§4–3 球面

(甲)球面方程式

(1)球面方程式的引入：

球面的定義：

空間中與一定點(球心)等距離(半徑)的點所成的圖形。

給定球心O(x_0,y_0,z_0)，半徑正數r，如何來描述球面呢？

球面這個圖形可否像平面一樣能用一個方程式來表示呢？

(2)球面的標準式：

若設球面S的球心O(x_0,y_0,z_0)，半徑為r，

則球面的方程式為$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$

[推導]：

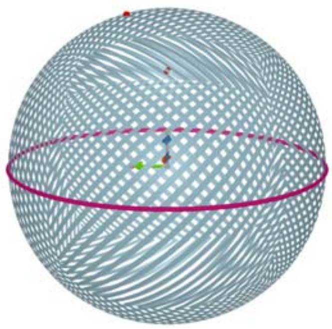
有一球面S，其球心O(x_0,y_0,z_0)，半徑r，請求出球面S的方程式。

設P(x,y,z)為球面上任一點

$\Leftrightarrow \overline{PO}=r$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}=r$

$\Leftrightarrow (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$



結論：

(a)球心(x_0,y_0,z_0)，半徑r的球面方程式為$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$

(b)方程式$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=A$ $(A>0)$ 代表球心(x_0,y_0,z_0)，半徑$\sqrt{A}$的球面。

例如：

空間中有一球面，球心O$(-2,3,4)$，半徑=5

$(x+2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2=5^2$

$\Rightarrow x^2+y^2+z^2+4x-6y-8z+4=0$

(3)球面方程式的一般式：

球面的方程式$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$

可化成三元二次方程式$x^2+y^2+Cz^2+Dx+Ey+Fz+G=0$ 的形式。

一般而言，三元二次方程式$x^2+y^2+Cz^2+Dx+Ey+Fz+G=0$ 不一定代表球面方程式。

例如：

(1)方程式$x^2+y^2+z^2-4x+2y-2z=0 \Rightarrow (x-2)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=4+1+1$

代表一個以O$(2,-1,1)$為球心，$\sqrt{6}$ 為半徑的球面。

(2)方程式$x^2+y^2+z^2-4x+2y-2z+30=0\Rightarrow(x-2)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=4+1+1-30<0$

沒有任何點(x,y,z)滿足上面的方程式，所以此方程式不代表任何圖形。

(3)方程式$x^2+y^2+z^2-4x+2y-2z+6=0\Rightarrow(x-2)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=0$

此方程式僅有(2,−1,1)一組解，因此此方程式的圖形為點(2,−1,1)。

(4)如何求球面的方程式：求球心、半徑：

(a)球心到球面上的點的距離
=球心到切平面的距離
=球心到切點的距離
=球心到切線的距離
=半徑。

(b)球心在 x 軸 $\Rightarrow O(t,0,0)$；在 y 軸 $\Rightarrow O(0,t,0)$；在 z 軸 $\Rightarrow O(0,0,t)$

(c)球心在xy平面 $\Rightarrow O(a,b,0)$；在yz平面 $\Rightarrow O(0,b,c)$；在zx平面 $\Rightarrow O(a,0,c)$

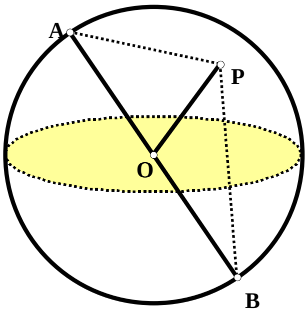
[討論]：

(1)我們都知道，$(x-1)^2+(y-2)^2+z^2=9$ 在空間中的圖形是球面，
$(x-1)^2+(y-2)^2=9$ 在坐標平面上的圖形是一個圓。
請問$(x-1)^2+(y-2)^2=9$ 在空間中代表什麼圖形呢？

(2)空間中的圓又要如何表示呢？

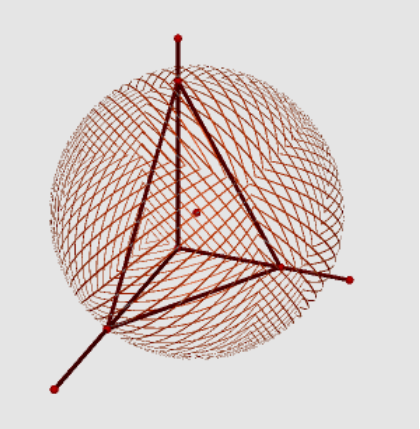
[例題1] 設球面S_1的球心為(2,1,−2)，球面S_2：$x^2+y^2+z^2=4$，若球面S_1、S_2相切，求S_1的方程式。Ans：$(x-2)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=1$ 或$(x-2)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=25$

[例題2] 若球面上直徑兩端點分別為$A(a_1,a_2,a_3)$、$B(b_1,b_2,b_3)$，則方程式為$(x-a_1)(x-b_1)+(y-a_2)(y-b_2)+(z-a_3)(z-b_3)=0$。



[例題3] 空間中有兩點 A(1,3,5)、B(7,3,−1)，若有一球面 S 通過 A、B 兩點且球心在直線 L：$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z+3}{2}$ 上，試問球心坐標爲________。Ans：(3,−4,1)

[例題4] 空間中有一個四面體OABC，其中O(0,0,0)、A(1,0,0)、B(0,1,0)、C(0,0,2)，試求此四面體的外接球面S的方程式。Ans：$x^2+y^2+z^2-x-y-2z=0$



(練習1) (1)設球面S的球心爲點(1,2,3)且點(−1,−2,4)爲S上的點，求球面S的方程式。Ans：$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=21$

(2)設球面S的半徑爲 13，球心在xy平面的投影爲(3,4,0)且球面S通過z軸上的點(0,0,−7)，求球面S的方程式。
Ans：$(x-3)^2+(y-4)^2+(z-5)^2=169$

(練習2) 球面S：$(x+1)^2+(y-3)^2+z^2=10$，問
(1)S的球心坐標及半徑r？
(2)下列諸點在S上或S的內部或外部？O(0,0,0)、A(2,1,3)、B(−3,1,1)
Ans：(1)球心(−1,3,0)，半徑=$\sqrt{10}$ (2)S上，S外部，S內部

(練習3) 設A、B之坐標爲A(2,1,3)、B(−4,5,−1)，那麼以$\overline{AB}$爲直徑的球面方程式該如何表示？Ans：$x^2+y^2+z^2+2x-6y-2z-6=0$

(練習4) 試就實數k值，討論方程式$x^2+y^2+z^2-2kx+4y-4z+20+k=0$ 的圖形。
Ans：$k<-3$ 或$k>4$ 時，爲球面，球心$(k,-2,2)$，半徑$\sqrt{k^2-k-12}$ $k=-3$ 時，表點(−3,−2,2)，$k=4$ 表點(4,−2,2) $-3<k<4$ 時，無圖形。

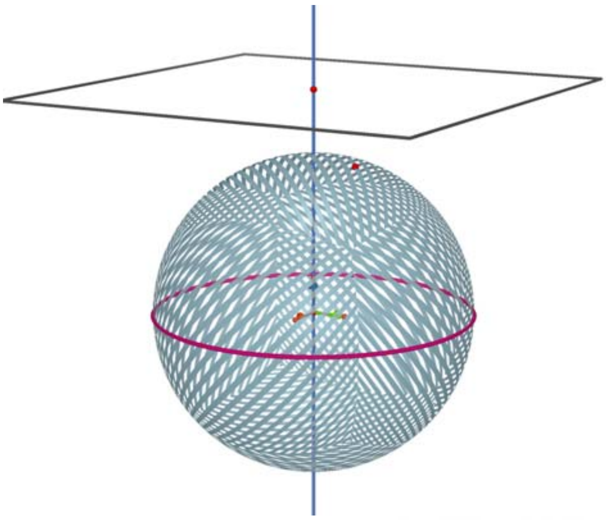
(練習5) 試求球心在x軸，且通過二點(1,1,2)、(2,2,4)的球面方程式。
Ans：$(x-9)^2+y^2+z^2=69$

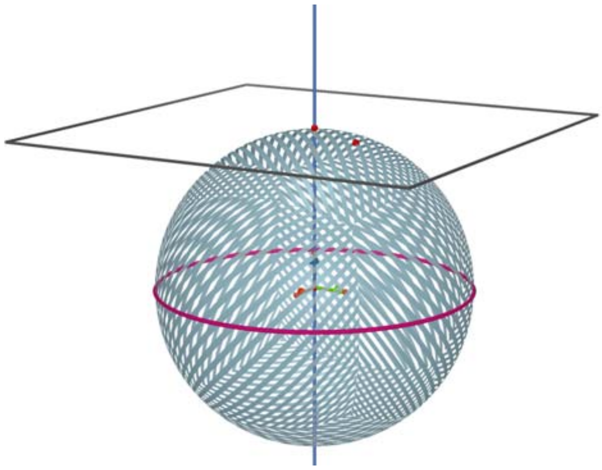
(練習6) 求與球面$x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z-6=0$ 相切且球心在(1,2,−3)之球面方程式。
Ans：$(x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=(\sqrt{17}+3)^2$或$(\sqrt{17}-3)^2$

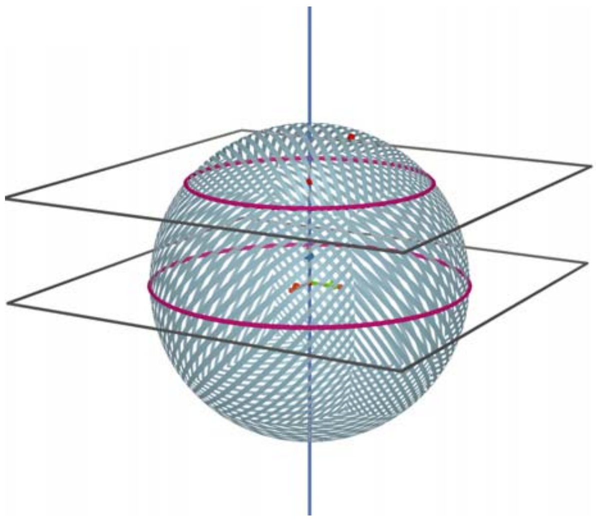
(練習7) 空間中有一個四面體OABC，其中O(0,0,0)、A(−1,0,0)、B(0,1,0)、C(0,0,−2)，試求此四面體的外接球面S的方程式。
Ans：$x^2+y^2+z^2+x-y+2z=0$

(乙)球面與平面的關係

(1)球面與平面的關係：







球面S：$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$與平面E：$ax+by+cz+d=0$ 的相交情形，
取決於球心O(x_0,y_0,z_0)到平面E的距離$d(O,E)=\dfrac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$。

(1)當$d(O,E)>r$，S與E不相交。
(2)當$d(O,E)=r$，S與E相切於一點。
(3)當$d(O,E)<r$，S與E相交。

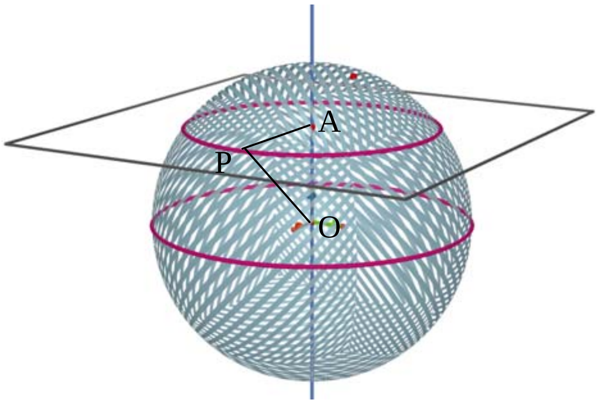
(2)截面圓：球面S與平面E相交，平面會在球面上形成截痕，截痕會是什麼圖形呢？會不會是圓呢？

[證明]：

設P為球面S與平面E的交點，令O對平面E的投影點為A

$PA^2=r^2-OA^2$，因為r、OA均為定值(與P無關)P與A點的距離為定值，

且P點同在一個平面上。⇒P點形成圓形。



截面圓的性質：

(a)球面被平面切割的截痕是一個圓，這個圓稱為截面圓。

(b)球心 O 在截面上的投影點即為截面圓的圓心 A。

(c)設球的半徑為 R，球心與截面的距離為 d($d=\overline{AO}$)，截面圓的半徑為 r，

則 $\boldsymbol{r=\sqrt{R^2-d^2}}$。

(d)大圓與小圓：

球面上以通過球心的平面所截出的圓最大，這種圓叫做**大圓**。

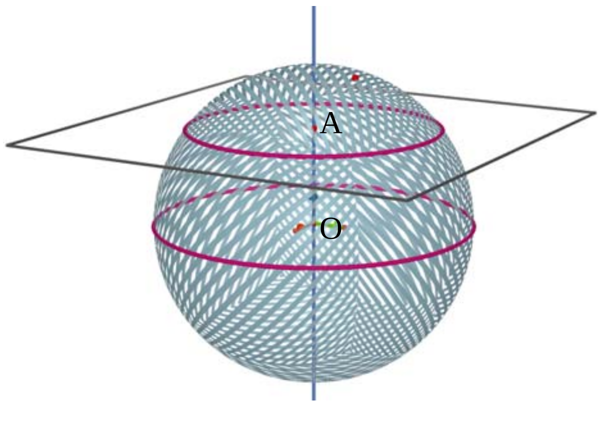
不通過球心的平面所截出的圓都叫做**小圓**。

[例題5] 給定一個球面S：$x^2+y^2+z^2-2x+4y+4z-16=0$ 及平面E：$2x+y-2z=-5$。

(1)試問S與E是否相交？

(2)如果S與E相交，求截面圓的圓心與面積。

Ans：(1)相交 (2)$(-1,-3,0)$，16π



[例題6] 有一球面S通過點A(5,6,3)，S被xy平面切割所得之截面方程式為
$\begin{cases} z=0 \\ (x+1)^2+(y-3)^2=6^2 \end{cases}$，試求球面S的方程式。Ans：$(x+1)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=45$

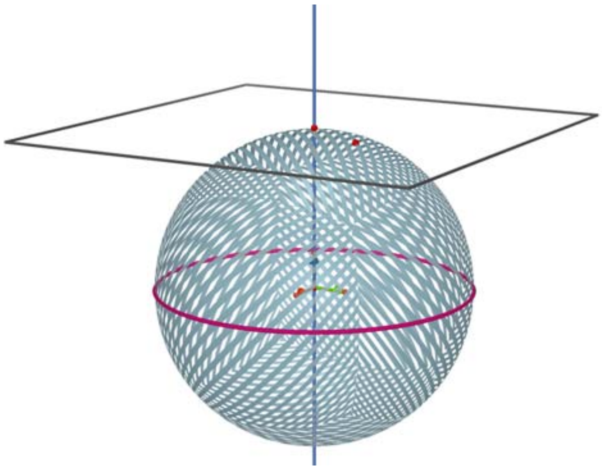
(練習8) 設空間中球面S：$x^2+y^2+z^2-4x+6y-2z-11=0$，平面E：$2x-y+2z+k=0$，試就$k$之值討論球面與平面相交的情況。
Ans： (1)$k>6$ 或$k<-24$，S與E不相交 (2)$k=6$ 或$k=-24$，S與E相切
(3)$-24<k<6$，S與E相交於一圓

(練習9) 空間中，下列那一個平面與球面$x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z-19=0$ 相交的圓的周長最長？(A)$x+y+z=0$ (B)$z=-1$ (C)$y=1$ (D)$x=2$ (E)$x=2y$。 Ans：(B)

(練習10) 一球面S被平面E：xz平面所截，截面圓的方程式為$\begin{cases} (x-1)^2+(z+1)^2=9 \\ y=0 \end{cases}$
，若球心在 $2x-y+3z-4=0$ 上，則球面S的方程式為何？
Ans：$(x-1)^2+(y+5)^2+(z+1)^2=34$

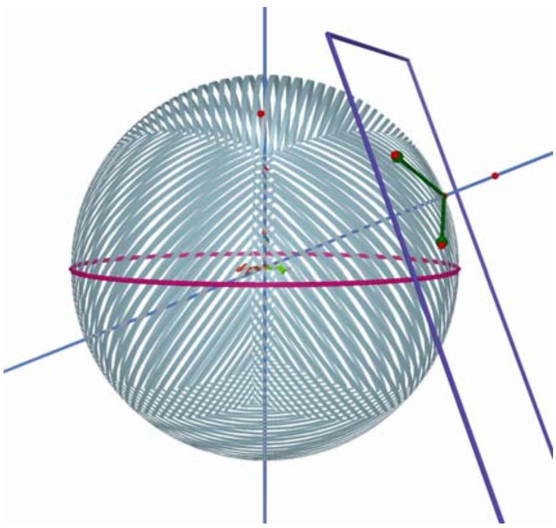
(練習11) 平面E：$x+y-z=5$ 截球面S：$x^2+y^2+z^2-2y+2z=2$ 於一圓，求此截圓的圓心坐標。Ans：(1,2,−2)

(3)切平面：
原理：
設球面 S 的球心 O，A 為球面 S 上的一點，E 是過 A 點的切面，若 P 是空間中任一點，則 P 在平面上⇔P=A 或$\overline{AP}\perp\overline{OA}$(**直線 AO 為切平面 E 的垂線**)



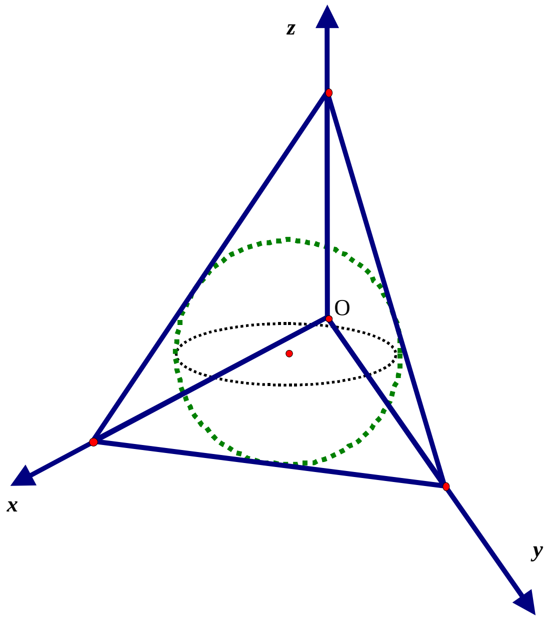
[例題7] 已知球面S：$x^2+y^2+z^2-2x-2y+4z-3=0$ 及其上一點A(3,–1,–3)，求以A為切點且與球面S相切的平面方程式。Ans：$2x-2y-z=11$

[例題8] 一球面S過點P(9,5,5)，且與E：$x-2y-2z-7=0$ 相切於(3,–1,–1)，請問此球面方程式為何？
Ans：$x^2+(y-5)^2+(z-5)^2=81$



[例題9] 空間中四平面 $x=0$，$y=0$，$z=0$，$x+y+z=1$ 圍成一四面體，則此四面體之內切球的半徑為______。

Ans：$\frac{3-\sqrt{3}}{6}$ (87 大學自)



(練習12) 求通過A(2,1,3)且與球面S：$(x-3)^2+(y+1)^2+(z-5)^2=9$ 相切的平面方程式。
Ans：$x-2y+2z-6=0$

(練習13) 設球面S：$x^2+y^2+z^2+dx+ey+fz+g=0$ 與平面E_1：$x-y-2z+5=0$ 切於點P(−1,2,1)，且與平面E_2：$x+2y+z-7=0$ 切於點Q(1,3,0)，求d,e,f,g之值。
Ans：d=0,e=−2,f=2,g=−4

(練習14) 空間中有四點O(0,0,0)，A(3,0,0)，B(0,6,0)，C(0,0,9)，則三角錐O−ABC之內切球方程式為？Ans：$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$

[例題10] 在平面E：$x+3y+2z+8=0$ 上取一點P，使P到球面S：$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=16$ 的距離為最小，求P點的坐標及最短距離。

Ans：P$(\frac{-1}{2},\frac{-5}{2},0)$、$\frac{3\sqrt{14}}{2}-4$

[例題11] 若$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=9$，求 $2x-y-2z$之最大值、最小值。
Ans：最大值 8、最小值-10
[幾何的觀點]：
令 $2x-y-2z=k$爲一平面，

[代數的觀點]：
利用柯西不等式 $\Rightarrow$

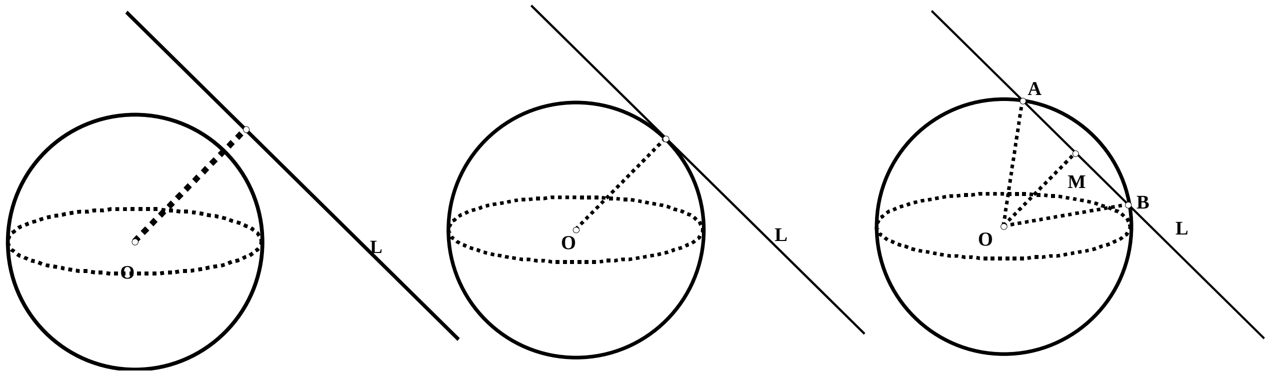
(練習15) 球面$(x-1)^2+y^2+z^2=9$ 上距離$x-2y+2z=3$ 最近距離的坐標爲何？
Ans：$(2,-2,2)$

(練習16) 球面S：$x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z+5=0$ 上的點P到平面E：$x-y-z-24=0$ 之最短距離爲何？又最遠距離爲何？Ans：$8\sqrt{3}-3$，$8\sqrt{3}+3$

(練習17) 設$P(x,y,z)$爲$(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=9$ 上的點，求 $2x-y+3z$之最大值與最小值。 Ans：最大值$=9+3\sqrt{14}$ ，最小值$=9-3\sqrt{14}$

(丙)球面與直線的關係

(1)球面與直線的關係：



設球面S：$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$，直線L：$\dfrac{x-p}{a}=\dfrac{y-q}{b}=\dfrac{z-r}{c}$

[幾何觀點]：

利用$d(\text{O},\text{L})$與半徑r作比較，可得：

(a)相離：$d(\text{O},\text{L})>r$　(b)相切：$d(\text{O},\text{L})=r$ (c)相離：$d(\text{O},\text{L})<r$

[代數觀點]：

將直線L的參數式$\begin{cases} x=p+at \\ y=q+bt \\ z=r+ct \end{cases}$代入S的方程式，形成$t$的二次方程式。

根據t的判別式D來判斷直線與球面的關係。

(a)相離：D<0　(b)相切：D=0　(c)相交：D>0

[例題12] 已知球面S：$x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z+k=0$，直線L：$\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+1}{-2}$

(1)若L與S相切，則k=？

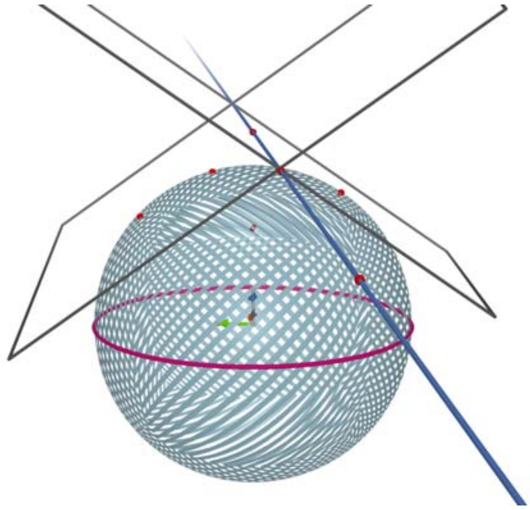
(2)若L與S相交於二點，則求k之的範圍。

(3)若L與S不相交，則求k之的範圍。

Ans：(1)$k=5$　(2)$k<5$　(3)$14>k>5$

[例題13] 空間中有兩點A(2,13,13)、B(5,–14,–11)，設直線AB與球面$x^2+y^2+z^2=50$交於兩點P、Q，請問$\overline{\text{PQ}}$=？　Ans：$\sqrt{146}$

[例題14] 包含直線 $\dfrac{x-2}{10}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+6}{-6}$ 且與球面S：$x^2+y^2+z^2+2x-2y+4z+5=0$ 相切的平面方程式爲何？　Ans：$x-2y+2z+10=0$ 或 $33x+174y+26z+90=0$



[例題15] 設點A(4,−4,4)，試求球面$x^2+y^2+z^2=2(x+2y-2z)$上的點P到A的距離之最大值、最小值，並問此時的P點。Ans：12，6，(0,4,−4)，(2,0,0)

(練習18) 若直線$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-2}{2}$與球面$x^2+y^2+z^2=r^2$相切，$r^2$=________，切點爲__________。Ans：5，$(\frac{2}{3},\frac{-5}{3},\frac{4}{3})$

(練習19) 設平面$x+y+z=1$ 與球面$x^2+y^2+z^2=4$ 相交部分爲圓S。已知平面 $2x+2y+z=1$ 與圓S交於P,Q兩點，則$\overline{PQ}$之長爲_______。 Ans：$2\sqrt{3}$　(85 大學社)
(P、Q兩點可視爲兩平面的交線與球面的交點)

(練習20) 通過(2,1,0)、$(\frac{1}{2},0,1)$二點的平面，而與球面$x^2+y^2+z^2=1$ 相切，則切點坐

標爲________或________。[提示：令切點T(a,b,c)，A(2,1,0)、B$(\frac{1}{2},0,1)$，O(0,0,0)利用$\overline{OT}\perp\overline{AT}$與$\overline{OT}\perp\overline{BT}$與$a^2+b^2+c^2=1$這三個條件解$a,b,c$。]

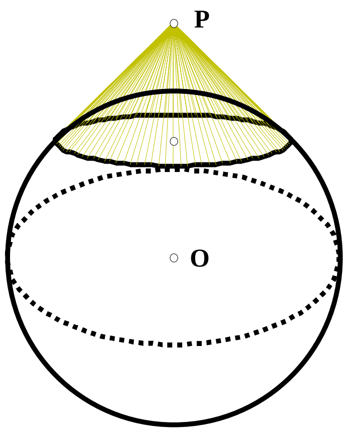
Ans：$(\frac{2}{3}，\frac{-1}{3}，\frac{2}{3})，(\frac{2}{7}，\frac{3}{7}，\frac{6}{7})$

(練習21) 已知球面S：$x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z+5=0$，直線L：$\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{-2}$，求包含直線L與球面S相切之平面E方程式。Ans：$x+2y+2z-2=0$

[思考一下！爲何例題 13 的答案有二個而本題答案只有一個]

[例題16] 一球面S：$x^2+y^2+z^2+4x-3=0$ 及球外一點P(1,2,–1)，過點P作球面S的切線，則所有的切點形成一個圓C，試回答下列各問題：
(1)圓C所在的平面方程式。
(2)圓C的圓心、面積。(3)以P爲頂，圓C爲底的圓錐之體積。

Ans： (1) $3x+2y-z-1=0$(2)$\frac{7\pi}{2}$，$(\frac{-1}{2},1,\frac{-1}{2})$ (3)$\frac{7\sqrt{14}}{12}\pi$



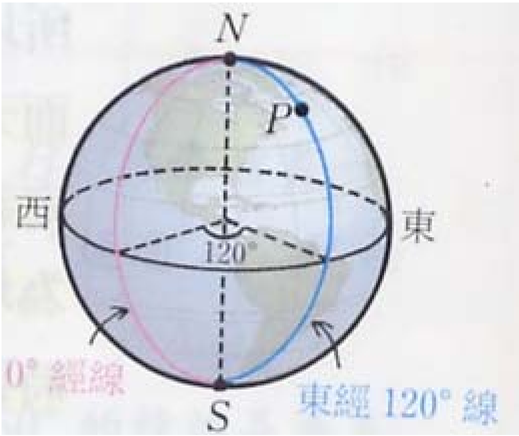
[例題17] 兩球面S_1：$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=6$，$S_2$：$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=9$ 的交集爲一圓，求其圓心及半徑。Ans：圓心$(1,\frac{3}{4},\frac{13}{4})$、半徑=$\frac{\sqrt{94}}{4}$

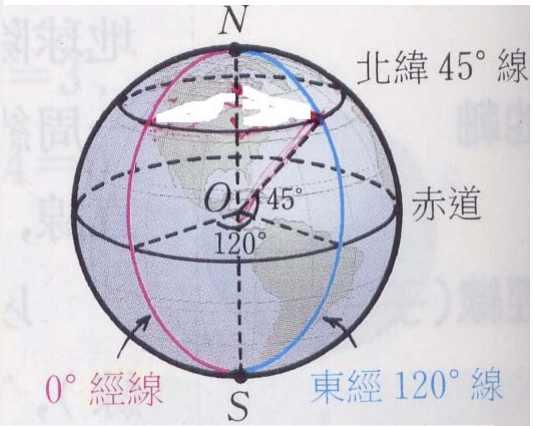
(練習22) S_1：$x^2+y^2+z^2=1$、S_2：$(x-2)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=9$，試求$S_1$與$S_2$交集區域的面積。　Ans：$\frac{2\pi}{3}$

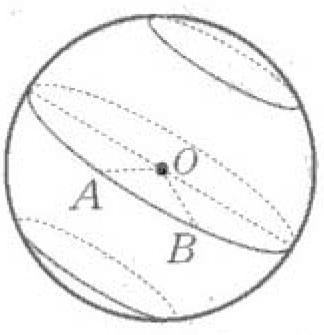
(練習23) 空間中有一球面S：$x^2+y^2+z^2-2x+2y-2z-7=0$ 及一平面E：$2x-y+2z+1=0$，S與E的交集是一個圓C，請作下列各小題：
(1)圓C的圓心坐標。　(b)以圓C爲底，S的中心爲頂點的圓錐之體積。
Ans：(1)$(\frac{-1}{3},\frac{-1}{3},\frac{-1}{3})$　(2)4π

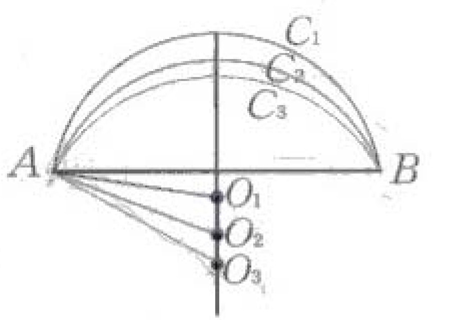
(丁)地球的經度與緯度

(1)相關知識：









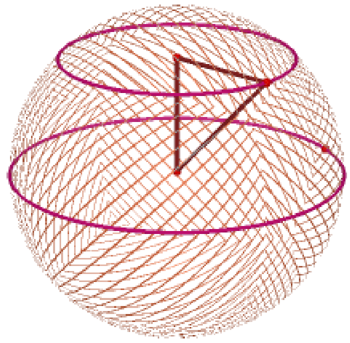
(a)地球自轉是一條貫穿南，北兩極的直徑，這條直徑叫做地軸。
(b)經線(子午線)
(1°)以地軸爲直徑的大圓叫做經線(分爲東經線與西經線)又稱子午線。
(2°)通過英國格林威治天文台的經線(是一個半圓)，叫做 0 度經線，
又名本初子午線。
(3°)經線的度數就是該經線所在的半平面與 0 度經線的半平面所夾的二面角的度數。
(4°)0 度經線以西的經線叫做西經線，其度數取值範圍是 0°~180°，
0 度經線以東的經線叫做東經線，其度數取值範圍是 0°~180°。
(c)緯線(是一個圓)

(1°)與地軸垂直的圓叫做緯線，其中的大圓叫赤道，又名 0 度緯線。

赤道以北的緯線(都是小圓)叫做北緯線，

赤道以南的緯線(都是小圓)叫做南緯線。

(2°)緯線的度數就是經過緯線上任一點的「球半徑」與赤道面所夾的度數。



(d)設地球赤道之圓為C_1，北緯θ之圓為C_2，現在我們討論C_1與C_2之半徑與θ的關係⇒$x=r\cdot\cos\theta$。

(2)兩點的球面距離：

地球上 A、B 兩點間的最短距離是通過 A、B 兩點的大圓劣長度，這個距離我們稱為 A、B 兩點的球面距離。

[說明]：

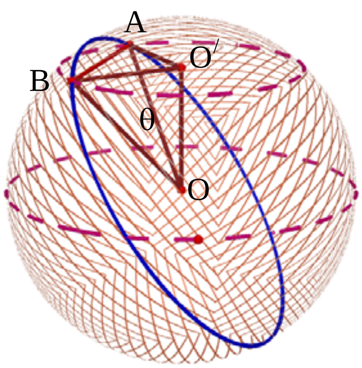
(a)球心O、A、B三點決定一個平面，此平面切割地球截出一個大圓，大圓裡的劣弧$\overset{\frown}{AB}$的弧長稱為A、B兩點的**球面距離**。

這段大圓路徑是球面上所有通過A、B兩點之路徑中最短的。

(b)要證明(a)的結論，已超過高中數學的範圍。

直觀來說明：以O_i (I=1,2,3)為圓心，分別作通過A、B兩點的劣弧，可得知半徑$\overline{O_1A}$、$\overline{O_2A}$、$\overline{O_3A}$ 逐漸增大，其對應的弧長c_1、c_2、c_3反而愈來愈短，並逐漸趨近於線段$\overline{AB}$的長。也就是說，兩點的弧長中，半徑較大者，其弧長較短。(3)球面距離的求法：

(a)給定球面上A、B兩點，只要求出$\overrightarrow{OA}$與$\overrightarrow{OB}$夾角θ=∠AOB 再求得A、B兩點的球面距離。

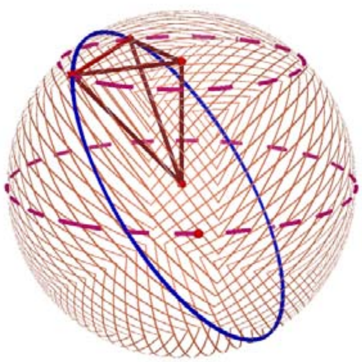


(b)先求出$\overline{AB}$的長度，再利用餘弦公式求 cosθ

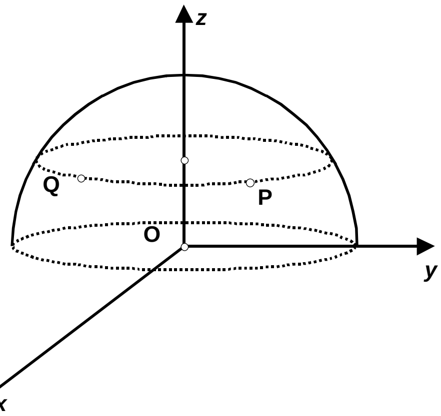
其中θ=∠AOB，再利用 s=R．θ ，

再求得 A、B 兩點的球面距離。

[例題18] 設地球上A地東經 123°，北緯 60°，B地位於東經 63°，北緯 60°，請估計A、B兩地的距離，(地球半徑=R公里)Ans：$R\cdot(\cos^{-1}\frac{7}{8})$公里

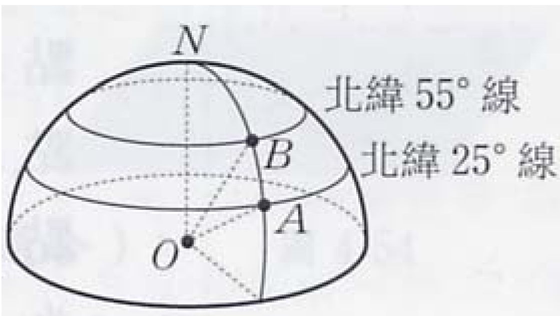


[例題19] 設地球的方程式為$x^2+y^2+z^2=R^2$，其中R為地球半徑，以平面$z=0$(即xy平面)表赤道面，平面$y=0$(即xz平面)上的大圓表本初子午線，y軸正向為東，
(a)請問北緯 60°所在的平面方程式。
(b)若P、Q為地球上兩點，且它們的位置分別是P(東經 30°，北緯 45°)、Q(西經 60°，北緯 45°)，試求P、Q兩點的直角坐標。
(c)求P、Q兩點在地球上的最短距離。



Ans：Ans：(a)$z=\frac{\sqrt{3}}{2}R$ (b)$P(\frac{\sqrt{6}}{4}R,\frac{\sqrt{2}}{4}R,\frac{\sqrt{2}}{2}R)$、$Q(\frac{\sqrt{2}}{4}R,-\frac{\sqrt{6}}{4}R,\frac{\sqrt{2}}{2}R)$ (c)$\frac{\pi}{3}R$

(練習24) 設地球上 A 地東經 121°，北緯 25°，B 地位於東經 121°，北緯 55°，請估計 A、B 兩地的距離，(地球半徑=6400 公里)



Ans：3351 公里

(練習25) 假設一地球儀其赤道長為 100cm，試求北緯 60°的緯線長度。Ans：50cm

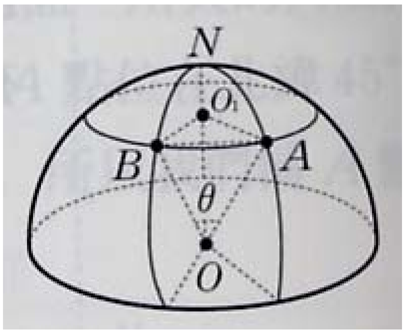
(練習26) 假設地球的半徑為 R，則北緯 30°的緯圈，半徑為何？又此緯圈所在的平面與地心的距離為何？Ans：$\frac{\sqrt{3}}{2}R$，$\frac{1}{2}R$

(練習27) 在坐標空間中，通過 $O(0,0,0)$, $N(0,0,1)$, $P(\frac{1}{4},\frac{\sqrt{11}}{4},-\frac{1}{2})$ 三點的平面與球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 相交於一個圓 C，則圓 C 的劣弧$\overset{\frown}{NP}$的弧長等

於＿＿＿＿＿＿＿＿＿。Ans：$\frac{2\pi}{3}$ (92 學科)(化成最簡分數) (所謂劣弧$\overset{\frown}{NP}$是指圓 C 上由 N，P 兩點所連接的兩弧中較短的那一段弧)

(練習28) 設地球上 A、B 兩點都在北緯 45°圈上，而 A 地在西經 145°，B 地在東經 125°，求 A、B 兩地的球面距離。

(設地球的半徑為 R 公里)Ans：$\frac{\pi}{3}$R 公里



綜合練習

(1) 設k是一個實數，試證方程式$x^2+y^2+z^2+2(k-1)x-(k+4)y+2(2-k)z+8(k-2)=0$ 的圖形是一個球面，並求此球面半徑的最小值。

(2) 空間中有兩點 P(10,2,5)，Q(−6,10,11)

(a)求以$\overline{PQ}$為直徑的球面方程式。 (b)此球與 xy 平面之交圓的面積。
(c)此球在 z 軸上截出之線段長。

(3) 球心為(1,−2,3)與平面 E：$x+y+2z-11=0$ 相切，求球面的方程式。

(4) 在平面 $z=0$ 上有一圓，其圓心為(0,0,0)，半徑為 1，今有一球，其球面含此圓及點$(0,0,\sqrt{3})$，則此球之半徑為______。

(5) 給定一個方程組$\begin{cases} 2x+2y+z=b \\ (x+1)^2+y^2+(z-2)^2=4 \end{cases}$試求此方程組

(a)有實數解的充要條件，並解釋它的幾何意義。
(b)恰有一組實數解的充要條件，並解釋它的幾何意義。

(6) 與球面$x^2+y^2+z^2-2x-4y+z-5=0$ 同心，且與yz面相切的球面方程式為？

(7) 試證明：通過球面S：$x^2+y^2+z^2+dx+ey+fz+g=0$ 上一點$T(x_0, y_0, z_0)$的切平面E之方程式為$x_0x+y_0y+z_0z+\frac{d}{2}(x_0+x)+\frac{e}{2}(y_0+y)+\frac{f}{2}(z+z_0)+g=0$。

(8) 設 O(0,0,0)、P(6,6,12)，若以$\overline{OP}$為直徑的球面 S 交 x 軸、y 軸、z 軸各交於 A、B、C 三點，求過 A、B、C 三點的圓面積。

(9) 求在第一卦限與三平面 $x=0,y=0,$與 $z=0$ 相切，且經過 A(5,4,5)的球面方程式。

(10) 平面 E：$2x+3y+6z=6$ 與三坐標平面 $x=0,y=0,$及 $z=0$ 圍成一個四面體，求此四面體之內切球 S 的半徑，並求 S 與 E 的切點坐標。

(11) 空間中有兩球面S_1：$x^2+y^2+z^2=18$，S_2：$x^2+y^2+z^2-2x-2y=0$，S_1與S_2分別與xy平面截出兩個圓C_1、C_2，請問兩圓的最長與最短距離。

(12) 在坐標空間中，平面$x-2y+z=0$上有一以點$P(1,1,1)$為圓心的圓Γ，而$Q(-9,9,27)$為圓Γ上一點。若過 Q 與圓Γ相切的直線之一方向向量為$(a,b,1)$，則$a=$？，$b=$？ (93 學科能力測驗)

(13) 直線L：$\begin{cases} x=1+t \\ y=-1+2t \\ z=2+t \end{cases}$，$t$爲實數，L與球面S：$x^2+y^2+z^2=6$ 相交於A、B兩點求

(a)球心到L的距離。　(b)$\overline{AB}$=？

(14) 設二平面E通過A(2,0,0)、B(4,2,0)且與球面S：$x^2+y^2+z^2=1$ 相切，則切點坐標爲何？

(15) 光源放在點A(1,2,5)向球面S：$(x-1)^2+(y-2)^2+z^2=9$ 照射，則在xy平面上的陰影區域面積=_______。

(16) $x^2+y^2+z^2-2x+4y+4z=0$，求$(x-4)^2+(y+4)^2+(z-4)^2$之最大值、最小值及此時之(x,y,z)。

(17) 球面S_1：$x^2+y^2+z^2-2x+4y-4z-55=0$ 上的每個點與球面S_2：$x^2+y^2+z^2=\frac{1}{4}$上的每個點之距離中，最短者爲________。

(18) S_1：$x^2+y^2+z^2-9=0$，S_2：$x^2+y^2+z^2-2x-4y+4z-7=0$，
(a)試求S_1與S_2交圓所在的平面方程式。
(b)試求S_1與S_2交圓且交圓是大圓的球面的方程式。

(19) 由球面S：$x^2+y^2+z^2=2(x+2y-2z)$外一點A(4,–4,4)向球面S作切線，所有的切點形成一個圓，試求(a)此圓的面積。　(b)此圓所在的平面方程式。

(20) 空間中球面$x^2+y^2+z^2=10$ 上兩點A$(-2,-\sqrt{5},1)$、B(1,0,–3)，試求A、B兩點的球面距離。

(21) 把地球看成一個圓球體，其大圓周長爲 4 萬公里，已知 P 點在經度 0°，北緯 45°處，Q 點在東經 90°，緯度 0°處，求兩點 P、Q 的球面距離。

進階問題

(22) 假設地球爲一球體，今以地球球心爲原點，地球半徑爲單位長，建立一直角坐標系。設地球表面上有甲乙丙三地，甲、乙兩地的坐標分別爲(1,0,0)、$(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$，而丙地正好是甲乙兩地最短路徑的中點，則丙地的坐標爲____________。
(90 大學自)

(23) 求包含兩定點(3,2,1)，(1,3,2)且與球面$x^2+y^2+z^2=\frac{1}{2}$相切的切面方程式。

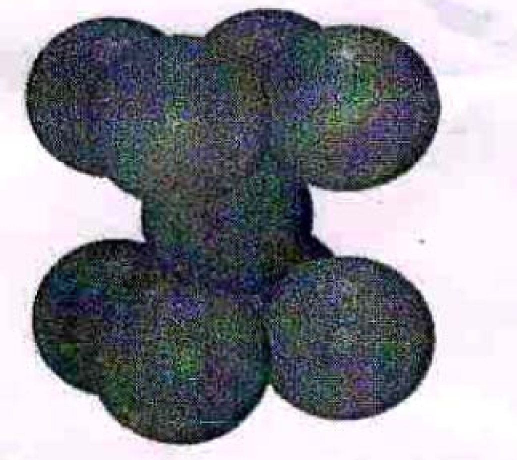
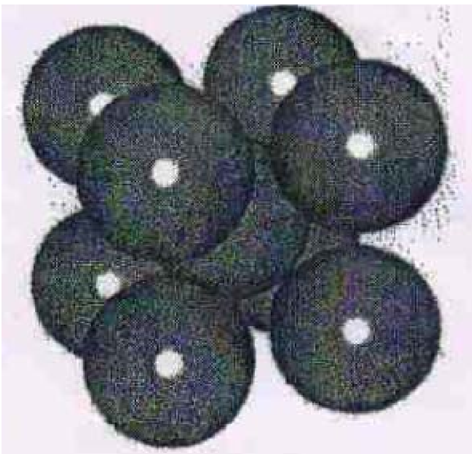
(24) 設直線L：$x-1=\frac{y+1}{3}=\frac{z-1}{-1}$，球面S：$(x-2)^2+(y+4)^2+(z-6)^2=6$，求包含直線L而與球面相切的平面方程式。

(25) 設想地球是個圓形球體，已知沿著赤道，經度 10 度間的距離是 1113 公里，那麼沿著北緯 20°線，經度 10 度間的距離最接近下面哪個數值？(單位：公里)
(A)1019　(B)1027　(C)1035　(D)1046　(E)1054　(已知 cos20°=0.9407)

(26) 某體育用品店中有大小不同的長方體箱子，可將半徑為 1 的 9 個籃球穩固地裝在其內部：

(a)第一種紙箱其底部是正方形，可將 4 個籃球平放於最底層，相鄰兩球均相切且每個球切於紙箱兩側面，中層只放一個球且同時切於底層 4 個球，上層 4 個球放法與底層相同，且紙箱上蓋與上層 4 球相切(紙箱內部如圖所示)，試問此種長方體紙箱的體積為____________。

(b)第二種紙箱是一個長方體，可將 4 個籃球放於最底層的四個角落，每個球均切於紙箱兩側面但彼此都不相切，中層只放一球且同時切於底層 4 個球，上層 4 個球放法與底層相同，且紙箱上蓋與上層 4 球相切(紙箱內部如圖所示)，試問此種正立方體紙箱的邊長為___________。

綜合練習解答

(1) 3

(2) (a) $x^2+y^2+z^2-4x-12y-16z+15=0(b)25\pi$ (c)14

(3) $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=6$

(4) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

(5) (a) $|b|\leq 6$ (平面與球面相交) (b) $|b|=6$ (球面與平面相切)

(6) $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+\frac{1}{2})^2=1$

(7) [提示：設切平面上點P(x,y,z)，利用$\overrightarrow{TP}\perp\overrightarrow{OT}$ 與T點在球面上這兩個條件可以證明出切平面的方程式，必要時可參考 4-2 中圓的切線公式]

(8) 50π

(9) $(x-3)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=9$ 或$(x-11)^2+(y-11)^2+(z-11)^2=121$

(10) $\frac{1}{3}$，S 與 E 的切點坐標為$(\frac{3}{7},\frac{10}{21},\frac{13}{21})$

(11) $\sqrt{2}$ 、$5\sqrt{2}$

[提示：圓C_1圓心(0,0,0)，半徑 $3\sqrt{2}$ ，圓C_2圓心(1,1,0)半徑$\sqrt{2}$ 圓C_1、C_2均在xy平面上，且兩圓相內離，因此可將這個問題看成是xy平面上相內離的兩圓最短距離與最長距離的問題]

(12) $a=5$，$b=3$

[解法]：$\overrightarrow{PQ}=(-10,8,26)\perp(a,b,1)$，$\vec{n}=(1,-2,1)\perp(a,b,1)$

$\Rightarrow\begin{cases}5a-4b-13=0\\a-2b+1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=5\\b=3\end{cases}$。

(13) (a)$\frac{\sqrt{210}}{6}$ (b)$\frac{\sqrt{6}}{3}$

(14) $(\frac{1}{2},\frac{-1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$或$(\frac{1}{2},\frac{-1}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})$

(15) $\frac{25\pi}{3}$[提示：請注意 A 點與球心(1,2,1)垂直於 xy 平面]

(16) 最大值 100，$(\frac{16}{7},\frac{-20}{7},\frac{4}{7})$；最小值 16，$(\frac{-2}{7},\frac{-8}{7},\frac{8}{7})$

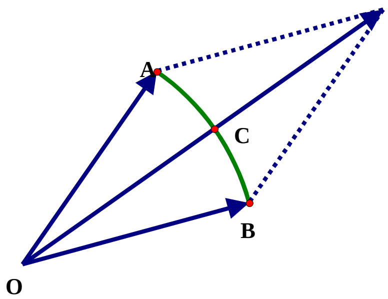
(17) $\frac{9}{2}$

(18) (a)$x+2y-2z-1=0$ (b)$9x^2+9y^2+9z^2-2x-4y+4z-79=0$

(19) (a)8π (b)$x-2y+2z+4=0$

(20) $\frac{2\sqrt{10}\pi}{3}$

(21) 1 萬公里 [提示：設球心 O，$\overline{OP}\perp\overline{OQ}$，$\Rightarrow\angle POQ=\frac{\pi}{2}$]



(22) $(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{6},\frac{\sqrt{6}}{6})$

[提示：令甲乙丙三地的坐標爲A(1,0,0)、B$(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$、C$(x,y,z)$、球心O(0,0,0)如圖，可知C點爲$\overrightarrow{OC}$與球面的交點，其中$\overrightarrow{OC}//(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$，所以可令$\overrightarrow{OC}=t(\frac{3}{2},\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$，$t>0$，將C點代入$x^2+y^2+z^2=1\Rightarrow t=\frac{1}{\sqrt{3}}$]

(23) $8x-15y+31z-25=0$

(24) $x-y-2z=0$ 或 $7x-2y+z=0$

[提示：可假設包含 L 的平面方程式爲$(3x-y-4)+k(y+3z-2)=0$，再利用球心到切平面的距離=半徑，求 k]

(25) D

(26) (a)$32(1+\sqrt{2})$ (b)$\frac{6+4\sqrt{3}}{3}$