Allgemeine Lösung der Maxwell-Gleichungen

(siehe Fließbach Kapitel 17)

Nachdem wir nun schon einiges mit den Maxwell-Gleichungen gearbeitet haben, wollen wir uns nun der allgemeinen Lösung dieser Gleichungen zuwenden. Dazu werden wir zunächst zwei Potentiale – das Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r},t)$ und das skalare Potential $\phi(\vec{r},t)$ – einführen, welche eine gewisse Vereinfachung der Maxwell-Gleichungen erlauben. Wir werden dann die allgemeine Lösung dieser so vereinfachten Maxwell-Gleichungen ausarbeiten und sehen, daß diese aus der allgemeinen homogenen Lösung (Wellenlösung) und aus einer partikulären Lösung (retardierte Potentiale) besteht.

Starten wir mit den homogenen Maxwell-Gleichungen

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}(\vec{r},t) = 0 \qquad (1)$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}(\vec{r},t) + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}(\vec{r},t) = 0 \qquad (2)$$

Ein quellfreies Feld – wie das Magnetfeld in (1) – kann als Rotationsfeld geschrieben werden:

$$\boxed{\vec{B}(\vec{r},t) = \vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{r},t)} \,,$$

wobei $\boxed{\vec{A}(\vec{r},t)}$ ein sogenanntes Vektorpotential darstellt.

Wenn wir dies in die zweite homogene Maxwell-Gl. (2) einsetzen erhalten wir

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{E}(\vec{r},t) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}(\vec{r},t) \right) = 0$$

Ein wirbelfreies Feld kann als Gradientenfeld dargestellt werden

$$\vec{E}(\vec{r},t) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}(\vec{r},t) = -\vec{\nabla} \phi(\vec{r},t)$$

oder

$$\vec{E}(\vec{r},t) = -\vec{\nabla} \phi(\vec{r},t) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}(\vec{r},t) ,$$

wobei wir das skalare Potential $\boxed{\phi(\vec{r},t)}$ eingeführt haben.

Man beachte, daß wir es dabei geschafft haben die 6 Komponenten von elektrischem und magnetischen Feld, $\vec{E}$ und $\vec{B}$, durch lediglich vier Komponenten des skalaren Potentiels ϕ und des 3-komponentigen Vektorpotentials $\vec{A}$ auszudrücken.
Die 6-komponentige Darstellung durch $\vec{E}$ und $\vec{B}$-Felder ist also zu einem gewissen Maße redundant — die beiden Bedingungen

quellfreies Feld $\rightarrow$ Rotationsfeld
wirbelfreies Feld $\rightarrow$ Gradientenfeld

werden dabei eben nicht explizit beachtet.
Wir werden schließlich sehen, daß uns die Kontinuitätsgleichung (der Ladungserhaltung) erlaubt, mit einer insgesamt 3-komponentigen Beschreibung auszukommen.

Die Feldgleichungen für die beiden Potentiale ϕ und $\vec{A}$ ergeben sich nun aus den inhomogenen Maxwell-Gleichungen.

Aus $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 4\pi\rho$ ergibt sich

$$\boxed{\Delta\phi(\vec{r},t) + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\cdot\vec{A}(\vec{r},t) = -4\pi\rho}$$

sowie aus $\vec{\nabla}\times\vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{E} = \frac{4\pi}{c}\vec{J}$

$$\boxed{\Delta\vec{A}(\vec{r},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A}(\vec{r},t) - \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}(\vec{r},t)\right) - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\phi = -\frac{4\pi}{c}\vec{J}}$$

wobei wir wieder die Identität $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = -\Delta\vec{A} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})$ verwendet haben.

Wir stellen zunächst einmal fest, daß diese Gleichungen nicht unbedingt eleganter als die ursprünglichen Maxwell-Gleichungen aussehen. Immerhin haben wir es nun mit nur noch vier gekoppelten Differentialgleichungen für die vier Felder ϕ und $\vec{A}$ zu tun.

Wdh.

- Erhaltungssätze der Elektrodynamik

Ladung $\dot{\rho} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$

Energiestromdichte

Poynting-Vektorfeld $\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{H}$

Energie $\dot{\omega} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = \underbrace{-\vec{j} \cdot \vec{E}}_{\text{Konversion in mechanische Energie}}$

Kontinuitäts-gleichung

Feldenergiedichte

$\omega = \frac{1}{8\pi} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{B} \cdot \vec{H})$

Impuls

$$\dot{\vec{P}}_{mech} + \dot{\vec{P}}_{feld} = \vec{\nabla} \cdot \underline{\underline{T}}$$

Maxwellscher Spannungstensor

el.-mag. Impulsdichte

$\vec{P}_{feld} = \int_V dV \, \vec{g} \qquad \vec{g} = \frac{1}{4\pi c} \vec{E} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \vec{S}$

- Allgemeine Lösung der Maxwell-Gleichungen

Vektorpotential $\vec{B}(\vec{r},t) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r},t)$

skalares Potential $\vec{E}(\vec{r},t) = -\vec{\nabla} \phi(\vec{r},t) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}(\vec{r},t)$

$\rightarrow$ 4 Komp.

damit für Maxwell-Gleichungen

$$\Delta \phi(\vec{r},t) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r},t) = -4\pi \rho(\vec{r},t)$$

$$\Delta \vec{A}(\vec{r},t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{A}(\vec{r},t) - \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r},t) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \phi(\vec{r},t)\right) = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r},t)$$

Entkopplung durch Lorenzeichung

Ludwig Lorentz vs. Hendrik Lorentz

Die Potentiale ϕ und $\vec{A}$ sind durch die physikalischen Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ nicht eindeutig festgelegt.

Insbesondere ändert eine Transformation

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r},t) \longrightarrow \vec{A}(\vec{r},t) + \vec{\nabla}\Lambda(\vec{r},t)}$$

das magnetische $\vec{B}$-Feld nicht – der Zusatzterm ist die allgemeine Form eines Terms, dessen Rotation verschwindet.

Allerdings ändert eine solche Transformation das elektrische $\vec{E}$-Feld, nämlich $\vec{E}(\vec{r},t) \longrightarrow \vec{E}(\vec{r},t) - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\Lambda(\vec{r},t)$.

Wenn wir allerdings synchron das skalare Potential ϕ transformieren

$$\boxed{\phi(\vec{r},t) \longrightarrow \phi(\vec{r},t) - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\Lambda(\vec{r},t)}$$

bleibt auch das elektrische $\vec{E}$-Feld unberührt.

Diese beiden Transformationen heißen Eichtransformation, welche die beiden Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ unverändert lassen.

Diese Eichfreiheit können wir uns zunutze machen, das Vektorpotential in eine möglichst praktikable Form zu bringen. Von besonderer Bedeutung ist hierbei die sogenannte Lorenz-Eichung

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\phi = 0} \qquad (*)$$

Dabei ist zu beachten, daß es immer möglich ist, diese Eichbedingung durch eine geeignete Eichtransformation herzustellen.

Für beliebige Felder wäre die linke Seite von (*) eine skalare Funktion $f(\vec{r},t) \neq 0$. Eine Eichtransformation fügt dem den Term $\Delta\Lambda - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t^2}\Lambda$ hinzu.
Man kann nun Λ immer so wählen, daß

$$\Delta\Lambda - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t^2}\Lambda = -f$$

erfüllt ist, daß also die obige inhomogene Wellengleichung immer eine Lösung hat.

Zusammenfassung: **Wir können die Potentiale ϕ und $\vec{A}$ immer so wählen, daß sie der Lorenz-Eichung genügen.**

Damit ergibt sich für die Maxwell-Gleichungen in Lorenz-Eichg

$$\boxed{\begin{aligned} \Delta\phi(\vec{r},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi(\vec{r},t) &= -4\pi\rho(\vec{r},t) \\ \Delta\vec{A}(\vec{r},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A}(\vec{r},t) &= -\frac{4\pi}{c}\vec{j}(\vec{r},t) \end{aligned}}$$

eine deutlich elegantere Form, insbesondere haben wir nun vier entkoppelte Differentialgleichungen für ϕ und die drei Komponenten A_x, A_y und A_z des Vektorpotentials – eine wesentliche Vereinfachung!

Lösung der Maxwell-Gleichungen für Potentiale

In der vergangenen Vorlesung haben wir gesehen, daß wir die Maxwell-Gleichungen für die Potentiale $\vec{A}(\vec{r},t)$ und $\phi(\vec{r},t)$ über die Wahl der Eichung – speziell der Lorenz-Eichung – entkoppeln können:

$$\Delta \phi(\vec{r},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi(\vec{r},t) = -4\pi\rho(\vec{r},t)$$

$$\Delta \vec{A}(\vec{r},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A}(\vec{r},t) = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}(\vec{r},t)$$

Einschub: d'Alembert-Operator $\Box = \Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

womit sich die Maxwell-Gleichungen kompakter schreiben:

$$\Box\,\phi(\vec{r},t) = -4\pi\rho(\vec{r},t)$$

$$\Box\,\vec{A}(\vec{r},t) = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}(\vec{r},t)$$

Wir stellen fest, daß die Maxwell-Gleichungen für die Potentiale die uns schon bekannte Form einer Wellengleichung annimmt.

Da die vier Maxwell-Gleichungen für die Komponenten der Potentiale von identischer mathematischer Form sind, können wir uns im folgenden auf die allgemeine Lösung für das skalare Potential ϕ beschränken. Für die drei Komponenten des Vektorpotentials gilt dann entsprechendes.

Die allgemeine Lösung einer Differenzialgleichung in Form einer inhomogenen Wellengleichung hat die Form

$$\boxed{\underbrace{\emptyset(\vec{r},t)}_{} = \underbrace{\emptyset_{hom}(\vec{r},t)}_{\text{allg. Lösung der homogenen D-Gl.}} + \underbrace{\emptyset_{part}(\vec{r},t)}_{\text{spez. Lösung der inhomogenen D-Gl.}}}$$

Lösung der homogenen Gleichung

Bestimmen wir zunächst die Lösung der homogenen Gleichung

$$\Delta \emptyset_{hom} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\emptyset_{hom} = 0$$

Dazu machen wir einen Separationsansatz

$$\emptyset_{hom}(\vec{r},t) = X(x)\,Y(y)\,Z(z)\,T(t)$$

und erhalten

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} - \frac{1}{c^2}\frac{T''}{T} = 0$$

Damit muß jeder einzelne Term gleich einer (unabhängigen) Konstante sein

$$\frac{X''}{X} = -k_x^2 \qquad \frac{Y''}{Y} = -k_y^2 \qquad \frac{Z''}{Z} = -k_z^2 \qquad \frac{T''}{T} = -\omega^2$$

für welche gilt: $\omega^2 = c^2(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) = c^2 \vec{k}^2$

Desweiteren können wir die einzelnen Differenzialgleichungen lösen

$$\frac{X''}{X} = -k_x^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} X = -k_x^2 X \quad \Rightarrow \quad X = e^{\pm i k_x x}$$

und entsprechend für Y, Z und T.

(Damit die Lösungen für $t\infty$ nicht divergieren, müssen k_x, k_y, k_z und ω reell sein.)

Somit ergeben sich aus dem Separationsansatz die Elementar-Lösungen

$$\phi = e^{i(\vec{k}\vec{r} \pm \omega(k)t)},$$

wobei $-\infty < k_x, k_y, k_z < \infty$ und $\omega(k) > 0$ mit $\omega(k) = c\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$.

Wegen der Linearität der Wellengleichung ist auch jede Überlagerung der Elementarlösungen mit verschiedenen k-Werten wieder eine Lösung. Dies können wir als Überlagerung der Form

$$\boxed{\phi_{hom}(\vec{r},t) = \underbrace{Re}_{\phi \text{ ist reel}} \int d^3k \underbrace{|a(k)| e^{i\varphi_k}}_{\text{komplexe Amplitude}} \cdot e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}}$$

Wdh.

- Allgemeine Lösung der Maxwell-Gleichungen

Einführung von Vektorpotential und skalaren Potential via

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r},t)$$
$$\vec{E}(\vec{r},t) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r},t) - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}(\vec{r},t)$$

Potentiale nicht eindeutig festgelegt, insbesondere existiert eine sog. Eichtransformation

$$\vec{A}(\vec{r},t) \longrightarrow \vec{A}(\vec{r},t) + \vec{\nabla}\Lambda(\vec{r},t)$$
$$\phi(\vec{r},t) \longrightarrow \phi(\vec{r},t) - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\Lambda(\vec{r},t)$$

Festlegung via Lorenz-Eichung

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}(\vec{r},t) + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\phi(\vec{r},t) = 0$$

Wir können die Potentiale immer so wählen, daß sie der Lorenz-Eichung genügen.

Maxwell-Gleichungen für Potentiale in Lorenz-Eichung

$$\Box\phi(\vec{r},t) = -4\pi\rho(\vec{r},t)$$
$$\Box\vec{A}(\vec{r},t) = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}(\vec{r},t) \qquad \text{wobei } \Box = \Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

welche nunmehr entkoppelte DGLs darstellen, in der Form inhomogener Wellengleichungen.

Allgemeine Lösung der Form

$$\phi(\vec{r},t) = \phi_{hom}(\vec{r},t) + \phi_{part}(\vec{r},t)$$

$\downarrow$ Separationsansatz

$$\phi_{hom}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\int d^3k\ |a(k)|e^{i\varphi_k}\ e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega(k)t)}$$

Fourier - Transformationen

Wir haben Fourier-Transformationen schon an der einen oder anderen Stelle in der Vorlesung gesehen. Allgemein verbinden Fourier-Transformationen zwei Funktionen, welche in unterschiedlichen Räumen leben:

$$\underbrace{f(\vec{r})}_{\text{Funktion im Ortsraum}} \xleftrightarrow{\text{Fourier-Transformation}} \underbrace{f(\vec{k})}_{\text{Funktion im } k\text{-Raum / Raum der Wellenvektoren}}$$

$$\underbrace{f(t)}_{\text{Zeitraum}} \xleftrightarrow{\text{FT}} \underbrace{f(\omega)}_{\text{Frequenzraum}}$$

Die genaue Beziehung zwischen den beiden Funktionen ist gegeben durch das Fourier-Integral

$$f(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{k} \; f(\vec{k})\, e^{i\vec{k}\vec{r}}$$

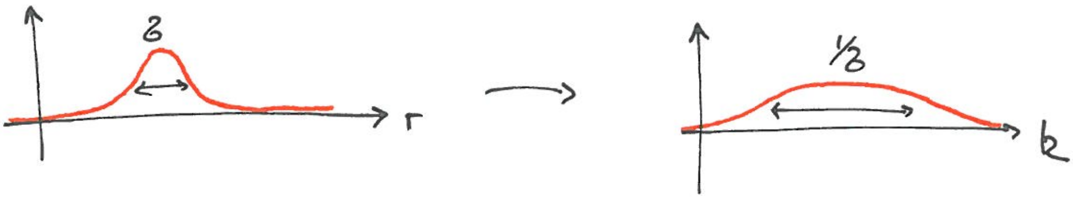
Wir können uns also $f(\vec{r})$ als Superposition monochromatischer, ebener "Wellen" $e^{i\vec{k}\vec{r}}$ darstellen, wobei $f(\vec{k})$ genau die Amplituden der Wellen sind.

Die Fourier-Transformation ist selbstinvers (bis auf Faktoren 2π und $\vec{k} \to -\vec{k}$), denn

$$f(\vec{k}) = \int d^3\vec{r} \; f(\vec{r})\, e^{-i\vec{k}\vec{r}}$$

Beispiele: 1) $\delta(\vec{r}) \longrightarrow \delta(\vec{k}) = \int d^3\vec{r}\; \delta(\vec{r})\, e^{-i\vec{k}\vec{r}} = 1$

2)
$$f(\vec{r}) = e^{-\frac{r^2}{2\delta^2}} \longrightarrow f(\vec{k}) = e^{-\frac{\delta^2 k^2}{2}}$$



3)
$$f(\vec{r}) = \delta(\vec{r}-\vec{r}\,') \longrightarrow f(\vec{k}) = \int d^3r\, \delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\, e^{-i\vec{k}\vec{r}}$$
$$= e^{-i\vec{k}\vec{r}\,'}$$

Also $\delta(\vec{r}-\vec{r}\,') = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k\; e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}\,')}$

Als nächstes wollen wir uns fragen, wie sich die Operatoren der Vektoranalysis unter Fourier-Transformation verhalten

$$\boxed{\vec{\nabla} f(\vec{r}) \longrightarrow i\vec{k}\, f(\vec{k})}$$

denn:
$$\vec{\nabla} f(\vec{r}) = \vec{\nabla}\left(\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{k}\; f(\vec{k})\, e^{i\vec{k}\vec{r}}\right)$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{k}\; f(\vec{k})\, \underbrace{\vec{\nabla} e^{i\vec{k}\vec{r}}}_{= i\vec{k}e^{i\vec{k}\vec{r}}}$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{k}\; \left(i\vec{k}\cdot f(\vec{k})\right) e^{i\vec{k}\vec{r}}$$

Entsprechend läßt sich zeigen:

$$\boxed{\begin{aligned} \Delta f(\vec{r}) &\longrightarrow -\vec{k}^{\,2} f(\vec{k}) \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{A}(\vec{r}) &\longrightarrow i\vec{k}\cdot\vec{A}(\vec{k}) \\ \vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{r}) &\longrightarrow i\vec{k}\times\vec{A}(\vec{k}) \end{aligned}}$$

Lösung der inhomogenen Gleichung

Für die allgemeine Lösung benötigen wir nun noch die spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung. Dabei werden wir zwei wesentliche Konzepte kennenlernen: Green-Funktionen sowie retardierte Potentiale (und avancierte Potentiale).

Wir betrachten jetzt also die inhomogene Gleichung

$$\Delta \phi(\vec{r},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi(\vec{r},t) = -4\pi\,\rho(\vec{r},t) \qquad (*)$$

Führen wir eine Fourier-Transformation der Zeitabhängigkeit von ϕ und ρ durch

Vorzeichen ist Konventionssache

$$\phi(\vec{r},t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, \phi_\omega(\vec{r})\, e^{-i\omega t}$$

$$\rho(\vec{r},t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, \rho_\omega(\vec{r})\, e^{-i\omega t}$$

Setzen wir dies in Gleichung (*) ein, so ergibt sich

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \left(\Delta - \underbrace{\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi_\omega(\vec{r})\, e^{-i\omega t}}_{\text{ergibt } -\frac{\omega^2}{c^2}} = -4\pi\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, \rho_\omega(\vec{r})\, e^{-i\omega t}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \left(\Delta + \frac{\omega^2}{c^2}\right)\phi_\omega(\vec{r})\, e^{-i\omega t} = -4\pi\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, \rho_\omega(\vec{r})\, e^{-i\omega t}$$

Die Gleichheit muß für jede Fourierkomponente unabhängig gelten, denn die Funktionen $e^{-i\omega t}$ sind für verschiedene Kreisfrequenzen ω voneinander unabhängig. Es gelte also:

$$\boxed{\left(\Delta + \underbrace{\frac{\omega^2}{c^2}}_{=k^2}\right) \phi_\omega(\vec{r}) = -4\pi \rho_\omega(\vec{r})} \qquad (**)$$

Um diese Gleichung zu lösen werden wir auf das Konzept der Green-Funktionen zurückgreifen. Betrachten wir diese zuerst.

Greensche Funktionen

Um das Konzept der Greenschen Funktionen kennenzulernen, gehen wir zunächst einmal zurück in die Elektrostatik, wo wir es mit der Poisson-Gleichung

$$\boxed{\Delta \phi(\vec{r}) = -4\pi \rho(\vec{r})}$$

mit Randbedingung $\phi(\vec{r}) = 0$ für $r \to \infty$

zu tun haben, wenn wir das skalare Potential für eine gegebene Ladungsverteilung bestimmen wollen.

Definition: Die Greensche Funktion $G(\vec{r}, \vec{r}\,')$ der Poisson-Gl. ist Lösung der partiellen DGL

$$\boxed{\Delta G(\vec{r}, \underbrace{\vec{r}\,'}_{\text{fest}}) = -\delta(\vec{r} - \vec{r}\,')}$$

mit Randbedingung $G(\vec{r}, \vec{r}\,') = 0$ für $r \to \infty$.

Damit ist die Greensche Funktion $G(\vec{r}, \vec{r}\,')$ genau das el. Potenzial einer Einheitspunktladung am Ort $\vec{r}\,'$.

Wegen der Linearität der Poisson-Gleichung folgt dann mit dieser Greenschen Funktion $G(\vec{r},\vec{r}\,')$ die Lösung $\phi(\vec{r})$ durch Superposition, also

$$\boxed{\phi(\vec{r}) = +4\pi \int d^3r' \, G(\vec{r},\vec{r}\,')\, \rho(\vec{r}\,')}$$

Denn

$$\Delta \phi(\vec{r}) = +4\pi \int d^3r' \, \Delta G(\vec{r},\vec{r}\,')\, \rho(\vec{r}\,')$$

$$= -4\pi \int d^3r' \, \delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\, \rho(\vec{r}\,')$$

$$= -4\pi\, \rho(\vec{r})$$

Damit reduziert sich das Problem, die Poisson-Gleichung zu lösen, auf die Bestimmung der Greenschen Funktionen $G(\vec{r},\vec{r}\,')$. Letzteres erreichen wir durch Fourier-Transformation.

Beachte schließlich: Wegen Translationsinvarianz gilt

$$G(\vec{r},\vec{r}\,') = G(\vec{r}-\vec{r}\,')$$

und somit

$$\Delta G(\vec{r}) = -\delta(\vec{r}) .$$

Greensche Funktionen II

Kehren wir nach diesem kurzen Exkurs über Fourier-Transformationen zurück zu den Greenschen Funktionen und ihrer Bestimmungsgleichung (im statischen Fall):

$$\begin{array}{ccc} \Delta G(\vec{r}) & = & -\,\delta(\vec{r}) \\ \Big\downarrow \text{FT} & & \Big\downarrow \text{FT} \\ -\vec{k}^2 \cdot G(\vec{k}) & = & -1 \end{array}$$

Damit haben wir durch diese Fourier-Transformation eine explizite Form der Green-Funktion im Impulsraum gefunden

$$G(\vec{k}) = \frac{1}{|\vec{k}|^2} \qquad \text{wobei } |\vec{k}| = k \text{ sei.}$$

Damit können wir nun auch wieder eine explizite Darstellung im Ortsraum via Fourier-Transformation finden

$$G(\vec{r}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2} e^{i\vec{k}\vec{r}} \quad ,$$

deren Bestimmung sich jetzt auf eine Integration reduziert hat.

- Um dieses Integral auszurechnen, machen wir die folgende Substitution $\vec{k} \to \frac{1}{r}\vec{q}$ wobei $r = |\vec{r}|$

und damit

$$G(\vec{r}) = \frac{1}{r^3} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{r^2}{q^2} e^{i\vec{q}\hat{e}_r}$$

$$G(\vec{r}) = \frac{1}{r} \underbrace{\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{q}\hat{e}_r}}{q^2}}_{\substack{\text{unabhängig von } \hat{e}_r \\ \text{und damit konstant} \\ \equiv \alpha}}$$

$$G(\vec{r}) = \frac{\alpha}{r}$$

Letztlich können wir auch noch die Konstante α durch explizites Ausintegrieren erhalten: $\alpha = \frac{1}{4\pi}$

Damit erhalten wir die explizite Form der Greenschen Funktion im Ortsraum

$$G(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi r}$$

beziehungsweise

$$\boxed{G(\vec{r}-\vec{r}\,') = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}} ,$$

und für die Poisson-Gleichung

$$\boxed{\Delta \frac{1}{r} = -4\pi\,\delta(\vec{r})} .$$

Damit können wir dann die Lösungen der allgemeinen Poisson-Gleichung der Elektrostatik

$$\Delta\phi(\vec{r}) = -4\pi\rho(\vec{r})$$

schreiben als

$$\boxed{\phi(\vec{r}) = \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}} .$$