

# TD

## 1 Mesures

**Exercice 1.** Donner une définition plus succincte d'une tribu.

**Exercice 2.** Prouver la Proposition 1.8 du cours.

**Proposition.** Si  $(X, \Sigma_X, \nu)$  est un espace mesuré où  $\nu : \Sigma_X \rightarrow \mathbb{R}^+$ , nous avons les propriétés suivantes :

1. Pour tout  $A, B \in \Sigma_X$ ,  $A \cap B = \emptyset$  implique  $\nu(A \sqcup B) = \nu(A) + \nu(B)$  ;
2. Pour tout  $A, B \in \Sigma_X$ ,  $\nu(A \cup B) = \nu(A) + \nu(B) - \nu(A \cap B)$  ;
3. Pour tout  $A, B \in \Sigma_X$ ,  $\nu(A \cup B) \leq \nu(A) + \nu(B)$  ;
4. Pour tout  $A, B \in \Sigma_X$ ,  $\nu(A \cap B) \leq \min(\nu(A), \nu(B))$  ;
5. Pour tout  $A, B \in \Sigma_X$ ,  $\nu(A \cup B) \geq \max(\nu(A), \nu(B))$ .

**Exercice 3.** Prouver la Proposition 1.14 du cours.

**Proposition.** Si  $(\Omega, \Sigma_\Omega, \mu)$  est un espace probabilisé, nous avons :

1. Pour tout  $A \in \Sigma_\Omega$ ,  $\mu(\bar{A}) = 1 - \mu(A)$ .

## 2 Fonction simple

**Exercice 4.** Prouver le Théorème 2.4 du cours.

**Théorème.** Soient un espace mesurable  $(X, \Sigma_X)$  et  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction simple, alors  $f$  est une fonction mesurable.

**Exercice 5.** Prouver le théorème suivant, qui est une version simplifiée du Théorème 2.5.

**Théorème.** Soient un espace mesurable  $(X, \Sigma_X)$  et  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^+$  une fonction mesurable positive, alors il existe une séquence de fonctions simples  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  telle que

$$\text{pour tout } x \in X, \quad \text{nous avons} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x).$$

## 3 Intégrale de Lebesgue

**Exercice 6.** Prouver le théorème suivant, qui est une version simplifiée du Théorème 2.10.

**Théorème.** Soient un espace mesuré  $(X, \Sigma_X, \nu)$  et  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^+$  et  $g : X \rightarrow \mathbb{R}^+$  des fonctions intégrables positives, alors

1. pour tout  $c \geq 0$ ,

$$\int_X (c \cdot f(x)) d\nu(x) = c \cdot \int_X f(x) d\nu(x),$$

2. nous avons

$$\int_X (f(x) + g(x)) d\nu(x) = \int_X f(x) d\nu(x) + \int_X g(x) d\nu(x),$$

3. pour tout  $A \in \Sigma_X$ ,

$$\int_X \mathbb{1}[x \in A] f(x) d\nu(x) = \int_A f(x) d\nu(x).$$