Gruppe Nr. 4
Leiter: Nick

Daniel Oros [illegible]
Anna Bohm 60244~~7~~5
Benita Dünnebier 6026400

Übungsblatt 6

Ausgabe 22.11.2016
Abgabe 28.11.2016, 12:00 Uhr
Besprechung 1.12.2016

Aufgabe	1	2	3	Summe
Punkte	10	8	4	22

Allgemeine Informationen

- Abgabe nur in Gruppen von min. 2 bis max. 3 Personen (Ausnahme 0. und 1. Übungsblatt). **Einzelabgaben werden nicht akzeptiert.**
- Alle Namen sind auf der ersten Seite anzugeben. Gruppenmitglieder müssen zur gleichen Gruppe gehören.
- **Bitte unbedingt die Nummer der Übungsgruppe / den Übungsgruppenleiter auf dem Blatt mit angeben.**
- Das Angabenblatt muss mit abgegeben werden.
- Abgebene Aufgaben müssen vorgerechnet werden können. Für Modul III a (9 LP) und b (6 LP) muss eine Übung aus den Übungen 1 – 9 an der Tafel vorgerechnet werden, für Modul III a zusätzlich eine Übung aus den Übungen 10 – 13, um zur Klausur zugelassen zu werden.
- Für Modul III a (9 LP) und b (6 LP) müssen 50% der Punkte aus den Übungen 1 – 9, für Modul III a zusätzlich 50% aus den Übungen 10 – 13 erreicht werden, um zur Klausur zugelassen zu werden.
- Weitere Information finden Sie auch auf https://hera.ph1.uni-koeln.de/~walch/Elektrodynamik16/Inhalt.html

Aufgabe 1 [15 Punkte]

Zwei sehr lange Leiter liegen parallel zueinander im Abstand d. Sie werden von den Strömen I_1 und I_2 durchflossen

1. Welche Kraft pro Längeneinheit üben die Leiter aufeinander aus?

2. Berechnen Sie das Magnetfeld, das durch diese Anordnung erzeugt wird, wenn $I_1 = I_2$ ist.

3. Zur Überprüfung der Korrektheit des Ergebnisses berechnen Sie das Magnetfeld in der Mitte zwischen beiden Leitern. Berechnen Sie zudem das Magnetfeld für sehr große Abstände von der Leiteranordnung. Deuten Sie dieses Ergebnis mit Hilfe des Ampere'schen Gesetzes.

4. Skizzieren Sie für diesen Fall das Magnetfeld. Achten Sie auf eine qualitativ korrekte Darstellung.

Aufgabe 2 [10 Punkte]

Ein Kreisstrom I mit dem Radius a fließt in der x-y-Ebene (Figur 1).

1. Berechnen Sie mit Hilfe des Biot-Savartschen Gesetz das Magnetfeld auf der z-Achse, wobei der Mittelpunkt der Kreisstroms im Ursprung liegt.

2. Berechnen Sie das Vektorpotential $\vec{A}$. [Aus Übung: Auf der z-Achse 8]

3. Wie ist das Ergebnis für $\vec{A}$ zu erklären?

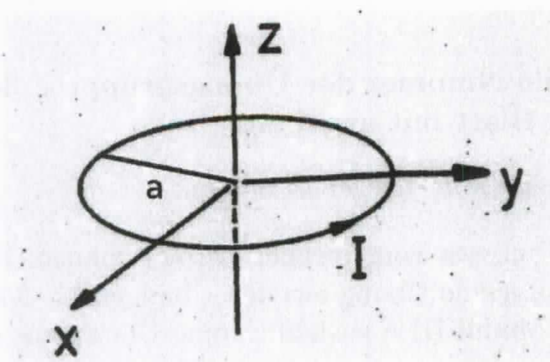


Abbildung 1: Kreisstrom

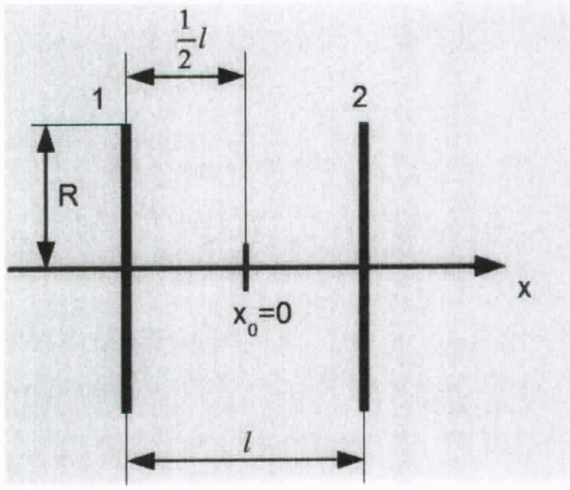


Abbildung 2: Seitenansicht zweier planparalleler Spulen 1 und 2 mit dem Radius R im Abstand l.

Aufgabe 3 [5 Punkte]

Betrachten Sie die in der Vorlesung hergeleitete Dipolentwicklung des Magnetfeldes für einen magnetisches Dipolmoment $\vec{m}$. Für dieses gelte im Folgenden $\vec{m} = \vec{e_x}$.

1. Berechnen Sie das Magnetfeld auf der x-Achse sowie auf der y-Achse.

2. Skizzieren Sie das Magnetfeld in der x-y-Ebene.

Aufg. 1

1.

In der VL wurde das B-Feld eines geraden Leiters berechnet zu

$$B_1 = \frac{2I_1}{c \cdot d} \quad \text{mit } d \text{ als Abstand zwischen den Leitern}$$

Die Kraft zwischen zwei Leitern ergibt sich zu

$$d\vec{F} = I_2 \, d\vec{L} \times \vec{B}_1 \qquad \text{wobei } \vec{L} \perp \vec{B}_1 \Rightarrow |\vec{F}| = I_2 |\vec{L}| \cdot |\vec{B}_1| := F$$

$$dF = I_2 \cdot L \cdot \frac{2I_1}{c \cdot d}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dF}{dL} = \frac{2I_1 I_2}{c \cdot d}$$

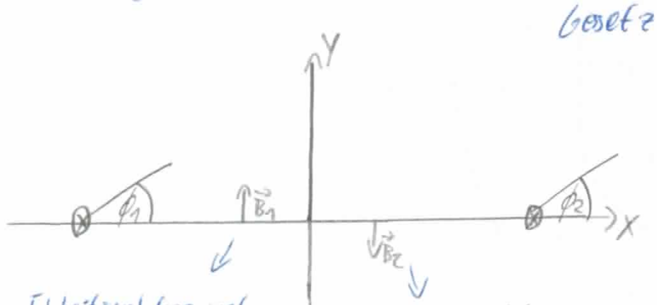
2. Berechnung der einzelnen Magnetfelder

Es gilt nach dem Ampereschen Gesetz und 1.

$$\vec{B}_{1/2} = \frac{2 I_{1/2}}{r^2 \cdot c} \cancel{\cdot \vec{r} \pm \begin{pmatrix} d/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{mit}} \quad r = \sqrt{\left(x \pm \frac{d}{2}\right)^2 + y^2}$$

$$\cdot \begin{pmatrix} -y \\ x \pm \frac{d}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Richtung des B-Feldes ergibt sich mit der Rechten Hand Regel und dem Biot-Savart Gesetz nach $\vec{B} \sim \frac{d\vec{e} \times \vec{x}}{|\vec{x}|^3}$



Einheitsvektor mit

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} \sin(\varphi_1) \\ \cos(\varphi_2) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x + \frac{d}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Einheitsvektor mit

$$\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} \sin(\varphi_2) \\ \cos(\varphi_2) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x - \frac{d}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{B}_1 = \frac{2I_1}{\sqrt{\left(x - \frac{d}{2}\right)^2 + y^2} \cdot c} \begin{pmatrix} \sin(\varphi_1) \\ \cos(\varphi_2) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{B}_2 = \frac{2I_2}{\sqrt{\left(x + \frac{d}{2}\right)^2 + y^2}} \cdot \begin{pmatrix} \sin(\varphi_2) \\ \cos(\varphi_2) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow B_{Ges} = \frac{2I}{c} \cdot \left[\underbrace{\begin{pmatrix} \sin(\phi_1) \\ \cancel{\cos(\phi_1)} \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{x}_1} \cdot \frac{1}{\left(\left(x-\frac{d}{2}\right)^2+y^2\right)^{1/2}} + \underbrace{\begin{pmatrix} \sin(\phi_2) \\ \cancel{\cos(\phi_2)} \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{x}_2} \cdot \frac{1}{\left(\left(x+\frac{d}{2}\right)^2+y^2\right)^{1/2}} \right]$$

$I = I_1 = I_2$

3. In der Mitte gilt $x=0$ und $y=0$ mit $\phi_1 = 0$ und $\phi_2 = \pi$

$$\vec{B}_{Ges} = \frac{2I}{c} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{4}{d} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{4}{d} \right) = \frac{16 I}{c \cdot d} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$\Rightarrow$ Magnetfeld in der Mitte der beiden Leiter verschwindet

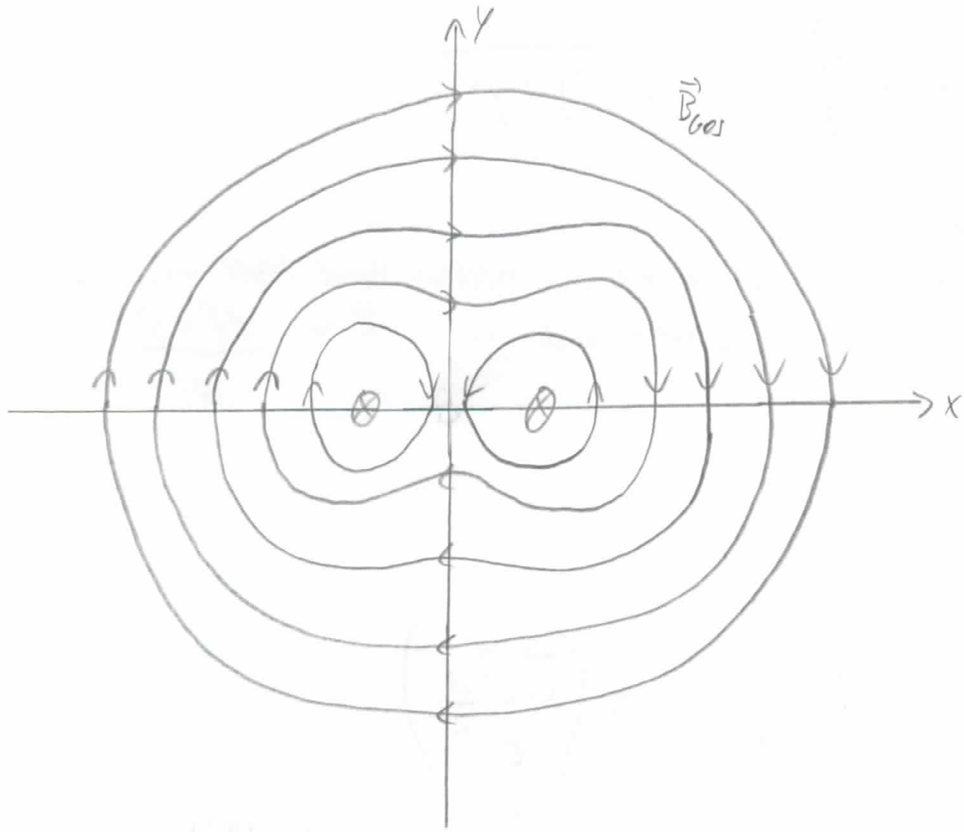
Weit weg gilt $\phi_1 \approx \phi_2$ und $\frac{1}{\left(\left(x \pm \frac{d}{2}\right)^2+y^2\right)^{1/2}} \approx \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$$\Rightarrow B_{ges} = \frac{2 \cdot I \cdot 2}{c\,(x^2+y^2)^{1/2}} \begin{pmatrix} \sin(\phi_1) \\ \cos(\phi_1) \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{4I}{c\,(x^2+y^2)^{1/2}} \begin{pmatrix} \sin(\phi_1) \\ \cos(\phi_1) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Deutung mithilfe des Ampèreschen Gesetz:

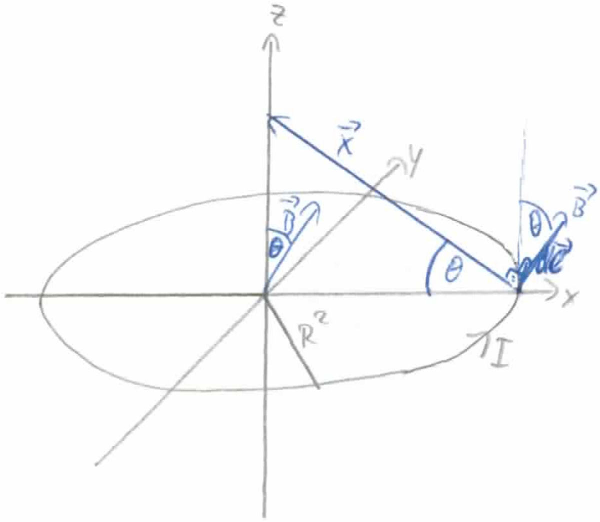
Für den Ursprung verschwindet das B-Feld beider Leiter und für große Abstände ergibt sich ein B-Feld eines geraden Leiters mit Strom 2I, also beide Leiter im Ursprung vereint. Laut dem Ampèreschen Gesetz würde sich auch dieses B-Feld ergeben.

4.



Aufg. 2

1.



es gilt $d\vec{\ell} \perp \vec{x}$

$$\Rightarrow |d\vec{\ell} \times \vec{x}| = |d\vec{\ell}| \cdot |\vec{x}| \cdot \underbrace{\sin(\theta)}_{=1} = \underbrace{|d\vec{\ell}|}_{=d\ell} \cdot \sqrt{R^2 + z^2}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} R \cdot \cos(\phi) \\ R \cdot \sin(\phi) \\ z \end{pmatrix}$$

Das B-Feld ergibt sich nach Biot-Savart zu:

$$\vec{B} = \frac{I}{c} \cdot \int \frac{d\vec{\ell} \times \vec{x}}{|\vec{x}|^3}$$

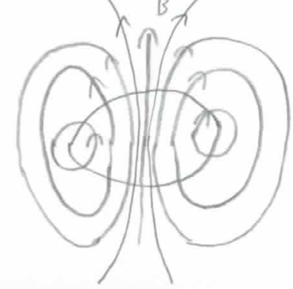
$$\Rightarrow |\vec{B}| = \frac{I}{c} \cdot \int \frac{|d\vec{\ell} \times \vec{x}|}{|\vec{x}|^3} = \frac{I}{c} \cdot \int \frac{d\ell \cdot \cancel{|\vec{x}|}}{|\vec{x}|^{\cancel{3}\,2}} \underset{d\ell = R \cdot d\theta}{\downarrow}= \frac{I}{c} \int_0^{2\pi} \frac{R}{(R^2+z^2)} \, d\theta$$

Nun ist die z-Komponente gesucht, die sich nach der Rotationssymmetrie in der xy-Ebene zu $|\vec{B}|_z = |\vec{B}| \cdot \cos(\theta)$ ergibt, mit $\cos(\theta) = \frac{R}{\sqrt{R^2+z^2}}$

$$\Rightarrow |\vec{B}|_z = |\vec{B}| \cdot \cos(\theta) = \frac{I}{c} \int_0^{2\pi} \frac{R^2}{(R^2+z^2)^{3/2}} = \frac{I}{c} \frac{2\pi \cdot R^2}{(R^2+z^2)^{3/2}}$$

2. Wir haben länger nach dem genauen Vektorpotential gesucht, aber da wir keine Lösung gefunden haben (außer sehr komplizierte Musterlösungen aus dem Jackson), haben wir uns entschieden die Dipolnäherung zu verwenden, da die Leiterschleife Dipolcharakter hat

f



$$\Rightarrow A(\vec{x}) = \frac{1}{c} \frac{\vec{m} \times \vec{x}}{|\vec{x}|^3}$$

mit $\vec{m} = \frac{I}{2} \oint \vec{x} \times d\vec{l} = \frac{I}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\pi R^2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \pi \cdot R^2 \cdot I \end{pmatrix}$

Da $\vec{m} \perp$ Leiterschleife und

$|\vec{m}| \hat{=}$ Fläche (eingeschlossene der Leiterschleife) $\times$ Strom

$= \pi R^2 \cdot I$

⌈ NR: $\vec{m} \times \vec{x}$:

$$\begin{matrix} 0 & x \\ 0 & y \\ \pi R^2 I & z \\ 0 & x \\ 0 & y \end{matrix}$$ ⌋

Wählt man $\vec{x}$ zu $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \vec{A} = \frac{1}{c} \frac{\vec{m} \times \vec{x}}{|\vec{x}|^3} = \frac{\pi R^2 \cdot I}{c} \frac{\begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$

gesucht war $\vec{A}\Big|_{\substack{x=0 \\ y=0}} = \vec{0}$

3. Das Ergebnis von $\vec{A}$ zeigt, dass es sich um ein Rotationssymmetrischen Aufbau und somit auch $\vec{B}$-Feld handelt. Dabei ist zu beachten, dass in erster Näherung hauptsächlich der Dipol-Charakter entscheidend ist und das Ergebnis aus 1. sehr gut beschrieben wird, denn $rot(\vec{A})$ ergibt sich zu

$$rot(\vec{A}) = \begin{pmatrix} \frac{3xz}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} \\ \frac{3yz}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} \\ \frac{-x^2-y^2+2z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} \end{pmatrix} \cdot \frac{\pi R^2 \cdot I}{c}$$

↓ Wolfram Alpha

OK

Wählt man $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow rot(\vec{A}) = \frac{2\pi R^2 \cdot I}{z^3}$

Was für $z \gg R$ eine gute Approximation darstellt.

Aufg. 3

Wofür die Abb. 2 auf dem Übungs-Blatt gedacht? Sehr verwirrend.... Ja

Das gesuchte B-Feld ergibt sich nach der VL zu

$$\vec{B} = \frac{1}{c}\left(\frac{3\vec{n}\,(\vec{n}\cdot\vec{m}) - \vec{m}}{|\vec{x}|^3}\right)$$ mit $\vec{n}$ als Einheitsvektor in Richtung $\vec{x}$

Nach der Aufgabenstellung gilt $\vec{m} = \vec{e}_x \Rightarrow |\vec{m}| = 1$, also eine Fläche mit Flächeninhalt 1.
Wo ist hier der Strom I? Vergessen? Wir sind bei diese Aufg. ignorant gegenüber Einleiter.

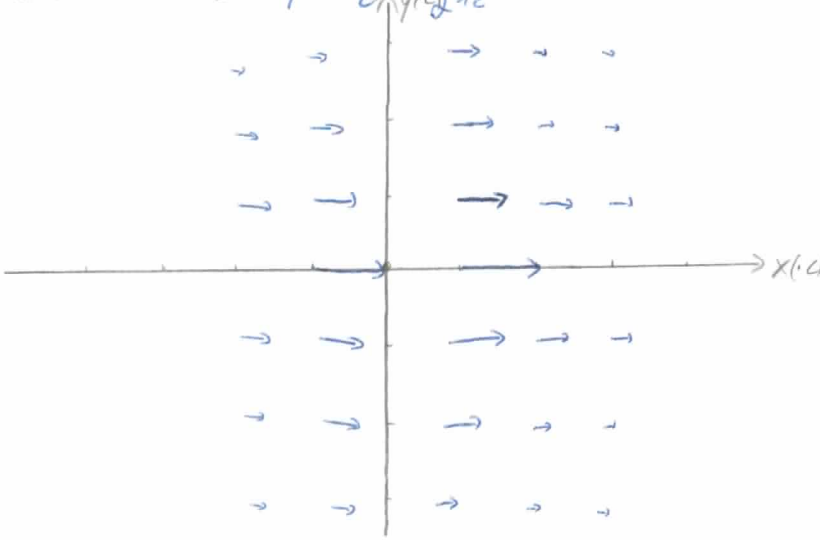
1. x-Achse: $\Rightarrow \vec{n} = \vec{e}_x$

$$\Rightarrow \vec{B}_x = \frac{1}{c}\,\frac{3\vec{e}_x\,\overbrace{(\vec{n}\cdot\vec{m})}^{=1} - \overbrace{\vec{m}}^{=\vec{e}_x}}{\underbrace{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}_{d^{3/2}}} = \frac{2}{c}\,\frac{\vec{e}_x}{d^{3/2}}$$

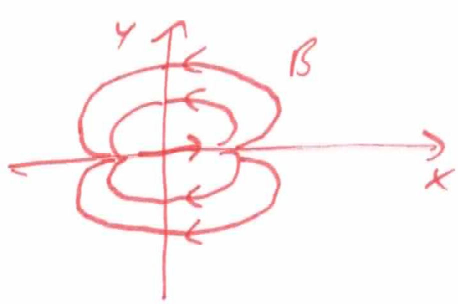
y-Achse: $\Rightarrow \vec{n} = \vec{e}_y$

$$\Rightarrow \vec{B}_y = \frac{1}{c}\,\frac{3\vec{e}_y\,\overbrace{(\vec{e}_y\cdot\vec{e}_x)}^{=0} - \vec{e}_x}{d^{3/2}} = \frac{1}{c}\,\frac{-\vec{e}_x}{d^{3/2}}$$

2. Skizze mit $\vec{B} = \vec{B}_x + \vec{B}_y = \frac{1}{c}\,\frac{\vec{e}_x}{d^{3/2}}$



Das B-Feld zeigt in der Dipolnäherung stets in x-Richtung, nimmt aber in alle Richtungen mit $(z=0)$ $\frac{1}{(x^2+y^2)^{3/2}}$ ab. f



Aufg. 1

Magnetfeld mit Ampère

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} \cdot I$$

Ansatz: $\vec{B} = B \cdot \vec{e}_\varphi = \frac{B}{r} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} -y/r \\ x/r \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $r = \sqrt{x^2+y^2}$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} B r \, d\varphi = 2\pi r B \quad \Rightarrow B = \frac{2I}{cr}$$

1. $$\vec{B} = \frac{2I}{c(x^2+y^2)} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$d\vec{F} = \frac{1}{c} I_1 \, d\vec{l}_1 \times \vec{B} = \frac{2 I_1 I_2}{c^2 \cdot d} \, dl_1$$

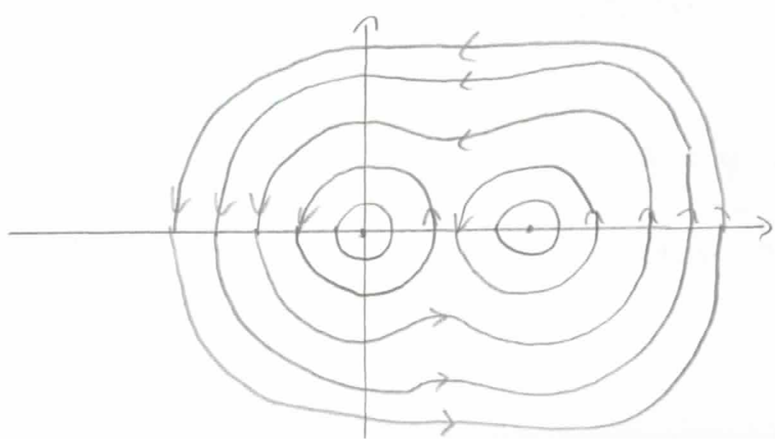
2. $$\vec{B} = \frac{2I}{c} \left[\frac{1}{x^2+y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{(x-d)^2+y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x-d \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

3. $x = \frac{d}{2}$, $y = 0$

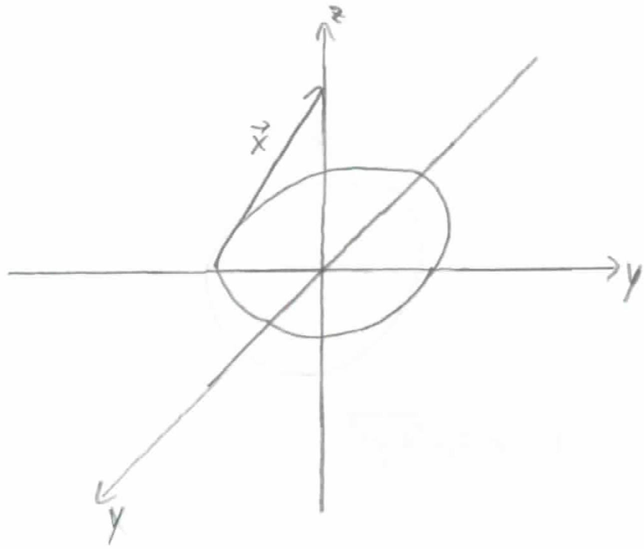
$$\Rightarrow \vec{B}\Big|_{\substack{x=\frac{d}{2} \\ y=0}} = \vec{0}$$

z.B.: $x \gg d \Rightarrow \vec{B} \approx \frac{4I}{c} \frac{1}{(x^2+y^2)} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$

4.



Aufg. 2



1. Richtig in der Übung

Aber auch eine gute Lösung:

$$\vec{B} = \frac{I}{c} \int_0^{2\pi} \frac{a}{(a^2+z^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} z \cdot \cos(\varphi) \\ z \cdot \sin(\varphi) \\ a \end{pmatrix} d\varphi$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \cos(\varphi) \\ a \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{x}|^3 = (a^2+z^2)$$

$$\Leftrightarrow \quad \vec{B} = \frac{I \cdot a^2 \cdot 2\pi}{c \, (a^2+z^2)^{3/2}} \cdot \vec{e}_z$$

$$d\vec{l} = \begin{pmatrix} -a \sin(\varphi)\, d\varphi \\ a \cos(\varphi)\, d\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{B}|_z = \frac{I \, a^2 \, 2\pi}{c \, (a^2+z^2)^{3/2}}$$

2. $$\vec{A}\Big|_{\substack{x=0 \\ y=0}} = \frac{1}{c} \int_V \frac{\vec{j}\, dV}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} = \frac{1}{c} \oint \frac{I \, d\vec{l}}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}$$

$$= \frac{1}{c} \frac{I}{(a^2+z^2)^{1/2}} \cdot \underbrace{\oint d\vec{l}}_{=0,\ \text{benutze } d\vec{l} \text{ aus 1.}} = 0$$

Aufg. 2 (weiterführung)

$$\vec{A}\Big|_{\substack{y=0\\x=0}} = 0 \not\Rightarrow \vec{B}\Big|_{\substack{x=0\\y=0}} = 0 \quad , \text{da} \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

Aufg. 3

1. $\vec{m} = \vec{e}_x \qquad \vec{n} = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$

$$\underbrace{\vec{B}}_{\text{erste Dipol Näherung}} = \frac{1}{c}\left[\frac{3\vec{n}\,(\vec{n}\cdot\vec{m}) - \vec{m}}{|\vec{x}|^3}\right] + \ldots$$

$$\Leftrightarrow \vec{B} = \frac{1}{c}\left[\frac{3n_x \cdot \vec{n} - \vec{e}_x}{|x|^3}\right] = \frac{1}{c}\,\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^{\,5}}\begin{pmatrix} 2x^2 - y^2 - z^2 \\ 3xy \\ 3xz \end{pmatrix}$$ Allgemeiner Ausdruck

Auf x-Achse $\Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{B} = \frac{1}{c\cdot\underbrace{|\vec{x}|^3}_{x^3}}\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$

Auf y-Achse $\Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{B} = \frac{1}{c\cdot\underbrace{|\vec{x}|^3}_{y^3}}\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}$

2.