Teorema de Keisler-Shelah

Universidad de los Andes

Autor: Paulo Andrés Soto Moreno
Asesor: Alexander Jonathan Berenstein Opscholtens

Una tesis presentada como cumplimiento parcial para adquirir el título de Matemático.

Bogotá-Colombia
2019

A mi mamá

Índice

1 Introducción

El teorema de Keisler-Shelah afirma que dado un lenguaje $\mathcal{L}$ arbitrario, dos $\mathcal{L}$-estructuras son elementalmente equivalentes si y sólo si existe un ultrafiltro para el cual sus ultrapotencias son isomorfas. La instancia en la que $\mathcal{L}$ es contable es un teorema estándar de la teoría de modelos y su demostración se apoya en argumentos de saturación y la hipótesis del continuo. El problema radica entonces en extender este resultado para lenguajes de cardinal arbitrario κ, y para ello, se construye un tipo de ultrafiltro cuyo rol es central para asegurar que las ultrapotencias de una estructura sean κ-saturadas. Tales ultrafiltros se denominan κ-buenos. Por otro lado, en [She71], Shelah demostró el teorema sin recurrir a ninguna hipótesis conjuntista. Posteriormente Chang y Keisler reescribieron tal demostración en [CK90]. El objetivo de este documento es entender dos instancias del teorema de Keisler-Shelah, primero considerando el caso clásico de estructuras de primer orden dado por Chang y Keisler en [CK90], y el caso de estructuras métricas de la lógica continua, siguiendo las ideas dadas por Henson e Iovino en [HI02].

A pesar de que la demostración del teorema de Keisler-Shelah es poco natural y, según Poizat en [Poi00], casi inútil para los teóricos de modelos, gracias a él se puede dar una descripción puramente algebraica —es decir, sin hablar de lógica, fórmulas o satisfacción– de las clases elementales de $\mathcal{L}$-estructuras: una clase K de $\mathcal{L}$-estructuras es elemental si y sólo si es cerrada bajo ultraproductos e isomorfismos, y su complemento es cerrado bajo ultrapotencias (véase el corolario 6.1.6 de [CK90]). En segundo lugar, el teorema permite reformular, como corolario, una versión más fuerte del teorema de interpolación de Craig, como sigue: si K y L son dos clases disyuntas de $\mathcal{L}$-estructuras, cerradas bajo ultraproductos e isomorfismos, entonces existe una clase elemental básica M tal que $K \subseteq M$ y $L \cap M = \emptyset$ (véase el corolario 6.1.7 de [CK90]). Para mí, el teorema y su formulación en lógica continua no son menos que una amalgamación casi milagrosa de la teoría de conjuntos, la teoría de modelos y el análisis. De ahí mi interés por este teorema.

Este documento se organizará siguiendo la exposición de Chang y Keisler en [CK90] sobre ultraproductos y sus aplicaciones, modificando cada argumento para reconstruir resultados análogos en lógica continua.
La sección 2 se encargará de presentar la construcción de los ultraproductos en cada una de las lógicas a tratar. Se asumirá familiaridad con los conceptos básicos de lógica de primer orden y de lógica continua, por ejemplo, como se exponen en [CK90] y en [BYBHU08] respectivamente.
La sección 3 se encargará de la construcción de los ultrafiltros κ-buenos. Estos ultrafiltros inducen grados de saturación en sus ultraproductos, por lo que su construcción es necesaria en este documento.
Las secciones 4 y 5 se encargarán de exponer, bajo hipótesis conjuntistas, un resultado que implica el teorema de Keisler-Shelah; a saber, los teoremas 4.3.2 y 5.3.2. Para ello, en las subsecciones "Introducción y teorema de Łoś" se expondrán resultados básicos de teoría de modelos que permitan construir el isomorfismo, haciendo uso extensivo del concepto de saturación. En las subsecciones "$\aleph_1$-saturación" se demostrará que, bajo algunas hipótesis sobre el ultrafiltro y la cardinalidad del lenguaje, todo ultraproducto es $\aleph_1$-saturado. Finalmente, en las subsecciones "Cardinalidad arbitraria", se hará uso de los ultrafiltros κ-buenos para demostrar los teoremas mencionados anteriormente.
Por último, en la sección 6, se reescribirá la demostración dada por Shelah en [She71], con

la intensión de completar los detalles que él omitió. Para ello, en la subsección "Combinatoria" se define una noción de consistencia que resultará fundamental para la construcción del isomorfismo. Para finalizar el documento, las subsecciones "Primer orden" y "Lógica continua" exponen la demostración del teorema de Keisler-Shelah y su reformulación en lógica continua.

2 Preliminares

A lo largo de este documento, denotaremos como $\mathbb{N}^*$ al conjunto de los números naturales sin el cero.
Primero precisaremos la definición de filtro y de filtro propio. Dado un conjunto $I \neq \emptyset$ y $D \subseteq \mathcal{P}(I)$, decimos que D es un *filtro* si y sólo si se satisfacen las tres condiciones siguientes:

i. $I \in D$.

ii. Si $A, B \in D$, entonces $A \cap B \in D$.

iii. Si $A \in D$ y $A \subseteq B$, entonces $B \in D$.

Decimos que D es un *filtro propio* si es un filtro y $\emptyset \notin D$. Si D es un filtro y $F \subseteq \mathcal{P}(I)$, el *filtro generado por D y F*, denotado por (D, F), es el conjunto

$$\{A \in \mathcal{P}(I) : A \supseteq X \cap \bigcap_{i=1}^{n} Y_i \text{ para algún } X \in D, \text{ algún } n \in \mathbb{N}^* \text{ y algunos } Y_1, \ldots, Y_n \in F\}.$$

Si $F = \{A\}$, escribimos (D, A) en lugar de (D, F). Decimos que D es un *ultrafiltro* si es un filtro propio y para todo $A \in \mathcal{P}(I)$, $A \notin D$ si y sólo si $I \setminus A \in D$.

Ahora precisaremos las nociones de ultraproducto, equivalencia elemental e isomorfismo en cada una de las lógicas a tratar en este documento.

2.1 Primer orden

A lo largo del documento denotaremos las $\mathcal{L}$-estructuras con letras góticas mayúsculas, y su universo con su respectiva letra en cursiva mayúscula. Si $\mathfrak{A}$ es una $\mathcal{L}$-estructura con universo A, $|A|$ y $|\mathfrak{A}|$ denotarán indistintamente el cardinal de su universo, y si decimos que $a \in \mathfrak{A}$, nos referimos a que a es un elemento de A. Por otro lado, asumiremos que el símbolo $=$ está en todos los lenguajes.
Sea I un conjunto no vacío, D un ultrafiltro sobre I y sea $\{\mathfrak{A}_i : i \in I\}$ una familia de $\mathcal{L}$-estructuras con universos $\{A_i : i \in I\}$ respectivamente. Sean $(x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I}$ dos elementos de $\prod_{i\in I} A_i$. Decimos que $(x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I}$ son *equivalentes módulo D*, denotado por $(x_i)_{i\in I} \sim_D (y_i)_{i\in I}$, si $\{i \in I : x_i = y_i\} \in D$. Es fácil ver que $\sim_D$ es una relación de equivalencia.

Definición 2.1.1. *Definimos el* ultraproducto *de $\{\mathfrak{A}_i : i \in I\}$ módulo D como la $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{U} = (\prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i)_D$ con universo $(\prod_{i\in I} A_i)/\sim_D$ y con las interpretaciones siguientes:*

i. Si c es un símbolo de constante de $\mathcal{L}$,

$$c^{\mathfrak{U}} = ((c^{\mathfrak{A}_i})_{i\in I})_D,$$

ii. Si R es un símbolo de relación n-aria de $\mathcal{L}$ y $(a_1)_D, \ldots, (a_n)_D \in \mathfrak{A}$,

$$R^{\mathfrak{U}}((a_1)_D, \ldots, (a_n)_D) \text{ si y sólo si } \{i \in I : R^{\mathfrak{A}_i}(a_1(i), \ldots, a_n(i))\} \in D,$$

iii. Si f es un símbolo de función n-aria de $\mathcal{L}$ y $(a_1)_D, \ldots, (a_n)_D \in \mathfrak{A}$,

$$f^{\mathfrak{U}}((a_1)_D, \ldots, (a_n)_D) = ((f^{\mathfrak{A}_i}(a_i(i), \ldots, a_n(i)))_{i \in I})_D.$$

Si $\mathfrak{A}_i = \mathfrak{A}$ para todo $i \in I$, decimos que $\mathfrak{U}$ es la ultrapotencia de $\mathfrak{A}$ *módulo D, denotada por $\prod_D \mathfrak{A}$.*

Definición 2.1.2. *Decimos que dos $\mathcal{L}$-estructuras $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ son* elementalmente equivalentes*, denotado por $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, si y sólo si para toda $\mathcal{L}$-sentencia φ se tiene que*

$$\mathfrak{A} \models \varphi \textit{ si y sólo si } \mathfrak{B} \models \varphi.$$

Definición 2.1.3. *Decimos que dos $\mathcal{L}$-estructuras $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ son* isomorfas*, denotado por $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, si y sólo si existe una función sobreyectiva $\Phi : A \longrightarrow B$ tal que:*

· *Si c es un símbolo de constante de $\mathcal{L}$, entonces*

$$\Phi(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}},$$

· *Si R es un símbolo de constante n-aria de $\mathcal{L}$, entonces para toda tupla $a_1, \ldots, a_n \in A$ vale que*

$$R^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n) \textit{ si y sólo si } R^{\mathfrak{B}}(\Phi(a_1), \ldots, \Phi(a_n)),$$

· *Si f es un símbolo de función n-aria de $\mathcal{L}$, entonces para toda tupla $a_1, \ldots, a_n \in A$ vale que*

$$\Phi(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n)) = f^{\mathfrak{B}}(\Phi(a_1), \ldots, \Phi(a_n)).$$

A tal Φ la llamamos un isomorfismo.

2.2 Lógica continua

En esta lógica, de nuevo, denotaremos las $\mathcal{L}$-estructuras con letras góticas mayúsculas, y su universo con su respectiva letra en cursiva mayúscula. Así, dado un lenguaje $\mathcal{L}$, una *$\mathcal{L}$-estructura métrica* $\mathfrak{M}$ es un espacio métrico (M, d) dotado de estructura adicional, especificada por $\mathcal{L}$, donde la interpretación de todo símbolo de constante es un elemento de M, la interpretación de todo símbolo de relación n-aria es una función uniformemente continua de M^n en $[0, 1]$ y la interpretación de todo símbolo de función n-aria es una función uniformemente continua de M^n en M. Por otro lado, asumiremos siempre que el símbolo de función binaria d, que hace referencia a la métrica, pertenece a todos los lenguajes de esta lógica. El espacio métrico asociado a una $\mathcal{L}$-estructura debe ser completo y de diámetro menor o igual a 1. El universo de $\mathfrak{M}$ se define como M. La información sobre el diámetro de M y sobre los módulos de continuidad uniforme de cada función y cada relación está codificada en $\mathcal{L}$, es decir, para un mismo lenguaje $\mathcal{L}$, todas las $\mathcal{L}$-estructuras tienen el mismo diámetro y todas las interpretaciones de símbolos de función y relación tienen un módulo de continuidad uniforme común.
Sin embargo, la noción usual de módulo de continuidad uniforme se modificará para darle prioridad a las condiciones cerradas, como sigue: decimos que $\Delta : (0, 1] \longrightarrow (0, 1]$ es un *módulo de continuidad uniforme* para la función n-aria $f : (M, d) \longrightarrow (M', d')$ si y sólo si para todo par de tuplas $(a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_n) \in M^n$ y todo $\varepsilon \in (0, 1]$,

$$\max_{i=1}^{n} d(a_i, b_i) < \Delta(\varepsilon) \text{ implica que } d'\left(f(a_1, \ldots, a_n), f(b_1, \ldots, b_n)\right) \leq \varepsilon.$$

Ahora definiremos la noción de ultralímite para una familia de puntos de un espacio topológico.

Definición 2.2.1. *Sean X un espacio topológico, I un conjunto de índices no vacío y $\{x_i : i \in I\}$ un subconjunto de X. Si D es un ultrafiltro sobre I, decimos que un elemento y de X es el* ultralímite del conjunto $\{x_i : i \in I\}$ módulo D, *denotado por $y = \lim_{i,D} x_i$ si y sólo si para toda vecindad abierta U de y, el conjunto $\{i \in I : x_i \in U\}$ es un elemento de D. Cuando el ultrafiltro es claro por el contexto, sólo decimos que y es el* ultralímite *del conjunto $\{x_i : i \in I\}$.*

Es un ejercicio de topología general que un espacio topológico X es compacto y de Hausdorff si y sólo si para todo conjunto de índices I, todo ultrafiltro sobre I y todo subconjunto $\{x_i : i \in I\}$ de X, su ultralímite existe y es único.

Lema 2.2.1. *Sean X, Y espacios topológicos compactos, I un conjunto no vacío, D un ultrafiltro sobre I y sea $\{x_i : i \in I\} \subseteq X$. Entonces, si $f : X \longrightarrow Y$ es una función continua y $x \in X$ es tal que $x = \lim_{i,D} x_i$, se tiene que $f(x) = \lim_{i,D} f(x_i)$.*

Demostración.
Sea U una vecindad (abierta) de $f(x)$. Como f es continua, $V = f^{-1}(U)$ es una vecindad (abierta) de x. Como $x = \lim_{i,D} x_i$, se tiene que $\{i \in I : x_i \in V\} \in D$. El resultado se sigue de la contenencia

$$\{i \in I : x_i \in V\} \subseteq \{i \in I : f(x_i) \in U\}.$$

$\square$

Lema 2.2.2. *Sea X un intervalo cerrado y acotado de $\mathbb{R}$. Sean S un conjunto, $\{f_i : i \in I\}$ una familia de funciones de S en X y D un ultrafiltro sobre I. Entonces para todo $\varepsilon > 0$ existen unas familias de elementos de S, $(x_i)_{i \in I}, (y_i)_{i \in I}$, tales que*

$$\lim_{i,D} f_i(x_i) + \varepsilon \geq \lim_{i,D}(\sup_x(f_i(x))) \tag{1}$$

y

$$\lim_{i,D} f_i(y_i) \leq \lim_{i,D}(\inf_x(f_i(x))) + \varepsilon \tag{2}$$

Demostración.
Demostramos la afirmación del ínfimo. La afirmación del supremo se demuestra de manera análoga. Sea $\varepsilon > 0$. Para cada $i \in I$, escoja un $y_i \in S$ tal que $f_i(y_i) < \inf_x(f_i(x)) + \varepsilon$. Entonces

$$\lim_{i,D} f_i(y_i) \leq \lim_{i,D}(\inf_x(f_i(x))) + \varepsilon,$$

como se quería. $\square$

Lema 2.2.3. *Sea X un intervalo cerrado y acotado de $\mathbb{R}$. Sea S cualquier conjunto y sea $\{f_i : i \in I\}$ una familia de funciones de S en X. Sea también D un ultrafiltro sobre I. Entonces*

$$\sup_x(\lim_{i,D} f_i(x)) \leq \lim_{i,D}(\sup_x(f_i(x)))$$

y

$$\inf_x(\lim_{i,D} f_i(x)) \geq \lim_{i,D}(\inf_x(f_i(x))).$$

Demostración.
Demostramos la afirmación del ínfimo. La afirmación del supremo se demuestra de manera análoga. Para todo $i \in I$ y todo $x \in S$,

$$\inf_x f_i(x) \leq f_i(x).$$

Entonces, para todo $x \in S$,

$$\lim_{i,D}(\inf_x f_i(x)) \leq \lim_{i,D} f_i(x).$$

Como x es arbitrario,

$$\lim_{i,D}(\inf_x f_i(x)) \leq \inf_x(\lim_{i,D} f_i(x)),$$

como se quería. □

Ahora procederemos a construir el ultraproducto de una familia de $\mathcal{L}$-estructuras métricas. Primero construiremos el ultraproducto de una familia de espacios métricos y luego el ultraproducto de una familia de funciones uniformemente continuas. Sea I un conjunto no vacío, D un ultrafiltro sobre I y sea $\{(M_i, d_i) : i \in I\}$ una familia de espacios métricos completos, de diámetro a lo sumo K. Entonces $(\prod_{i \in I} M_i, d)$ con

$$d((x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I}) = \lim_{i,D} d_i(x_i, y_i)$$

es un espacio pseudométrico. Note que el ultralímite de las distancias existe y es único debido a que $[0, K]$ es un espacio compacto de Hausdorff. Así pues, sean $(x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} M_i$. Decimos que $(x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I}$ son *equivalentes módulo D,* denotado por $(x_i)_{i\in I} \sim_D (y_i)_{i\in I}$ si y sólo si $d((x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I}) = 0$.

Definición 2.2.2. *Definimos el* ultraproducto *de* $\{(M_i, d_i) : i \in I\}$ *módulo D como el espacio métrico*

$$(\prod_{i\in I} M_i{\big/}{\sim_D}, d).$$

Denotaremos al universo de este espacio métrico como

$$(\prod_{i\in I} M_i)_D$$

La proposición 5.3 de [BYBHU08] muestra que este espacio métrico es completo.

Ahora, sea I un conjunto no vacío, D un ultrafiltro sobre I y sean $\{(M_i, d_i) : i \in I\}, \{(M_i', d_i') : i \in I\}$ dos familias de espacios métricos completos, de diámetro a lo sumo K. Sea $\{f_i : i \in I\}$ una familia de funciones n-arias tal que, para todo $i \in I$, $f_i : M_i^n \longrightarrow M_i'$ es uniformemente continua. Suponga además que todas las funciones de esa familia comparten el mismo módulo de continuidad uniforme Δ.

Definición 2.2.3. *Definimos el* ultraproducto *de* $\{f_i : i \in I\}$ *módulo D como la función*

$$(\prod_{i\in I} f_i)_D : (\prod_{i\in I} M_i)_D^n \longrightarrow (\prod_{i\in I} M_i')_D$$

dada por

$$(\prod_{i\in I} f_i)_D \left(((x_i^1)_{i\in I})_D, \ldots, ((x_i^n)_{i\in I})_D\right) = ((f_i(x_i^1, \ldots, x_i^n))_{i\in I})_D.$$

Se puede ver que bajo esta definición de $(\prod_{i\in I} f_i)_D$, ella resulta ser una función uniformemente continua con módulo de continuidad uniforme Δ.

Ahora estamos listos para definir el ultraproducto de una familia de $\mathcal{L}$-estructuras métricas. Sea I un conjunto no vacío, D un ultrafiltro sobre I y sea $\{\mathfrak{M}_i : i \in I\}$ una familia de $\mathcal{L}$-estructuras métricas asociadas a los espacios métricos $\{(M_i, d_i) : i \in I\}$.

Definición 2.2.4. *Definimos el* ultraproducto *de* $\{\mathfrak{M}_i : i \in I\}$ *módulo* D *como la* $\mathcal{L}$*-estructura* $\mathfrak{U}$ *asociada al espacio métrico dado por el ultraproducto de* $\{(M_i, d_i) : i \in I\}$ *y con las interpretaciones siguientes:*

· *Si* c *es un símbolo de constante de* $\mathcal{L}$,

$$c^{\mathfrak{U}} = ((c^{\mathfrak{M}_i})_{i\in I})_D,$$

· *Si* R *es un símbolo de relación* n*-aria y* $(m_1)_D, \dots, (m_n)_D \in \mathfrak{M}$,

$$\begin{aligned} R^{\mathfrak{U}}((m_1)_D, \dots, (m_n)_D) &= (\prod_{i\in I} R^{\mathfrak{M}_i})_D((m_1)_D, \dots, (m_n)_D) \\ &= \lim_{i,D} R^{\mathfrak{M}_i}(m_1(i), \dots, m_n(i)) \end{aligned}$$

pues $(([0,1], d))_D \cong ([0,1], d)$.

· *Si* f *es un símbolo de función* n*-aria y* $(m_1)_D, \dots, (m_n)_D \in \mathfrak{M}$,

$$f^{\mathfrak{U}}((m_1)_D, \dots, (m_n)_D) = (\prod_{i\in I} f^{\mathfrak{M}_i})_D((m_1)_D, \dots, (m_n)_D).$$

Si $\mathfrak{M}_i = \mathfrak{M}$ *para todo* $i \in I$, *decimos que* $\mathfrak{U}$ *es la* ultrapotencia de $\mathfrak{M}$ *módulo* D, *denotada por* $(\mathfrak{M})_D$.

Antes de continuar, le sugerimos al lector que consulte las definiciones de $\mathcal{L}$-términos, $\mathcal{L}$-fórmulas, $\mathcal{L}$-sentencias y $\mathcal{L}$-condiciones en el artículo [BYBHU08].

Definición 2.2.5. *Decimos que dos* $\mathcal{L}$*-estructuras* $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ *son* elementalmente equivalentes, *denotado por* $\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{N}$, *si y sólo si para toda* $\mathcal{L}$*-sentencia* φ *se tiene que*

$$\varphi^{\mathfrak{M}} = \varphi^{\mathfrak{N}}.$$

Definición 2.2.6. *Decimos que dos* $\mathcal{L}$*-estructuras* $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ *son* isomorfas, *denotado por* $\mathfrak{M} \cong \mathfrak{N}$, *si y sólo si existe una isometría sobreyectiva* $\Phi : M \longrightarrow N$ *tal que*

· *Si* c *es un símbolo de constante de* $\mathcal{L}$, *entonces*

$$\Phi(c^{\mathfrak{M}}) = c^{\mathfrak{N}},$$

· *Si* R *es un símbolo de constante* n*-aria de* $\mathcal{L}$, *entonces para toda tupla* $m_1, \dots, m_n \in M$ *vale que*

$$R^{\mathfrak{M}}(m_1, \dots, m_n) = R^{\mathfrak{N}}(\Phi(m_1), \dots, \Phi(m_n)),$$

· *Si* f *es un símbolo de función* n*-aria de* $\mathcal{L}$, *entonces para toda tupla* $m_1, \dots, m_n \in M$ *vale que*

$$\Phi(f^{\mathfrak{M}}(m_1, \dots, m_n)) = f^{\mathfrak{N}}(\Phi(m_1), \dots, \Phi(m_n)).$$

A tal Φ *la llamamos un* isomorfismo.

3 Ultrafiltros κ-buenos

En este capítulo construiremos un ultrafiltro cuyas propiedades inducen grados de saturación en ultrapotencias de estructuras en las dos lógicas que se estudiarán más adelante.

Definición 3.0.1. *Sea I un conjunto de cardinalidad κ y sea D un ultrafiltro sobre I. Decimos que D es* uniforme *si todos sus elementos tienen cardinalidad κ.*

Definición 3.0.2. *Sea I un conjunto no vacío y sea D un ultrafiltro sobre I. Sea κ un cardinal infinito. Denotaremos el conjunto de subconjuntos finitos de κ como $\mathcal{P}_\omega(\kappa)$. De la misma manera, si Σ es un conjunto arbitrario, $\mathcal{P}_\omega(\Sigma)$ representa el conjunto de subconjuntos finitos de Σ. Decimos que una función $f : \mathcal{P}_\omega(\kappa) \longrightarrow D$ es* monótona *si para todo par $\sigma, \tau \in \mathcal{P}_\omega(\kappa)$, $\sigma \subseteq \tau$ implica que $f(\tau) \subseteq f(\sigma)$. Decimos que una función $g : \mathcal{P}_\omega(\kappa) \longrightarrow D$ es* aditiva *si para todo par $\sigma, \tau \in \mathcal{P}_\omega(\kappa)$, $g(\sigma \cup \tau) = g(\sigma) \cap g(\tau)$. Si para todo $\sigma \in \mathcal{P}_\omega(\kappa)$ vale que $g(\sigma) \subseteq f(\sigma)$, decimos que $g \leq f$.*

Note que si F es el conjunto de funciones monótonas de $\mathcal{P}_\omega(\kappa)$ en $\mathcal{P}(\kappa)$, entonces $|F| \geq 2^\kappa$ pues toda función constante es monótona, y $|F| \leq 2^\kappa$ pues hay a lo sumo $(2^\kappa)^\kappa = 2^\kappa$ funciones de $\mathcal{P}_\omega(\kappa)$ en $\mathcal{P}(\kappa)$; de manera que $|F| = 2^\kappa$.

Definición 3.0.3. *Sea I un conjunto no vacío y sea D un ultrafiltro sobre I. Sea κ un cardinal infinito. Decimos que D es un ultrafiltro κ-*bueno *si para todo cardinal $\lambda < \kappa$ y para toda función monótona $f : \mathcal{P}_\omega(\lambda) \longrightarrow D$ existe una función aditiva $g : \mathcal{P}_\omega(\lambda) \longrightarrow D$ tal que $g \leq f$.*

Note que si un ultrafiltro es κ-bueno, entonces también es λ-bueno para todo cardinal $\lambda < \kappa$. Además, note que todo ultrafiltro es $\aleph_1$-bueno.

Definición 3.0.4. *Decimos que un ultrafiltro D es* contablemente incompleto *si y sólo si existe una familia enumerable de elementos de D cuya intersección es vacía.*

La meta de este capítulo es probar el siguiente teorema:

Teorema 3.0.1. *Sea I un conjunto de cardinalidad κ. Entonces existe un ultrafiltro κ^+-bueno contablemente incompleto sobre I.*

Para demostrar este teorema, presentaremos una serie de lemas que serán útiles en la construcción del ultrafiltro.

Lema 3.0.1. *Un ultrafiltro D es κ^+-bueno si y sólo si para toda función monótona $f : \mathcal{P}_\omega(\kappa) \longrightarrow D$ existe una función aditiva $g : \mathcal{P}_\omega(\kappa) \longrightarrow D$ tal que $g \leq f$.*

Demostración.
($\Rightarrow$) Trivial.
($\Leftarrow$) Sea $\lambda < \kappa^+$ y sea $f : \mathcal{P}_\omega(\lambda) \longrightarrow D$ una función monótona. Entonces $\lambda \leq \kappa$. Defina $f' : \mathcal{P}_\omega(\kappa) \longrightarrow D$ como $f'(\sigma) = f(\lambda \cap \sigma)$. Tenemos entonces la afirmación siguiente.

· f' **es monótona** :
Sean $\sigma, \tau \in \mathcal{P}_\omega(\kappa)$ tales que $\sigma \subseteq \tau$. Entonces $\lambda \cap \sigma \subseteq \lambda \cap \tau$. Como f es monótona, $f'(\tau) = f(\lambda \cap \tau) \subseteq f(\lambda \cap \sigma) = f'(\sigma)$.

Sea $g' : \mathcal{P}_\omega(\kappa) \longrightarrow D$ una función aditiva tal que $g' \leq f'$, y defina $g : \mathcal{P}_\omega(\lambda) \longrightarrow D$ como la restricción de g' a $\mathcal{P}_\omega(\lambda)$. Las afirmaciones siguientes concluyen la demostración.

· $g \leq f$:
Sea $\sigma \in \mathcal{P}_\omega(\lambda)$. Entonces $g(\sigma) = g'(\sigma) \subseteq f'(\sigma) = f(\lambda \cap \sigma) = f(\sigma)$.

· g **es aditiva** :
Sean $\sigma, \tau \in \mathcal{P}_\omega(\lambda)$. Entonces $g(\sigma \cup \tau) = g'(\sigma \cup \tau) = g'(\sigma) \cap g'(\tau) = g(\sigma) \cap g(\tau)$.

□

Lema 3.0.2. *Sea κ un cardinal infinito. Suponga que X es un conjunto de cardinalidad κ y sea $\{Y_x\}_{x \in X}$ una familia de conjuntos con cardinalidad κ. Entonces existe una familia de conjuntos $\{Z_x\}_{x \in X}$ tal que para todo $x, y \in X$, $Z_x \subseteq Y_x$, $|Z_x| = \kappa$ y $Z_x \cap Z_y = \emptyset$ siempre que $x \neq y$.*

Demostración.
Suponga que $X = \kappa$. Para cada ordinal $\beta \leq \kappa$, sea $X_\beta = \{(\gamma, \delta) \in \beta \times \beta : \gamma \leq \delta < \beta\}$. Como κ es un ordinal límite, $X_\kappa = \bigcup_{\beta < \kappa} X_\beta$. Encontraremos una función f con dominio X_κ que sea inyectiva y tal que

$$f(\gamma, \delta) \in Y_\gamma \text{ siempre que } \gamma \leq \delta < \kappa. \tag{3}$$

Una vez se construya la función f, defina

$$Z_\gamma = \{f(\gamma, \delta) \in Y_\gamma : \gamma \leq \delta < \kappa\}.$$

Esta familia satisface la conclusión del teorema. Sean $\beta, \beta' < \kappa$.

· $Z_\beta \subseteq Y_\beta$:
Claro.

· $|Z_\beta| = \kappa$:
$|Z_\beta| = |\kappa \setminus \beta| = \kappa$.

· $Z_\beta \cap Z_{\beta'} = \emptyset$ **siempre que** $\beta \neq \beta'$:
Si $z \in Z_\beta \cap Z_{\beta'}$, entonces existen unos ordinales $\delta, \delta' < \kappa$ tales que $\beta \leq \delta$, $\beta' \leq \delta'$ y $z = f(\beta, \delta) = f(\beta', \delta')$. Como f es inyectiva, $\beta = \beta'$, lo que es absurdo.

Definimos f usando inducción transfinita. Sea $\beta < \kappa$.

· β **es un ordinal sucesor** :
Sea α un ordinal tal que $\beta = \alpha + 1$ y suponga que f_α es una función inyectiva, con dominio X_α, que satisface (3). Note que $X_\beta = X_\alpha \cup \{(\gamma, \alpha) : \gamma \leq \alpha\}$. Sea $(\gamma, \delta) \in X_\beta$. Si $(\gamma, \delta) \in X_\alpha$, defina $f_\beta(\gamma, \delta) = f_\alpha(\gamma, \delta)$, que por hipótesis es un elemento de Y_γ. Si no, entonces $\delta = \alpha$. Defina $f_\beta(\gamma, \alpha)$ como un elemento cualquiera de $Y_\gamma \setminus (Im(f_\alpha) \cup \{f_\beta(\gamma', \alpha) : \gamma' < \gamma\})$, que existe pues $|Im(f_\alpha) \cup \{f_\beta(\gamma', \alpha) : \gamma' < \gamma\}| \leq |\alpha| < \kappa = |Y_\gamma|$. Así, por construcción, f_β es inyectiva y $f_\beta(\gamma, \delta) \in Y_\gamma$ siempre que $\gamma \leq \delta < \kappa$.

· β **es un ordinal límite** :
Suponga que $\{f_\alpha : \alpha < \beta\}$ es una familia creciente de funciones inyectivas, con dominios $\{X_\alpha : \alpha < \beta\}$ respectivamente, que satisfacen (3). Defina $f_\beta = \bigcup_{\alpha < \beta} f_\alpha$, que tiene dominio $\bigcup_{\alpha < \beta} X_\alpha = X_\beta$. Entonces f_β es inyectiva y $f_\beta(\gamma, \delta) \in Y_\gamma$ siempre que $\gamma \leq \delta < \kappa$.

Defina entonces $f = \bigcup_{\beta < \kappa} f_\beta$, que tiene dominio X_κ. Como en el paso anterior, f es inyectiva y satisface (3), como se quería. □

Definición 3.0.5. *Sea* Π *una colección no vacía de particiones de* κ *tal que cada partición tiene exactamente* κ *clases de equivalencia, y sea* F *un filtro sobre* κ. *Decimos que el par* (Π, F) *es* consistente *si y sólo si para cualesquiera* $X \in F$, $n \in \mathbb{N}^*$, $P_1, \ldots, P_n \in \Pi$ *diferentes dos a dos,* $X_1 \in P_1, \ldots, X_n \in P_n$ *se tiene que*

$$X \cap \bigcap_{i=1}^{n} X_i \neq \emptyset.$$

Note que, en particular, si F es un filtro propio, $E \subseteq \mathcal{P}(I)$ y $(\Pi, (F, E))$ es consistente, entonces (F, E) es un filtro propio.

Lema 3.0.3. *Sea* κ *un cardinal infinito y sea* F *un filtro uniforme sobre* κ *generado por un subconjunto* $E \subseteq F$ *de cardinalidad a lo sumo* κ. *Entonces existe una colección* Π *de particiones de* κ *tal que* $|\Pi| = 2^\kappa$ *y tal que* (Π, F) *es consistente.*

Demostración.
Como $|\mathcal{P}_\omega(E)| = |E| \leq \kappa$, sea $\{E_\beta\}_{\beta<\kappa}$ una lista (con posibles repeticiones) de todas las intersecciones finitas de elementos de E. Como el filtro es uniforme, cada E_β tiene cardinalidad κ. Por el lema 3.0.2, existe una familia $\{I_\beta\}_{\beta<\kappa}$ tal que para todo $\beta, \beta' < \kappa$, $|I_\beta| = \kappa$, $I_\beta \subseteq E_\beta$ e $I_\beta \cap I_{\beta'} = \emptyset$ siempre que $\beta \neq \beta'$. Considere el conjunto

$$B = \{(s, r) : s \in \mathcal{P}_\omega(\kappa) \text{ y } r : \mathcal{P}(s) \longrightarrow \kappa\}. \tag{4}$$

Se sigue entonces la afirmación siguiente.

· $|B| = \kappa$:
Hay por lo menos κ funciones constantes hacia κ, luego $|B| \geq \kappa$. Por otro lado, $B \subseteq \mathcal{P}_\omega(\kappa) \times \bigcup_{s \in \mathcal{P}_\omega(\kappa)} \kappa^{\mathcal{P}_\omega(s)}$, luego $|B| \leq \kappa \cdot (\kappa \times \kappa) = \kappa$.

Sea $\{(s_\xi, r_\xi) : \xi < \kappa\}$ una enumeración de B. Para todo $J \subseteq \kappa$, defina la función $f_J : \kappa \longrightarrow \kappa$ como

$$f_J(\xi) = \begin{cases} r_\xi(J \cap s_\xi) & \text{si } \xi \in \bigcup_{\beta<\kappa} I_\beta, \\ 0 & \text{de lo contrario.} \end{cases}$$

Tenemos la afirmación siguiente.

· $|\{f_J : J \subseteq \kappa\}| = 2^\kappa$:
Si $J_1 \neq J_2$ se puede asumir, sin pérdida de generalidad, que hay un $x \in \kappa$ tal que $x \in J_1$ pero $x \notin J_2$. Sea $s = \{x\}$ y sea $r = \{(0, 0), (\{x\}, 1)\}$ (recuerde que $0{=}\emptyset$, $1 = \{\emptyset\}$, etcétera). Entonces $(s, r) \in B$, luego existe un $\xi < \kappa$ tal que $(s, r) = (s_\xi, r_\xi)$. Por lo tanto, $f_{J_1}(\xi) = r_\xi(J_1 \cap s_\xi) = r(J_1 \cap s) = r(\{x\}) = 1$ y $f_{J_2}(\xi) = r_\xi(J_2 \cap s_\xi) = r(J_2 \cap s) = r(0) = 0$, luego $|\{f_J : J \subseteq \kappa\}| \geq 2^\kappa$. Por otro lado, hay a lo sumo $\kappa^\kappa = 2^\kappa$ funciones de κ en κ, luego $|\{f_J : J \subseteq \kappa\}| \leq 2^\kappa$.

Defina $\Pi = \{\{f_J^{-1}(\gamma) : \gamma < \kappa\} : J \subseteq \kappa\}$. La afirmación siguiente concluye la demostración del lema.

· (Π, F) **es consistente** :
Sean $X \in F, n \in \mathbb{N}^*, J_1, \ldots, J_n \subseteq \kappa$ diferentes dos a dos, $\gamma_1, \ldots, \gamma_n < \kappa$. Queremos mostrar que hay un $\xi < \kappa$ tal que $\xi \in X \cap \bigcap_{i=1}^{n} f_{J_i}^{-1}(\{\gamma_i\})$. Como F está generado

por E, existe un $\beta < \kappa$ tal que $E_\beta \subseteq X$. Como $|I_\beta| = \kappa$, sea $\{(s_\xi, r_\xi) : \xi < \kappa\}$ una enumeración del conjunto B definido en (4) tal que

$$B = \{(s_\xi, r_\xi) : \xi \in I_\beta\}.$$

Sea s un subconjunto finito de κ tal que $s \cap J_i \neq s \cap J_j$ para todo par i, j con $1 \leq i < j \leq n$. El conjunto s existe pues los J_i son diferentes dos a dos. Escoja $r : \mathcal{P}(s) \longrightarrow \kappa$ tal que $r(J_i \cap s) = \gamma_i$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Entonces el par (s, r) es un elemento de B, y por lo tanto existe un $\xi \in I_\beta$ tal que $(s, r) = (s_\xi, r_\xi)$. Por construcción, $f_{J_i}(\xi) = r_\xi(J_i \cap s_\xi) = r(J_i \cap s) = \gamma_i$, luego $\xi \in \bigcap_{i=1}^{n} f_{J_i}^{-1}(\{\gamma_i\})$. Además, $\xi \in I_\beta \subseteq E_\beta \subseteq X$, como se quería.

□

Lema 3.0.4. *Sea κ un cardinal infinito. Suponga que (Π, F) es consistente, y sea $J \subseteq \kappa$. Entonces o bien $(\Pi, (F, \{J\}))$ es consistente o bien $(\Pi', (F, \{\kappa \setminus J\}))$ es consistente para algún $\Pi' \subseteq \Pi$ cofinito.*

Demostración.
Suponga que (Π, F) es consistente, sea $J \subseteq \kappa$ y suponga que el par $(\Pi, (F, \{J\}))$ no es consistente. Entonces existe un $X \in (F, \{J\})$, un $n \in \mathbb{N}^*$, unos $P_1, \ldots, P_n \in \Pi$ y unos $X_1 \in P_1, \ldots, X_n \in P_n$ tales que

$$X \cap \bigcap_{i=1}^{n} X_i = \emptyset.$$

Como $X \in (F, \{J\})$, existe un $Y \in F$ tal que $J \cap Y \subseteq X$, luego, en particular,

$$J \cap Y \cap \bigcap_{i=1}^{n} X_i = \emptyset,$$

de manera que

$$Y \cap \bigcap_{i=1}^{n} X_i \subseteq (\kappa \setminus J).$$

Sea $\Pi' = \Pi \setminus \{P_1, \ldots, P_n\}$. La siguiente afirmación concluye la demostración del lema.

· $(\Pi', (F, \{\kappa \setminus J\}))$ **es consistente** :
Sean $Z \in (F, \{\kappa \setminus J\}), m \in \mathbb{N}^*, P_1, \ldots, P_m \in \Pi'$ diferentes dos a dos y sean $Z_1 \in P_1, \ldots, Z_m \in P_m$. Como $Z \in (F, \{\kappa \setminus J\})$, existe un $W \in F$ tal que $(\kappa \setminus J) \cap W \subseteq Z$. Como (Π, F) es consistente, tenemos que

$$(Y \cap \bigcap_{i=1}^{n} X_i) \cap (W \cap \bigcap_{i=i}^{m} Z_i) \neq \emptyset,$$

y como

$$(Y \cap \bigcap_{i=1}^{n} X_i) \cap W \subseteq (\kappa \setminus J) \cap W \subseteq Z,$$

se sigue que

$$Z \cap \bigcap_{i=i}^{m} Z_i \neq \emptyset$$

como se quería.

□

Lema 3.0.5. *Sea κ un cardinal infinito. Suponga que (Π, F) es consistente. Sea p una función monótona de $\mathcal{P}_\omega(\kappa)$ en F y sea $P \in \Pi$. Entonces existe una extensión F' de F y una función aditiva $q : \mathcal{P}_\omega(\kappa) \longrightarrow F'$ tal que $q \leq p$ y tal que $(\Pi \setminus \{P\}, F')$ es consistente.*

Demostración.
Sean $\{X_\delta : \delta < \kappa\}, \{t_\delta : \delta < \kappa\}$ enumeraciones respectivas de P y de $\mathcal{P}_\omega(\kappa)$. Para cada $\delta < \kappa$ definimos la función $q_\delta : \mathcal{P}_\omega(\kappa) \longrightarrow \mathcal{P}(\kappa)$ dada por

$$q_\delta(s) = \begin{cases} p(t_\delta) \cap X_\delta & \text{si } s \subseteq t_\delta, \\ 0 & \text{de lo contrario.} \end{cases}$$

Note que para todo $\delta < \kappa$, $q_\delta(s) \subseteq p(t_\delta)$. Como (Π, F) es consistente, si $s \subseteq t_\delta$, $q_\delta(s) \neq \emptyset$. Además, $q_\delta(s_1 \cup s_2) = p(t_\delta) \cap X_\delta = q_\delta(s_1) \cap q_\delta(s_2)$ para todo $\delta < \kappa$, dado que $s_1 \cup s_2 \subseteq t_\delta$ si y sólo si $s_1 \subseteq t_\delta$ y $s_2 \subseteq t_\delta$; es decir, cada q_δ es aditiva. Defina la función $q : \mathcal{P}_\omega(\kappa) \longrightarrow \mathcal{P}(\kappa)$ como

$$q(s) = \bigcup_{\delta < \kappa} q_\delta(s).$$

Finalmente, defina $F' = (F, Ran(q))$. Tenemos entonces la siguiente serie de afirmaciones que concluyen la demostración.

· $q \leq p$:
Sea $s \in \mathcal{P}_\omega(\kappa)$. Entonces $q(s) = \bigcup_{\delta<\kappa} q_\delta(s) \subseteq \bigcup_{\delta<\kappa} p(t_\delta) \cap X_\delta \subseteq \bigcup_{\delta<\kappa} p(s) \cap X_\delta = p(s)$, pues p es monótona.

· q **es aditiva** :
Sean $s_1, s_2 \in \mathcal{P}_\omega(\kappa)$. Entonces

$$\begin{aligned} q(s_1 \cup s_2) &= \bigcup_{\delta<\kappa} q_\delta(s_1 \cup s_2) \\ &= \bigcup_{\delta<\kappa} (q_\delta(s_1) \cap q_\delta(s_2)) \\ &\subseteq (\bigcup_{\delta<\kappa} q_\delta(s_1)) \cap (\bigcup_{\delta<\kappa} q_\delta(s_2)) \\ &= q(s_1) \cap q(s_2). \end{aligned}$$

Por otro lado, si $k \in q(s_1) \cap q(s_2)$, entonces existen $\delta, \delta' < \kappa$ tales que $k \in q_\delta(s_1) \cap q_{\delta'}(s_2)$, luego $q_\delta(s_1) \cap q_{\delta'}(s_2) \neq \emptyset$. Entonces $\delta = \delta'$, pues de lo contrario, como $q_\delta(s) \subseteq X_\delta$ para todo $\delta < \kappa$ y todo $s \in \mathcal{P}_\omega(\kappa)$, tendríamos que $X_\delta \cap X_{\delta'} \neq \emptyset$, lo que es absurdo pues P es una partición de κ. Así,

$$k \in \bigcup_{\delta<\kappa} (q_\delta(s_1) \cap q_\delta(s_2)) = \bigcup_{\delta<\kappa} q_\delta(s_1 \cup s_2)$$

y por lo tanto $k \in q(s_1 \cup s_2)$, lo que implica que

$$q(s_1) \cap q(s_2) \subseteq q(s_1 \cup s_2).$$

La siguiente afirmación concluye la demostración del lema.

· $(\Pi \setminus \{P\}, F')$ **es consistente** :

Sean $X \in F', n \in \mathbb{N}^*, P_1, \ldots, P_n \in \Pi \setminus \{P\}$ diferentes dos a dos, y sean $X_1 \in P_1, \ldots, X_n \in P_n$. Como $X \in F'$, existe un $Y \in F$, un $m \in \mathbb{N}^*$ y unos $Y_1, \ldots, Y_m \in Ran(q)$ tales que

$$Y \cap \bigcap_{i=1}^{m} Y_i \subseteq X.$$

Como cada $Y_i \in Ran(q)$ y q es aditiva, existe un $s \in \mathcal{P}_\omega(\kappa)$ tal que

$$\bigcap_{i=1}^{m} Y_i = q(s).$$

Entonces existe un $\delta < \kappa$ tal que $s = t_\delta$, de manera que

$$\bigcap_{i=1}^{m} Y_i = q(t_\delta)$$

y $Y \cap q(t_\delta) \subseteq X$. Más aún, $p(t_\delta) \cap X_\delta \subseteq q(t_\delta)$. Como $Y \cap p(t_\delta) \in F$, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ vale que X_δ es un elemento de una partición diferente a la de cada X_i, y (Π, F) es consistente,

$$Y \cap p(t_\delta) \cap X_\delta \cap \bigcap_{i=1}^{n} X_i \neq \emptyset,$$

luego

$$X \cap \bigcap_{i=1}^{n} X_i \neq \emptyset,$$

como se quería.

□

Ahora estamos listos para demostrar el teorema 3.0.1. Para ello, sin pérdida de generalidad, construiremos un ultrafiltro κ^+-bueno sobre κ. Sea $\{I_n : n \in \mathbb{N}\}$ una familia de subconjuntos de κ tal que $I_0 = \kappa, \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \emptyset$, $I_{n+1} \subseteq I_n$ y $|I_n| = \kappa$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Note que la familia $\{I_n : n \in \mathbb{N}\}$ tiene la PIF. Sea entonces F_0 el filtro generado por $\{I_n : n \in \mathbb{N}\}$. Tal filtro es uniforme por construcción. Por el lema 3.0.3, existe una familia Π_0 de 2^κ particiones de κ tal que (Π_0, F_0) es consistente. Vamos a definir mediante inducción transfinita dos sucesiones $\{\Pi_\xi : \xi < 2^\kappa\}, \{F_\xi : \xi < 2^\kappa\}$ tales que para todo par $\eta, \xi < 2^\kappa$, si $\eta \leq \xi$ entonces $\Pi_\xi \subseteq \Pi_\eta$, $F_\eta \subseteq F_\xi$, $|\Pi_\xi| = 2^\kappa$, $|\Pi_\xi \setminus \Pi_{\xi+1}|$ es finito y (Π_ξ, F_ξ) es consistente.
Sea $\{p_\xi : \xi < 2^\kappa\}$ una enumeración de todas las funciones monótonas de $\mathcal{P}_\omega(\kappa)$ en $\mathcal{P}(\kappa)$, y sea $\{J_\xi : \xi < 2^\kappa\}$ una enumeración de $\mathcal{P}(\kappa)$. Sea $\xi < 2^\kappa$. Hacemos el argumento por casos.

· ξ **es un ordinal límite** :

Suponga que para todo $\eta < \xi$, todo par Π_η, F_η ya se construyó y satisface todas las hipótesis de inducción. Defina

$$\Pi_\xi = \bigcap_{\eta<\xi} \Pi_\eta \text{ y } F_\xi = \bigcup_{\eta<\xi} F_\eta.$$

Es claro que si $\eta \leq \xi$, entonces $\Pi_\xi \subseteq \Pi_\eta$ y $F_\eta \subseteq F_\xi$. Tenemos también el siguiente par de afirmaciones:

· $|\Pi_\xi| = 2^\kappa$:
Sea $\eta < \xi$. Entonces $\Pi_\xi \subseteq \Pi_\eta$, luego $|\Pi_\xi| \leq |\Pi_\eta| = 2^\kappa$. Por otro lado, como

$$\Pi_0 \setminus (\bigcup_{\eta<\xi} (\Pi_\eta \setminus \Pi_{\eta+1})) \subseteq \Pi_\xi$$

y cada diferencia sucesiva es finita, se sigue que $|\Pi_\xi| \geq |\Pi_0| - (|\xi| \cdot \aleph_0) = 2^\kappa$.

· (Π_ξ, F_ξ) **es consistente** :
Sean $X \in F_\xi, n \in \mathbb{N}^*, P_1, \ldots P_n \in \Pi_\xi$ diferentes dos a dos y sean $X_1 \in P_1, \ldots, X_n \in P_n$. Entonces existe un $\eta < \xi$ tal que $X \in F_\eta$. En particular, $P_1, \ldots, P_n \in \Pi_\eta$, luego como (Π_η, F_η) es consistente, $X \cap \bigcap_{i=1}^{n} X_i \neq \emptyset$.

· ξ **es un sucesor de la forma** $\lambda + 2n + 1$ **con** λ **límite y** $n < \omega$:
Sea J el primer elemento de $\mathcal{P}(\kappa)$ de acuerdo a la enumeración $\{J_\xi : \xi < 2^\kappa\}$ que no aparezca en $F_{\xi-1}$. Por el lema 3.0.4 existen Π_ξ, F_ξ tales que $\Pi_{\xi-1} \setminus \Pi_\xi$ es finito, $|\Pi_\xi| = 2^\kappa$, (Π_ξ, F_ξ) es consistente y $J \in F_\xi$ ó $(\kappa \setminus J) \in F_\xi$.

· ξ **es un sucesor de la forma** $\lambda + 2n + 2$ **con** λ **límite y** $n < \omega$:
Sea $p : \mathcal{P}_\omega(\kappa) \longrightarrow F_{\xi-1}$ la primer función monótona de acuerdo a la enumeración $\{p_\xi : \xi < 2^\kappa\}$ que no se haya tratado hasta ahora. Entonces, por el lema 3.0.5, existe un par Π_ξ, F_ξ y una función aditiva $q : \mathcal{P}_\omega(\kappa) \longrightarrow F_\xi$ tales que $q \leq p$, (Π_ξ, F_ξ) es consistente, $\Pi_{\xi-1} \setminus \Pi_\xi$ tiene sólo un elemento y $|\Pi_\xi| = 2^\kappa$.

Defina $F = \bigcup_{\xi<2^\kappa} F_\xi$. El segundo paso de la inducción asegura que F es un ultrafiltro, y la elección de la familia $\{I_n : n \in \mathbb{N}\}$ asegura que tal ultrafiltro es contablemente incompleto. Sea $p : \mathcal{P}_\omega(\kappa) \longrightarrow F$ una función monótona. Como $cf(2^\kappa) > \kappa$, existe un $\xi < 2^\kappa$ tal que $Ran(p) \subseteq F_\xi$. Entonces existe una función aditiva $q : \mathcal{P}_\omega(\kappa) \longrightarrow F$ tal que $q \leq p$, por el tercer paso de la inducción, luego F es un ultrafiltro k^+-bueno, como se quería.

4 Primer orden

En esta sección nos propondremos exponer, bajo hipótesis conjuntistas, un resultado más fuerte que el teorema de Keisler-Shelah. Para ello, en las subsecciones "Introducción y teorema de Łoś" se expondrán resultados básicos de teoría de modelos que permitan construir el isomorfismo, haciendo uso extensivo del concepto de saturación. En la subsección "$\aleph_1$-saturación" se demostrará que, bajo algunas hipótesis sobre la cardinalidad del lenguaje, todo ultraproducto es $\aleph_1$-saturado. Finalmente, en la subsección "Cardinalidad arbitraria", se hará uso de los ultrafiltros κ-buenos para demostrar el resultado fuerte.

4.1 Introducción y teorema de Łoś

El teorema de Łoś, también conocido como el teorema fundamental de los ultraproductos, consiste en dar una condición necesaria y suficiente para decidir si una fórmula se satisface en un ultraproducto. Esto permite caracterizar, por medio del ultrafiltro, la teoría de su ultraproducto correspondiente.

Teorema 4.1.1 (Łoś)**.** *Sea I un conjunto no vacío, $\{\mathfrak{A}_i : i \in I\}$ una familia de $\mathcal{L}$-estructuras y sea D un ultrafiltro sobre I. Sea $\mathfrak{A} = (\prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i)_D$. Entonces para todo $\mathcal{L}$-término $t(x_1, \ldots, x_n)$, para toda $\mathcal{L}$-fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ y para toda n-tupla $(a_1)_D, \ldots, (a_n)_D \in \mathfrak{A}$,*

$$t^{\mathfrak{A}}((a_1)_D, \ldots, (a_n)_D) = ((t^{\mathfrak{A}_i}(a_1(i), \ldots, a_n(i)))_{i\in I})_D$$

y

$$\mathfrak{A} \models \varphi[(a_1)_D, \ldots, (a_n)_D] \text{ si y sólo si } \{i \in I : \mathfrak{A}_i \models \varphi[a_1(i), \ldots, a_n(i)]\} \in D.$$

Demostración.
Por inducción en t y en φ.

$\cdot$ $t(x_1, \ldots, x_n) = c$:

$$\begin{aligned} t^{\mathfrak{A}}((a_1)_D, \ldots, (a_n)_D) &= c^{\mathfrak{A}} \\ &= ((c^{\mathfrak{A}_i})_{i\in I})_D \\ &= ((t^{\mathfrak{A}_i}(a_1(i), \ldots, a_n(i)))_{i\in I})_D. \end{aligned}$$

$\cdot$ $t(x_1, \ldots, x_n) = f(t_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, t_m(x_1, \ldots, x_n))$:

$$\begin{aligned} t^{\mathfrak{A}}((a_1)_D, \ldots, (a_n)_D) &= f^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{A}}((a_1)_D, \ldots, (a_n)_D), \ldots, t_m^{\mathfrak{A}}((a_1)_D, \ldots, (a_n)_D)) \\ &= f^{\mathfrak{A}}(((t_1^{\mathfrak{A}_i}(a_1(i), \ldots, a_n(i)))_{i\in I})_D, \ldots, ((t_m^{\mathfrak{A}_i}(a_1(i), \ldots, a_n(i)))_{i\in I})_D) \\ &= (f^{\mathfrak{A}_i}(t_1^{\mathfrak{A}_i}(a_1(i), \ldots, a_n(i)), \ldots, t_m^{\mathfrak{A}_i}(a_1(i), \ldots, a_n(i)))_{i\in I})_D \\ &= ((t^{\mathfrak{A}_i}(a_1(i), \ldots, a_n(i)))_{i\in I})_D. \end{aligned}$$

$\cdot$ $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = t_1(x_1, \ldots, x_n) \doteq t_2(x_1, \ldots, x_n)$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} \models t_1 = t_2[(a_1)_D, \ldots, (a_n)_D] &\Leftrightarrow t_1^{\mathfrak{A}}((a_1)_D, \ldots, (a_n)_D) = t_2^{\mathfrak{A}}((a_1)_D, \ldots, (a_n)_D) \\ &\Leftrightarrow ((t_1^{\mathfrak{A}_i}(a_1(i), \ldots a_n(i)))_{i\in I})_D = ((t_2^{\mathfrak{A}_i}(a_1(i), \ldots a_n(i)))_{i\in I})_D \\ &\Leftrightarrow \{i \in I : t_1^{\mathfrak{A}_i}(a_1(i), \ldots a_n(i)) = t_2^{\mathfrak{A}_i}(a_1(i), \ldots a_n(i))\} \in D \\ &\Leftrightarrow \{i \in I : \mathfrak{A}_i \models (t_1 = t_2)[a_1(i), \ldots a_n(i)]\} \in D. \end{aligned}$$

· $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = R(t_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, t_m(x_1, \ldots, x_n))$:

$$\begin{aligned}\mathfrak{A} \models R(t_1, \ldots, t_m)[(a_1)_D, \ldots, (a_n)_D] &\Leftrightarrow R^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{A}}((a_1)_D, \ldots, (a_n)_D), \ldots, t_m^{\mathfrak{A}}((a_1)_D, \ldots, (a_n)_D)) \\ &\Leftrightarrow \{i \in I : R^{\mathfrak{A}_i}(t_1^{\mathfrak{A}_i}(a_1(i), \ldots, a_n(i)), \ldots, t_m^{\mathfrak{A}_i}(a_1(i), \ldots, a_n(i)))\} \in D \\ &\Leftrightarrow \{i \in I : \mathfrak{A}_i \models R(t_1, \ldots, t_m)[a_1(i), \ldots, a_n(i)]\} \in D.\end{aligned}$$

· $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \neg\psi(x_1, \ldots, x_n)$:

$$\begin{aligned}\mathfrak{A} \models \neg\psi[(a_1)_D, \ldots, (a_n)_D] &\Leftrightarrow \mathfrak{A} \not\models \psi[(a_1)_D, \ldots, (a_n)_D] \\ &\Leftrightarrow \{i \in I : \mathfrak{A} \models \psi[a_1(i), \ldots, a_n(i)]\} \notin D \\ &\Leftrightarrow \{i \in I : \mathfrak{A} \not\models \psi[a_1(i), \ldots, a_n(i)]\} \in D \\ &\Leftrightarrow \{i \in I : \mathfrak{A} \models \neg\psi[a_1(i), \ldots, a_n(i)]\} \in D.\end{aligned}$$

· $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \varphi_1(x_1, \ldots, x_n) \wedge \varphi_2(x_1, \ldots, x_n)$:

$$\begin{aligned}\mathfrak{A} \models \varphi_1 \wedge \varphi_2[(a_1)_D, \ldots, (a_n)_D] &\Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi_1[(a_1)_D, \ldots, (a_n)_D] \text{ y } \mathfrak{A} \models \varphi_2[(a_1)_D, \ldots, (a_n)_D] \\ &\Leftrightarrow \{i \in I : \mathfrak{A}_i \models \varphi_1[a_1(i), \ldots, a_n(i)]\} \\ &\qquad \cap \{i \in I : \mathfrak{A}_i \models \varphi_2[a_1(i), \ldots, a_n(i)]\} \in D \\ &\Leftrightarrow \{i \in I : \mathfrak{A}_i \models \varphi_1 \wedge \varphi_2[a_1(i), \ldots, a_n(i)]\} \in D.\end{aligned}$$

· $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \exists x\psi(x, x_1, \ldots, x_n)$:

($\Rightarrow$) Si $\mathfrak{A} \models \exists x\psi(x)[(a_1)_D, \ldots, (a_n)_D]$, existe un $(b)_D \in \mathfrak{A}$ tal que

$$\mathfrak{A} \models \psi[(b)_D, (a_1)_D, \ldots, (a_n)_D].$$

Por hipótesis de inducción, $\{i \in I : \mathfrak{A}_i \models \psi[b(i), a_1(i), \ldots, a_n(i)]\} \in D$. Por lo tanto, $\{i \in I : \mathfrak{A}_i \models \exists x\psi[x, a_1(i), \ldots, a_n(i)]\} \in D$.

($\Leftarrow$) Sea $A = \{i \in I : \mathfrak{A}_i \models \exists x\psi[x, a_1(i), \ldots, a_n(i)]\}$, que por hipótesis es un elemento de D. Defina $b \in \prod_{i \in I} A_i$ así: Sea $i \in I$. Si $i \notin A$, defina $b(i)$ como cualquier elemento de A_i. Si $i \in A$, entonces $\mathfrak{A}_i \models \exists x\psi[x, a_1(i), \ldots, a_n(i)]$. Defina entonces $b(i)$ como algún elemento de $\mathfrak{A}_i$ para el cual valga $\mathfrak{A}_i \models \psi[b(i), a_1(i), \ldots, a_n(i)]$. Entonces $\mathfrak{A} \models \psi[(b)_D, (a_1)_D, \ldots, (a_n)_D]$, pues por hipótesis de inducción basta verificar que $\{i \in I : \mathfrak{A}_i \models \psi[b(i), a_1(i), \ldots, a_n(i)]\} \in D$, lo que se sigue de la contenencia $A \subseteq \{i \in I : \mathfrak{A}_i \models \psi[b(i), a_1(i), \ldots, a_n(i)]\}$. Por lo tanto $\mathfrak{A} \models \exists x\psi(x)[(a_1)_D, \ldots, (a_n)_D]$.

□

Del teorema de Łoś se sigue que para todo ultrafiltro D y toda $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$, $\prod_D \mathfrak{A} \equiv \mathfrak{A}$. Así, si dos $\mathcal{L}$-estructuras $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ son tales que $\prod_D \mathfrak{A} \cong \prod_D \mathfrak{B}$, se tiene que

$$\mathfrak{A} \equiv \prod_D \mathfrak{A} \equiv \prod_D \mathfrak{B} \equiv \mathfrak{B}.$$

Note que el recíproco de esta afirmación no es cierto: sean $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ dos $\mathcal{L}$-estructuras tales que $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ pero $\mathfrak{A} \not\cong \mathfrak{B}$, y sea D un ultrafiltro principal sobre ω. Entonces

$$\prod_D \mathfrak{A} \cong \mathfrak{A} \not\cong \mathfrak{B} \cong \prod_D \mathfrak{B}.$$

El teorema de Keisler-Shelah es entonces una reformulación fuerte del recíproco de la afirmación anterior.

Los siguientes resultados serán útiles más adelante.

Definición 4.1.1. *Sean $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ dos $\mathcal{L}$-estructuras. Una función f tal que $Dom(f) \subseteq \mathcal{A}$ y que $Ran(f) \subseteq \mathcal{B}$ se llama una* función parcial elemental *de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$ si y sólo si para toda $\mathcal{L}$-fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ y para toda n-tupla $a_1, \ldots, a_n \in Dom(f)$ se tiene que*

$$\mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \text{ si y sólo si } \mathfrak{B} \models \varphi[f(a_1), \ldots, f(a_n)].$$

Definición 4.1.2. *Sea $\mathfrak{A}$ una $\mathcal{L}$-estructura. Sea $C \subseteq A$ y sea $a \in A$. Definimos el* tipo de a sobre C, *denotado $tp(a/C)$, como el conjunto de todas las $\mathcal{L}$-fórmulas $\varphi(x, c_1, \ldots, c_n)$ tales que $\mathfrak{A} \models \varphi[a, c_1, \ldots, c_n]$ para alguna n-tupla $c_1, \ldots, c_n \in C$.*

Definición 4.1.3. *Sean $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ dos $\mathcal{L}$-estructuras, sea $C \subseteq A$ y sea f una función parcial elemental de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$ tal que $C \subseteq Dom(f)$. Si $p(x)$ es un conjunto de $\mathcal{L}$-fórmulas con parámetros en C, definimos la* relativización de $p(x)$ bajo f, *denotada por $f_*p(x)$, como el conjunto de fórmulas $\varphi(x, f(a_1), \ldots, f(a_n))$ tales que $\varphi(x, a_1, \ldots, a_n) \in p(x)$.*

Bajo las hipótesis de la definición anterior, si $p(x)$ es finitamente satisfactible, entonces $f_*p(x)$ también lo es.

Lema 4.1.1. *Sean $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ dos $\mathcal{L}$-estructuras y sea f una función parcial elemental de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$. Sean $a \in A, b \in B$ y defina $p(x) = tp(a/Dom(f))$. Entonces b satisface $f_*p(x)$ si y sólo si $f \cup \{(a, b)\}$ es parcial elemental.*

Demostración.
Sean $a_1, \ldots, a_n \in Dom(f)$.
($\Rightarrow$) Si $\mathfrak{A} \models \varphi[a, a_1, \ldots, a_n]$ entonces $\varphi(x, a_1, \ldots, a_n) \in p(x)$, luego $\varphi(x, f(a_1), \ldots, f(a_n)) \in f_*p(x)$ y, por hipótesis, $\mathfrak{B} \models \varphi[b, f(a_1), \ldots, f(a_n)]$. Si $\mathfrak{A} \not\models \varphi[a, a_1, \ldots, a_n]$ entonces $\mathfrak{A} \models \neg\varphi[a, a_1, \ldots, a_n]$. Como en el argumento anterior, se sigue que $\mathfrak{B} \models \neg\varphi[b, f(a_1), \ldots, f(a_n)]$, es decir, $\mathfrak{B} \not\models \varphi[b, f(a_1), \ldots, f(a_n)]$, como se quería.
($\Leftarrow$) Sea $\varphi(x, f(a_1), \ldots, f(a_n))$ una fórmula tal que $\mathfrak{A} \models \varphi[a, a_1, \ldots, a_n]$. Luego, por hipótesis, $\mathfrak{B} \models \varphi[b, f(a_1), \ldots, f(a_n)]$, como se quería. $\square$

Definición 4.1.4. *Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje, sea $\mathfrak{A}$ una $\mathcal{L}$-estructura con universo A y sea κ un cardinal infinito. Decimos que $\mathfrak{A}$ es* κ-saturada *si y sólo si para todo conjunto $B \subseteq A$ de cardinalidad menor a κ y para todo conjunto $\Gamma(x)$ de $\mathcal{L}(B)$-fórmulas en la variable x, si $\Gamma(x)$ es finitamente satisfactible en $\mathfrak{A}$, entonces es satisfactible en $\mathfrak{A}$. Decimos que $\mathfrak{A}$ es* saturada *si es $|A|$-saturada.*

Teorema 4.1.2. *Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje y sean $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ dos $\mathcal{L}$-estructuras saturadas elementalmente equivalentes tales que $|\mathfrak{A}| = |\mathfrak{B}|$. Entonces $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son isomorfas.*

Demostración.
Sea $\kappa = |\mathfrak{A}| = |\mathfrak{B}|$, y sean $\{a_i : i < \kappa\}$, $\{b_i : i < \kappa\}$ enumeraciones de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ respectivamente. Construimos el isomorfismo mediante inducción transfinita en κ.

· $i = 0$:

Sea $f_0 = \emptyset$. Entonces f_0 es una función parcial elemental pues $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$.

· i **es un ordinal sucesor menor que** κ :

Sea j un ordinal tal que $i = j + 1$. Suponga que f_j es una función parcial elemental tal que $|Dom(f_j)| \leq 2|j|$. Considere el tipo $p(x) = tp(a_j/Dom(f_j))$ en $\mathfrak{A}$. Entonces el conjunto $q(x) = {f_j}_*p(x)$ es finitamente satisfactible en $\mathfrak{B}$. Como $|Dom(f_j)| < \kappa$ y $\mathfrak{B}$ es κ-saturado, existe un $b(a_j) \in B$ tal que $b(a_j) \models q(x)$. Por el lema 4.1.1, $f'_j = f_j \cup \{a_j, b(a_j)\}$ es una función parcial elemental.

Ahora considere el tipo $p(x) = tp(b_j/Ran(f'_j))$ en $\mathfrak{B}$. Sea $g_j = f_j'^{-1}$. Como f'_j es una función parcial elemental, g_j también lo es. Entonces el conjunto $q(x) = g_{j*}p(x)$ es finitamente satisfactible en $\mathfrak{A}$. Como $|Ran(f'_j)| < \kappa$ y $\mathfrak{A}$ es κ-saturado, existe un $a(b_j) \in A$ tal que $a(b_j) \models q(x)$. Por el lema 4.1.1, $f_i = f'_j \cup \{a(b_j), b_j\}$ es una función parcial elemental.

Note que $|Dom(f_i)| \leq |Dom(f_j)| + 2 \leq 2|j| + 2 = 2|i|$.

· i **es un ordinal límite menor que** κ :

Sea $\lambda = i$. Si $j < \lambda$, suponga que f_j es una función parcial elemental tal que $|f_j| \leq 2|j|$ y si $j \leq j' < \lambda$, $f_j \subseteq f_{j'}$. Defina $f_\lambda = \bigcup_{j<\lambda} f_j$. Entonces f_λ es una función parcial elemental.

Note que $|Dom(f_\lambda)| \leq |\lambda| \sup\limits_{j<\lambda} 2|j| = 2|\lambda|$.

Defina $f = \bigcup_{i<\kappa} f_i$. Entonces f es una función parcial elemental. Note que $|Dom(f)| \leq |\kappa| \sup\limits_{i<\kappa} 2|i| = 2|\kappa| = \kappa$, luego $Dom(f) = A$, $Ran(f) = B$ y f es elemental, como se quería. □

4.2 $\aleph_1$-SATURACIÓN

Teorema 4.2.1. *Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje contable y sea D un ultrafiltro contablemente incompleto sobre un conjunto I. Entonces para toda familia $\{\mathfrak{A}_i : i \in I\}$ de $\mathcal{L}$-estructuras, el ultraproducto $(\prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i)_D$ es $\aleph_1$-saturado.*

Demostración.
Probamos primero la siguiente afirmación:

Si $\mathcal{L}$ es un lenguaje contable y $\Sigma(x)$ es un conjunto de $\mathcal{L}$-fórmulas en la variable x finitamente satisfactible en $(\prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i)_D$, entonces es satisfactible en $(\prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i)_D$.

Sea $\{I_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq D$ tal que $I_0 = I$, $I_{n+1} \subseteq I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \emptyset$. Como $\mathcal{L}$ es contable, $\Sigma(x)$ también es contable. Sea $\{\sigma_n(x) : n \in \mathbb{N}^*\}$ una enumeración de $\Sigma(x)$, y defina

$$X_0 = I_0$$

y

$$X_n = I_n \cap \{i \in I : \mathfrak{A}_i \models \exists x(\bigwedge_{j=1}^{n} \sigma_j(x))\}$$

para todo $n \in \mathbb{N}^*$. Note que como $\Sigma(x)$ es finitamente satisfactible en $(\prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i)_D$, por el teorema de Łoś, $\{X_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq D$. Además, para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $X_{n+1} \subseteq X_n$ y que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_n = \emptyset$, y por lo tanto para todo $i \in I$ existe un $n(i) \in \mathbb{N}$ tal que $n(i) = \max\{n \in \mathbb{N} : i \in X_n\}$. Ahora construiremos el elemento que realizará $\Sigma(x)$.
Sea $i \in I$. Si $n(i) = 0$, escoja cualquier $a(i) \in \mathcal{A}_i$. Si $n(i) > 0$, escoja $a(i) \in \mathcal{A}_i$ tal que $\mathfrak{A}_i \models \bigwedge_{j=1}^{n(i)} \sigma_j[a(i)]$. Entonces $(a)_D \models \Sigma(x)$, pues si $n \in \mathbb{N}^*$, entonces $X_n \subseteq \{i \in I : \mathfrak{A}_i \models \sigma_n[a(i)]\}$ y por lo tanto $\{i \in I : \mathfrak{A}_i \models \sigma_n[a(i)]\} \in D$, como se quería.
Ahora demostramos el resultado del teorema. Si $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto contable de parámetros de $(\prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i)_D$, el lenguaje $\mathcal{L} \cup A$ sigue siendo contable. También, por la construcción del ultraproducto,

$$((\prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i)_D, A) = (\prod_{i\in I} (\mathfrak{A}_i, a_n(i))_{n\in\mathbb{N}})_D.$$

Así, el resultado del teorema se sigue de la afirmación anterior. □

Teorema 4.2.2. *Asuma la hipótesis del continuo. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje contable y sean $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ dos $\mathcal{L}$-estructuras tales que $|\mathfrak{A}|, |\mathfrak{B}| \leq \aleph_1$. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:*

i. $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$

ii. *Para todo ultrafiltro no principal D sobre ω, $\prod_{\mathcal{D}} \mathfrak{A} \cong \prod_{\mathcal{D}} \mathfrak{B}$*

iii. *Existe un ultrafiltro $\mathcal{D}$ tal que $\prod_{\mathcal{D}} \mathfrak{A} \cong \prod_{\mathcal{D}} \mathfrak{B}$*

Demostración.
($i \Rightarrow ii$) Si D es un ultrafiltro no principal sobre ω, entonces contiene el filtro de Fréchet y por lo tanto es contablemente incompleto. Por el teorema 4.2.1, se tiene que $\prod_{\mathcal{D}} \mathfrak{A}$ y $\prod_{\mathcal{D}} \mathfrak{B}$ son $\aleph_1$-saturadas, de donde $\aleph_1 \leq |\prod_{\mathcal{D}} \mathfrak{A}|, |\prod_{\mathcal{D}} \mathfrak{B}|$. Por otro lado,

$$|\prod_{\mathcal{D}} \mathfrak{A}|, |\prod_{\mathcal{D}} \mathfrak{B}| \leq \aleph_1^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \aleph_1.$$

Como las ultrapotencias tienen el mismo cardinal, se sigue del teorema 4.1.2 que son isomorfas, como se quería.
($ii \Rightarrow iii$) Escoja $\mathcal{D}$ como un ultrafiltro no principal sobre ω.
($iii \Rightarrow i$) Se sigue del teorema de Łoś. □

4.3 Cardinalidad arbitraria

Teorema 4.3.1. *Sea κ un cardinal infinito, $\mathcal{L}$ un lenguaje de cardinal menor que κ y sea D un ultrafiltro contablemente incompleto κ-bueno sobre un conjunto I. Entonces para toda familia $\{\mathfrak{A}_i : i \in I\}$ de $\mathcal{L}$-estructuras, el ultraproducto $(\prod\limits_{i \in I} \mathfrak{A}_i)_D$ es κ-saturado.*

Demostración.
Probamos primero la siguiente afirmación:

> *Si $\mathcal{L}$ es un lenguaje de cardinal menor que κ y $\Sigma(x)$ es un conjunto de $\mathcal{L}$-fórmulas finitamente satisfactible en $(\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i)_D$, entonces es satisfactible en $(\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i)_D$.*

Note que $|\Sigma(x)| \leq \omega + |\mathcal{L}| < \kappa$. Sea $\{I_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq D$ tal que $I_0 = I$, $I_{n+1} \subseteq I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y que además $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} I_n = \emptyset$. Defina $f : \mathcal{P}_\omega(\Sigma(x)) \longrightarrow \mathcal{P}(I)$ como

$$f(\sigma(x)) = I_{|\sigma(x)|} \cap \{i \in I : \mathfrak{A}_i \models \exists x(\bigwedge \sigma(x))\}.$$

· *Ran*$(f) \subseteq D$:
Como $\Sigma(x)$ es finitamente satisfactible en $(\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i)_D$, para todo $\sigma(x) \in \mathcal{P}_\omega(\Sigma(x))$, el conjunto $\{i \in I : \mathfrak{A}_i \models \exists x(\bigwedge \sigma(x))\}$ es un elemento de D y por lo tanto $f(\sigma(x)) \in D$.

· f **es monótona** :
Sean $\sigma(x), \tau(x) \in \mathcal{P}_\omega(\Sigma(x))$ tales que $\sigma(x) \subseteq \tau(x)$. Entonces $|\sigma(x)| \leq |\tau(x)|$ y por lo tanto $I_{|\tau(x)|} \subseteq I_{|\sigma(x)|}$. Además, si $i \in I$ y $\mathfrak{A}_i \models \exists x(\bigwedge \tau(x))$, se sigue que $\mathfrak{A}_i \models \exists x(\bigwedge \sigma(x))$ y por lo tanto $\{i \in I : \mathfrak{A}_i \models \exists x(\bigwedge \tau(x))\} \subseteq \{i \in I : \mathfrak{A}_i \models \exists x(\bigwedge \sigma(x))\}$. Así, $f(\tau(x)) \subseteq f(\sigma(x))$.

Sea $g : \mathcal{P}_\omega(\Sigma(x)) \longrightarrow D$ aditiva tal que $g(\sigma(x)) \subseteq f(\sigma(x))$ para todo $\sigma(x) \in \mathcal{P}_\omega(\Sigma(x))$. Sea $i \in I$. Defina

$$\sigma(i)(x) = \{\varphi(x) \in \Sigma(x) : i \in g(\{\varphi(x)\})\}.$$

Note que si $|\sigma(i)(x)| \geq n$, existen $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ diferentes tales que $\{\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)\} \subseteq \sigma(i)(x)$. Entonces, por aditividad,

$$i \in \bigcap_{j=1}^{n} g(\{\varphi_j(x)\}) = g(\{\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)\}) \subseteq f(\{\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)\}) \subseteq I_n,$$

de donde se sigue que cada $\sigma(i)(x)$ es finito, pues si no fuera así, habría algún $i \in I$ tal que $i \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$, lo que es absurdo. Por lo tanto

$$i \in g(\sigma(i)(x)) \subseteq f(\sigma(i)(x)) \subseteq \{j \in I : \mathfrak{A}_j \models \exists x(\bigwedge \sigma(i)(x))\},$$

luego $\mathfrak{A}_i \models \exists x(\bigwedge \sigma(i)(x))$. Defina $a(i) \in A_i$ como algún elemento que satisfaga $\mathfrak{A}_i \models (\bigwedge \sigma(i)(x))[a(i)]$, y defina $a \in (\prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i)_D$ como $((a(i))_{i\in I})_D$.

· $a \models \Sigma(x)$:

Sea $\varphi(x) \in \Sigma(x)$. Por el teorema de Łoś basta probar que $\{i \in I : \mathfrak{A}_i \models \varphi[a(i)]\} \in D$. Para ello, es suficiente probar que $g(\{\varphi(x)\}) \subseteq \{i \in I : \mathfrak{A}_i \models \varphi[a(i)]\}$. Si $i \in g(\{\varphi(x)\})$, entonces $\varphi(x) \in \sigma(i)(x)$, luego por la elección de $a(i)$, $\mathfrak{A}_i \models (\bigwedge \sigma(i)(x))[a(i)]$ y en particular $\mathfrak{A}_i \models \varphi[a(i)]$, como se quería.

Ahora demostramos el resultado del teorema. Si $A = \{a_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es un conjunto de parámetros de $(\prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i)_D$, el lenguaje $\mathcal{L} \cup A$ sigue siendo de cardinalidad menor que κ. También, por la construcción del ultraproducto,

$$((\prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i)_D, A) = (\prod_{i\in I} (\mathfrak{A}_i, a_\alpha(i))_{\alpha<\kappa})_D.$$

El resultado del teorema se sigue de la afirmación anterior. □

Teorema 4.3.2. *Asuma la hipótesis del continuo generalizada. Sean $\mathcal{L}$ un lenguaje e I un conjunto tales que $|\mathcal{L}|, |I| < \kappa^+$, sea D un ultrafiltro contablemente incompleto κ^+-bueno sobre I y sean $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ dos $\mathcal{L}$-estructuras tales que $|\mathfrak{A}|, |\mathfrak{B}| \leq \kappa^+$. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:*

i. $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$

ii. $\prod_D \mathfrak{A} \cong \prod_D \mathfrak{B}$

Demostración.
($i \Rightarrow ii$) Por el teorema 4.3.1, $\prod_D \mathfrak{A}$ y $\prod_D \mathfrak{B}$ son κ^+-saturadas, luego $\kappa^+ \leq |\prod_D \mathfrak{A}|, |\prod_D \mathfrak{B}|$. Por otro lado,

$$|\prod_D \mathfrak{A}|, |\prod_D \mathfrak{B}| \leq (\kappa^+)^\kappa = (2^\kappa)^\kappa = 2^\kappa = \kappa^+.$$

Como las ultrapotencias tienen el mismo cardinal, se sigue del teorema 4.1.2 que son isomorfas, como se quería.
($ii \Rightarrow i$) Se sigue del teorema de Łoś. □

El teorema anterior junto con la hipótesis del continuo generalizada implican el teorema de Keisler-Shelah, pues si $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ son dos $\mathcal{L}$-estructuras elementalmente equivalentes, al escoger κ como un cardinal mayor que el máximo entre $|\mathfrak{A}|, |\mathfrak{B}|$ y $|\mathcal{L}|$, se sigue que para un ultrafiltro contablemente incompleto κ^+-bueno sobre κ,

$$\prod_D \mathfrak{A} \cong \prod_D \mathfrak{B}.$$

5 Lógica continua

En esta sección nos propondremos reformular todos los resultados de la sección 4 en el formato de lógica continua, y la exposición de los resultados seguirá su mismo orden.

5.1 Introducción y teorema de Łoś

Teorema 5.1.1 (Łoś)**.** *Sea* $\{\mathfrak{M}_i : i \in I\}$ *una familia de* $\mathcal{L}$*-estructuras. Sea* D *un ultrafiltro sobre* I *y sea* $\mathfrak{M} = (\prod_{i\in I} \mathfrak{M}_i)_D$*. Sea* $t(x_1, \ldots, x_n)$ *un* $\mathcal{L}$*-término y sea* $\varphi(x_1 \ldots, x_n)$ *una* $\mathcal{L}$*-fórmula. Si* $a_k = ((a_k(i))_{i\in I})_D \in \mathfrak{M}$ *para todo* $k \in \{1, \ldots, n\}$*, entonces*

$$t^{\mathfrak{M}}(a_1, \ldots, a_n) = ((t^{\mathfrak{M}_i}(a_1(i), \ldots, a_n(i)))_{i\in I})_D$$

y

$$\varphi^{\mathfrak{M}}(a_1, \ldots, a_k) = \lim_{i,D} \varphi^{\mathfrak{M}_i}(a_1(i), \ldots, a_n(i)).$$

Demostración.
Por inducción en t y en φ. La inducción en t se hace como en el teorema análogo en primer orden. Ahora haremos la inducción en fórmulas.

· $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = d(t_1(x_1, \ldots, x_n), t_2(x_1, \ldots, x_n))$:

$$\begin{aligned} d(t_1(a_1, \ldots, a_n), t_2(a_1, \ldots, a_n))^{\mathfrak{M}} &= d^{\mathfrak{M}}(t_1^{\mathfrak{M}}(a_1, \ldots, a_n), t_2^{\mathfrak{M}}(a_1, \ldots, a_n)) \\ &= \lim_{i,D} d_i(t_1^{\mathfrak{M}_i}(a_1(i), \ldots, a_n(i)), t_2^{\mathfrak{M}_i}(a_1(i), \ldots, a_n(i))) \end{aligned}$$

· $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = R(t_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, t_m(x_1, \ldots, x_n))$:
Por definición de la interpretación,

$$R^{\mathfrak{M}}(t_1^{\mathfrak{M}}(a_1, \ldots, a_n), \ldots, t_m^{\mathfrak{M}}(a_1, \ldots, a_n)) =$$

$$R^{\mathfrak{M}}(((t_1^{\mathfrak{M}_i}(a_1(i), \ldots, a_n(i)))_{i\in I})_D, \ldots, ((t_m^{\mathfrak{M}_i}(a_1(i), \ldots, a_n(i)))_{i\in I})_D) =$$

$$\lim_{i,D} R^{\mathfrak{M}_i}(t_1^{\mathfrak{M}_i}(a_1(i), \ldots, a_n(i)), \ldots, t_m^{\mathfrak{M}_i}(a_1(i), \ldots, a_n(i))).$$

como se quería.

· $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = u(\varphi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_m(x_1, \ldots, x_n))$ **con** u **continua** :
Por hipótesis de inducción, $\varphi_k^{\mathfrak{M}}(a_1, \ldots, a_n) = \lim_{i,D} \varphi_k^{\mathfrak{M}_i}(a_1(i), \ldots, a_n(i))$ para todo $k \in \{1, \ldots, m\}$. Como u es (uniformemente) continua, por el lema 2.2.1 se tiene que

$$u^{\mathfrak{M}}(\varphi_1(a_1, \ldots, a_n), \ldots, \varphi_m(a_1, \ldots, a_n)) = u(\varphi_1^{\mathfrak{M}}(a_1, \ldots, a_n), \ldots, \varphi_m^{\mathfrak{M}}(a_1, \ldots, a_n))$$

$$= \lim_{i,D} u(\varphi_1^{\mathfrak{M}_i}(a_1(i), \ldots, a_n(i)), \ldots, \varphi_m^{\mathfrak{M}_i}(a_1(i), \ldots, a_n(i))),$$

como se quería.

· $\varphi(x_1,\ldots,x_n)=\inf_y \psi(y,x_1,\ldots,x_n)$:

Queremos mostrar que

$$\inf_{y\in\mathfrak{M}} \psi^{\mathfrak{M}}(y,a_1,\ldots,a_n)=\lim_{i,D}\inf_{y\in\mathfrak{M}_i}\psi^{\mathfrak{M}_i}(y,a_1(i),\ldots,a_n(i)).$$

Para ello, mostramos las dos desigualdades correspondientes.

($\leq$) Sea $\varepsilon>0$ y sea $a=((a(i))_{i\in I})_D$ el testigo asociado a ε dado por la ecuación (2) del lema 2.2.2. Entonces

$$\begin{aligned}\inf_{y\in\mathfrak{M}} \psi^{\mathfrak{M}}(y,a_1,\ldots,a_n) &\leq \psi^{\mathfrak{M}}(a,a_1,\ldots,a_n)\\ &=\lim_{i,D}\psi^{\mathfrak{M}_i}(a(i),a_1(i),\ldots,a_n(i))\\ &\leq \lim_{i,D}\inf_{y\in\mathfrak{M}_i}\psi^{\mathfrak{M}_i}(y,a_1(i),\ldots,a_n(i))+\varepsilon.\end{aligned}$$

Como ε es arbitrario, se tiene la desigualdad deseada.

($\geq$)

$$\begin{aligned}\inf_{y\in\mathfrak{M}} \psi^{\mathfrak{M}}(y,a_1,\ldots,a_n) &= \inf_{y\in\mathfrak{M}}(\lim_{i,D}\psi^{\mathfrak{M}_i}(y(i),a_1(i),\ldots,a_n(i)))\\ &\geq \lim_{i,D}(\inf_{y\in\mathfrak{M}_i}\psi^{\mathfrak{M}_i}(y,a_1(i),\ldots,a_n(i))),\end{aligned}$$

donde la desigualdad se tiene por el lema 2.2.3.

· $\varphi(x_1,\ldots,x_n)=\sup_y \psi(y,x_1,\ldots,x_n)$:

Análogo al caso anterior.

□

Definición 5.1.1. *Sea $\mathfrak{M}$ una $\mathcal{L}$-estructura métrica con universo M y sea κ un cardinal. Diremos que $\mathfrak{M}$ tiene* carácter de densidad κ, *denotado por $char(M)=\kappa$, si y sólo si*

$$\kappa=\min\{|M_0| : M_0\subseteq M \text{ y } M_0 \text{ es denso en } M\}.$$

Definición 5.1.2. *Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje y sean $\mathfrak{M},\mathfrak{N}$ dos $\mathcal{L}$-estructuras métricas con universos M,N respectivamente. Decimos que f es una* función parcial elemental *de $\mathfrak{M}$ en $\mathfrak{N}$ si y sólo si $Dom(f)\subseteq M$ y para toda $\mathcal{L}$-fórmula $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ y toda tupla $a_1,\ldots,a_n\in Dom(f)$, se tiene que*

$$\varphi^{\mathfrak{M}}(a_1,\ldots,a_n)=\varphi^{\mathfrak{N}}(f(a_1),\ldots,f(a_n)).$$

El lema siguiente nos permitirá construir isomorfismos entre estructuras métricas a partir de funciones parciales elementales.

Lema 5.1.1. *Sean $\mathfrak{M},\mathfrak{N}$ dos $\mathcal{L}$-estructuras métricas con universos M,N respectivamente. Sean M_0,N_0 subconjuntos densos de M y de N. Suponga que existe una función parcial elemental $\Phi:\mathfrak{M}\longrightarrow\mathfrak{N}$ tal que $Dom(\Phi)=M_0$ y $Ran(\Phi)=N_0$. Entonces $\mathfrak{M}\cong\mathfrak{N}$.*

Demostración.

Queremos extender Φ a una función sobreyectiva $\widetilde{\Phi}:M\longrightarrow N$ tal que para toda $\mathcal{L}$-fórmula $\varphi(x_1,\ldots,x_l)$ y toda tupla $m_1,\ldots,m_l\in M$ valga la igualdad

$$\varphi^{\mathfrak{M}}(m_1,\ldots,m_l)=\varphi^{\mathfrak{N}}(\widetilde{\Phi}(m_l),\ldots,\widetilde{\Phi}(m_l)).$$

De esto se deduce que $\widetilde{\Phi}$ es una isometría, fijando $\varphi(x_1, x_2) = d(x_1, x_2)$. La extensión $\widetilde{\Phi}$ de Φ se construye como sigue. Sea $m \in M$. Como M_0 es denso, existe una sucesión $\{a_k : k \in \mathbb{N}\} \subseteq M_0$ tal que

$$m = \lim_{k\to\infty} a_k,$$

de manera que $\{a_k : k \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión de Cauchy. Como Φ es elemental, la sucesión $\{\Phi(a_k) : k \in \mathbb{N}\}$ también es una sucesión de Cauchy. Finalmente, como N es completo, defina

$$\widetilde{\Phi}(m) = \lim_{k\to\infty} \Phi(a_k).$$

Las afirmaciones siguientes concluyen la demostración del lema.

· $\widetilde{\Phi}$ **está bien definida** :
Queremos ver que $\widetilde{\Phi}(m)$ no depende de la elección de la sucesión en M_0 que converge a m. Si $s_1 = \{a_k : k \in \mathbb{N}\}$ y $s_2 = \{a'_k : k \in \mathbb{N}\}$ son sucesiones en M_0 que convergen a m, defina la sucesión auxiliar $s_3 = \{c_k : k \in \mathbb{N}\}$ dada por $c_k = a_k$ si k es par y $c_k = a'_k$ si k es impar. Como s_1 y s_2 convergen a m, son sucesiones de Cauchy, luego s_3 también lo es. Entonces $\{\Phi(c_k) : k \in \mathbb{N}\}$ también es una sucesión de Cauchy. Como $\{\Phi(a_k) : k \in \mathbb{N}\}$ y $\{\Phi(a'_k) : k \in \mathbb{N}\}$ son subsucesiones convergentes de $\{\Phi(c_k) : k \in \mathbb{N}\}$, ambas sucesiones convergen al mismo punto, como se quería.

· $\widetilde{\Phi}$ **es sobreyectiva** :
Sea $n \in N$. Como N_0 es denso, existe una sucesión $\{b_k : k \in \mathbb{N}\} \subseteq N_0$ tal que

$$n = \lim_{k\to\infty} b_k.$$

Sea $\{a_k : k \in \mathbb{N}\} \subseteq M_0$ dada por $a_k = \Phi^{-1}(b_k)$. Como Φ es elemental y $\{b_k : k \in \mathbb{N}\}$ es de Cauchy, $\{a_k : k \in \mathbb{N}\}$ es de Cauchy. Como M es completo, existe un $m \in M$ tal que

$$m = \lim_{k\to\infty} a_k.$$

Así, $\widetilde{\Phi}(m) = n$ como se quería.

· $\widetilde{\Phi}$ **es elemental** :
Sea $\varphi(x_1, \ldots, x_l)$ una $\mathcal{L}$-fórmula y sean $m_1, \ldots, m_l$ elementos de M. Para $i \in \{1, \ldots, l\}$, defina $\{a^i_k : k \in \mathbb{N}\} \subseteq M_0$ tal que

$$m_i = \lim_{k\to\infty} a^i_k.$$

Así, como $\varphi^{\mathfrak{M}}(x_1, \ldots, x_l)$ es (uniformemente) continua,

$$\begin{aligned}
\varphi^{\mathfrak{M}}(m_1, \ldots, m_l) &= \varphi^{\mathfrak{M}}(\lim_{k\to\infty} a^1_k, \ldots, \lim_{k\to\infty} a^l_k) \\
&= \lim_{k\to\infty} \varphi^{\mathfrak{M}}(a^1_k, \ldots, a^l_k) \\
&= \lim_{k\to\infty} \varphi^{\mathfrak{N}}(\Phi(a^1_k), \ldots, \Phi(a^l_k)) \\
&= \varphi^{\mathfrak{N}}(\lim_{k\to\infty} \Phi(a^1_k), \ldots, \lim_{k\to\infty} \Phi(a^l_k)) \\
&= \varphi^{\mathfrak{N}}(\widetilde{\Phi}(m_1), \ldots, \widetilde{\Phi}(m_l)),
\end{aligned}$$

como se quería.

$\square$

Definición 5.1.3. *Sean $\mathcal{L}$ un lenguaje, $\mathfrak{M}$ una $\mathcal{L}$-estructura métrica con universo M, $m \in M$ y sea $A \subseteq M$. Definimos el* tipo de m sobre A, *denotado por $tp(m/A)$, como el conjunto de $\mathcal{L}(A)$-condiciones que satisface m en $\mathfrak{M}$.*

Definición 5.1.4. *Sean $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ dos $\mathcal{L}$-estructuras métricas con universos M, N respectivamente y sea f una función parcial elemental de $\mathfrak{M}$ en $\mathfrak{N}$. Sea $p(x)$ un conjunto de $\mathcal{L}(A)$-condiciones para un subconjunto A de $Dom(f)$. Definimos la* relativización de $p(x)$ bajo f, *denotada por $f_*p(x)$, como el conjunto de todas las condiciones $\varphi(x, f(a_1), \ldots, f(a_n)) = 0$ tales que $\varphi(x, a_1, \ldots, a_n) = 0 \in p(x)$.*

Lema 5.1.2. *Sean $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ dos $\mathcal{L}$-estructuras métricas con universos M, N respectivamente y sea f una función parcial elemental de $\mathfrak{M}$ en $\mathfrak{N}$. Sea $m \in M$ y sea $p(x) = tp(m/Dom(f))$. Entonces para todo $n \in N$,*

$$n \text{ satisface } f_*p(x) \text{ si y sólo si } f \cup \{(m, n)\} \text{ es parcial elemental.}$$

Demostración.
($\Rightarrow$) Queremos mostrar que para toda $\mathcal{L}$-fórmula $\sigma(x, a_1, \ldots, a_n)$ con parámetros en $Dom(f)$, $\sigma^{\mathfrak{M}}(m, a_1, \ldots, a_n) = \sigma^{\mathfrak{N}}(n, f(a_1), \ldots, f(a_n))$. Sea $\sigma(x, a_1, \ldots, a_n)$ una tal fórmula y suponga, sin pérdida de generalidad, que $\sigma^{\mathfrak{M}}(m, a_1, \ldots, a_n) = 0$. Entonces $\sigma(x, a_1, \ldots, a_n) = 0 \in p(x)$ y así $\sigma(x, f(a_1), \ldots, f(a_n)) = 0 \in f_*p(x)$. Por hipótesis, $\sigma^{\mathfrak{N}}(n, f(a_1), \ldots, f(a_n)) = 0$, como se quería.
($\Leftarrow$) Inmediato. $\square$

Definición 5.1.5. *Sean $\mathcal{L}$ un lenguaje, $\mathfrak{M}$ una $\mathcal{L}$-estructura métrica con universo M y κ un cardinal infinito. Decimos que $\mathfrak{M}$ es* κ-saturada *si y sólo si para todo subconjunto $A \subseteq M$ de cardinalidad menor que κ, si $\Gamma(x)$ es un conjunto de $\mathcal{L}(A)$-condiciones finitamente satisfactible en $\mathfrak{M}$, entonces es satisfactible en $\mathfrak{M}$.*

Lema 5.1.3. *Sea $\mathfrak{M}$ una $\mathcal{L}$-estructura $\aleph_0$-saturada. Entonces para toda $\mathcal{L}$-fórmula $\sigma(x)$, con posibles parámetros en $\mathfrak{M}$, existe un $m \in \mathfrak{M}$ tal que*

$$\sigma^{\mathfrak{M}}(m) = \inf_{y \in \mathfrak{M}} \sigma^{\mathfrak{M}}(y).$$

Demostración.
Sea $\sigma(x)$ una $\mathcal{L}$-fórmula. Considere el conjunto de condiciones (sin parámetros)

$$\Gamma(x) = \{(\sigma(x) - \inf_y \sigma(y)) \dot{-} \frac{1}{n} = 0 : n \in \mathbb{N}^*\}.$$

Por la definición de ínfimo, es claro que $\Gamma(x)$ es finitamente satisfactible en $\mathfrak{M}$. Como $\mathfrak{M}$ es $\aleph_0$-saturada y $\sigma(x)$ sólo tiene finitos parámetros, existe un $m \in \mathfrak{M}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n} \geq \sigma^{\mathfrak{M}}(m) - \inf_{y \in \mathfrak{M}} \sigma^{\mathfrak{M}}(y)$, como se quería. $\square$

Note que bajo las hipótesis del lema 5.1.2, si $\mathfrak{N}$ es por lo menos κ-saturada y $Dom(f)$ tiene cardinalidad menor a κ, entonces que $p(x)$ sea finitamente satisfactible en $\mathfrak{M}$ implica que $f_*p(x)$ es finitamente satisfactible en $\mathfrak{N}$.

Lema 5.1.4. *Sean $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ dos $\mathcal{L}$-estructuras métricas elementalmente equivalentes con universos M, N respectivamente. Entonces $\mathfrak{M}$ es compacta si y sólo si $\mathfrak{N}$ es compacta.*

Demostración.
Suponga que no. Entonces, sin pérdida de generalidad, $\mathfrak{M}$ es compacta y $\mathfrak{N}$ no lo es. Como $\mathfrak{N}$ es completa, $\mathfrak{N}$ no es precompacta; es decir, existe un $\varepsilon > 0$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$ y toda tupla $n_1, \ldots, n_k \in N$, existe un $n \in N$ tal que $d(n, n_i) \geq \varepsilon$ para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$. Este hecho puede expresarse con la colección de condiciones

$$\Gamma_\varepsilon = \{\sup_{x_1} \ldots \sup_{x_k} \inf_{y} \max_{i=1}^{k} d(y, x_i) \geq \varepsilon : k \in \mathbb{N}^*\},$$

de manera que $\mathfrak{N}$ satisface Γ_ε. Por lo tanto, si $\mathfrak{M}$ y $\mathfrak{N}$ fueran elementalmente equivalentes, $\mathfrak{M}$ satisfaría Γ_ε, lo que es absurdo pues $\mathfrak{M}$ es compacta. $\square$

Note que, en particular, si $\mathfrak{M}$ es una $\mathcal{L}$-estructura métrica y D es cualquier ultrafiltro, entonces $\mathfrak{M}$ es compacta si y sólo si $(\mathfrak{M})_D$ lo es.

Lema 5.1.5. *Sea $\mathfrak{M}$ una $\mathcal{L}$-estructura métrica, compacta, con universo M, y sea $\Gamma(x)$ un conjunto de $\mathcal{L}$-condiciones finitamente satisfactible en $\mathfrak{M}$. Entonces $\Gamma(x)$ es satisfactible en $\mathfrak{M}$.*

Demostración.
Suponga que $\Gamma(x)$ no es satisfactible en $\mathfrak{M}$. Entonces para todo $m \in M$ existe una $\mathcal{L}$-condición $\varphi_m(x) = 0 \in \Gamma(x)$ tal que $r_m = \varphi_m^{\mathfrak{M}}(m) > 0$. Si $\varphi(x) = 0 \in \Gamma(x)$, sea Δ_φ el módulo de continuidad uniforme de $\varphi^{\mathfrak{M}}$. Como $\mathfrak{M}$ es compacta, existen unos $m_1, \ldots, m_k \in M$ tales que $M = \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{B}_{\Delta_{\varphi_{m_i}}(r_i/2)}(m_i)$. Entonces $\{\varphi_{m_1}(x) = 0, \ldots, \varphi_{m_k}(x) = 0\} \subseteq \Gamma(x)$ no es satisfactible en $\mathfrak{M}$, pues si $m \in M$, entonces existe un $j \in \{1, \ldots, k\}$ tal que $d(m, m_j) \leq \Delta_{\varphi_{m_j}}(r_i/2)$, de manera que

$$0 < r_j/2 \leq \varphi_{m_j}^{\mathfrak{M}}(m) \leq \max_{i=1}^{k} \varphi_{m_i}^{\mathfrak{M}}(m),$$

lo que es absurdo. $\square$

Teorema 5.1.2. *Sea κ un cardinal infinito y sean $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ dos $\mathcal{L}$-estructuras κ-saturadas, elementalmente equivalentes, con universos M, N respectivamente, tales que $\kappa = char(M) = char(N)$. Entonces $\mathfrak{M} \cong \mathfrak{N}$.*

Demostración.
Sean $M_0 = \{m_i : i < \kappa\}$, $N_0 = \{n_i : i < \kappa\}$ enumeraciones de conjuntos densos en M y N respectivamente. Como siempre, construiremos mediante inducción transfinita en κ una cadena de funciones parciales elementales de M_0 en N_0 de manera que su unión se pueda extender a una isometría elemental sobreyectiva de $\mathfrak{M}$ en $\mathfrak{N}$. Procedemos como sigue.

· $i = 0$:

Sea f_0 la función vacía. Como $\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{N}$, f_0 es parcial elemental.

· i **es un ordinal límite menor que** κ :

Sea $\lambda = i$. Si $j < \lambda$, suponga que f_j es una función parcial elemental tal que $|f_j| \leq 2|j|$ y si $j \leq j' < \lambda$, $f_j \subseteq f_{j'}$. Defina $f_\lambda = \bigcup_{j<\lambda} f_j$. Entonces f_λ es una función parcial elemental.

Note que $|Dom(f_\lambda)| \leq |\lambda| \sup_{j<\lambda} 2|j| = 2|\lambda|$.

· i **es un ordinal sucesor menor que** κ :

Sea j un ordinal tal que $i = j + 1$. Suponga que f_j es una función parcial elemental tal que $|Dom(f_j)| \leq 2|j|$. Considere el tipo $p(x) = tp(m_j/Dom(f_j))$ en $\mathfrak{M}$. Por el lema 5.1.3 y el lema 5.1.5, el conjunto $q(x) = f_{j*}p(x)$ es finitamente satisfactible en $\mathfrak{N}$. Como $|Dom(f_j)| < \kappa$ y $\mathfrak{N}$ es κ-saturado, existe un $n(m_j) \in N$ tal que $n(m_j)$ satisface $q(x)$. Así, $f'_j = f_j \cup \{m_j, n(m_j)\}$ es una función parcial elemental.

Ahora considere el tipo $p(x) = tp(n_j/Ran(f'_j))$ en $\mathfrak{N}$. Sea $g_j = f_j'^{-1}$. Como f'_j es una función parcial elemental, g_j también lo es. Por el lema 5.1.3 y el lema 5.1.5, el conjunto $q(x) = g_{j*}p(x)$ es finitamente satisfactible en $\mathfrak{M}$. Como $|Ran(f'_j)| < \kappa$ y $\mathfrak{M}$ es κ-saturado, existe un $m(n_j) \in M$ tal que $m(n_j)$ satisface $q(x)$. Así, $f_i = f'_j \cup \{m(n_j), n_j\}$ es una función parcial elemental.

Note que $|Dom(f_i)| \leq |Dom(f_j)| + 2 \leq 2|j| + 2 = 2|i|$.

Defina entonces $f = \bigcup\limits_{i<\kappa} f_i$. Como cada f_i es elemental, se sigue que f es elemental. Por el lema 5.1.1, $\mathfrak{M} \cong \mathfrak{N}$, como se quería. $\square$

El teorema siguiente nos permitirá concentrarnos, a posteriori, en el caso en que las estructuras a tratar no son compactas.

Teorema 5.1.3. *Sean $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ dos $\mathcal{L}$-estructuras métricas elementalmente equivalentes con universos M, N respectivamente. Entonces $\mathfrak{M} \cong \mathfrak{N}$ siempre que alguna estructura sea compacta.*

Demostración.
Suponga sin pérdida de generalidad que $\mathfrak{M}$ es compacta. Por el lema 5.1.4, $\mathfrak{N}$ también es compacta. Sean $\kappa = char(M), \lambda = char(N)$ y suponga, sin pérdida de generalidad, que $\kappa < \lambda$. Sea entonces M_0 un subconjunto denso de M de cardinalidad κ. Por la prueba del teorema 5.1.2, existe una función parcial elemental f de $\mathfrak{M}$ en $\mathfrak{N}$ tal que $M_0 \subseteq Dom(f)$. Como f es elemental, $|f(M_0)| = \kappa$, de manera que $f(M_0)$ no es denso en N. Esto significa que existe un $\varepsilon > 0$ y un elemento $n_0 \in N$ tal que para todo $m \in M_0$, $d(n_0, f(m)) \geq \varepsilon$. Sea $p(x) = tp(n_0/f(M_0))$, y considere el conjunto de condiciones $q(x) = f^*p(x)$ (donde $f^*p(x) = f_*^{-1}p(x)$) en $\mathfrak{M}$. Por el lema 5.1.3, $q(x)$ es finitamente satisfactible en $\mathfrak{M}$ y, por lo tanto, satisfactible en $\mathfrak{M}$. Sea entonces $m_0 \in M$ que satisfaga $q(x)$. Como f es elemental, se sigue que, en particular, $d(m_0, m) \geq \varepsilon$ para todo $m \in M_0$, contradiciendo la densidad de M_0. Se concluye entonces que $char(M) = char(N)$ y que, por el teorema 5.1.2, $\mathfrak{M} \cong \mathfrak{N}$. $\square$

Así, si $\mathfrak{M}$ y $\mathfrak{N}$ son dos $\mathcal{L}$-estructuras métricas elementalmente equivalentes y, además, alguna estructura es compacta, tenemos que

$$(\mathfrak{M})_D \cong \mathfrak{M} \cong \mathfrak{N} \cong (\mathfrak{N})_D$$

para cualquier ultrafiltro D.

5.2 $\aleph_1$-SATURACIÓN

Teorema 5.2.1. *Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje contable y sea D un ultrafiltro contablemente incompleto sobre un conjunto I. Entonces, para toda familia $\{\mathfrak{M}_i : i \in I\}$ de $\mathcal{L}$-estructuras métricas, el ultraproducto $\mathfrak{M} = (\prod_{i\in I} \mathfrak{M}_i)_D$ es $\aleph_1$-saturado.*

Demostración.
Probamos primero la siguiente afirmación:

Si $\mathcal{L}$ es un lenguaje contable y $\Gamma(x)$ es un conjunto de $\mathcal{L}$-condiciones finitamente satisfactible en $\mathfrak{M}$, entonces es satisfactible en $\mathfrak{M}$.

Suponga que para todo $i \in I$, el universo de $\mathfrak{M}_i$ es M_i. Sea $\{I_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq D$ tal que $I_0 = I$, $I_{n+1} \subseteq I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \emptyset$. Como $\mathcal{L}$ es contable, $\Gamma(x)$ también es contable. Sea $\{\varphi_n = 0 : n \in \mathbb{N}^*\}$ una enumeración de $\Gamma(x)$. Defina

$$X_0 = I_0$$

y

$$X_n = I_n \cap \{i \in I : \inf_{y\in\mathfrak{M}_i} \max_{j=1}^{n} \varphi_j^{\mathfrak{M}_i}(y) \leq \frac{1}{n+1}\}$$

para todo $n \in \mathbb{N}^*$. Note que como $\Gamma(x)$ es finitamente satisfactible en $\mathfrak{M}$, por el teorema de Łoś, $\{X_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq D$. Además, para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $X_{n+1} \subseteq X_n$ y que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_n = \emptyset$, y por lo tanto para todo $i \in I$ existe un $n(i) \in \mathbb{N}$ tal que $n(i) = \max\{n \in \mathbb{N} : i \in X_n\}$. Sea $i \in I$. Si $n(i) = 0$, escoja cualquier $m(i) \in M_i$. Si $n(i) > 0$, escoja $m(i) \in M_i$ tal que

$$\max_{j=1}^{n(i)} \varphi_j^{\mathfrak{M}_i}(m(i)) < \frac{1}{n(i)}.$$

Defina m como $((m(i))_{i\in I})_D$ en $\mathfrak{M}$. Entonces m satisface $\Gamma(x)$, pues si $\varphi_k(x) = 0$ es un elemento de $\Gamma(x)$, por el teorema de Łoś basta probar que para todo $\varepsilon > 0$,

$$\{i \in I : \varphi_k^{\mathfrak{M}_i}(m(i)) < \varepsilon\}$$

es un elemento de D. Para ello, sea $\varepsilon > 0$ y sea $l \in \mathbb{N}$ tal que $1/l < \varepsilon$. Luego, si $n = \max(k, l)$, es claro que $X_n \subseteq \{i \in I : \varphi_k^{\mathfrak{M}_i}(m(i)) < \varepsilon\}$, como se quería.
Ahora demostramos el resultado del teorema. Si $A = \{(m_n)_D : n \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto contable de parámetros de $\mathfrak{M}$, el lenguaje $\mathcal{L} \cup A$ sigue siendo contable. También, por la construcción del ultraproducto,

$$((\prod_{i\in I} \mathfrak{M}_i)_D, A) = (\prod_{i\in I} (\mathfrak{M}_i, m_n(i))_{n\in\mathbb{N}})_D.$$

El resultado del teorema se sigue de la afirmación anterior. □

Teorema 5.2.2. *Sea $\mathfrak{M}$ una $\mathcal{L}$-estructura métrica con universo M tal que $\mathfrak{M}$ es κ-saturada y no es compacta. Entonces $char(M) \geq \kappa$.*

Demostración.
Si $char(M) < \kappa$, entonces existe un conjunto $A = \{m_i : i \in \lambda\}$, $\lambda < \kappa$, denso en M. Como M es completa y no es compacta, M no es precompacta; es decir, existe un $\varepsilon > 0$ tal que para todo subconjunto finito $\{a_1, \ldots, a_n\}$ de M, $M \not\subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{B}_\varepsilon(a_i)$. Considere el conjunto de condiciones $\Gamma(x) = \{d(x, a_i) \geq \frac{\varepsilon}{2} : i \in \lambda\}$. Por lo anterior, $\Gamma(x)$ es finitamente satisfactible, luego por saturación, $\Gamma(x)$ es satisfactible; es decir, existe un $m \in M$ tal que m satisface $\Gamma(x)$. Por lo tanto A no es denso, lo que es absurdo. □

Teorema 5.2.3. *Asuma la hipótesis del continuo. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje contable y sean $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ dos $\mathcal{L}$-estructuras métricas tales que $char(M), char(N) \leq \aleph_1$. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:*

i. $\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{N}$

ii. *Para todo ultrafiltro no principal D sobre ω, $(\mathfrak{M})_D \cong (\mathfrak{N})_D$*

iii. *Existe un ultrafiltro D tal que $(\mathfrak{M})_D \cong (\mathfrak{N})_D$.*

Demostración.
($i \Rightarrow ii$) Gracias al teorema 5.1.3, basta asumir que $\mathfrak{M}$ y $\mathfrak{N}$ no son compactas. Si D es un ultrafiltro no principal sobre ω, entonces contiene el filtro de Fréchet y por lo tanto es contablemente incompleto. Por el teorema 5.2.1, se tiene que $(\mathfrak{M})_D$ y $(\mathfrak{N})_D$ son $\aleph_1$-saturadas, luego por el lema 5.1.4 y el teorema 5.2.2, $\aleph_1 \leq char((M)_D), char((N)_D)$. Por otro lado,

$$char((M)_D), char((N)_D) \leq \aleph_1^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \aleph_1.$$

Como las ultrapotencias tienen el mismo carácter de densidad, se sigue del teorema 5.1.2 que son isomorfas, como se quería.
($ii \Rightarrow iii$) Escoja $\mathcal{D}$ como un ultrafiltro no principal sobre ω.
($iii \Rightarrow i$) Se sigue del teorema de Łoś. □

5.3 Cardinalidad arbitraria

Teorema 5.3.1. *Sea κ un cardinal infinito, $\mathcal{L}$ un lenguaje de cardinal menor que κ y sea D un ultrafiltro contablemente incompleto κ-bueno sobre un conjunto I. Entonces para toda familia $\{\mathfrak{M}_i : i \in I\}$ de $\mathcal{L}$-estructuras métricas, el ultraproducto $\mathfrak{M} = (\prod_{i\in I} \mathfrak{M}_i)_D$ es κ-saturado.*

Demostración.
Probamos primero la siguiente afirmación:

Si $\mathcal{L}$ es un lenguaje de cardinal menor que κ y $\Sigma(x)$ es un conjunto de $\mathcal{L}$-condiciones finitamente satisfactible en $\mathfrak{M}$, entonces es satisfactible en $\mathfrak{M}$.

Suponga que para todo $i \in I$, el universo de $\mathfrak{M}_i$ es M_i. Defina

$$\Sigma^+(x) = \{\varphi(x) \leq \frac{1}{n} : \varphi(x) = 0 \in \Sigma(x), n \in \mathbb{N}^*\}.$$

Note que $|\Sigma^+(x)| = \aleph_0 \cdot |\Sigma(x)| \leq \aleph_0 \cdot (\aleph_0 + |\mathcal{L}|) < \aleph_0 \cdot \kappa = \kappa$. Sea $\{I_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq D$ tal que $I_0 = I$, $I_{n+1} \subseteq I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y que además $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \emptyset$. Defina $f : \mathcal{P}_\omega(\Sigma^+(x)) \longrightarrow \mathcal{P}(I)$ como

$$f(\sigma(x)) = I_{l(\sigma(x))} \cap \{i \in I : \inf_{y\in\mathfrak{M}_i} \max_{\varphi(x)=0\ \in\sigma(x)} \varphi^{\mathfrak{M}_i}(y) \leq \frac{1}{l(\sigma(x)) + 1}\}\},$$

donde si $\sigma(x) = \{\varphi_1(x) \leq \frac{1}{k_1}, \ldots, \varphi_n(x) \leq \frac{1}{k_n}\}$,

$$l(\sigma(x)) = \max\{n, k_1, \ldots, k_n\}.$$

De lo anterior se siguen las siguientes afirmaciones.

· $Ran(f) \subseteq D$:
Sea $\sigma(x) = \{\varphi_1(x) \leq \frac{1}{k_1}, \ldots, \varphi_n(x) \leq \frac{1}{k_n}\}$. Entonces $\{\varphi_1(x) = 0, \ldots, \varphi_n(x) = 0\} \subseteq \Sigma(x)$, luego existe un $(m)_D \in \mathfrak{M}$ tal que $\max_{j=1}^n \varphi_j^{\mathfrak{M}}((m)_D) = 0$. Por el teorema de Łoś, $\{i \in I : \max_{j=1}^n \varphi_j^{\mathfrak{M}_i}(m(i)) \leq \frac{1}{l(\sigma(x))+1}\} \in D$ y por lo tanto $\{i \in I : \inf_{y\in\mathfrak{M}_i} \max_{\varphi(x)=0\ \in\sigma(x)} \varphi^{\mathfrak{M}_i}(y) \leq \frac{1}{l(\sigma(x))+1}\} \in D$. Entonces $f(\sigma(x)) \in D$.

· f **es monótona** :

Sean $\sigma(x) = \{\varphi_1(x) \leq \frac{1}{k_1}, \ldots, \varphi_n(x) \leq \frac{1}{k_n}\}$, $\tau(x) = \{\varphi_1(x) \leq \frac{1}{k_1}, \ldots, \varphi_m(x) \leq \frac{1}{k_m}\}$ tales que $\sigma(x) \subseteq \tau(x)$. Entonces $n \leq m$ y $l(\sigma(x)) = \text{máx}\{n, k_1, \ldots, k_n\} \leq \text{máx}\{m, k_1, \ldots, k_m\} = l(\tau(x))$. Entonces si $i \in I$ es tal que $\inf_{y \in \mathfrak{M}_i} \max_{\varphi(x)=0 \ \in \tau(x)} \varphi^{\mathfrak{M}_i}(y) \leq \frac{1}{l(\tau(x))+1}$, se tiene que $\inf_{y \in \mathfrak{M}_i} \max_{\varphi(x)=0 \ \in \sigma(x)} \varphi^{\mathfrak{M}_i}(y) \leq \frac{1}{l(\sigma(x))+1}$. Como $I_{l(\tau(x))} \subseteq I_{l(\sigma(x))}$, $f(\tau(x)) \subseteq f(\sigma(x))$.

Sea $g : \mathcal{P}_\omega(\Sigma^+(x)) \longrightarrow D$ aditiva tal que $g(\sigma(x)) \subseteq f(\sigma(x))$ para todo $\sigma(x) \in \mathcal{P}_\omega(\Sigma^+(x))$. Para todo $i \in I$, defina

$$\sigma(i)(x) = \{\varphi(x) \leq \frac{1}{k} \in \Sigma^+(x) : i \in g(\{\varphi(x) \leq \frac{1}{k}\})\}.$$

Note que si $|\sigma(i)(x)| \geq n$, existen unas condiciones $\varphi_1(x) \leq \frac{1}{k_1}, \ldots, \varphi_n(x) \leq \frac{1}{k_n}$ diferentes tales que $\tau(x) = \{\varphi_1(x) \leq \frac{1}{k_1}, \ldots, \varphi_n(x) \leq \frac{1}{k_n}\} \subseteq \sigma(i)(x)$. Entonces, como g es aditiva,

$$i \in \bigcap_{j=1}^{n} g(\{\varphi_j(x) \leq \frac{1}{k_j}\}) = g(\tau(x)) \subseteq f(\tau(x)) \subseteq I_{l(\tau(x))} \subseteq I_n.$$

De lo anterior se sigue que cada $\sigma(i)(x)$ es finito, pues si no fuera así, habría algún $i \in I$ tal que $i \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$, lo que es absurdo. Por lo tanto

$$i \in g(\sigma(i)(x)) \subseteq f(\sigma(i)(x)) \subseteq \{k \in I : \inf_{y \in \mathfrak{M}_k} \max_{\varphi(x)=0 \ \in \sigma(i)(x)} \varphi^{\mathfrak{M}_k}(y) \leq \frac{1}{l(\sigma(i)(x))+1}\},$$

luego

$$\inf_{y \in \mathfrak{M}_i} \max_{\varphi(x)=0 \ \in \sigma(i)(x)} \varphi^{\mathfrak{M}_i}(y) \leq \frac{1}{l(\sigma(i)(x))+1}.$$

Dado $i \in I$, defina $m(i)$ como algún elemento de M_i que satisfaga

$$\max_{\varphi(x)=0 \ \in \sigma(i)(x)} \varphi^{\mathfrak{M}_i}(m(i)) < \frac{1}{l(\sigma(i)(x))},$$

y defina m como $((m(i))_{i \in I})_D$ en $\mathfrak{M}$. Se sigue entonces la siguiente afirmación.

· m **satisface** $\Sigma(x)$:

Sea $\varphi(x) = 0 \in \Sigma(x)$. Queremos mostrar que $\varphi^{\mathfrak{M}}(m) = 0$. Para ello, sea $\varepsilon > 0$, y sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $1/k < \varepsilon$. Entonces es suficiente mostrar que

$$g(\{\varphi(x) \leq \frac{1}{k}\}) \subseteq \{i \in I : \varphi^{\mathfrak{M}_i}(m(i)) < \varepsilon\}.$$

En efecto, si $i \in g(\{\varphi(x) \leq \frac{1}{k}\})$, entonces $k \leq l(\sigma(i)(x))$ y por lo tanto

$$\varphi^{\mathfrak{M}_i}(m(i)) \leq \max_{\varphi(x)=0 \ \in \sigma(i)(x)} \varphi^{\mathfrak{M}_i}(m(i)) < \frac{1}{l(\sigma(i)(x))} \leq \frac{1}{k} < \varepsilon,$$

como se quería.

Ahora demostramos el resultado del teorema. Sea $A = \{(m_\alpha)_D : \alpha < \kappa\}$ un conjunto de parámetros de $\mathfrak{M}$. El lenguaje $\mathcal{L} \cup A$ sigue siendo de cardinal menor a κ. También, por la construcción del ultraproducto,

$$((\prod_{i\in I} \mathfrak{M}_i)_D, A) = (\prod_{i\in I} (\mathfrak{M}_i, m_\alpha(i))_{\alpha<\kappa})_D.$$

El resultado del teorema se sigue de la afirmación anterior. $\square$

Teorema 5.3.2. *Asuma la hipótesis del continuo generalizada. Sean $\mathcal{L}$ un lenguaje e I un conjunto tales que $|\mathcal{L}|, |I| < \kappa^+$, sea D un ultrafiltro contablemente incompleto κ^+-bueno sobre I y sean $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ dos $\mathcal{L}$-estructuras métricas con universos M, N respectivamente. Suponga también que M y N no son compactas y que $char(M), char(N) \leq \kappa^+$. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:*

i. $\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{N}$

ii. $(\mathfrak{M})_D \cong (\mathfrak{N})_D$

Demostración.
($i \Rightarrow ii$) Por el teorema 5.3.1, $(\mathfrak{M})_D$ y $(\mathfrak{N})_D$ son κ^+-saturadas, luego

$$\kappa^+ \leq char((M)_D), char((N)_D)$$

por el lema 5.1.4 y por el teorema 5.2.2. Por otro lado,

$$char((M)_D), char((N)_D) \leq (\kappa^+)^\kappa = (2^\kappa)^\kappa = 2^\kappa = \kappa^+.$$

Como las ultrapotencias tienen el mismo carácter de densidad, se sigue del teorema 5.1.2 que son isomorfas, como se quería.
($ii \Rightarrow i$) Se sigue del teorema de Łoś. $\square$

El teorema anterior junto con la hipótesis del continuo generalizada implican el teorema de Keisler-Shelah para estructuras métricas, pues si $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ son dos $\mathcal{L}$-estructuras elementalmente equivalentes, no compactas, con universos M y N respectivamente, al escoger κ como un cardinal mayor que el máximo de $char(M), char(N)$ y de $|\mathcal{L}|$, se sigue que para un ultrafiltro contablemente incompleto κ^+-bueno sobre κ,

$$(\mathfrak{M})_D \cong (\mathfrak{N})_D.$$

6 Omisión de HCG

En este capítulo nos propondremos demostrar el teorema de Keisler-Shelah sin asumir la hipótesis del continuo generalizada. Para ello, desarrollaremos unos lemas previos de combinatoria que serán útiles para la construcción del isomorfismo en cada una de las lógicas a tratar. Posteriormente se desarrollará el teorema en cada una de ellas.

6.1 Combinatoria

Sean λ y κ dos cardinales infinitos. Defina μ como el mínimo cardinal ξ tal que $\lambda < \lambda^{\xi}$. Note que si $0 < \eta < \mu$, entonces $\lambda^{\eta} = \lambda$.

Lema 6.1.1. *El cardinal μ es regular y $\mu \leq \lambda$.*

Demostración.
Como $\lambda < 2^{\lambda} = \lambda^{\lambda}$, por definición de μ se sigue que $\mu \leq \lambda$. Ahora mostramos que $\mu \leq cf(\mu)$. Para ello, mostramos que $\lambda^{\mu} \leq \lambda^{cf(\mu)}$, pues entonces tendríamos que $\lambda < \lambda^{cf(\mu)}$. Vamos a mostrar que existe una función inyectiva F de ${}^{\mu}\lambda$ en ${}^{cf(\mu)}\lambda$. Sea C un subconjunto cofinal de μ y sea $\iota : cf(\mu) \longrightarrow C$ una biyección. Para cada $c \in C$, defina $\mu(c) = \{\xi < \mu : \xi < c\}$. Como C es cofinal, $\mu = \bigcup_{c \in C} \mu(c)$. Note que si $c \in C$, entonces $|\mu(c)| < \mu$, de manera que $\lambda^{|\mu(c)|} = \lambda$, es decir, existe una biyección $\beta_c : {}^{\mu(c)}\lambda \longrightarrow \lambda$. Finalmente, si $f \in {}^{\mu}\lambda$ y $\xi < cf(\mu)$, defina

$$F(f)(\xi) = \beta_{\iota(\xi)}(f|_{\mu(\iota(\xi))}).$$

Así, si $f, g \in {}^{\mu}\lambda$ son tales que $f \neq g$, entonces existe un $c \in C$ tal que $f|_{\mu(c)} \neq g|_{\mu(c)}$. Sea $\xi < cf(\mu)$ tal que $\iota(\xi) = c$. Entonces, como β_c es inyectiva,

$$F(f)(\xi) = \beta_c(f|_{\mu(c)}) \neq \beta_c(g|_{\mu(c)}) = F(g)(\xi),$$

como se quería. □

Definición 6.1.1. *Sean F un conjunto de funciones $f : \lambda \longrightarrow \mu$, G un conjunto de funciones $g : \lambda \longrightarrow \beta(g)$ donde $\beta(g)$ es un cardinal menor a μ, y sea D un filtro sobre λ. Decimos que la tripla (F, G, D) es* κ-consistente *si y sólo si se satisfacen las condiciones siguientes:*

i. D se genera por un subconjunto $E \subseteq D$ de cardinalidad menor o igual a κ.

ii. Siempre que β sea un cardinal menor que μ, $\{f_\rho : \rho < \beta\} \subseteq F$, $\{\sigma_\rho : \rho < \beta\} \subseteq \mu$, $f \in F$ y $g \in G$, el conjunto

$$\{\nu < \lambda : f_\rho(\nu) = \sigma_\rho \text{ para todo } \rho < \beta \text{ y } f(\nu) = g(\nu)\}$$

interseca todos los elementos de D. En el caso en que $G = 0$, se requiere que el conjunto

$$\{\nu < \lambda : f_\rho(\nu) = \sigma_\rho \text{ para todo } \rho < \beta\}$$

interseque a todos los elementos de D.

Lema 6.1.2. *Existe una familia F de 2^{λ} funciones de λ en μ tal que $(F, 0, \{\lambda\})$ es μ-consistente.*

Demostración.
Defina H como el conjunto $\{(A, S, h) : A \in \mathcal{P}_\mu(\lambda), S \in \mathcal{P}_\mu(\mathcal{P}(A)) \text{ y } h \in {}^S\mu\}$. De la definición de μ se sigue la afirmación siguiente.

· $|H| = \lambda$:

Es inmediato que $|H| \geq \lambda$. Primero mostramos que $|\mathcal{P}_\mu(\lambda)| = \lambda$. Para ello, note que

$$\begin{aligned} |\mathcal{P}_\mu(\lambda)| &\leq |\bigcup_{\xi<\mu} {}^\xi\lambda\ | \\ &\leq \mu \cdot \sup_{\xi<\mu} \lambda^{|\xi|} \\ &\leq \mu \cdot \lambda \\ &= \lambda. \end{aligned}$$

Como $\lambda \leq \mathcal{P}_\mu(\lambda)$, se tiene la igualdad. De lo anterior se sigue que $\lambda \leq |H|$. Además, si $A \in \mathcal{P}_\mu(\lambda)$, entonces

$$\begin{aligned} |\mathcal{P}_\mu(\mathcal{P}(A))| &\leq |\bigcup_{\xi<\mu} {}^\xi\mathcal{P}(A)\ | \\ &\leq \mu \cdot \sup_{\xi<\mu} 2^{|\xi|\cdot|A|} \\ &\leq \mu \cdot \sup_{\xi<\mu} \lambda^{|\xi|\cdot|A|} \\ &\leq \mu \cdot \sup_{\xi<\mu} \lambda \\ &\leq \mu \cdot \lambda \\ &= \lambda \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} |H| &\leq |\bigcup_{A\in\mathcal{P}_\mu(\lambda)} \bigcup_{S\in\mathcal{P}_\mu(\mathcal{P}(A))} {}^S\mu\ | \\ &\leq |\mathcal{P}_\mu(\lambda)| \cdot \sup_{A\in\mathcal{P}_\mu(\lambda)} \left(|\mathcal{P}_\mu(\mathcal{P}(A))| \cdot \sup_{S\in\mathcal{P}_\mu(\mathcal{P}(A))} \mu^{|S|} \right) \\ &\leq |\mathcal{P}_\mu(\lambda)| \cdot \sup_{A\in\mathcal{P}_\mu(\lambda)} \left(|\mathcal{P}_\mu(\mathcal{P}(A))| \cdot \sup_{S\in\mathcal{P}_\mu(\mathcal{P}(A))} \lambda^{|S|} \right) \\ &\leq |\mathcal{P}_\mu(\lambda)| \cdot \sup_{A\in\mathcal{P}_\mu(\lambda)} (|\mathcal{P}_\mu(\mathcal{P}(A))| \cdot \lambda) \\ &\leq |\mathcal{P}_\mu(\lambda)| \cdot \lambda \\ &\leq \lambda, \end{aligned}$$

como se quería.

Sea entonces $\{(A_\xi, S_\xi, h_\xi) : \xi < \lambda\}$ una enumeración de H. Dados $B \subseteq \lambda$ y $\xi < \lambda$, defina $f_B : \lambda \longrightarrow \mu$ como

$$f_B(\xi) = \begin{cases} h_\xi(A_\xi \cap B) & \text{si } A_\xi \cap B \in S_\xi, \\ 0 & \text{de lo contrario,} \end{cases}$$

y defina $F = \{f_B : B \subseteq \lambda\}$. El siguiente par de afirmaciones concluyen la demostración del lema.

· $|F| = 2^\lambda$:

Por un lado, hay $\mu^\lambda \leq \lambda^\lambda = 2^\lambda$ funciones de λ en μ, luego $|F| \leq 2^\lambda$. Por otro lado, si $B \neq B'$, entonces, sin pérdida de generalidad, existe un $x \in \lambda$ tal que $x \in B$ y $x \notin B'$. Sean $A = \{x\}, S = \{0, \{x\}\}$ y $h = \{(0,0), (\{x\}, 1)\}$. Así, $(A, S, h) \in H$ y por lo tanto existe un $\xi < \lambda$ tal que $(A, S, h) = (A_\xi, S_\xi, h_\xi)$. Entonces $f_B(\xi) = h_\xi(A_\xi \cap B) = h(A \cap B) = h(\{x\}) = 1$ y $f_{B'}(\xi) = h_\xi(A_\xi \cap B') = h(A \cap B') = h(0) = 0$, de manera que $2^\lambda \leq |F|$, como se quería.

· $(F, 0, \{\lambda\})$ **es μ-consistente** :

Es inmediato que $\{\lambda\}$ se genera por un subconjunto de cardinalidad menor o igual que μ. Sea ahora β un cardinal menor que μ, $\{f_{B_\rho} : \rho < \beta\} \subseteq F$ y $\{\sigma_\rho : \rho < \beta\} \subseteq \mu$. Queremos mostrar que

$$\{\nu < \lambda : f_{B_\rho}(\nu) = \sigma_\rho\}$$

es no vacío. Sea entonces A un conjunto de cardinalidad menor que μ tal que para todo par de ordinales diferentes $\rho_1, \rho_2 < \beta$, valga que $A \cap B_{\rho_1} \neq A \cap B_{\rho_2}$. Defina $S = \{A \cap B_\rho : \rho < \beta\}$ y defina $h \in {}^S\mu$ como $h(A \cap B_\rho) = \sigma_\rho$ para todo $\rho < \beta$. Por construcción, la tripla (A, S, h) es un elemento de H, luego existe un $\nu < \lambda$ tal que $(A, S, h) = (A_\nu, S_\nu, h_\nu)$. Así, si $\rho < \beta$, se sigue que $f_{B_\rho}(\nu) = h_\nu(A_\nu \cap B_\rho) = h(A \cap B_\rho) = \sigma_\rho$, como se quería.

$\square$

Lema 6.1.3.

i. *Si (F, G, D) es κ-consistente y $\kappa < \gamma$, entonces (F, G, D) es λ-consistente.*

ii. *Suponga que existe un cardinal δ y un cardinal κ tales que $cf(\delta) \leq \kappa$ y tales que (F_ξ, G_ξ, D_ξ) es κ_ξ-consistente para todo $\xi < \delta$, con $\{\kappa_\xi : \xi < \delta\}$ una sucesión de cardinales acotada por κ. Suponga además que la sucesión $\{F_\xi : \xi < \delta\}$ es creciente, y que las sucesiones $\{G_\xi : \xi < \delta\}, \{D_\xi : \xi < \delta\}$ son crecientes. Entonces*

$$(\bigcap_{\xi<\delta} F_\delta, \bigcup_{\xi<\delta} G_\delta, \bigcup_{\xi<\delta} D_\delta)$$

es κ-consistente.

iii. *Si (F, G, D) es κ-consistente y $F' \subseteq F$ y $G' \subseteq G$, entonces (F', G', D) es κ-consistente.*

Demostración.

i. Si D se genera por un conjunto de a lo sumo κ elementos, entonces D se genera por a lo sumo γ elementos.

ii. Sea $\gamma \subseteq \delta$ un conjunto confinal en δ con $|\gamma| = cf(\delta)$. Para cada $\xi \in \gamma$, sea $E_\xi \subseteq D_\xi$ tal que $|E_\xi| = \kappa_\xi$ y que E_ξ genera D_ξ. Vamos a mostrar que

$$\bigcup_{\xi\in\gamma} E_\xi \text{ genera } \bigcup_{\xi<\delta} D_\xi.$$

Para ello, sea $X \in \bigcup_{\xi<\delta} D_\xi$. Entonces existe un $\eta < \delta$ tal que $X \in D_\eta$. Como γ es cofinal en δ, existe un $\xi \in \gamma$ tal que $\eta < \xi$. Como $\{D_\xi : \xi < \delta\}$ es creciente,

$X \in D_\xi$. Así, existe un $n \in \mathbb{N}$ y una tupla de conjuntos $X_1, \ldots, X_n \subseteq E_\xi$ tales que $X \supseteq \bigcap_{i=1}^n X_i$. Pero entonces cada $X_i \in \bigcup_{\xi\in\gamma} E_\xi$, como se quería. Además, como cada κ_ξ está acotado por κ,

$$|\bigcup_{\xi\in\gamma} E_\xi| \leq |\gamma| \cdot \sup_{\xi<\delta} |E_\xi| \leq cf(\delta) \cdot \sup_{\xi<\delta} \kappa_\xi \leq cf(\delta) \cdot \kappa \leq \kappa.$$

Ahora, sea β un cardinal menor que μ, $\{f_\rho : \rho < \beta\} \subseteq \bigcap_{\xi<\delta} F_\xi$, $\{\sigma_\rho : \rho < \beta\} \subseteq \mu$, $f \in \bigcap_{\xi<\delta} F_\xi$, $g \in \bigcup_{\xi<\delta} G_\xi$ y $X \in \bigcup_{\xi<\delta} D_\xi$. Entonces existe un $\eta < \delta$ tal que $X \in D_\eta$ y $g \in G_\eta$. Como $\{f_\rho : \rho < \beta\} \subseteq F_\eta$, $f \in F_\eta$, $g \in G_\eta$ y (F_η, G_η, D_η) es κ_η-consistente,

$$\{\nu < \lambda : f_\rho(\nu) = \sigma_\rho \text{ para todo } \rho < \beta \text{ y } f(\nu) = g(\nu)\} \cap X$$

es no vacío, como se quería.

iii. D sigue siendo generado por a lo sumo κ elementos. Sea β un cardinal menor que μ, $\{f_\rho : \rho < \beta\} \subseteq F'$, $\{\sigma_\rho : \rho < \beta\} \subseteq \mu$, $f \in F'$, $g \in G'$ y $X \in D$. Entonces $\{f_\rho : \rho < \beta\} \subseteq F$, $f \in F$ y $g \in G$. Como (F, G, D) es κ-consistente,

$$\{\nu < \lambda : f_\rho(\nu) = \sigma_\rho \text{ para todo } \rho < \beta \text{ y } f(\nu) = g(\nu)\} \cap X$$

es no vacío, como se quería.

$\square$

Lema 6.1.4.

i. Suponga que $(F, 0, D)$ es κ-consistente. Sea $A \subseteq \lambda$. Entonces existe un $F' \subseteq F$ tal que $|F \setminus F'| < \mu$ y, o bien $(F', 0, (D, A))$ es κ-consistente, o bien $(F', 0, (D, A^c))$ es κ-consistente.

ii. Suponga que $(F, 0, D)$ es κ-consistente y que $\mu \leq \kappa$. Sea $\{A_\xi : \xi < \kappa\}$ una familia de subconjuntos de λ. Entonces existe un $F' \subseteq F$ y un filtro $D' \supseteq D$ tales que $|F \setminus F'| \leq \kappa$, $(F', 0, D')$ es κ-consistente y para todo $\xi < \kappa$, o bien $A_\xi \in D'$ o bien $A_\xi^c \in D'$.

Demostración.

i. Suponga que no. Entonces, para todo $F' \subseteq F$, si $|F\setminus F'| < \mu$, entonces ni $(F', 0, (D, A))$ ni $(F', 0, (D, A^c))$ son κ-consistentes. En particular, si $(F, 0, (D, A))$ no es κ-consistente, como (D, A) sigue siendo generado por a lo sumo κ elementos, debe existir un cardinal $\beta < \mu$, unas funciones $\{f_\rho : \rho < \beta\} \subseteq F$, unos ordinales $\{\sigma_\rho : \rho < \beta\} \subseteq \mu$, y un conjunto $Y \in (D, A)$ tales que, al definir

$$B = \{\nu < \lambda : f_\rho(\nu) = \sigma_\rho \text{ para todo } \rho < \beta\},$$

se tiene que

$$B \cap Y = \emptyset.$$

Como $Y \in (D, A)$, entonces existe un $X \in D$ tal que $Y \supseteq A \cap X$, de manera que

$$A \cap B \cap X = \emptyset.$$

Sea ahora $F' = F \setminus \{f_\rho : \rho < \beta\}$. Entonces $|F \setminus F'| \leq \beta < \mu$, y por lo tanto $(F', 0, (D, A^c))$ no debe ser κ-consistente. Sin embargo, si β' es un cardinal menor que μ, $\{f'_\rho : \rho < \beta'\} \subseteq F'$, $\{\sigma'_\rho : \rho < \beta'\} \subseteq \mu$, y $Y' \in (D, A^c)$, al definir

$$B' = \{\nu < \lambda : f'_\rho(\nu) = \sigma'_\rho \text{ para todo } \rho < \beta'\}$$

y

$$Z = B \cap B' \cap X \cap X'$$

donde $X' \in D$ es tal que $Y' \supseteq X \cap A^c$, entonces

$$Z \neq \emptyset$$

gracias a la κ-consistencia de $(F, 0, D)$. Así,

$$\begin{aligned} \emptyset \neq\ & Z \\ &= (Z \cap A) \cup (Z \cap A^c) \\ &\subseteq (B \cap Y) \cup (B' \cap Y') \\ &= B' \cap Y', \end{aligned}$$

lo que es absurdo pues $(F', 0, (D, A^c))$ no es κ-consistente.

ii. Se sigue al iterar el caso anterior κ veces, usando el lema 6.1.3(*ii*).

□

El lema siguiente se explotará en la construcción del ultrafiltro y del isomorfismo necesarios en el teorema de Keisler-Shelah. Si D es un filtro sobre un conjunto I y $A \subseteq I$, diremos que A es *inconsistente con* D si existe algún $X \in D$ tal que $A \cap X = \emptyset$.

Lema 6.1.5. *Suponga que la tripla $(F, 0, D)$ es κ-consistente. Sea G un conjunto de funciones de λ en cardinales menores que μ tal que $\mu + |G| \leq \kappa$. Entonces existe un $F' \subseteq F$ tal que $|F \setminus F'| \leq \kappa$ y tal que (F', G, D) es κ-consistente.*

Demostración.
Es suficiente mostrar la siguiente afirmación:

Para toda $g \in G$ existe un subconjunto $F_g \subseteq F$ con $|F_g| \leq \kappa$ tal que $(F \setminus F_g, \{g\}, D)$ es κ-consistente.

Esto se debe a que, al definir F' como $F \setminus \bigcup_{g \in G} F_g$, se tiene que

$$|F \setminus F'| = |\bigcup_{g \in G} F_g| \leq |G| \cdot \sup_{g \in G} |F_g| \leq |G| \leq \kappa$$

y que (F', G, D) es κ-consistente, como se muestra a continuación. Sea β un cardinal menor que μ, $\{f_\rho : \rho < \beta\} \subseteq F'$, $\{\sigma_\rho : \rho < \beta\} \subseteq \mu$, $f \in F'$, $g \in G$ y $X \in D$. Entonces $\{f_\rho : \rho < \beta\} \subseteq F \setminus F_g$ y $f \in F \setminus F_g$, luego

$$\{\nu < \lambda : f_\rho(\nu) = \sigma_\rho \text{ para todo } \rho < \beta \text{ y } f(\nu) = g(\nu)\} \cap X \neq \emptyset,$$

gracias a la κ-consistencia de $(F \setminus F_g, \{g\}, D)$. Ahora probamos la afirmación en itálica, suponiendo su negación para encontrar una contradicción. Esto es, suponga que existe un $g \in G$ tal que para todo subconjunto $F' \subseteq F$ de cardinalidad a lo sumo κ, la tripla $(F \setminus F', \{g\}, D)$ no es κ-consistente. Sea $E \subseteq D$ de cardinalidad a lo sumo κ que genere D. Por inducción en $\xi < \kappa^+$ construiremos:

· una sucesión F_ξ de subconjuntos de F,

· una sucesión de cardinales $\{\beta_\xi : \xi < \kappa^+\}$ menores que μ,

· una sucesión $\overline{F}_\xi = \{f_\rho^\xi : \rho < \beta_\xi\} \subseteq F_\xi$ de subconjuntos de F,

· una sucesión de sucesiones de ordinales $\{\sigma_\rho^\xi : \rho < \beta_\xi\}$,

· una sucesión de funciones $f^\xi \in F$,

· una sucesión de conjuntos $X_\xi \in E$

tales que para todo $\xi < \kappa^+$, al definir

$$A_\xi = \{\nu < \lambda : f_\rho^\xi(\nu) = \sigma_\rho^\xi \text{ para todo } \rho < \beta_\xi \text{ y } f^\xi(\nu) = g(\nu)\},$$

se tenga que

$$A_\xi \cap X_\xi = \emptyset,$$

de manera que $(F_\xi \setminus \overline{F}_\xi, \{g\}, D)$ no es κ-consistente; es decir, las últimas cinco sucesiones atestiguarán el hecho de que, en el paso ξ-ésimo, $(F_\xi, \{g\}, D)$ no es κ-consistente. Una vez se construyan las seis sucesiones, llegaremos a una contradicción siguiendo el argumento siguiente. Como κ^+ es regular y $|E| \leq \kappa < \kappa^+$, por el principio de palomar, existe un conjunto $X \in E$ y un conjunto $\Omega \subseteq \kappa^+$ de cardinalidad κ^+ tal que $A_\xi \cap X = \emptyset$ para todo $\xi \in \Omega$. De nuevo, por el principio de palomar, existe un conjunto $\Omega' \subseteq \Omega$ de cardinalidad κ^+ y un cardinal $\beta < \mu$ tal que $\beta_\xi = \beta$ para todo $\xi \in \Omega'$.
Sea $\iota : \kappa^+ \longrightarrow \Omega'$ una enumeración de Ω', y sea $\gamma < \mu$ tal que $Im(g) \subseteq \gamma$. Tal γ existe por definición de G. Como $\beta \cdot |\iota(\gamma)| + \gamma \cdot |\iota(\gamma)| < \mu \leq \kappa$, y $(F, 0, D)$ es κ-consistente, el conjunto

$$A = \{\nu < \lambda : f_\rho^{\iota(\xi)}(\nu) = \sigma_\rho^{\iota(\xi)} \text{ y } f^{\iota(\xi)}(\nu) = \xi \text{ para todo } \rho < \beta \text{ y todo } \xi < \gamma\}$$

interseca a X en, digamos, ν. Como $\nu \in A$, vale que $f^{\iota(g(\nu))} = g(\nu)$. Pero entonces $\nu \in A_{\iota(g(\nu))}$, luego $\nu \in A_{\iota(g(\nu))} \cap X$, lo que es absurdo. Para finalizar la demostración, procederemos con la construcción de las seis sucesiones. En cada paso ξ, mostraremos que $(F_\xi, \{g\}, D)$ no es κ-consistente. Los ξ-ésimos elementos de cada sucesión serán entonces los testigos de la no κ-consistencia de $(F_\xi, \{g\}, D)$.

· $\xi = 0$:
Defina $F_0 = F$. Entonces, por hipótesis, $(F_0, \{g\}, D)$ no es κ-consistente. Como D sigue siendo generado por E, existe un cardinal $\beta_0 < \mu$, unas funciones $\overline{F}_0 = \{f_\rho^0 : \rho < \beta_0\} \subseteq F_0$, unos ordinales $\{\sigma_\rho^0 : \rho < \beta_0\} \subseteq \mu$, una función $f^0 \in F_0$ y un conjunto $Y \in D$ tales que

$$\{\nu < \lambda : f_\rho^0(\nu) = \sigma_\rho^0 \text{ para todo } \rho < \beta_0 \text{ y } f^0(\nu) = g(\nu)\} \cap Y = \emptyset.$$

Como $\beta_0 < \mu \leq \kappa$, tenemos también que $|\overline{F}_0| \leq \kappa$ y que, por hipótesis, $(F_0 \setminus \overline{F}_0, \{g\}, D)$ no es κ-consistente. Como E genera D, existe un $X_0 \in E$ tal que $X_0 \subseteq Y$. Entonces

$$\{\nu < \lambda : f_\rho^0(\nu) = \sigma_\rho^0 \text{ para todo } \rho < \beta_0 \text{ y } f^0(\nu) = g(\nu)\} \cap X_0 = \emptyset.$$

· $\xi = \chi + 1$:
Defina F_ξ como $F_\chi \setminus \overline{F}_\chi$. Por hipótesis de inducción, $(F_\xi, \{g\}, D)$ no es κ-consistente. Como D sigue siendo generado por E, existe un cardinal $\beta_\xi < \mu$, unas funciones $\overline{F}_\xi = \{f^\xi_\rho : \rho < \beta_\xi\} \subseteq F_\xi$, unos ordinales $\{\sigma^\xi_\rho : \rho < \beta_\xi\} \subseteq \mu$, una función $f^\xi \in F_\xi$ y un conjunto $Y \in D$ tales que

$$\{\nu < \lambda : f^\xi_\rho(\nu) = \sigma^\xi_\rho \text{ para todo } \rho < \beta_\xi \text{ y } f^\xi(\nu) = g(\nu)\} \cap Y = \emptyset.$$

Como $\beta_\xi < \mu \leq \kappa$, tenemos también que $|\overline{F}_\xi| \leq \kappa$ y que, por hipótesis, $(F_\xi \setminus \overline{F}_\xi, \{g\}, D)$ no es κ-consistente. Como E genera D, existe un $X_\xi \in E$ tal que $X_\xi \subseteq Y$. Entonces

$$\{\nu < \lambda : f^\xi_\rho(\nu) = \sigma^\xi_\rho \text{ para todo } \rho < \beta_\xi \text{ y } f^\xi(\nu) = g(\nu)\} \cap X_\xi = \emptyset.$$

· $\xi = \eta$ **con** η **límite** :
Defina $F_\xi = \bigcup_{\chi<\xi} F_\chi$. Entonces $(F_\xi, \{g\}, D)$ no es κ-consistente, pues si lo fuera, por el lema 6.1.3(*iii*) se tendría que $(F_\chi, \{g\}, D)$ es κ-consistente para todo $\chi < \xi$, en contradicción con la hipótesis de inducción. Finalmente, defina las sucesiones restantes como en el caso anterior.

□

6.2 Primer orden

El lema siguiente es fundamental para la construcción del isomorfismo.

Lema 6.2.1. *Sean:*

· $\mathfrak{A}$ *una $\mathcal{L}$-estructura con universo A de cardinalidad $\chi < \mu \leq \kappa$,*

· ξ_0 *un cardinal menor o igual que κ, $\{n_\xi : \xi < \xi_0\}$ un conjunto de números naturales, $a_{\xi,m} \in {}^\lambda A$ para $\xi < \xi_0$ y $m \in \{1, \ldots, n_\xi\}$,*

· $(F, 0, D)$ *una tripla κ-consistente,*

· $\{\varphi_\xi(x, y_{\xi,1}, \ldots, y_{\xi,n_\xi}) : \xi < \xi_0\}$ *un conjunto de $\mathcal{L}$-fórmulas cerrado bajo conjunción,*

· $\{A^\xi_\exists : \xi < \xi_0\} \subseteq D$ *con*

$$A^\xi_\exists = \{\nu < \lambda : \mathfrak{A} \models \exists x \varphi_\xi(x, a_{\xi,1}(\nu), \ldots, a_{\xi,n_\xi}(\nu))\}.$$

Entonces existe un conjunto $F' \subseteq F$, un filtro $D' \supseteq D$ y un $a \in {}^\lambda A$ tales que

· $|F \setminus F'| \leq \kappa$,

· $(F', 0, D')$ *es κ-consistente, y*

· $\{A_\xi : \xi < \xi_0\} \subseteq D'$ *con*

$$A_\xi = \{\nu < \lambda : \mathfrak{A} \models \varphi_\xi(a(\nu), a_{\xi,1}(\nu), \ldots, a_{\xi,n_\xi}(\nu))\}.$$

Note que como $(F', 0, D')$ resulta ser κ-consistente, entonces D' es un filtro propio.

Demostración.
Sea $\{a_\alpha : \alpha < \chi\}$ una enumeración de A. Para $\xi < \xi_0$, defina $g_\xi : \lambda \longrightarrow \chi$ como

$$g_\xi(\nu) = \begin{cases} \text{el mínimo } \eta \text{ tal que } \mathfrak{A} \models \varphi_\xi(a_\eta, a_{\xi,1}(\nu), \ldots, a_{\xi,n_\xi}(\nu)) & \text{si } \nu \in A^\xi, \\ 0 & \text{de lo contrario.} \end{cases}$$

Hay a lo sumo ξ_0 tales funciones. Sea $G = \{g_\xi : \xi < \xi_0\}$, de manera que $\mu + |G| \leq \kappa$. Por el lema 6.1.5, existe un $F_1 \subseteq F$ tal que $|F \setminus F_1| \leq \kappa$ y que (F_1, G, D) es κ-consistente. Fije ahora una $f \in F_1$ y defina $F' = F_1 \setminus \{f\}$. Entonces $|F \setminus F'| \leq \kappa$. Para tal f, defina $a \in {}^\lambda A$ como

$$a(\nu) = \begin{cases} a_{f(\nu)} & \text{si } f(\nu) < \chi, \\ a_0 & \text{de lo contrario.} \end{cases}$$

Defina entonces $D' = (D, E)$ con $E = \{A_\xi : \xi < \xi_0\}$. La siguiente afirmación concluye la demostración del lema.

· $(F', 0, D')$ **es κ-consistente** :
Como $\xi_0 \leq \kappa$, se sigue que $|E| \leq \kappa$ y por lo tanto D' se genera por a lo sumo κ conjuntos. Ahora suponga que existe un cardinal $\beta < \mu$, un conjunto $\{f_\rho : \rho < \beta\} \subseteq F'$, un conjunto $\{\sigma_\rho : \rho < \beta\}$ de ordinales menores que μ y un conjunto $X' \in D'$ tales que si

$$B = \{\nu < \lambda : f_\rho(\nu) = \sigma_\rho \text{ para todo } \rho < \beta\},$$

entonces

$$B \cap X' = \emptyset.$$

Como $X' \in D'$,

$$X' \supseteq X \cap \bigcap_{i=1}^{n} A_{\xi_i}$$

para algún $X \in D$, algún $n \in \mathbb{N}$ y algunos $\xi_1, \ldots, \xi_n < \xi_0$. Note que, como $\{\varphi_\xi(x, y_{\xi,1}, \ldots, y_{\xi,n_\xi}) : \xi < \xi_0\}$ es cerrado bajo conjunciones,

$$\begin{aligned} \bigcap_{i=1}^{n} A_{\xi_i} &= \bigcap_{i=1}^{n} \{\nu < \lambda : \mathfrak{A} \models \varphi_{\xi_i}(a(\nu), a_{\xi_i,1}(\nu), \ldots, a_{\xi_i,n_{\xi_i}}(\nu))\} \\ &= \{\nu < \lambda : \mathfrak{A} \models \bigwedge_{i=1}^{n} \Big(\varphi_{\xi_i}(a(\nu), a_{\xi_i,1}(\nu), \ldots, a_{\xi_i,n_{\xi_i}}(\nu))\Big)\} \\ &= \{\nu < \lambda : \mathfrak{A} \models \varphi_\xi(a(\nu), a_{\xi,1}(\nu), \ldots, a_{\xi,n_\xi}(\nu))\} \\ &= A_\xi \end{aligned}$$

para algún $\xi < \xi_0$, donde la tupla $a_{\xi,1}(\nu), \ldots, a_{\xi,n_\xi}(\nu)$ es la concatenación de las tuplas $a_{\xi_i,1}(\nu), \ldots, a_{\xi_i,n_{\xi_i}}(\nu)$ para $i \in \{1, \ldots, n\}$. Así,

$$A_\xi \cap B \cap X = \emptyset;$$

es decir, si $\nu < \lambda$ es tal que

$$f_\rho(\nu) = \sigma_\rho \text{ para todo } \rho < \beta \text{ y } \mathfrak{A} \models \varphi_\xi(a(\nu), a_{\xi,1}(\nu), \ldots, a_{\xi,n_\xi}(\nu)),$$

entonces

$$\nu \notin X.$$

De lo anterior se sigue que

$$\{\nu < \lambda : f_\rho(\nu) = \sigma_\rho \text{ para todo } \rho < \beta \text{ y } f(\nu) = g_\xi(\nu)\} \cap A^\xi_\exists \cap X = \emptyset,$$

lo que contradice la κ-consistencia de (F_1, G, D).

□

Ahora demostramos el teorema de Keisler-Shelah en su versión más general. Para ello, haremos uso de la siguiente notación: si D es un filtro, defina $D^c = \{A^c : A \in D\}$.

Teorema 6.2.1 (Keisler, Shelah)**.** *Sean $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ dos $\mathcal{L}$-estructuras elementalmente equivalentes. Entonces existe un ultrafiltro D tal que $\prod_D \mathfrak{A} \cong \prod_D \mathfrak{B}$.*

Demostración.
Sea $\lambda = 2^{|\mathfrak{A}|+|\mathfrak{B}|+|\mathcal{L}|}$ y sea $\mu = \min\{\chi : \lambda^\chi > \lambda\}$. Entonces $|\mathfrak{A}|, |\mathfrak{B}|, |\mathcal{L}| < \mu$. Note que, en particular, $|\mathcal{L}| \leq \lambda$. Por inducción en $\rho < 2^\lambda$ construiremos:

· una sucesión creciente, D_ρ, de filtros propios sobre λ,

· una sucesión decreciente, F_ρ, de conjuntos de funciones de λ en μ,

· una sucesión $A_\rho = \{a_\eta : \eta < \rho\}$ de elementos de ${}^\lambda A$,

· una sucesión $B_\rho = \{b_\eta : \eta < \rho\}$ de elementos de ${}^\lambda B$

tales que $|F_0| = 2^\lambda$, $\bigcup_{\rho<2^\lambda} A_\rho = {}^\lambda A$, $\bigcup_{\rho<2^\lambda} B_\rho = {}^\lambda B$, $\bigcup_{\rho<2^\lambda} D_\rho$ es un ultrafiltro sobre λ y tales que para todo $\rho < 2^\lambda$ se satisfacen las siguientes condiciones:

1(ρ) $|F_0 \setminus F_\rho| \leq \lambda + |\rho|$ (de manera que $|F_\rho| = 2^\lambda$) y $(F_\rho, 0, D_\rho)$ es $\lambda + |\rho|$-consistente,

2(ρ) con $\rho = \eta + 3n + 2$, η límite y $n < \omega$: Para toda $\mathcal{L}$-fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ y toda tupla de ordinales $\rho_1, \ldots, \rho_n < \rho$ se tiene que

$$\{\nu < \lambda : \mathfrak{A} \models \varphi(a_{\rho_1}(\nu), \ldots, a_{\rho_n}(\nu))\} \in D_\rho$$

si y sólo si

$$\{\nu < \lambda : \mathfrak{A} \not\models \varphi(a_{\rho_1}(\nu), \ldots, a_{\rho_n}(\nu))\} \notin D_\rho,$$

2(ρ) con $\rho = \eta + 3n + 3$, η límite y $n < \omega$: Para toda $\mathcal{L}$-fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ y toda tupla de ordinales $\rho_1, \ldots, \rho_n < \rho$ se tiene que

$$\{\nu < \lambda : \mathfrak{B} \models \varphi(b_{\rho_1}(\nu), \ldots, b_{\rho_n}(\nu))\} \in D_\rho$$

si y sólo si

$$\{\nu < \lambda : \mathfrak{B} \not\models \varphi(b_{\rho_1}(\nu), \ldots, b_{\rho_n}(\nu))\} \notin D_\rho,$$

3(ρ) Para toda $\mathcal{L}$-fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ y toda tupla de ordinales $\rho_1, \ldots, \rho_n < \rho$ se tiene que

$$\{\nu < \lambda : \mathfrak{A} \models \varphi(a_{\rho_1}(\nu), \ldots, a_{\rho_n}(\nu))\} \in D_\rho$$

si y sólo si

$$\{\nu < \lambda : \mathfrak{B} \models \varphi(b_{\rho_1}(\nu), \ldots, b_{\rho_n}(\nu))\} \in D_\rho.$$

Para el caso $\rho = \eta + 3n + 1$ con η límite y $n < \omega$, dada una enumeración de los subconjuntos de λ, se decidirá si el primer subconjunto C que no se haya considerado es consistente con $D_{\rho-1}$, de manera que, según sea el caso, se extienda $D_{\rho-1}$ a D_ρ con C ó C^c de manera consistente.
Antes de proceder con la construcción de las cuatro sucesiones, vamos a mostrar que $D = \bigcup_{\rho<2^\lambda} D_\rho$ y que la función $\Phi : \prod_D \mathfrak{A} \longrightarrow \prod_D \mathfrak{B}$ dada por

$$\Phi((a_\rho)_D) = (b_\rho)_D$$

son el ultrafiltro y el isomorfismo deseados para la prueba del teorema.

· **Φ es elemental** :

Sea $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ una $\mathcal{L}$-fórmula y sean $(a_{\rho_1})_D, \ldots, (a_{\rho_n})_D$ elementos de $\prod_D \mathfrak{A}$. Queremos mostrar que

$$\prod_D \mathfrak{A} \models \varphi((a_{\rho_1})_D, \ldots, (a_{\rho_n})_D)$$

si y sólo si

$$\prod_D \mathfrak{B} \models \varphi(\Phi((a_{\rho_1})_D), \ldots, \Phi((a_{\rho_n})_D)).$$

Por el teorema de Łoś y la definición de Φ, es suficiente mostrar que

$$\{\nu < \lambda : \mathfrak{A} \models \varphi(a_{\rho_1}(\nu), \ldots, a_{\rho_n}(\nu))\} \in D$$

si y sólo si

$$\{\nu < \lambda : \mathfrak{B} \models \varphi(b_{\rho_1}(\nu), \ldots, b_{\rho_n}(\nu))\} \in D.$$

Suponga que $\{\nu < \lambda : \mathfrak{A} \models \varphi(a_{\rho_1}(\nu), \ldots, a_{\rho_n}(\nu))\} \in D$. Sea $\rho = 3\,\text{máx}\{\rho_1, \ldots, \rho_n\} + 2$. Entonces

$$\begin{aligned}\{\nu < \lambda : \mathfrak{A} \models \varphi(a_{\rho_1}(\nu), \ldots, a_{\rho_n}(\nu))\} \in D &\Rightarrow \{\nu < \lambda : \mathfrak{A} \models \varphi(a_{\rho_1}(\nu), \ldots, a_{\rho_n}(\nu))\} \in D_\rho \\ &\Rightarrow \{\nu < \lambda : \mathfrak{B} \models \varphi(b_{\rho_1}(\nu), \ldots, b_{\rho_n}(\nu))\} \in D_\rho \\ &\Rightarrow \{\nu < \lambda : \mathfrak{B} \models \varphi(b_{\rho_1}(\nu), \ldots, b_{\rho_n}(\nu))\} \in D,\end{aligned}$$

donde la primera implicación se tiene por la condición $2(\rho)$, la segunda por la condición $3(\rho)$ y la tercera por definición de D. La otra implicación es análoga, eligiendo ρ como $3\,\text{máx}\{\rho_1, \ldots, \rho_n\} + 3$ y utilizando las condiciones $2(\rho)$ y $3(\rho)$.

· **Φ está bien definida** :

Resulta de la elementaridad de Φ, usando la fórmula $\varphi(x_1, x_2)$ dada por $x_1 = x_2$.

· **Φ es sobreyectiva** :

Resulta de la construcción de Φ.

Ahora procedemos con la construcción de las cuatro sucesiones. Para $\rho < 2^\lambda$, defina $C_\rho = D_\rho \cup D_\rho^c$.

· $\rho = 0$:

Por el lema 6.1.2, existe una familia F de 2^λ funciones de λ en μ tales que $(F, 0, \{\lambda\})$ es μ-consistente. Defina entonces $F_0 = F$, $D_0 = \{\lambda\}$, $A_0 = B_0 = \emptyset$. Por el lema 6.1.3(i), $(F_0, 0, D_0)$ es λ-consistente, lo que muestra el requerimiento $1(\rho)$. Los requerimientos $2(\rho)$ y $3(\rho)$ son inmediatos.

· $\rho = \eta + 3n + 1$, η **límite y** $n < \omega$:
Sea C el primer conjunto en $\mathcal{P}(\lambda) \setminus C_{\rho-1}$, si existe. Por el lema 6.1.4(i), existe un subconjunto $F_\rho \subseteq F_{\rho-1}$ y un filtro $D_\rho \supseteq D_{\rho-1}$ tales que $|F_{\rho-1} \setminus F_\rho| \leq \lambda + |\rho|$, $(F_\rho, 0, D_\rho)$ es $\lambda + |\rho|$-consistente y, o bien $D_\rho = (D_{\rho-1}, C)$, o bien $D_\rho = (D_{\rho-1}, C^c)$. El resto de requerimientos son inmediatos, eligiendo $A_\rho = A_{\rho-1}$ y $B_\rho = B_{\rho-1}$. Si tal C no existe, defina $D_\rho = D_{\rho-1}$, $F_\rho = F_{\rho-1}$, $A_\rho = A_{\rho-1}$ y $B_\rho = B_{\rho-1}$, de donde se siguen cumpliendo todos los requerimientos.

· $\rho = \eta + 3n + 2$, η **límite y** $n < \omega$:
Por hipótesis de inducción, $(F_{\rho-1}, 0, D_{\rho-1})$ es $\lambda + |\rho|$-consistente. Sea a_ρ el primer elemento de ${}^\lambda A \setminus A_{\rho-1}$, que existe pues $|A_{\rho-1}| = |\rho| < 2^\lambda$. Para toda $\mathcal{L}$-fórmula $\varphi(x, y_1, \ldots, y_m)$ y toda tupla $\rho_1, \ldots, \rho_m < \rho$, defina el conjunto

$$X(\varphi, \rho_1, \ldots, \rho_m) = \{\nu < \lambda : \mathfrak{A} \models \varphi(a_\rho(\nu), a_{\rho_1}(\nu), \ldots, a_{\rho_m}(\nu))\}.$$

Como $|\mathcal{L}| \leq \lambda$, hay a lo sumo $\lambda + |\rho|$ tales conjuntos. Por el lema 6.1.4(ii), existe un subconjunto $F' \subseteq F_{\rho-1}$ y un filtro $D' \supseteq D_{\rho-1}$ tales que $|F_{\rho-1} \setminus F'| \leq \lambda + |\rho|$, $(F', 0, D')$ es $\lambda + |\rho|$-consistente y para toda $\mathcal{L}$-fórmula $\varphi(x, y_1, \ldots, y_m)$ y toda tupla $\rho_1, \ldots, \rho_m < \rho$, o bien

$$X(\varphi, \rho_1, \ldots, \rho_m) \in D',$$

o bien

$$X(\varphi, \rho_1, \ldots, \rho_m)^c \in D'.$$

Defina

$$\Gamma = \{(\varphi(x, y_1, \ldots, y_m), (\rho_1, \ldots, \rho_m)) : X(\varphi, \rho_1, \ldots, \rho_m) \in D'\}.$$

Para toda tupla $(\varphi(x, y_1, \ldots, y_m), (\rho_1, \ldots, \rho_m)) \in \Gamma$, defina los conjuntos

$$Y(\varphi, \rho_1, \ldots, \rho_m) = \{\nu < \lambda : \mathfrak{A} \models \exists x \varphi(x, a_{\rho_1}(\nu), \ldots, a_{\rho_m}(\nu))\}$$

y

$$Z(\varphi, \rho_1, \ldots, \rho_m) = \{\nu < \lambda : \mathfrak{B} \models \exists x \varphi(x, b_{\rho_1}(\nu), \ldots, b_{\rho_m}(\nu))\}.$$

Así, si $(\varphi(x, y_1, \ldots, y_m), (\rho_1, \ldots, \rho_m)) \in \Gamma$, se tiene que

$$Y(\varphi, \rho_1, \ldots, \rho_m) \in D'$$

pues

$$X(\varphi, \rho_1, \ldots, \rho_m) \subseteq Y(\varphi, \rho_1, \ldots, \rho_m).$$

También, si $(\varphi(x, y_1, \ldots, y_m), (\rho_1, \ldots, \rho_m)) \in \Gamma$, se tiene que

$$Z(\varphi, \rho_1, \ldots, \rho_m) \in D'$$

pues, de lo contrario,

$$Z(\varphi, \rho_1, \ldots, \rho_m) \notin D_{\rho-1},$$

luego, por la condición $2(\rho - 1)$,

$$Y(\varphi, \rho_1, \ldots, \rho_m) \notin D_{\rho-1},$$

luego, por la condición $1(\rho - 1)$,

$$Y(\varphi, \rho_1, \ldots, \rho_m)^c \in D_{\rho-1}$$

y entonces
$$Y(\varphi, \rho_1, \ldots, \rho_m)^c \in D',$$
lo que es absurdo pues D' es un filtro propio. Entonces, por el lema 6.2.1, existe un subconjunto $F_\rho \subseteq F'$, un filtro $D_\rho \supseteq D'$ y una función $b_\rho \in {}^\lambda B$ tales que $|F' \setminus F_\rho| \leq \lambda + |\rho|$, $(F_\rho, 0, D_\rho)$ es $\lambda + |\rho|$-consistente y para toda tupla
$$(\varphi(x, y_1, \ldots, y_m), (\rho_1, \ldots, \rho_m)) \in \Gamma,$$
vale que
$$\{\nu < \lambda : \mathfrak{B} \models \varphi(b_\rho(\nu), b_{\rho_1}(\nu), \ldots, b_{\rho_m}(\nu))\} \in D_\rho.$$
Como D_ρ es un filtro propio, tenemos el requerimiento $1(\rho)$. Por lo anterior, tenemos una dirección del requerimiento $2(\rho)$. Para la otra dirección, note que si $(\varphi(x, y_1, \ldots, y_m), (\rho_1, \ldots, \rho_m)) \notin \Gamma$, entonces $(\neg\varphi(x, y_1, \ldots, y_m), (\rho_1, \ldots, \rho_m)) \in \Gamma$, y se sigue entonces el mismo argumento. Finalmente, defina $A_\rho = A_{\rho-1} \cup \{a_\rho\}$ y $B_\rho = B_{\rho-1} \cup \{b_\rho\}$.

· $\rho = \eta + 3n + 3$, η **límite y** $n < \omega$:
Análogo al caso anterior.

· $\rho = \eta$, η **límite** :
Defina $F_\rho = \bigcap_{\xi<\rho} F_\xi$, $D_\rho = \bigcup_{\xi<\rho} D_\xi$, $A_\rho = \bigcup_{\xi<\rho} A_\xi$ y $B_\rho = \bigcup_{\xi<\rho} B_\xi$. Por hipótesis de inducción, para todo $\chi < \rho$ vale que $(F_\chi, 0, D_\chi)$ es $\lambda + |\chi|$-consistente. Como $\lambda + |\chi| < \lambda + |\rho|$ para todo $\chi < \rho$, se sigue por el lema 6.1.3(ii) que $(F_\rho, 0, D_\rho)$ es $\lambda + |\rho|$-consistente. El resto de requerimientos son inmediatos.

□

6.3 Lógica continua

Lema 6.3.1. *Sean:*

· $\mathfrak{M}$ *una $\mathcal{L}$-estructura métrica con universo M y con carácter de densidad $\chi < \mu \leq \kappa$,*

· $M_0 \subseteq M$ *un subconjunto denso en M de cardinalidad χ,*

· ξ_0 *un cardinal menor o igual que κ, $\{n_\xi : \xi < \xi_0\}$ un conjunto de números naturales, $a_{\xi,m} \in {}^\lambda M_0$ para $\xi < \xi_0$ y $m \in \{1, \ldots, n_\xi\}$,*

· $(F, 0, D)$ *una tripla κ-consistente,*

· $\{\varphi_\xi(x, y_{\xi,1}, \ldots, y_{\xi,n_\xi}) : \xi < \xi_0\}$ *un conjunto de $\mathcal{L}$-fórmulas cerrado bajo máximos,*

· $\{A_\exists^{\xi,k} : \xi < \xi_0, k \in \mathbb{N}^*\} \subseteq D$ *con*
$$A_\exists^{\xi,k} = \{\nu < \lambda : \inf_{x \in M} \varphi_\xi^{\mathfrak{M}}(x, a_{\xi,1}(\nu), \ldots, a_{\xi,n_\xi}(\nu)) < \frac{1}{k}\}.$$

Entonces existe un conjunto $F' \subseteq F$, un filtro $D' \supseteq D$ y un $a \in {}^\lambda M_0$ tales que

· $|F \setminus F'| \leq \kappa$,

· $(F', 0, D')$ *es κ-consistente, y*

· $\{A_{\xi,k} : \xi < \xi_0, k \in \mathbb{N}^*\} \subseteq D'$ *con*

$$A_{\xi,k} = \{\nu < \lambda : \varphi_\xi^{\mathfrak{M}}(a(\nu), a_{\xi,1}(\nu), \ldots, a_{\xi,n_\xi}(\nu)) < \frac{1}{k}\}.$$

Note que como $(F', 0, D')$ resulta ser κ-consistente, entonces D' es un filtro propio.

Demostración.
Sea $\{m_\alpha : \alpha < \chi\}$ una enumeración de M_0. Para $\xi < \xi_0$ y $k \in \mathbb{N}^*$, defina $g_{\xi,k} : \lambda \longrightarrow \chi$ como

$$g_{\xi,k}(\nu) = \begin{cases} \text{el mínimo } \eta \text{ tal que } \varphi_\xi^{\mathfrak{M}}(m_\eta, a_{\xi,1}(\nu), \ldots, a_{\xi,n_\xi}(\nu)) < \frac{1}{k} & \text{si } \nu \in A^{\xi,k}, \\ 0 & \text{de lo contrario.} \end{cases}$$

Tal $m_\eta \in M_0$ existe por la siguiente consideración: si $\nu \in A^{\xi,k}$, entonces

$$\inf_{x \in M} \varphi_\xi^{\mathfrak{M}}(x, a_{\xi,1}(\nu), \ldots, a_{\xi,n_\xi}(\nu)) < \frac{1}{k}.$$

Escoja un real r tal que

$$\text{ínf}_{x \in M} \varphi_\xi^{\mathfrak{M}}(x, a_{\xi,1}(\nu), \ldots, a_{\xi,n_\xi}(\nu)) < r < \frac{1}{k}.$$

Entonces existe un $m \in M$ tal que $\varphi_\xi^{\mathfrak{M}}(m, a_{\xi,1}(\nu), \ldots, a_{\xi,n_\xi}(\nu)) < r$. Sea Δ el módulo de continuidad uniforme de $\varphi_\xi^{\mathfrak{M}}(x, a_{\xi,1}(\nu), \ldots, a_{\xi,n_\xi}(\nu))$, y sea

$$\varepsilon = r - \varphi_\xi^{\mathfrak{M}}(m, a_{\xi,1}(\nu), \ldots, a_{\xi,n_\xi}(\nu)).$$

Como M_0 es denso en M, existe un $\eta < \chi$ tal que $d(m_\eta, m) < \Delta(\varepsilon)$, luego

$$|\varphi^{\mathfrak{M}}(m_\eta, a_{\xi,1}(\nu), \ldots, a_{\xi,n_\xi}(\nu)) - \varphi^{\mathfrak{M}}(m, a_{\xi,1}(\nu), \ldots, a_{\xi,n_\xi}(\nu))| \leq \varepsilon,$$

de manera que

$$\begin{aligned} \varphi^{\mathfrak{M}}(m_\eta, a_{\xi,1}(\nu), \ldots, a_{\xi,n_\xi}(\nu)) &\leq \varepsilon + \varphi^{\mathfrak{M}}(m, a_{\xi,1}(\nu), \ldots, a_{\xi,n_\xi}(\nu)) \\ &< \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

Ahora, note que hay a lo sumo $\xi_0 \cdot \aleph_0$ tales funciones. Sea $G = \{g_{\xi,k} : \xi < \xi_0, k \in \mathbb{N}^*\}$, de manera que $\mu + |G| \leq \kappa$. Por el lema 6.1.5, existe un $F_1 \subseteq F$ tal que $|F \setminus F_1| \leq \kappa$ y que (F_1, G, D) es κ-consistente. Ahora fije una $f \in F_1$ y defina $F' = F_1 \setminus \{f\}$. Entonces $|F \setminus F'| \leq \kappa$. Para tal f, defina $a \in {}^\lambda M_0$ como

$$a(\nu) = \begin{cases} m_{f(\nu)} & \text{si } f(\nu) < \chi, \\ m_0 & \text{de lo contrario.} \end{cases}$$

Defina además $D' = (D, E)$ con $E = \{A_{\xi,k} : \xi < \xi_0, k \in \mathbb{N}^*\}$. La afirmación siguiente concluye la demostración del lema.

· $(F', 0, D')$ **es κ-consistente** :

Como $\xi_0 \cdot \aleph_0 \leq \kappa$, se sigue que $|E| \leq \kappa$ y que, por lo tanto, D' se genera por a lo sumo κ conjuntos. Ahora suponga que existe un cardinal $\beta < \mu$, un conjunto $\{f_\rho : \rho < \beta\} \subseteq F'$, un conjunto $\{\sigma_\rho : \rho < \beta\}$ de ordinales menores que μ y un conjunto $X' \in D'$ tales que si

$$B = \{\nu < \lambda : f_\rho(\nu) = \sigma_\rho \text{ para todo } \rho < \beta\},$$

entonces

$$B \cap X' = \emptyset.$$

Como $X' \in D'$,

$$X' \supseteq X \cap \bigcap_{i=1}^{n} A_{\xi_i, k_i}$$

para algún $X \in D$, algún $n \in \mathbb{N}$, algunos $\xi_1, \ldots, \xi_n < \xi_0$ y algunos $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}^*$. Note que, como $\{\varphi_\xi(x, y_{\xi,1}, \ldots, y_{\xi,n_\xi}) : \xi < \xi_0\}$ es cerrado bajo máximos,

$$\begin{aligned}
\bigcap_{i=1}^{n} A_{\xi_i,k_i} &= \bigcap_{i=1}^{n} \{\nu < \lambda : \varphi_{\xi_i}^{\mathfrak{M}}(a(\nu), a_{\xi_i,1}(\nu), \ldots, a_{\xi_i,n_{\xi_i}}(\nu)) < \frac{1}{k_i}\} \\
&\supseteq \{\nu < \lambda : \max_{i=1}^{n} \left(\varphi_{\xi_i}^{\mathfrak{M}}(a(\nu), a_{\xi_i,1}(\nu), \ldots, a_{\xi_i,n_{\xi_i}}(\nu))\right) < \frac{1}{k}\} \\
&= \{\nu < \lambda : \varphi_{\xi}^{\mathfrak{M}}(a(\nu), a_{\xi,1}(\nu), \ldots, a_{\xi,n_\xi}(\nu)) < \frac{1}{k}\} \\
&= A_{\xi,k}
\end{aligned}$$

para algún $\xi < \xi_0$, donde $k = \max_{i=1}^{n} k_i$ y donde la tupla $a_{\xi,1}(\nu), \ldots, a_{\xi,n_\xi}(\nu)$ es la concatenación de las tuplas $a_{\xi_i,1}(\nu), \ldots, a_{\xi_i,n_{\xi_i}}(\nu)$ para $i \in \{1, \ldots, n\}$. Así,

$$A_{\xi,k} \cap B \cap X = \emptyset;$$

es decir, si $\nu < \lambda$ es tal que

$$f_\rho(\nu) = \sigma_\rho \text{ para todo } \rho < \beta \text{ y } \varphi_{\xi}^{\mathfrak{M}}(a(\nu), a_{\xi,1}(\nu), \ldots, a_{\xi,n_\xi}(\nu)) < \frac{1}{k},$$

entonces

$$\nu \notin X.$$

De lo anterior se sigue que

$$\{\nu < \lambda : f_\rho(\nu) = \sigma_\rho \text{ para todo } \rho < \beta \text{ y } f(\nu) = g_{\xi,k}(\nu)\} \cap A_{\exists}^{\xi,k} \cap X = \emptyset,$$

lo que contradice la κ-consistencia de (F_1, G, D).

□

Ahora demostramos el teorema de Keisler-Shelah en el formato de lógica continua. Recuerde que si D es un filtro, D^c se define como $\{A^c : A \in D\}$.

Teorema 6.3.1. *Sean $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ dos $\mathcal{L}$-estructuras métricas elementalmente equivalentes. Entonces existe un ultrafiltro D tal que $(\mathfrak{M})_D \cong (\mathfrak{N})_D$.*

Demostración.
Sean $\kappa_1 = char(M)$, M_0 denso en M, $|M_0| = \kappa_1$, $\kappa_2 = char(N)$, N_0 denso en N, $|N_0| = \kappa_2$. Sea $\lambda = 2^{\kappa_1+\kappa_2+|\mathcal{L}|}$ y sea $\mu = \text{mín}\{\chi : \lambda^\chi > \lambda\}$. Entonces $\kappa_1, \kappa_2, |\mathcal{L}| < \mu$. Note que, en particular, $|\mathcal{L}| \leq \lambda$. Por inducción en $\rho < 2^\lambda$ construiremos:

· una sucesión creciente, D_ρ, de filtros propios sobre λ,

· una sucesión decreciente, F_ρ, de conjuntos de funciones de λ en μ,

· una sucesión $A_\rho = \{a_\eta : \eta < \rho\}$ de elementos de ${}^\lambda M_0$,

· una sucesión $B_\rho = \{b_\eta : \eta < \rho\}$ de elementos de ${}^\lambda N_0$

tales que $|F_0| = 2^\lambda$, $\bigcup_{\rho<2^\lambda} A_\rho = {}^\lambda M_0$, $\bigcup_{\rho<2^\lambda} B_\rho = {}^\lambda N_0$, $\bigcup_{\rho<2^\lambda} D_\rho$ es un ultrafiltro sobre λ y tales que para todo $\rho < 2^\lambda$ se satisfacen los requerimientos siguientes:

1(ρ) $|F_0 \setminus F_\rho| \leq \lambda + |\rho|$ (de manera que $|F_\rho| = 2^\lambda$) y $(F_\rho, 0, D_\rho)$ es $\lambda + |\rho|$-consistente,

2(ρ) **con** $\rho = \eta + 3n + 2$, η **límite y** $n < \omega$: Para toda $\mathcal{L}$-fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, toda tupla de ordinales $\rho_1, \ldots, \rho_n < \rho$ y todo $k \in \mathbb{N}^*$ se tiene que

$$\{\nu < \lambda : \varphi^{\mathfrak{M}}(a_{\rho_1}(\nu), \ldots, a_{\rho_n}(\nu)) < \frac{1}{k}\} \in D_\rho$$

si y sólo si

$$\{\nu < \lambda : \varphi^{\mathfrak{M}}(a_{\rho_1}(\nu), \ldots, a_{\rho_n}(\nu)) \geq \frac{1}{k}\} \notin D_\rho,$$

2(ρ) **con** $\rho = \eta + 3n + 3$, η **límite y** $n < \omega$: Para toda $\mathcal{L}$-fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, toda tupla de ordinales $\rho_1, \ldots, \rho_n < \rho$ y todo $k \in \mathbb{N}^*$ se tiene que

$$\{\nu < \lambda : \varphi^{\mathfrak{N}}(b_{\rho_1}(\nu), \ldots, b_{\rho_n}(\nu)) < \frac{1}{k}\} \in D_\rho$$

si y sólo si

$$\{\nu < \lambda : \varphi^{\mathfrak{N}}(b_{\rho_1}(\nu), \ldots, b_{\rho_n}(\nu)) \geq \frac{1}{k}\} \notin D_\rho,$$

3(ρ) **con** $\rho = \eta + 3n + 2$, η **límite y** $n < \omega$: Para toda $\mathcal{L}$-fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, toda tupla de ordinales $\rho_1, \ldots, \rho_n < \rho$ y todo $k \in \mathbb{N}^*$ se tiene que

$$\{\nu < \lambda : \varphi^{\mathfrak{M}}(a_{\rho_1}(\nu), \ldots, a_{\rho_n}(\nu)) < \frac{1}{k}\} \in D_\rho$$

implica que

$$\{\nu < \lambda : \varphi^{\mathfrak{N}}(b_{\rho_1}(\nu), \ldots, b_{\rho_n}(\nu)) < \frac{1}{k}\} \in D_\rho.$$

3(ρ) **con** $\rho = \eta + 3n + 3$, η **límite y** $n < \omega$: Para toda $\mathcal{L}$-fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, toda tupla de ordinales $\rho_1, \ldots, \rho_n < \rho$ y todo $k \in \mathbb{N}^*$ se tiene que

$$\{\nu < \lambda : \varphi^{\mathfrak{N}}(b_{\rho_1}(\nu), \ldots, b_{\rho_n}(\nu)) < \frac{1}{k}\} \in D_\rho$$

implica que

$$\{\nu < \lambda : \varphi^{\mathfrak{M}}(a_{\rho_1}(\nu), \ldots, a_{\rho_n}(\nu)) < \frac{1}{k}\} \in D_\rho.$$

Para el caso $\rho = \eta + 3n + 1$ con η límite y $n < \omega$, dada una enumeración de los subconjuntos de λ, se decidirá si el primer subconjunto C que no se haya considerado es consistente con $D_{\rho-1}$, de manera que, según sea el caso, se extienda $D_{\rho-1}$ a D_ρ con C ó C^c de manera consistente.
Antes de proceder con la construcción de las cuatro sucesiones, vamos a mostrar que $D = \bigcup_{\rho<2^\lambda} D_\rho$ y que la función parcial $\Phi : (M_0)_D \longrightarrow (N_0)_D$ dada por

$$\Phi((a_\rho)_D) = (b_\rho)_D$$

son el ultrafiltro y la función parcial elemental deseados para la prueba del teorema, pues entonces el resultado se seguiría del lema 5.1.1.

· **Φ es elemental** :

Sea $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ una $\mathcal{L}$-fórmula y sean $(a_{\rho_1})_D, \ldots, (a_{\rho_n})_D$ elementos de $(M_0)_D$. Queremos mostrar que

$$\varphi^{(\mathfrak{M})_D}((a_{\rho_1})_D, \ldots, (a_{\rho_n})_D) = \varphi^{(\mathfrak{N})_D}(\Phi((a_{\rho_1})_D), \ldots, \Phi((a_{\rho_n})_D)).$$

Suponga que no. Entonces, o bien

$$\varphi^{(\mathfrak{M})_D}((a_{\rho_1})_D, \ldots, (a_{\rho_n})_D) > r > \varphi^{(\mathfrak{N})_D}(\Phi((a_{\rho_1})_D), \ldots, \Phi((a_{\rho_n})_D)),$$

o bien

$$\varphi^{(\mathfrak{M})_D}((a_{\rho_1})_D, \ldots, (a_{\rho_n})_D) < r < \varphi^{(\mathfrak{N})_D}(\Phi((a_{\rho_1})_D), \ldots, \Phi((a_{\rho_n})_D))$$

para algún número racional r. Considere la fórmula

$$\psi(x_1, \ldots, x_n) = r \dot{-} \varphi(x_1, \ldots, x_n),$$

de manera que, en el primer caso,

$$\psi^{(\mathfrak{M})_D}((a_{\rho_1})_D, \ldots, (a_{\rho_n})_D) = 0$$

y

$$\psi^{(\mathfrak{N})_D}(\Phi((a_{\rho_1})_D), \ldots, \Phi((a_{\rho_n})_D)) > 0.$$

Sea $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\psi^{(\mathfrak{N})_D}(\Phi((a_{\rho_1})_D), \ldots, \Phi((a_{\rho_n})_D)) > \frac{1}{k}. \tag{5}$$

Así, por el teorema de Łoś,

$$\{\nu < \lambda : \psi^{\mathfrak{M}}((a_{\rho_1})_D, \ldots, (a_{\rho_n})_D) < \frac{1}{k}\} \in D.$$

Si $\rho = 3\,\text{máx}\{\rho_1, \ldots, \rho_n\} + 2$, de la condición $2(\rho)$ se sigue que

$$\{\nu < \lambda : \psi^{\mathfrak{M}}((a_{\rho_1})_D, \ldots, (a_{\rho_n})_D) < \frac{1}{k}\} \in D_\rho.$$

De la condición $3(\rho)$ se sigue que

$$\{\nu < \lambda : \psi^{\mathfrak{N}}(\Phi((a_{\rho_1})_D), \ldots, \Phi((a_{\rho_n})_D)) < \frac{1}{k}\} \in D_\rho$$

y que, por definición de D,

$$\{\nu < \lambda : \psi^{\mathfrak{N}}(\Phi((a_{\rho_1})_D), \dots, \Phi((a_{\rho_n})_D)) < \frac{1}{k}\} \in D,$$

de manera que

$$\psi^{(\mathfrak{N})_D}(\Phi((a_{\rho_1})_D), \dots, \Phi((a_{\rho_n})_D)) \leq \frac{1}{k},$$

en contradicción con la condición (5). El segundo caso es análogo, eligiendo $\rho = 3\,\text{máx}\{\rho_1, \dots, \rho_n\} + 3$ y utilizando las condiciones $2(\rho)$ y $3(\rho)$.

· **Φ está bien definida** :
Resulta de la elementaridad de Φ, usando la fórmula $\varphi(x_1, x_2)$ dada por $d(x_1, x_2)$.

· **Φ es sobreyectiva** :
Resulta de la construcción de Φ.

Ahora procedemos con la construcción de las cuatro sucesiones. Para $\rho < 2^\lambda$, defina $C_\rho = D_\rho \cup D_\rho^c$.

· $\rho = 0$:
Por el lema 6.1.2, existe una familia F de 2^λ funciones de λ en μ tales que $(F, 0, \{\lambda\})$ es μ-consistente. Defina entonces $F_0 = F$, $D_0 = \{\lambda\}$, $A_0 = B_0 = \emptyset$. Por el lema 6.1.3(i), $(F_0, 0, D_0)$ es λ-consistente, lo que muestra el requerimiento $1(\rho)$. Los requerimientos $2(\rho)$ y $3(\rho)$ son inmediatos.

· $\rho = \eta + 3n + 1$, η **límite y** $n < \omega$:
Sea C el primer conjunto en $\mathcal{P}(\lambda) \setminus C_{\rho-1}$, si existe. Por el lema 6.1.4(i), existe un subconjunto $F_\rho \subseteq F_{\rho-1}$ y un filtro $D_\rho \supseteq D_{\rho-1}$ tales que $|F_{\rho-1} \setminus F_\rho| \leq \lambda + |\rho|$, $(F_\rho, 0, D_\rho)$ es $\lambda + |\rho|$-consistente y, o bien $D_\rho = (D_{\rho-1}, C)$, o bien $D_\rho = (D_{\rho-1}, C^c)$. El resto de requerimientos son inmediatos, eligiendo $A_\rho = A_{\rho-1}$ y $B_\rho = B_{\rho-1}$. Si tal C no existe, defina $D_\rho = D_{\rho-1}$, $F_\rho = F_{\rho-1}$, $A_\rho = A_{\rho-1}$ y $B_\rho = B_{\rho-1}$, de donde se siguen cumpliendo todos los requerimientos.

· $\rho = \eta + 3n + 2$, η **límite y** $n < \omega$:
Por hipótesis de inducción, $(F_{\rho-1}, 0, D_{\rho-1})$ es $\lambda + |\rho|$-consistente. Sea a_ρ el primer elemento de ${}^\lambda M_0 \setminus A_{\rho-1}$, que existe pues $|A_{\rho-1}| = |\rho| < 2^\lambda$. Para toda $\mathcal{L}$-fórmula $\varphi(x, y_1, \dots, y_m)$, toda tupla $\rho_1, \dots, \rho_m < \rho$ y todo $k \in \mathbb{N}^*$, defina el conjunto

$$X(\varphi, \rho_1, \dots, \rho_m, k) = \{\nu < \lambda : \varphi^{\mathfrak{M}}(a_\rho(\nu), a_{\rho_1}(\nu), \dots, a_{\rho_m}(\nu)) < \frac{1}{k}\}.$$

Como $|\mathcal{L}| \leq \lambda$, hay a lo sumo $\lambda + |\rho| + \aleph_0 = \lambda + |\rho|$ tales conjuntos. Por el lema 6.1.3(ii), existe un subconjunto $F' \subseteq F_{\rho-1}$ y un filtro $D' \supseteq D_{\rho-1}$ tales que $|F_{\rho-1} \setminus F'| \leq \lambda + |\rho|$, $(F', 0, D')$ es $\lambda + |\rho|$-consistente y para toda $\mathcal{L}$-fórmula $\varphi(x, y_1, \dots, y_m)$, toda tupla $\rho_1, \dots, \rho_m < \rho$ y todo $k \in \mathbb{N}^*$, o bien

$$X(\varphi, \rho_1, \dots, \rho_m, k) \in D',$$

o bien

$$X(\varphi, \rho_1, \dots, \rho_m, k)^c \in D'.$$

Defina

$$\Gamma = \{(\varphi(x, y_1, \dots, y_m), (\rho_1, \dots, \rho_m), k) : X(\varphi, \rho_1, \dots, \rho_m, k) \in D'\}.$$

Para toda tupla $(\varphi(x, y_1, \ldots, y_m), (\rho_1, \ldots, \rho_m), k) \in \Gamma$, defina los conjuntos

$$Y(\varphi, \rho_1, \ldots, \rho_m, k) = \{\nu < \lambda : \inf_{x \in M} \varphi^{\mathfrak{M}}(x, a_{\rho_1}(\nu), \ldots, a_{\rho_m}(\nu)) < \frac{1}{k}\}$$

y

$$Z(\varphi, \rho_1, \ldots, \rho_m) = \{\nu < \lambda : \inf_{x \in N} \varphi^{\mathfrak{N}}(x, b_{\rho_1}(\nu), \ldots, b_{\rho_m}(\nu)) < \frac{1}{k}\}.$$

Así, si $(\varphi(x, y_1, \ldots, y_m), (\rho_1, \ldots, \rho_m), k) \in \Gamma$, se tiene que

$$Y(\varphi, \rho_1, \ldots, \rho_m, k) \in D' \tag{6}$$

pues

$$X(\varphi, \rho_1, \ldots, \rho_m, k) \subseteq Y(\varphi, \rho_1, \ldots, \rho_m, k).$$

También, si $(\varphi(x, y_1, \ldots, y_m), (\rho_1, \ldots, \rho_m), k) \in \Gamma$, se tiene que

$$Z(\varphi, \rho_1, \ldots, \rho_m, k) \in D'$$

pues, de lo contrario,

$$Z(\varphi, \rho_1, \ldots, \rho_m, k) \notin D_{\rho-1},$$

luego, por la condición $2(\rho - 1)$,

$$Y(\varphi, \rho_1, \ldots, \rho_m, k) \notin D_{\rho-1},$$

luego, por la condición $1(\rho - 1)$,

$$Y(\varphi, \rho_1, \ldots, \rho_m, k)^c \in D_{\rho-1}$$

y entonces

$$Y(\varphi, \rho_1, \ldots, \rho_m, k)^c \in D',$$

lo que contradice la pertenencia dada en (6), pues D' es un filtro propio. Entonces, por el lema 6.3.1, existen un subconjunto $F_\rho \subseteq F'$, un filtro $D_\rho \supseteq D'$ y una función $b_\rho \in {}^\lambda N_0$ tales que $|F' \setminus F_\rho| \leq \lambda + |\rho|$, $(F_\rho, 0, D_\rho)$ es $\lambda + |\rho|$-consistente y para toda tupla

$$(\varphi(x, y_1, \ldots, y_m), (\rho_1, \ldots, \rho_m), k) \in \Gamma,$$

vale que

$$\{\nu < \lambda : \varphi^{\mathfrak{N}}(b_\rho(\nu), b_{\rho_1}(\nu), \ldots, b_{\rho_m}(\nu)) < \frac{1}{k}\} \in D_\rho.$$

Como D_ρ es un filtro propio, tenemos el requerimiento $1(\rho)$. Por lo anterior, tenemos el requerimiento $2(\rho)$. Finalmente, defina $A_\rho = A_{\rho-1} \cup \{a_\rho\}$ y $B_\rho = B_{\rho-1} \cup \{b_\rho\}$.

· $\rho = \eta + 3n + 3$, η **límite y** $n < \omega$:
Análogo al caso anterior.

· $\rho = \eta$, η **límite** :
Defina $F_\rho = \cap_{\xi<\rho} F_\xi$, $D_\rho = \cup_{\xi<\rho} D_\xi$, $A_\rho = \cup_{\xi<\rho} A_\xi$ y $B_\rho = \cup_{\xi<\rho} B_\xi$. Por el lema 6.1.3$(ii)$ se tiene que $(F_\rho, 0, D_\rho)$ es $\lambda + |\rho|$-consistente. El resto de requerimientos son inmediatos.

□

Referencias

[BYBHU08] Itaï Ben Yaacov, Alexander Berenstein, C. Ward Henson, and Alexander Usvyatsov. Model theory for metric structures. In *Model theory with applications to algebra and analysis. Vol. 2*, volume 350 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 315–427. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2008.

[CK90] C. C. Chang and H. J. Keisler. *Model theory*, volume 73 of *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, third edition, 1990.

[HI02] C. Ward Henson and José Iovino. Ultraproducts in analysis. In *Analysis and logic (Mons, 1997)*, volume 262 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 1–110. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2002.

[Poi00] Bruno Poizat. *A course in model theory*. Universitext. Springer-Verlag, New York, 2000. An introduction to contemporary mathematical logic, Translated from the French by Moses Klein and revised by the author.

[She71] Saharon Shelah. Every two elementarily equivalent models have isomorphic ultrapowers. *Israel Journal of Mathematics*, 10(2):224–233, Jun 1971.