

求解大规模 VCVRP 问题的快速动态规划算法

张鹏乐¹, 肖开明², 符春晓¹, 杨克巍¹

(1. 国防科学技术大学 信息系统与管理学院 国防采办与体系工程管理教研室, 长沙 410073; 2. 国防科学技术大学 信息系统与管理学院 C4ISR 国防科技重点实验室, 长沙 410073)

摘 要 车辆路径问题是一类典型的组合优化问题, 大部分研究都只考虑车辆能力固定的情形, 实际中受货物形状特性及客户需求变化, 车辆的能力是受限变化的, 针对能力受限变化的车辆路径问题 (varied capacitated vehicle routing problem, VCVRP), 基于动态规划理论, 提出一种求解大规模 VCVRP 问题的快速动态规划算法. 该算法以传统的最佳适应降序算法 (best fit decreasing, BFD) 和最小生成树 (minimum spanning tree, MST) 算法为基础, 引入 K 步回溯, 短途优先原则, 实现了 VCVRP 中的货物装箱问题和路由选择问题的近似解耦. 同时给出了该算法的优化目标车辆旅程的理论上限, 短途优先原则的局部最小的理论分析与证明. 最后以乘用车物流运输案例为背景, 给出了计算实例, 并从算法参数与算例规模多个角度进行求解质量与算法性能的分析.

关键词 车辆路径问题; VCVRP 问题; 动态规划; 组合优化; 快速算法; 启发式算法

Fast dynamic programming algorithm for the large scale VCVRP problem

ZHANG Pengle¹, XIAO Kaiming², FU Chunxiao¹, YANG Kewei¹

(1. Department of Management Science and Engineering, College of Information System and Management, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China; 2. The Key Laboratory of C4ISR Technology, College of Information System and Management, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract Vehicle routing problem (VRP) is a kind of typical combination optimization problems. Most of the researches focus on VRP with fixed transportation capacity; however, the capacity of vehicles is varied with the cargo shape and customer requirement. Therefore, we propose a varied capacitated vehicle routing problem (VCVRP) to deal with the practical problems. In this paper, a fast dynamic programming algorithm is proposed for large-scale VCVRP. And it is based on the traditional best fit decreasing (BFD) algorithm and minimum spanning tree (MST) algorithm. A K -backtracking strategy and a principle of short-priority are introduced to the dynamic programming algorithm. In this fast algorithm, the bin packing problem and routing problem are decoupled approximately. Analysis of the upper bound of objective total distance is given theoretically. Finally, experimental results of practical logistics of passenger vehicles are discussed to illustrate the quality and efficiency of the proposed algorithm.

Keywords vehicle routing problem; VCVRP problem; dynamic programming; combinatorial optimization; fast algorithm; inspire algorithm

收稿日期: 2014-10-22

作者简介: 张鹏乐 (1990-), 男, 汉, 河北石家庄人, 硕士研究生, 研究方向: 国防采办与体系工程管理, 规划与决策; 肖开明 (1990-), 男, 汉, 云南腾冲人, 硕士研究生, 研究方向: 信息系统技术; 符春晓 (1993-), 女, 汉, 黑龙江哈尔滨人, 硕士研究生, 研究方向: 智能优化理论; 杨克巍 (1977-), 男, 汉, 湖南长沙人, 教授, 博士生导师, 研究方向: 国防采办与体系工程管理, 规划与决策.

基金项目: 国家自然科学基金 (71201168)

Foundation item: National Natural Science Foundation of China (71201168)

中文引用格式: 张鹏乐, 肖开明, 符春晓, 等. 求解大规模 VCVRP 问题的快速动态规划算法 [J]. 系统工程理论与实践, 2016, 36(3): 694-705.

英文引用格式: Zhang P L, Xiao K M, Fu C X, et al. Fast dynamic programming algorithm for the large scale VCVRP problem[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2016, 36(3): 694-705.

1 引言

车辆路径问题 (vehicle routing problem, VRP) 是一类典型的组合优化问题^[1], 最早在 1959 年, 由 Dantzig 和 Ramser 提出. 根据考虑的因素不同可以划分为不同的类型, 其中考虑装载能力约束的该类问题被划分为能力受限的车辆路径问题 (capacitated vehicle routing problem, CVRP)^[2], 这一类问题也是目前研究最常见的形式之一. 对于 CVRP 问题, 该问题的基本形式为: 给定网络中的源节点和若干已知需求的目标节点, 采用若干固定运输能力的车辆进行需求供应, 优化目标通常为车辆运输总费用. 这种固定的运输能力通常考虑为载重限制, 这样一来, 对于各个不同类型的货物来讲, 装载能力都是固定的. 而实际问题中, 常常受货物的长度、宽度、高度、脆弱性、重量及其他特殊特性, 车辆对货物的运输能力并不相同, 从而加大了问题的求解难度, 这一类问题称之为能力受限变化的车辆路径问题 (varied capacitated vehicle routing problem, VCVRP). 传统的 CVRP 问题假设忽略这些特性, 无法考虑能力受限变化带来的影响, 使得虽然针对 CVRP 的优化算法研究很多, 却很难应用到实际问题中去.

VRP 问题, 通常包含了两个紧耦合的 NP-Hard 问题: 货物的装箱问题和车辆的路由选择问题^[3-5]. CVRP 问题, 货物的装载方案通常只有载重约束, 约束判定较为简便, 搜索式近似算法^[6-8]、启发式优化算法^[9-12]都是目前的主要方法. VCVRP 问题, 货物的装载方案不仅仅只有载重约束, 更是受形状及其他特殊特性的影响, 判定条件往往具备非线性复杂特性, 加大了计算难度. 传统的启发式算法无法直接拿来使用, 修改后的算法也因约束条件的非线性特性而造成计算复杂度大幅上升, 求解效率降低.

因此本文提出一种求解大规模 VCVRP 问题的快速动态规划算法. 该算法以传统的最佳适应降序算法 (best fit decreasing, BFD) 为基础, 引入 K 步回溯策略, 提出 K -BFD 算法, 对于能力受限变化的货物装箱问题, 具有局部贪心性质的快速收敛效果, 又可以一定程度上的规避局部最优. 在此基础上, 采用基于最小生成树 (minimum spanning tree, MST) 的路由选择策略, 对原始的路由网络规模进行优化和缩减, 并采用短途优先原则, 提出了基于最小生成树的动态规划模型 (dynamic programming model based on MST, DPM-MST), 实现了货物装箱问题和路由选择问题的近似解耦. 同时给出了该算法的车辆旅程上界, 短途优先原则的局部最小的理论分析, 保证了该算法的有效性. 结果表明该动态算法参数灵活、求解快速、求解质量较优.

2 VCVRP 问题的分析及建模

2.1 VCVRP 问题分析

CVRP 问题研究比较广泛, 求解的模型和算法较多, 除了车辆装载能力固定外, 大多假设每个顾客只能由 1 辆车服务 1 次, 限制较强, 减少了运输方案的种类, 缩小了计算规模, 但忽略了一个顾客可能需要多辆车服务, 一辆车也可以用来服务多个顾客的可能. VCVRP 问题则更加贴近于现实约束, 其将车辆的装载能力受限视为变化的, 可以看成 CVRP 问题的一种拓展问题. 之所以要考虑能力受限变化, 主要有以下原因:

- 1) 在实际货物装载中经常有多种类型的车辆, 不同的车辆类型运载能力受限不同;
- 2) 在实际货物装载中经常有多种类型的货物, 受其长度、宽度、高度、脆弱性、重量及其他特殊特性的影响, 同一类型的车辆对于不同类型的货物的运载能力受限也不同;
- 3) 在实际物流配送过程中顾客需求变动、交通堵塞等外部信息改变带来的能力受限变化.

传统的 CVRP 问题假设忽略这些特性, 无法考虑能力受限变化带来的影响, 使得虽然针对 CVRP 的优化算法研究很多, 却很难应用到实际问题中去. 原因 3) 不仅仅指出了能力受限应当是变化的, 其中“需求变动、交通堵塞等外部信息改变”还暗含了这种变化是动态的, 本文所提 VCVRP 问题, 仅考虑能力受限是可以变化的, 重点针对 CVRP 中的前两点不足, 对其进行完善和补充.

2.2 VCVRP 问题建模

VCVRP 问题: 可以描述如下: 存在图 $G = (V, E)$, 其中节点集合 $V = \{0, 1, 2, \dots, n\}$ 代表一个配送中心 (源节点) 和 n 个顾客 (目标节点), 边集合 $E = \{(i, j) | 0 \leq i \neq j \leq n\}$ 表示任意两节点形成的边, 边长用 d_{ij} 表示. 设在配送中心有 p 种不同的车辆 Q , 载重分别为记做 Q_1, Q_2, \dots, Q_p , 第 h 种车辆的长和宽分别记做 L_h 和 W_h . 有 r 种不同的物品 q , 第 g 种物品的长宽分别记做 l_g 和 w_g . 源节点每一种车辆和物品的数量均充足, 其中第 h 种车辆中第 k 辆车运输第 g 个物品的给第 i 个顾客的数量记做 y_{hki}^g , 第 i 个顾客对第 g 个物品的需求记做 q_i^g , 并假设所有 d_{ij} 均已知. 请问如何安排 m_h 辆第 h 种车辆 ($0 \leq m_h, 1 \leq h \leq p$), 运输 r 种物品, 在满足 n 个顾客的需求的前提下, 使得所有车辆行走的总路径长度最短. 并且安排车辆路径时需要满足以下条件: 1) 每辆车均不允许超过自身允许的最大载重 Q_i ; 2) 每辆车装载要满足空间约束 F , 物

品不可以重叠, 不可以超出车的大小; 3) 每辆车服务完毕后不用返回源节点, 但为方便后续任务安排, 车辆的使用要满足数量约束 C , 不同车辆使用数量之间有比例约束; 4) 每一辆车均只在配送中心进行装载, 顾客点只进行卸载, 不重新组合物品装载. 该问题的数学规划模型如下.

目标函数:

$$\min \sum_{h=1}^p \sum_{k=1}^{m_h} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n d_{ij} x_{ijk}^h \quad (1)$$

约束条件:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{g=1}^r y_{hki}^g \leq Q_h \quad (1 \leq h \leq p, 1 \leq k \leq m_h) \quad (2)$$

$$\sum_{h=1}^p \sum_{k=1}^{m_h} y_{hki}^g \geq q_i^g \quad (0 \leq i, j \leq n, 1 \leq g \leq r) \quad (3)$$

$$F(y_{khi}^g, l_g, w_g, L_h, W_h) = 1 \quad (0 \leq i \leq n, 1 \leq h \leq p, 1 \leq k \leq m_h, 1 \leq g \leq r) \quad (4)$$

$$C(m_1, m_2, \dots, m_p) = 1 \quad (1 \leq p) \quad (5)$$

$$x_{ijk}^h > 0, \text{ 当 } y_{khj}^g > 0 \quad (0 \leq i, j \leq n, 1 \leq h \leq p, 1 \leq k \leq m_h, 1 \leq g \leq r) \quad (6)$$

$$y_{khj}^g = 0, \text{ 当 } x_{ijk}^h = 0 \quad (0 \leq i, j \leq n, 1 \leq h \leq p, 1 \leq k \leq m_h, 1 \leq g \leq r) \quad (7)$$

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{m_h} x_{0jk}^h = m_h \quad (1 \leq j \leq n, 1 \leq h \leq p) \quad (8)$$

$$\sum_{i,j \in S \times S} x_{ijk}^h \leq |S| - 1, S \subset V_k^h, S \neq \emptyset, \quad (1 \leq h \leq p, 1 \leq k \leq m_h) \quad (9)$$

$$x_{ijk}^h = \begin{cases} 1, & \text{第 } h \text{ 种第 } k \text{ 辆车经过弧 } (i, j) \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (0 \leq i, j \leq n, 1 \leq h \leq p, 1 \leq k \leq m_h) \quad (10)$$

$$F(y_{khi}^g, l_g, w_g, L_h, W_h) = \begin{cases} 1, & \text{装载满足空间约束} \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (0 \leq i \leq n, 1 \leq h \leq p, 1 \leq k \leq m_h, 1 \leq g \leq r) \quad (11)$$

$$C(m_1, m_2, \dots, m_p) = \begin{cases} 1, & \text{运输满足数量约束} \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (1 \leq p) \quad (12)$$

其中 V_k^h 表示第 h 种车辆第 k 辆车服务的顾客的集合, 式 (1) 为目标函数, 表示所有的行车的总路径长度最小; 式 (2) 为每一辆车的载重约束; 式 (3) 为每一位顾客的需求满足约束; 式 (4) 为物品装载的空间约束 F , 其中空间约束是由不同车辆的长宽和不同物品的长宽, 在进行实际的装箱过程中带来的, 相当于二维的装载问题, 约束情况和排列顺序相关, 所以很难给出具体的关系表达; 式 (5) 为车辆使用的数量约束 C , 数量约束是考虑在实际运营过程中, 为方便后续任务调度, 不仅要保证当前运输任务的最优, 还要保证为完成后续任务要留够足够的车型, 在实际管理中, 涉及到各车型的剩余数量, 各车型的配套比例, 以及节点和配送中心的车辆循环效率, 很难给出具体的数量约束; 式 (6) 和式 (7) 表示车辆只能服务其经过的路径上的顾客; 式 (8) 和式 (9) 表示所有车辆的行驶路径都是从配送中心出发的一条简单链. 当 $p = 1, r = 1$ 不考虑空间约束和数量约束, 该问题退化为经典的 CVRP 问题.

考虑到空间约束 F 和数量约束 C 的复杂性, VCVRP 的数学规划模型为非线性混合整数规划模型, 求解的变量为 $x_{ijk}^h, y_{khj}^g, m_1, m_2, \dots, m_p$. 对于 n 个顾客, p 种车辆, r 种物品的 VCVRP 问题, 求解的变量数量为 $h + \sum_{h=1}^p (nm_h r + n^2 m_h)$ 个, 当顾客、车辆和物品类型数量扩大 k 倍, 问题规模扩大约 k^3 倍. 该问题是一个十分复杂的非线性混合整数规划问题, 一般的分枝界定等精确算法在有效的时间内无法得到计算结果, 传统的针对 CVRP 问题的启发式算法处理非线性约束也变得十分复杂.

3 算法设计基础及分析

CVRP 问题实质上是一类组合优化问题, 它包含了物流配送中的两个典型问题: 装箱问题和路由选择问题. 其目标所有车辆的总距离最短可以分解为两个子目标: 1) 实现车辆的最大利用率, 使用最少的车辆; 2)

行驶最短的距离^[14]. 虽然 VCVRP 问题的目标函数是凸函数, 但由于约束复杂, 可行解集合往往不是凸集, 因此该问题在通常情况下, 并不是一个凸集上的凸规划, 由凸优化理论可知, 其通常情况下也并不具备全局的一致性收敛的特性^[15], 将 VCVRP 问题分解为两个子目标之后, 其并不具备最优子结构的性质, 即当车辆路径总长度最优时, 两个子问题不一定达到最优. 然而通常条件下, 减少装载用车数量, 和优化车辆运输路径, 对于减少车辆路径总长度是有益的, 所以可以近似看成两个子问题和原问题在解空间上具有近似一致的收敛方向, 而当收敛至一定程度时, 又由于两个子问题相互耦合, 往往收敛方向又会彼此矛盾, 所以动态规划不能直接递归至最优解^[16], 然而在求解过程中又可以借鉴动态规划中递归求解的思路, 因此可以尝试利用动态规划进行近似解耦, 而从实验结果来看, 这种近似解耦的算法确实可行.

3.1 BFD 算法

BFD 算法是解决一维装箱问题的一类经典算法, 其先将物品按降序排列, 按顺序将物品装入最适合该物品的箱子中, 如果没有该箱子, 则开启空箱. 实际是一种贪婪算法 (greedy, GR) 的思想, 在贪心原则的基础上, 尽力减少箱子空间的浪费, 逐步构建组合优化问题的可行解, 并且在构建的过程中不违反可行解的特点^[17].

通过上述过程可知: BFD 算法对于解决一维装箱问题的复杂度可由排序复杂度和判断复杂度两部分构成. 当前已知的对于长度为 n 的序列最快的排序算法复杂度为 $O(n \log(n))$ ^[16], 对于 VCVRP 中的装箱问题, 物品序列长度为 $\sum_{i=1}^n \sum_{g=1}^r q_i^g$, 因此排序的复杂度近似为 $O((\sum_{i=1}^n \sum_{g=1}^r q_i^g) \log(\sum_{i=1}^n \sum_{g=1}^r q_i^g))$. 对于箱子种类为 m , 长度为 n 的物品序列装载于最合适该物品的箱子中, 则在最坏的情况下, 判断的次数为 $2nm$ 次, 因此判断的复杂度近似为 $O(2p \sum_{i=1}^n \sum_{g=1}^r q_i^g)$. 所以 BFD 在解决一维装箱问题时的总体复杂度近似为:

$$O\left(\left(\sum_{i=1}^n \sum_{g=1}^r q_i^g\right) \log\left(\sum_{i=1}^n \sum_{g=1}^r q_i^g\right) + 2p \sum_{i=1}^n \sum_{g=1}^r q_i^g\right) \approx O(nr \log(nr) + pnr) \quad (13)$$

3.2 MST 算法

MST 是连通图中的极小连通子图, 对于带权的无向连通图, 则是包含原图中的所有顶点, 且使得各边上权值总和达到最小的一棵树^[18]. 常用的算法有 Kruskal 算法、Boruvka 算法、Prim 算法等. 求解 n 个顶点, m 条边的连通图的最小生成树, Kruskal 算法的时间复杂度为 $O(\log_2 m + 2m \log_2 n + n)$, 主要取决于边的数目, 比较适合于稀疏图; Boruvka 算法思想和 Kruskal 算法类似, 其时间复杂度为 $O(m \log_2 n)$; Prim 算法的时间复杂度为 $O(n^2)$, 适合于稠密图.

MST 算法被用来解决路由选择, 线路优化等问题, 在求解路由选择问题中, MST 常用来优化缩减运输网络的规模, 把配送中心和所有顾客间的交通连接图转化为一棵最小生成树, 再进行路径寻优策略, 转移策略. 其复杂度主要是构建最小生成树的复杂度, 对于大规模 VCVRP 问题选用 Prim 算法, 其复杂度为 $O(n^2)$.

3.3 DPM 模型

DPM 是解决多阶段决策过程最优化的一种规划方法, 许多问题用动态规划的方法去处理, 常常比线性规划、非线性规划更有效^[16].

在求解 CVRP 问题中, DPM 对于装箱问题和路由选择问题已经有较多的研究成果, 在同尺寸物品装箱问题当中, 有学者提出用 DPM 模型进行快速求解, 其核心递推关系的思想是在每次装箱的基础上, 总是拼接平行于某个坐标平面的空闲空间最小的物品^[19]. 在求解路由选择问题中, 有学者提出用 DPM 求解最短路径的动态寻优, 其核心递推关系的思想是将顶点按相对前后顺序分为不同的阶段, 由后向前逐步递推的方法进行求解, 每一次都是添加邻接节点中最短的节点. 根据 DPM 过程可知, 其复杂度主要是阶段划分, 每阶段递推关系求解两大部分. 对于 VCVRP 问题, 由路由选择问题进行 DPM 的阶段划分, 由装箱问题进行每阶段动态规划的递推. 路由选择问题的基于 MST 算法的阶段划分复杂度为 $O(n^2)$, 阶段个数为 n , 每一阶段装箱问题基于 BFD 的复杂度为 $O((\sum_{g=1}^r q_i^g) \log(\sum_{g=1}^r q_i^g) + 2p \sum_{g=1}^r q_i^g)$. 因此 DPM 求解 VCVRP 问题复杂度近似为:

$$O\left(n^2 + n\left(\sum_{g=1}^r q_i^g\right) \log\left(\sum_{g=1}^r q_i^g\right) + 2\left(np \sum_{g=1}^r q_i^g\right)\right) \approx O(n^2 + nr \log(r) + npr) \quad (14)$$

4 算法原理及实现

根据前文的分析, VCVRP 问题可以分解为具有近似一致收敛方向的两个子问题: 装箱问题和路由选择问题. 其中装箱问题, 以 BFD 算法为基础, 引入 K 步回溯策略, 提出 K -BFD 算法, 考虑空间约束和数量约

束, 对于能力受限变化的货物装箱问题, 具有局部贪心性质的快速近似效果, 又可以一定程度上地规避局部最优. 在此基础上, 采用基于 MST 的路由选择策略, 对原始的路由网络规模进行优化和缩减, 并采用短途优先原则, 提出 DPM-MST 模型, 实现了货物装箱问题和路由选择问题的近似解耦.

4.1 基于 K -BFD 算法的装箱问题求解

在 VCVRP 问题中, 由于车辆类型不同, 物品的长宽特性不同, 因此车辆的装载能力受限是变化的. 根据 2.2 节中所描述的 VCVRP 问题, 在进行装载时, 要考虑所用车辆之间的数量约束 C , 以及车辆和物品之间的空间约束 F , 依旧是非线性混合整数规划问题, 精确求解十分困难. 首先引入评价指标 U , 表示顾客 i 的第 g 个物品对第 h 种 k 辆车的满足度, 满足度越大越好. $U(i, g, h, k)$ 取值主要考虑两方面因素, 一是选取的车辆体积越大越好, 另一个是选取的物品占用的剩余空间越大越好. 具体见式 (15).

$$U(i, g, h, k) = \frac{1}{\frac{L_h W_h}{1-C} + \frac{l_g w_g}{(1-F)(L_h W_h - \sum_{i=1}^n \sum_{g=1}^r y_{khi}^g l_g w_g)}} \quad (15)$$

其中, $0 \leq i \leq n, 1 \leq h \leq p, 1 \leq k \leq m_h, 1 \leq g \leq r$.

BFD 算法在计算时, 很容易陷入局部最优, 因此引入 K 步回溯策略, 提出 K -BFD 启发式算法, 算法规则具体如下:

规则 1 依据评价指标 U 的取值, 应用传统 BFD 算法进行装载.

规则 2 引入 K 步回溯策略, 改进 BFD 算法.

按照降序进行装载的过程中, 若出现无法装载情况时, 不立即开启下一辆车, 而是对前一装载的组合块进行再调整, 进行启发式的搜索, 尝试更小的组合块, 搜索步数作为参数设定为 K , 调整的目标是使该辆车的剩余空间减少, 即 K 步回溯策略. 采用 K 步回溯策略进行装载调整, 可以进一步提高单辆运输车空间利用率, $K=0$ 时即为传统的 BFD 算法.

BFD 算法进行装载, 会出现如图 1 所示回溯前的情况, 即先装入的物品占据较大空间后, 无法再进行装填, 此时若采用 K 步回溯策略, 置换前一物品, 尝试 K 次后序物品, 若存在利用率更高的则与之替换, 就能达到提高车辆利用率的效果.

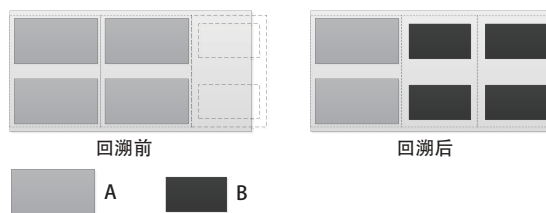


图 1 K 步回溯策略示意图

根据上述规则, K -BFD 求解算法流程表述如图 2.

4.2 基于 DPM-MST 模型的 VCVRP 问题求解

K -BFD 算法主要针对解决装箱问题, 而 VCVRP 问题除了装箱问题, 还包含路由选择问题, 而且这两个问题并不是孤立的两阶段问题, 对优化目标而言, 这两个问题是耦合的, 装载方案直接影响路由选择策略, 而路由的优化也将带来装载方案的调整.

DPM-MST 模型在求解 VCVRP 问题时, 采用动态规划理论, 将装箱问题和路由选择问题近似解耦, 将路由在节点的转移视为不同阶段, 并在每一个阶段进行动态装箱. DPM-MST 模型核心: 最小生成树构造, 路由选择, 动态装箱.

关于最小生成树的构造算法, 3.2 节已经有很详细的叙述, 本文采用 Prim 算法, 其时间复杂度为 $O(n^2)$. 值得指出的是 DPM-MST 模型中, 以最小生成树为基础进行路由选择和动态装箱, 尽管不能保证获得的总行程最短, 但避免了原网络中的长边, 大大缩减了网络规模, 也为 VCVRP 中的装箱问题和路由问题的解耦提供了基础.

路由选择和动态装箱的基本思想是: 依据树形结构, 依次对分支上的节点进行需求供应, 即对该节点完成装箱问题优化, 下级节点的装箱可以利用上一级节点装载后的剩余空间, 由此提高整体的空间利用效率, 减少用车数量; 同时, 在有下级分支时, 按照短途优先原则, 本级节点的装载剩余空间优先提供给短途方向的下级节点使用, 以减少路径长度.

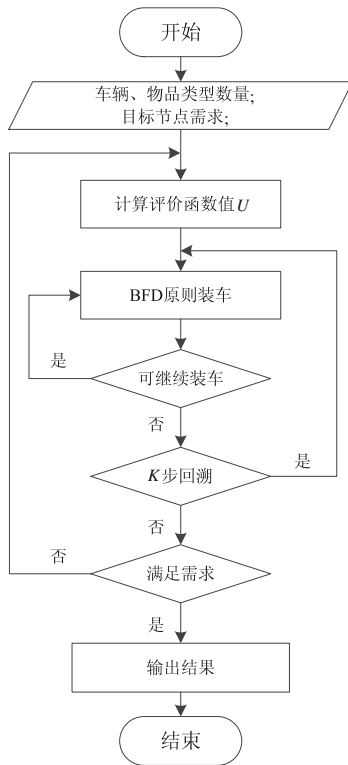


图 2 K-BFD 算法流程图

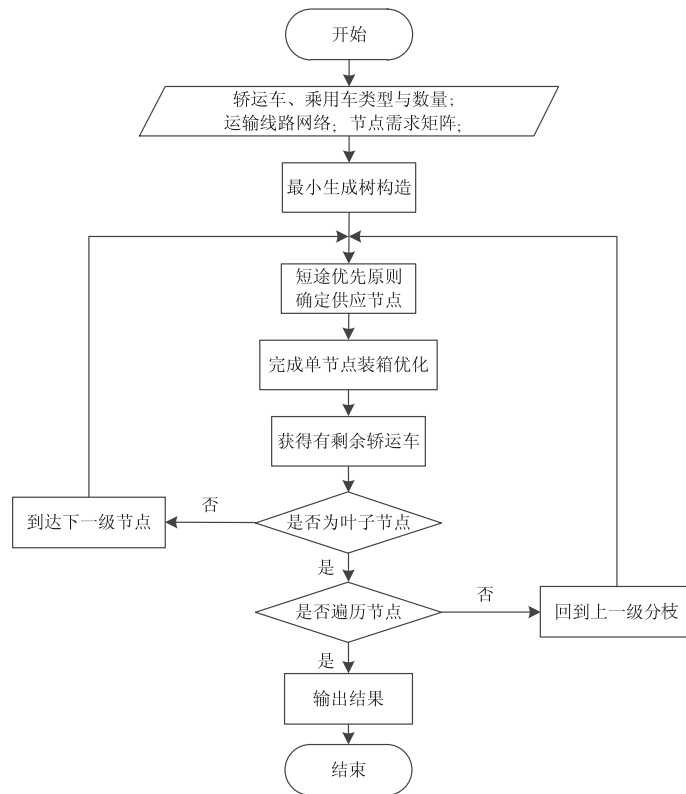


图 3 DPM-MST 模型流程图

定义 1 (动态装箱) 根据树形结构, 在根节点按照各个枝干及叶子节点的需求, 按照深度优先的原则进行, 依次为其装箱, 各个节点装箱采用 K-BFD 算法, 若本级节点不是叶子节点且存在未装满的箱子, 则此箱子的剩余空间被其下一级节点使用, 据此依次完成各个节点的装箱, 直至叶子节点; 类似地, 依次完成各个分枝的动态装箱, 至所有叶子节点需求得到满足为止。

定义 2 (短途优先原则) 对于给定最小生成树, 当前节点出现分枝时, 若此节点存在未装满的箱子, 则优先将此箱子的剩余空间提供给距离此节点路径较短的下级节点使用。

根据上述定义, 对 DPM-MST 模型的车辆总路径长度进行分析, 以及对最终解的类型进行分析, 可以得到如下命题:

命题 1 对于给定的网络 $G(V, E)$, 在最小生成树 $T(V', E')$ 上的动态装箱和路由选择策略, 使得总行车路径长度具有上界, 即 $L \leq B_{\max} \sum_{h=1}^p m_h$, 其中 L 为总行车路径长度, m_k 为第 k 种车辆数目, B_{\max} 为生成树的最长分枝长度。

证明 总行车路径长度为所有车辆行驶路径长度的总和 $L = \sum_{h=1}^p \sum_{k=1}^{m_h} b_{hk}$, 其中 b_{hk} 代表第 h 种第 i 辆车的行车旅程, 由于按照上述的动态装箱和路由选择策略, 每辆车的行车路线必定包含于某一树的分枝, 因此该辆车的行车旅程 $b_{hk} \leq B_j$, 其中 B_j 代表该分枝的总长度, 故 $L = \sum_{h=1}^p \sum_{k=1}^{m_h} b_{hk} \leq \sum_{h=1}^p B_j m_h$; 又 $B_j \leq B_{\max}$, 故有 $L \leq B_{\max} \sum_{h=1}^p m_h$ 成立。

命题 2 对于给定最小生成树 $T(V', E')$, 对于每一个枝干节点 V_B , 分枝选择遵循短途最优原则, 可以实现该节点总行车旅程的局部最优。

证明 由定义 1, 动态装箱过程中, 前一级节点未装满的箱子将被用于装载下一级节点; 其余以此节点为目的的车辆均在此时停止, 其车辆行车路线和路程均已固定。因此, 对于该节点, 最小化未装满车辆的行车路径长度与最小化该节点的总行车路径长度二者等价, 即实现该节点行车旅程的局部最优。

设路由在节点 v_s 转移到节点 v_{s+1} 为阶段 s , V_s 表示前 s 阶段所有的节点 v_s 的集合, 则动态规划从 s 阶段到 $s+1$ 阶段的递推关系:

$$\begin{cases} v_{s+1} = \left\{ j \mid \arg \min_{j \neq v_s, v_j \notin V_s} d_{sj} \right\} \\ v_1 = 0 \end{cases} \quad (1 \leq s \leq n) \quad (16)$$

DPM-MST 模型的实现流程如图 3。

4.3 DPM-MST 模型复杂度分析

根据 4.2 节, DPM-MST 模型主要计算量在求解最小生成树, 路由的选择判断, 以及每个节点的动态装箱的复杂度. 对于具有 p 种不同的车辆, r 种不同的物品, n 个节点的 VCVRP 问题, 设其进行空间约束 F , 数量约束 C 的复杂度分别为 $O(F), O(C)$. 则由 3.1 节可知, K-BFD 的复杂度主要在 BFD 复杂度的基础上考虑 K 步回溯的判断计算量, 以及考虑空间约束 F , 数量约束 C 的判断复杂度, 因此每个节点的动态装箱的复杂度近似为:

$$O\left(\left(\sum_{i=1}^n \sum_{g=1}^r q_i^g\right) \log \left(\sum_{i=1}^n \sum_{g=1}^r q_i^g\right)\right)+O\left(2 p \sum_{i=1}^n \sum_{g=1}^r q_i^g+k p \sum_{i=1}^n \sum_{g=1}^r q_i^g\right) \cdot O(F) \cdot O(C)$$
$$\approx O(n r \log (n r))+O(k p n r) \cdot O(F) \cdot O(C)$$

(17)

由 3.3 节式 (22) 可知, DPM-MST 模型基于 MST 算法的最小生成树构造复杂度为 $O(n^2)$, 基于短途优先原则的路由选择策略的复杂度为 $O(n)$, 因此 DPM-MST 模型的计算的时间复杂度近似为:

$$O\left(n^2\right)+O(n)+O\left(n\left(\sum_{i=1}^n \sum_{g=1}^r q_i^g\right) \log \left(\sum_{i=1}^n \sum_{g=1}^r q_i^g\right)\right)+O\left(2 n p \sum_{i=1}^n \sum_{g=1}^r q_i^g+k n p \sum_{i=1}^n \sum_{g=1}^r q_i^g\right) \cdot O(F) \cdot O(C)$$
$$\approx O\left(n^2\right)+O(n)+O\left(n^2 r \log (n r)\right)+O\left(k p n^2 r\right) \cdot O(F) \cdot O(C)$$
$$\approx O\left(n^2 r \log (n r)\right)+O\left(k p n^2 r\right) \cdot O(F) \cdot O(C)$$

(18)

当 $p=1, r=1$, 不考虑空间约束和数量约束, 退化为经典的 CVRP 问题, DPM-MST 计算时间复杂度为 $O\left(n^2 \log (n)\right)$.

5 算例求解与分析

5.1 算例说明

算例选取以小轿车的整车物流为背景, 整车物流指的是按照客户订单对整车快速配送的全过程. 轿车生产厂家根据全国客户的购车订单, 向物流公司下达运输各类型轿车到全国各地的任务, 物流公司则根据下达的任务制定运输计划并配送这批轿车. 先给出一个简单的算例, 说明 DPM-MST 模型的具体计算方法. 之后求解大规模 VCVRP 问题实例, 分析说明 DPM-MST 模型的计算性能.

VCVRP 问题实例: 运输车 (箱子) 种类 $p=2$, 皆为上下双层运输车, 层高足够, 高度限制可忽略, 分别为 1-1 型和 1-2 型. 轿车 (物品) 种类 $r=2$, 分别为 1 型和 2 型, 具体尺寸大小见表 1. 设节点数量 $n=5$, $V=\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, 各节点连接关系及相互距离如图 4 所示, 各节点的物品需求见表 2. 其中空间约束 F 为长度和宽度的形状约束, 数量约束 C 为比例约束, 其中 1-2 型使用数量不超过 1-1 型的 20%.

表 1 型号尺寸

型号	上 (下) 层长度/m	上层宽度/m	下层宽度/m
1-1 型	19	2.7	2.7
1-2 型	24.3	3.5	2.7
1 型	4.61	—	1.7
2 型	3.615	—	1.605

表 2 各节点物品需求

节点	1	2	3	4	5
1 型	42	50	33	0	41
2 型	31	0	47	0	0

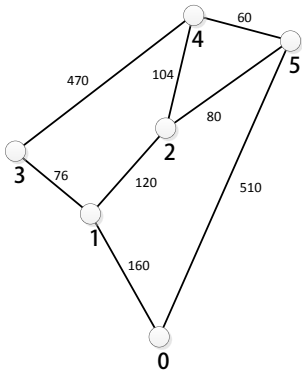


图 4 节点连接关系图

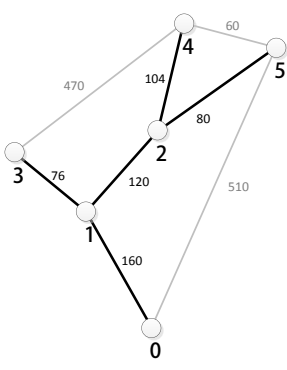


图 5 最小生成树

5.2 求解结果

按照 DPM-MST 进行求解, 首先求运输网络中的最小生成树, 结果如图 5 所示.

之后按照式 (24) 进行动态规划的阶段划分, 每个阶段再进行动态装载, 取回溯参数 $K = 5$, 详细过程如下:

初始化: $v_1 = 0$

第一阶段: $s = 1, v_2 = \left\{ j \left| \arg \min_{j \neq v_1, v_j \notin V_1} d_{1j} \right. \right\} = 1$, K-BFD 算法进行动态装载, 其中 1-1 型 5 辆, 1-2 型 1 辆, 其中最后一辆车未装满, 且该节点不是叶子节点, 下一次动态装箱时需要考虑.

第二阶段: $s = 2, v_3 = \left\{ j \left| \arg \min_{j \neq v_2, v_j \notin V_2} d_{2j} \right. \right\} = 3$, 动态装载, 首先考虑未装满的那辆 1-2 型车, 其中最后一辆 1-1 型依旧未装满, 由于其是叶子节点, 因此该车下一次装箱时不考虑.

类似地, 可得之后每一阶段的运行结果, 求解结果见表 3.

表 3 VCVRP 求解结果

回溯参数 K	1-1 型	1-2 型	总车数	路径总长度	平均车辆利用率
$K = 5$	22	4	26	6968	94.63%

详细安排方案如图 6 所示. 其中节点和车颜色相同的表示该车运往该节点, 具有两种颜色的车先停留上一节点, 再继续运往下一节点.

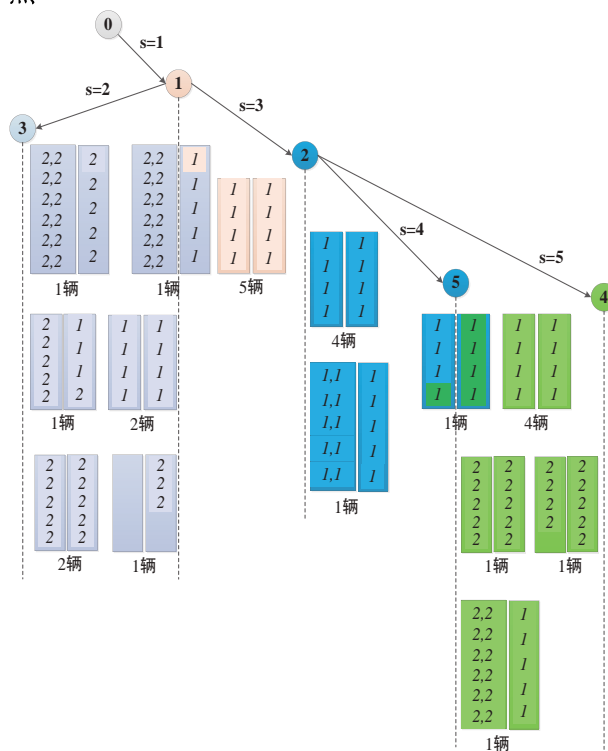


图 6 详细安排方案

5.3 DPM-MST 计算性能分析

DPM-MST 模型, 采用动态规划的方法求解 V-CVPR 问题, 其计算时间复杂度近似为: $O(n^2 r \log(nr)) + O(kpn^2 r) \cdot O(F) \cdot O(C)$, 从时间上来讲属于一种快速算法, 除了计算时间之外, 求解质量, 参数灵敏度等计算性能同样重要. 本文从总路径长度, 车辆平均利用率, 求解耗时, 对 DPM-MST 模型计算性能进行分析, 并且与智能算法进行了对比分析.

参数 K 影响分析:

DPM-MST 只有一个参数 K 需要设定, K 的取值增大使得回溯调整的机会增多, 从而可能构造出更好的解来, 然而由式 (26) 可知, K 的增大又会增加求解的时间消耗, 为了充分体现参数 K 的影响, 重新构建大规模计算实例. 取节点数 $n = 100$, 各节点间连接关系及相互距离随机生成, $p = 5, r = 10$, 车辆与物品的尺寸随机生成. 令 K 从 0 到 100, 每次递增 5. 从路径总长度 L 的变化 ($L_{\max} = 1$), 平均每辆车的利用率 η , 以

及求解花费的时间 $T(s)$ 进行参数 K 的影响分析. 详细结果, 如表 4、图 7 所示:

表 4 参数 K 的影响分析结果											
VCVRP: $n = 100, p = 5, r = 10$											
K	求解性能 (L, η, T)			K	求解性能 (L, η, T)			K	求解性能 (L, η, T)		
0	1.0000,	0.7528,	0.5941	1	0.9961,	0.7530,	0.6259	2	0.9936,	0.7537,	0.6228
3	0.9862,	0.7601,	0.6222	4	0.9787,	0.7691,	0.6308	5	0.9758,	0.7720,	0.6313
6	0.9693,	0.7740,	0.6330	7	0.9612,	0.7790,	0.6298	8	0.9540,	0.7820,	0.6394
9	0.9477,	0.7870,	0.6421	10	0.9464,	0.7876,	0.6418	11	0.9464,	0.7876,	0.6424
12	0.9464,	0.7876,	0.6412	13	0.9464,	0.7876,	0.6441	14	0.9464,	0.7876,	0.6401
15	0.9464,	0.7876,	0.6401	16	0.9464,	0.7876,	0.6394	17	0.9464,	0.7876,	0.6441
18	0.9464,	0.7876,	0.6431	19	0.9464,	0.7876,	0.6409	20	0.9464,	0.7876,	0.6437
21	0.9464,	0.7876,	0.6415	22	0.9464,	0.7876,	0.6433	23	0.9464,	0.7876,	0.6434
24	0.9464,	0.7876,	0.6423	25	0.9464,	0.7876,	0.6414				

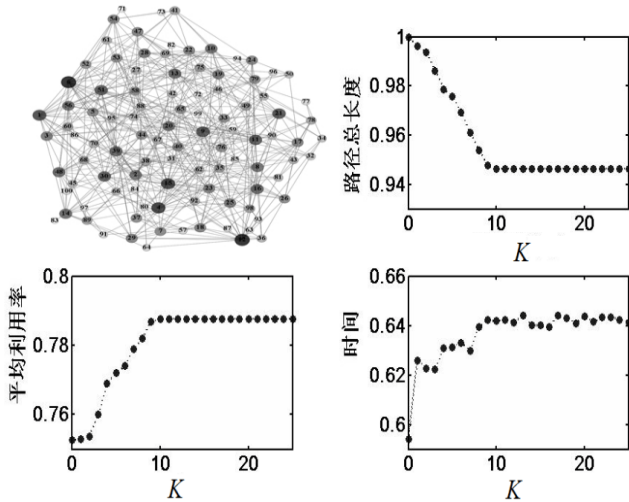


图 7 参数 K 影响分析结果

从图 7 可以看出, 随着回溯参数 K 的增大, 从路径总长度和平均利用率上来看, 计算结果质量有着显著提升, 当 $K > 10$ 后, 再增大参数 K , 并不能提高车辆平均利用率和缩短总路径长度.

能力受限变化影响分析:

VCVRP 问题相对于 CVRP 问题, 最大的区别就在于其能力受限变化, 如 2.2 节所述, DPM-MST 解决能力受限的变化的计算性能有必要进行深入研究. 令 $n = 100, k = 10$, 取 $p = 1, 3, 5, \dots, 17, 19, r = 1, 3, 5, \dots, 27, 29$, 两两相互组合, 进行求解. 结果如图 8 所示.

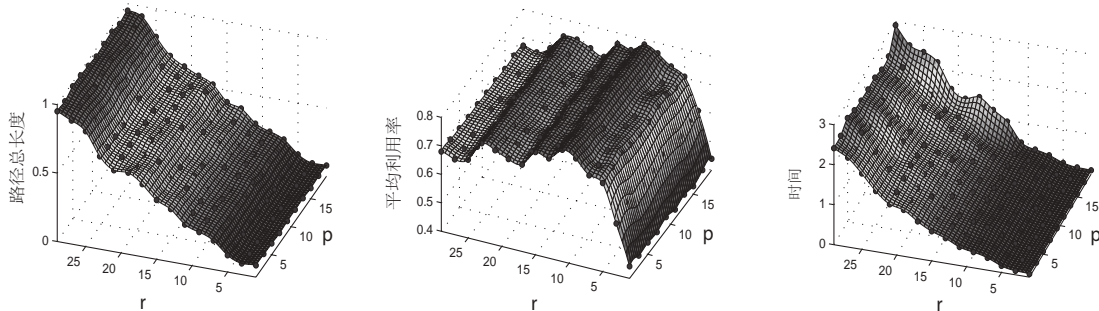


图 8 能力受限变化影响分析结果

从路径总长度上来看, 在节点规模和回溯参数固定的情况下, 随着 p, r 的增加, 能力受限变化的范围变大, 致使 L 增加. 在 DPM-MST 中, p 的增加对 L 的影响较小, r 对 L 的取值影响较大. 表明路径总长度, 受物品的种类特性影响更加明显. 这与复杂度分析的结果近似一致.

从车辆平均利用率来讲, 随着 p, r 的增加, 可选种类的增多, 一定程度上还可以提高车辆平均利用率, p

的增加相对 L 的影响较小, 当 r 的取值进一步增大时, 能力受限变化范围增大, 由于 DPM-MST 快速算法的近似效果, 平均利用效率基本保持不变。

从计算时间上来看, 随着 p, r 的增加, 能力受限变化增大, 求解耗时增加, 基本上随着 r 的增加, 近似线性增大。

节点规模影响分析:

DPM-MST 模型求解是一类快速动态算法, 为了说明计算效率, 对节点规模的影响进行分析, 令 $k = 10, p = 5, r = 10$, 取 $n = 10, 20, 30, \dots, 190, 200$, 进行求解。节点规模增加, 路径总长度并不能说明求解质量, 因此主要从车辆平均利用率和求解所消耗时间进行分析。结果如图 9 所示。

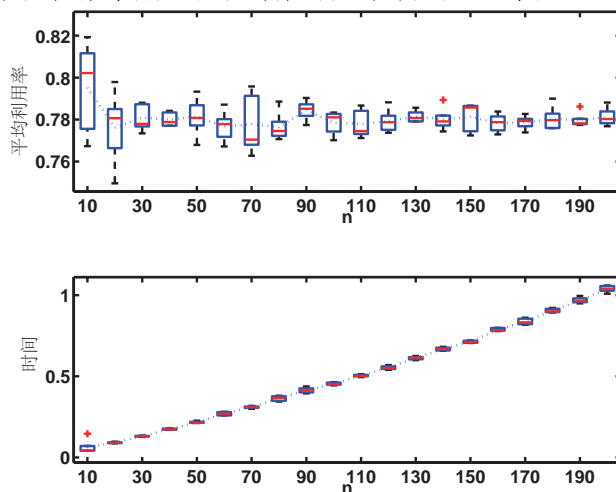


图 9 节点规模影响

随着节点规模 n 增加, 车辆平均利用率基本维持在 78% 左右, 说明 DPM-MST 适应于大规模 VCVRP 问题求解。对于不同规模的问题求解质量波动较小。对于求解消耗时间随着节点规模增加, 计算所耗时间增加远小于指数级增加趋势, 增长曲线较为平缓, 说明之前所分析计算复杂度近似 $O(n^2 \log(n))$ 的正确性。

与智能算法对比分析:

为了更加充分地说明与验证 DPM-MST 模型求解的精准与高效, 本文将其与蚁群算法 (ant colony algorithm) 和遗传算法 (GA genetic algorithm) 进行了比较, 并根据问题规模大小分为一般规模和大规模两类, 分类进行比较分析, 结果从有效时间内计算的精度, 以及有效精度内计算耗时两个角度进行了对比。令 $k = 15, p = 10, r = 20, n = 50, 500$, 取运算中最短路径总长度为最优结果, 换算各次求解结果为求解精度, 分别以时间和求解精度为终止条件, 进行各类求解算法精度和效率的对比分析, 结果分别如图 10~11 所示。

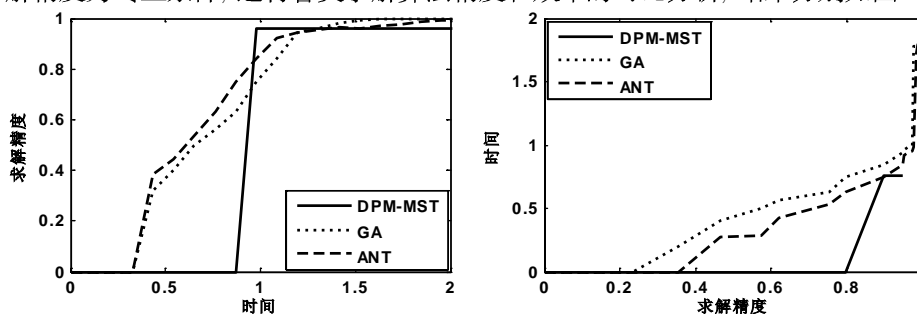


图 10 一般规模 VCVRP 问题结果对比分析 ($n = 50$)

对于求解一般规模大小的 VCVRP 问题, $n = 50$ 时, 从求解精度和耗时上来看, 各类算法在获得 80% 以上精度时耗时相当, DPM-MST 模型求解稍快但优势不明显, 随着计算时间的增加, 蚁群算法和遗传算法求解精度还可以继续升高, 而 DPM-MST 求解精度则不变。然而当问题规模变大, $n = 500$ 时, 基于 DPM-MST 模型的快速动态规划算法的优势就渐渐显示出来, 虽然求解精度上在随时间增大过程中, 智能算法会慢慢超过该算法, 然而在获得 80% 求解精度时, 该算法求解明显快于智能算法, 而现实工程中, 往往更关心如何更加快速地求得满意解, 因此基于 DPM-MST 的快速动态规划算法适合求解大规模和时效要求较高的 VCVRP 问题。

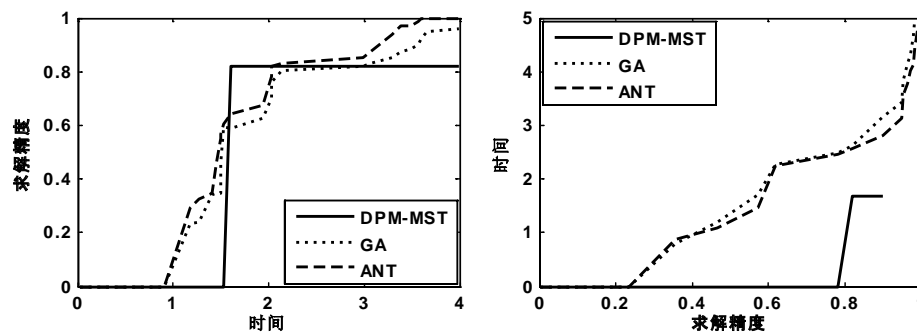


图 11 大规模 VCVRP 问题结果对比分析 ($n = 500$)

6 总结

基于动态规划理论, 本文提出一种求解大规模 VCVRP 问题的快速动态规划模型 DPM-MST. 进行了理论分析和算例演示, 得出如下主要结论: 1) DPM-MST 模型, 实现了 VCVRP 问题中货物装箱问题和路由选择问题的近似解耦. 同时给出了该算法的车辆旅程上界, 短途优先原则的局部最小的理论分析, 保证了该算法的有效性. 2) DPM-MST 模型的近似计算复杂度为 $O(n^2 r \log(nr)) + O(kpn^2 r) \cdot O(F) \cdot O(C)$, 且计算实例表明求解质量受节点规模波动较小. 3) 通过与智能优化算法进行对比分析, 说明 DPM-MST 模型对于 VCVRP 问题快速有效, 该算法适合求解大规模和时效要求较高的 VCVRP 问题.

对于 CVRP 问题, 受限能力受实际物流配送过程中顾客需求变动、交通堵塞等外部信息改变的影响, 也就是能力受限不仅仅是变化的, 这种变化还是动态的, 本文仅考虑能力受限是可以变化的, 并未考虑能力受限动态变化问题, 因此在动态规划模型中考虑该动态变化的特性, 进一步增强算法实时性将是下一阶段研究的重点与方向.

参考文献

- [1] Laporte G. Fifty years of vehicle routing[J]. Transport Science, 2009, 43(4): 408–416.
- [2] Potvin J Y. State-of-the art review-evolutionary algorithms for vehicle routing[J]. INFORMS Journal on Computing, 2009, 21(4): 518–548.
- [3] Solomon M M. Algorithms for the vehicle routing and scheduling problem with time windows constraints[J]. Operations Research, 1987, 35(2): 254–265.
- [4] Labbe M, Laporte G, Mercure H. Capacitated vehicle routing problems on trees[J]. Operations Research, 1991, 39(4): 616–622.
- [5] Gendreau M, Hert Z A, Laporte G. A tabu search heuristic for the vehicle routing problem[J]. Management Science, 1994, 40(10): 1276–1289.
- [6] 符卓. 带装载能力约束的开放式车辆路径问题及其禁忌搜索算法研究 [J]. 系统工程理论与实践, 2004, 24(3): 123–128.
Fu Z. The capacitated open vehicle routing problem and its tabu search algorithm[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2004, 24(3): 123–128.
- [7] 张军, 唐加福, 潘震东. 分散搜索算法求解带货物权重的车辆路径问题 [J]. 系统工程学报, 2010, 25(1): 91–97.
Zhang J, Tang J F, Pan Z D, et al. Scatter search algorithm for solving weighted vehicle routing problem[J]. Journal of Systems Engineering, 2010, 25(1): 91–97.
- [8] 张燕, 周支立, 翟斌. 集货送货一体化的物流配送车辆路径问题的标号算法 [J]. 运筹与管理, 2007, 16(3): 12–19.
Zhang Y, Zhou Z L, Zhai B. Multi-attribute label matching algorithm for vehicle routing problems with time windows and backhauls[J]. Operations Research & Management Science, 2007, 16(3): 12–19.
- [9] 姚峰, 邢立宁, 李菊芳, 等. 求解双层 CARP 优化问题的知识型遗传算法 [J]. 系统工程理论与实践, 2014, 34(1): 237–247.
Yao F, Xing L N, Li J F, et al. Knowledge-based genetic algorithm to the double layer capacitated arc routing problems[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2014, 34(1): 237–247.
- [10] 张建勇, 张军. 具有模糊旅行时间的 VRP 的一种混合遗传算法 [J]. 管理工程学报, 2006, 20(4): 13–17.
Zhang J Y, Zhang J. A hybrid genetic algorithm to the vehicle routing problem with fuzzy traveling time[J]. Journal of Industrial Engineering & Engineering Management, 2006, 20(4): 13–17.
- [11] 赵燕伟, 彭典军, 张景玲, 等. 有能力约束车辆路径问题的量子进化算法 [J]. 系统工程理论与实践, 2009, 29(2): 159–166.
Zhao Y W, Peng D J, Zhang J L, et al. Quantum evolutionary algorithm for capacitated vehicle routing problem[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2009, 29(2): 159–166.

- [12] 吴斌, 钱存华, 董敏, 等. 具有同时集送货需求车辆路径问题的混沌量子进化算法研究 [J]. 控制与决策, 2010, 25(3): 383–388.
Wu B, Qian C H, Dong M, et al. Chaos quantum evolutionary algorithm for vehicle routing problem with simultaneous delivery and pickup[J]. Control & Decision, 2010, 25(3): 383–388.
- [13] 饶卫振, 金淳. 求解大规模 CVRP 问题的快速贪婪算法 [J]. 管理工程学报, 2014(2): 45–54.
Rao W Z, Jin C. An efficient greedy heuristic for solving large-scale capacitated vehicle routing problem[J]. Journal of Industrial Engineering & Engineering Management, 2014(2): 45–54.
- [14] 刘阿宁, 闭应洲, 王仁民, 等. CVRP 中二维装箱问题的研究 [J]. 广西师范学院学报: 自然科学版, 2012, 29(1): 72–76.
- [15] Boyd S, Vandenberghe L, Foybusovich L. Convex optimization[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2006, 51(11): 1859–1859.
- [16] 胡运权. 运筹学教程 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2007.
- [17] Curtis S A. The classification of greedy algorithms[J]. Science of Computer Programming, 2003, 49(1–3): 125–157.
- [18] 杨跃武. 一种新的基于最小生成树的物流配送优化路线算法 [J]. 计算技术与自动化, 2008, 27(3): 7–11.
Yang Y W. A new algorithm for vehicle routing problems with capacity limited based on minimum spanning tree[J]. Computing Technology and Automation, 2008, 27(3): 7–11.
- [19] 农健恒, 崔耀东. 同尺寸物品装箱的动态规划算法 [J]. 计算机应用与软件, 2014, 31(7): 249–251.
Nong J H, Cui Y D. Dynamic programming algorithm for packing containers with items in same size[J]. Computer Applications & Software, 2014, 31(7): 249–251.