Übungsblatt 0

Ausgabe 18.10.2016
Abgabe —
Besprechung 20.10.2016

Aufgabe	1	2	3	4	Summe
Punkte	—	—	—	—	—

Allgemeine Informationen

- Abgabe nur in Gruppen von min. 2 bis max. 3 Personen (Ausnahme 0. und 1. Übungsblatt). Einzelabgaben werden nicht akzeptiert.
- Alle Namen sind auf der ersten Seite anzugeben. Gruppenmitglieder müssen zur gleichen Gruppe gehören.
- Das Angabenblatt muss mit abgegeben werden.
- Abgebene Aufgaben müssen vorgerechnet werden können. Für Modul III a (9 LP) und b (6 LP) muss eine Übung aus den Übungen 1 – 9 an der Tafel vorgerechnet werden, für Modul III a zusätzlich eine Übung aus den Übungen 10 – 13, um zur Klausur zugelassen zu werden.
- Für Modul III a (9 LP) und b (6 LP) müssen 50% der Punkte aus den Übungen 1 – 9, für Modul III a zusätzlich 50% aus den Übungen 10 – 13 erreicht werden, um zur Klausur zugelassen zu werden.
- Weitere Information finden Sie auch auf https://hera.ph1.uni-koeln.de/~walch/Elektrodynamik16/Inhalt.html

Aufgabe 1

Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke

1. $\nabla|\vec{r}|$
2. $\nabla\cdot\vec{r}$
3. $\nabla\frac{1}{|\vec{r}|}$
4. $\nabla\times\vec{r}$

5. $\nabla \cdot \nabla |\vec{r}| = \Delta |\vec{r}|$

Aufgabe 2

Es seien $f(r)$ ein skalares Feld und $\vec{g}(r)$ ein Vektorfeld, die nur von $r = |\vec{r}|$ abhängen. Berechnen Sie

1. $\nabla f(r)$
2. $\nabla \cdot \vec{g}(r)$
3. $\nabla \times \vec{g}(r)$
4. $\nabla(f(r)\vec{g}(r)) = (\nabla f(r)) \cdot \vec{g}(r) + f(r)\nabla \cdot \vec{g}(r)$

Zeigen Sie komponentenweise unter Verwendung des Levi-Civita-Symbols ϵ_{ijk}

5. $\nabla \times (\nabla \times \vec{g}(r)) = \nabla(\nabla \cdot \vec{g}(r)) - \Delta \vec{g}(r)$

Machen Sie sich dazu noch einmal im Detail mit den Eigenschaften von ϵ_{ijk} vertraut.

Aufgabe 3

In der Elektrodynamik wird zur Beschreibung von Punktladungen die sogenannte δ-Funktion (Distribution) benutzt. Sie ist nur im Zusammenhang mit einer Integration definiert:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) f(x) dx = f(x_0) \,, \tag{1}$$

wobei $f(x)$ eine stetige Funktion ist.
Für $f(x) == 1$ erhält man die Normierung

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) dx = 1 \,. \tag{2}$$

Man kann die δ-Funktion durch beliebig oft differenzierbare Funktionen approximieren. Zum Beispiel

$$\delta(x) = \lim_{n \to \infty} \delta_n(x) \text{ mit } \delta_n(x) = n e^{-\pi n^2 x^2} \,. \tag{3}$$

1. Skizzieren Sie diese Funktion, zeigen Sie, dass sie normiert ist, und zeigen Sie am Beispiel $f(x) = ax$, dass Gleichung 1 gilt, indem Sie zunächst integrieren und anschließend $n \to \infty$ gehen lassen.

2. Zeigen Sie:

$$\begin{aligned} \delta(x) &= \delta(-x) && (4) \\ x\delta(x) &= 0 && (5) \\ \delta(ax) &= \frac{1}{a}\delta(x) && (6) \end{aligned}$$

3. Weisen Sie für

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n(x) \text{ mit } \delta_n(x) = \frac{1}{\pi}\frac{\sin(nx)}{x} \tag{7}$$

die Normierung nach, und zeigen Sie am Beispiel $f(x) = x$ wie in 1. die Gültigkeit von Gleichung 1 nach.

4. Was folgt daraus für das Integral

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-n}^{n} e^{ikx} dk\,? \tag{8}$$

Aufg. 1

1. $\nabla|\vec r| = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} (x^2+y^2+z^2)^{1/2} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{|\vec r|}$

2. $\nabla \cdot \vec r = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3$

3. $\nabla \frac{1}{|\vec r|} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \left(-\frac{1}{\cancel{2}}\right) \cdot \cancel{2} \cdot \frac{1}{|\vec r|^3} = - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \frac{1}{|\vec r|^3}$

4. $\nabla \times \vec r = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$

$\frac{\partial}{\partial x}$ x
$\frac{\partial}{\partial y}$ y
$\frac{\partial}{\partial z}$ z
$\frac{\partial}{\partial x}$ x
$\frac{\partial}{\partial y}$ y

5. $\nabla \cdot \nabla|\vec r| = \Delta|\vec r| \underset{1.}{=} \nabla \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{|\vec r|} \right)$

$= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x/(x^2+y^2+z^2)^{1/2} \\ \vdots \\ \ \end{pmatrix} =$ Hier div(…) beachten $\cancel{\begin{pmatrix} \frac{1}{|\vec r|} - \frac{1}{2} \frac{x}{|\vec r|^3} 2x \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{|\vec r|^2}{|\vec r|^3} - \frac{x^2}{|\vec r|^3} \\ \vdots \end{pmatrix}}$

$\cancel{= \begin{pmatrix} y^2+z^2 \\ x^2+z^2 \\ x^2+y^2 \end{pmatrix} \frac{1}{|\vec r|^3}}$

mit $\partial_x \frac{x}{|\vec r|^3} = \frac{-x^2}{|\vec r|^3} + \frac{1}{|\vec r|}$

$= \partial_x \left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \right) + \partial_y \left(\frac{y}{(\ldots)^{3/2}} \right) + \partial_z \left(\frac{z}{(\ldots)^{3/2}} \right)$

$\overset{\mathrm{div}(\ldots) \overset{\nabla}{=} 0}{=} \frac{3}{|\vec r|} - \frac{x^2+y^2+z^2}{|\vec r|^3}$

Aufg. 2

1. $\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial r}\cdot x \\ \frac{\partial f}{\partial r}\cdot y \\ \frac{\partial f}{\partial r}\cdot z \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{r} = \frac{\partial f}{\partial r}\cdot\frac{1}{r}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \nabla f(r)$

2. $\frac{\partial g}{\partial r}\cdot\frac{1}{r}\,(x+y+z) = \nabla\cdot\vec{g}(r)$

3. $\nabla\times\vec{g}(r) = \nabla\times\begin{pmatrix}g_1(r)\\g_2(r)\\g_3(r)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_3(r)}{\partial y} - \frac{\partial g_2(r)}{\partial z} \\ \frac{\partial g_1(r)}{\partial z} - \frac{\partial g_3(r)}{\partial x} \\ \frac{\partial g_2(r)}{\partial x} - \frac{\partial g_1(r)}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y\,g_3' - g_2'\,z \\ z\,g_1' - g_3'\,x \\ x\,g_2' - g_1'\,y \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{r}$

4. $\nabla(f(r)\,\vec{g}(r)) = \nabla\cdot\begin{pmatrix}f(r)\,g_1(r)\\f(r)\,g_2(r)\\f(r)\,g_3(r)\end{pmatrix} = (\nabla f(r))\cdot\vec{g}(r) + f(r)\,(\nabla\cdot\vec{g}(r))$

$= \frac{\partial f}{\partial r}\,\frac{1}{r}\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\cdot\vec{g}(r)\right) + f(r)\,\frac{\partial g}{\partial r}\cdot\frac{1}{r}\,(x+y+z)$

5. z.z.: $\nabla\times(\nabla\times\vec{g}(r))$

Levi-Civita-Symbol $\varepsilon_{ijk} =$ +1 gerade Permutation von i,j,k

-1 ungerade — " —

0 falls zwei Indizes gleich sind

$(\nabla\times\vec{g}(r))_i = \sum_{j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\,\frac{\partial x_k}{\partial x_j}$

$$(\nabla\times(\nabla\times\vec{g}(r)))_i = \left[\nabla\times\left(\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}\frac{\partial \cancel{g_k}}{\partial x_j}\right)\right]_i$$

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x_1}\\ \frac{\partial}{\partial x_2}\\ \frac{\partial}{\partial x_3}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\varepsilon_{123}\frac{\partial g_3}{\partial x_2}-\varepsilon_{132}\frac{\partial g_2}{\partial}\\ \varepsilon_{231}\frac{\partial g_1}{\partial x_3}-\varepsilon_{213}\frac{\partial g_3}{\partial x_1}\\ \varepsilon_{312}\frac{\partial g_2}{\partial x_1}-\varepsilon_{321}\frac{\partial g_1}{\partial x_2}\end{pmatrix}$$

$$= \quad \varepsilon_1$$

Internet:

$$(\nabla\times\nabla\times\vec{g}(r))_i = \sum_{j,k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}\sum_{l,m=1}^{3}\varepsilon_{klm}\overbrace{\frac{\partial}{\partial x_l}g_m}^{g_m'\,\frac{x_l}{r}}$$

$$= \sum_{j,k,l,m}^{3}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}\frac{\partial^2 g_m}{\partial x_j\partial x_l}$$

$$= \sum_{j,k,l,m}^{3}(\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{ji})\frac{\partial^2 g_m}{\partial x_j\partial x_l}$$

Aufg. 3

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x_0)\, f(x)\, dx = f(x_0)$$

Wähle: $f(x) \equiv 1$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x_0)\, dx = 1$$

$$\delta(x) = \lim_{n\to\infty} \left(n \cdot e^{-\pi n^2 x^2}\right)$$

1.

Normiert: $\int_{-\infty}^{\infty} \lim_{n\to\infty} \delta_n(x) \underset{\text{Fkt. stetig}}{=} \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} n \cdot e^{-\pi \cdot n^2 \cdot x^2}$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} n \cdot e^{-\pi n^2 x^2} dx \right)^2 = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} n \cdot e^{-\pi n^2 (x^2+y^2)}\, dx$$

$$\underset{\text{Polarkoordinaten}}{=} \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} n \cdot e^{-\pi n^2 r}\, d\varphi\, dr = 2\pi \cdot \int_0^{\infty} n \cdot e^{-\pi \cdot n^2 \cdot r}\, dr$$

$$= 2\pi \cdot \left[\frac{n}{-\pi \cdot n^2} \cdot e^{-\pi \cdot n^2 r} \right]_0^{\infty}$$

$\vdots$

$$= 2\pi \cdot \lim_{n,r\to\infty} \frac{e^{-\pi \cdot n^2 \cdot r}}{-\pi \cdot n} - \frac{1}{-\pi n}$$

Aufg. 2

$$[\nabla \times (\nabla \times \vec{g}(r))]_i = \varepsilon_{ijk}\, \partial_j\, (\nabla \times \vec{g}(r))_k$$

$$= \varepsilon_{ijk}\, \partial_j\, \varepsilon_{klm}\, \partial_l\, g_m$$

$$\overset{=}{\varepsilon} (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})\, \partial_j \partial_l g_m$$

ε-Identität

$$= \delta_{il}\,\delta_{jm}\,\partial_j\,\partial_l\,g_m - \underbrace{\delta_{im}\,\delta_{jl}\,\partial_j\,\partial_l\,g_m}_{(\Delta\,\vec{g}(\vec{r}))_m} \qquad \delta_{im}\, g_m = g_i$$

$\delta_{il}\,\partial_l = \nabla$

$\delta_{jm}\partial_j\, g_m = \nabla \vec{g}(r) \qquad \delta_{jl}\quad \partial_j \partial_l = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2 = \Delta$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \Delta \vec{g}(r)_i$$

$$\Rightarrow (\nabla \times \nabla \times \vec{g}(r))_i = (\nabla\, \nabla\, \vec{g} - \Delta\, \vec{g})_i$$

Aufg. 3

1. $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x_0)\, f(x)\, dx = f(x_0)$ liefert $f(x_0)$ bei: $\delta(0) = \delta(x-x_0)$

Normiert

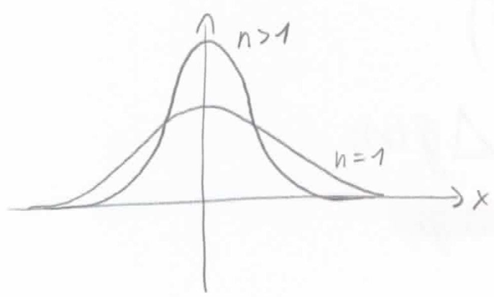
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x_0)\, dx = 1$$

Bsp.: $\delta_n(x) = n \cdot e^{-\pi n^2 x^2}$

$$\delta(x) = \lim_{n\to\infty} \delta_n(x)$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(x-x_0)\, f(x)\, dx = f(x_0)$$ Name: Dirac-Folge

Skizze:



Normierung:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\, dx$$

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x^2+y^2)}$$

$$\Leftrightarrow I^2 = \int_0^{\infty} dr \int_0^{2\pi} d\varphi\; r \cdot e^{-ar^2} = \frac{2\pi}{2a} \int_0^{\infty} du\; e^{-u} = \frac{\pi}{a} \left[-e^{-u}\right]_0^{\infty} = \frac{\pi}{a}$$

$du = 2a\, r\, dr$

$u = ar^2$

$$n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\pi n^2}} \cdot n = \underline{\underline{1}}$$

Aufg. 3 (weiterführung)

$f(x) = a \cdot x$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x_0)\, a x\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} n \cdot e^{-\pi n^2 (x-x_0)^2} a x\, dx$$

$$\underset{t=x-x_0}{=} \int_{-\infty}^{\infty} n \cdot e^{-\pi t^2 n^2} a(t+x_0)\, dt$$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} n e^{-\pi t^2 n^2} a t\, dt}_{\substack{\text{Punktsymmetrisch} \\ \Rightarrow \text{ Integral ist } 0}} + \int_{-\infty}^{\infty} n e^{-\pi t^2 n^2} a x_0\, dt$$

$$= 0 + \underbrace{a x_0 \int_{-\infty}^{\infty} n e^{-\pi t^2 n^2} dt}_{\overset{\text{vorherige Rechnung}}{=} 1 \text{ S. 6}} = 1$$

a) $\delta(x) = \delta(-x)$
b) $x\,\delta(x) = 0$
c) $\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$

a) $$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(-x) f(x)\, dx \underset{-y=x}{=} -\int_{+\infty}^{-\infty} \delta(y) f(-y)\, dy \underset{y=x}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(-x)\, dx$$ $x=0$, wegen δ-Fkt.

$$\overset{\text{Def.}}{\Rightarrow} f(-0) = f(0) \overset{\text{Def.}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x)\, dx$$

Da kein x_0 vorhanden, wird $x=0$ gesetzt

Allg.: $$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(-x-x_0) f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(y) f(-y+x_0)\, dx = f(x_0)$$

b) $x\,\delta(x) = 0$ $$\int_{-\infty}^{\infty} x\,\delta(x) f(x)\, dx = (x\, f(x))\Big|_{x=0} = 0$$

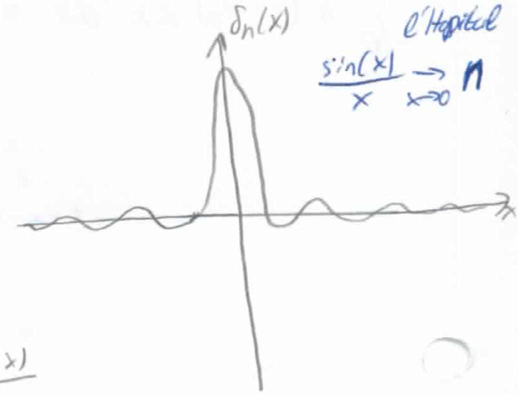
c) $$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(ax)\, f(x)\, dx \underset{y=ax}{=} \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(y)\, f\left(\frac{y}{a}\right) dy = \frac{1}{|a|} f(0) = \frac{1}{|a|} f\left(\frac{y}{a}\right)\Big|_{y=0}$$

$a<0$

$$\frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} dy\ \delta(y)\, f\left(\frac{y}{a}\right)$$

da sich das Vorzeichen ändert, bei $a<0$, ändert sich das Integral (bzw. die Grenzen)

3. $$\lim_{n\to\infty} \delta_n(x) \quad \text{mit} \quad \delta_n(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin(nx)}{x}$$



l'Hopital $\frac{\sin(x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} n$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(x)\, dx = 1$$
$\Downarrow$
Integralsinus (Residuensatz)

$$Si(nx) = \text{sinc} = \frac{\sin(nx)}{nx}$$

4. $$\left(\lim_{n\to\infty}\right) \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^{n} e^{ikx}\, dk = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{e^{ikx}}{ix}\right]_{-n}^{n} \underset{\text{Euler}}{=} \frac{1}{\pi} \frac{\sin(nx)}{x}$$

$\left(\lim_{n\to\infty}\right)$ $\Downarrow$ wird erst weggelassen

Euler: $$\sin(nx) = \frac{1}{2i}\left(e^{inx} - e^{-inx}\right)$$