

# Lógica Matemática

## Parte 1

Dr. Paulo Vinicius Pereira Pinheiro<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Centro Universitário Paraíso do Ceará  
UNIFAP

Acesse estes slides em:  
<https://github.com/paulovpp/slides>

Última atualização:  
2 de março de 2022

# Sumário

- 1 Introdução
  - Objetivos
  - Definições iniciais
- 2 Lógica proposicional - Início
  - Conceitos iniciais
  - Princípios fundamentais da lógica matemática
  - Tipos de proposições
  - Conectivos proposicionais
- 3 Lógica proposicional - cálculo proposicional
  - Tabela verdade
  - Ordem de precedência e comprimento de fórmulas
  - Valor lógico
  - Exercícios

# Sumário

- 4 Operações lógicas com proposições
  - Conjunção
  - Disjunção
  - Condicional
  - Bicondicional
  - Negação

# Objetivos do curso

List all course objectives

## Estudo da lógica proposicional

- Representar e especificar os conceitos de sintaxe e semântica associados a qualquer lógica utilizada ou linguagem.
- Estudar os métodos que produzem ou verifiquem as fórmulas ou argumentos utilizados.
- Definir sistemas de dedução formal onde são consideradas as noções de prova e consequência lógica.
- Correlacionar diagramas de Venn com a prática.
- Conhecer a álgebra de Boole.

# Definições iniciais

## Introductory definitions to the course

### Proposição

- ★ É qualquer conjunto de palavras ou símbolos que expressam um pensamento completo.
- ★ As proposições transmitem fatos ou exprimem juízos que formamos a respeito de determinado acontecimento.

### Exemplos

- A lua é um satélite da Terra.
- O valor arredondado de  $\pi$  vale 3,14.
- Recife é a capital da Paraíba
- $\cos(90^\circ) = 0$ .

### Alfabeto

- ★ É o conjunto de símbolos usado em qualquer linguagem. A seguir a tabela de símbolos usados na disciplina é apresentado:

# Definições iniciais

Introductory definitions to the course

## Proposição

- ★ É qualquer conjunto de palavras ou símbolos que expressam um pensamento completo.
- ★ As proposições transmitem fatos ou exprimem juízos que formamos a respeito de determinado acontecimento.

## Exemplos

- A lua é um satélite da Terra.
- O valor arredondado de  $\pi$  vale 3,14.
- Recife é a capital da Paraíba
- $\cos(90^\circ) = 0$ .

## Alfabeto

- ★ É o conjunto de símbolos usado em qualquer linguagem. A seguir a tabela de símbolos usados na disciplina é apresentado:

# Definições iniciais

## Introductory definitions to the course

### Proposição

- ★ É qualquer conjunto de palavras ou símbolos que expressam um pensamento completo.
- ★ As proposições transmitem fatos ou exprimem juízos que formamos a respeito de determinado acontecimento.

### Exemplos

- A lua é um satélite da Terra.
- O valor arredondado de  $\pi$  vale 3,14.
- Recife é a capital da Paraíba
- $\cos(90^\circ) = 0$ .

### Alfabeto

- ★ É o conjunto de símbolos usado em qualquer linguagem. A seguir a tabela de símbolos usados na disciplina é apresentado:

# Definições iniciais

## Introductory definitions to the course

### Proposição

- ★ É qualquer conjunto de palavras ou símbolos que expressam um pensamento completo.
- ★ As proposições transmitem fatos ou exprimem juízos que formamos a respeito de determinado acontecimento.

### Exemplos

- A lua é um satélite da Terra.
- O valor arredondado de  $\pi$  vale 3,14.
- Recife é a capital da Paraíba
- $\cos(90^\circ) = 0$ .

### Alfabeto

- ★ É o conjunto de símbolos usado em qualquer linguagem. A seguir a tabela de símbolos usados na disciplina é apresentado:



# Definições iniciais

## Introductory definitions to the course

### Proposição

- ★ É qualquer conjunto de palavras ou símbolos que expressam um pensamento completo.
- ★ As proposições transmitem fatos ou exprimem juízos que formamos a respeito de determinado acontecimento.

### Exemplos

- A lua é um satélite da Terra.
- O valor arredondado de  $\pi$  vale 3,14.
- Recife é a capital da Paraíba
- $\cos(90^\circ) = 0$ .

### Alfabeto

- ★ É o conjunto de símbolos usado em qualquer linguagem. A seguir a tabela de símbolos usados na disciplina é apresentado:

# Definições iniciais

## Introductory definitions to the course

### Proposição

- ★ É qualquer conjunto de palavras ou símbolos que expressam um pensamento completo.
- ★ As proposições transmitem fatos ou exprimem juízos que formamos a respeito de determinado acontecimento.

### Exemplos

- A lua é um satélite da Terra.
- O valor arredondado de  $\pi$  vale 3,14.
- Recife é a capital da Paraíba
- $\cos(90^\circ) = 0$ .

### Alfabeto

- ★ É o conjunto de símbolos usado em qualquer linguagem. A seguir a tabela de símbolos usados na disciplina é apresentado:

# Conceitos iniciais

Introductory definitions to start the course

## Alfabeto da lógica proposicional

- Símbolo de pontuação:  $(, )$
- Símbolos booleanos: *true*, *false*
- Símbolos proposicionais simples:  $p, q, r, s, p_1, q_2$
- Símbolos proposicionais compostos:  $P, Q, R, S, P_1, Q_1, S_2$
- Conectivos proposicionais:  $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow$

## Fórmulas

São conjuntos de proposições unidos por um conectivo obtendo um valor booleano como resultante. São construídas a partir dos símbolos do alfabeto proposicional.

Tal como ocorre nas linguagens faladas ou escritas, não é qualquer concatenação de símbolos que é uma fórmula.

# Conceitos iniciais

Introductory definitions to start the course

## Alfabeto da lógica proposicional

- Símbolo de pontuação:  $(,)$
- Símbolos booleanos: *true, false*
- Símbolos proposicionais simples:  $p, q, r, s, p_1, q_2$
- Símbolos proposicionais compostos:  $P, Q, R, S, P_1, Q_1, S_2$
- Conectivos proposicionais:  $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow$

## Fórmulas

São conjuntos de proposições unidos por um conectivo obtendo um valor booleano como resultante. São construídas a partir dos símbolos do alfabeto proposicional.

Tal como ocorre nas linguagens faladas ou escritas, não é qualquer concatenação de símbolos que é uma fórmula.

# Algumas definições

## Examples of logic formulas

- Todo símbolo de verdade ( $V$ ) é uma fórmula.
- Todo símbolo proposicional é uma fórmula.
- Se  $H$  é uma fórmula então  $(\neg H)$ , a negação de  $H$ , é uma fórmula.
- Se  $H$  e  $G$  são fórmulas então  $(H \wedge G)$ ,  $(H \vee G)$ ,  $(H \rightarrow G)$  e  $(H \leftrightarrow G)$  são fórmulas.

### Não são fórmulas:

- $PR$
- $(H \text{ true} \leftrightarrow)$
- $(\text{true} \rightarrow \leftrightarrow (H \text{ true} \rightarrow))$
- $PH \rightarrow \wedge$
- $\text{true} \rightarrow \vee$

# Algumas definições

## Examples of logic formulas

- Todo símbolo de verdade ( $V$ ) é uma fórmula.
- Todo símbolo proposicional é uma fórmula.
- Se  $H$  é uma fórmula então  $(\neg H)$ , a negação de  $H$ , é uma fórmula.
- Se  $H$  e  $G$  são fórmulas então  $(H \wedge G)$ ,  $(H \vee G)$ ,  $(H \rightarrow G)$  e  $(H \leftrightarrow G)$  são fórmulas.

## Não são fórmulas:

- $PR$
- $(H \text{ true} \leftrightarrow)$
- $(\text{true} \rightarrow \leftrightarrow (H \text{ true} \rightarrow))$
- $PH \rightarrow \wedge$
- $\text{true} \rightarrow \vee$

# Princípios da lógica clássica

## Princípio da identidade

Uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo.

$P$  é igual a  $P$

## Princípio da não contradição

Uma proposição não pode ser *verdadeira* e *falsa* ao mesmo tempo.

não ( $P$  e não  $P$ )

## Princípio do terceiro excluído

Toda proposição ou é verdadeira ou é falsa, não existindo um terceiro valor que ela possa assumir.

$P$  ou não  $P$  ( $\otimes$  – ou exclusivo)

# Princípios da lógica clássica

## Princípio da identidade

Uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo.

$$P \text{ é igual a } P$$

## Princípio da não contradição

Uma proposição não pode ser *verdadeira* e *falsa* ao mesmo tempo.

$$\text{não } (P \text{ e não } P)$$

## Princípio do terceiro excluído

Toda proposição ou é verdadeira ou é falsa, não existindo um terceiro valor que ela possa assumir.

$$P \text{ ou não } P (\otimes - \text{ou exclusivo})$$



# Princípios da lógica clássica

## Princípio da identidade

Uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo.

$$P \text{ é igual a } P$$

## Princípio da não contradição

Uma proposição não pode ser *verdadeira* e *falsa* ao mesmo tempo.

$$\text{não } (P \text{ e não } P)$$

## Princípio do terceiro excluído

Toda proposição ou é verdadeira ou é falsa, não existindo um terceiro valor que ela possa assumir.

$$P \text{ ou não } P (\otimes - \text{ou exclusivo})$$

# Proposição simples e compostas

Simple or compound preposition

## ★ Proposições simples

É aquela que contém somente uma afirmação.

### Exemplo:

Nós somos ricos.

Não como todo dia.

## ★ Proposições compostas

Uma proposição é dita composta quando for constituída por uma sequência finita de pelo menos duas proposições.

### Exemplo:

Vamos ao cinema ou ao teatro.

O céu é azul e cheio de nuvens.

# Conectivos do cálculo proposicional

Conectors for all arithmetic with propositions.

Na linguagem comum, palavras explícitas são utilizadas ou não para interligar frases dotadas de algum sentido. Tais palavras são substituídas, na **Lógica Matemática**, por símbolos denominados *conectivos lógicos*.

Em nosso estudo, nos restringiremos inicialmente ao chamado **cálculo proposicional**. Por essa razão, os conectivos utilizados são conhecidos por *sentenciais* ou *proposicionais*.

Existem cinco conectivos que substituirão simbolicamente as expressões:

- e ( $\wedge$ ) - do inglês *AND*
- ou ( $\vee$ ) - do inglês *OR*
- se ..., então ... ( $\rightarrow$ ) - do inglês *IF ... then ...*
- se, e somente se ... ( $\leftrightarrow$ ) - do inglês *IF and ONLY IF ...*
- não ( $\neg$ ) - do inglês *NOT*

# Conectivos do cálculo proposicional

## Examples

### Exemplo 1

**Somos pobres mortais e fanáticos torcedores da vida.**

É uma proposição composta:

**1a proposição:** somos pobres mortais,

**2a proposição:** somos fanáticos torcedores da vida,

**Conectivo:** e (AND)

### Exemplo 2

**Se não nos alimentarmos, morremos.**

É uma proposição composta:

**1a proposição:** nos alimentarmos,

**2a proposição:** (nós) morreremos,

**Conectivo:** Se ..., então ...

# Tabela verdade

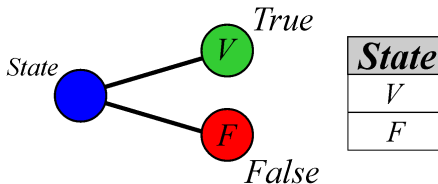
True table of connectors definitions

## Definição

Segundo o princípio do **terceiro excluído**, toda proposição simples  $p$  ou composta  $H(p, q, \dots)$  só pode assumir **valor lógico** igual a

- $V$  (verdade - *TRUE*)
- $F$  (falsidade - *FALSE*)

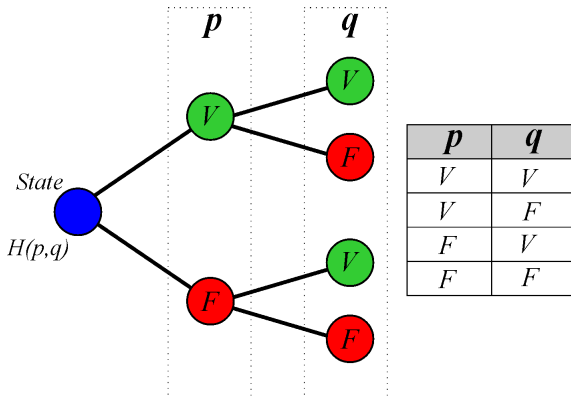
Figura 1: Tabela verdade para um estado(proposição) único.



# Tabela verdade

## Examples

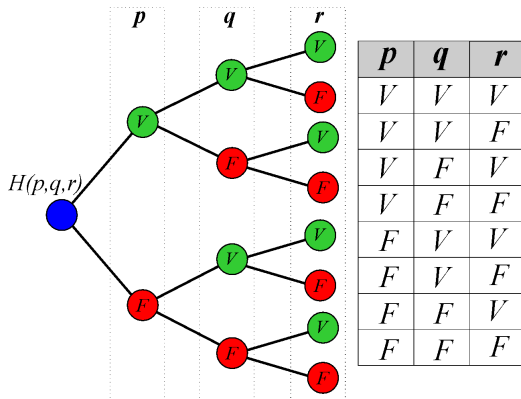
Figura 2: Tabela verdade para uma proposição composta  $H(p, q)$ .



# Tabela verdade

## Examples

Figura 3: Tabela verdade para uma proposição composta  $H(p, q, r)$ .



# Definições complementares

Final considerations of the section - Precedence order

## Ordem de precedência

- Maior precedência:  $\neg$  ou  $\sim$
- Precedência intermediária:  $\rightarrow$  e  $\leftrightarrow$
- Menor precedência:  $\wedge$  e  $\vee$

## Comprimento de uma fórmula

- Se  $H$  é um símbolo proposicional ou de verdade então  $comp[H] = 1$
- Se  $H$  e  $G$  são fórmulas da **lógica proposicional**, então

$$comp[\neg H] = comp[H] + 1$$

$$comp[H \wedge G] \text{ ou } comp[H \vee G] = comp[H] + comp[G] + 1$$

$$comp[H \rightarrow G] \text{ ou } comp[H \leftrightarrow G] = comp[H] + comp[G] + 1$$



# Definições complementares

Final considerations of the section - Precedence order

## Ordem de precedência

- Maior precedência:  $\neg$  ou  $\sim$
- Precedência intermediária:  $\rightarrow$  e  $\leftrightarrow$
- Menor precedência:  $\wedge$  e  $\vee$

## Comprimento de uma fórmula

- Se  $H$  é um símbolo proposicional ou de verdade então  $comp[H] = 1$
- Se  $H$  e  $G$  são fórmulas da **lógica proposicional**, então

$$comp[\neg H] = comp[H] + 1$$

$$comp[H \wedge G] \text{ ou } comp[H \vee G] = comp[H] + comp[G] + 1$$

$$comp[H \rightarrow G] \text{ ou } comp[H \leftrightarrow G] = comp[H] + comp[G] + 1$$

# Definições finais

## Final considerations of the section 2/2

### Valor lógico

O **valor lógico** de uma proposição simples ou composta expressa seu valor resultante se *verdadeiro* ou *falso*.

- Para uma proposição simples  $p$ ,  $V(p)$  expressa seu valor lógico.
- Para uma proposição composta  $H$ ,  $V(H)$  expressa seu valor lógico.

### Exemplo 1

$p$  : O sol é verde.

$q$  : O sol é quente.

$r$  : O mar não é vermelho.

$V(p) = V$ ,  $V(q) = F$ ,  $V(\neg r) = F$

$V(p \wedge q) = F$ ,  $V(q \vee r) = V$

### Exemplo 2

$p_1 : x \geq 10$

$p_2 : x < 50$

$p_3 : x > 25$

$V(p_1) = V$ ,  $V(p_2) = F$ ,  $V(\neg p_3) = F$

$V(p_1 \wedge p_2) = V$ ,  $V(p_3 \wedge p_2) = F$

# Exercícios - 1/

Practice the chapters concepts

# Operações lógicas

Logical operation with propositions

# Operação de conjunção ( $\wedge$ - 'e' lógico)

Logical AND operation with propositions

# Blocks in Beamer

## Standard Block

This is a standard block.

## Alert Message

This block presents alert message.

## An example of typesetting tool

Example: MS Word,  $\text{\LaTeX}$

# Lists in Beamer

This is an unordered list:

- Item 1
- Item 2
- Item 3

and this is an ordered list:

- 1 Item 1
- 2 Item 2
- 3 Item 3