

Lógica Matemática

Parte 1

Dr. Paulo Vinicius Pereira Pinheiro¹

¹Centro Universitário Paraíso do Ceará
UNIFAP

Acesse estes slides em:
<https://github.com/paulovpp/slides>

Última atualização:
3 de março de 2022

Sumário

- 1 Introdução
 - Objetivos
 - Definições iniciais
- 2 Lógica proposicional - Início
 - Conceitos iniciais
 - Princípios fundamentais da lógica matemática
 - Tipos de proposições
 - Conectivos proposicionais
- 3 Lógica proposicional - cálculo proposicional
 - Tabela verdade
 - Ordem de precedência e comprimento de fórmulas
 - Valor lógico
 - Exercícios

Sumário

- 4 Operações lógicas com proposições
 - Negação
 - Conjunção
 - Disjunção
 - Condicional
 - Bicondicional

Objetivos do curso

List all course objectives

Estudo da lógica proposicional

- Representar e especificar os conceitos de sintaxe e semântica associados a qualquer lógica utilizada ou linguagem.
- Estudar os métodos que produzem ou verifiquem as fórmulas ou argumentos utilizados.
- Definir sistemas de dedução formal onde são consideradas as noções de prova e consequência lógica.
- Correlacionar diagramas de Venn com a prática.
- Conhecer a álgebra de Boole.

Definições iniciais

Introductory definitions to the course

Proposição

- ★ É qualquer conjunto de palavras ou símbolos que expressam um pensamento completo.
- ★ As proposições transmitem fatos ou exprimem juízos que formamos a respeito de determinado acontecimento.

Exemplos

- A lua é um satélite da Terra.
- O valor arredondado de π vale 3,14.
- Recife é a capital da Paraíba
- $\cos(90^\circ) = 0$.

Alfabeto

- ★ É o conjunto de símbolos usado em qualquer linguagem. A seguir a tabela de símbolos usados na disciplina é apresentado:

Definições iniciais

Introductory definitions to the course

Proposição

- ★ É qualquer conjunto de palavras ou símbolos que expressam um pensamento completo.
- ★ As proposições transmitem fatos ou exprimem juízos que formamos a respeito de determinado acontecimento.

Exemplos

- A lua é um satélite da Terra.
- O valor arredondado de π vale 3,14.
- Recife é a capital da Paraíba
- $\cos(90^\circ) = 0$.

Alfabeto

- ★ É o conjunto de símbolos usado em qualquer linguagem. A seguir a tabela de símbolos usados na disciplina é apresentado:

Definições iniciais

Introductory definitions to the course

Proposição

- ★ É qualquer conjunto de palavras ou símbolos que expressam um pensamento completo.
- ★ As proposições transmitem fatos ou exprimem juízos que formamos a respeito de determinado acontecimento.

Exemplos

- A lua é um satélite da Terra.
- O valor arredondado de π vale 3,14.
- Recife é a capital da Paraíba
- $\cos(90^\circ) = 0$.

Alfabeto

- ★ É o conjunto de símbolos usado em qualquer linguagem. A seguir a tabela de símbolos usados na disciplina é apresentado:

Definições iniciais

Introductory definitions to the course

Proposição

- ★ É qualquer conjunto de palavras ou símbolos que expressam um pensamento completo.
- ★ As proposições transmitem fatos ou exprimem juízos que formamos a respeito de determinado acontecimento.

Exemplos

- A lua é um satélite da Terra.
- O valor arredondado de π vale 3,14.
- Recife é a capital da Paraíba
- $\cos(90^\circ) = 0$.

Alfabeto

- ★ É o conjunto de símbolos usado em qualquer linguagem. A seguir a tabela de símbolos usados na disciplina é apresentado:

Definições iniciais

Introductory definitions to the course

Proposição

- ★ É qualquer conjunto de palavras ou símbolos que expressam um pensamento completo.
- ★ As proposições transmitem fatos ou exprimem juízos que formamos a respeito de determinado acontecimento.

Exemplos

- A lua é um satélite da Terra.
- O valor arredondado de π vale 3,14.
- Recife é a capital da Paraíba
- $\cos(90^\circ) = 0$.

Alfabeto

- ★ É o conjunto de símbolos usado em qualquer linguagem. A seguir a tabela de símbolos usados na disciplina é apresentado:

Definições iniciais

Introductory definitions to the course

Proposição

- ★ É qualquer conjunto de palavras ou símbolos que expressam um pensamento completo.
- ★ As proposições transmitem fatos ou exprimem juízos que formamos a respeito de determinado acontecimento.

Exemplos

- A lua é um satélite da Terra.
- O valor arredondado de π vale 3,14.
- Recife é a capital da Paraíba
- $\cos(90^\circ) = 0$.

Alfabeto

- ★ É o conjunto de símbolos usado em qualquer linguagem. A seguir a tabela de símbolos usados na disciplina é apresentado:

Conceitos iniciais

Introductory definitions to start the course

Alfabeto da lógica proposicional

- Símbolo de pontuação: $(,)$
- Símbolos booleanos: *true, false*
- Símbolos proposicionais simples: p, q, r, s, p_1, q_2
- Símbolos proposicionais compostos: $P, Q, R, S, P_1, Q_1, S_2$
- Conectivos proposicionais: $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow$

Fórmulas

São conjuntos de proposições unidos por um conectivo obtendo um valor booleano como resultante. São construídas a partir dos símbolos do alfabeto proposicional.

Tal como ocorre nas linguagens faladas ou escritas, não é qualquer concatenação de símbolos que é uma fórmula.

Conceitos iniciais

Introductory definitions to start the course

Alfabeto da lógica proposicional

- Símbolo de pontuação: $(,)$
- Símbolos booleanos: *true, false*
- Símbolos proposicionais simples: p, q, r, s, p_1, q_2
- Símbolos proposicionais compostos: $P, Q, R, S, P_1, Q_1, S_2$
- Conectivos proposicionais: $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow$

Fórmulas

São conjuntos de proposições unidos por um conectivo obtendo um valor booleano como resultante. São construídas a partir dos símbolos do alfabeto proposicional.

Tal como ocorre nas linguagens faladas ou escritas, não é qualquer concatenação de símbolos que é uma fórmula.

Algumas definições

Examples of logic formulas

- Todo símbolo de verdade (V) é uma fórmula.
- Todo símbolo proposicional é uma fórmula.
- Se H é uma fórmula então $(\neg H)$, a negação de H , é uma fórmula.
- Se H e G são fórmulas então $(H \wedge G)$, $(H \vee G)$, $(H \rightarrow G)$ e $(H \leftrightarrow G)$ são fórmulas.

Não são fórmulas:

- PR
- $(H \text{ true} \leftrightarrow)$
- $(\text{true} \rightarrow \leftrightarrow (H \text{ true} \rightarrow))$
- $PH \rightarrow \wedge$
- $\text{true} \rightarrow \vee$

Algumas definições

Examples of logic formulas

- Todo símbolo de verdade (V) é uma fórmula.
- Todo símbolo proposicional é uma fórmula.
- Se H é uma fórmula então $(\neg H)$, a negação de H , é uma fórmula.
- Se H e G são fórmulas então $(H \wedge G)$, $(H \vee G)$, $(H \rightarrow G)$ e $(H \leftrightarrow G)$ são fórmulas.

Não são fórmulas:

- PR
- $(H \text{ true} \leftrightarrow)$
- $(\text{true} \rightarrow \leftrightarrow (H \text{ true} \rightarrow))$
- $PH \rightarrow \wedge$
- $\text{true} \rightarrow \vee$

Princípios da lógica clássica

Princípio da identidade

Uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo.

P é igual a P

Princípio da não contradição

Uma proposição não pode ser *verdadeira* e *falsa* ao mesmo tempo.

não (P e não P)

Princípio do terceiro excluído

Toda proposição ou é verdadeira ou é falsa, não existindo um terceiro valor que ela possa assumir.

P ou não P (\otimes – ou exclusivo)

Princípios da lógica clássica

Princípio da identidade

Uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo.

$$P \text{ é igual a } P$$

Princípio da não contradição

Uma proposição não pode ser *verdadeira* e *falsa* ao mesmo tempo.

$$\text{não } (P \text{ e não } P)$$

Princípio do terceiro excluído

Toda proposição ou é verdadeira ou é falsa, não existindo um terceiro valor que ela possa assumir.

$$P \text{ ou não } P (\otimes - \text{ou exclusivo})$$

Princípios da lógica clássica

Princípio da identidade

Uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo.

$$P \text{ é igual a } P$$

Princípio da não contradição

Uma proposição não pode ser *verdadeira* e *falsa* ao mesmo tempo.

$$\text{não } (P \text{ e não } P)$$

Princípio do terceiro excluído

Toda proposição ou é verdadeira ou é falsa, não existindo um terceiro valor que ela possa assumir.

$$P \text{ ou não } P (\otimes - \text{ou exclusivo})$$

Proposição simples e compostas

Simple or compound preposition

★ Proposições simples

É aquela que contém somente uma afirmação.

Exemplo:

Nós somos ricos.

Não como todo dia.

★ Proposições compostas

Uma proposição é dita composta quando for constituída por uma sequência finita de pelo menos duas proposições.

Exemplo:

Vamos ao cinema ou ao teatro.

O céu é azul e cheio de nuvens.

Conectivos do cálculo proposicional

Conectors for all arithmetic with propositions.

Na linguagem comum, palavras explícitas são utilizadas ou não para interligar frases dotadas de algum sentido. Tais palavras são substituídas, na **Lógica Matemática**, por símbolos denominados *conectivos lógicos*.

Em nosso estudo, nos restringiremos inicialmente ao chamado **cálculo proposicional**. Por essa razão, os conectivos utilizados são conhecidos por *sentenciais* ou *proposicionais*.

Existem cinco conectivos que substituirão simbolicamente as expressões:

- e (\wedge) - do inglês *AND*
- ou (\vee) - do inglês *OR*
- se ..., então ... (\rightarrow) - do inglês *IF ... then ...*
- se, e somente se ... (\leftrightarrow) - do inglês *IF and ONLY IF ...*
- não (\neg) - do inglês *NOT*

Conectivos do cálculo proposicional

Examples

Exemplo 1

Somos pobres mortais e fanáticos torcedores da vida.

É uma proposição composta:

1a proposição: somos pobres mortais,

2a proposição: somos fanáticos torcedores da vida,

Conectivo: e (AND)

Exemplo 2

Se não nos alimentarmos, morremos.

É uma proposição composta:

1a proposição: nos alimentarmos,

2a proposição: (nós) morreremos,

Conectivo: Se ..., então ...

Tabela verdade

True table of connectors definitions

Definição

Segundo o princípio do **terceiro excluído**, toda proposição simples p ou composta $H(p, q, \dots)$ só pode assumir **valor lógico** igual a

- V (verdade - *TRUE*)
- F (falsidade - *FALSE*)

Figura 1: Tabela verdade para um estado(proposição) único.

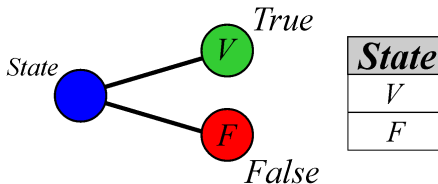


Tabela verdade

Examples

Figura 2: Tabela verdade para uma proposição composta $H(p, q)$.

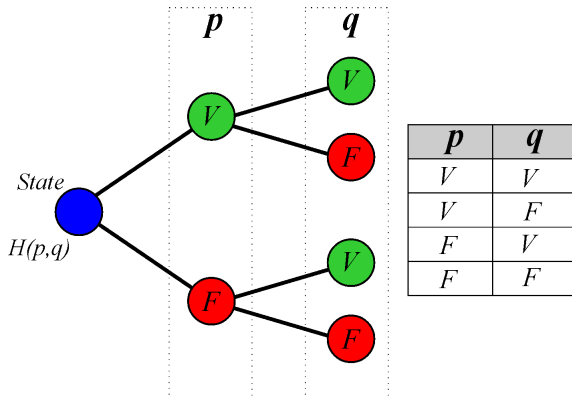
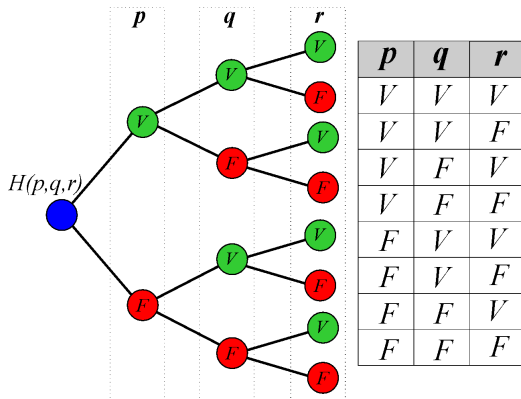


Tabela verdade

Examples

Figura 3: Tabela verdade para uma proposição composta $H(p, q, r)$.



Definições complementares

Final considerations of the section - Precedence order

Ordem de precedência

- Maior precedência: \neg ou \sim
- Precedência intermediária: \rightarrow e \leftrightarrow
- Menor precedência: \wedge e \vee

Comprimento de uma fórmula

- Se H é um símbolo proposicional ou de verdade então $comp[H] = 1$
- Se H e G são fórmulas da **lógica proposicional**, então

$$comp[\neg H] = comp[H] + 1$$

$$comp[H \wedge G] \text{ ou } comp[H \vee G] = comp[H] + comp[G] + 1$$

$$comp[H \rightarrow G] \text{ ou } comp[H \leftrightarrow G] = comp[H] + comp[G] + 1$$

Definições complementares

Final considerations of the section - Precedence order

Ordem de precedência

- Maior precedência: \neg ou \sim
- Precedência intermediária: \rightarrow e \leftrightarrow
- Menor precedência: \wedge e \vee

Comprimento de uma fórmula

- Se H é um símbolo proposicional ou de verdade então $comp[H] = 1$
- Se H e G são fórmulas da **lógica proposicional**, então

$$comp[\neg H] = comp[H] + 1$$

$$comp[H \wedge G] \text{ ou } comp[H \vee G] = comp[H] + comp[G] + 1$$

$$comp[H \rightarrow G] \text{ ou } comp[H \leftrightarrow G] = comp[H] + comp[G] + 1$$

Definições finais

Final considerations of the section 2/2

Valor lógico

O **valor lógico** de uma proposição simples ou composta expressa seu valor resultante se *verdadeiro* ou *falso*.

- Para uma proposição simples p , $V(p)$ expressa seu valor lógico.
- Para uma proposição composta H , $V(H)$ expressa seu valor lógico.

Exemplo 1

p : O sol é verde.

q : O sol é quente.

r : O mar não é vermelho.

$V(p) = V$, $V(q) = F$, $V(\neg r) = F$

$V(p \wedge q) = F$, $V(q \vee r) = V$

Exemplo 2

$p_1 : x \geq 10$

$p_2 : x < 50$

$p_3 : x > 25$

$V(p_1) = V$, $V(p_2) = F$, $V(\neg p_3) = F$

$V(p_1 \wedge p_2) = V$, $V(p_3 \wedge p_2) = F$

Exercícios - 1/2

Practice the chapters concepts

1. Identifique os itens abaixo que não são fórmulas da lógica proposicional.

a. pq

e. $p \wedge q$

i. $p \rightarrow q$

m. $P \rightarrow Q$

q. $P \rightarrow \text{true}$

b. PQ

f. $P \vee Q$

j. $PQ \rightarrow$

n. $P \leftrightarrow Q$

r. $P \wedge \text{true}$

c. $PQ \neg$

g. $PQ \wedge$

k. $\rightarrow PQ \neg$

o. $P \leftrightarrow q$

s. $\text{true } P \leftrightarrow q$

d. $\neg PQ$

h. $\forall PQ$

l. $P \rightarrow Q \rightarrow$

p. $\leftrightarrow P \leftrightarrow Q$

t. $\text{false } PQ \wedge$

Exercícios - 1/2

Practice the chapters concepts

1. Identifique os itens abaixo que não são fórmulas da lógica proposicional.

- | | | | | |
|--------------|-----------------|----------------------------------|--|---------------------------------------|
| a. pq | e. $p \wedge q$ | i. $p \rightarrow q$ | m. $P \rightarrow Q$ | q. $P \rightarrow \text{true}$ |
| b. PQ | f. $P \vee Q$ | j. $PQ \rightarrow$ | n. $P \leftrightarrow Q$ | r. $P \wedge \text{true}$ |
| c. $PQ \neg$ | g. $PQ \wedge$ | k. $\rightarrow PQ \neg$ | o. $P \leftrightarrow q$ | s. $\text{true } P \leftrightarrow q$ |
| d. $\neg PQ$ | h. $\forall PQ$ | l. $P \rightarrow Q \rightarrow$ | p. $\leftrightarrow P \leftrightarrow Q$ | t. $\text{false } PQ \wedge$ |

Respostas

a, b, c, d, g, h, j, k, l, p, q, s, t

Exercícios - 1/2

Practice the chapters concepts

1. Identifique os itens abaixo que não são fórmulas da lógica proposicional.

- | | | | | |
|--------------|-----------------|----------------------------------|--|---------------------------------------|
| a. pq | e. $p \wedge q$ | i. $p \rightarrow q$ | m. $P \rightarrow Q$ | q. $P \rightarrow \text{true}$ |
| b. PQ | f. $P \vee Q$ | j. $PQ \rightarrow$ | n. $P \leftrightarrow Q$ | r. $P \wedge \text{true}$ |
| c. $PQ \neg$ | g. $PQ \wedge$ | k. $\rightarrow PQ \neg$ | o. $P \leftrightarrow q$ | s. $\text{true } P \leftrightarrow q$ |
| d. $\neg PQ$ | h. $\vee PQ$ | l. $P \rightarrow Q \rightarrow$ | p. $\leftrightarrow P \leftrightarrow Q$ | t. $\text{false } PQ \wedge$ |

Respostas

a, b, c, d, g, h, j, k, l, p, q, s, t

2. Determine o comprimento das fórmulas a seguir.

- a. $((\neg \neg P \wedge Q) \leftrightarrow (P \rightarrow Q)) \wedge \text{true}$
- b. $(\neg P \rightarrow (Q \vee R)) \leftrightarrow ((P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg \neg R \vee \neg P))$
- c. $((P \vee Q) \rightarrow (P \rightarrow (\neg Q)))$

Exercícios - 1/2

Practice the chapters concepts

1. Identifique os itens abaixo que não são fórmulas da lógica proposicional.

- | | | | | |
|--------------|-----------------|----------------------------------|--|-------------------------------|
| a. pq | e. $p \wedge q$ | i. $p \rightarrow q$ | m. $P \rightarrow Q$ | q. $P \rightarrow true$ |
| b. PQ | f. $P \vee Q$ | j. $PQ \rightarrow$ | n. $P \leftrightarrow Q$ | r. $P \wedge true$ |
| c. $PQ \neg$ | g. $PQ \wedge$ | k. $\rightarrow PQ \neg$ | o. $P \leftrightarrow q$ | s. $true P \leftrightarrow q$ |
| d. $\neg PQ$ | h. $\vee PQ$ | l. $P \rightarrow Q \rightarrow$ | p. $\leftrightarrow P \leftrightarrow Q$ | t. $false PQ \wedge$ |

Respostas

a, b, c, d, g, h, j, k, l, p, q, s, t

2. Determine o comprimento das fórmulas a seguir.

- | | |
|---|-------|
| a. $((\neg \neg P \wedge Q) \leftrightarrow (P \rightarrow Q)) \wedge true$ | a. 11 |
| b. $(\neg P \rightarrow (Q \vee R)) \leftrightarrow ((P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg \neg R \vee \neg P))$ | b. 13 |
| c. $((P \vee Q) \rightarrow (P \rightarrow (\neg Q)))$ | c. 8 |

Exercícios - 2/2

Practice the chapters concepts

3. Pesquise na internet as proposições para os problemas abaixo.

E, se possível, elabore a fórmula para avaliar um valor qualquer.

- P1.** Verificar se um número $n \in \mathbb{Z}$ está no intervalo $\{n_1, n_2\}$ onde $n_1 > n_2$.
- P2.** Descobrir o maior entre 2 números.
- P3.** Descobrir o maior entre 3 números.
- P4.** Ordenar 2 números.
- P5.** Ordenar 3 números.
- P6.** Avaliar se um número é primo.
- P7.** Buscar letra em palavra (string).
- P8.** Transformar um tempo dado em **HH:mm:ss** em apenas **ss**.

Trazar na próxima aula para tira-dúvidas.

Operações lógicas

Logical operation with propositions

Operadores da lógica proposicional

Quando pensamos, inerentemente ao processo estamos efetuando inúmeras operações com proposições em nossa mente. Sempre na intenção de formar um raciocínio que nos faça sentido e que possa ser solução para um determinado problema.

As operações lógicas acontecem exatamente com os conectivos proposicionais. Na literatura é comum as duas nomenclaturas se confundirem.

Neste curso, usaremos a notação de **OPERADORES**. A seguir, as operações lógicas e seus descritivos serão apresentados.

Operação de negação (\neg) ou (\sim)

Logical NOT operator

Definição

Este conectivo não liga duas proposições, mas simplesmente nega a afirmação da proposição que o precede. Em virtude disso, é um conectivo unário, enquanto os anteriores são conectivos binários, pois ligam duas proposições.

Exemplo

Este conectivo não liga duas proposições, mas simplesmente nega a afirmação da proposição que o precede. Em virtude disso, é um conectivo unário, enquanto os anteriores são conectivos binários, pois ligam duas proposições.

Tabela 1: Tabela verdade de NOT.

p	$\sim p$
V	F
F	V

Operação de negação (\neg) ou (\sim)

Logical NOT operator

Definição

Este conectivo não liga duas proposições, mas simplesmente nega a afirmação da proposição que o precede. Em virtude disso, é um conectivo unário, enquanto os anteriores são conectivos binários, pois ligam duas proposições.

Exemplo

Este conectivo não liga duas proposições, mas simplesmente nega a afirmação da proposição que o precede. Em virtude disso, é um conectivo unário, enquanto os anteriores são conectivos binários, pois ligam duas proposições.

Tabela 1: Tabela verdade de NOT.

p	$\sim p$
V	F
F	V

Operação de conjunção (\wedge - 'e' lógico)

Logical AND operation with propositions

Blocks in Beamer

Standard Block

This is a standard block.

Alert Message

This block presents alert message.

An example of typesetting tool

Example: MS Word, \LaTeX

Lists in Beamer

This is an unordered list:

- Item 1
- Item 2
- Item 3

and this is an ordered list:

- 1 Item 1
- 2 Item 2
- 3 Item 3