
STATISTIK DER KERNZERFÄLLE

Physikalisches Praktikum B
am
Institut für Kernphysik

22.06.2015



Studenten

Yushi Nishida
Pavlo Ignatiev

Betreuerin

Rosa-Belle Gerst

Inhaltsverzeichnis

1 Versuchsvorbereitung	2
1.1 Halbwertszeit	2
1.2 Wahrscheinlichkeit	2
1.3 Verteilungen	2
1.3.1 Binomialverteilung	2
1.3.2 Zerfallswahrscheinlichkeit	3
1.3.3 Poissonverteilung	4
1.3.4 Gaußverteilung	4
1.3.5 Satz von Moivre-Laplace	5
1.3.6 Varianz	5
1.3.7 Intervallverteilung	5
1.4 Totzeit eines Detektors	6
1.5 Zwei-Präparate-Methode	6
1.6 χ^2 -Test	8
1.7 χ^2 -Test und die Totzeit	9
2 Versuchsaufbau	11
2.1 Funktionsweise eines Geiger-Müller-Zählrohrs	12
3 Versuchsdurchführung & Messung	13
3.1 Messungen mit dem Computer	13
3.2 Messungen mit dem Zähler	13
4 Auswertung	14
4.1 Aufgaben für den Versuchstag	14
4.2 Poisson-Verteilung	14
4.3 Gauß-Verteilung	18
4.4 Intervall-Verteilung	20
4.5 χ^2 -Test	23
4.6 Totzeit des Zählrohrs	27
4.6.1 520V	27
4.6.2 570V	28
4.6.3 620V	28

1 Versuchsvorbereitung

1.1 Halbwertszeit

Wir benutzen ^{137}Cs als Strahlungsquelle mit Halbwertszeit von ca. $T_{1/2} = 30,17$ Jahren. ^{137}Cs ist ein β -Strahler:



Der entstehende Bariumkern ist metastabil, und durch Emission eines γ -Quanten geht er in einen stabilen Zustand über mit Halbwertszeit von $T_{1/2} = 2,55$ Minuten¹:



In unserem Versuch detektieren wir die emittierte γ -Strahlung.

1.2 Wahrscheinlichkeit

Die Wahrscheinlichkeitsfunktion $f(x)$ gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass die von uns festgelegte Zufallsvariable X den Wert x annimmt. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung für eine *diskrete* Zufallsvariable ist dann:

$$F(x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i) \quad (3)$$

Für eine *kontinuierliche* Zufallsvariable beträgt sie

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(y) dy, \quad (4)$$

wobei $f(y)$ die sog. Wahrscheinlichkeitsdichte ist, die im diskreten Fall der Wahrscheinlichkeitsfunktion entspricht. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass X einen Wert im gegebenen Bereich annimmt.

1.3 Verteilungen

1.3.1 Binomialverteilung

Dies ist eine diskrete Verteilung mit nur zwei möglichen Ereignissen A und B , die sich gegenseitig ausschließen. Die Wahrscheinlichkeiten für das Eintreten dieser Ereignisse hängen daher

¹<http://www.environmental-studies.de/Radioökologie/caesium/Cs-137-radiocaesium.html>

zusammen und betragen

$$P(A) = p \quad (5)$$

$$P(B) = 1 - p \quad (6)$$

Bei N -maliger Wiederholung des Zufallsexperimentes ist es u. a. von unserem Interesse, mit welcher Wahrscheinlichkeit $P(N, n, p)$ ein und dasselbe Ereignis, z. B. A , n mal auftritt. Für eine festgelegte Reihenfolge, wenn z. B. die ersten n mal das Ereignis A auftritt und dann die übrigen ($N - n$) mal das Ereignis B , beträgt die Wahrscheinlichkeit

$$P_0(N, n, p) = p^n \cdot (1 - p)^{N-n} \quad (7)$$

Die Wahrscheinlichkeit wird größer, wenn wir alle möglichen Reihenfolgen mit einem Binomialkoeffizienten berücksichtigen, um den Einfluss der Reihenfolge auf das Ergebnis zu eliminieren:

$$P(N, n, p) = \binom{N}{n} \cdot p^n \cdot (1 - p)^{N-n} = \binom{N}{n} \cdot P_0 \quad (8)$$

Der Erwartungswert $\lambda = \sum_{i=1}^N x_i p_i$ und die Varianz $\sigma^2 = \bar{X}^2 - \bar{X}^2$ dieser Verteilung betragen dann

$$\lambda = N \cdot p, \quad \sigma^2 = Np \cdot (1 - p) \quad (9)$$

1.3.2 Zerfallswahrscheinlichkeit

Ein instabiler Atomkern mit einer Halbwertszeit $T_{1/2}$ zerfällt innerhalb von einer Zeitspanne $\Delta t \ll T_{1/2}$ mit Wahrscheinlichkeit

$$\omega = \alpha \Delta t \quad (10)$$

α bezeichnet hierbei die sog. *Zerfallswahrscheinlichkeit(-sdichte)*. Das Komplement von ω ist dann die Wahrscheinlichkeit für das Nichtzerfallen des Kerns:

$$1 - \omega = 1 - \alpha \Delta t = \left(1 - \alpha \frac{\Delta t}{k}\right) \dots \left(1 - \alpha \frac{\Delta t}{k}\right) = \left(1 - \alpha \frac{\Delta t}{k}\right)^k \quad (11)$$

Im letzten Schritt haben wir das gesamte Intervall Δt in k gleichgroße Abschnitte unterteilt, sodass die Faktoren die einzelnen Wahrscheinlichkeiten für das Nichtzerfallen auf den Abschnitten $\frac{\Delta t}{k}$ sind, die multipliziert die Gesamtwahrscheinlichkeit ergeben. Dieser Ausdruck ist nur

für infinitesimale Δt exakt; wir betrachten daher den Grenzwert

$$1 - \omega = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 - \alpha \frac{\Delta t}{k}\right)^k = e^{-\alpha t} \quad (12)$$

Daraus folgt die Wahrscheinlichkeit für das Zerfallen des Kerns: $\omega = 1 - e^{-\alpha t}$.

Mit bekannter Halbwertszeit $T_{1/2}$ können wir nun die Zerfallswahrscheinlichkeit(-sdichte) α berechnen:

$$\omega(T_{1/2}) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha = -\frac{\ln(1/2)}{T_{1/2}} \quad (13)$$

Für das Isotop ^{137}Cs mit $T_{1/2} \approx 30.17 \text{ y} \approx 9.5 \cdot 10^8 \text{ s}$ erwarten wir ein α in Höhe von

$$\alpha = -\frac{\ln(1/2)}{T_{1/2}} = -\frac{-0.693}{9.5 \cdot 10^8 \text{ s}} = 7.3 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1} \quad (14)$$

1.3.3 Poissonverteilung

Die Poissonverteilung ist ein Grenzwert der Binomialverteilung für eine sehr große Anzahl der Zufallsexperimenten und den Fall, dass die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines Einzereignisses sehr klein wird:

$$P = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ p \rightarrow 0}} \binom{N}{n} \cdot p^n \cdot (1-p)^{N-n} = \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} \quad (15)$$

Die Poissonverteilung ist gültig, solange der Erwartungswert λ konstant und unter 10 bleibt. Bemerkenswert ist, dass bei dieser Verteilung der Erwartungswert $m = \lambda$ und die Varianz $\sigma^2 = \lambda$ gleich sind.

1.3.4 Gaußverteilung

Wird der Erwartungswert groß, so geht die Poissonverteilung in die Gaußverteilung über:

$$P = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\lambda)^2}{2\sigma^2}} \quad (16)$$

(17)

Beachten wir an dieser Stelle, dass $\lim_{p \rightarrow 0} \sigma^2 = \lim_{p \rightarrow 0} \lambda(1-p) = \lambda$, so ergibt sich für die Gaußverteilung der Zusammenhang

$$P = \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}} e^{-\frac{(x-\lambda)^2}{2\lambda}} \quad (18)$$

1.3.5 Satz von Moivre-Laplace

Dieser Satz liefert eine direkte Verbindung zwischen der Binomialverteilung und der Gaußverteilung für eine sehr große Zahl N der Zufallsexperimente und die Einzelwahrscheinlichkeit p zwischen 0 und 1:

$$\lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ 0 < p < 1}} \binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n} = \frac{1}{\sqrt{2\pi N p(1-p)}} \cdot e^{-\frac{(x-Np)^2}{2Np(1-p)}} \quad (19)$$

Der Satz gilt näherungsweise für $Np(1-p) \gtrsim 9$.

1.3.6 Varianz

Die Varianz ist ein Maß für die Streuung der Messwerte um den tatsächlichen oder gemessenen Erwartungswert. Dabei kann der wahre Erwartungswert λ bekannt sein oder aus den Messwerten abgeschätzt werden. Falls der Mittelwert der Grundgesamtheit unbekannt ist und geschätzt werden muss, berechnen wir die sog. *korrigierte Stichprobenvarianz*:

$$\sigma^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \quad (20)$$

Ist λ bekannt, so brauchen wir eine *unkorrigierte Stichprobenvarianz*:

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \quad (21)$$

Bei der Binomialverteilung ist die Varianz allgemein durch den Verschiebungssatz gegeben:

$$\sigma^2 = \bar{X}^2 - \bar{X}^2 = Np(1-p) \quad (22)$$

1.3.7 Intervallverteilung

Wir untersuchen nun die Zeitdifferenzen zwischen den Zerfällen zweier Kerne. Hierfür betrachten wir zwei Wahrscheinlichkeiten:

- In der Zeit Δt zwischen zwei Zerfällen findet kein Zerfall statt, $n = 0$, und daher beträgt gemäß der Poissonverteilung die Wahrscheinlichkeit für den Zerfall $W_1 = e^{-\lambda}$
- Nach dieser Zeit zerfällt innerhalb der Zeit dt ein Kern mit Wahrscheinlichkeit $W_2 = a \cdot dt$, mit a der Zerfallswahrscheinlichkeit für unser Ensemble von Kernen. Die Gesamtwahrscheinlichkeit dafür, dass die zeitliche Differenz Δt ist, ist das Produkt von den beiden:

$$W = W_1 \cdot W_2 = e^{-\lambda} a \cdot dt \quad (23)$$

Der Mittelwert beträgt dann $\lambda = a \cdot t$ und die Wahrscheinlichkeit wird zu

$$W = e^{-at} a \cdot dt \quad (24)$$

Ableitung der Wahrscheinlichkeit ist dann die Wahrscheinlichkeitsdichte:

$$\frac{dW}{dt} = P(t) = e^{-at} a \quad (25)$$

Wenn wir das zeitliche Intervall in n gleichgroße Abschnitte unterteilen, so wird diese Dichtefunktion zu einer *Intervallverteilung*

$$P_n(t) = a \frac{(at)^n}{n!} e^{-at} \quad (26)$$

1.4 Totzeit eines Detektors

Nachdem der Detektor ein Zerfall detektiert hat, gibt es eine Zeitspanne, in der keine Zerfälle detektiert werden, obwohl diese in dieser Zeit tatsächlich stattfinden. Diese Zeitspanne nennen wir Totzeit.

$$a'(1 + a\tau) = a \quad (27)$$

Die gemessene Zählrate a' ist wegen der Totzeit kleiner als die echte Zählrate a :

$$a'(1 + a\tau) = a \quad \text{bzw.} \quad a = \frac{a'}{1 - a'\tau} \quad (28)$$

Der wahre Mittelwert m ergibt sich aus dem gemessenen Mittelwert m' für ein Zeitintervall T folgendermaßen:

$$m = aT = a \frac{m'}{a'} = \frac{m'}{1 - a'\tau} \quad \text{wegen} \quad m' = a'T \quad (29)$$

Für poissonverteilte Messwerte gilt außerdem, dass $\sigma^2 = m$ und somit

$$\sigma'^2 = m' \cdot (1 - \tau a') \quad \text{bzw.} \quad \sigma^2 = m \quad (30)$$

1.5 Zwei-Präparate-Methode

Mit dieser Methode können wir die Totzeit des Zählrohrs bestimmen. Dafür messen wir die Zählrate beider Präparate jeweils getrennt einmal, einmal zusammen und einmal ohne Präparate zur Bestimmung der Untergrundzählrate. Die durch diese Messungen erhaltenen Zählraten

braucht man für die Lösung der Gleichung für die Totzeit:

$$z_1 = p_1 + u, \quad z_2 = p_2 + u, \quad z_{12} = p_{12} + u \quad (31)$$

$$z_1 = \frac{z'_1}{1 - z'_1 \tau} \quad z_2 = \frac{z'_2}{1 - z'_2 \tau} \quad z_{12} = \frac{z'_{12}}{1 - z'_{12} \tau} \quad u = \frac{u'}{1 - u' \tau} \quad (32)$$

$$p_{12} = p_1 + p_2 \quad (33)$$

$$z_{12} + u = z_1 + z_2 \quad (34)$$

$$\frac{z'_{12}}{1 - z'_{12} \tau} + \frac{u'}{1 - u' \tau} = \frac{z'_1}{1 - z'_1 \tau} + \frac{z'_2}{1 - z'_2 \tau} \quad (35)$$

$$\underbrace{(u' z'_{12} z'_2 - z'_1 z'_{12} z'_2 + u' z'_{12} z'_2 - u' z'_1 z'_2)}_A \tau^2 + \underbrace{(-2z'_{12} u' + 2z'_1 z'_2)}_B \tau + \underbrace{z'_{12} - z'_1 + u' - z'_2}_C = 0 \quad (36)$$

Die Totzeit beträgt dann

$$\tau = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \quad (37)$$

1.6 χ^2 -Test

Der χ^2 -Test ermöglicht es, Zufallswerte unkompliziert auf eine Normalverteilungseigenschaft zu überprüfen. Dafür stellt man eine Hypothese aus der zu erwartenden Messung oder anhand vorhandener Daten aus der Messung und testet die Messwerte darauf, ob sie im Rahmen liegen. Der Rahmen für den Test errechnet sich bei vorhandenen Messdaten aus der folgenden Rechnung:

Die Dichtefunktion mit g-Freiheitsgraden

$$f(x, g) = \begin{cases} \frac{x^{\frac{g}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{g}{2}} \Gamma(\frac{g}{2})} & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases} \quad (38)$$

Die Gamma Funktion

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \quad (39)$$

Der Erwartungswert m für diese Verteilung

$$\langle \chi_f^2 \rangle = m = \int_0^\infty x f(x, g) dx = g \quad (40)$$

Die Varianz für diese Verteilung

$$\sigma^2 = \int_0^\infty (x - m)^2 f(x, g) dx = 2g \quad (41)$$

Der Rahmen für χ_{min}^2 und χ_{max}^2 errechnet sich für 5% Unsicherheit folgendermaßen (nach χ_{min}^2 und χ_{max}^2 auflösen)

$$0.025 = \int_0^{\chi_{min}^2} f(x, g) dx \quad (42)$$

$$0.975 = \int_0^{\chi_{max}^2} f(x, g) dx \quad (43)$$

Die aufsummierte Abweichung der Messwerte im Betrag lautet

$$A = \sum_i^n \left| \frac{n_i - m}{m} \right| \quad (44)$$

Für eine bessere Rechenbarkeit nimmt man nun die Quadrate der Abweichung

$$\chi^2 = \sum_i^n \frac{(n_i - m)^2}{m} \quad (45)$$

Die errechneten Grenzen werden dann mit einer 95% Wahrscheinlichkeit zutreffen, falls die Hypothese korrekt war, wenn der χ^2 -Wert nicht innerhalb der Grenzen ist, bedeutet es nicht das die Messreihe/die Hypothese inkorrekt ist, aber es gibt eine Möglichkeit, vor allem wenn es sich um eine große Abweichung handelt bzw. umgekehrt bedeutet es nicht das die Hypothese 100% korrekt ist, aber stärkt die Hypothese. Die Grenzen mit unterschiedlichen Freiheitsgraden gibt es als Tabelle. In diesem Versuch wollen wir mit diesen Test herausfinden ob unsere Zerfallszeiten normal verteilt sind.

1.7 χ^2 -Test und die Totzeit

Die Totzeit führt zu einer Verfälschung der gemessenen Zählraten. Aus diesem Grund müssen wir unseren χ^2 -Test an die Totzeit anpassen. Dafür gehen wir wie folgt vor:

Zu jeder gemessenen Ereigniszahl n_i gibt es eine totzeitkorrigierte Anzahl k_i

$$k_i = \frac{n_i}{1 - \frac{m}{\Delta t} \tau} \quad (46)$$

Somit erhalten wir ein neues Erwartungswert M ,

$$M = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d k_i \quad (47)$$

mit dem wir das totzeitkorrigierte χ^2_{corr} berechnen:

$$\chi^2_{corr} = \sum_{i=1}^d \frac{(k_i - M)^2}{M} \quad (48)$$

Diesen Ausdruck können wir so vereinfachen, dass die Variable k_i verschwindet:

$$\begin{aligned}
 \chi_{korr}^2 &= \sum_{i=1}^d \frac{\left(\frac{n_i}{1-\frac{m}{\Delta t}\tau} - \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d k_i\right)^2}{\frac{1}{d} \sum_{i=1}^d k_i} \\
 &= \sum_{i=1}^d \frac{\left(\frac{n_i}{1-\frac{m}{\Delta t}\tau} - \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d \frac{n_i}{1-\frac{m}{\Delta t}\tau}\right)^2}{\frac{1}{d} \sum_{i=1}^d \frac{n_i}{1-\frac{m}{\Delta t}\tau}} \\
 &= \frac{1}{1 - \frac{m}{\Delta t}\tau} \sum_{i=1}^d \frac{(n_i - \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d n_i)^2}{\frac{1}{d} \sum_{i=1}^d n_i} \\
 &= \frac{1}{1 - \frac{m}{\Delta t}\tau} \sum_{i=1}^d \frac{(n_i - m)^2}{m} \\
 &= \frac{1}{1 - \frac{m}{\Delta t}\tau} \chi^2
 \end{aligned} \tag{49}$$

2 Versuchsaufbau



Abb. 1: Signalzähler mit einstellbaren Messzeit und Zählrohrspannung



Abb. 2: Geiger-Müller-Zählrohr und die ^{137}Cs -Quellen abgeschirmt



Abb. 3: Quellen, Zählrohr und Zähler auf einem Bild

Außerdem können wir das Rechtecksignal, welches die Zählrohrelektronik ausgibt, über einen Signalstretcher zum Computer (nicht im Bild) führen und die Messdaten dort weiter bearbeiten.

2.1 Funktionsweise eines Geiger-Müller-Zählrohrs

Geiger-Müller-Zählrohr dient zum Nachweis ionisierender Strahlung. Er besteht aus einem gasgefüllten Zylinderkondensator (Kathode) mit dünnem zentralen Anodendraht. Durch ein durchlässiges Fenster (für Gamma-Strahlung irrelevant) kann ein Strahlungsquant in das Gas eintreten, Gasteilchen ionisieren und somit freie Elektronen erzeugen. Durch Stoßionisation der Gasteilchen erzeugen diese Elektronen weitere freie Elektronen, sodass es zu einer Elektronenlawine kommt. Durch Abregung der durch Stöße angeregten Gasatome wird zusätzlich ionisierende Strahlung emittiert, die ihrerseits weitere Gasatome ionisiert und noch mehr freie Elektronen erzeugt. Diese Kettenreaktion, die bei angeregten Gasteilchen anfängt, nennt man Geiger-Entladung. Sie endet, wenn die radial nach außen wandernde Elektronenwolke die Kondensatorfeldstärke kompensiert. Während dieser sogenannten Totzeit ist der Nachweis weiterer eintreffenden Quanten unmöglich. Das Zählrohr eignet sich nicht zur Bestimmung der Strahlungsenergie, weil die an der Anode gemessenen Stromimpulse gleiche Amplitude haben.

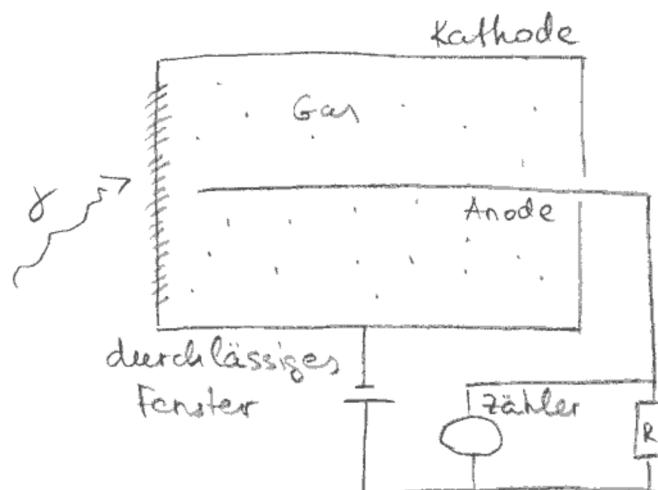


Abb. 4: Schematischer Aufbau eines Zählrohrs

3 Versuchsdurchführung & Messung

3.1 Messungen mit dem Computer

Für folgende drei Messungen von jeweils 45 Min. Länge nehmen wir Daten mittels Computer auf:

- Quelle Nr. 7 bei 520 V Zählrohrspannung
- Quellen Nr. 7 und Nr. 11 gleichzeitig bei 520 V Zählrohrspannung
- Quelle Nr. 7 bei 620 V Zählrohrspannung

Die Daten werden dann mittels Audacity aufgenommen, mittels Python-Programmen werden daraus die für uns interessanten Verteilungen extrahiert.

3.2 Messungen mit dem Zähler

Zur Bestimmung der Totzeit des Zählrohrs mittels der Zwei-Präparate-Methode führen wir folgende Messungen jeweils 5 Minuten lang und lesen am Zähler die Anzahl der Signale für diese Zeitspanne ab:

- Quelle 7 bei 520, 570 und 620 V Zählrohrspannung
- Quelle 11 bei 520, 570 und 620 V Zählrohrspannung
- Quellen 7 und 11 gleichzeitig bei 520, 570 und 620 V Zählrohrspannung
- Untergrundstrahlung bei 520, 570 und 620 V Zählrohrspannung

4 Auswertung

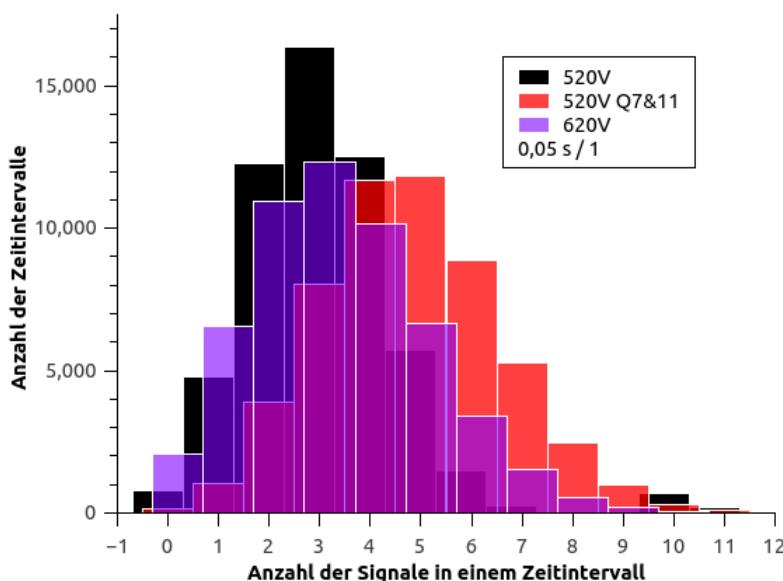
Mit dem Programm get_signals extrahieren wir aus den aufgenommenen Audiodateien Zeitpunkte der Signale in eine Textdatei. Mit Hilfe der Hilfsprogramme können wir dann aus dieser Datei bestimmte Verteilungen extrahieren, um diese zu untersuchen.

4.1 Aufgaben für den Versuchstag

Für jede der drei Messungen extrahieren wir hier eine Poisson-, Gauss- und Intervallverteilung und stellen diese graphisch dar. Bei jeder Messung markieren wir die verwendete radioaktive Quelle und die eingestellte Spannung des Zählrohrs. Außerdem werden die Zeitintervalle Δt , in welche der gesamte Messbereich unterteilt wird, und die Anzahl b der zusammengefassten Balken des Diagramms angegeben. Für eine Intervallverteilung ist der erste Parameter die Zeitunterteilung in Sekunden, der zweite gibt an, ob Zeitdifferenzen zum jeweils nächsten, übernächsten usw. Signal betrachtet werden.

4.2 Poisson-Verteilung

- Wir extrahieren hier eine Poisson-Verteilung für alle drei Messungen mit dem *Zeitintervall von 0,05 s* und *ohne Balkenzusammenfassung* und stellen die Ergebnisse in einem gemeinsamen Diagramm dar:



Der horizontale Offset (d.h. die Balken der Histogramme liegen nicht zentriert über den Marken der x-Achse, abgesehen von der endlichen Breite) in dieser und weiteren Diagrammen wurde zur Anschaulichkeit hinzugefügt und hat keine physikalische / rechnerische Bedeutung. Somit lässt sich sowohl für 520 V als auch für 620 V ein Erwartungswert

4 AUSWERTUNG

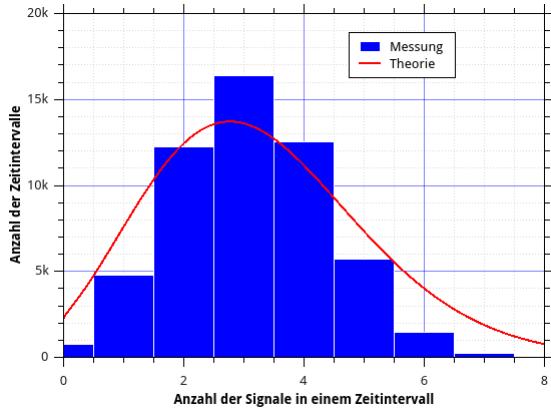
$\lambda = 3 \frac{\text{Signale}}{0,05\text{s}} = 600 \frac{\text{Signale}}{\text{s}}$ ablesen. Bei der Vergrößerung von der Betriebsspannung des Zählrohrs erwarten wir, dass sich die Totzeit verringert und somit die Zählrate steigt. Dem Diagramm entnehmen wir, dass eine größere Zählrohrspannung bzw. das Hinzufügen der zweiten Quelle breitere und flachere Poisson-Verteilungen ergeben. Wie erwartet, verursacht eine zusätzliche radioaktive Quelle außerdem eine Vergrößerung des Erwartungswertes, d.h. es gibt mehr Signale pro Zeitintervall.

- Nun vergleichen wir die gemessenen Verteilungen mit der theoretischen Poisson-Verteilung. Hierzu berechnen wir zuerst Erwartungswert $\lambda = \frac{\sum n \cdot p}{\sum p}$ und Varianz $\sigma^2 = \frac{\sum n^2 \cdot p}{\sum p} - \lambda^2$ der gemessenen Verteilung, um dann anhand von λ die theoretische Verteilung zu bestimmen: $P(n, \lambda) = N \cdot \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}$. Entgegen unserer Erwartung sind die Varianzen bei allen drei Messungen um mehr als 50% kleiner, als die Erwartungswerte, weshalb die gemessenen Verteilungen schmäler als die theoretischen ausfallen. Es ergibt sich folgende Wertetabelle (Aufgabe 3 zur Poisson-Verteilung):

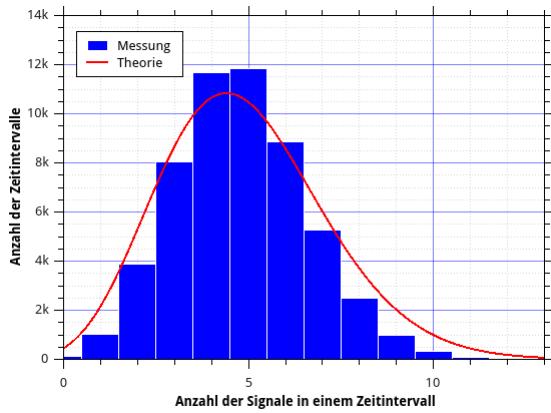
Quelle	Spannung [V]	Erwartungswert [$\frac{\text{Signale}}{0,05\text{s}}$]	Varianz [$\frac{\text{Signale}}{0,05\text{s}}$]
7	520	3,14	1,25
7 und 11	520	4,81	1,78
7	620	3,38	1,66

4 AUSWERTUNG

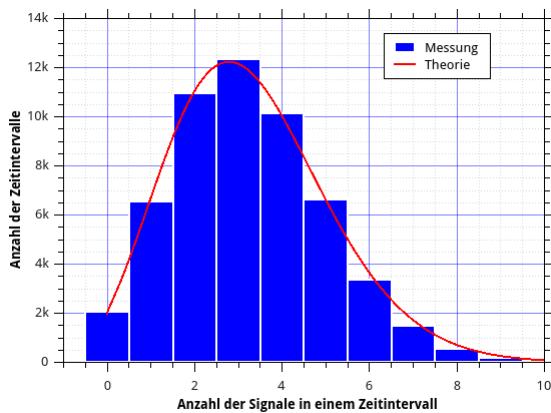
- 520 V, Erwartungswert $\lambda = 3,14$, Wurzel aus der Varianz $\sigma = 1,25 = 0,4 \cdot \lambda$



- 520 V Quellen 7 und 11, $\lambda = 4,81$, $\sigma = 1,78 = 0,37 \cdot \lambda$



- 620 V, $\lambda = 3,38$, Varianz $\sigma = 1,66 = 0,49 \cdot \lambda$



Beim Vergleich der theoretischen Kurven für Poisson-Verteilung fällt uns auf, dass die theoretischen Erwartungswerte sich bei Vergrößerung der Detektorspannung nicht ändern, wie es bei den Messdaten der Fall ist - weil die theoretischen Kurven dieselbe Verteilung bei festem Zeitabschnitt beschreiben. Unsere Messdaten ergeben, dass eine Vergrößerung der Spannung den

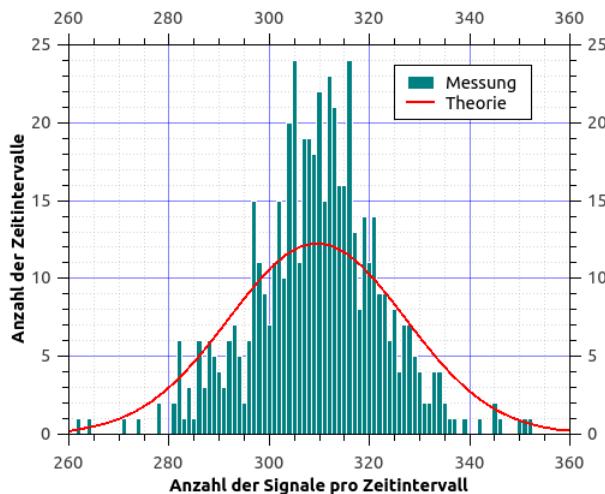
4 AUSWERTUNG

Erwartungswert erhöht und somit die Zählrate steigt. Daraus schließen wir, dass die Totzeit bei größerer Spannung kleiner geworden ist, wie erwartet. Beim Versuch mit zwei Quellen beobachten wir eine Vergrößerung des Erwartungswertes um 1,5 und somit bei festem Zeitintervall eine Vergrößerung der Zählrate wegen der größeren Intensität der einfallenden Strahlung. Man könnte wegen der gesteigerten Zählrate annehmen das die Totzeit auch geringer wurde, aber stattdessen wurde im Zeitintervall ohne Detektion die 2. Quelle detektiert.

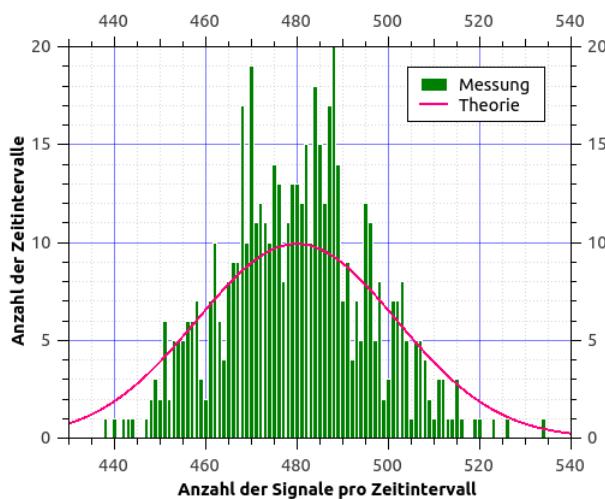
4.3 Gauß-Verteilung

Nun interessieren wir uns für Gauss-Verteilung, für welche ein ausreichend großer Erwartungswert (> 10) nötig ist. Dafür wählen wir einen *Zeitintervall* $\Delta t = 5 \text{ s}$, welches ausreichend viele Signale beinhaltet. Deshalb verzichteten wir auf die Balkenzusammenfassung auch bei Gauss-Verteilung und setzten $n = 1$. Wie im vorherigen Punkt, haben wir den Erwartungswert der extrahierten Verteilung $\lambda = \frac{\sum n \cdot p}{\sum p}$ ermittelt, welches über $\lambda = aT$ mit der wahrscheinlichsten Zählrate verknüpft ist. Außerdem haben wir den Normierungsfaktor F für die theoretische Verteilung berechnet: Dies ist die Summe der Höhen aller Histogrammbalken, d. h. $F = \sum p$. Mit diesen Informationen konnten wir für jede Zählrohrspannung eine theoretische Verteilung konstruieren: $P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\lambda} \cdot F \cdot e^{-\frac{(x-\lambda)^2}{2\lambda}}$. Wir bekamen folgende Ergebnisse:

- Quelle 7 bei 520 V || $\lambda = 309,55 \frac{1}{\Delta t}$ || $F = 541$ || $\frac{F_{theor}}{F} = 0,994$

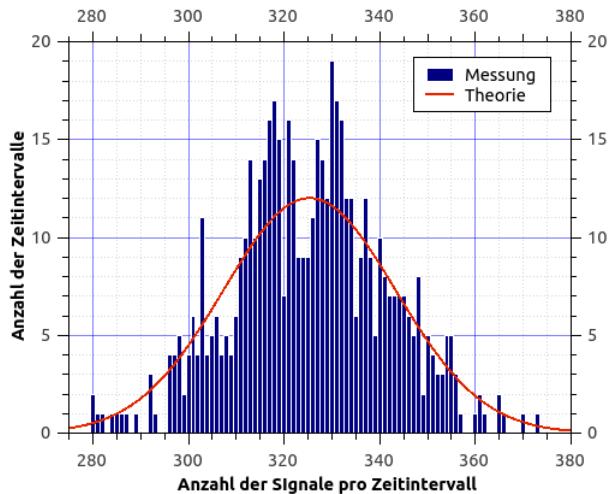


- Quellen 7 und 11 bei 520 V || $\lambda = 479,91 \frac{1}{\Delta t}$ || $F = 545$ || $\frac{F_{theor}}{F} = 0,976$



4 AUSWERTUNG

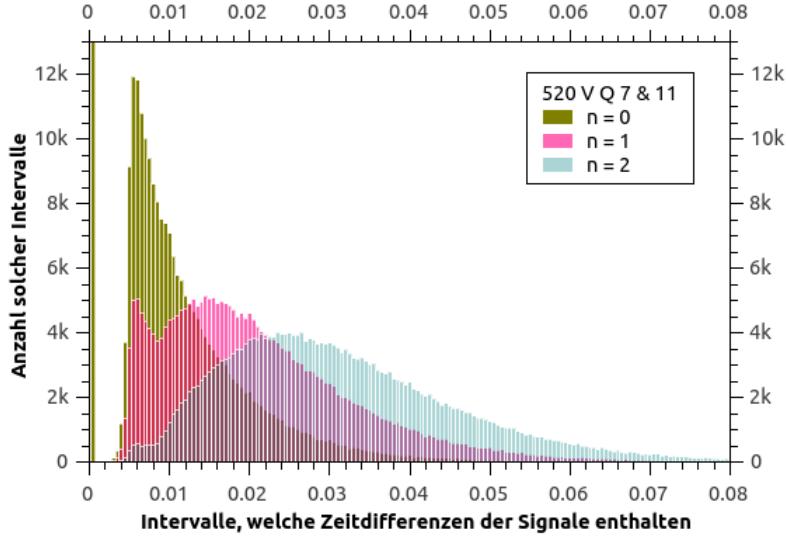
- Quelle 7 bei 620 V || $\lambda = 325,31 \frac{1}{\Delta t}$ || $F = 543$ || $\frac{F_{theor}}{F} = 0,991$



Wir entnehmen den Diagrammen, dass die Flächen der gemessenen und der theoretischen Verteilung um weniger als 10% unterscheiden, die theoretische Verteilung jedoch flacher und breiter ausfällt, sodass die oberen Flächenteile der gemessenen Diagramme nicht in das Modell passen. Dafür gibt es unter der theoretischen Kurve viele "Leerstellen", sodass die Fläche F_{theor} nicht vollständig mit Balken der gemessenen Verteilung gedeckt wird. Es findet also ein Ausgleich, welcher Gleichheit der Flächen der gemessenen und der theoretischen Verteilung gewährleistet. Wir beobachten, dass die gemessenen Verteilungen schmäler und höher ausfallen, als theoretische. Dies entspricht unserer Erwartung, weil die gemessene Zählrate wegen der Totzeit kleiner ausfällt, dies jedoch bei festem Erwartungswert eine Verringerung des Messintervalls bedeutet (Messintervall wird um die gesamte Totzeit kleiner) und somit eine schmalere Kurve verursacht.

4.4 Intervall-Verteilung

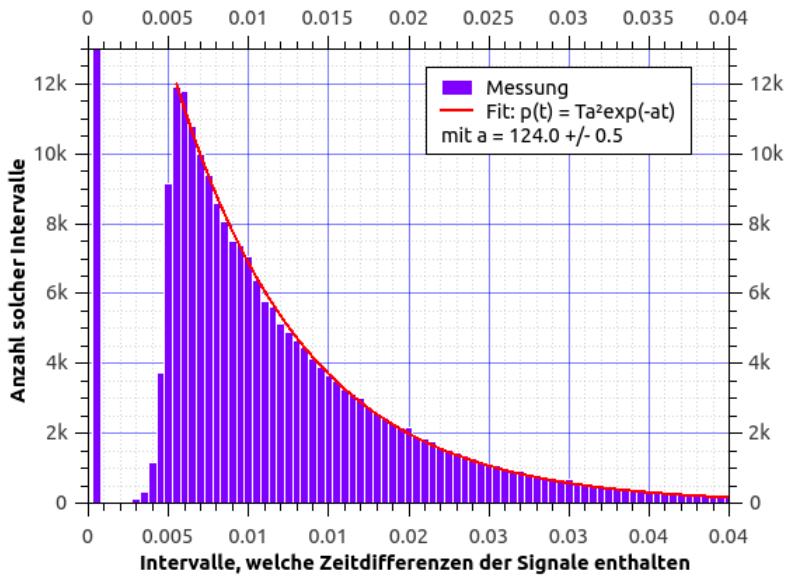
In diesem Abschnitt extrahieren und untersuchen wir eine Intervallverteilung für die Messung 2 mit 520 V Zählrohrspannung und gleichzeitig eingeschalteten Quellen 7 und 11. Wir extrahieren Verteilungen mit dem Zeitschritt von 0,0005 s zum nächsten, über- oder überübernächsten Signal und stellen diese graphisch dar:



Wir beobachten, dass die Verteilungen für $n = 1$ und $n = 2$ entgegen der Theorie zwei Peaks besitzen und sich daher nicht vollständig mit der Funktion $p_n(t) = a \frac{(at)^n}{n!} e^{-at}$ beschreiben lassen. Außerdem ist eine horizontale Verzögerung am Ursprung deutlich sichtbar, was auch eine Abweichung vom Modell ist und sich mit dem Vorhandensein einer Totzeit zwischen Signalen erklären lässt. Nun möchten wir die theoretische Funktion, welche eine Intervallverteilung für $n = 0$ beschreibt,

$$P(t) = N \cdot a \cdot e^{-at} = T \cdot a \cdot a \cdot e^{-at} = T \cdot a^2 \cdot e^{-at} \quad (50)$$

an die Messdaten fitten. Durch die Verzögerung am Anfang wird die Auswahl des richtigen Fitbereichs verkompliziert: Wählen wir die gesamte Zeitspanne, so weicht die Fitkurve sehr stark von den Daten ab. Deshalb haben wir entschieden, den exponentiellen Abfall *nach dem Peak* bei 0,0055 s zu fitten (siehe nächste Seite). In der Anleitung steht, dass T die Gesamtzeit der Messung ist, welche ja bei uns $45 \text{ min} \times 60 \text{ s}$ beträgt. Das Verwenden dieser Zahl beim Fitten lieferte stark von Daten abweichende Ergebnisse, deshalb ließen wir das Fit-Programm die Normierungskonstante N eigenständig herausfinden. Für den Parameter a bekamen wir eine Abschätzung $a = 124,0 \pm 0,5 \frac{\text{Signale}}{\text{s}}$. Die Zählrate bei dieser Verteilung ist das Produkt Summe der Balkenhöhen \times Gesamtzeit, welcher $a' = 96,98 \frac{\text{Signale}}{\text{s}}$ beträgt und gemäß unserer Erwartung kleiner als die tatsächliche Zählrate a ist.



Wir sehen, dass mit beschriebenen Einschränkungen die Daten sehr gut modelliert werden. Wir können nun die Totzeit bestimmen:

$$a = \frac{a'}{1 - a\tau} \Rightarrow \tau = \frac{1}{a} - \frac{a'}{a^2} \quad (51)$$

$$\tau = (176 \pm 2) \cdot 10^{-5} \text{ s} \quad \text{mit} \quad \Delta\tau = \left| \frac{\partial\tau}{\partial a} \Delta a \right| \quad (52)$$

Dieser Wert für Totzeit ist von gleicher Größenordnung wie die graphisch ablesbare Totzeit $\tau_{graph} = 300 \cdot 10^{-5} \text{ s}$, ist jedoch um 41% kleiner. Was die übrigen zwei Fälle mit $n = 1$ und $n = 2$ angeht, so haben wir gesehen, dass die zugehörigen Verteilungen zwei Peaks besitzen und dementsprechend Bereiche mit dem Anstieg der Dichtefunktion enthalten, welche unser Modell nicht berücksichtigt.

4.5 χ^2 -Test

Wir unterteilen die gesamte Zeitspanne in Zeitintervalle von 10 s Länge. Wir benutzen außerdem die Messwerte für 520 V Zählrohrspannung mit radioaktiven Quellen Nr. 7 und 11.

- **Präparatstärke konstant und gleich dem Mittelwert (a)**

Der Mittelwert der Zählrate beträgt

$$m = 961 \pm 24 \frac{\text{Signale}}{10 \text{ s}} = 96,1 \pm 2,4 \frac{\text{Signale}}{\text{s}} \quad (53)$$

n-ter Zeitintervall	Anzahl Zerfälle	n-ter Zeitintervall	Anzahl Zerfälle
0	952	26	972
1	973	27	946
2	1012	28	999
3	939	29	931
4	992	30	950
5	955	31	994
6	932	32	961
7	929	33	932
8	949	34	942
9	974	35	964
10	957	36	954
11	988	37	990
12	972	38	920
13	976	39	994
14	973	40	943
15	956	41	956
16	948	42	972
17	938	43	971
18	957	44	966
19	950	45	1004
20	935	46	1005
21	951	47	934
22	953	48	935
23	939	49	1021
24	977	50	925
25	957		

Daraus ergibt sich ein unkorrigierter χ^2 -Wert von 30,83 und ein korrigierter χ^2 -Wert von 52,078.

- Präparatstärke konstant und gleich dem Mittelwert $\times 0,9$ (b)

Der Mittelwert der Zählrate beträgt

$$m = 865 \pm 22 \frac{\text{Signale}}{10 \text{ s}} = 86,5 \pm 2,2 \frac{\text{Signale}}{\text{s}} \quad (54)$$

n-ter Zeitintervall	Anzahl Zerfälle	n-ter Zeitintervall	Anzahl Zerfälle
0	952	26	972
1	973	27	946
2	1012	28	999
3	939	29	931
4	992	30	950
5	955	31	994
6	932	32	961
7	929	33	932
8	949	34	942
9	974	35	964
10	957	36	954
11	988	37	990
12	972	38	920
13	976	39	994
14	973	40	943
15	956	41	956
16	948	42	972
17	938	43	971
18	957	44	966
19	950	45	1004
20	935	46	1005
21	951	47	934
22	953	48	935
23	939	49	1021
24	977	50	925
25	957		

Daraus ergibt sich ein unkorrigierter χ^2 -Wert von 579 und ein korrigierter χ^2 -Wert von 915.

- Präparatstärke nimmt linear ab (c)

Der Mittelwert der Zählrate beträgt

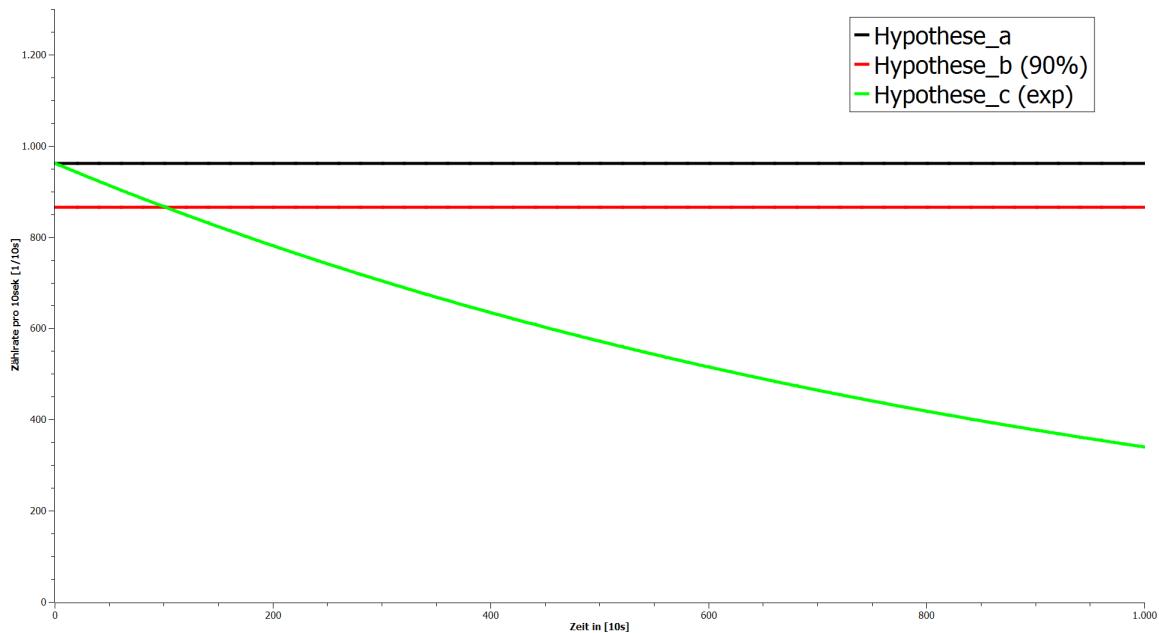
$$m = 936 \pm 15 \frac{\text{Signale}}{10 \text{ s}} = 93,6 \pm 1,5 \frac{\text{Signale}}{\text{s}} \quad (55)$$

n-ter Zeitintervall	Anzahl Zerfälle	n-ter Zeitintervall	Anzahl Zerfälle
0	961	26	935
1	960	27	934
2	959	28	933
3	958	29	932
4	957	30	931
5	956	31	930
6	955	32	929
7	954	33	928
8	953	34	927
9	952	35	926
10	951	36	925
11	950	37	924
12	949	38	923
13	948	39	922
14	947	40	921
15	946	41	920
16	945	42	919
17	944	43	918
18	943	44	917
19	942	45	916
20	941	46	915
21	940	47	914
22	939	48	913
23	938	49	912
24	937	50	911
25	936		

Daraus ergibt sich ein unkorrigierter χ^2 -Wert von 11,8 und ein korrigierter χ^2 -Wert von 19,6.

4 AUSWERTUNG

Die Hypothesen ergeben folgendes Diagramm:



Aus der Tabelle für χ^2 mit 50 Freiheitsgraden und 10% Ablehnungsbereich kann man die Grenzen für $\chi^2_{min} = 34,8$, $\chi^2_{max} = 67,5$ ablesen.

Damit können wir die Hypothese b und c ablehnen, da $\chi^2 = 915$ bei b viel zu groß ist und $\chi^2 = 19,6$ für c zu klein.

Dies entspricht auch unsere Erwartung das die Zerfallsrate in dieser kleinen zeitlichen Spanne konstant bleibt und somit Hypothese a angenommen werden darf. Die Zerfälle sind Zufallsverteilt.

Außerdem lässt sich für die Hypothese c) an der Wertetabelle / am Diagramm eine Halbwertszeit $T_{1/2} = 667 \cdot 10\text{ s} = 11,2\text{ min}$ ablesen, welche um 5 Zehnerpotenzen kleiner als die tatsächliche Halbwertszeit von ^{137}Cs ist. Somit können wir die Hypothese c) verwerfen.

4.6 Totzeit des Zählrohrs

Für die Totzeit bei unterschiedlichen Spannungen kamen wir mit der Zwei-Präparate-Methode auf die folgende Werte. Dafür wurden in 5-minütigen Intervallen die Anzahlen der Zerfälle gemessen. Die gemessenen mittleren Zählraten ergeben sich dann aus dem Quotienten $z' = \frac{\text{Anzahl der Zerfälle}}{\text{Zeitspanne}}$. Da die Länge des Intervalls im Zähler festgelegt und nicht gemessen wird, nehmen wir für deren Fehler zwecks Abschätzung $\Delta t = 0,5 \text{ s}$ an. Die Anzahl der Zerfälle N wird ebenfalls durch den Zähler am Ende des Intervalls angezeigt. Der Fehler für die mittlere Zählrate beträgt dann $\Delta z' = z' \cdot \frac{\Delta t}{t}$. Im Rahmen der Zwei-Präparate-Methode bekommen wir einen Ausdruck für die Totzeit in Abhängigkeit von Variablen A, B und C, welche wiederum von Zählraten abhängen. Für diese Variablen bekommen wir folgende Fehlerabschätzung mittels Gaußscher Fehlerfortpflanzung:

$$\begin{aligned}\Delta A &= (((-z'_{12}z'_2 + u'z'_{12} - u'z'_2) * \Delta z'_1)^2 + ((u'z'_{12} - z'_1z'_{12} - u'z'_1) * \Delta z'_2)^2 + \\ &\quad + ((u'z'_2 - z'_1z'_2 + u'z'_1) * \Delta z'_{12})^2 + ((z'_{12}z'_2 + z'_1z'_1 - z'_1z'_2) * \Delta u')^2)^{1/2} \\ \Delta B &= \sqrt{(2z'_2\Delta z'_1)^2 + (2z'_1\Delta z'_2)^2 + (2u'\Delta z'_{12})^2 + (2z'_{12}\Delta u')^2} \\ \Delta C &= \sqrt{(\Delta z'_1)^2 + (\Delta z'_2)^2 + (\Delta z'_{12})^2 + (\Delta u')^2}\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich schließlich der Fehler für Totzeit:

$$\tau = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \Rightarrow \Delta\tau = \sqrt{\left(\frac{\partial\tau}{\partial A}\Delta A\right)^2 + \left(\frac{\partial\tau}{\partial B}\Delta B\right)^2 + \left(\frac{\partial\tau}{\partial C}\Delta C\right)^2}$$

Die partiellen Ableitungen betragen dabei

$$\begin{aligned}\frac{\partial\tau}{\partial A} &= \frac{-\frac{2AC}{\sqrt{B^2-4AC}} \mp \sqrt{B^2-4AC} + B}{2A^2} \\ \frac{\partial\tau}{\partial B} &= \frac{1}{2A} \cdot \left(-1 \pm \frac{B}{\sqrt{B^2-4AC}}\right) \\ \frac{\partial\tau}{\partial C} &= \mp \frac{1}{\sqrt{B^2-4AC}}\end{aligned}$$

4.6.1 520V

Quelle 7 lieferte 18553 Zerfälle, Quelle 11 16246 und beide zusammen 27012 Zerfälle. Der Hintergrund betrug 2526 Zerfälle in diesem Zeitraum. Daraus ergeben sich die Werte:

$$A = -247633,5 \pm 768,4 \quad B = 5181,8 \pm 16,2 \quad C = -17,54 \pm 0,20$$

Dies ergibt einen τ von $(425 \pm 7) \times 10^{-5} \text{ s}$

4.6.2 570V

Quelle 7 lieferte 19624 Zerfälle, Quelle 11 17222 und beide zusammen 29301 Zerfälle. Der Hintergrund betrug 2447 Zerfälle in diesem Zeitraum. Daraus ergeben sich die Werte:

$$A = -305928,84 \pm 942,40 \quad B = 5917 \pm 18 \quad C = -17,0 \pm 0,2$$

Dies ergibt einen τ von $(351 \pm 7) \times 10^{-5}$ s

4.6.3 620V

Quelle 7 lieferte 20389 Zerfälle, Quelle 11 17716 und beide zusammen 30523 Zerfälle. Der Hintergrund betrug 2526 Zerfälle in diesem Zeitraum. Daraus ergeben sich die Werte:

$$A = -340049,8 \pm 1047,3 \quad B = 6290,5 \pm 19,4 \quad C = -16,74 \pm 0,23$$

Dies ergibt einen τ von $(322 \pm 6) \times 10^{-5}$ s

Die ermittelten Werte für die Totzeit des Zählrohrs sind von der Größenordnung her mit den Werten aus der Aufgabe 16.4.3 konsistent.