

## Physique Numérique – Exercice 1 – Solution

### 1 Entre la terre et la lune ou le côté obscur de la force de Coriolis. Schémas d'Euler explicite, semi-implicite et implicite

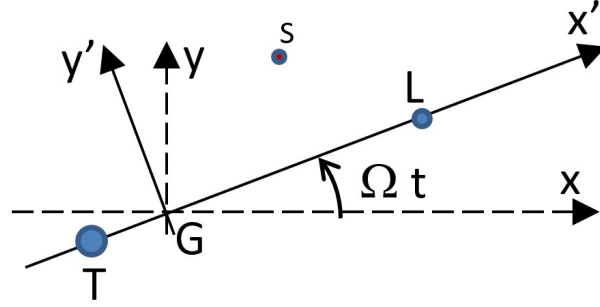


FIGURE 1 – Coordonnées  $Gxy$  du référentiel du centre de masse  $\mathcal{R}_G$  et  $Gx'y'$  du référentiel  $\mathcal{R}'$  tournant avec le système terre-lune. Le point  $G$  est le centre de masse du système terre-lune.

#### Introduction

On se propose d'étudier les effets de la force d'inertie et de Coriolis, dans un problème gravitationnel à trois corps dit *réduit*, avec  $m_3 \ll m_1, m_2$ , de telle sorte que le mouvement du système  $\{m_1, m_2\}$  soit découplé de celui de  $m_3$ .

L'approche numérique sera faite avec les schémas d'Euler explicite, implicite et semi-implicite. Les propriétés numériques de ces schémas seront analysées et comparées. Le principal résultat est la supériorité du schéma semi-implicite sur les deux autres : meilleure convergence, meilleure conservation de l'énergie.

#### 1.1 Calculs analytiques [12 pts]

##### 1.1.1 Positions de la terre et de la lune et position de gravitation nulle [3pts]

Soit le référentiel  $\mathcal{R}'$  et le système de coordonnées cartésiennes  $Gx'y'$ , centrées au centre de masse  $G$ , voir Fig.1). De la définition du centre de masse,

$$\vec{x}_G = \sum_i m_i \vec{x}_i, \quad (1)$$

projectée sur l'axe  $x'$ , et considérant la distance terre-lune  $a$ , on obtient

$$\begin{aligned} m_T x'_T + m_L x'_L &= 0 \\ x'_L - x'_T &= a \end{aligned} \quad (2)$$

et donc

$$\begin{aligned} x'_T &= -\frac{m_L}{m_T + m_L} a \\ x'_L &= \frac{m_T}{m_T + m_L} a \end{aligned} \quad (3)$$

La position du point d'équigravité, qui sera la position initiale  $x'_0$  du satellite, s'obtient en projetant la somme des forces exercées respectivement par la terre et par la lune sur l'axe des  $x'$  :

$$-Gm_Tm_S/(x'_0 - x'_T)^2 + Gm_Lm_S/(x'_L - x'_0)^2 = 0 \quad (4)$$

Simplifiant par  $Gm_S$ , on pose  $\xi = x'_0 - x'_T$ , et donc  $x'_L - x'_0 = a - \xi$ . On résout pour  $\xi$  :  $\xi = a/(1 + \sqrt{m_L/m_T})$ , et donc :

$$x'_0 = x'_T + \frac{a}{1 + \sqrt{m_L/m_T}}. \quad (5)$$

N.B. L'équation pour  $\xi$  est du 2e degré. L'autre solution n'est pas physique car elle donne une position  $x'_0$  située au-delà de la lune, pour laquelle la direction de la force de gravitation exercée par la lune a un signe différent que celui de l'Eq.(4), qui suppose une position entre la terre et la lune.

### 1.1.2 Vitesse angulaire orbitale [2pts]

La vitesse angulaire  $\Omega$  du mouvement orbital de la lune dans le référentiel du centre de masse  $\mathcal{R}_G$ , en supposant un mouvement circulaire uniforme, s'obtient de l'accélération centripète :

$$\vec{a} = -\Omega^2 x'_L \vec{e}_{x'} \quad (6)$$

et de la 2e loi de Newton pour la lune,  $m_L \vec{a} = \vec{F}$ , avec une force

$$\vec{F} = -G \frac{m_L m_T}{a^2} \vec{e}_{x'} \quad (7)$$

On utilise l'expression trouvée ci-dessus pour  $x'_L$ , Eq.(3), et on obtient :

$$\Omega = \sqrt{\frac{G(m_T + m_L)}{a^3}}. \quad (8)$$

On remarque au passage que cette expression satisfait la 3e loi de Kepler.

### 1.1.3 Equations du mouvement [5 pts]

Pour obtenir les équations différentielles du mouvement du satellite dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ , on part de la 2e loi de Newton. Les forces s'exerçant sur le satellite, dans  $\mathcal{R}'$ , sont :

- la force de gravitation exercée par la terre
- la force de gravitation exercée par la lune
- la force d'inertie
- la force de Coriolis

On a, en posant  $\vec{\Omega} = \Omega \vec{e}_z$ ,  $\vec{r}_S = \vec{GS}$ ,  $\vec{r}_T = \vec{GT}$ , and  $\vec{r}_L = \vec{GL}$  :

$$\vec{F}_{TS} = -G \frac{m_T m_S}{|\vec{r}_S - \vec{r}_T|^3} (\vec{r}_S - \vec{r}_T) \quad (9)$$

$$\vec{F}_{LS} = -G \frac{m_L m_S}{|\vec{r}_S - \vec{r}_L|^3} (\vec{r}_S - \vec{r}_L) \quad (10)$$

$$\vec{F}_i = -m_S \left( \vec{\Omega} \times \vec{\Omega} \times \vec{r}_S \right) = m_S \Omega^2 \vec{r}_3 \quad (11)$$

$$\vec{F}_C = -2m_S \vec{\Omega} \times \vec{v}'_S \quad (12)$$

En projetant sur le système de coordonnées Cartésien  $Gx'y'$ , on obtient :

$$\vec{F}_{TS} = -G \frac{m_T m_S}{|\vec{r}_S - \vec{r}_T|^3} ((x' - x'_T) \vec{e}_{x'} + y' \vec{e}_{y'}) \quad (13)$$

$$\vec{F}_{LS} = -G \frac{m_L m_S}{|\vec{r}_S - \vec{r}_L|^3} ((x' - x'_L) \vec{e}_{x'} + y' \vec{e}_{y'}) \quad (14)$$

$$\vec{F}_i = m_S \Omega^2 (x' \vec{e}_{x'} + y' \vec{e}_{y'}) \quad (15)$$

$$\vec{F}_C = 2m_S \Omega (v'_y \vec{e}_{x'} - v'_x \vec{e}_{y'}) \quad (16)$$

On les met sous la forme

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{y}) \quad (17)$$

avec  $\mathbf{y} = (v_x, v_y, x, y)$  :

$$\frac{d}{dt} \mathbf{y} = \begin{pmatrix} -G \frac{m_T}{|\vec{r}_S - \vec{r}_T|^3} (x' - x'_T) - G \frac{m_L}{|\vec{r}_S - \vec{r}_L|^3} (x' - x'_L) + \Omega^2 x' + 2\Omega v'_y \\ -G \frac{m_T}{|\vec{r}_S - \vec{r}_T|^3} y' - G \frac{m_L}{|\vec{r}_S - \vec{r}_L|^3} y' + \Omega^2 y' - 2\Omega v'_x \\ v'_x \\ v'_y \end{pmatrix} \quad (18)$$

#### 1.1.4 Énergie mécanique [2 pts]

Dans  $\mathcal{R}'$ , l'énergie mécanique  $E_{\text{mec}}$  est conservée, car :

- Les forces gravitationnelles dérivent de potentiels  $-Gm_i m_S / r_{iS}$ ,  $i = T, L$ .
- La force d'inertie dérive du potentiel  $-\frac{1}{2} m_S \Omega^2 r_S^2$ .
- La force de Coriolis ne dérive pas d'un potentiel, mais ne travaille jamais : sa puissance est toujours nulle,  $\vec{F}_C \cdot \vec{v}'_S = 0, \forall t$ .

L'énergie mécanique du satellite s'obtient en sommant son énergie cinétique et les potentiels :

$$E_{\text{mec}} = m_S \left( \frac{1}{2} (v_x'^2 + v_y'^2) - \frac{Gm_T}{|\vec{r}_S - \vec{r}_T|} - \frac{Gm_L}{|\vec{r}_S - \vec{r}_L|} - \frac{1}{2} \Omega^2 r_S^2 \right). \quad (19)$$

## 1.2 Implémentation en C++

### 1.3 Simulations et Analyses [33 pts]

On prendra les valeurs suivantes : constante gravitationnelle  $G = 6.6743 \cdot 10^{-11} \text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$ , masse de la terre  $m_T = 5.972 \cdot 10^{24} \text{kg}$ , masse de la lune  $m_L = 7.348 \cdot 10^{22} \text{kg}$ , rayon de la terre  $R_T = 6378.1 \text{km}$ , rayon de la lune  $R_L = 1737.1 \text{km}$ , distance terre-lune  $a = 385\,000 \text{km}$ . Sauf indication contraire, on prendra un temps final  $t_{\text{fin}}$  de 3 jours.

#### 1.3.1 Comparaison des 3 schémas pour un même nombre de pas de temps [15 pts]

Nous prenons  $n_{\text{steps}} = 4000$  et effectuons une simulation pour chacun des 3 schémas d'Euler (explicite, implicite et semi-implicite). Les trajectoires obtenues sont illustrées à la Fig. 2. Les trois schémas résultent en des orbites qui, au début, sont en bon accord les unes avec les autres. Cependant, après le passage à proximité de la lune, les trajectoires obtenues sont vraiment très différentes. On a même une sorte de "catastrophe" avec le schéma implicite, avec une orbite qui se rapproche dangereusement du centre de la lune, causant des accélérations gigantesques, que le schéma numérique est incapable de suivre correctement. Evidemment ce comportement n'est pas physique. On verra que cette orbite est ... dans la lune.

Au voisinage du passage de la lune, on voit bien les comportements différents des trois schémas : le schéma explicite produit une orbite qui s'éloigne le plus de la lune, alors que le schéma implicite voit son orbite se rapprocher le plus. Le schéma semi-implicite est, sans surprise, entre les deux.

Le vérification de la conservation de l'énergie mécanique est un bon moyen de quantifier la qualité des simulations numériques. Les traces temporelles de  $E_{\text{mec}}/m_S$  sont montrées à la Fig. 3. Il est clair que le schéma explicite tend à produire une erreur qui augmente l'énergie mécanique,

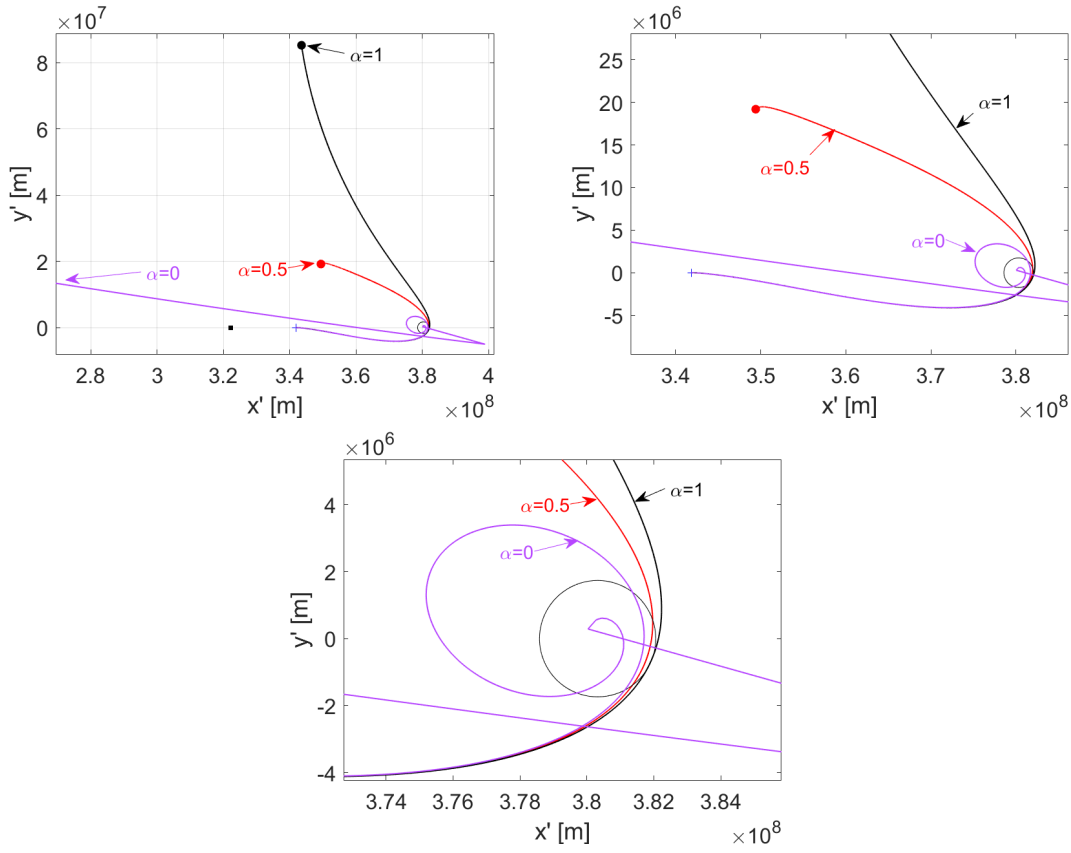


FIGURE 2 – Trajectoires du satellite avec  $N_{\text{steps}} = 4000$ , calculées avec les schémas d'Euler explicite (noir,  $\alpha = 1$ ), implicite (violet,  $\alpha = 0$ ) et semi-implicite (rouge,  $\alpha = 0.5$ ). On montre deux vues rapprochées.

alors que les schéma implicite produit une erreur qui tend à diminuer cette énergie à chaque passage près de la lune, jusqu'à la "catastrophe" qui produit une énergie positive, et donc expulse le satellite au loin. Le schéma semi-implicite montre un comportement remarquable : il conserve l'énergie avec une précision de plusieurs ordres de grandeur meilleure que les deux autres schémas. En effet, l'erreur sur la conservation,  $\Delta E_{\text{mec}} = \max E_{\text{mec}} - \min E_{\text{mec}}$  est de  $3.24 \cdot 10^8 \text{ J/kg}$  pour le schéma implicite, de  $3.03 \cdot 10^5 \text{ J/kg}$  pour le schéma explicite, et de  $3.93 \cdot 10^3 \text{ J/kg}$  seulement pour le schéma semi-implicite. Les résultats des simulations avec  $n_{\text{steps}} = 40000$  sont montrés aux Figures 4 et 5. En comparant

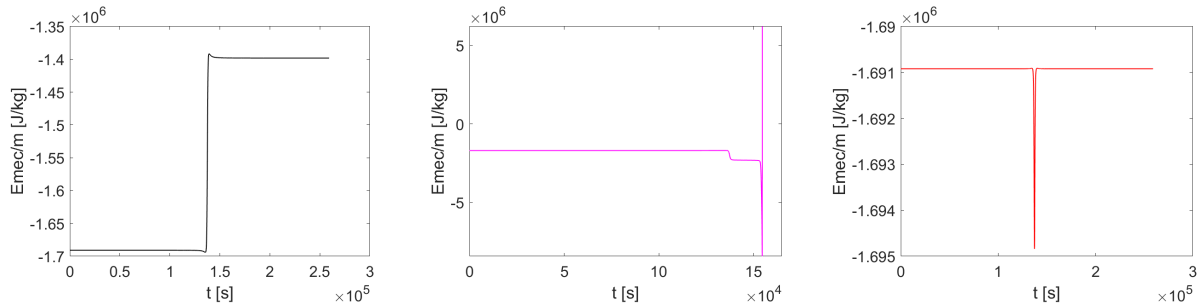


FIGURE 3 – Energie mécanique par unité de masse du satellite avec  $N_{\text{steps}} = 4000$ , calculées avec les schémas d'Euler explicite (noir,  $\alpha = 1$ ), implicite (violet,  $\alpha = 0$ ) et semi-implicite (rouge,  $\alpha = 0.5$ ).

les résultats à 4000 et 40000 pas de temps, on observe que les schémas explicite, respectivement implicite, ont leur trajectoire qui s'est rapprochée de celle du schéma semi-implicite. Pour le schéma semi-implicite, la trajectoire obtenue avec 4000 pas de temps est très proche de celle avec 40000 pas de temps, indiquant déjà qualitativement une meilleure propriété de convergence. Pour le schéma implicite, on évite cette fois la "catastrophe" d'une trajectoire trop proche du centre de la lune. La vue rapprochée au voisinage de la lune montre bien que le schéma implicite tend à produire une trajectoire qui se rapproche de la lune, alors que le schéma explicite produit une trajectoire qui s'en éloigne. Du point de vue de la conservation de l'énergie mécanique,  $\Delta E_{\text{mec}} = 4.09 \cdot 10^4 \text{J/kg}$  pour le schéma implicite,  $3.83 \cdot 10^4 \text{J/kg}$  pour le schéma explicite et de  $39.1 \text{J/kg}$  pour le schéma semi-implicite. Ces résultats indiquent que le schéma semi-implicite est bien supérieur aux deux autres. Cela sera confirmé et quantifié par les études de convergence de la section suivante.

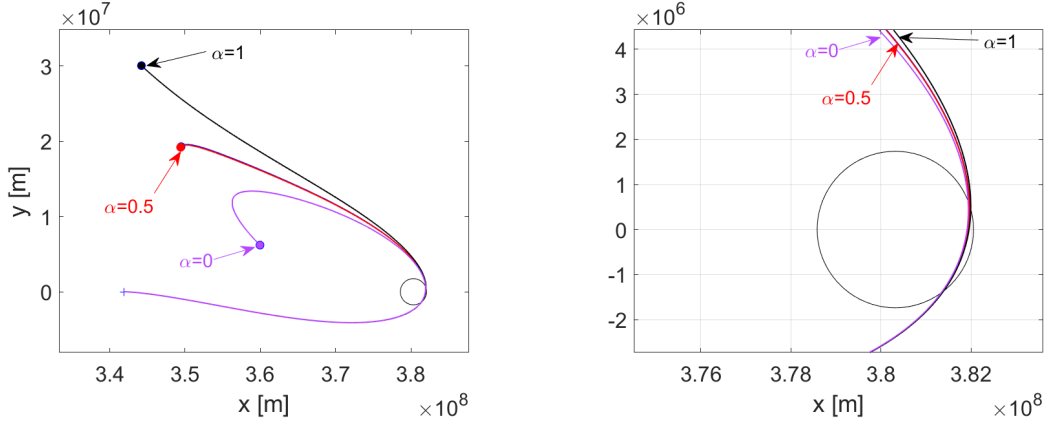


FIGURE 4 – Trajectoires du satellite avec  $N_{\text{steps}} = 40000$ , calculées avec les schémas d'Euler explicite (noir,  $\alpha = 1$ ), implicite (violet,  $\alpha = 0$ ) et semi-implicite (rouge,  $\alpha = 0.5$ ). On montre aussi une vue rapprochée au passage à proximité de la lune.

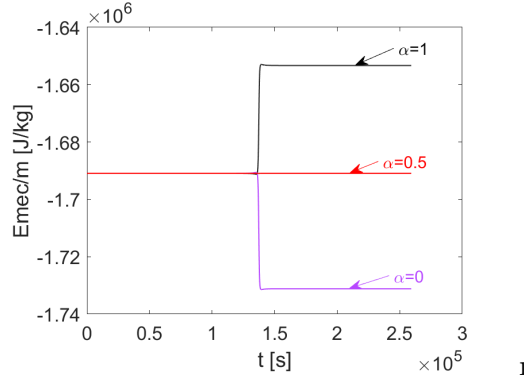


FIGURE 5 – Energie mécanique par unité de masse du satellite avec  $N_{\text{steps}} = 40000$ , calculées avec les schémas d'Euler explicite (noir,  $\alpha = 1$ ), implicite (violet,  $\alpha = 0$ ) et semi-implicite (rouge,  $\alpha = 0.5$ ).

Du point de vue physique, au point d'équigravité, la force d'inertie est dirigée vers la lune. La somme des forces gravitationnelles étant nulle et, la vitesse étant initialement nulle, la force de Coriolis est initialement nulle aussi. La résultante des forces est donc égale à la force d'inertie, dirigée en direction de la lune. Le satellite va donc être accéléré initialement en direction de la lune.

Un peu plus tard, une fois une vitesse acquise vers la droite, la force de Coriolis entre en jeu. Elle est dirigée selon  $\vec{v}' \times \vec{\Omega}$ , i.e. vers la droite par rapport au sens de marche. Elle va donc contribuer à dévier le satellite qui, sans Coriolis, s'écraserait sur la lune au milieu de sa face visible.

S'il n'y avait pas de force d'inertie, la position d'équigravité serait une position d'équilibre aussi dans  $\mathcal{R}'$ , et le satellite resterait indéfiniment en  $x'_0$ . Notons cependant qu'en fait cette position est instable : une déviation infinitésimale dans l'une ou l'autre direction ferait partir le satellite en direction de la lune ou de la terre. S'il n'y avait ni force d'inertie ni force de Coriolis, le satellite s'écraserait soit sur la terre soit sur la lune sur sa face visible.

### 1.3.2 Etude de convergence des 3 schémas numériques [15 pts]

Pour chacun des trois schémas d'Euler (explicite, implicite et semi-implicite), on effectue des séries de simulations avec des nombres de pas de temps  $n_{\text{steps}}$  différents. On prend  $N_{\text{steps}} = 4000, 6000, 10000, 14000, 20000, 30000, 40000, 50000, 60000, 100000$ . Les convergences numériques de la position finale  $x'(t_{\text{fin}}), y'(t_{\text{fin}})$  et de la conservation de l'énergie mécanique sont montrées aux Figures 6, 7, et 8.

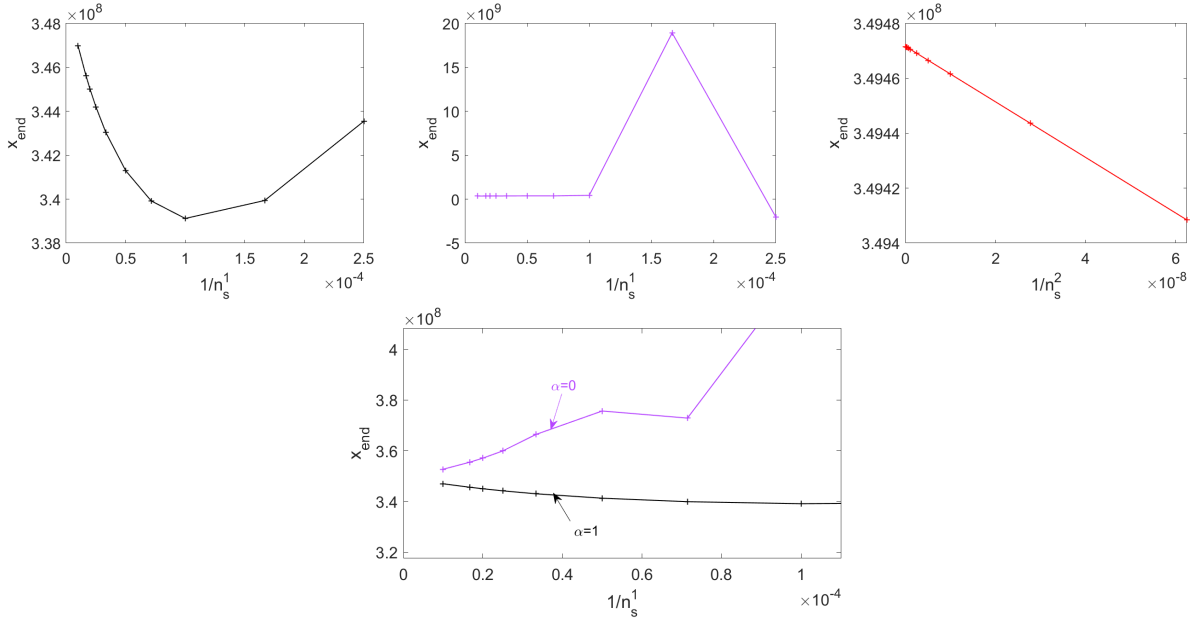


FIGURE 6 – Convergence de la position finale  $x'(t_{\text{end}})$  pour les schémas d'Euler explicite (noir,  $\alpha = 1$ ), implicite (violet,  $\alpha = 0$ ) et semi-implicite (rouge,  $\alpha = 0.5$ ). Image du bas : zoom pour les cas implicite et explicite.

Pour les schémas implicite et explicite, les représentations de  $x'_{\text{end}}$  et de  $y'_{\text{end}}$  en fonction de  $(1/N_{\text{steps}})^1$  donne des comportements linéaires dans la limite des grands  $N_{\text{steps}}$ . La convergence de ces deux schémas est donc d'ordre 1. Pour des valeurs de  $N_{\text{steps}}$  plus élevées, on s'écarte d'un comportement linéaire. Pour le schéma explicite, c'est clairement l'effet des termes en  $(1/N_{\text{steps}})^2, (1/N_{\text{steps}})^3$ , etc. Pour le schéma implicite, on a la "catastrophe" du passage trop proche de la lune qui fait que les résultats sont en dehors de toute convergence. Pour le schéma semi-implicite, la représentation en fonction de  $(1/N_{\text{steps}})^2$  donne bien une droite, et donc on conclut que la convergence est d'ordre 2.

L'erreur sur la conservation de l'énergie mécanique, Fig. 8, représentée sur un diagramme log-log en fonction de  $N_{\text{steps}}$  confirme ces lois de convergence : linéaire pour les schémas explicite et implicite (la pente est de  $-1$ ), quadratique pour le schéma semi-implicite (la pente est de  $-2$ ).

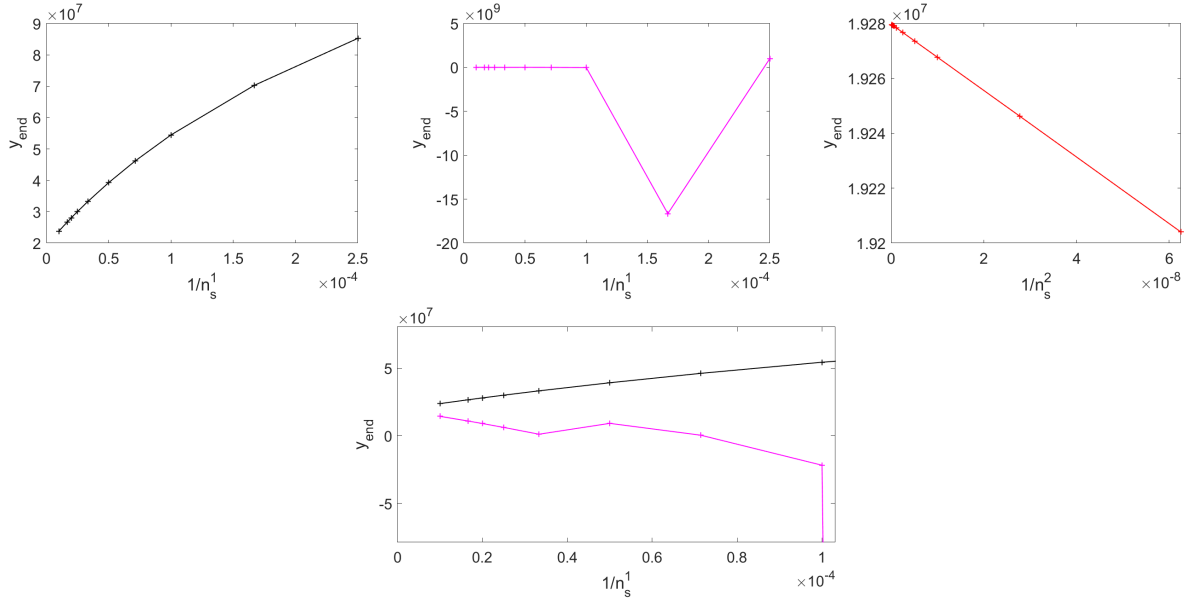


FIGURE 7 – Convergence de la position finale  $y'(t_{\text{end}})$  pour les schémas d'Euler explicite (noir,  $\alpha = 1$ ), implicite (violet,  $\alpha = 0$ ) et semi-implicite (rouge,  $\alpha = 0.5$ ). Image du bas : zoom pour les cas implicite et explicite.

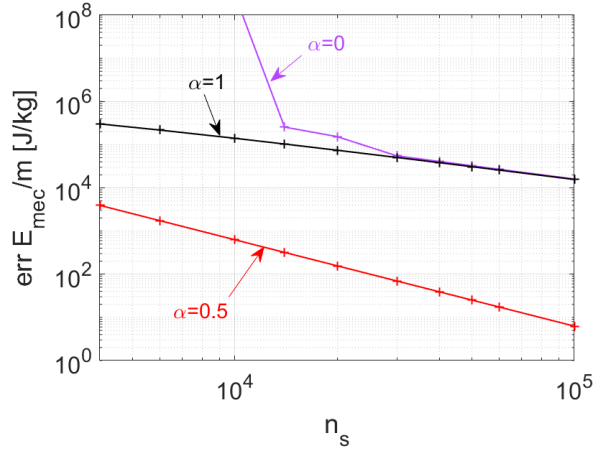


FIGURE 8 – Convergence de la conservation de l'énergie mécanique pour les schémas d'Euler explicite (noir,  $\alpha = 1$ ), implicite (violet,  $\alpha = 0$ ) et semi-implicite (rouge,  $\alpha = 0.5$ ).

### 1.3.3 Crash-test [3 pts]

Pour savoir si le satellite s'écrase sur la lune, il faut calculer la distance entre le satellite et le centre de la lune et vérifier si cette distance devient inférieure au rayon de la lune,  $R_L = 1.7371 \cdot 10^6 \text{m}$ . Pour répondre à cette question avec le plus de précision possible, on utilisera le meilleur des trois schémas numériques étudiés ici, à savoir le schéma semi-implicite.

Avec  $N_{\text{steps}} = 40000$ , on montre à la Fig. 9 la trace temporelle de la distance satellite - centre de la lune. on a tracé la ligne horizontale à  $d = R_L$ . La conclusion est claire : le satellite s'écrase sur la lune. Graphiquement, on obtient  $t_{\text{crash}} = 1.369474 \cdot 10^5 \text{s}$ , soit un peu plus de 38 heures après le départ.

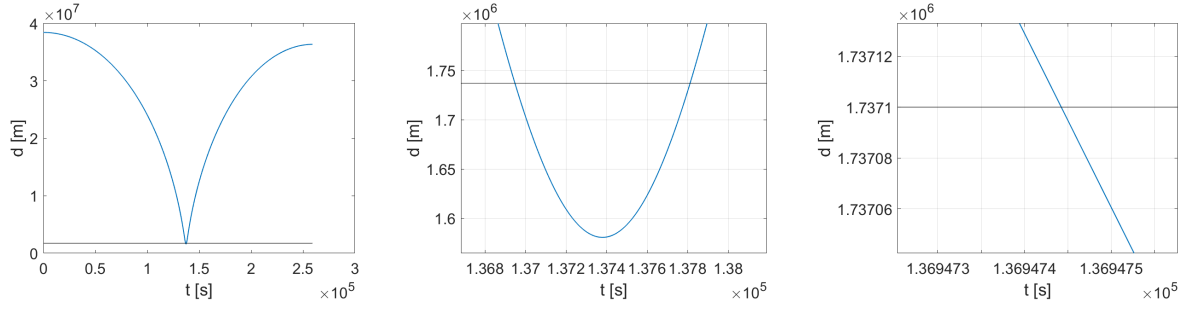


FIGURE 9 – Distance entre le satellite et le centre de la lune en fonction du temps, calculée avec le schéma d'Euler semi-implicite et  $N_{\text{steps}} = 40000$ .

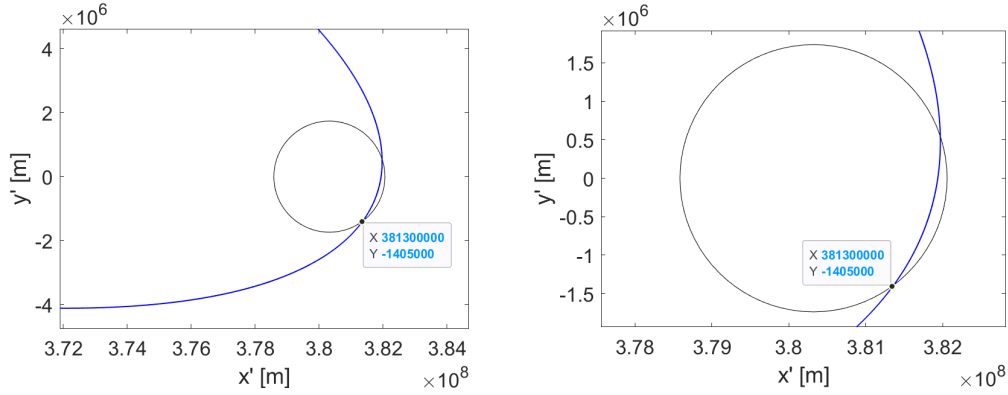


FIGURE 10 – Trajectoire du satellite, calculée avec le schéma d'Euler semi-implicite et  $N_{\text{steps}} = 40000$ . Le cercle représente la surface de la lune dans le plan  $x', y'$ .

Pour savoir où le satellite s'écrase, on trace dans le plan  $x', y'$  la cercle de rayon  $R_L$  centré au centre de la lune et on y superpose la trajectoire calculée (Fig. 10). On confirme qu'en effet le satellite s'écrase sur la lune. Le point d'impact,  $(x' = 3.813 \cdot 10^8, y' = -1.405 \cdot 10^6)$  m, est situé sur **la face cachée de la lune**, ce qui n'était pas a priori intuitif.

### 1.3.4 Facultatif [max 5pts]

#### (i) Etude de l'effet de la tolérance $\epsilon$ du schéma semi-implicite

Nous considérons  $N_{\text{steps}} = 4000$  et différentes valeurs de la tolérance,  $\epsilon = 10^3, 10^0, 10^{-3}, 10^{-6}$ . Le nombre d'itérations effectuées en fonction du temps est représenté à la Fig. 11. On constate que ce nombre est maximal lorsque le satellite est proche de la lune, voir Fig. 9. L'autre remarque à faire est qu'en réduisant la tolérance de trois ordres de grandeur ne fait qu'augmenter le nombre d'itérations d'une unité ou deux. Cela veut dire que chaque itération diminue l'erreur de deux ou trois ordres de grandeur. Il s'agit d'une convergence exponentielle, très rapide.

Les trajectoires pour  $\epsilon = 10^3$  et  $\epsilon = 10^{-6}$  sont montrées à la Fig. 12. Même avec une grande tolérance, les résultats ne sont pas si éloignés de la valeur convergée (indistinguable du cas  $\epsilon = 10^{-6}$  à l'échelle de la figure). Les cas intermédiaires,  $\epsilon = 10^0, 10^{-3}$  sont également indistinguables du cas  $\epsilon = 10^{-6}$ , qui est un signe supplémentaire de la convergence très rapide avec  $\epsilon$ .

Le comportement de l'énergie mécanique, Fig. ??, est remarquable. Pour toutes les valeurs de  $\epsilon$ , on note une non-conservation maximale au moment où le satellite est le plus proche de la lune. Une



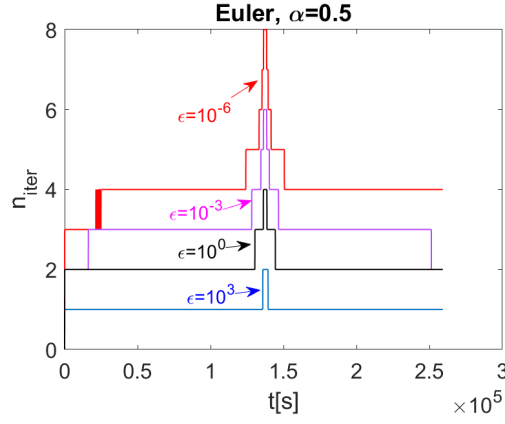


FIGURE 11 – Nombre d’itérations du schéma semi-implicite pour  $N_{\text{steps}} = 4000$  pour différentes valeurs de la tolérance  $\epsilon$ .

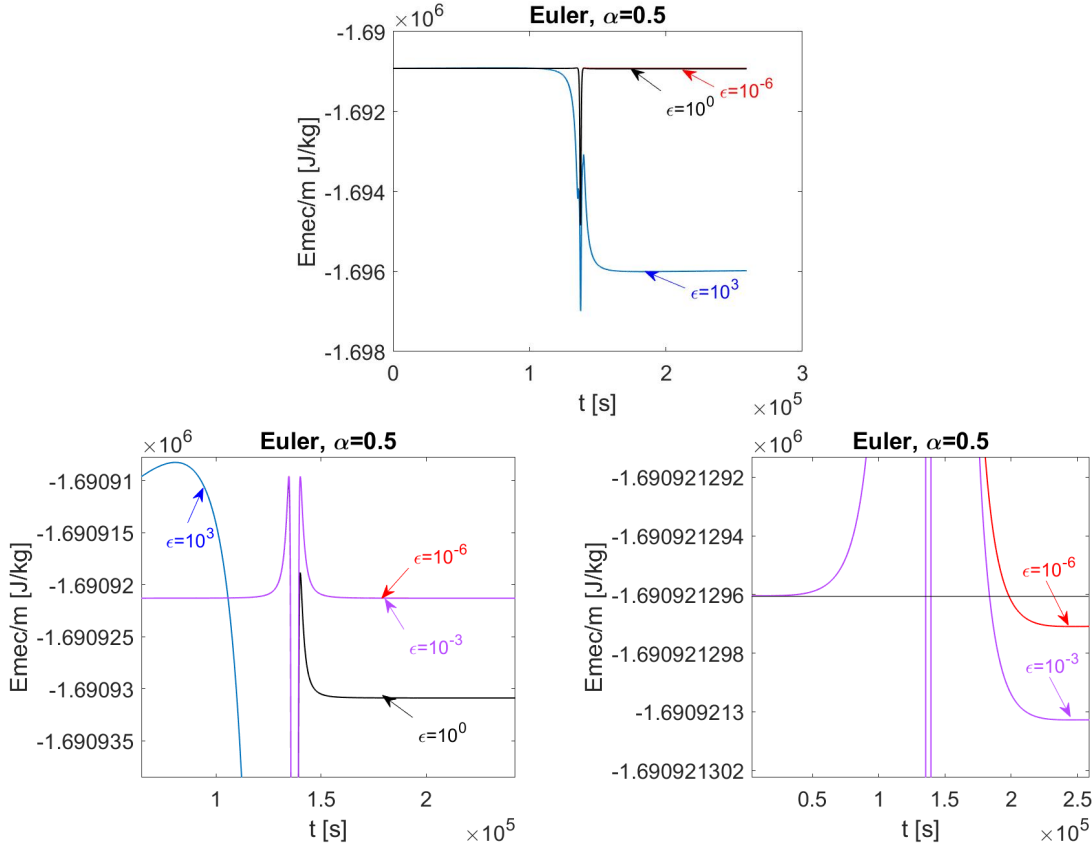


FIGURE 12 – Traces temporelles de l’énergie mécanique du schéma semi-implicite pour  $N_{\text{steps}} = 4000$  pour différentes valeurs de la tolérance  $\epsilon$ . Les images du bas sont des vues rapprochées successives.

fois passé ce point, l’énergie mécanique se stabilise à une valeur plus proche de sa valeur initiale. Les vues rapprochées montrent que la valeur de  $E_{\text{mec}}$  après le passage tendent vers la valeur initiale pour  $\epsilon \rightarrow 0$ . C’est une propriété très intéressante, qui conserve l’énergie mécanique à long terme. On en aura une autre démonstration dans la suite. Ainsi, le schéma semi-implicite n’est *pas conservatif*,

mais in conserve l'énergie sur le long terme : nous verrons dans a suite du cours d'autres schémas, dits *symplectiques*, qui ont cette propriété.

## (ii) Simulations sur 24 jours

On aimerait calculer la trajectoire sur une durée plus longue, et il est évident que nous allons choisir le meilleur des trois schémas, i.e. semi-implicite. Nous avons vu que pour une simulation de 3 jours, la simulation à 4000 pas de temps était déjà assez proche de celle à 40000 pas de temps et donc de la valeur convergée. Si nous voulons simuler 8 fois plus longtemps, donc 24 jours, une simulation avec 32000 pas de temps devrait être de qualité suffisante.

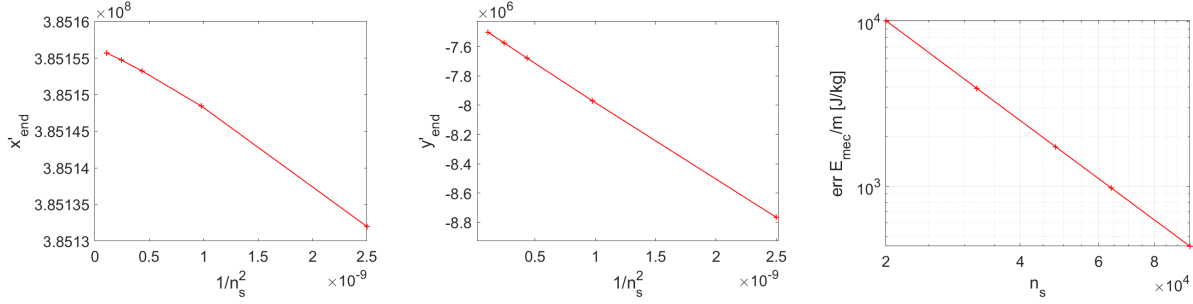


FIGURE 13 – Convergence de la position finale à 24 jours,  $x'(t_{\text{end}})$ ,  $y'(t_{\text{end}})$  et de la conservation de l'énergie pour le schéma d'Euler semi-implicite.

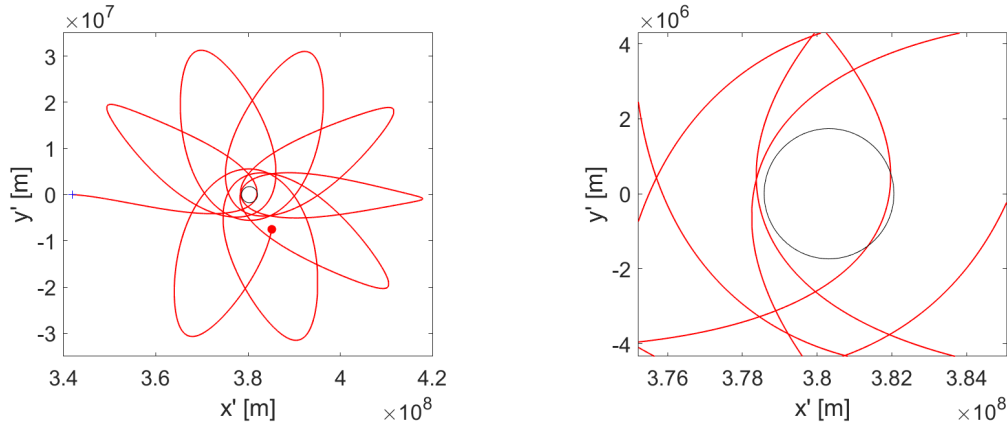


FIGURE 14 – Trajectoire du satellite pour une durée de 24 jours, schéma d'Euler semi-implicite,  $N_{\text{steps}} = 96000$ .

Pour être plus quantitatif, nous effectuons une étude de convergence, avec  $N_{\text{steps}} = 20000, 32000, 48000, 64000, 96000$ . Les résultats, Fig. 13, confirment l'ordre de convergence de 2 pour la position finale et pour la conservation de l'énergie.

La trajectoire obtenue est une sorte de "marguerite", Fig. 14, avec plusieurs passages se dangereusement proches de la surface lunaire. (On note qu'évidemment cette simulation est d'intérêt quelque peu académique, puisqu'en réalité le satellite s'écrase déjà au premier passage.) En inspectant la distance et l'énergie mécanique en fonction du temps, Fig. 15, on note une propriété remarquable de ce schéma semi-implicite : c'est seulement lors des passages à proximité de la lune qu'une (petite) non-conservation est observée, mais le satellite retrouve son énergie initiale immédiatement

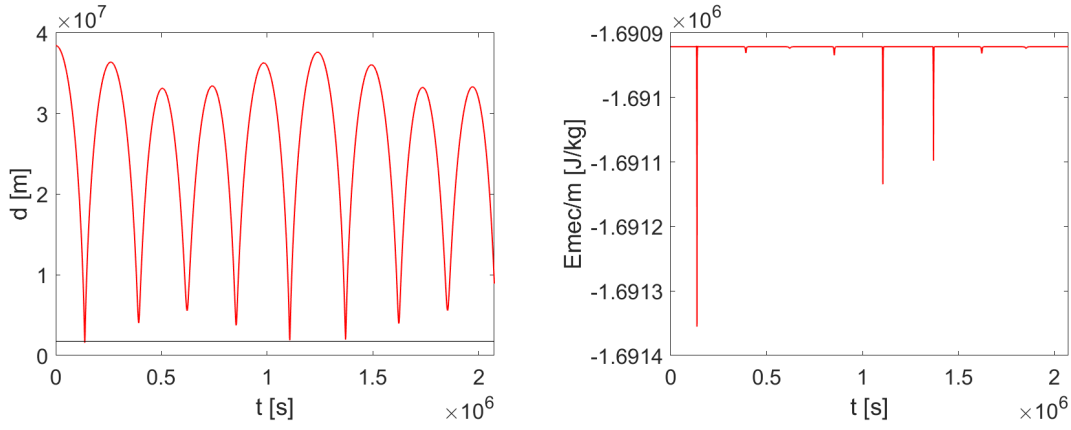


FIGURE 15 – Distance entre le satellite et le centre de la lune et énergie mécanique par unité de masse, pour une durée de 24 jours, schéma d'Euler semi-implicite,  $N_{\text{steps}} = 96000$ .

après le passage. Cette propriété est très utile lorsqu'on veut faire de très longues simulations.

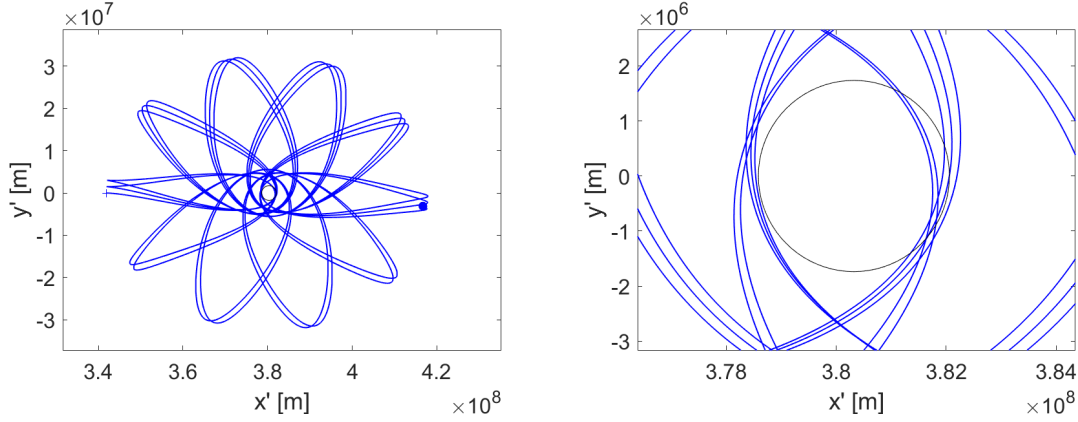


FIGURE 16 – Trajectoire du satellite pour une durée de 72 jours, schéma d'Euler semi-implicite,  $N_{\text{steps}} = 96000$ .

Pour une durée encore 3 fois plus longue, soit 72 jours, nous prenons 96000 pas de temps et montrons les résultats à la Fig. 16. On remarque que le satellite s'écraserait à de multiples occasions sur la lune. Même sur une durée si longue, la conservation de l'énergie mécanique est excellente, Fig. 17. De plus, le satellite retrouve son énergie initiale même après de nombreux passages proches du centre de la lune : la différence entre énergie mécanique finale et initiale n'est que de  $\sim 4 \cdot 10^{-4} \text{ J/kg}$ , soit une erreur relative de l'ordre de  $10^{-10}$ .

## Conclusions

Nous avons programmé, testé et vérifié les schémas d'Euler explicite, implicite et semi-implicite, pour résoudre un problème à 3 corps réduit. L'application physique s'est portée sur le mouvement d'un satellite placé initialement entre la terre et la lune. Les propriétés de convergence sont d'ordre 1 pour les schémas explicite et implicite, et d'ordre 2 pour le schéma semi-implicite. Le schéma semi-implicite a, de plus, une excellente propriété de conservation de l'énergie sur le long terme, qui est très utile pour de longues simulations.

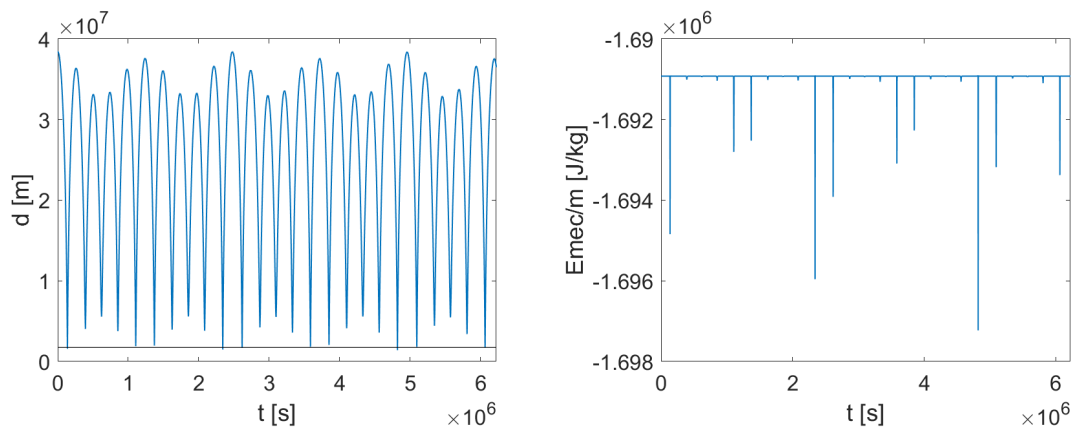


FIGURE 17 – Distance entre le satellite et le centre de la lune et énergie mécanique par unité de masse, pour une durée de 72 jours, schéma d'Euler semi-implicite,  $N_{\text{steps}} = 96000$ .

Et oui, le satellite s'écrase, après un peu plus de 38 heures, ... sur la face cachée de la lune...