TD

1 Mesures

Exercice 1. Donner une définition plus succincte d'une tribu.

Exercice 2. Prouver la Proposition 1.8 du cours.

Proposition. *Si (X, Σ_X, ν) est un espace mesuré, nous avons les propriétés suivantes :*

1. *Pour tout $A, B \in \Sigma_X$, $A \cap B = \emptyset$ implique $\nu(A \sqcup B) = \nu(A) + \nu(B)$;*
2. *Pour tout $A, B \in \Sigma_X$, $\nu(A \cup B) = \nu(A) + \nu(B) - \nu(A \cap B)$;*
3. *Pour tout $A, B \in \Sigma_X$, $\nu(A \cup B) \leq \nu(A) + \nu(B)$;*
4. *Pour tout $A, B \in \Sigma_X$, $\nu(A \cap B) \leq \min(\nu(A), \nu(B))$;*
5. *Pour tout $A, B \in \Sigma_X$, $\nu(A \cup B) \geq \max(\nu(A), \nu(B))$.*

Exercice 3. Prouver la Proposition 1.14 du cours.

Proposition. *Si $(\Omega, \Sigma_\Omega, \mu)$ est un espace probabilisé, nous avons :*

1. *Pour tout $A \in \Sigma_\Omega$, $\mu(\overline{A}) = 1 - \mu(A)$.*

2 Fonction simple

Exercice 4. Prouver le Théorème 2.4 du cours.

Théorème. *Soit f une fonction simple, alors f est une fonction mesurable.*

Exercice 5. Prouver le théorème suivant, qui est une version simplifiée du Théorème 2.5.

Théorème. *Soit une fonction mesurable positive $f : X \to \mathbb{R}^+$, alors il existe une séquence de fonctions simples $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ telle que*

$$\text{pour tout } x \in X, \quad \text{nous avons} \quad \lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x).$$

3 Intégrale de Lebesgue

Exercice 6. Prouver le théorème suivant, qui est une version simplifiée du Théorème 2.10.

Théorème. *Soient un espace mesuré (X, Σ_X, ν) et $f : X \to \mathbb{R}^+$ et $g : X \to \mathbb{R}^+$ des fonctions intégrables positives, alors*

1. *pour tout $c \geq 0$,*
$$\int_X (c \cdot f(x))\, d\nu(x) = c \cdot \int_X f(x) d\nu(x),$$
2. *nous avons*
$$\int_X (f(x) + g(x))\, d\nu(x) = \int_X f(x) d\nu(x) + \int_X g(x) d\nu(x),$$
3. *nous avons*
$$\int_X \mathbb{1}[x \in A] f(x) d\nu(x) = \int_A f(x) d\nu(x).$$