas por FTCS explícito, também foi aplicado FTCS implícito para as equações em uma forma simplificada, representada pela equação da deriva. Os resultados obtidos para equação simplificada são comparados com a solução exata, e exemplos mais complexos são solucionados para as formas conservativa e não conservativa. Ao final, uma comparação é feita entre os resultados das equações conservativas e dissipativas.

Índice

- 1 Introdução
- 2 Teoria
 - 2.1 Derivação das Equações de Águas Rasas
 - 2.2 Simplificação das Equações de Águas Rasas
 - 2.3 Discretização na Forma Conservativa
 - 2.4 Discretização na Forma não Conservativa
- 3 Simulações Computacionais
 - 3.1 Forma conservativa 1D e 2D
 - 3.1.1 Códigos das Equações Conservativas
 - 3.1.2 Resultados
 - 3.2 Forma dissipativa 2D
 - 3.2.1 Códigos das Equações Não Conservativas
 - 3.2.2 Exemplo 3 - Onda Confinada em uma Caixa
 - 3.2.3 Exemplo 4 - Tsunami
- 4 Comparação entre Métodos
 - 4.1 Onda confinada em uma caixa
- 5 Referências

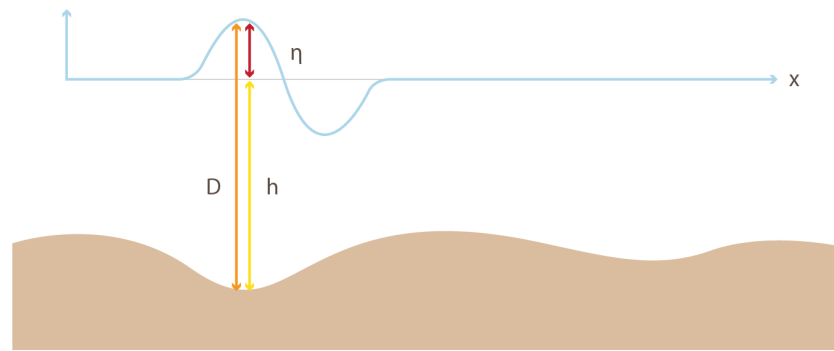
Introdução

As equações de águas rasas têm aplicações físicas na previsão de tsunâmis, em fluxos atmosféricos, ondas de tempestade e fluxos planetários. Na descrição física dos problemas de fluxos de fluido em ondas, as equações de águas rasas em uma dimensão são dadas por:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial uD}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \eta u}{\partial t} + \frac{\partial \left(\eta u^2 + \frac{1}{2} g \eta^2 \right)}{\partial x} = -g \eta \frac{\partial h}{\partial x} \quad (2)$$

As componentes da equação de águas rasas podem ser melhor interpretadas através da seguinte figura:



$\eta = \eta(x, t)$ corresponde a amplitude da onda, $h = h(x)$ determina a profundidade do mar em repouso, D é o deslocamento total da água, u é a velocidade do fluido. Resolvendo a EDP da equação de águas rasas, obtemos como a amplitude da onda se comporta ao longo do tempo e do espaço.

Teoria

Derivação das Equações de Águas Rasas

Iremos demonstrar como chegamos nas equações de águas rasas em duas dimensões, nas formas conservativa e dissipativa, em representações do fluxo de descarga e de velocidade. Posteriormente, tendo as equações em 2D, iremos simplificar elas para a forma unidimensional. Neste processo de demonstração, iremos explicar a interpretação física de cada quantidade presente nas equações.

Para obter as equações de águas rasas devemos partir da equação da continuidade e das equações da quantidade de movimento de Navier-Stokes:

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = \frac{d\rho}{dt} \quad (3)$$

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} + \frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \mathbf{g} = 0 \quad (4)$$

A equação da continuidade em (3) descreve o balanço de massas para os elementos de volume infinitesimais que pertencem ao fluido, onde a quantidade do lado esquerdo da equação informa o fluxo de massa que entra e sai pelo elemento de volume, e a quantidade do lado direito está relacionada com a massa que se acumula ao longo do tempo [1]. Nesta expressão ρ é a densidade, e $\mathbf{u} = (u, v, w, t)$ é o campo de velocidades, onde u, v e w são as velocidades das partículas que compõe o fluido nas direções x, y, z .

As equações de Navier-Stokes em (4) são balanços diferenciais da quantidade de movimento, obtidas através da aplicação da segunda lei de Newton em cada ponto do escoamento [2] [3] [4].

- Du/Dt é a aceleração da partícula fluída ao longo do campo de velocidade $\mathbf{u} = (u, v, w, t)$.
- $\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} / \rho$ está associado as tensões tangenciais e normais atuando sobre os elementos de volume ($\boldsymbol{\tau}$ é o tensor tensão, as componentes deste tensor são as tensões normais e tangenciais de cisalhamento, expressas por τ_{ij} , no qual i indica a direção e j o plano normal).
- $\nabla p / \rho$ está associado as pressões que atuam sobre os elementos do fluido.
- \mathbf{g} é o vetor aceleração da gravidade atuando sobre os elementos infinitesimais de

volume do fluido.

Introduzindo as condições de contorno para a superfície $z(x, y, t)$ e para a profundidade do oceano $h(x, y)$ [5]:

$$\frac{D\eta}{Dt} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \eta = w, \text{ onde } z = \eta(x, y, t) \quad (5)$$

$$\mathbf{u} \cdot \nabla (z + h(x, y)) = 0, \text{ onde } z = -h(x, y) \quad (6)$$

η é o deslocamento vertical da água sobre a superfície em repouso, $\mathbf{v} = (x, y, 0)$ é o vetor velocidade do fluido nas direções horizontais x e y .

A equação da continuidade em (3) pode ser simplificada pelo fato do fluido ser incompressível, isto implica que a densidade ρ é constante.

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (7)$$

Integrando a expressão da continuidade em (7), utilizando a regra da integral de Leibniz [6], com os limites indo de $-h(x, y)$ até $\eta(x, y, t)$ chegamos na seguinte expressão:

$$\int_{-h}^{\eta} \nabla \cdot \mathbf{u} = \int_{-h}^{\eta} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} u dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\eta} v dz + w \Big|_{-h}^{\eta} + \mathbf{u} \cdot \nabla (z + h(x, y)) \Big|_{-h}^{\eta} - u \Big|_{-h}^{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} - v \Big|_{-h}^{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (8)$$

Teorema de Leibniz:

$$\frac{d}{dx} \left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(x, t) dt \right) = f(x, b(x)) \cdot \frac{d}{dx} b(x) - f(x, a(x)) \cdot \frac{d}{dx} a(x) + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) dt \quad (9)$$

Substituindo as condições de contorno da profundidade (6) em (8) obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} u dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\eta} v dz - w \Big|_{\eta} - \mathbf{v} \cdot \nabla \eta = 0 \quad (10)$$

Substituindo a condição de contorno da superfície (5) em (10):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} u dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\eta} v dz + \frac{\partial \eta}{\partial t} &= \frac{\partial u(\eta + h)}{\partial x} + \frac{\partial v(\eta + h)}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial u D}{\partial x} + \frac{\partial v D}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial t} \\ \Rightarrow \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial u D}{\partial x} + \frac{\partial v D}{\partial y} &= 0 \quad (11) \end{aligned}$$

(11) é a primeira das equações das águas rasas que obtemos, onde D é o comprimento da água total do fundo do oceano até a amplitude da onda. Podemos expressar (11) através do fluxo de descarga nas direções x e y , estas quantidades estão relacionadas com as velocidades da seguinte forma [7]:

$$M = \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} u dz = u D \quad (12)$$

$$N = \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\eta} v dz = v D \quad (13)$$

Substituindo (12) e (13) em (11) chegamos na representação do fluxo de descarga para uma das equações de águas rasas.

$$\Rightarrow \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} = 0 \quad (14)$$

Conhecendo as taxas dos fluxos de descarga em relação as regiões espaciais, podemos determinar a taxa da variação da amplitude da onda em relação ao tempo.

Vamos buscar obter as outras duas equações de águas rasas restantes, a partir das quantidades de movimento de Navier-Stokes. Nas componentes x,y e z temos:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + g_x = 0 \quad (15)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + g_y = 0 \quad (16)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + g_z = 0 \quad (17)$$

Na componente z em (17) não consideramos a aceleração das partículas, pois a aceleração da gravidade é muito maior. Também tomamos como nulo as componentes g_x e g_y em (15) e (16), assim passamos a definir $g_z = g$. Neste momento estamos desconsiderando as forças de fricção, por isso o tensor tensão também é nulo.

Resolvendo equação diferencial da componente z em (17) podemos obter a pressão, a qual é hidrostática.

$$\partial P = \rho g \partial z \Rightarrow P = \rho g (\eta - z) \quad (18)$$

Substituindo a pressão em (15):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \quad (19)$$

Integrando a expressão (19), utilizando a regra da integral de Leibniz e as condições de contorno (5) e (6), com os limites indo de $-h(x, y)$ até $\eta(x, y, t)$ chegamos em outra das equações de águas rasas:

$$\frac{\partial u D}{\partial t} + \frac{\partial u^2 D}{\partial x} + \frac{\partial uv D}{\partial y} + \frac{g}{2} \frac{\partial D^2}{\partial x} = 0 \quad (20)$$

Generalizando a equação (20), para a componente y, obtemos a última das equações de águas rasas:

$$\frac{\partial v D}{\partial t} + \frac{\partial v^2 D}{\partial y} + \frac{\partial uv D}{\partial x} + \frac{g}{2} \frac{\partial D^2}{\partial y} = 0 \quad (21)$$

Na representação de fluxo de cargas as expressões (20) e (21) são apresentadas respectivamente como:

$$\frac{\partial M}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{M^2}{D} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{MN}{D} \right) + g D \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \quad (22)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{N^2}{D} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{MN}{D} \right) + g D \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0 \quad (23)$$

Com as equações de águas rasas (20), (21), (22) e (23) podemos calcular as taxas de variação dos fluxos de descarga em relação ao tempo. As equações (11), (20) e (21), na representação de velocidades, e as equações (14), (22) e (23), na representação do fluxo de descargas, são as equações de águas rasas conservativas.

Iremos buscar pelas equações de águas rasas não conservativas considerando o tensor de estresse τ em (4). Os elementos deste tensor são responsáveis por causar nas partículas tensões tangenciais e perpendiculares, onde as tensões tangenciais são representadas por elementos τ_{ij} onde $i \neq j$, e as perpendiculares por elementos τ_{ii} onde $i = j$.

Decompondo nas componentes x,y, e z de $\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \tau$ presente em (4) temos:

$$\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial x} \tau_{xx} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{xy} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{xz} \right) \quad (24)$$

$$\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial x} \tau_{yx} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{yy} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{yz} \right) \quad (25)$$

$$\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial x} \tau_{zx} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{zy} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zz} \right) \quad (26)$$

Considerando o fluido Newtoniano, então as tensões de cisalhamento serão proporcionais a uma taxa de deformação, onde a constante de deformidade é a viscosidade.

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (27)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (28)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (29)$$

Substituindo (27),(28) em (24), integrando em relação a componente z, utilizando a regra de Leibniz e as condições de contorno (5) e (6), obtemos:

$$\int_{-h}^{\eta} \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial x} \tau_{xx} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{xy} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{xz} \right) dz = \frac{\tau_x}{\rho} - A \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} M \frac{\partial^2}{\partial x^2} M \right) \quad (30)$$

Onde A é a constante de viscosidade turbulenta, τ_x é uma força de resistividade relativa ao movimento do fluido com o fundo do oceano na direção x. Podemos desprezar a constante de turbulência na situação em que não temos inclinações abruptas no fundo do mar [7].

Considerando que o fluido é uniforme, então a expressão para $\frac{\tau_x}{\rho}$ é:

$$\frac{\tau_x}{\rho} = \frac{fM}{2D^2} (M^2 + N^2)^{1/2} \quad (31)$$

Onde f é o coeficiente de fricção, porém o coeficiente de rugosidade de Manning n é mais usado, alguns valores deste coeficiente são [8]:

Material	Coeficiente de Rugosidade de Manning (n)
Cimento puro e metal liso	0,010
Terra lisa	0,017
Pedras, ervas daninhas	0,035
Péssimo relevo de canal	0,060
Bom relevo de canal	0,025

O coeficiente de fricção f e o de rugosidade de Manning n estão relacionados por:

$$f = \frac{2gn^2}{D^{1/3}} \quad (32)$$

Substituindo (32) em (31) obtemos:

$$\frac{\tau_x}{\rho} = \frac{gn^2}{D^{7/3}} M (M^2 + N^2)^{1/2} \quad (33)$$

Generalizando a expressão (29) para a componente y.

$$\frac{\tau_y}{\rho} = \frac{gn^2}{D^{7/3}} N(M^2 + N^2)^{1/2} \quad (34)$$

Adicionando, respectivamente, (33) e (34) nas expressões (22) e (24), obtemos as equações de águas rasas considerando as forças de fricção do fundo do oceano.

$$\frac{\partial M}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{M^2}{D} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{MN}{D} \right) + gD \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{gn^2}{D^{7/3}} M(M^2 + N^2)^{1/2} = 0 \quad (35)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{N^2}{D} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{MN}{D} \right) + gD \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{gn^2}{D^{7/3}} N(M^2 + N^2)^{1/2} = 0 \quad (36)$$

As equações (14), (35) e (36), na representação do fluxo de descargas, são as equações de águas rasas não conservativas.

Em uma dimensão podemos expressar as equações de águas rasas eliminando a componente y das expressões (14), (35) e tomando o fluxo de descarga N como nulo.

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial M}{\partial x} = 0 \quad (37)$$

$$\frac{\partial M}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{M^2}{D} \right) + gD \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{gn^2}{D^{7/3}} M^2 = 0 \quad (38)$$

Simplificação das Equações de Águas Rasas

As equações de águas rasas podem ser simplificadas para equação de advecção através das seguintes considerações:

- A velocidade do fluido é constante.
- A profundidade do fundo do oceano é constante.

De (39) e das considerações acima temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial M}{\partial x} &= \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial uD}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial(\eta + h)}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \quad (39)$$

Discretização na Forma Conservativa

Um modelo mais simples - desconsiderando a fricção, viscosidade do líquido e as forças de Coriolis sobre ele - pode ser obtido [9][10]. Para desenvolvê-lo são necessárias algumas premissas:

- O comprimento da onda é muito maior que as contribuições na direção \vec{z}
- A aceleração na direção da velocidade na direção \vec{z} é zero
- As componentes das velocidades em \vec{x} e em \vec{y} (\vec{u} e \vec{v}) não variam em \vec{z}

O sistema então pode ser descrito pelas seguintes equações:

$$\frac{\partial D}{\partial t} + \frac{\partial Du}{\partial x} + \frac{\partial Dv}{\partial y} = 0 \quad (40)$$

$$\frac{\partial Du}{\partial t} + \frac{\partial \left(\partial Du^2 + \frac{1}{2} g D^2 \right)}{\partial x} + \frac{\partial Duv}{\partial y} = -gD \frac{\partial b}{\partial x} \quad (41)$$

$$\frac{\partial Dv}{\partial t} + \frac{Duv}{\partial x} + \frac{\partial \left(Dv^2 + \frac{1}{2}gD^2 \right)}{\partial y} = -gD \frac{\partial b}{\partial y} \quad (42)$$

Onde D é a altura do fluido desde a base, \vec{u}, \vec{v} são as velocidades médias na direções \vec{x}, \vec{y} , g é a constante gravitacional e $b(x, y)$ é função que descreve a superfície onde acontece o movimento.

Para descrever numericamente as equações de águas rasas na forma conservativa foi utilizado discretização por diferenças finitas e o método pra frente no tempo e no espaço (FTCS). As equações discretizadas podem ser observadas abaixo.

$$\frac{D_{i,j}^{t+\Delta t} - D_{i,j}^t}{\Delta t} + \left[\frac{(Du)_{i+1,j}^t - (Du)_{i-1,j}^t}{2\Delta x} \right] + \left[\frac{(Dv)_{i,j+1}^t - (Dv)_{i,j-1}^t}{2\Delta y} \right] = 0 \quad (43)$$

$$\frac{(Du)_{i,j}^{t+\Delta t} - (Du)_{i,j}^t}{\Delta t} + \left[\frac{(Du^2 + \frac{1}{2}gh^2)_{i+1,j}^t - (Du^2 + \frac{1}{2}gh^2)_{i-1,j}^t}{2\Delta x} \right] + \left[\frac{(Duv)_{i,j+1}^t - (Duv)_{i,j-1}^t}{2\Delta y} \right] = -gD_{i,j}^t b_{x,i,j} \quad (44)$$

$$\frac{(Dv)_{i,j}^{t+\Delta t} - (Dv)_{i,j}^t}{\Delta t} + \left[\frac{(Duv)_{i+1,j}^t - (Duv)_{i-1,j}^t}{2\Delta x} \right] + \left[\frac{(Dv^2 + 1/2gD^2)_{i,j+1}^t - (Dv^2 + 1/2gD^2)_{i,j-1}^t}{2\Delta y} \right] = -gD_{i,j}^t b_{y,i,j} \quad (45)$$

Na situação em que temos as equações de águas rasas simplificadas por (39), aplicando FTCS explícito, a evolução temporal da amplitude da onda é:

$$\eta_{i,j}^{t+\Delta t} = \eta_{i,j}^t - \frac{u\Delta t}{2dx} (\eta_{i+1,j}^t - \eta_{i-1,j}^t) \quad (46)$$

Aplicando FTCS implícito temos:

$$\eta_{i,j}^{t+\Delta t} + \frac{u\Delta t}{2dx} (\eta_{i+1,j}^{t+\Delta t} - \eta_{i-1,j}^{t+\Delta t}) = \eta_{i,j}^t \quad (47)$$

Discretização na Forma não Conservativa

As equações de águas rasas na forma não conservativa são dadas por (14), (35) e (36), para descrever numericamente estas equações foi utilizada discretização por diferenças finitas, onde realizamos derivadas centradas na região espacial, e para frente na região temporal (FTCS).

Discretizando a expressão (14):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial uD}{\partial x} + \frac{\partial vD}{\partial y} &= 0 \quad (47) \\ \Rightarrow \frac{\eta(x, y, t + \Delta t) - \eta(x, y, -t)}{\Delta t} &= -\frac{M(x + \Delta x, y, t) - M(x - \Delta x, y, t)}{2\Delta x} - \frac{N(x, y + \Delta x, t) - N(x, y - \Delta y, t)}{2\Delta y} \end{aligned} \quad (48)$$

$$\eta_{i,j}^{n+1} = \eta_{i,j}^n - \Delta t \left(\frac{M_{i+1,j}^n - M_{i-1,j}^n}{2\Delta x} + \frac{N_{i,j+1}^n - N_{i,j-1}^n}{2\Delta y} \right) \quad (49)$$

Discretizando a expressão (35):

$$\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial t} = - \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{M^2}{D} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{MN}{D} \right) + gD \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{gn^2}{D^{7/3}} M(M^2 + N^2)^{1/2} \right) \quad (50)$$

Definindo as quantidades:

$$M2 \equiv \frac{M^2(x, y, t)}{D(x, y, t)} \quad (51)$$

$$MN \equiv \frac{M(x, y, t)N(x, y, t)}{D(x, y, t)} \quad (52)$$

$$f(x, y, t) \equiv \frac{gn^2}{D^{7/3}} M(M^2 + N^2)^{1/2} \quad (53)$$

Das quantidades definidas e da derivada parcial do fluxo de descarga em relação ao tempo temos o respectivo avanço temporal para M:

$$M_{i,j}^{n+1} = M_{i,j}^n - \Delta t \left(\frac{M_{i+1,j}^{2n} - M_{i-1,j}^{2n}}{2\Delta x} + \frac{(MN)_{i,j+1}^n - (MN)_{i,j-1}^n}{2\Delta y} + gD_{i,j}^n \frac{\eta_{i+1,j}^n - \eta_{i-1,j}^n}{2\Delta x} + f_{i,j}^n \right) \quad (54)$$

Generalizando a expressão (54) para o fluxo de descarga N temos:

$$N_{i,j}^{n+1} = N_{i,j}^n - \Delta t \left(\frac{N_{i,j+1}^{2n} - N_{i,j-1}^{2n}}{2\Delta y} + \frac{(MN)_{i+1,j}^n - (MN)_{i-1,j}^n}{2\Delta x} + gD_{i,j}^n \frac{\eta_{i+1,j}^n - \eta_{i-1,j}^n}{2\Delta y} + f_{i,j}^n \right) \quad (55)$$

Simulações Computacionais

Forma conservativa 1D e 2D

As equações (43), (44) e (45) foram implementadas em python para descrever a evolução temporal das variáveis h , u e v em duas dimensões.

As condições de contorno dos exemplos obedecem as expressões:

- $u(x_f, y) = -u(x_f - \Delta x, y)$
- $u(x_i, y) = -u(x_i + \Delta x, y)$
- $v(x, y_f) = -v(x, y_f - \Delta y)$
- $v(x, y_i) = -v(x, y_i + \Delta y)$
- Nos contornos de x: $\frac{\partial h}{\partial x} = 0$, discretizando essa derivada temos que: $h_{i(+/-)1,j} = h_{i,j}$
- Nos contornos de y: $\frac{\partial h}{\partial y} = 0$, discretizando essa derivada temos que: $h_{i,j(+/-)1} = h_{i,j}$

Para a solução do exemplo em 1D abaixo foi utilizado o mesmo código do conservativo 2D, porém desconsiderando a contribuição da direção \vec{y} .

Códigos das Equações Conservativas

O código 1 foi escrito na linguagem *Python* (<https://www.python.org/>) e resolve os exemplos 1 e 2 que serão apresentados abaixo.

Código 1 - Forma Conservativa das Equações de Águas Rasas

O código 2 foi escrito na linguagem *Python* (<https://www.python.org/>) e serve para comparar a solução numérica de (39) com a solução exata.

Código 2 - Método FTCS explícito

O código 3 foi escrito na linguagem *Python* (<https://www.python.org/>) e serve para comparar a solução numérica de (39) com a solução exata.

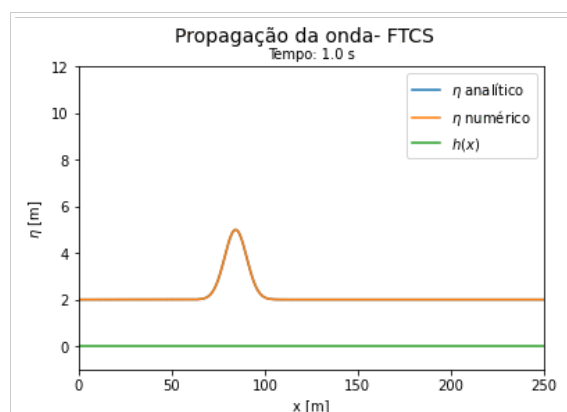
Código 3 - Método FTCS implícito

Resultados

Comparação entre a solução exata e a numérica: para verificar se o cálculo das equações de águas rasas utilizando FTCS explícito e implícito estão funcionando, partimos da situação simplificada das equações dadas por (46) e (47). Neste problema consideramos a velocidade e a profundidade constantes com os valores respectivos de 4.3 m/s e 2 m. O deslocamento de água inicial é representado por uma Gaussiana centrada em 80m, de amplitude 2 m e largura 70 m, nesta situação a solução exata de (39) é dada por:

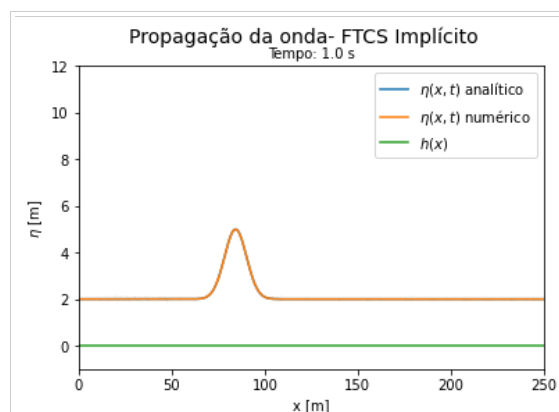
$$\eta = 2 + 3 \cdot \exp\left(-\frac{((x - 80) - ut)^2}{70}\right)$$

Do código 2 obtemos as seguintes curvas ao longo do tempo. Vemos que a solução numérica por FTCS explícito se aproxima do resultado exato para tempos curtos e se afasta da solução exata a medida que o tempo avança.



Comparação entre a solução exata e a numérica por FTCS explícito. Forma conservativa.

Do código 3 obtemos as seguintes curvas ao longo do tempo. Vemos que a solução numérica por FTCS implícito se aproxima do resultado analítico para tempos curtos e se afasta da solução exata a medida que o tempo avança, porém de forma mais lenta que o método explícito.

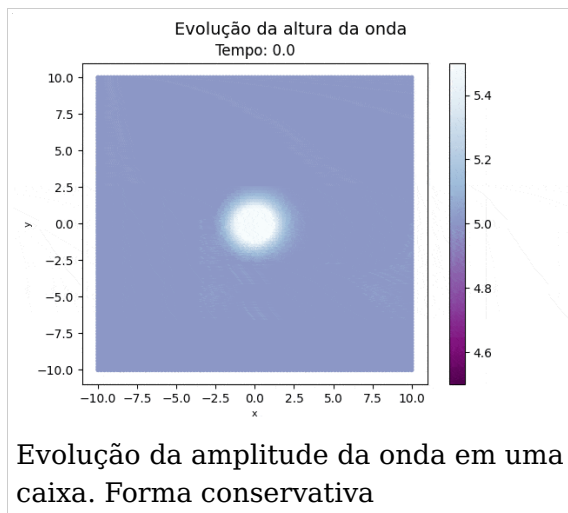


Comparação entre a solução exata e a numérica por FTCS implícito. Forma conservativa.

$u\Delta t$ deve ser significativamente menor que Δx para que os métodos FTCS funcionem.

Exemplo 1. Onda confinada em uma caixa com profundidade constante: obtemos a evolução da amplitude da onda apresentada no GIF abaixo, através do código 1,

utilizando que a profundidade é constante, e que tanto a velocidade quanto altura da onda são inicialmente funções gaussianas centradas no espaço.



Podemos observar que a onda diminui sua amplitude a medida que ela se propaga no espaço. Posteriormente, são observados fenômenos de interferência construtiva e destrutiva devido a reflexão da onda com as paredes da caixa.

Exemplo 2. Onda confinada em uma caixa com profundidade variável: utilizando a função $s = \tanh(x)$ foi possível simular uma onda chegando em uma praia, esse exemplo foi feito em 1D conservativo.

Para fazer esse exemplo usamos o código 1, porém desconsideramos as derivadas em x e inicializamos os vetores da altura e velocidade com a discretização em apenas uma dimensão (abaixo descrevemos está parte do código). Deve-se notar que o problema passa a ter um índice, pois a discretização não forma mais uma malha, então pode ser retirado um laço *for* do código.

```
%% Discretização do espaço x
x = np.linspace(L_x0, L_xf, NX)

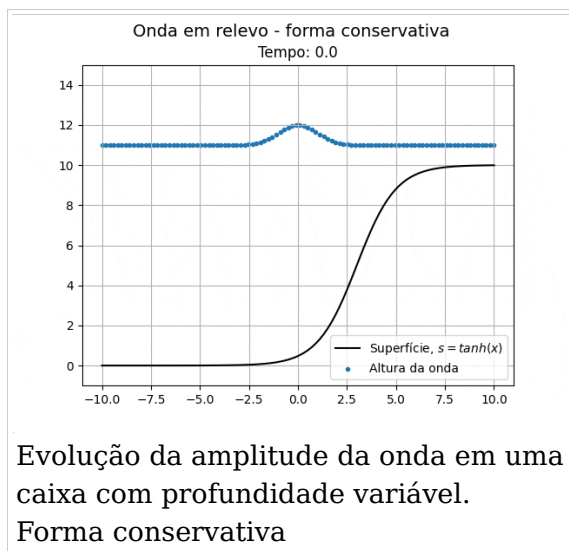
%% Condições iniciais da superfície e da água

# Superfície
b = 5 * np.tanh((x - L_xf*0.3) / 2) # função tangente
b += np.full(shape=(np.shape(b)), fill_value=-np.min(b)) # aqui é somado só para a função começar em zero

# Onda e velocidade
sigma = 1.0 # distribuição da onda
sigma_v = 1.0 # distribuição da onda

h_2d = 1.1 * max(b) * np.ones(shape=np.shape(x)) + np.exp(-((x)**2/(2*(sigma**2))))
h_2d -= b

u_2d = 0.08 * np.exp(-((x)**2/(2*(sigma_v**2))))
```



Forma dissipativa 2D

Os exemplos que seguem utilizam o código abaixo para calcular as equações de águas rasas não conservativa (38), (43) e (44) nos passos de tempo de η , M , N , onde as funções em python *atualiza_eta*, *atualiza_M*, e *atualiza_N* implementam computacionalmente isto. Para implementar estas funções e outras ideias do nosso programa, o seguinte código fonte da referência ^[11] foi usado como base.

Códigos das Equações Não Conservativas

O código 4 foi escrito na linguagem *Python* (<https://www.python.org/>) e resolve o exemplo 3 que será apresentado abaixo.

Código 4 - Forma Não Conservativa das Equações de Águas Rasas

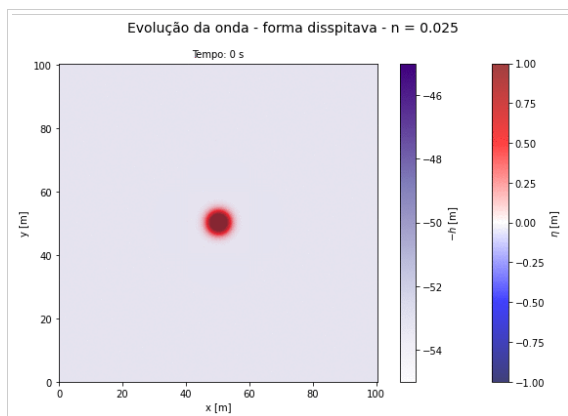
O código 5 foi escrito na linguagem *Python* (<https://www.python.org/>) e resolve o exemplo 4 que será apresentado abaixo.

Código 5 - Forma Não Conservativa das Equações de Águas Rasas

Exemplo 3 - Onda Confinada em uma Caixa

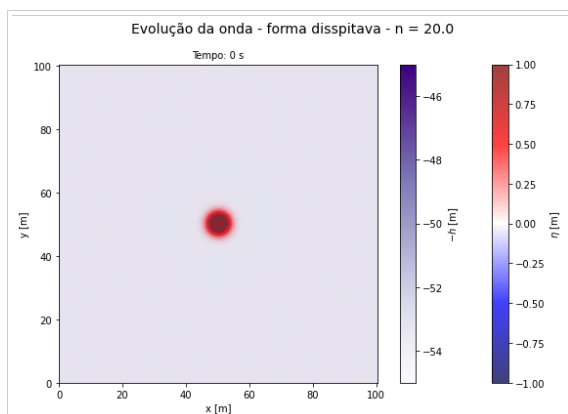
Através do código 4 fizemos a simulação da propagação de uma onda em uma caixa de $L_x = 100$ m e $L_y = 100$ m em uma profundidade $h(x, y) = 50$ m. O fluxo de descarga e o deslocamento do volume de água inicial, ambas com suas devidas unidades físicas, são Gaussianas centradas em 80, com amplitude igual a 1 e largura igual a 70.

Exemplo 3 com coeficiente de Manning igual a 0.025.



Evolução da amplitude da onda em uma caixa com profundidade de 50 metros, coeficiente de Manning $n = 0.025$. Forma dissipativa.

Exemplo 3 com coeficiente de Manning igual a 20.0.

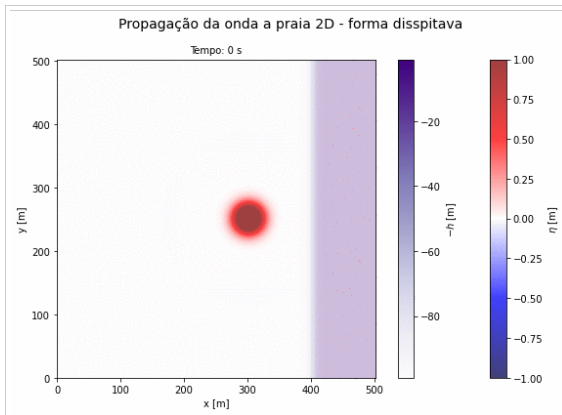


Evolução da amplitude da onda em uma caixa com profundidade de 50 metros, coeficiente de Manning $n = 20$. Forma dissipativa.

Dos gráficos acima, podemos observar que quanto maior for o coeficiente de Manning mais rápida a onda irá atenuar a sua amplitude. Esta observação faz sentido, já que as forças de fricção sobre o fluido são maiores na situação em que o coeficiente de Manning tem maior valor.

Exemplo 4 - Tsunami

Simulação da propagação de uma onda em uma caixa de $L_x = 500\text{ m}$ e $L_y = 500\text{ m}$, em uma profundidade variável, que respeita a função tangente hiperbólica. O fluxo de descarga e o deslocamento do volume de água inicial, ambas com suas devidas unidades físicas, são Gaussianas centradas em 300, com amplitude igual a 2 e largura igual a 500.



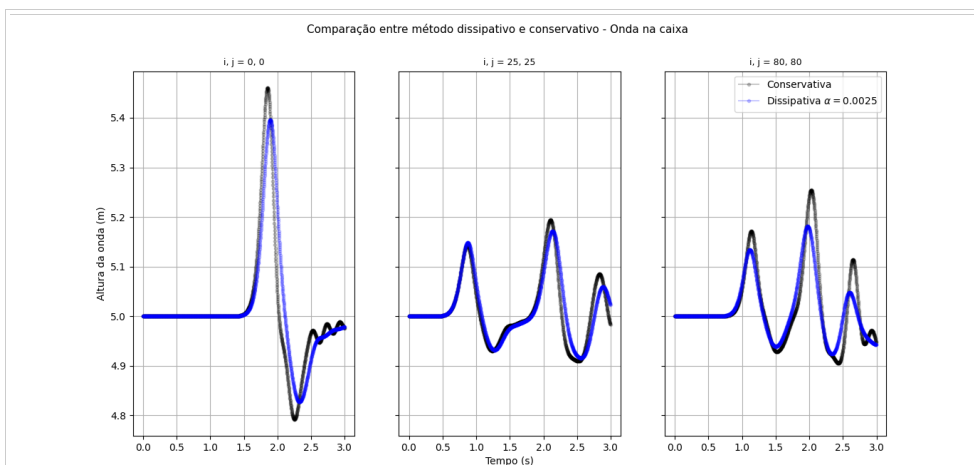
Evolução da amplitude da onda em uma caixa com profundidade variável, coeficiente de Manning $n = 0.025$. Forma dissipativa.

A medida que o fundo do oceano diminui sua profundidade a velocidade da onda diminui e a amplitude aumenta. Esta simulação mostra o comportamento físico da propagação de um Tsunami em direção ao litoral.

Comparação entre Métodos

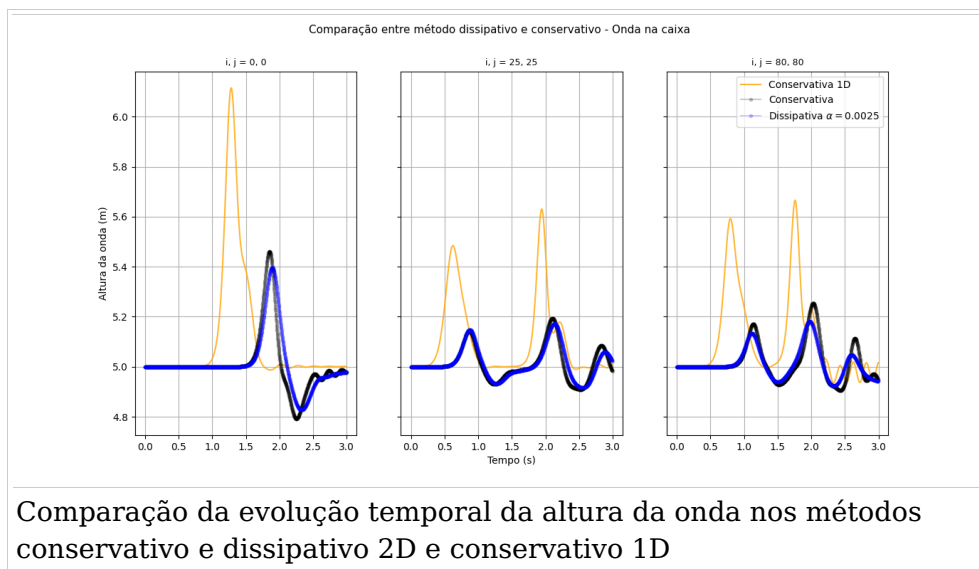
Onda confinada em uma caixa

Abaixo é mostrado o gráfico de evolução temporal da altura da onda em três pontos distintos do sistema (utilizando os mesmos parâmetros que foi aplicado ao método conservativo com a onda em uma caixa de profundidade constante em todos os outros métodos). Pode-se perceber que com o passar do tempo o movimento das duas equações começa a divergir, mesmo com o fator de fricção baixo.

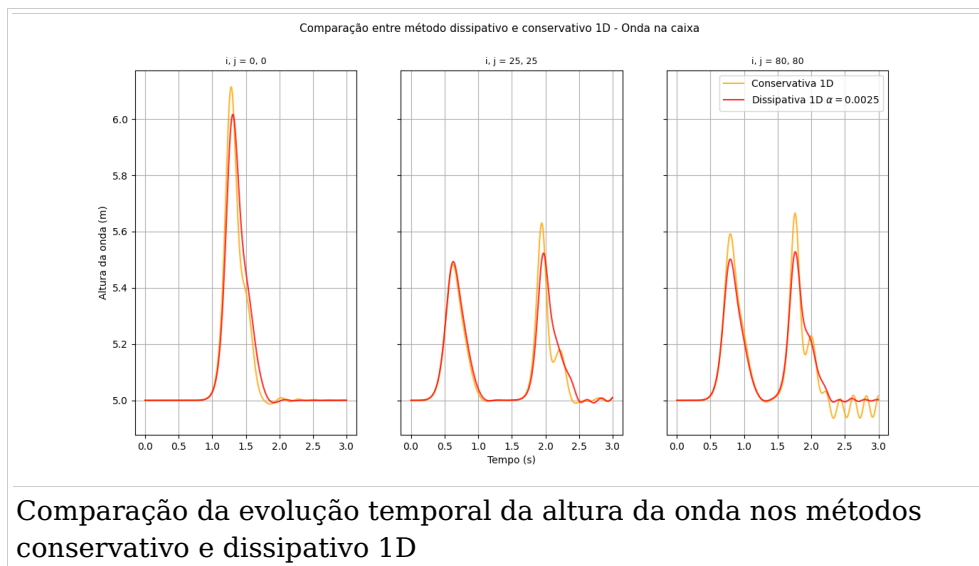


Comparação da evolução temporal da altura da onda nos métodos conservativo e dissipativo

Para o método 1D é de se esperar que exista menos interferências entre as ondas, pois só existe parede nos finais do sistema, além disso, a onda só precisa se espalhar em uma direção, então a sua amplitude é maior.



Também é possível perceber a diferença entre métodos observando apenas em uma direção (\vec{x}), por causa dos termos de fricção e viscosidade.



Referências

1. ↑ Equação da continuidade mássica: balanços de massa diferenciais. Bloom Consultoria. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=pEip-GvO0LM&list=PL1yqHjPQz-Lqjri07DqZ3RsSWJfICvdiu&index=3>>
2. ↑ Equação de Navier-Stokes (Parte 1) - Derivadas materiais. Bloom Consultoria. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=FLoZODPpayM>
3. ↑ Equação de Navier-Stokes (Parte 2) - Equação diferencial da quantidade de movimento. Bloom Consultoria. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=e06ZRzdO4iM>
4. ↑ Equação de Navier-Stokes (Parte 3) - Tensões Normais e Cisalhantes. Bloom Consultoria. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=na2kGOSYNv8>
5. ↑ SEGUR, Harvey; YAMAMOTO, Hiroki. Lecture 8: The Shallow-Water Equations. Disponível em: <<https://docplayer.net/49487265-Lecture-8-the-shallow-water-equations.html>>
6. ↑ Leibniz integral rule. Disponível em: https://en.wikipedia.org/wiki/Leibniz_integral_rule
7. ↑ ^{7,0} ^{7,1} IMAMURA, Fumihiko. Tsunami Modelling Manual. Disponível em: <http://www.tsunami.civil.tohoku.ac.jp/hokusai3/J/projects/manual-ver-3.1.pdf>

8. ↑ LINSLEY, Ray K.; FRANZINI, Joseph B. Water Resources Engineering.
9. ↑ GARCÍA-NAVARRO, P; et al. The shallow water equations: An example of hyperbolic system. Espanha: 2008. Disponível em: <<https://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.571.1364&rep=rep1&type=pdf>>
10. ↑ KUEHBACHER, Christian. Shallow Water: Derivation and Applications. Disponível em: <<http://www.mathematik.tu-dortmund.de/lisiii/cms/papers/Kuehbacher2009.pdf>>
11. ↑ KOEHN, Daniel. 2D Shallow Water Equations. Disponível em: <https://github.com/daniel-koehn/Differential-equations-earth-system/blob/master/10_Shallow_Water_Equation_2D/01_2D_Shallow_Water_Equations.ipynb>

Disponível em "http://fiscomp.if.ufrgs.br/index.php?title=Equa%C3%A7%C3%A3o_de_%C3%A1guas_Rasas&oldid=6026"

-
- Esta página foi modificada pela última vez à(s) 22h03min de 21 de outubro de 2021.
 - Esta página foi acessada 17 587 vezes.