Gruppe 4 Daniel Oros

Leiter: Nick Anna Bohn 6024~~7~~45

Benita Dünnebier 6026400

Klassische Feldtheorie III WS 16/17

Prof. Stefanie Walch Übungsleiter: D. Seifried

Übungsblatt 8

Ausgabe 6.12.2016
Abgabe 12.12.2016, 12:00 Uhr
Besprechung 15.12.2016

Aufgabe	1	2	3	Summe
Punkte	8	/	8	16

Allgemeine Informationen

- Abgabe nur in Gruppen von min. 2 bis max. 3 Personen (Ausnahme 0. und 1. Übungsblatt). **Einzelabgaben werden nicht akzeptiert.**
- Alle Namen sind auf der ersten Seite anzugeben. Gruppenmitglieder müssen zur gleichen Gruppe gehören.
- **Bitte unbedingt die Nummer der Übungsgruppe / den Übungsgruppenleiter auf dem Blatt mit angeben.**
- Das Angabenblatt muss mit abgegeben werden.
- Abgebene Aufgaben müssen vorgerechnet werden können. Für Modul III a (9 LP) und b (6 LP) muss eine Übung aus den Übungen 1 – 9 an der Tafel vorgerechnet werden, für Modul III a zusätzlich eine Übung aus den Übungen 10 – 13, um zur Klausur zugelassen zu werden.
- Für Modul III a (9 LP) und b (6 LP) müssen 50% der Punkte aus den Übungen 1 – 9, für Modul III a zusätzlich 50% aus den Übungen 10 – 13 erreicht werden, um zur Klausur zugelassen zu werden.
- Weitere Information finden Sie auch auf https://hera.ph1.uni-koeln.de/~walch/Elektrodynamik16/Inhalt.html

Aufgabe 1 [11 Punkte]

Betrachten Sie zwei kreisförmige Leiterschleifen S1 und S2. S1 sei in der x-y-Ebene angeordnet (Flächennormale entlang z-Richtung) mit dem Zentrum im Koordinatenursprung und trage einen Strom I, ihr Radius sei R. Die Schleife S2 sei an der Stelle $\vec{x}$ zentriert und besitze die Fläche A. Ihre Flächennormale zeige in die selbe Richtung wie der Ortsvektor $\vec{x}$, an der sich die Schleife S2 befindet.

1. Berechnen Sie zunächst das magnetische Moment der Schleife S1 und damit das (approximative) Magnetfeld in großer Entfernung von der Leiterschleife S1 an einem beliebigen Punkt $\vec{x}$. Vereinfachen Sie den Ausdruck für $\vec{B}(\vec{x})$ soweit wie möglich.

2. Berechnen Sie nun damit den magnetischen Fluss Φ, der durch S2 fließt.

3. Zu einem Zeitpunkt t wird der Strom in S1 über einen Zeitraum Δt heruntergefahren, und zwar so, dass $\frac{dI}{dt}$ konstant ist. Berechnen Sie die in der Schleife S2 induzierte Spannung.

Aufgabe 2 [10 Punkte]

Betrachten Sie die in der Vorlesung behandelte Wellengleichung

$$\Delta\psi(\vec{x},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 4\pi f(\vec{x},t)\,, \tag{1}$$

deren Green-Funktion geben ist durch

$$G(\vec{x},\vec{x}',t,t') = \frac{\delta\left(t' - \left[t - \frac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{c}\right]\right)}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \tag{2}$$

Man nehme nun an, dass die Quelle f der emittierten Strahlung nur während der Zeit von $-\Delta t/2$ bis $+\Delta t/2$ aktiv sei und sich im Ursprung befinde. Die Quelle sei während dieser Zeit konstant und zudem sei ihre Leistung normiert, d.h

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\vec{x},t)dt = 1\,. \tag{3}$$

1. Geben Sie zunächst die funktionale Form von $f(\vec{x},t)$ an und zeichnen Sie diese (Hinweis: Heaviside-Funktion).

2. Berechnen Sie nun die Lösung $\psi(\vec{x},t)$ zu jedem beliebigen t und $\vec{x}$

3. Interpretieren/Diskutieren Sie die Lösung kurz. Was wird durch $\psi(\vec{x},t)$ beschrieben?

4. Das Zeitintervall Δt, währenddessen die Quelle aktiv ist, gehe nun gegen 0. Was heißt das für $\psi(\vec{x},t)$ unter der Annahme, dass die Normierung von $f(\vec{x},t)$ weiterhin gilt?

Aufgabe 3 [9 Punkte]

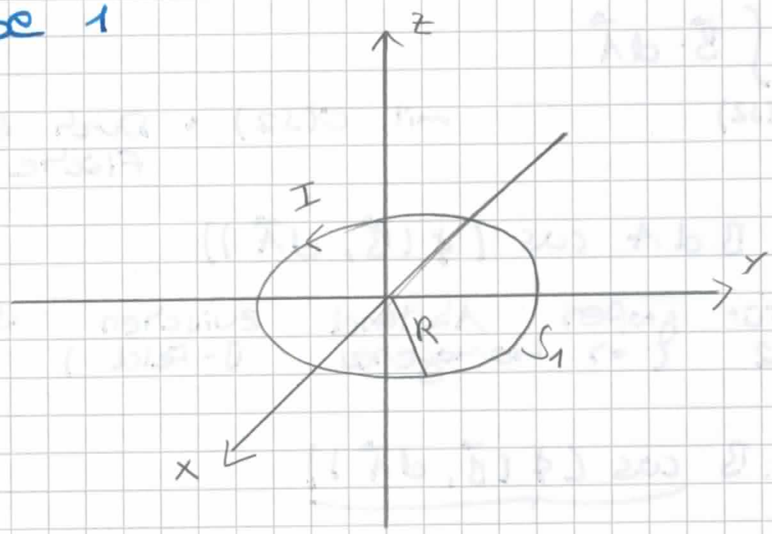
Eine transversale ebene elektromagnetische Welle im Vakuum trifft senkrecht auf eine Platte (mit der Flächennormalen entlang der z-Richtung), die die Welle komplett absorbiert. Der Einfachheit halber nehmen Sie an, dass das elektrische und magnetische Feld in der Welle gleich $\vec{E} = (E, 0, 0)$ und $\vec{B} = (0, B, 0)$ sind.

1. Berechnen Sie mit Hilfe der Erhaltungsgleichung für den Impuls den Druck, der auf die Platte ausgeübt wird. Berechnen Sie dazu zunächst den Maxwell'schen Spannungstensor. (Hinweis: Es seien keine freien Ladungen vorhanden.).

2. In der Umgebung der Erde beträgt die elektromagnetische Energieflussdichte (d.h. Energiedichte multipliziert mit der Lichtgeschwindigkeit) der Sonnenstrahlung ca. 1.4 kW/m^2. Betrachten Sie ein Sonnensegel, das die Masse-pro-Fläche von 1g/m^2 besitzt. Berechnen Sie die maximale Beschleunigung des Sonnensegels durch die Sonnenstrahlung. Wann würde das Sonnensegel (bei gleichbleibender Beschleunigung und ohne Berücksichtigung relativistischer Effekte) eine Geschwindigkeit von 10 000 km/h erreichen, wann einen Abstand von der Erde von einer astronomischen Einheit?

TP III - Blatt 8

Aufgabe 1



1.1 Magnetfeld in großer Entfernung

- magn. Moment $\vec{m}$

  $|\vec{m}| = I \pi R^2$ und die Richtung wird durch die Stromrichtung gegeben

  [Stromrichtung xy-Ebene => Richtung von $\vec{m}$ ist $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{e}_z$]

  Somit ergibt sich: $\vec{m} = I \pi R^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

- Magnetfeld

  Es gilt:

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{1}{c} \frac{1}{|\vec{x}|^3} \left[3 \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} \left(\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} \cdot \vec{m} \right) - \vec{m} \right]$$

$$= \frac{1}{c} \frac{1}{|\vec{x}|^5} \cdot 3 I \pi R^2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

$$- \frac{1}{c} \frac{1}{|\vec{x}|^3} I \pi R^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{c} \frac{1}{|\vec{x}|^5} 3 I \pi R^2 z \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \frac{1}{c} \frac{1}{|\vec{x}|^3} I \pi R^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1.2 magn. Fluss Φ durch S_2

Es gilt:

$$\Phi_m = \int_{O(S2)} \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

mit $O(S2)$ = Durch S2 eingeschl. Fläche

$$= \int B\, dA \cos(\sphericalangle(\vec{B}, d\vec{A}))$$

Für großen Abstand zwischen S1 und S2 (=> homogenes B-Feld)

$$= BA \underbrace{\cos(\sphericalangle(\vec{B}, d\vec{A}))}$$

gut!

$$\approx \cos(\sphericalangle(\vec{B}, \vec{A}))\quad \text{~~da const~~}$$

$$= BA \cos(\sphericalangle(\vec{B}, \vec{A})) = A\, \vec{B} \cdot \vec{n} = \frac{2mA}{c|\vec{x}|^3} n_z$$

1.3 induzierte Spannung in S2

Es gilt:

$$U_{ind} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \Phi_m$$

$$= -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} [BA \overbrace{\cos(\sphericalangle(\vec{B}, \vec{A}))}^{\text{zeit konstant}}]$$

$$= -\frac{1}{c} A \cos(\sphericalangle(\vec{B}, \vec{A})) \frac{dB}{dt}$$

$$= \ldots$$

Aufg. 3

1.

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi}\left[E_\alpha E_\beta + B_\alpha B_\beta - \frac{1}{2}\left[(\vec{E}\cdot\vec{E})+(\vec{B}\cdot\vec{B})\right]\delta_{\alpha\beta}\right]$$

$$\vec{E} = \begin{pmatrix}E\\0\\0\end{pmatrix};\ \vec{B} = \begin{pmatrix}0\\B\\0\end{pmatrix}$$

Durch $E_\alpha \cdot E_\beta = B_\alpha \cdot B_\beta = 0$ für $\alpha \neq \beta$, ist T diagonal

$$\Rightarrow \mathbf{T} = \frac{1}{4\pi}\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix}E^2-B^2 & 0 & 0\\ 0 & B^2-E^2 & 0\\ 0 & 0 & -(E^2+B^2)\end{pmatrix}$$

$\frac{d}{dt}(P_{Ges} + P_{Ges,Feld})_\alpha = \oint_S \sum_\beta T_{\alpha\beta}\cdot n_\alpha\, dA$ beschreibt die Kraft, die auf eine Fläche S ausgeübt wird. Da $T_{\alpha\beta}$ in keinem Fall von der Fläche in diesem Fall abhängt, ergibt sich der Druck zu:

$$P_{Druck} = \frac{d}{dt}(P_{Ges} + P_{Ges,Feld})_\alpha \cdot \frac{1}{S} = \sum_\beta T_{\alpha\beta}\, n_\alpha$$

mit $n = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$\alpha = 1,2 \Rightarrow \sum_\beta T_{\alpha\beta}\, n_\alpha = 0$

$\alpha = 3 \Rightarrow -\frac{1}{8\pi}(E^2+B^2) \quad \Rightarrow \vec{P}_{Druck} = \frac{-1}{8\pi}\begin{pmatrix}0\\0\\E^2+B^2\end{pmatrix}$

2. Die Energieflussdichte ist gegeben durch $\Phi_F = 1{,}4\ kW/m^2$

Somit ergibt sich (laut Arbeitsblatt) die Energiedichte zu:

$$\frac{\Phi_F}{c} = E_0$$

Die Flächendichte ist gegeben durch

$$D = 1 g/m^2$$

Somit beschreibt E_0 die Energie pro Volumen und in unserem Fall die Kraft pro Fläche

Somit ist $\frac{E_0}{D}$ die Beschleunigung

Die Welle wird komplett absorbiert, sonst würde noch ein Faktor 2 auftreten, falls die Welle reflektiert wird.

$$\Rightarrow a = \frac{E_0}{D} = \frac{\Phi_F}{D \cdot c}$$

mit den gegebenen Werten $\Rightarrow a = 0{,}00\cancel{1}467 \, m/s^2$

(i) Berechnung der Zeit für $v = 10000 \, km/h = 10000 \cdot \frac{1}{3{,}6} \, m/s$

$$a \cdot t = v \Leftrightarrow t = \frac{v}{a} = \frac{v \cdot D \cdot c}{\Phi_F} = 5952380{,}955 \approx 0{,}\cancel{0}18874 \, a \approx 6.9 \, d$$

Jahre

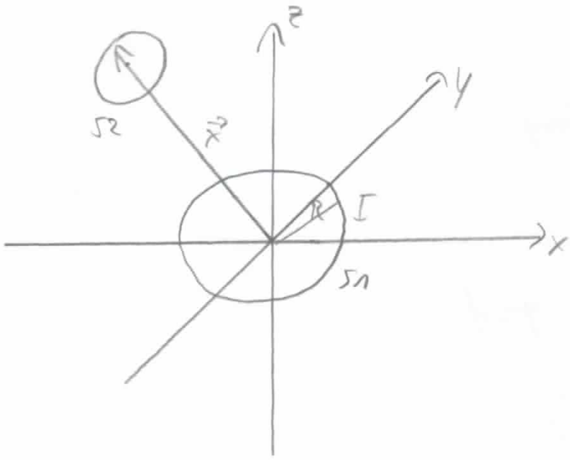
(ii) Berechnung der Zeit für eine Distanz von 1 AU

$$\frac{1}{2} a \cdot t^2 = s = 1 \, AU \Leftrightarrow \sqrt{\frac{2 \cdot s}{a}} = t$$

$$\Rightarrow t = 25320618{,}75 \approx 0{,}8 \, a \quad f$$

$$= 92 \, d$$

Aufg. 1



1. $\vec{m} = I \cdot \vec{A} = I \pi R^2 \vec{e}_z := m \vec{e}_z$

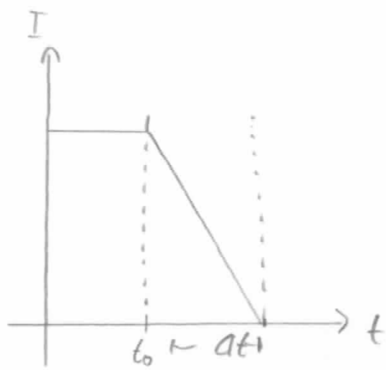
$$\vec{B} = \frac{1}{c} \left(\frac{3\vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{m}) - \vec{m}}{|\vec{x}|^3} \right) = \frac{m}{c} \frac{1}{|\vec{x}|^3} \left(3\vec{n}\, n_z - \vec{e}_z \right)$$

dabei ist n_z die z-Komponente die z-Komponente des Normalenvektors von S_2

2. $$\phi = \int \vec{B}\, d\vec{A} \approx A \vec{B}\cdot\vec{n} = \frac{m}{c} \frac{A}{|\vec{x}|^3} \Big(3 \underbrace{\vec{n}\, n_z \cdot \vec{n}}_{=1} - \underbrace{\vec{e}_z \cdot \vec{n}}_{n_z} \Big) = \frac{2mA}{c\,|\vec{x}|^3} n_z$$

Näherung da $\vec{B}$ über A nur $\simeq$ const

3.



mit $U = -\frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t}$

$$\Rightarrow \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\partial m(t)}{\partial t} \frac{1}{|\vec{x}|^3} \left(3\vec{n}\, n_z - \vec{e}_z \right)$$

mit $\frac{\partial m}{\partial t} = \pi R^2 \frac{\partial I}{\partial t} = \pi R^2 \frac{I}{\Delta t}$

Nun (Faraday) $\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t} = 0$

Hier ist die Herleitung von $U = -\frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t}$ nicht zwingend notwendig

$$\Rightarrow \int_A \vec{\nabla} \times \vec{E} \cdot d\vec{A} = -\frac{1}{c} \int_A \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\, d\vec{A}$$

|| Stokes ||

$$\int_{\partial A = S_2} \vec{E}\, d\vec{e} = U_2 \qquad -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} \approx -\frac{A}{c^2} \frac{2 n_z}{|\vec{x}|^3} \pi R^2 \frac{I}{\Delta t} = U_2$$

Aufg. 2

1. $\left(-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\Delta\right)\phi = 4\pi\rho$ Wellengleichung

(Differentialoperator) $\phi = f$ oder setze $\psi = \phi$

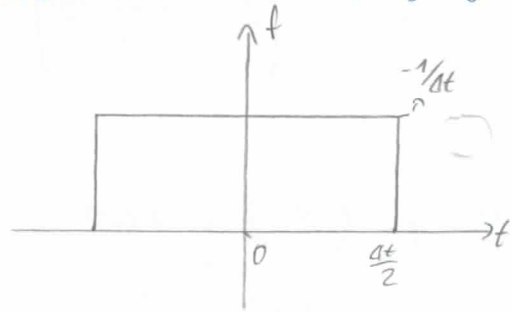
$$G(\vec{x}-\vec{x}'; t, t') = \frac{\delta\left(t' - \left[t - \frac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{c}\right]\right)}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$$

← Damit die Quelle auch wirklich nur im Ursprung liegt

$$f(\vec{x}, t) = \frac{1}{\Delta t}\ \theta\left(-t+\frac{\Delta t}{2}\right)\cdot\theta\left(t+\frac{\Delta t}{2}\right)\cdot\delta(\vec{x})$$

θ ↓ heavyside Fkt. $\theta(x) = \int_{-\infty}^{x}\delta(x')\,dx'$

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



2. $$\psi(\vec{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \int_{-\infty}^{\infty} dt\ G(\vec{x}-\vec{x}', t-t')\ f(\vec{x}', t')$$

⌈ Einschub Greensche Fkt.:

(I) $L\, y(x) = f(x)$
↓
Differentialoperator

Löse nicht obere (I), sondern stattdessen (II) $L \cdot G(x) = \delta(x)$

$$\Rightarrow L_x \int G(x-x')\,f(x')\,dx'$$

$$= \int \underbrace{L_x\, G(x-x')}_{\delta(x-x')} f(x')\,dx' = f(x) \overset{!}{=} L_x[y(x)]$$

$$\Rightarrow y(x) = \int G(x-x')\,f(x')\,dx'$$ ⌋

In der Aufgabe: $\left(-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\Delta\right) G = \delta(x)$

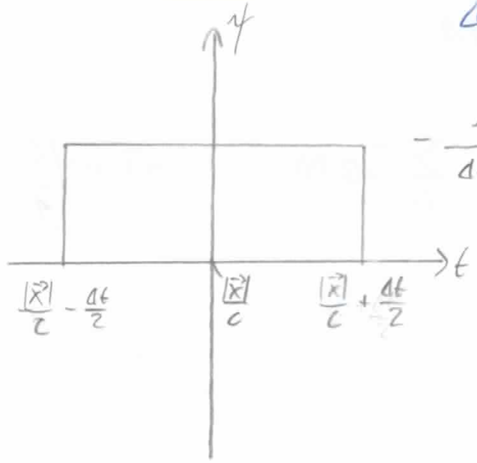
Aufg. 2 (weiterführung)

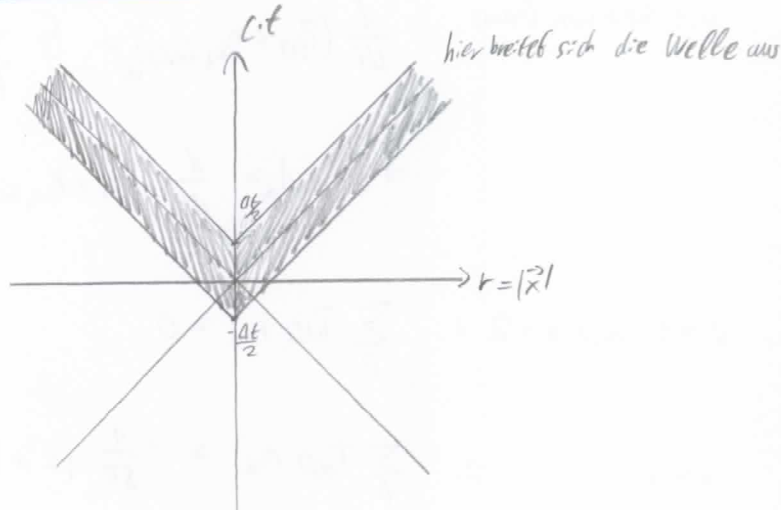
$$\psi(\vec{x},t) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x' \int_{-\infty}^{\infty} dt' \; \frac{\delta\left(t' - t + \frac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{c}\right)}{\Delta t \; |\vec{x}-\vec{x}'|} \; \theta\left(-t' + \frac{\Delta t}{2}\right) \theta\left(t' + \frac{\Delta t}{2}\right) \delta(\vec{x}')$$

$$= \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \; \frac{\delta\left(t' - \left[t - \frac{|\vec{x}|}{c}\right]\right)}{|\vec{x}|} \; \theta\left(-t' + \frac{\Delta t}{2}\right) \theta\left(t' + \frac{\Delta t}{2}\right)$$

$$= \frac{\theta\left(-\left(t - \frac{|\vec{x}|}{c}\right) + \frac{\Delta t}{2}\right) \theta\left(\left(t - \frac{|\vec{x}|}{c}\right) + \frac{\Delta t}{2}\right)}{\Delta t \; |\vec{x}|}$$

3.





4. $\Delta t \to 0 \Rightarrow f(\vec{x},0) \to \infty$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f \; dt = 1$$

$$\Rightarrow f(\vec{x},t) \xrightarrow{\Delta t \to 0} \delta(t)\,\delta(\vec{x}) \quad \Rightarrow \quad \psi(\vec{x},t) = \frac{\delta\left(t - \frac{|\vec{x}|}{c}\right)}{|\vec{x}|}$$

Aufg. 3

Jackson: Pointing $\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot S = 0$ mit S: Pointing Vektor, u: Energiedichte

$$\frac{d}{dt}\left(P_{Feld}\right)_\alpha = \sum_\beta \int_V \frac{\partial}{\partial x_\beta} T_{\alpha\beta} \; d^3x$$

(Pedant zu Noether Theorem in der Elektrodynamik)

1. $T_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi} \left[E_\alpha E_\beta + B_\alpha B_\beta - \frac{1}{2}\left[(\vec{E}\cdot\vec{E}) + (\vec{B}\cdot\vec{B})\right]\delta_{\alpha\beta}\right.$

$\alpha \neq \beta$: $E_\alpha \cdot E_\beta = B_\alpha \cdot B_\beta = 0$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} E^2-B^2 & 0 & 0 \\ 0 & B^2-E^2 & 0 \\ 0 & 0 & -(E^2+B^2) \end{pmatrix}$$

mit Satz von Gauss $\quad \frac{d}{dt}\left(P_{Ges} + P_{Ges,Feld}\right)_\alpha = \oint_S \sum_\beta T_{\alpha\beta}\, n_\alpha\, dA$

$$\Rightarrow (P_{Druck})_\alpha = \frac{d}{dt}\left(P_{Ges} + P_{Ges,Feld}\right)\cdot\frac{1}{S} = \sum_\beta T_{\alpha\beta}\, n_\beta \qquad \text{mit } n = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$\alpha = 1$ und $\alpha = 2$: $\sum_\beta T_{\alpha\beta}\, n_\alpha = 0$

$\alpha = 3$: $\sum_\beta T_{\alpha\beta}\, n_\alpha = -\frac{1}{8\pi}\left(E^2+B^2\right)$

$$\Rightarrow \vec{P}_{Druck} = -\frac{1}{8\pi}\begin{pmatrix}0\\0\\(E^2+B^2)\end{pmatrix}$$

2. $\phi = 1{,}4 \ \frac{kW}{m^2}$

$E_0 = \frac{\phi}{c}$

$F = 1\ g/m^2$

$a = \frac{E_0}{F} = \frac{\phi}{cF} = 4{,}67\cdot 10^{-3}\ m/s^2$

$a\cdot t = v \Leftrightarrow t = \frac{v}{a} = \frac{v\cdot F\cdot c}{\phi} \approx 6{,}9\ d$

$d = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2d}{a}} \approx 92\ d$