Lógica Matemática

Parte 2

Dr. Paulo Vinicius Pereira Pinheiro[1]

[1]Centro Universitário Paraíso do Ceará
UNIFAP

Acesse estes slides em:
https://github.com/paulovpp/slides

Última atualização:
17 de março de 2022

Sumário

1. Tabela verdade
    - Definições iniciais
    - Construção de uma tabela verdade
2. Lógica proposicional - sintaxe e semântica
    - Mundo da lógica proposicional
    - Valor lógico de uma proposição composta
    - Uso de parêntesis
3. Propriedades semânticas
    - Tautologia
    - Princípio da substituição para as tautologias
    - Contradição
    - Contingência

Tabela verdade

Definições iniciais

Introductory definitions to the topic

Número de linhas

O número de linhas de uma tabela verdade de uma proposição composta depende do número n de proposições simples que a integram sendo dado pela regra:

$$2^n \quad \text{linhas} \tag{1}$$

Para n proposições simples do tipo $p_1,\ p_2, \ldots, p_n$, então a tabela verdade deve possuir um total de n colunas para as proposições simples e 2^n linhas. Posto isso:

- Para a 1ª proposição simples p_1 atribui-se $2^n/2^1 = 2^{n-1}$ valores V seguidos de F na mesma proporção.

Definições iniciais

Introductory definitions to the topic

Número de linhas

- Para a 2ª proposição simples p_2 atribui-se $2^n/2^2 = 2^{n-2}$ valores V seguidos de F na mesma proporção, repetindo-se até o final da tabela.
- Para a 3ª proposição simples p_3 atribui-se $2^n/2^3 = 2^{n-3}$ valores V seguidos de F na mesma proporção, repetindo-se até o final da tabela.
- De modo genérico, para a k-ésima proposição simples $p_k (k \leq n)$ atribui-se **alternadamente**

$$2^n/2^k = 2^{n-k} \tag{2}$$

valores V seguidos de igual número de valores F, repetindo a sequência até o final das linhas da tabela verdade.

Construção de uma tabela verdade

True table construction

Caso 1: $H(p,q) = \neg(p \ \wedge \neg q)$

Tabela 1: Tabela verdade para uma proposição composta $H(p,q)$.

p	**q**	$\neg q$	$p \ \wedge \neg q$	$\neg(p \ \wedge \neg q)$
V	V	F	F	V
V	F	V	V	F
F	V	F	F	V
F	F	V	F	V

Construção de uma tabela verdade

True table construction

Caso 2: $G(p,q) = \neg(p \ \wedge \neg q) \vee \neg(q \ \leftrightarrow p)$

Tabela 2: Tabela verdade para uma proposição $G(p,q)$.

p	**q**	$p \ \wedge \neg q$	$q \leftrightarrow p$	$\neg(p \ \wedge \neg q)$	$\neg(q \leftrightarrow p)$	$\neg(p \ \wedge q) \vee \neg(q \ \leftrightarrow p)$
V	V	F	V	V	F	V
V	F	V	F	F	V	V
F	V	F	F	V	V	V
F	F	F	V	V	F	V

Proposição Tautológica.

Construção de uma tabela verdade

True table construction

Caso 3: $P(p,q,r) = (p \rightarrow (\neg q \vee r)) \wedge \neg(q \vee (p \leftrightarrow \neg r))$

Tabela 3: Tabela verdade para uma proposição $P(p,q,r)$.

				A		B	
p	**q**	**r**	$\neg q \vee r$	$(p \rightarrow (\neg q \vee r))$	$p \leftrightarrow \neg r$	$(q \vee (p \leftrightarrow \neg r))$	$A \wedge B$
V	V	V	V	V	F	F	F
V	V	F	F	F	V	V	F
V	F	V	V	V	F	F	F
V	F	F	V	V	V	F	F
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	V	F	F	F
F	F	V	V	V	V	F	F
F	F	F	V	V	F	F	F

Lógica proposicional - sintaxe e semântica

Algumas definições

Some definitions to the topic

Mundo lógico

O mundo da lógica conforme conhecemos pode ser dividido em duas partes distintas a seguir:

- Sintaxe - mundo sintático
- Semântica - mundo semântico

Descritivo

Sintaxe: responsável pelo conjunto de símbolos (ALFABETO), conectivos e figuras utilizados pela lógica.

Semântica: responsável pelas operações e regras de forma a utilizar da melhor forma possível o conjunto de símbolos.

Algumas definições

Some definitions to the topic

Na prática

- O computador é um aparelho extremamente sintático - opera com a representação de símbolos em linguagem de máquina, **baixo nível** e com a possibilidade de conversão dos mesmos para um nível inteligível aos seres humanos, conhecido como **alto nível**.
- Para que o computador possa desempenhar suas funções, um conjunto de regras (ALGORITMO) precisa ser definido, enviado e traduzido para sua interpretação e execução.

Regras ou significados

Caso a definição ou o significado de um conjunto de símbolos não seja bem definido, falhas de semântica podem ocorrer. Isso não fará com que não haja processamento. Porém, o resultado pode não ser o esperado.

Algumas definições

Some definitions to the topic

Exemplo de falha semântica

Observe o seguinte conjunto de caracteres - símbolos sintáticos:

R E D E

Caso o uso do seguinte conjunto de símbolos seja utilizado sem a prévia e correta definição de sua usabilidade, poderá haver uma falha de execução e resultados discrepantes. Observa-se pelo menos três possíveis usos da palavra acima:

- objeto usado para dormir.
- objeto usado para pescar.
- descrição de um conjunto de computadores.

Valor lógico de uma proposição composta

Logical values (interpretations) for compound propositions

Definição

Dado uma proposição composta $H(p, q, r, \dots)$ pode-se determinar seu valor lógico, V ou F, quando são conhecidos os valores lógicos de suas proposições simples respectivamente.

Exemplo 1:

Assumindo $P(p, q) = (p \to q) \to (p \to p \wedge q)$, calcule:
$V(P)$ quando $V(p) = V(q) = F$:

$$V(P(F, F)) = V(P) = (F \to F) \to (F \to F \wedge F)$$
$$V(P) = V \to (F \to F)$$
$$V(P) = V$$

Valor lógico de uma proposição composta

Logical values (interpretations) for compound propositions

Definição

Exemplo 2:

Dado:

$$P(p,q,r) = (q \leftrightarrow (r \rightarrow \neg p)) \vee ((\neg q \rightarrow p) \leftrightarrow r)$$

Calcule $V(P)$ quando $V(p) = V$ e $V(q) = V(r) = F$.

$V(P(VFF)) = (F \leftrightarrow (F \rightarrow \neg V)) \vee ((\neg F \rightarrow V) \leftrightarrow F)$
$V(P) = (F \leftrightarrow (F \rightarrow F)) \vee ((V \rightarrow V) \leftrightarrow F)$
$V(P) = (F \leftrightarrow V) \vee (V \leftrightarrow F)$
$V(P) = (F) \vee (F)$
$V(P) = F$

Uso de parêntesis

Parentheses use

Definição

É óbvia a necessidade do uso dos parêntesis na simbolização das proposições e fórmulas. Muito utilizados para evitar qualquer tipo de ambiguidade. Assim, p. ex., a expressão $p \wedge q \vee r$ dá lugar, colocando parêntesis, às duas proposições a seguir:

(i) $(p \wedge q) \vee r$ e (ii) $p \wedge (q \vee r)$

Percebe-se aqui que ambas não possuem o mesmo significado pois para ambos os casos os conectivos principais são diferentes.

A supressão de parêntesis nas proposições se faz mediante algumas **convenções**, mostradas a seguir:

I. "A ordem de precedência" para os conectivos.

$$(1) \sim \quad (2) \wedge \vee \quad (3) \rightarrow \quad (4) \leftrightarrow$$

Uso de parêntesis

Parentheses use

Definição

O conectivo mais fraco é, portanto o $\neg$. E o mais forte $\leftrightarrow$. Para o caso abaixo:

$$p \to q \leftrightarrow s \wedge r$$

Temos então uma BICONDICIONAL e nunca uma condicional. Para convertê-la em uma condicional, o uso dos parêntesis se faz necessário:

$$p \to (q \leftrightarrow s \wedge r)$$

II. Quando um mesmo conectivo aparece sucessivamente repetido, suprimem-se os parêntesis, fazendo-se a **associação** a partir da esquerda. Observe as seguintes proposições:

Uso de parêntesis

Parentheses use

Exemplos

1. $((\neg(\neg(p \wedge q))) \vee (\neg p)) \longrightarrow \neg\neg(p \wedge q) \vee \neg p$
2. $(((p \wedge (\neg q)) \vee r) \wedge (\neg p)) \longrightarrow (p \vee \neg q) \wedge r \wedge \neg p$
3. $((p \vee (\neg q)) \wedge (r \wedge (\neg p))) \longrightarrow (p \wedge \neg q) \wedge (r \wedge \neg p)$
4. $((\neg p) \rightarrow (q \rightarrow (\neg(p \vee r)))) \longrightarrow \neg p \rightarrow (q \rightarrow \neg(p \vee r))$

Outros símbolos para os conectivos

Também muito utilizado em linguagens de programação:

$'\sim'$	para negação.
$'\textbf{.}'$ e $'\&'$	para conjunção.
$'\supset'$	(ferradura) para condicional.

Propriedades semânticas

Tautologia

Tautology definitions

Definição

Dada uma fórmula $H(p, q, r, \ldots)$ ela será uma tautologia quando para qualquer valor lógico de suas proposições simples, seu valor lógico será **sempre** verdadeiro (V). Ou seja:

$$\forall V(p, q, r, \ldots) \rightarrow V(H) = V$$

Exemplos:

$$H_1(p) = p \vee \neg p \qquad H_2(p) = \neg(p \wedge \neg p)$$

$$H_3(p, q) = p \vee \neg(p \wedge q) \qquad H_4(p, q) = p \wedge q \rightarrow (p \leftrightarrow p)$$

$$H_5(p, q) = p \vee (q \wedge \neg q) \leftrightarrow p \qquad H_6(p, q, r) = p \wedge r \rightarrow \neg q \vee r$$

Tautologia - Exemplo

Tautology example

Exemplo

$$H_6(p, q, r) = p \wedge r \rightarrow \neg q \vee r$$

Tabela 4: Tabela verdade para uma proposição $P(p, q, r)$ tautológica.

p	**q**	**r**	$\neg q$	$p \wedge r$	$\neg q \vee r$	$p \wedge r \rightarrow \neg q \vee r$
V	V	V	F	V	V	V
V	V	F	F	F	F	V
V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	V	V
F	V	V	F	F	V	V
F	V	F	F	F	F	V
F	F	V	V	F	V	V
F	F	F	V	F	V	V

Princípio da substituição para as tautologias

Tautological replacement principle

Definição

Seja $H(p, q, r, \dots)$ uma proposição tautológica qualquer e sejam $P(p, q, r, \dots)$, $Q(p, q, r, \dots)$, $R(p, q, r, \dots)$, ... proposições quaisquer formadas a parir do mesmo conjunto de proposições simples.

Realizando a substituição das proposições compostas $P, Q, R, \dots$ em H, a nova proposição

$$H(P, Q, R, \dots)$$

também será uma tautologia quaisquer que sejam as proposições $P, Q, R, \dots$.

Contradição

Contradiction definitions

Definição

Dada uma fórmula $H(p, q, r, \dots)$ ela será uma contradição quando para qualquer valor lógico de suas proposições simples, seu valor lógico será **sempre** falso (F). Ou seja:

$$\forall V(p, q, r, \dots) \rightarrow V(H) = F$$

As contradições também são conhecidas como proposições contraválidas ou logicamente falsas.

Exemplos:

$$H_7(p) = p \wedge \neg p \qquad H_8(p) = p \leftrightarrow \neg p$$

$$H_9(p, q) = (p \wedge q) \wedge \neg(p \vee q) \qquad H_{10}(p, q) = \neg p \wedge (p \wedge \neg q)$$

Contingência

Contigency definitions

Definição

Proposições que não são nem tautológicas ou contraválidas chamam-se necessariamente de contingentes. As mesmas possuem em sua última coluna de sua tabela-verdade os valores lógicos V e F **pelo menos uma vez**.

Elas também são conhecidas como **proposições indeterminadas**.

Exemplos:

$$H_{11}(p) = p \rightarrow \neg p \qquad H_{12}(p,q) = p \vee q \rightarrow p \wedge p$$

$$H_{13}(p,q) = p \vee q \rightarrow p \qquad H_{14}(p,q) = p \rightarrow (p \rightarrow q \wedge \neg q)$$