Lógica Matemática

Parte 1

Dr. Paulo Vinicius Pereira Pinheiro[1]

[1]Centro Universitário Paraíso do Ceará
UNIFAP

Acesse estes slides em:
https://github.com/paulovpp/slides

Última atualização:
9 de março de 2022

Sumário

1. Introdução
   - Objetivos
   - Definições iniciais
2. Lógica proposicional - início
   - Conceitos iniciais
   - Princípios fundamentais da lógica matemática
   - Tipos de proposições
   - Conectivos proposicionais
3. Lógica proposicional - cálculo proposicional
   - Tabela verdade
   - Ordem de precedência e comprimento de fórmulas
   - Valor lógico
   - Exercícios

Sumário

4. Operações lógicas com proposições
- Negação
- Conjunção
- Disjunção
- Disjunção exclusiva

5. Operações lógicas condicionais
- Condicional
- Bicondicional

Objetivos do curso

List all course objectives

Estudo da lógica proposicional

- Representar e especificar os conceitos de sintaxe e semântica associados a qualquer lógica utilizada ou linguagem.
- Estudar os métodos que produzem ou verifiquem as fórmulas ou argumentos utilizados.
- Definir sistemas de dedução formal onde são consideradas as noções de prova e consequência lógica.
- Correlacionar diagramas de Venn com a prática.
- Conhecer a álgebra de Boole.

Definições iniciais

Introductory definitions to the course

Proposição

⋆ É qualquer conjunto de palavras ou símbolos que expressam um pensamento completo.

⋆ As proposições transmitem fatos ou exprimem juízos que formamos a respeito de determinado acontecimento.

Exemplos

- A lua é um satélite da Terra.
- O valor arredondado de π vale $3,14$.
- Recife é a capital da Paraíba
- $\cos(90^o) \ = \ 0$.

Alfabeto

⋆ É o conjunto de símbolos usado em qualquer linguagem. A seguir a tabela de símbolos usados na disciplina é apresentado:

Conceitos iniciais

Introductory definitions to start the course

Alfabeto da lógica proposicional

- Símbolo de pontuação: (,)
- Símbolos booleanos: *true (verdadeiro), false(falso)*
- Símbolos proposicionais simples: $p,\ q,\ r,\ s,\ p_1,\ q_2$
- Símbolos proposicionais compostos: $P,\ Q,\ R,\ S,\ P_1,\ Q_1,\ S_2$
- Conectivos proposicionais: $\wedge,\ \vee,\ \veebar,\ \neg,\ \rightarrow,\ \leftrightarrow$

Fórmulas

São conjuntos de proposições unidos por um conectivo obtendo um valor booleano como resultante. São construídas a partir dos símbolos do alfabeto proposicional.

Tal como ocorre nas linguagens faladas ou escritas, não é qualquer concatenação de símbolos que é uma fórmula.

Algumas definições

Examples of logic formulas

Propriedades das fórmulas

- Todo símbolo de verdade (V) é uma fórmula.
- Todo símbolo proposicional é uma fórmula.
- Se H é uma fórmula então $(\neg H)$, a negação de H, é uma fórmula.
- Se H e G são fórmulas então $(H \wedge G)$, $(H \vee G)$, $(H \veebar G)$, $(H \rightarrow G)$ e $(H \leftrightarrow G)$ são fórmulas.

Não são fórmulas

- PR
- $(H\ true\ \ \leftrightarrow)$
- $(true\ \ \rightarrow\leftrightarrow (H\ true \rightarrow))$
- $PH \rightarrow \wedge$
- $true \rightarrow \vee$

Princípios da lógica clássica

Princípio da identidade

Toda proposição é idêntica a si mesma.

$$P \text{ é igual a } P$$

Princípio da não contradição

Uma proposição não pode ser *verdadeira* e *falsa* ao mesmo tempo.

$$\text{não } (P \text{ e não } P)$$

Princípio do terceiro excluído

Toda proposição ou é verdadeira ou é falsa, não existindo um terceiro valor que ela possa assumir.

$$P \text{ ou não } P \; (\otimes - \text{ou exclusivo})$$

Proposição simples e compostas

Simple or compound preposition

⋆ **Proposições simples**

É aquela que contêm somente uma afirmação.

Exemplo:

Nós somos ricos.

Não como todo dia.

⋆ **Proposições compostas**

Uma proposição é dita composta quando for constituída por uma sequência finita de pelo menos duas proposições.

Exemplo:

Vamos ao cinema ou ao teatro.

O céu é azul e cheio de nuvens.

Conectivos do cálculo proposicional

Conectors for all arithmetic with propositions.

Na linguagem comum, palavras explícitas são utilizadas ou não para interligar frases dotadas de algum sentido. Tais palavras são substituídas, na **Lógica Matemática**, por símbolos denominados *conectivos lógicos*.

Em nosso estudo, nos restringiremos inicialmente ao chamado **cálculo proposicional**. Por essa razão, os conectivos utilizados são conhecidos por *sentenciais* ou *proposicionais.*

Existem cinco conectivos que substituirão simbolicamente as expressões:

- *e* ($\wedge$) - do inglês *AND*
- *ou* ($\vee$) - do inglês *OR*
- *se ..., então ...*($\rightarrow$) - do inglês *IF ... then ...*
- *se, e somente se ...*($\leftrightarrow$) - do inglês *IF and ONLY IF ...*
- *não* ($\neg$) - do inglês *NOT*

Conectivos do cálculo proposicional

Examples

Exemplo 1

Somos pobres mortais e fanáticos torcedores da vida.

É uma proposição composta:

1a proposição: somos pobres mortais,

2a proposição: somos fanáticos torcedores da vida,

Conectivo: e (AND)

Exemplo 2

Se não nos alimentarmos, morremos.

É uma proposição composta:

1a proposição: nos alimentarmos,

2a proposição: (nós) morreremos,

Conectivo: Se ..., então ...

Tabela verdade

True table of operators

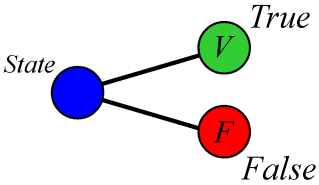
Definição

Segundo o princípio do **terceiro excluído**, toda proposição simples p ou composta $H(p, q, ...)$ só pode assumir **valor lógico** igual a

V (verdade - *TRUE*) ou F (falsidade - *FALSE*)

A **tabela-verdade** sintetiza o resultado de funções lógicas para n proposições.

Figura 1: Tabela verdade para um estado(proposição) único.

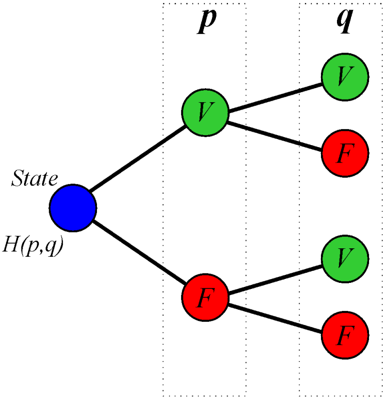


State
V
F

Tabela verdade

Examples

Figura 2: Tabela verdade para uma proposição composta $H(p, q)$.

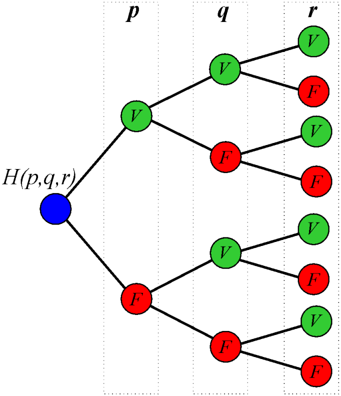


p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

Tabela verdade

Examples

Figura 3: Tabela verdade para uma proposição composta $H(p, q, r)$.



p	q	r
V	V	V
V	V	F
V	F	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F
F	F	V
F	F	F

Definições complementares

Final considerations of the section - Procedence order

Ordem de precedência

- Maior precedência: $\neg$ ou $\sim$
- Precedência intermediária: $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$
- Menor precedência: $\wedge$ e $\vee$

Comprimento de uma fórmula

- Se H é um símbolo proposicional ou de verdade então $comp[H] = 1$
- Se H e G são fórmulas da **lógica proposicional**, então

$$comp[\neg H] = comp[H] + 1$$
$$comp[H \wedge G] \text{ ou } comp[H \vee G] = comp[H] + comp[G] + 1$$
$$comp[H \rightarrow G] \text{ ou } comp[H \leftrightarrow G] = comp[H] + comp[G] + 1$$

Definições finais

Final considerations of the section 2/2

Valor lógico

O **valor lógico** de uma proposição simples ou composta expressa seu valor resultante se *verdadeiro* ou *falso*.

- Para uma proposição simples p, $V(p)$ expressa seu valor lógico.
- Para uma proposição composta H, $V(H)$ expressa seu valor lógico.

Exemplo 1

p : O sol é verde.
q : O sol é quente.
r : O mar não é vermelho.

$$V(p) = V,\ V(q) = F,\ V(\neg r) = F$$
$$V(p \wedge q) = F, \quad V(q \vee r) = V$$

Exemplo 2

$$p_1 : x \geq 10$$
$$p_2 : x < 50$$
$$p_3 : x > 25$$

$$V(p_1) = V,\ V(p_2) = F,\ V(\neg p_3) = F$$
$$V(p_1 \wedge p_2) = V,\ V(p_3 \wedge p_2) = F$$

Exercícios - 1/2

Practice the chapters concepts

1. Identifique os itens abaixo que não são fórmulas da lógica proposicional.

a. pq	**e.** $p \wedge q$	**i.** $p \rightarrow q$	**m.** $P \rightarrow Q$	q. $P \rightarrow true$
b. PQ	**f.** $P \vee Q$	**j.** $PQ \rightarrow$	**n.** $P \leftrightarrow Q$	r. $P \wedge true$
c. $PQ\neg$	**g.** $PQ\wedge$	**k.** $\rightarrow PQ\neg$	**o.** $P \leftrightarrow q$	s. $true\ P \leftrightarrow q$
d. $\neg PQ$	**h.** $\vee PQ$	**l.** $P \rightarrow Q \rightarrow$	**p.** $\leftrightarrow P \leftrightarrow Q$	t. $false\ PQ\wedge$

Respostas

a, b, c, d, g, h, j, k, l, p, q, s, t

2. Determine o comprimento das fórmulas a seguir.

a. $((\neg\neg\ P \wedge Q) \leftrightarrow (P \rightarrow Q)) \wedge\ true$ — **a.** 11

b. $(\neg P \rightarrow (Q \vee R)) \leftrightarrow ((P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg\neg R \vee \neg P))$ — **b.** 17

c. $((P \vee Q) \rightarrow (P \rightarrow (\neg Q)))$ — **c.** 8

Exercícios - 2/2

Practice the chapters concepts

3. Pesquise na internet as proposições para os problemas abaixo.

E, se possível, elabore a fórmula para avaliar um valor qualquer.

P1. Verificar se um número $n \in \mathbb{Z}$ está no intervalo $\{n_1, n_2\}$ onde $n_1 < n_2$.

P2. Descobrir o maior entre 2 números.

P3. Descobrir o maior entre 3 números.

P4. Ordenar 2 números.

P5. Ordenar 3 números.

P6. Avaliar se um número é primo.

P7. Buscar letra em palavra (string).

P8. Transformar um tempo dado em **HH:mm:ss** em apenas **ss**.

Trazer na próxima aula para tira-dúvidas.

Operações lógicas

Logical operation with propositions

Operadores da lógica proposicional

Quando pensamos, inerentemente ao processo estamos efetuando inúmeras operações com proposições em nossa mente. Sempre na intenção de formar um raciocínio que nos faça sentido e que possa ser solução para um determinado problema.

As operações lógicas acontecem exatamente com os conectivos proposicionais. Na literatura é comum as duas nomenclaturas se confundirem.

Neste curso, usaremos a notação de **OPERADORES**. A seguir, as operações lógicas e seus descritivos serão apresentados.

Operação de negação ($\neg$) ou ($\sim$)

Logical NOT operator

Definição

Este conectivo não liga duas proposições, mas simplesmente nega a afirmação da proposição que o precede. Em virtude disso, é um conectivo unário, enquanto os anteriores são conectivos binários, pois ligam duas proposições.

Exemplos

Se $V(p) = V$, $\neg p = F$

$V(\neg p) = \neg V(p)$

$p: \ 2+3=5 \quad (V)$ e $\neg p: \ 2+3 \neq 5 \quad (F)$

$q: \ 23 < 10 \quad (F)$ e $\neg q: \ 23 \nless 10 \quad (V)$

q : Carlos é mecânico.

$\neg q$: Carlos NÃO é mecânico.

Tabela 1: Tabela verdade ($\neg$).

p	**$\sim$p**
V	F
F	V

Conjunção ($\wedge$ - 'e' lógico)

Logical AND operation

Definição

É o resultado da combinação de duas proposições ligadas pela palavra **e**, que será substituída pelo símbolo ($\wedge$). Seu **valor lógico** somente será VERDADEIRO quando *TODAS* as proposições tiverem seus **valores lógicos** iguais a VERDADE.

Propriedades

Sejam p e q proposições simples:

$p \wedge q$ lê-se "p e q".

Seja H uma proposição composta $H(p, q)$:

$H(p, q) = H(p \wedge q) = p \wedge q$

$V(H) = V(p \wedge q) = V(p) \wedge V(q)$

Tabela 2: Tabela verdade ($\wedge$).

p	**q**	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Conjunção ($\wedge$ - 'e' lógico)

Examples

Exemplo 1

Sejam p e q proposições simples quaisquer, por exemplo:

- $p: \ n > 10 \quad (V)$
- $q: \ f(n) = 55 \quad (V)$

$p \wedge q = (n > 10) \ e \ (f(n = 55)) = V$

$V(p \wedge q) = V(p) \wedge V(q) = V \wedge V = V$

Exemplo 2

Seja $H(p, q)$ uma proposição composta qualquer, por exemplo:

- p : A maça é vermelha (V)
- q : A rua é estreita (F)

$H(p, q) = p \wedge q = V \wedge F = F$

Disjunção ($\vee$ - 'ou' lógico)

Logical OR operator

Definição

É o resultado da combinação de duas proposições ligadas pela palavra **ou**, que será substituída pelo símbolo $\vee$. Seu **valor lógico** somente será FALSO quando *TODAS* as proposições tiverem seus **valores lógicos** iguais a FALSO.

Propriedades

Sejam p e q proposições simples:

$p \vee q$ lê-se "p ou q".

Seja H uma proposição composta $H(p, q)$:

$H(p, q) = H(p \vee q) = p \vee q$

$V(H) = V(p \vee q) = V(p) \vee V(q)$

Tabela 3: Tabela verdade ($\vee$).

p	**q**	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Disjunção ($\vee$ - 'ou' lógico)

Examples

Exemplo 1

Sejam p e q proposições simples quaisquer, por exemplo:

- $p: \ n > 10 \quad (V)$
- $q: \ n \leq 25 \quad (V)$

$p \vee q = (n > 10) \ ou \ (n \leq 55) = V$

Exemplo 2

Seja $H(p, q)$ uma proposição composta qualquer, por exemplo:

- p : Maria foi ao cinema. (V)
- q : Maria foi ao teatro. (F)

$H(p, q)$: Maria foi ao cinema ou ao teatro.

$H(p, q) = p \vee q = V \vee F = F$

Disjunção exclusiva ($\veebar$ - 'ou exclusivo' lógico)

Logical XOR operator

Definição

Na linguagem falada, o termo "ou" tem **dois significados**. Por exemplo:

H : Antonio é cearense e pernambucano.

G : José é eletricista e encanador.

Na proposição H existe a indicação de duas proposições:

p : Antonio é cearense.

q : Antonio é pernambucano.

Nota-se pelo contexto que **APENAS** uma das proposições pode ser verdadeira, tornando assim o resultado **mutualmente excludente**.

Para a proposição compostas $H(p, q)$ têm-se que:

- $H(p, q) = p \veebar q$

Disjunção exclusiva ($\veebar$ - 'ou exclusivo' lógico)

Logical XOR operator

Comparativo

Já para a proposição $G(r, s) \longrightarrow G(r, s) = r \vee s$:

r : José é eletricista.

s : José é encanador.

Percebe-se então que no caso da proposição G, as duas proposições simples r e s não são **mutualmente excludentes**. Ou seja, ambas podem ter seus **valores lógicos** iguais a VERDADEIRO.

Tabela 4: Tabela verdade ($\veebar$).

p	**q**	**p $\veebar$ q**
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Operador condicional ($\rightarrow$)

Conditional operator

Definição

Duas proposições formam uma condicional quando for possível colocá-las na seguinte forma:

Se (proposição 1), então (proposição 2)

- a proposição 1 é chamada de **antecedente**, e a proposição 2 de **consequente**;
- o símbolo utilizado para ligar as duas proposições de uma condicional é o ($\rightarrow$);
- sua representação é da forma $p \rightarrow q$ e lê-se p então q.
- a equação acima também pode ser compreendida da forma:
  - p é condição suficiente para q
  - q é condição necessária para p

Operador condicional ($\rightarrow$)

Conditional operator

Continuação ...

- as proposições condicionais podem ter sentidos diferentes em sua composição, veja os exemplos a seguir.

  p : Alberto é poliglota.
  q : Alberto(ele) fala várias línguas.

- Simbolicamente temos $p \rightarrow q$ e lê-se: "Se Alberto é poliglota, ele fala várias línguas.

Tabela 5: Tabela verdade ($\rightarrow$).

p	**q**	**p $\rightarrow$ q**
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Operador condicional ($\rightarrow$)

Examples

Exemplos

p : Santos Dumont é cearense.

q : Fevereiro tem 31 dias.

$p \rightarrow q$: Se Santos Dumont é cearense, então Fevereiro tem 31 dias. (V)

$V(p \rightarrow q) = V(p) \rightarrow V(q) = F \rightarrow F = V$

r : Maio tem 31 dias.

s : A terra é plana.

$r \rightarrow s$: Se Santos Dumont é cearense, então Fevereiro tem 31 dias. (F)

$V(r \rightarrow r) = V(r) \rightarrow V(s) = V \rightarrow F = F$

NOTA: uma função condicional $p \rightarrow q$ **não afirma** que o consequente q se deduz ou é **consequência** do antecedente p.

Operador bicondicional ($\leftrightarrow$)

Biconditional operator

Definição

Duas proposições formam uma bicondicional quando for possível colocá-las na seguinte forma:

(proposição 1) se, e somente se, (proposição 2)

- a proposição 1 é chamada de **antecedente**, e a proposição 2 de **consequente**;
- o símbolo utilizado para ligar as duas proposições de uma bicondicional é o ($\leftrightarrow$);
- sua representação é da forma $p \leftrightarrow q$ e lê-se p se, e somente se, q.
- a equação acima também pode ser compreendida da forma:
  - Se p, então q. ($p \rightarrow q$)
  - Se q, então p. ($q \rightarrow p$)

Operador bicondicional ($\leftrightarrow$)

Biconditional operator

Continuação...

Alternativamente, a **bicondicional de duas proposições** p e q também pode ser lida de uma das seguintes maneiras abaixo:

(i) p é condição necessária e suficiente para q

(ii) q é condição necessária e suficiente para p

De acordo com a Tabela 6 abaixo, o **valor lógico** da bicondicional será VERDADEIRO somente quando também o são as condicionais $p \rightarrow q$ e $q \rightarrow p$.

Tabela 6: Tabela verdade ($\leftrightarrow$).

p	**q**	**p $\leftrightarrow$ q**
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V