Lógica Matemática

Parte 2

Dr. Paulo Vinicius Pereira Pinheiro[1]

[1]Centro Universitário Paraíso do Ceará
UNIFAP

Acesse estes slides em:
`https://github.com/paulovpp/slides`

Última atualização:
16 de março de 2022

Sumário

1. Tabela verdade
    - Definições iniciais
    - Construção de uma tabela verdade

2. Lógica proposicional - sintaxe e semântica
    - Mundo da lógica proposicional
    - Valor lógico de uma proposição composta
    - Uso de parêntesis

Tabela verdade

Definições iniciais

Introductory definitions to the topic

Número de linhas

O número de linhas de uma tabela verdade de uma proposição composta depende do número n de proposições simples que a integram sendo dado pela regra:

$$2^n \quad \text{linhas} \tag{1}$$

Para n proposições simples do tipo $p_1,\ p_2, \ldots, p_n$, então a tabela verdade deve possuir um total de n colunas para as proposições simples e 2^n linhas. Posto isso:

- Para a 1ª proposição simples p_1 atribui-se $2^n/2^1 = 2^{n-1}$ valores V seguidos de F na mesma proporção.

Definições iniciais

Introductory definitions to the topic

Número de linhas

- Para a 2ª proposição simples p_2 atribui-se $2^n/2^2 = 2^{n-2}$ valores V seguidos de F na mesma proporção, repetindo-se até o final da tabela.
- Para a 3ª proposição simples p_3 atribui-se $2^n/2^3 = 2^{n-3}$ valores V seguidos de F na mesma proporção, repetindo-se até o final da tabela.
- De modo genérico, para a k-ésima proposição simples $p_k(k \leq n)$ atribui-se **alternadamente**

$$2^n/2^k = 2^{n-k} \tag{2}$$

valores V seguidos de igual número de valores F, repetindo a sequência até o final das linhas da tabela verdade.

Construção de uma tabela verdade

True table construction

Caso 1: $H(p, q) = \neg(p \ \wedge \neg q)$

Tabela 1: Tabela verdade para uma proposição composta $H(p, q)$.

p	**q**	$\neg q$	$p \ \wedge \neg q$	$\neg(p \ \wedge \neg q)$
V	V	F	F	V
V	F	V	V	F
F	V	F	F	V
F	F	V	F	V

Construção de uma tabela verdade

True table construction

Caso 2: $G(p,q) = \neg(p \wedge \neg q) \vee \neg(q \leftrightarrow p)$

Tabela 2: Tabela verdade para uma proposição $G(p,q)$.

p	**q**	$p \wedge \neg q$	$q \leftrightarrow p$	$\neg(p \wedge \neg q)$	$\neg(q \leftrightarrow p)$	$\neg(p \wedge q) \vee \neg(q \leftrightarrow p)$
V	V	F	V	V	F	V
V	F	V	F	F	V	V
F	V	F	F	V	V	V
F	F	F	V	V	F	V

Proposição Tautológica.

Construção de uma tabela verdade

True table construction

Caso 3: $P(p, q, r) = (p \rightarrow (\neg q \vee r)) \wedge \neg(q \vee (p \leftrightarrow \neg r))$

Tabela 3: Tabela verdade para uma proposição $P(p, q, r)$.

				A		**B**	
p	**q**	**r**	$\neg q \vee r$	$(p \rightarrow (\neg q \vee r))$	$p \leftrightarrow \neg r$	$(q \vee (p \leftrightarrow \neg r))$	$A \wedge B$
V	V	V	V	V	F	F	F
V	V	F	F	F	V	V	F
V	F	V	V	V	F	F	F
V	F	F	V	V	V	F	F
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	V	F	F	F
F	F	V	V	V	V	F	F
F	F	F	V	V	F	F	F

Lógica proposicional - sintaxe e semântica

Algumas definições

Some definitions to the topic

Mundo lógico

O mundo da lógica conforme conhecemos pode ser dividido em duas partes distintas a seguir:

- Sintaxe - mundo sintático
- Semântica - mundo semântico

Descritivo

Sintaxe: responsável pelo conjunto de símbolos (ALFABETO), conectivos e figuras utilizados pela lógica.

Semântica: responsável pelas operações e regras de forma a utilizar da melhor forma possível o conjunto de símbolos.

Algumas definições

Some definitions to the topic

Na prática

- O computador é um aparelho extremamente sintático - opera com a representação de símbolos em linguagem de máquina, **baixo nível** e com a possibilidade de conversão dos mesmos para um nível inteligível aos seres humanos, conhecido como **alto nível**.
- Para que o computador possa desempenhar suas funções, um conjunto de regras (ALGORITMO) precisa ser definido, enviado e traduzido para sua interpretação e execução.

Regras ou significados

Caso a definição ou o significado de um conjunto de símbolos não seja bem definido, falhas de semântica podem ocorrer. Isso não fará com que não haja processamento. Porém, o resultado pode não ser o esperado.

Algumas definições

Some definitions to the topic

Exemplo de falha semântica

Observe o seguinte conjunto de caracteres - símbolos sintáticos:

R E D E

Caso o uso do seguinte conjunto de símbolos seja utilizado sem a prévia e correta definição de sua usabilidade, poderá haver uma falha de execução e resultados discrepantes. Observa-se pelo menos três possíveis usos da palavra acima:

- objeto usado para dormir.
- objeto usado para pescar.
- descrição de um conjunto de computadores.

Valor lógico de uma proposição composta

Logical values (interpretations) for compound propositions

Definição

Dado uma proposição composta $H(p, q, r, \ldots)$ pode-se determinar seu valor lógico, V ou F, quando são conhecidos os valores lógicos de suas proposições simples respectivamente.

Exemplo 1:

Assumindo $P(p,q) = (p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow p \wedge q)$, calcule:
$V(P)$ quando $V(p) = V(q) = F$:

$$V(P(F,F)) = V(P) = (F \rightarrow F) \rightarrow (F \rightarrow F \wedge F)$$
$$V(P) = V \rightarrow (F \rightarrow F)$$
$$V(P) = V$$

Valor lógico de uma proposição composta

Logical values (interpretations) for compound propositions

Definição

Exemplo 2:

Dado:

$$P(p, q, r) = (q \leftrightarrow (r \rightarrow \neg p)) \vee ((\neg q \rightarrow p) \leftrightarrow r)$$

Calcule $V(P)$ quando $V(p) = V$ e $V(q) = V(r) = F$.

$V(P(VFF)) = (F \leftrightarrow (F \rightarrow \neg V)) \vee ((\neg F \rightarrow V) \leftrightarrow F)$
$V(P) = (F \leftrightarrow (F \rightarrow F)) \vee ((V \rightarrow V) \leftrightarrow F)$
$V(P) = (F \leftrightarrow V) \vee (V \leftrightarrow F)$
$V(P) = (F) \vee (F)$
$V(P) = F$

Uso de parêntesis

Parentheses use

Definição

É óbvia a necessidade do uso dos parêntesis na simbolização das proposições e fórmulas. Muito utilizados para evitar qualquer tipo de ambiguidade. Assim, p. ex., a expressão $p \wedge q \vee r$ dá lugar, colocando parêntesis, às duas proposições a seguir:

$$\text{(i) } (p \wedge q) \vee r \quad \text{e} \quad \text{(ii) } p \wedge (q \vee r)$$