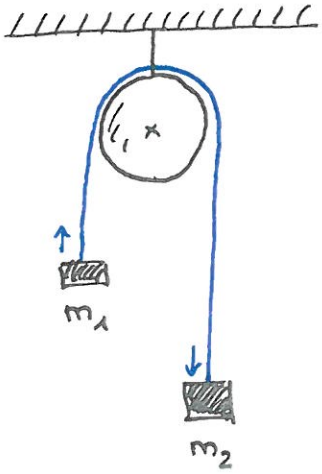
Analytische Mechanik

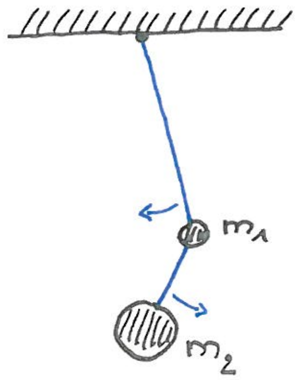
In diesem letzten Abschnitt der Vorlesung widmen wir unsere Aufmerksamkeit noch einmal der klassischen Mechanik. Dies mag zunächst überraschend klingen, hatten wir doch mit der Newtonschen Mechanik bereits eine umfassende und komplette Beschreibung der mechanischen Bewegung kennengelernt, deren Erweiterung zur relativistischen Mechanik für sehr hohe Geschwindigkeiten $v \sim c$ wir erst kürzlich besprochen haben.

Zu den größten Erfolgen der Newton'schen Mechanik gehört die präzise Beschreibung der Planetenbewegung. Gegen Ende des 18. Jahrhunderts stellten sich mit der Industrialisierung jedoch ganz neuartige Fragen der klassischen Mechanik – wie läßt sich eine mechanische Bewegung beschreiben, welche einer Reihe von Zwangsbedingungen unterliegt? Diese Frage stellt sich etwa in der Betrachtung aller Bewegungen in einem Motor. Konzeptionell einfachere Beispiele sind etwa:

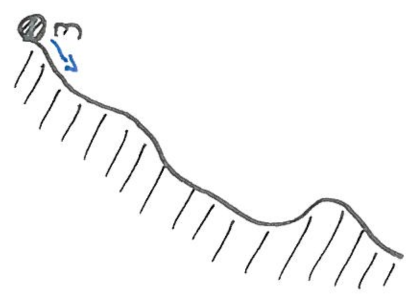
Atwood Maschine



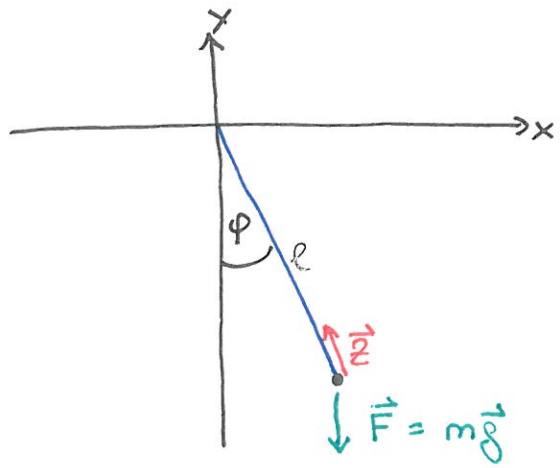
Doppelpendel



Kugelbahn



Die ersten Ansätze, solche Systeme mit Zwangsbedingungen zu beschreiben, verfolgten die Idee, das System in seinen ursprünglichen Koordinaten unter Verwendung (unendlich großer) Zwangskräfte zu beschreiben. Letzteres erlaubt, die Zahl der freien Koordinaten zu reduzieren. Betrachten wir dazu das Beispiel des ebenen Pendels:



Die Beschränkung der Bahn kann durch folgende Zwangsbedingungen ausgedrückt werden

$$z = 0 \quad ; \quad x^2 + y^2 - l^2 = 0$$

Mit der durch den Faden auf den Massepunkt ausgeübten Zwangskraft $\vec{Z}$ lautet das zweite Newtonsche Axiom:

$$\boxed{m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \vec{Z}}$$

Allerdings stellen wir fest, daß die genaue Form dieser Zwangskraft $\vec{Z}$ (zunächst) unbekannt ist und im allgemeinen von der tatsächlichen Bewegung abhängt. Lediglich die Wirkung auf die Bewegung ist bekannt, nämlich die Einhaltung der Zwangsbedingung.

Tatsächlich stellt sich die Berechnung der Zwangskräfte (via sogenannte Lagrange-Gleichungen erster Art) als ebenso mühevoll wie bedingt nützlich heraus. Dies führte schließlich zu alternativen Ansätzen, insbesondere dem Lagrange- und Hamilton-Formalismus.

Klassifikation der Zwangsbedingungen

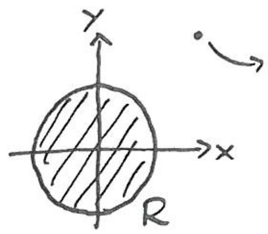
Bevor wir uns mit diesen alternativen Formulierungen der klassischen Mechanik vertraut machen wollen, ist es zunächst hilfreich, die verschiedenen Formen der Zwangsbedingungen zu klassifizieren:

- Holonome Zwangsbedingungen lassen sich schreiben als

$$\boxed{g_\alpha(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t) = 0} \quad (*) \qquad \alpha = 1, 2, \dots, R$$

  - für das ebene Pendel: $g_1(\vec{r}, t) = z \qquad g_2(\vec{r}, t) = x^2 + y^2 - \ell^2$
  - für die Atwood Maschine: $g_1(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t) = x_1 + x_2 - \ell$

- Nicht-holonome Zwangsbedingungen lassen sich nicht durch (*) darstellen, sondern nehmen allgemein die Form einer Ungleichheit an; etwa



Bewegung eines Massepunktes außerhalb einer Kreisscheibe:

$$x^2 + y^2 - R^2 \geq 0.$$

- Schließlich wird die Zeitabhängigkeit von Zwangsbedingungen unterschieden:

rheonome Zwangsbedingungen	→ zeitabhängig
skleronome Zwangsbedingungen	→ zeitunabhängig

Konzeptioneller Überblick

Im folgenden werden wir uns mit dem sogenannten Variations-prinzip vertraut machen und dieses anwenden, um aus der Newtonschen Mechanik den sogenannten Lagrange-Formalismus (und später Hamilton-Formalismus) abzuleiten. Bevor wir dies jedoch tun, wollen wir einige einfache (wenngleich noch unmotivierte) Manipulationen der Newtonschen Bewegungsgleichung vornehmen, die uns erlauben werden, einen gewissen konzeptionellen Überblick über die klassische Mechanik und ihre diversen Formulierungen zu erreichen.

Betrachte dazu die Newtonsche Bewegungsgleichung für ein einzelnes Teilchen

$$m\ddot{\vec{q}} = \vec{F}$$

wobei $\vec{F}$ eine konservative Kraft sein möge, d.h. $\vec{F} = -\frac{\partial}{\partial \vec{q}} U$

Wir können nun schreiben

$$m\ddot{\vec{q}} = \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{\vec{q}}} T$$

mit $T = T(\dot{\vec{q}}) = \frac{1}{2} m \dot{\vec{q}}^{\,2}$ der kinetischen Energie.

Die Newtonsche Gleichung läßt sich also reformulieren als:

$$\boxed{\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{\vec{q}}} - \frac{\partial}{\partial \vec{q}}\right) \mathcal{L}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) = 0}$$

mit der Lagrange-Funktion $\boxed{\mathcal{L}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) = T - U}$.

Damit ergibt sich der folgende konzeptionelle Überblick:

Klassische Mechanik

Newtonsche Mechanik

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \; (+ \vec{Z})$$

↓

relativistische Mechanik

$$m \frac{du^\alpha}{d\tau} = F^\alpha$$

"Vektor - Mechanik"

Lagrange Mechanik

$$\mathcal{L}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) = T(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) - U(\vec{q}, \dot{\vec{q}})$$

→ Euler - Lagrange Gleichungen

↓

Hamilton Mechanik

$$H(\vec{q}, \vec{p}) = \vec{p} \cdot \dot{\vec{q}} - \mathcal{L}(\vec{q}, \dot{\vec{q}})$$

→ kanonische Gleichungen

"analytische Mechanik"

(basiert auf Skalaren)

→ Noether - Theorem

Verbindung zwischen Symmetrie und Erhaltungsgröße

→ Prinzip der kleinsten Wirkung

Variationsprinzipien

Teil I: Variation ohne Nebenbedingung

Im Standard-Kalkulus beschäftigen wir uns mit Funktionen $y = y(x)$ oder $y = y(\vec{x})$, welche eine Zahl oder einen Vektor als Argument besitzt. In der Variationsrechnung betrachtet man dagegen Funktionen, welche als Argument wiederum Funktionen nehmen, sogenannte Funktionale. Betrachte etwa

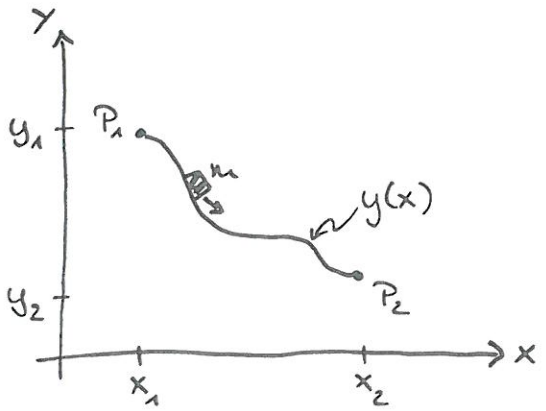
$$S = S[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx \; L(y, y', x)$$

wobei L eine gegebene Funktion von $y = y(x)$, $y' = \frac{d}{dx} y(x)$ und x sei. Typischerweise sind die Randwerte ebenfalls vorgegeben

$$y(x_1) = y_1 \qquad y(x_2) = y_2$$

Gesucht sei nun die Funktion $y(x)$, für welche das Funktional $S[y]$ minimal wird (oder allgemeiner extremal wird).

Beispiel: Brachistochronen (Bernoulli 1696)



- Körper der Masse m gleitet reibungsfrei auf Bahnkurve $y(x)$ von P_1 nach P_2
- Anfangsgeschwindigkeit $= 0$

$\rightarrow$ Auf welcher Kurve kommt der Körper am schnellsten von P_1 nach P_2?

Es sei nun Δt die Zeit, die der Körper von P_1 nach P_2 braucht $\rightarrow$ Δt ist ein Funktional der Bahnkurve $y(x)$:

$$\Delta t = S[y]$$

Konstruktion des Funktionals

kinetische Energie: $T = \frac{1}{2} m v^2$
potentielle Energie: $U = mg(y - y_1)$
Gesamtenergie $T + U = 0$ am Punkt P_1

Energieerhaltung: $T + U = 0 \rightarrow \frac{1}{2} m v^2 = mg(y_1 - y)$

$$\rightarrow v = \sqrt{2g(y_1 - y)}$$

Nun gilt allgemein: $V = \frac{ds}{dt} \rightarrow dt = \frac{ds}{V}$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \rightarrow ds = dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$
$$= dx\sqrt{1 + y'^2}$$

Das gesamte Zeitintervall Δt läßt sich dann berechnen über:

$$\Delta t = \int_1^2 dt = \int_1^2 \frac{ds}{v} = \int_{x_1}^{x_2} dx \underbrace{\frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{2g(y_1 - y)}}}_{= L(y, y', x)} = S[y]$$

Wir suchen nun also jene Funktion $y(x)$, welche dieses Funktional minimiert. Wie wir im folgenden sehen werden, läßt sich die gesuchte Funktion $y(x)$ als Lösung einer Differentialgleichung darstellen.

Zusammenfassung letzte Vorlesung

- Einstieg in die analytische Mechanik

  - Perspektivenwechsel: Gesucht sind alternative Theorien zur Newtonschen Mechanik, welche insbesondere Systeme mit Zwangsbedingungen beschreiben können.

    → Lagrange + Hamilton Formalismus.

- Variationsrechnung (mathematisches Rüstzeug für Lagrange-Formalismus

  - Funktionale

$$S = S[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx \; L(y, y', x) \qquad \text{wobei } y = y(x), \; y' = y'(x)$$

1) Variation ohne Nebenbedingung
   - Brachistochrone

     → Aufstellen des Funktionals

   - Wie läßt sich die Funktion $y(x)$ finden, welche das Funktional minimiert?

Euler-Lagrange-Gleichung

Die allgemeine Problemstellung lautet: Welche Funktion $y(x)$ macht das Funktional

$$S = S[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx \; L(y, y', x)$$

minimal? Dabei werden die Funktion $L(y, y', x)$ und die Randwerte $y(x_1) = y_1$ und $y(x_2) = y_2$

als gegeben vorausgesetzt.

Es sei nun $y(x)$ die gesuchte Funktion. Dann gilt:

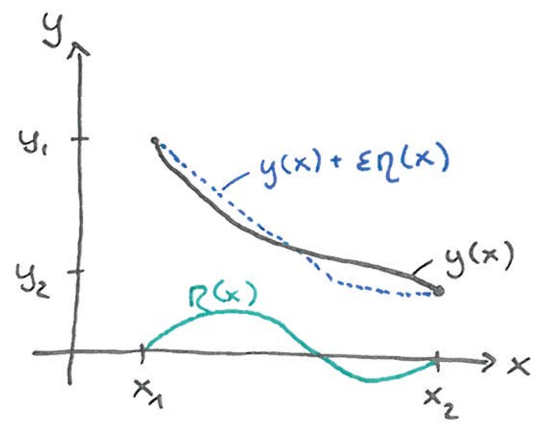
$$S[y + \delta y] > S[y]$$

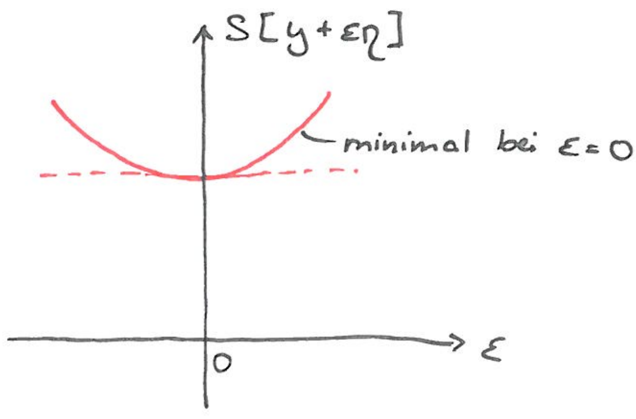
für eine beliebige infinitesimale Abweichung $\delta y(x)$ von $y(x)$.
Wir schreiben:

$$\delta y(x) = \varepsilon \cdot \eta(x)$$

mit ε infinitesimal
$\eta(x)$ beliebig, aber:

- η differenzierbar
- $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$





Nehme nun $y(x), \eta(x)$ als fest an, so daß das Funktional $S[y+\varepsilon\eta]$ eine Funktion von ε ist.

Für die gesuchte Funktion $y(x)$ muß gelten:

$$\left(\frac{d\,S[y+\varepsilon\eta]}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = 0 \qquad \text{für beliebige } \eta(x)$$

Es gilt:

$$S[y+\varepsilon\eta] = \int_{x_1}^{x_2} dx\; L(y+\varepsilon\eta,\, y'+\varepsilon\eta',\, x)$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} dx \left[L(y,y',x) + \frac{\partial L(y,y',x)}{\partial y}\cdot\varepsilon\eta(x) + \frac{\partial L(y,y',x)}{\partial y'}\,\varepsilon\eta'(x)\right] + O(\varepsilon^2)$$

Damit ergibt sich:

$$\left(\frac{d\,S[y+\varepsilon\eta]}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = \int_{x_1}^{x_2} dx \left[\frac{\partial L(y,y',x)}{\partial y}\cdot\eta(x) + \frac{\partial L(y,y',x)}{\partial y'}\cdot\eta'(x)\right]$$

partielle Integration

$$\int_{x_1}^{x_2} dx\, \frac{\partial L}{\partial y'}\,\eta' = \underbrace{\frac{\partial L}{\partial y'}\,\eta\,\Big|_{x_1}^{x_2}}_{=0} - \int_{x_1}^{x_2} dx \left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right)'\eta(x)$$

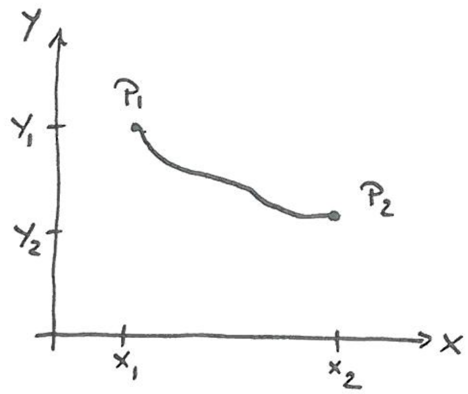
wegen $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$

$$= \int_{x_1}^{x_2} dx \left[\frac{\partial L(y,y',x)}{\partial y} - \frac{d}{dx}\,\frac{\partial L(y,y',x)}{\partial y'}\right]\eta(x) \stackrel{!}{=} 0$$

Da dies für beliebige $\eta(x)$ gelten soll, ergeben sich die sogenannten <u>Euler-Lagrange Gleichung</u>:

$$\boxed{\frac{d}{dx}\,\frac{\partial L(y,y',x)}{\partial y'} = \frac{\partial L(y,y',x)}{\partial y}}$$

Beispiel: Kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten



$$\Delta S = \int_1^2 ds = \int_{x_1}^{x_2} dx \underbrace{\sqrt{1+y'^2}}_{L(y,y',x)} = S[y]$$

$$\frac{\partial L}{\partial y'} = \frac{1}{2} \frac{2y'}{\sqrt{1+y'^2}} \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial y} = 0$$

→ Euler-Lagrange-Gleichung

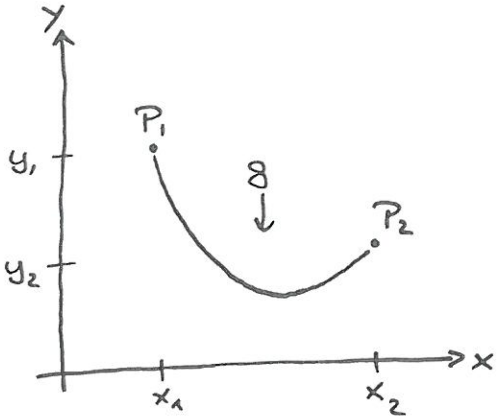
$$\frac{d}{dx} \frac{y'(x)}{\sqrt{1+y'(x)^2}} = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{y'(x)}{\sqrt{1+y'(x)^2}} = \text{const.}$$

$$\longrightarrow \quad y'(x) = \text{const.} \quad \longrightarrow \quad y(x) = ax + b$$

d.h. die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten ist eine Gerade, welche durch die Endpunkte $y(x_1) = y_1$ und $y(x_2) = y_2$ festgelegt wird.

Teil II: Variation mit Nebenbedingung

Beispiel:



ein Seil der Länge ℓ wird im Schwerefeld an den Punkten P_1 und P_2 aufgehängt

→ Was ist die Gleichgewichtslage, in welcher die potentielle Energie minimal wird?

potentielle Energie: $dU = dm \cdot g y$ $\quad dm = \rho \cdot ds$ $\quad ds = dx\sqrt{1+y'^2}$

(ρ: Dichte (Masse/Länge))

Gesucht ist also die Funktion $y(x)$, welche das folgende Funktional minimiert:

$$S[y] = \Delta U = \int_1^2 dU = \int_{x_1}^{x_2} dx \underbrace{g \cdot \rho}_{g \cdot \rho = 1} \underbrace{y(x) \cdot \sqrt{1+y'(x)^2}}_{L(y,y',x)}$$

mit Randwerten $y(x_1) = y_1$ und $y(x_2) = y_2$

Allerdings müssen wir eine Nebenbedingung beachten: Die Länge des Seils ist vorgegeben, d.h. das gesuchte $y(x)$ muß die Nebenbedingung

$$N[y] = \ell = \int_1^2 ds = \int_{x_1}^{x_2} dx \underbrace{\sqrt{1+y'(x)^2}}_{G(y,y',x)} = \text{const.}$$

erfüllen.

Notation: $S[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx \; L(y, y', x)$ $\qquad N[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx \; G(y, y', x)$

Wir definieren:

$$L^*(y,y',x) = L(y,y',x) - \lambda G(y,y',x)$$

mit $\lambda \in \mathbb{R}$ dem sogenannten Lagrange-Multiplikator

Das so definierte L^* soll die Euler-Lagrange Gleichung

$$\boxed{\frac{d}{dx}\frac{\partial L^*(y,y',x)}{\partial y'} = \frac{\partial L^*(y,y',x)}{\partial y}}$$

erfüllen, und damit die gesuchte Funktion $y(x)$ unter Berücksichtigung der Nebenbedingung liefern. $\longrightarrow$ Beweis später!

Mit $gS = 1$ haben wir: $L = y\sqrt{1+y'^2}$, $G = \sqrt{1+y'^2}$

$$L^* = (y-\lambda)\sqrt{1+y'^2}$$

Wir sehen, daß L^* nicht explizit von x abhängt.
Damit gilt:

$$\boxed{\frac{\partial L^*}{\partial y'}\cdot y' - L^* = \text{const.}}$$

$\rightarrow$ Rückseite

Somit:

$$\frac{\partial L^*}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}(y-\lambda) \quad \rightarrow \quad \frac{\partial L^*}{\partial y'}\cdot y' - L^* = \frac{-(y-\lambda)}{\sqrt{1+y'^2}}$$

$$= \text{const.} = -a \qquad (*)$$

$$\rightarrow \boxed{y'^2 = \frac{1}{a^2}(y-\lambda)^2 - 1}$$

Diese Differentialgleichung wird erfüllt durch

$$y(x) = \lambda + a \cdot \cosh\left(\frac{x}{a} + b\right)$$

denn: $y'(x) = \sinh\left(\frac{x}{a} + b\right)$

$$y'(x)^2 = \left[\sinh\left(\frac{x}{a}+b\right)\right]^2 = \left[\cosh\left(\frac{x}{a}+b\right)\right]^2 - 1 \quad \rightarrow \text{ok}\checkmark$$

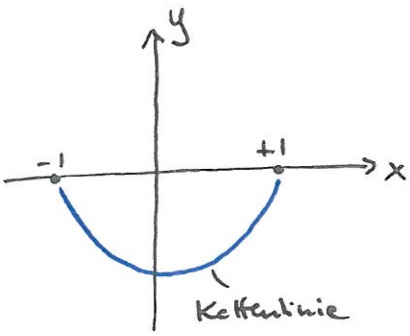
Die Parameter a, b, λ werden bestimmt durch

$$y(x_1) = y_1 \qquad y(x_2) = y_2 \qquad \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{1+y'^2} = \ell$$

Spezielles Fall: $(x_1, y_1) = (-1, 0) \qquad (x_2, y_2) = (+1, 0)$

$$\rightarrow \underbrace{b = 0}_{\text{Symm. um } x=0} \qquad \lambda = -a\cosh\left(\frac{1}{a}\right)$$

$$\rightarrow \boxed{y(x) = a \cdot \cosh\left(\frac{x}{a}\right) - a \cdot \cosh\left(\frac{1}{a}\right)}$$



Der Parameter a wird durch die Länge ℓ festgelegt.

Aus (*) folgt:

$$\sqrt{1+y'^2} = \frac{1}{a}(y-\lambda) = \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$$

Und somit:

$$\ell = \int_{-1}^{+1} dx \sqrt{1+y'^2} = \int_{-1}^{+1} dx \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$= a\left[\sinh\left(\frac{x}{a}\right)\right]_{-1}^{+1} = 2a\sinh\left(\frac{1}{a}\right)$$

Zusammenfassung letzte Vorlesung

- Euler - Lagrange Gleichung

$$S = S[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx \; L(y, y'; x)$$

Randwerte $y(x_1) = y_1$ und $y(x_2) = y_2$

Das Funktional wird minimiert, bzw. stationär für $y(x)$

$$\delta S = 0 \rightarrow \underbrace{\frac{d}{dx} \frac{\partial L(y, y', x)}{\partial y'} = \frac{\partial L(y, y', x)}{\partial y}}_{\text{Euler-Lagrange Gleichung}}$$

- Variation mit Nebenbedingung

$$S = S[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx \; L(y, y'; x)$$

$$N = N[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx \; G(y, y'; x)$$

$$\rightarrow L^*(y, y'; x) = L(y, y'; x) - \lambda \, G(y, y', x)$$

Lagrange-Multiplikator

$\rightarrow$ EL-Gleichung für L^* ergibt gesuchtes $y(x)$:

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial L^*(y, y'; x)}{\partial y'} = \frac{\partial L^*(y, y'; x)}{\partial y}$$