

---

Московский Физико-Технический Институт  
(государственный университет)

Лабораторная работа по курсу общей физики № 4.1.1

---

# Изучение центрированных оптических систем

---

Автор:  
Филиппенко Павел Б01-001



Долгопрудный, 2021

## Теоретическая справка

### Определение фокусных расстояний положительных и отрицательных линз и положений главных плоскостей сложной оптической системы

Оптическую систему называют **центрированной**, если центры всех поверхностей лежат на одной прямой, которую называют **главной оптической осью системы**.

Световые пучки называются **гомоцентрическими**, если, выйдя из одной точки и пройдя оптическую систему, пучки или их продолжения снова сходятся в одной точке.

Идеальной оптической системой называют систему, в которой сохраняется **гомоцентричность** пучков и изображение геометрически подобно предмету

Общий вид сложной оптической системы изображен на рис. 1.

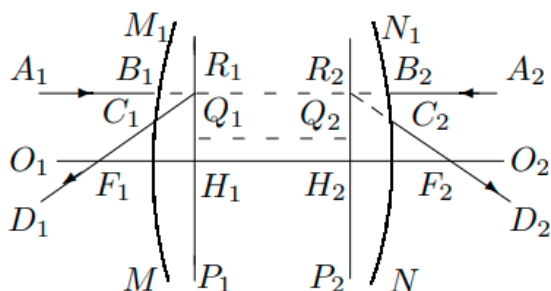


Рис. 1: сложная оптическая система

Пусть  $MM_1$  и  $NN_1$  – крайние поверхности, ограничивающие оптическую систему, а  $O_1O_2$  – главная оптическая ось. Точку  $F_2$  называют **задним фокусом системы** (фокусом в пространстве изображений). Плоскость, перпендикулярная  $O_1O_2$  и проходящая через точку  $F_2$ , называется **задней фокальной плоскостью**. Точку  $F_1$  называют **передним фокусом системы** (фокусом в пространстве предметов).

Продолжим теперь  $C_1D_1$  и  $C_2D_2$  до пересечения с продолжениями  $A_1B_1$  и  $A_2B_2$  и отметим точки пересечения  $R_1$  и  $R_2$ . Плоскости  $P_1$  и  $P_2$  называются **главными плоскостями**, а точки

$H_1$  и  $H_2$  – **главными точками системы**. Расстояния от главных точек до фокусов называются **фокусными расстояниями**:  $f_1 = H_1F_1$ ,  $f_2 = H_2F_2$ . В том случае, когда с обеих сторон системы находится одна и та же среда (например, воздух),  $f_1 = f_2 = f$ .

Соотношения между величинами при построении изображения в толстой линзе удовлетворяют уравнению:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} = \frac{1}{f} \quad (1)$$

### Способы определения фокусного расстояния тонкой положительной линзы

1. Исходя из формулы тонкой линзы (1), полагая  $\delta = 0$ .
2. Пусть расстояние между предметом и экраном превышает  $4f$ . При этом всегда найдутся два таких положения линзы, при которых на экране получают отчётливые изображения предмета (в одном случае уменьшенное, в другом – увеличенное).

Из соображений симметрии  $a_1 = a'_2$  и  $a'_1 = a_2$ . Тогда путем математических преобразований можно получить:

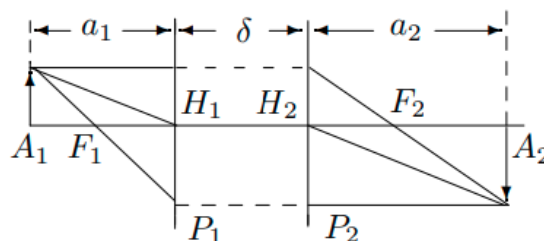


Рис. 2: Построение изображения в сложной оптической системе

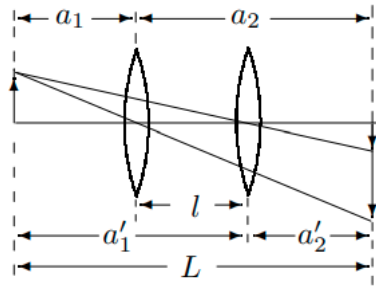


Рис. 3: Нахождение фокусов тонкой собирающей линзы

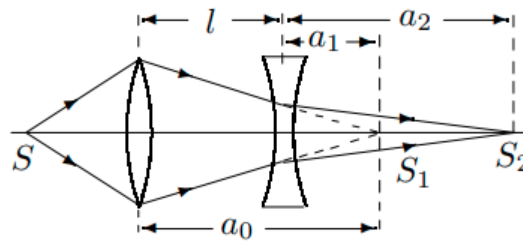


Рис. 4: Изображение в рассеивающей линзе

$$a_1 = \frac{L - l}{2}; \quad a_2 = \frac{L + l}{2} \Rightarrow$$

откуда с помощью (1) получаем:

$$f = \frac{L^2 - l^2}{4L} \quad (2)$$

3. Фокусное расстояние тонкой положительной линзы можно определить с помощью зрительной трубы, настроенной на бесконечность, то есть на параллельный пучок лучей.

### Способы определения фокусного расстояния тонкой отрицательной линзы

1. С помощью вспомогательной собирающей линзы получаем действительное изображение и используем формулу тонкой линзы.
2. С помощью зрительной трубы, установленной на бесконечность.

### Определение фокусного расстояния и положения главных плоскостей сложной оптической системы

Фокусное расстояние толстой положительной линзы определяют по методу Аббе рис. 5.

Линейные увеличения для разных положений объекта:

$$\Gamma_1 = \frac{y_1}{y} = \frac{f}{x_1}; \quad \Gamma_2 = \frac{y_2}{y} = \frac{f}{x_2}$$

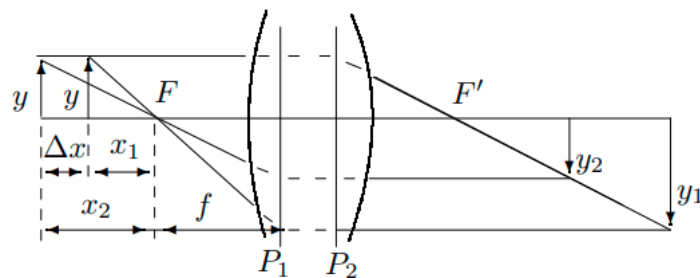


Рис. 5: метод Аббе

тогда нетрудно получить соотношение:

$$f = \frac{\Delta x}{1/\Gamma_1 - 1/\Gamma_2} \quad (3)$$

Для нахождения главных плоскостей системы недостаточно знать фокусное расстояние, нужно определить ещё положения главных фокусов. Это можно сделать при помощи зрительной трубы, настроенной на бесконечность.

Теоретически фокусное расстояние  $f_0$  сложной системы, состоящей из двух тонких положительных линз, можно рассчитать, если известны фокусные расстояния каждой линзы и расстояние между их центрами  $l_{12}$ :

$$\frac{1}{f_0} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{|l_{12}|}{f_1 f_2} \quad (4)$$

## Недостатки (абберации) реальных оптических систем

В идеальных оптических системах лучи, вышедшие из одной точки объекта, пересекаются в одной и той же точке изображения независимо от угла испускания и от длины волны света. В реальных системах – из-за несовершенства линз – такая зависимость наблюдается. Основными погрешностями линз являются сферическая и хроматическая абберации.

### Сферическая абберация

Сферическая абберация возникает при преломлении широких (не параксиальных) пучков свет а на сферических поверхностях линз.

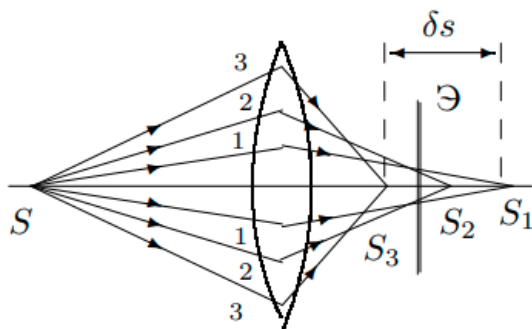


Рис. 6: Сферическая абберация

Сферическую абберацию характеризуют с помощью так называемой **продольной абберации**  $\delta s$  равной расстоянию между точками пересечения крайних и центральных лучей с главной оптической осью.

Для лучей, проходящих на расстоянии  $h$  от центра линзы, расстояние  $s$  выражается соотношением:

$$s(h) = \frac{R}{n-1} \left( 1 - \frac{n^2 h^2}{2R^2} \right) \quad (5)$$

**Характеристической кривой** сферической абберации называют зависимость

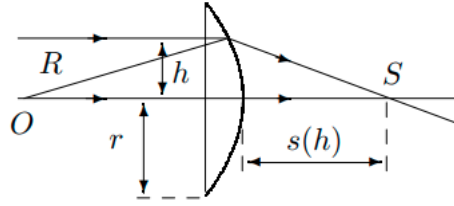


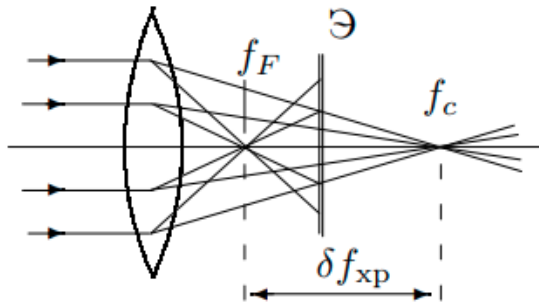
Рис. 7: Сферическая абберация плосковыпуклой линзы

$$\delta s(h) = s(h) - s(0) = -\frac{n^2 h^2}{2(n-1)R} = -\frac{1}{2} \left( \frac{n}{n-1} \right)^2 \left( \frac{h}{f} \right)^2 f \quad (6)$$

При  $h = r$  ( $r$  – радиус линзы) формула (6) определяет продольную сферическую абберацию линзы.

## Хроматическая абберация

Хроматическая абберация (зависимость фокусного расстояния линзы от длин волны) возникает вследствие дисперсии показателя преломления стёкол.



Хроматическую абберацию принято характеризовать разностью фокусных расстояний для двух характерных спектральных линий водорода, расположенных в крайних частях видимой области спектра:  $\lambda_F = 486.1$  нм (голубая линия  $F$  водорода),  $\lambda_C = 656.3$  (красная линия  $C$  водорода):

$$\delta f_{xp} = f_F - f_C \quad (7)$$

Для характеристики дисперсионных свойств стёкол часто пользуются так называемым **коэффициентом дисперсии**, или **числом Аббе**:

$$\nu = \frac{n_D - 1}{n_F - n_C} \quad (8)$$

где  $n_F$  и  $n_C$  – показатели преломления для линий  $F$  и  $C$  водорода, а  $n_D$  показатель преломления для жёлтой линии  $D$  натрия  $\lambda_D = 589.3$  нм (среднее значение длины волны жёлтого дублета натрия). Можно выразить продольную хроматическую абберацию линзы через число Аббе:

$$\delta f_{xp} = -\frac{n_F - n_C}{n_D - 1} f_D = -\frac{1}{\nu} f_D \quad (9)$$

## Проведение эксперимента и обработка данных

1. Настроим зрительную трубу на бесконечность и отцентрируем все компоненты оптической схемы.

2. Отберем из представленных линз положительные путем наблюдения действительно-го изображения от лампы на потолке, на глаз определим их фокусные расстояния.

Из представленных линз собирающими являются линзы № 1, 2 и 3, причем  $F_1 \sim 10\text{см}$ ,  $F_2 \sim 10\text{см}$ ,  $F_3 = 0.8\text{см}$ .

3. Измерим фокусное расстояние линзы № 1 методом Аббе.

Используя метод Аббе фокусное расстояние можно посчитать следующим образом:

$$f = \frac{\Delta x}{\Delta(y/y')} = -\frac{\Delta x'}{\Delta(y'/y)} \quad (10)$$

где  $\Delta x$  – смещение предмета,  $\Delta x'$  – смещение изображения,  $\Delta(y'/y)$  – приращение увеличения,  $\Delta(y/y')$  – приращение величины, обратной увеличению.

$$\Delta\left(\frac{y'}{y}\right) = \frac{y'_2}{y} - \frac{y'_1}{y} \quad (11)$$

Погрешности величин посчитаем по формулам косвенных погрешностей:

$$\sigma_i = \sqrt{\varepsilon_{y'_i}^2 + \varepsilon_y^2} \cdot \frac{y'_i}{y}; \quad \sigma_{\Delta(y'/y)} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \quad (12)$$

тогда погрешность фокусного расстояния:

$$\sigma_f = \sqrt{\varepsilon_{\Delta x}^2 + \varepsilon_{\Delta(y'/y)}^2} \cdot f \quad (13)$$

Результаты эксперимента:

$y = 20.0 \pm 0.5$  мм – размер предмета

$a_1 = 27.70 \pm 0.05$  см – расстояние от линзы до предмета в первом случае

$a_2 = 45.50 \pm 0.05$  см – расстояние от линзы до предмета во втором случае

$b_1 = 17.00 \pm 0.05$  см – расстояние от линзы до экрана в первом случае

$b_2 = 13.40 \pm 0.05$  см – расстояние от линзы до экрана во втором случае

$y_1 = 14.0 \pm 0.5$  мм – размер изображения в первом случае

$y_2 = 6.5 \pm 0.5$  мм – размер изображения во втором случае

тогда получим, что

$\Delta x = 17.80 \pm 0.05$  см – смещение предмета

$\Delta x' = 3.60 \pm 0.05$  см – смещение экрана

$$\Delta\left(\frac{y'}{y}\right) = \frac{6.5\text{мм}}{20\text{мм}} - \frac{14\text{мм}}{20\text{мм}} = -0.375 \pm 0.04$$

$$f = \frac{3.6}{0.375} = 9.6 \pm 1.03 \text{ см}$$

Считая фокусное расстояние через  $\Delta x$  получим:

$$f = 10.8 \pm 0.26 \text{ см}$$

4. Найдем фокусное расстояние тонкой отрицательной линзы. Для того, чтобы получить на экране действительное изображение воспользуемся вспомогательной положительной линзой рис. 4.

Результаты измерений:

$$\begin{aligned} a_0 &= 26.00 \pm 0.05 \text{ см} \\ l &= 15.00 \pm 0.05 \text{ см} \\ a_2 &= 59.10 \pm 0.05 \text{ см} \\ a_1 &= a_0 - l = 11.00 \pm 0.05 \text{ см} \end{aligned}$$

Определим фокусное расстояние, используя формулу тонкой линзы

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1} \Rightarrow f = \frac{a_1 a_2}{a_1 - a_2} \quad (14)$$

Вычисление косвенных погрешностей: совершенно очевидно, что для некоторой ненулевой величины  $x$  выполняется  $\varepsilon_{1/x} = \varepsilon_x \Rightarrow \sigma_{1/x} = \frac{\varepsilon_x}{x}$ . Тогда

$$\sigma_{1/f} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{a_1}}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{a_2}}{a_2}\right)^2} \Rightarrow \sigma_f = \varepsilon_{1/f} \cdot f \quad (15)$$

$$f = \frac{11 \cdot 59.2}{11 - 59.1} \approx -13.52 \pm 0.85 \text{ см}$$

5. Измерим фокусные расстояния линз с помощью зрительной трубы.

Полученные величины:

$$\begin{aligned} f_{11} &= 13.00 \pm 0.03 \text{ см} - \text{фокусное расстояние линзы № 1 с одной стороны} \\ f_{12} &= 11.30 \pm 0.03 \text{ см} - \text{фокусное расстояние линзы № 1 с другой стороны} \\ f_{21} &= 14.25 \pm 0.03 \text{ см} - \text{фокусное расстояние линзы № 2 с одной стороны} \\ f_{22} &= 14.50 \pm 0.03 \text{ см} - \text{фокусное расстояние линзы № 2 с другой стороны} \\ |f_{31}| &= 12.50 \pm 0.05 \text{ см} - \text{фокусное расстояние рассеивающей линзы с одной стороны} \\ |f_{32}| &= 13.25 \pm 0.05 \text{ см} - \text{фокусное расстояние рассеивающей линзы с другой стороны} \end{aligned}$$

По результатам измерений можно установить, можно ли считать данные линзы тонкими в рамках текущего эксперимента.

Для линзы № 1:  $f_{11} - f_{12} = 1.70 \pm 0.03 \sim 2 \text{ см} \Rightarrow$  данную линзу нельзя считать тонкой.  
 Для линзы № 2  $f_{22} - f_{12} = 0.25 \pm 0.03 \text{ см} \Rightarrow$  данную линзу можно считать тонкой.  
 Для линзы № 3  $|f_{32}| - |f_{31}| = 0.75 \pm 0.05 \text{ см} \Rightarrow$  данную линзу можно считать тонкой.

6. Определение фокусного расстояния и главных плоскостей сложной оптической системы. Соберем установку, изображенную на рисунке 5. Запишем параметры установки:

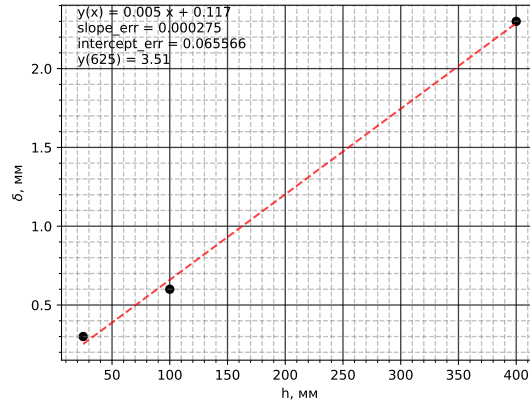


Рис. 9: График сферической аберрации

$$\begin{aligned}
 l_{12} &= 9.20 \pm 0.05 \text{ см} - \text{расстояние между линзами} \\
 a_1 &= 6.45 \pm 0.05 \text{ см} - \text{расстояние от } \mathcal{L}_1 \text{ до предмета в первом случае} \\
 b_1 &= 62.30 \pm 0.05 \text{ см} - \text{расстояние от } \mathcal{L}_2 \text{ до экрана в первом случае} \\
 a_2 &= 8.15 \pm 0.05 \text{ см} - \text{расстояние от } \mathcal{L}_1 \text{ до предмета во втором случае} \\
 b_2 &= 29.60 \pm 0.05 \text{ см} - \text{расстояние от } \mathcal{L}_2 \text{ до экрана во втором случае} \\
 y'_1 &= 26.00 \pm 0.05 \text{ см} - \text{размер изображения в первом случае} \\
 y'_2 &= 5.90 \pm 0.05 \text{ см} - \text{размер изображения во втором случае}
 \end{aligned}$$

Для расчета фокусного расстояния сложной системы воспользуемся формулой (3).

$$\begin{aligned}
 \Gamma_1 &= \frac{y'_1}{y} = 13.00 \pm 0.33 \\
 \Gamma_2 &= \frac{y'_2}{y} = 2.95 \pm 0.08 \\
 \Delta x &= a_2 - a_1 = 1.70 \pm 0.05 \text{ см}
 \end{aligned}$$

$$f_{\text{эксп}} = \frac{1.7}{\frac{1}{2.95} - \frac{1}{13}} \approx 6.49 \pm 0.29 \text{ см}$$

$$f_{\text{теор}} = \frac{1}{\frac{1}{9.6} + \frac{1}{14.25} - \frac{9.2}{9.6 \cdot 14.25}} \approx 9.34 \pm 0.14 \text{ см}$$

Теоретическое значение фокусного расстояния найдем по формуле (4).

Найдем положение главных фокусов системы с помощью оптической трубы.

$$\begin{aligned}
 F_{01} &= 41 \pm 0.5 \text{ мм} \\
 F_{02} &= 38 \pm 0.5 \text{ мм}
 \end{aligned}$$

7. Изучение сферической аберрации. Нанесем на график 9 зависимость  $s(h^2)$ , где  $h$  – диаметр диафрагмы. Экстраполируя график к  $h^2 = 625$  получим

$$\delta s(r) = 3.51 \pm 0.2 \text{ мм}$$

Откуда найдем показатель преломления  $n = 1.5 \pm 0.1$ .



8. Изучение хроматической аберрации. Используя зрительную трубу и светофильтры измерим фокусные расстояния линзы на длинах волн  $\lambda_F = 486.1$  нм (голубая линия  $F$  водорода),  $\lambda_C = 656.3$  (красная линия  $C$  водорода). Используя формулу (7), определим величину хроматической аберрации.

$$\delta f_{xp} = 0.3 \pm 0.1 \text{ мм}$$

## Вывод

В проделанной работе мы изучили несколько способов определения фокусных расстояний тонки линз, способ нахождения фокусных расстояний и главных плоскостей сложной оптической системы, наблюдали эффекты сферической и хроматической аберрации.

Кроме того, мы убедились, что не все из предложенных линз можно считать тонкими в рамках данной работы.

В результате проведения эксперимента мы убедились, что определение фокусных расстояний линз с помощью оптической трубы дает более точную величину.

В опыте по измерению фокусных расстояний сложной оптической системы величина, полученная экспериментальным путем не совпала с теоретическим расчетом. Ошибки связаны предположительно с неточным измерением величин, грубой настройкой, а так же с тем фактом, что линзу № 1 нельзя считать тонкой в рамках данного эксперимента.