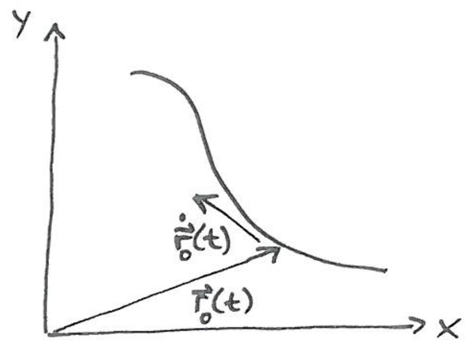
Strahlungsphänomene

Mit der allgemeinen Lösung der Maxwell-Gleichungen ausgerüstet wollen wir uns nun einem der grundlegenden Problemstellungen der Elektrodynamik zuwenden – die Bestimmung der elektromagnetischen Felder einer beliebig bewegten Punktladung. Insbesondere wollen wir den Fall betrachten, daß diese Punktladung nicht gleichförmig bewegt wird, sondern eine Beschleunigung erfährt. Eine beschleunigte Punktladung strahlt elektromagnetische Wellen ab.

Allgemeine Aufgabe:



Betrachte eine Punktladung mit der Bahn $\vec{r}_0(t)$

Ladungsverteilung

$$\rho(\vec{r},t) = q\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_0(t))$$

Stromverteilung

$$\vec{j}(\vec{r},t) = q\cdot\dot{\vec{r}}_0(t)\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_0(t))$$

→ Bestimme die retardierten Potentiale der bewegten Punktladung an einem gegebenen Ort im Raum.

Allgemeine Lösung komplex, benötigt Transformation von Inertialsystemen, machen wir eventuell nach Kurssegment über Relativitätstheorie.

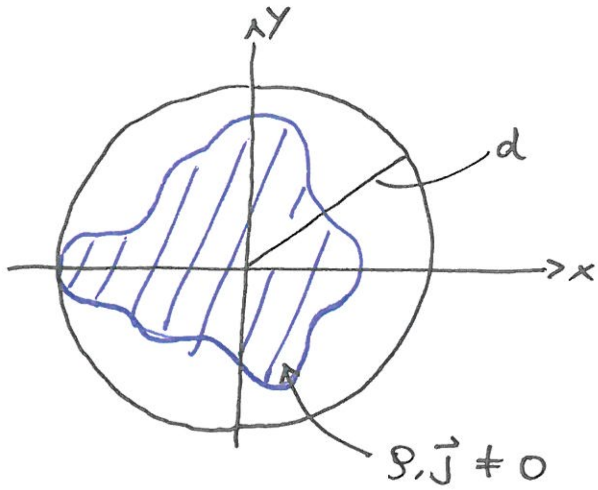
Dipolstrahlung.

Wenden wir uns also zunächst einer allgemeinen Fragestellung zu, die uns erlaubt, bestimmte Grenzfälle zu erkennen. Betrachten wir dazu eine oszillierende Ladungsverteilung, d.h. Ladungs- und Stromdichte seien periodische Funktionen

$$\rho(\vec{r},t) = \rho(\vec{r})\,e^{-i\omega t}$$
$$\vec{J}(\vec{r},t) = \vec{J}(\vec{r})\,e^{-i\omega t},$$

welche darüberhinaus auf einen endlichen Bereich vom Ausmaß d beschränkt seien

$$\begin{matrix}\rho(\vec{r})\\ \vec{J}(\vec{r})\end{matrix} = \begin{cases} \text{beliebig} & : r < d \\ 0 & : r > d \end{cases}$$



Unser Ziel sei nun die Bestimmung der Felder $\vec{E}, \vec{B}$ für sehr große Abstände $r \gg d$. Wir werden sehen, daß alle anderen relevanten Größen (Potentiale, Felder, ...) dieselbe Form der Zeitabhängigkeit

$$X(\vec{r},t) = X(\vec{r})\,e^{-i\omega t}$$

"erben" werden, sich also in einen Orts- und Zeitteil separieren lassen.

Betrachten wir dazu als erstes das retardierte Vektorpotential

$$\vec{A}_{ret}(\vec{r},t) = \frac{1}{c}\int d^3r' \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\vec{J}\left(\vec{r}', t-\frac{1}{c}|\vec{r}-\vec{r}'|\right)$$

$$= \frac{1}{c}\int d^3r' \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\underbrace{\vec{J}(\vec{r}')\, e^{-i\omega\left(t-\frac{1}{c}|\vec{r}-\vec{r}'|\right)}}_{\text{Separation von Orts- und Zeitteil}}$$

$$= \vec{A}(\vec{r})\, e^{-i\omega t}$$

wobei wir den Ortsanteil definieren als

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c}\int d^3r' \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\vec{J}(\vec{r}')\, e^{-i\underbrace{\frac{\omega}{c}}_{=k}|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

Aus $\vec{B}(\vec{r},t) = \vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{r},t) = [\vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{r})]\, e^{-i\omega t}$ folgt damit auch für das magnetische Feld eine Separation von Orts- und Zeitkoordinaten

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \vec{B}(\vec{r})\, e^{-i\omega t} \quad \text{mit} \quad \vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{r})$$

Außerhalb der Ladungsverteilung (d.h. $r>d$) gilt die Maxwell-Gl.

$$\underbrace{\vec{\nabla}\times\vec{B}(\vec{r},t)}_{=(\vec{\nabla}\times\vec{B}(\vec{r}))\,e^{-i\omega t}} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}(\vec{r},t) = 0 \qquad (\text{da } j=0 \text{ für } r>d)$$

$$\rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\vec{E}(\vec{r},t) = c\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B}(\vec{r}))\, e^{-i\omega t}$$

$$\rightarrow \vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}(\vec{r})\, e^{-i\omega t} \quad \text{und} \quad \vec{E}(\vec{r}) = \frac{i}{k}\vec{\nabla}\times\vec{B}(\vec{r}).$$

$k = \frac{\omega}{c}$

Nachdem wir nun gezeigt haben, daß sich Orts- und Zeitkoordinaten für Vektorpotential, magnetisches und elektrisches Feld separieren lassen, wenden wir uns jetzt der expliziten Form des Ortsanteils des retardierten Potentials zu

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c}\int d^3r' \, \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\vec{j}(\vec{r}')\, e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

Wir sind interessiert an den Feldern für $r \gg d$ und somit $r \gg r'$, weshalb wir einen kleinen Parameter $\frac{r'}{r} \ll 1$ haben, um welchen wir entwickeln können:

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{1}{r}\left[1 + \frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r^2} + \dots\right] \quad \longleftarrow \text{siehe KTP I: } \boxed{\text{Multipolentwicklung}}$$

$$= \frac{1}{r}\left[1 + \frac{1}{r}\hat{e}_r\cdot\vec{r}' + \dots\right] \qquad \text{mit } \hat{e}_r = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\rightarrow |\vec{r}-\vec{r}'| = r\left[1 - \frac{1}{r}\hat{e}_r\cdot\vec{r}' + \dots\right] = r - \hat{e}_r\vec{r}' + \dots$$

und damit

$$e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|} \approx e^{ikr}\, e^{-ik\hat{e}_r\cdot\vec{r}'}$$

Einsetzen in $\vec{A}(\vec{r})$ ergibt dann:

$$\vec{A}(\vec{r}) \approx \frac{1}{c}\int d^3r' \, \frac{1}{r}\Big[1 + \underbrace{\frac{1}{r}\hat{e}_r\cdot\vec{r}'}_{O\left(\frac{r'}{r}\right)}\Big]\vec{j}(\vec{r}')\, e^{ikr}\, e^{-ik\hat{e}_r\cdot\vec{r}'}$$

In führender Ordnung erhalten wir also

$$A(\vec{r}) \approx \frac{1}{c}\,\frac{e^{ikr}}{r}\int d^3r'\,\vec{J}(\vec{r}\,')\,e^{-ik\hat{e}_r\vec{r}\,'}$$

Betrachten wir nun die Langwellennäherung $\lambda \gg d$

wobei $\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi c}{\omega}$, d.h. $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ klein

Beispiele:
Atom $d \approx 1 Å = 10^{-10}m$
$\lambda = 500nm = 5 \cdot 10$
Handy $d \approx 10cm = 10^{-1}m$
$\lambda = 2{,}5m$

Damit

$$e^{-ik\hat{e}_r\cdot\vec{r}\,'} = 1 - \underbrace{ik\hat{e}_r\vec{r}\,' + \ldots}_{\text{wird vernachlässigt}}$$

In führender Ordnung ergibt sich also

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c}\,\frac{e^{ikr}}{r}\int d^3r'\,\vec{J}(\vec{r}\,')}$$

Hierbei gilt es zu beachten, daß für den ortsabhängigen Teil der Stromdichte $\vec{J}(\vec{r})$ nicht wie in der Magnetostatik

$$\int d^3r\,\vec{J}(\vec{r}) = 0$$

gilt. (In der Magnetostatik war dies zwingend aufgrund der Nicht-Existenz von magnetischen Monopolen.)

Betrachten wir zunächst die Kontinuitätsgleichung für den dynamischen Fall:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(\vec{r},t) + \vec{\nabla}\cdot\vec{j}(\vec{r},t) = 0$$

$$-i\omega\,\rho(\vec{r})\,e^{-i\omega t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{j}(\vec{r})\cdot e^{-i\omega t} = 0$$

$$\rightarrow \quad \boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{j}(\vec{r}) = i\omega\,\rho(\vec{r})}$$

im Gegensatz zum statischen Fall: $\vec{\nabla}\cdot\vec{j}(\vec{r}) = 0$

Faktor i entspricht Phasenverschiebung von $\pi/2$.

alternativ: $\rho(\vec{r},t) = \rho(\vec{r})\cdot\sin(\omega t)$

$$\rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t}\rho(\vec{r},t) = \omega\,\rho(\vec{r})\cos(\omega t) = -\vec{\nabla}\cdot\vec{j}(\vec{r},t)$$

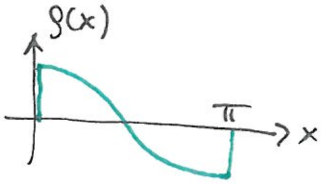
damit muß der Ansatz für $\vec{j}(\vec{r},t)$ also lauten

$$\vec{j}(\vec{r},t) = \vec{j}(\vec{r})\cos(\omega t)$$

$$\rightarrow \quad \boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{j}(\vec{r}) = -\omega\,\rho(\vec{r})}$$

Betrachten wir als Beispiel etwa die folgende, ein-dimensionale Ladungsverteilung

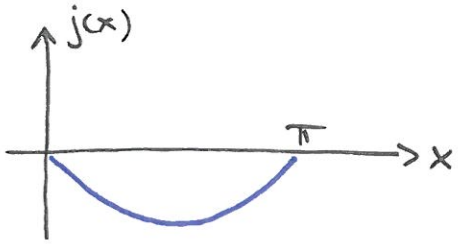
$$\rho(x) = \begin{cases} \cos x & : \quad 0 < x < \pi \\ 0 & : \quad \text{sonst} \end{cases}$$



Damit ergibt sich für die Stromdichte $j(x) = j_x(x)$

$$\frac{\partial}{\partial x} j(x) = -\omega \rho(x) = -\omega \cos(x)$$

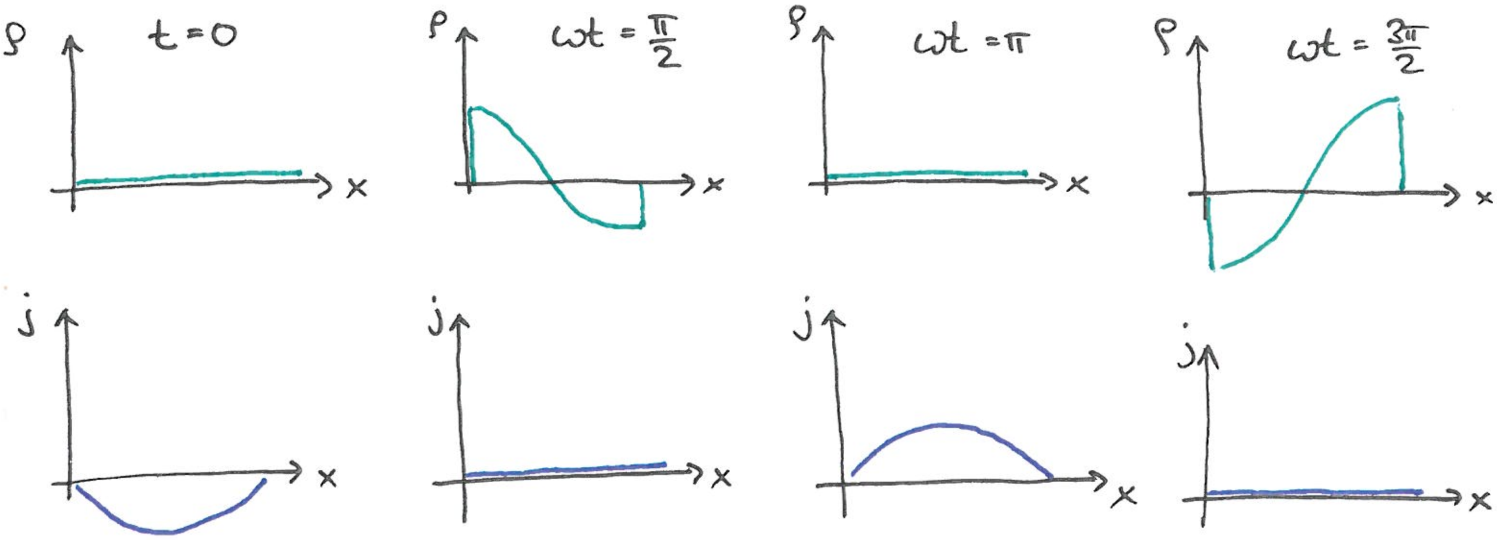
$$\rightarrow \quad j(x) = -\omega \sin(x)$$



Schauen wir jetzt die volle Zeitentwicklung an

$$\rho(x,t) = \rho(x) \sin(\omega t) = \cos(x) \sin(\omega t)$$

$$j(x,t) = j(x) \cos(\omega t) = -\omega \sin(x) \cos(\omega t)$$



Insbesondere gilt im Allgemeinen $\boxed{\int dx\, j(x) \neq 0}$

Allgemein gilt:

$$\boxed{\int d^3r\, \vec{j}(\vec{r}) = -i\omega \int d^3r\, \vec{r}\, \rho(\vec{r})}$$

denn: $\int d^3r\, j_x(\vec{r}) = \int d^3r\, \hat{e}_x \vec{j}(\vec{r}) = \int d^3r\, \frac{\partial}{\partial x}\vec{r}\cdot\vec{j}(\vec{r}) \overset{\text{P.I.}}{=} -\int d^3r\, \vec{r}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\vec{j}(\vec{r})$

Definieren wir hierzu das Dipolmoment

$$\boxed{\vec{d} = \int d^3r \, \vec{r} \, \rho(\vec{r})}$$

womit wir den obigen Zusammenhang schreiben können als

$$\boxed{\int d^3r \, \vec{j}(\vec{r}) = -i\omega \vec{d}}$$

Damit können wir schließlich für den Ortsanteil des Vektorpotentials $\vec{A}(\vec{r})$ schreiben

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r}) = -ik\vec{d} \, \frac{e^{ikr}}{r}}$$

Damit beschreibt $\vec{A}(\vec{r},t)$ eine auslaufende Kugelwelle

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r},t) = -ik\vec{d} \, \frac{1}{r} \, e^{i(kr-\omega t)}}$$

Wir können nun drei verschiedene Regimes unterscheiden

$d \ll r \ll \lambda$	Nahzone
$d \ll r \sim \lambda$	intermediäre Zone
$d \ll \lambda \ll r$	Fernzone

die wir nacheinander besprechen wollen.

Nahzone

In der Nahzone gelte $r \ll \lambda$ oder $kr \ll 1$.

Damit $e^{ikr} \approx 1$ und somit

$$\vec{A}(\vec{r},t) = -ik\vec{d}\,\frac{1}{r}\,e^{-i\omega t}$$

Mit $\vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{r})$ und $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{i}{k}\vec{\nabla}\times\vec{B}(\vec{r})$ erhalten wir dann

$$\vec{B}(\vec{r}) = -ik\,\vec{\nabla}\times\left[\vec{d}\cdot\frac{1}{r}\right]$$

Mit $\vec{\nabla}\times[\vec{a}\cdot f(r)] = \frac{f'(r)}{r}(\vec{r}\times\vec{a})$ ergibt sich

$$f(r) = \frac{1}{r} \rightarrow f'(r) = -\frac{1}{r^2}$$

und somit

$$\vec{B}(\vec{r}) = +ik\,\frac{1}{r^3}(\vec{r}\times\vec{d})$$

$$\rightarrow \vec{B}(\vec{r},t) = i\,\frac{k}{r^2}(\hat{e}_r\times\vec{d})\,e^{-i\omega t} \qquad \text{wobei } \hat{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}$$

Für das elektrische Feld ergibt sich entsprechend

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{3\hat{e}_r(\hat{e}_r\cdot\vec{d}) - \vec{d}}{r^3}\,e^{-i\omega t}$$

Das elektrische Feld entspricht somit dem Dipolfeld erzeugt durch einen Dipol mit zeitabhängigen Dipolmoment $\vec{d}\,e^{-i\omega t}$. Daher rührt der Name "Dipolstrahlung" in diesem Zusammenhang.

Das magnetische Feld in der Nahzone ist um einen Faktor $kr \ll 1$ kleiner als das elektrische Feld, d.h. das elektromagnetische Feld der Nahzone ist dominant elektrisch.
Im Limes $k \to 0$ verschwindet das magnetische Feld komplett und das elektrische Feld reduziert sich zu dem eines statischen Dipols.

Intermediäre Zone

Die Beschreibung der intermediären Zone $\lambda \sim r$ und damit $kr \sim 1$ ist sehr viel komplexer, da alle Ordnungen in der Entwicklung von e^{ikr} beitragen.
Wir werden diesen Fall hier nicht näher besprechen — wer Interesse an einer ausführlichen Diskussion hat, sei auf das Lehrbuch von Jackson verwiesen.

Fernzone

In der Fernzone gelte $kr \gg 1$ und somit

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}) = -ik\, \vec{\nabla} \times \left[\vec{d} \cdot \frac{e^{ikr}}{r} \right]$$

also $f(r) = \frac{e^{ikr}}{r} \rightsquigarrow f'(r) = \frac{e^{ikr}}{r} \underbrace{\left(ik - \frac{1}{r} \right)}_{\approx ik \text{ wegen } k \gg \frac{1}{r}}$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \underbrace{-ik \cdot ik}_{k^2} \cdot \frac{e^{ikr}}{r^2} (\vec{r} \times \vec{d})$$

$$= k^2 \frac{e^{ikr}}{r} (\hat{e}_r \times \vec{d})$$

Für das elektrische Feld ergibt sich entsprechend

$$\vec{E}(\vec{r}) = k^2 \frac{e^{ikr}}{r} (\hat{e}_r \times d) \times \hat{e}_r = -\hat{e}_r \times \vec{B}(\vec{r})$$

Mit der vollen Zeitabhängigkeit

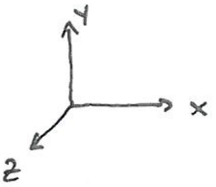
$$\vec{B}(\vec{r},t) = k^2 (\hat{e}_r \times \vec{d}) \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}$$

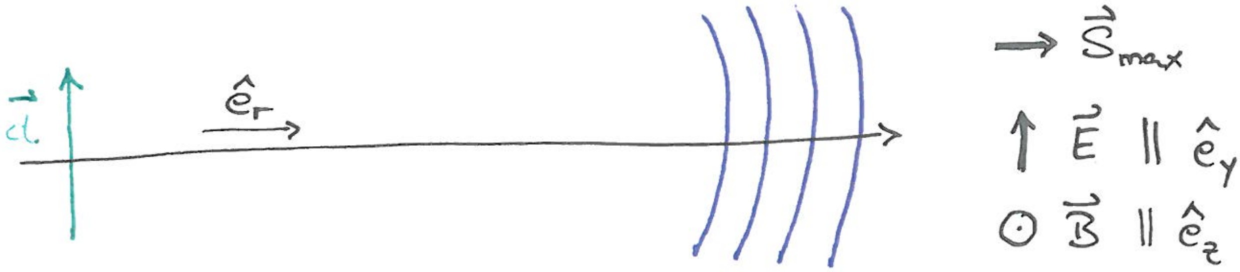
erkennen wir daß asymptotisch die el.-mag. Felder die Form von el.-mag. Kugelwellen annehmen, welche sich mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten.

Weiterhin gilt:

$$\hat{e}_r \perp \vec{E} \perp \vec{B} \perp \hat{e}_r$$

Beispiel:





$$\vec{d} = p\,\hat{e}_y, \qquad \hat{e}_r \parallel \hat{e}_x$$

$$\vec{B} \parallel \hat{e}_r \times \vec{d} \parallel \hat{e}_z \qquad\qquad \vec{E} \parallel (\hat{e}_r \times \vec{d}) \times \hat{e}_r \parallel \hat{e}_z \times \hat{e}_x \parallel \hat{e}_y$$

Energieflussdichte / Poynting-Vektorfeld

$$\boxed{\vec{S}} = \frac{c}{4\pi}\,\vec{E} \times \vec{B} = \frac{c}{4\pi}\,\mathrm{Re}\,\vec{E} \times \mathrm{Re}\,\vec{B}$$

$$= \frac{c}{4\pi}\,\mathrm{Re}\left[\left(-\hat{e}_r \times (\hat{e}_r \times \vec{d})\,\frac{k^2}{r}\,e^{i(kr-\omega t)}\right)\right] \times \mathrm{Re}\left[\left((\hat{e}_r \times \vec{d})\,\frac{k^2}{r}\,e^{i(kr-\omega t)}\right)\right]$$

$$= \frac{ck^4}{4\pi r^2}\cos^2(kr-\omega t)\left[\left\{(\hat{e}_r \times \vec{d}) \times \hat{e}_r\right\} \times (\hat{e}_r \times \vec{d})\right]$$

$$= \frac{ck^4}{4\pi r^2}\cos^2(kr-\omega t)\,\hat{e}_r\left(\vec{d}^2 - (\hat{e}_r \cdot \vec{d})^2\right)$$

$$\overset{\langle\ldots\rangle_t}{=} \boxed{\frac{ck^4}{8\pi r^2}\,\hat{e}_r\left(\vec{d}^2 - (\hat{e}_r \vec{d})^2\right)}$$

$\boxed{\vec{S} \parallel \hat{e}_r}$ und $\boxed{\text{S maximal in der Ebene senkrecht zum Dipolmoment } \vec{d}.}$

S minimal / verschwindet für $\vec{d} \parallel \hat{e}_r$!

Nebenrechnung: $(\vec a \times \vec b) \times \vec c = (\vec a \vec c)\vec b - (\vec b \vec c)\vec a$

damit $\quad (\hat e_r \times \vec d) \times \hat e_r = \vec d - (\vec d \vec e_r)\hat e_r$

und weiter

$$-(\hat e_r \times \vec d) \times (\vec d - (\vec d \hat e_r)\hat e_r)$$

$$= -(\underbrace{\vec d \vec e_r - \vec d \vec e_r}_{=0})\vec d + \hat e_r(\vec d^{\,2} - (\vec d \hat e_r)^2)$$

Unsere bisherigen Ergebnisse zusammenführend stellen wir für Strahlungsfelder das folgende asymptotische Verhalten fest:

$$\boxed{B \sim \frac{1}{r} \qquad E \sim \frac{1}{r} \qquad S \sim \frac{1}{r^2}}$$

(Im Gegensatz hierzu fällt das Feld einer gleichförmig bewegten Ladung mit $1/r^2$ ab – eine solche Ladung strahlt nicht.)

Um diese Zusammenhänge weiter zu verstehen, ist es instruktiv die Gesamtleistung zu berechnen, welche von der Quelle abgestrahlt wird, d.h. der Energiefluß integriert über eine Kugeloberfläche mit konstantem Radius r.

Wählen wir hierzu (abweichend vom obigen Beispiel) $\vec d \parallel \hat e_z$ dann gilt in Polarkoordinaten $\vec d^{\,2} - (\hat e_r \vec d)^2 = d^2 \sin^2\theta$

Für die Gesamtleistung P erhalten wir dann

$$P = \int_S df\, \hat{e}_r \cdot \vec{S} = \frac{ck^4 d^2}{8\pi \cancel{r^2}} \cdot \cancel{r^2} \int_0^{\pi} \sin\Theta\, d\Theta \int_0^{2\pi} d\phi \cdot \sin^2\Theta$$

$$\rightarrow \quad \boxed{P = \frac{ck^4 d^2}{3} = \frac{\omega^4}{3c^3} d^2}$$

Damit stellen wir fest, daß die Gesamtstrahlungsleistung unabhängig vom Radius der Referenzkugeloberfläche ist, d.h. daß die Arbeit, welche von der Quelle verrichtet wird, vollkommen in Strahlung überführt wird!

Hätten wir in unseren Näherungen die weiterführenden Ordnungen explizit betrachtet hätten wir neben diesem elektrischen Dipolmoment auch ein magnetisches Dipolmoment sowie ein elektrisches Quadrupolmoment gefunden (usw. für noch höhere Ordnungen).

Beispiel: Oszillierende Punktladung

Betrachten wir noch einmal unser frühes Beispiel einer Punktladung, welche eine harmonische Schwingung ausführe

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 \cos(\omega t)$$
$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = -\vec{r}_0\, \omega \sin(\omega t)$$
$$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = -\vec{r}_0\, \omega^2 \cos(\omega t)$$

Diese Ladung erzeugt ein zeitabhängiges Dipolmoment

$$\vec{d}(t) = \int d^3r\ \vec{r} \cdot \rho(\vec{r},t) = q \cdot \vec{r}_0 \cos(\omega t) = \mathrm{Re}\left(q \vec{r}_0\, e^{-i\omega t}\right)$$

Für die abgestrahlte Leistung können wir also umgehend berechnen

$$P = \frac{\omega^4}{3c^3} d^2 = \frac{\omega^4 q^2 r_0^2}{3c^3} = \frac{2q^2}{3c^3} \langle \vec{a}^2 \rangle$$

Für eine Ladung, die sich mit Winkelgeschwindigkeit ω auf einem Kreis bewegt (mit Radius R) gilt

$$|\vec{a}| = \omega^2 R$$

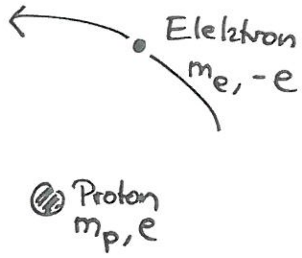
und damit für die abgestrahlte Leistung

$$P = \frac{2\omega^4}{3c^3} q^2 R^2$$

einer Ladung auf einer Kreisbahn.

Lebensdauer von Atomzuständen

Betrachten wir das halbklassische Bohrsche Atommodell des Wasserstoffatoms:



Ein Elektron umkreist ein Proton, wobei der Drehimpuls ein Vielfaches von $\hbar$ ist.

Kräftegleichgewicht: $\frac{m_e v^2}{r} = \frac{e^2}{r^2}$

mit Drehimpulsquantisierung: $m_e v r = \hbar \cdot n \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$

Für $n = 1$ erhalten wir

$$r = \frac{\hbar^2}{m_e e^2} = a_B \qquad\qquad v = \frac{e^2}{\hbar} = \frac{e^2}{\hbar c} \cdot c = \alpha \cdot c$$

Bohrscher Atomradius

$a_B \approx 0{,}53\,\text{Å}$

Feinstruktur-konstante α

$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137}$

Für größere $n > 1$ gilt: $r = a_B \cdot n^2$

Für die Umlauffrequenz ergibt sich damit

$$\omega_{at} = \frac{v}{a_b} = \frac{m_e e^4}{\hbar^3} \approx 4 \cdot 10^{16} \frac{1}{s}$$

Für die Kreisbewegung setzen wir nun

$$q = -e \qquad \omega = \omega_{at} \qquad R = a_b$$

und erhalten damit für die abgestrahlte Leistung

$$\boxed{P = \frac{2}{3}\frac{e^2}{a_b}\alpha^3 \omega_{at}}$$

wobei $\omega_{at} = \frac{v_{at}}{a_B} = \frac{\alpha c}{a_B}$ benutzt wurde.

Ohne Quantisierung des Bahnen würde das Elektron fortlaufend diese Leistung abstrahlen und schließlich auf das Proton stürzen.

Im Rahmen des Bohrschen Atommodells werden die Bahnen durch die Quantisierungsbedingungen

$$mvr = \hbar \cdot n$$

eingeschränkt. Damit sind nur Bahnen mit diskreten Energien

$$E_n = -\frac{e^2}{a_B}\cdot\frac{1}{2n^2} = -\frac{E_{at}}{2n^2} = -\frac{\hbar\omega_{at}}{2n^2}$$

$E_{pot} = -\frac{e^2}{r}$

$E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\frac{e^2}{r}$

$E_n = E_{pot} + E_{kin} = -\frac{1}{2}\frac{e^2}{r}$

möglich. Die Energieskala ist durch die atomare Energieeinheit

$$E_{at} = \hbar\omega_{at} = \frac{e^2}{a_B} = \alpha^2 m_e c^2 \approx 27{,}2\,\text{eV}$$

gegeben.

Ein angeregter Zustand (mit $n \geq 2$) kann durch Abstrahlung eines Photons in niedrigere Zustände übergehen. Er hat daher eine endliche Lebensdauer τ.

Die Lebensdauer τ ist durch die Zeit bestimmt, die nötig ist, um die erforderliche Energie abzugeben

$$\tau \sim \frac{E_{at}}{P} \approx \frac{1}{\alpha^3 \omega_{at}}$$

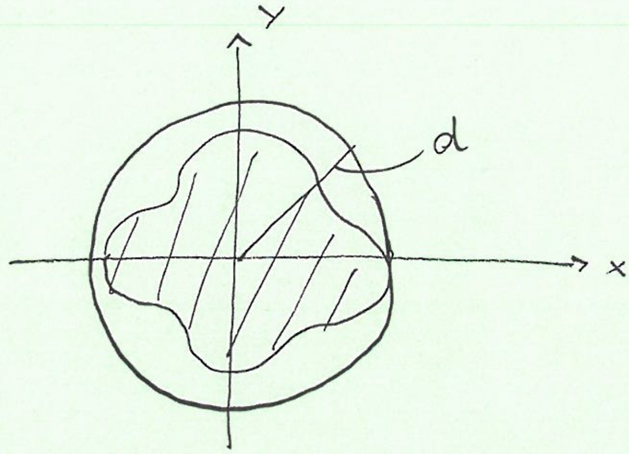
Grob gesagt sind etwa $\alpha^{-3} \approx 10^6$ Umläufe nötig, um diese Energie abzustrahlen.

Mit $\omega_{at} \approx 4 \cdot 10^{16} \frac{1}{s}$ ergibt sich ein Wert $\tau \sim 10^{-10}$ s.

→ zwei Größenordnungen zu klein!

Zusammenfassung letzte Vorlesung

- Dipolstrahlung



$$\rho(\vec r,t) = \rho(\vec r)e^{-i\omega t}$$
$$\vec j(\vec r,t) = \vec j(\vec r)e^{-i\omega t}$$

- Separation in Orts- und Zeitabhängigkeit "vererbt" sich auf Potentiale und Felder

$$\vec A(\vec r,t) = \vec A(\vec r)e^{-i\omega t}$$
$$\vec E(\vec r,t) = \vec E(\vec r)e^{-i\omega t} \qquad \vec E(\vec r) = \frac{i}{k}\vec\nabla\times\vec B(\vec r)$$
$$\vec B(\vec r,t) = \vec B(\vec r)e^{-i\omega t} \qquad \vec B(\vec r) = \vec\nabla\times\vec A(\vec r)$$

wobei: $\vec A(\vec r) = \frac{1}{c}\int d^3r' \frac{1}{|\vec r-\vec r'|}\vec j(\vec r')e^{ik|\vec r-\vec r'|}$

- Multipolentwicklung für $r \gg r'$

$$\vec A(\vec r) = \frac{1}{c}\,\frac{e^{ikr}}{r}\int d^3r'\,\vec j(\vec r')$$

wobei überdies Langwellennäherung $\lambda \gg d$ gemacht wurde.

Beispiel: MHz Strahlung $\rightarrow \omega \sim 10^6\,\frac{1}{s} \rightarrow \lambda = \frac{c}{\omega} = \frac{3\cdot 10^8\,\frac{m}{s}}{10^6\,\frac{1}{s}} = 300\,m \gg$ Antenne

- Kontinuitätsgleichung $\qquad \vec\nabla\cdot\vec j(\vec r) = i\omega\rho(\vec r)$

- allgemein

$$\int d^3r\,\vec j(\vec r) = -i\omega\int d^3r\,\vec r\,\rho(\vec r)$$

Wdh.

Dipolstrahlung

- Kontinuitätsgleichung im dynamischen Fall

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{j}(\vec{r}) = i\omega\,\rho(\vec{r})$$

für die Ortsanteile von Strom- und Ladungsdichte

- Damit wird auch $\int d^3r\,\vec{j}(\vec{r}) \neq 0$ im Allgemeinen, speziell

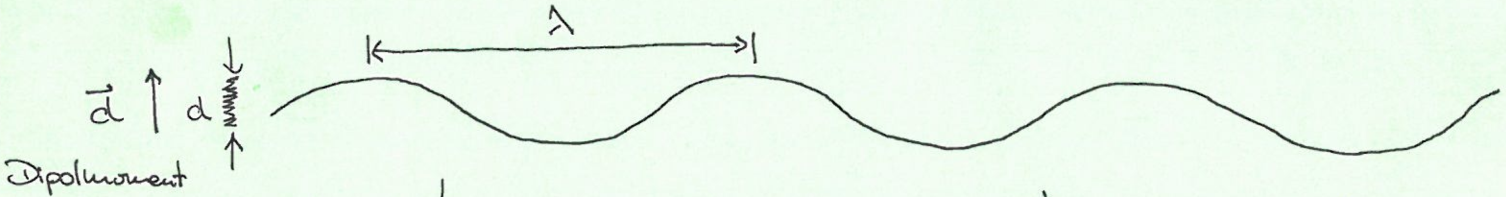
$$\int d^3r\,\vec{j}(\vec{r}) = -i\omega \underbrace{\int d^3r\,\vec{r}\cdot\rho(\vec{r})}$$

Dipolmoment $\vec{d} = \int d^3r\,\vec{r}\cdot\rho(\vec{r})$

- Damit konnten wir das in der Langwellennäherung ausgerechnete Vektorpotential schreiben

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c}\,\frac{e^{ikr}}{r}\int d^3r'\,\vec{j}(\vec{r}\,') = -ik\vec{d}\,\frac{e^{ikr}}{r}$$

$$\vec{A}(\vec{r},t) = -ik\vec{d}\,\frac{1}{r}\,e^{i(kr-\omega t)} \qquad \text{auslaufende Kugelwelle}$$



$d \ll r \ll \lambda$ Nahzone

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{3\hat{e}_r(\hat{e}_r\cdot\vec{d}) - \vec{d}}{r^3}\,e^{-i\omega t}$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = i\,\frac{k}{r^2}\,(\hat{e}_r\times\vec{d})\,e^{-i\omega t}$$

Magnetfeld um einen Faktor $kr \ll 1$ kleiner als das elektrische Dipolfeld.

$d \ll \lambda \ll r$ Fernzone

$$\vec{E}(\vec{r},t) = -\hat{e}_r\times\vec{B}(\vec{r},t)$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{k^2}{r}(\hat{e}_r\times\vec{d})\,e^{i(kr-\omega t)}$$

Asymptotisch nehmen el. + mag. Feld die Form von el.-mag. Kugelwellen an.

$\hat{e}_r \perp \vec{E} \perp \vec{B} \perp \hat{e}_r$