TD

1 Mesures

Exercice 1. Donner une définition plus succincte d'une tribu.

Exercice 2. Prouver la Proposition 1.8 du cours.

Proposition. *Si (X, Σ_X, ν) est un espace mesuré où $\nu : \Sigma_X \to \mathbb{R}^+$, nous avons les propriétés suivantes :*

1. *Pour tout $A, B \in \Sigma_X$, $A \cap B = \emptyset$ implique $\nu(A \sqcup B) = \nu(A) + \nu(B)$;*
2. *Pour tout $A, B \in \Sigma_X$, $\nu(A \cup B) = \nu(A) + \nu(B) - \nu(A \cap B)$;*
3. *Pour tout $A, B \in \Sigma_X$, $\nu(A \cup B) \leq \nu(A) + \nu(B)$;*
4. *Pour tout $A, B \in \Sigma_X$, $\nu(A \cap B) \leq \min(\nu(A), \nu(B))$;*
5. *Pour tout $A, B \in \Sigma_X$, $\nu(A \cup B) \geq \max(\nu(A), \nu(B))$.*

Exercice 3. Prouver la Proposition 1.14 du cours.

Proposition. *Si $(\Omega, \Sigma_\Omega, \mu)$ est un espace probabilisé, nous avons :*

1. *Pour tout $A \in \Sigma_\Omega$, $\mu(\overline{A}) = 1 - \mu(A)$.*

2 Fonction simple

Exercice 4. Prouver le Théorème 2.4 du cours.

Théorème. *Soient un espace mesurable (X, Σ_X) et $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction simple, alors f est une fonction mesurable.*

Exercice 5. Prouver le théorème suivant, qui est une version simplifiée du Théorème 2.5.

Théorème. *Soient un espace mesurable (X, Σ_X) et $f : X \to \mathbb{R}^+$ une fonction mesurable positive, alors il existe une séquence de fonctions simples $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ telle que*

$$\text{pour tout } x \in X, \quad \text{nous avons} \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

3 Intégrale de Lebesgue

Exercice 6. Prouver le théorème suivant, qui est une version simplifiée du Théorème 2.10.

Théorème. *Soient un espace mesuré (X, Σ_X, ν) et $f : X \to \mathbb{R}^+$ et $g : X \to \mathbb{R}^+$ des fonctions intégrables positives, alors*

1. *pour tout $c \geq 0$,*
$$\int_X (c \cdot f(x))\, d\nu(x) = c \cdot \int_X f(x) d\nu(x),$$
2. *nous avons*
$$\int_X (f(x) + g(x))\, d\nu(x) = \int_X f(x) d\nu(x) + \int_X g(x) d\nu(x),$$
3. *pour tout $A \in \Sigma_X$,*
$$\int_X \mathbb{1}[x \in A] f(x) d\nu(x) = \int_A f(x) d\nu(x).$$

4 Lois

Exercice 7. Prouver Propositions 4.14 et 4.15.

Proposition. *Soit $T \sim \mathcal{G}(p)$ avec $p \in [0,1]$. Nous avons*

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \underset{T\sim\mathcal{G}(p)}{\mathbb{P}}[T > k] = (1-p)^k.$$

Proposition. *Soit $T \sim \mathcal{G}(p)$ avec $p \in [0,1]$. Nous avons*

$$\forall s,t \in \mathbb{N}, \quad \underset{T\sim\mathcal{G}(p)}{\mathbb{P}}[T > s+t \mid T > s] = \underset{T\sim\mathcal{G}(p)}{\mathbb{P}}[T > t].$$

Exercice 8. Prouver Propositions 4.23 et 4.24.

Proposition. *Soit $T \sim \mathcal{E}(\lambda)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Nous avons*

$$\forall s \in \mathbb{R}^+, \quad \underset{T\sim\mathcal{E}(\lambda)}{\mathbb{P}}[T > s] = e^{-\lambda s}.$$

Proposition. *Soit $T \sim \mathcal{E}(\lambda)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Nous avons*

$$\forall s,t \in \mathbb{R}^+, \quad \underset{T\sim\mathcal{E}(\lambda)}{\mathbb{P}}[T > s+t \mid T > s] = \underset{T\sim\mathcal{E}(\lambda)}{\mathbb{P}}[T > t].$$

5 Simulation de lois

Exercice 9. Soit un espace probabilisé $([-1,+1]^2, \Sigma_{[-1,+1]^2}, \mathcal{U})$, où $\mathcal{U}$ est une distribution uniforme sur $[-1,+1]^2$, et soit $x \sim \mathcal{A}$ un point retourné par l'algorithme générant un point dans le disque unité D par la méthode du rejet. Développer l'expression

$$\underset{x\sim\mathcal{A}}{\mathbb{P}}[x \in A], \text{ où } A \in \Sigma_{[-1,+1]^2} \text{ t.q. } A \subseteq D,$$

afin d'exprimer les probabilités en fonction de la distribution $\mathcal{U}$.

Exercice 10. Montrer que l'algorithme du rejet généralisé génère selon la distribution p.

6 Apprentissage statistique

Exercice 11. Nous avons vu le modèle linéaire simple ; pour rappel, il est défini de la manière suivante :

$$h(\mathbf{x}) = \theta^0 + \theta^1 x_i^1 + \cdots + \theta^p x_i^p.$$

Proposer une amélioration du modèle pour le rendre non linéaire.