5.4

Propiedades de los autovalores de una matriz

Autovalor cero: *El escalar cero es un autovalor de una matriz A si y sólo si el determinante de A es cero. Por tanto, A es inversible si y sólo si ningún autovalor de A es cero.*

Potencias de autovalores: *Si λ es un autovalor de A y p es un entero positivo, λ^p es un autovalor de A^p y todo autovector de A es un autovector de A^p:*

Si $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ entonces $A^2\mathbf{x} = A(A\mathbf{x}) = A(\lambda\mathbf{x}) = \lambda A\mathbf{x} = \lambda\lambda\mathbf{x} = \lambda^2\mathbf{x}$; $A^3\mathbf{x} = A(A^2\mathbf{x}) = A(\lambda^2\mathbf{x}) = \lambda^2 A\mathbf{x} = \lambda^3\mathbf{x}$; y, en general, $A^p\mathbf{x} = \lambda^p\mathbf{x}$.

Si A tiene inversa, esta propiedad se cumple también en el caso de que p sea un entero negativo. En ese caso, los autovalores de A^{-1} son los inversos de los autovalores de A.

Matrices triangulares: *Los autovalores de una matriz triangular son los elementos de su diagonal.*

Propiedad del producto de autovalores: *El producto de los autovalores de A (incluidas las repeticiones) es igual al determinante de A.*

$$\lambda_1 \cdots \lambda_n = \det A.$$

Esto es debido a que, por un lado, el término independiente de un polinomio cualquiera de grado n con coeficiente principal igual a 1 es igual a $(-1)^n$ multiplicado por el producto de sus n raíces:

$$\begin{aligned} p(x) = x^n + (\text{términos de grado entre 1 y } n-1) + a_0 &= (x-\lambda_1)\cdots(x-\lambda_n) \\ \text{luego} \quad a_0 &= (-\lambda_1)\cdots(-\lambda_n) = (-1)^n \lambda_1 \cdots \lambda_n, \end{aligned}$$

mientras que, por otro lado, el polinomio característico de una matriz $n \times n$ tiene coeficiente principal igual a $(-1)^n$ y término independiente igual al determinante de la matriz, luego

$$\det A = \lambda_1 \cdots \lambda_n.$$

Este razonamiento general demuestra la propiedad del producto de los autovalores para todas las matrices. Sin embargo, si sólo estuviéramos interesados en demostrar esta propiedad en el caso especial de que la matriz A sea diagonalizable, se podría dar un razonamiento muy sencillo que demuestra esa propiedad para las matrices diagonalizables: Si $A = PDP^{-1}$ entonces

$$\det A = \det(PDP^{-1}) = \det(P)\det(D)\det(P^{-1}) = \det(P)\det(D)\frac{1}{\det(P)} = \det(D)$$

y en el caso, más especial todavía, de una matriz triangular, la demostración es lo más sencilla posible ya que en ese caso el determinante de la matriz es el producto de los elementos de la diagonal, y esos elementos de la diagonal son justamente los autovalores.

Versión de 15 de noviembre de 2016, 21:29 h.

Propiedad de la suma de autovalores: *La suma de los autovalores de A (incluidas las repeticiones) es igual a la traza de A.*

$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = \mathrm{Tr} A.$$

Esto es debido a que, por un lado, el coeficiente del término de grado $n-1$ de un polinomio mónico cualquiera de grado n, es igual a menos la suma de sus raíces:

$$\begin{aligned} p(x) &= (x-\lambda_1)\cdots(x-\lambda_n) \\ &= x^n + x^{n-1}(-\lambda_1) + \cdots + x^{n-1}(-\lambda_n) + (\text{términos de grado menor que } n-1) \\ &= x^n - (\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)x^{n-1} + (\text{términos de grado menor que } n-1), \end{aligned}$$

mientras que, por otro lado, el polinomio característico de una matriz $n \times n$ tiene coeficiente principal igual a $(-1)^n$ y coeficiente del término de grado $n-1$ igual a $(-1)^{n-1}$ multiplicado por la traza de la matriz.

Para el caso especial de que la matriz A sea diagonalizable, se puede dar un razonamiento muy sencillo que demuestra la propieda de la suma de los autovalores como consecuencia de la propiedad fundamental de la traza, que es la siguiente:

Propiedad fundamental de la traza: *Para cualesquiera matrices A y B tales que A se puede multiplicar por B y B se puede multiplicar por A (esto es, tales que cada una es del tamaño de la traspuesta de la otra) entonces ambos productos AB y BA son matrices cuadradas y tienen la misma traza:*

$$\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA).$$

Como consecuencia de esta propiedad se deduce la propiedad de la suma de autovalores para todas las matrices diagonalizables: si $A = PDP^{-1}$ entonces

$$\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(PDP^{-1}) = \mathrm{Tr}(P^{-1}PD) = \mathrm{Tr}(D) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n.$$

De nuevo, en el caso muy especial de una matriz triangular, la demostración de esta propiedad es trivial ya que en ese caso los elementos de la diagonal son justamente los autovalores y su suma es la traza de la matriz.

Autovalores de AB y de BA: *Si A es una matriz $m \times n$ y B es una matriz $n \times m$ entonces AB y BA tienen los mismos autovalores no nulos.*

Esto se debe a que si λ es un autovalor de AB y $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ es un autovector de λ, de la igualdad $AB\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ se deduce que $B\mathbf{x}$ sólo puede ser cero si $\lambda = 0$ (ya que en caso contrario $AB\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ no podría ser cero por ser $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ y por tanto $B\mathbf{x}$ tampoco podría ser cero). En conclusión, si λ es un autovalor no nulo de AB con autovector $\mathbf{x}$ entonces $B\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ y deducimos que λ es un autovalor de BA con autovector $B\mathbf{x}$ ya que: $BA(B\mathbf{x}) = B(AB\mathbf{x}) = B(\lambda\mathbf{x}) = \lambda B\mathbf{x}$.

Autovalores de una matriz partida en $k \times k$ bloques y triangular por bloques: Supongamos que A es una matriz $n \times n$ partida en $k \times k$ bloques (no necesariamente del mismo tamaño) y tal que los bloques de la diagonal, A_{ii} para $i = 1, \ldots k$, son cuadrados de tamaño $p_i \times p_i$ y los bloques debajo de la diagonal son todos matrices nulas,

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1k} \\ 0 & A_{22} & \ldots & A_{2k} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & A_{kk} \end{pmatrix}$$

Entonces la matriz característica de A, $A - \lambda I$ tiene la misma propiedad, por lo que su determinante es el producto de los determinantes de las matrices características de los bloques de la diagonal:

$$\det(A - \lambda I_n) = \det(A_{11} - \lambda I_{p_1}) \cdots \det(A_{kk} - \lambda I_{p_k}).$$

En otras palabras: *El polinomio característico de A es el producto de los polinomios característicos de las matrices diagonales A_{ii}.* De esto se deduce que el espectro de A es la unión de los espectros de las A_{ii} y que la multiplicidad algebraica de un autovalor cualquiera de A es la suma de sus multiplicidades como autovalor de cada una de las matrices A_{ii}.