Übung 4 Daniel Oros 6071449
Anna Bohn 6024475
Benita Dünnebier 6026400

Übungsblatt 2

Ausgabe 25.10.2016
Abgabe 31.10.2016, 12:00 Uhr
Besprechung 3.11.2016

Aufgabe	1	2	3	4	Summe
Punkte	6	/	6	7	19

Allgemeine Informationen

- Abgabe nur in Gruppen von min. 2 bis max. 3 Personen (Ausnahme 0. und 1. Übungsblatt). **Einzelabgaben werden nicht akzeptiert.**
- Alle Namen sind auf der ersten Seite anzugeben. Gruppenmitglieder müssen zur gleichen Gruppe gehören.
- **Bitte unbedingt die Nummer der Übungsgruppe / den Übungsgruppenleiter auf dem Blatt mit angeben.**
- Das Angabenblatt muss mit abgegeben werden.
- Abgebene Aufgaben müssen vorgerechnet werden können. Für Modul III a (9 LP) und b (6 LP) muss eine Übung aus den Übungen 1 – 9 an der Tafel vorgerechnet werden, für Modul III a zusätzlich eine Übung aus den Übungen 10 – 13, um zur Klausur zugelassen zu werden.
- Für Modul III a (9 LP) und b (6 LP) müssen 50% der Punkte aus den Übungen 1 – 9, für Modul III a zusätzlich 50% aus den Übungen 10 – 13 erreicht werden, um zur Klausur zugelassen zu werden.
- Weitere Information finden Sie auch auf https://hera.ph1.uni-koeln.de/~walch/Elektrodynamik16/Inhalt.html

Aufgabe 1 [10 Punkte]

Die Ladungsdichte des Elektrons im Wasserstoffatom (Grundzustand) sei durch

$$\rho(r) = \frac{-e_0}{\pi a^3} e^{-2 \cdot r/a} \tag{1}$$

gegeben ($a = 0.529 \cdot 10^{-8}$ cm (Bohrradius), e_0 Elementarladung).

1. Bestimmen Sie das von der Elektronenladung erzeugte Potential ϕ_e sowie das elektrische Feld $\vec{E}_e$.

2. Bestimmen Sie das Gesamtpotential ϕ und das gesamte elektrische Feld $\vec{E}$ im Atom unter der Annahme, dass die Protonenladung im Atomkern konzentriert sei.

3. Skizzieren Sie graphisch die r-Abhängigkeit von ϕ und $\vec{E}$.

Aufgabe 2 [7 Punkte]

Berechnen Sie mit Hilfe des Fourier-Integrals die Greensche Funktion der Poisson-Gleichung $\Delta G(\vec{r}) = -4\pi\delta(\vec{r})$.
Hinweise:

1. $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$

2. Die Fouriertransformation in n Dimensionen ist gegeben durch:
$f(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int d\vec{r}\, e^{-i\vec{r}\vec{k}} f(\vec{r})$

Aufgabe 3 [6 Punkte]

Beweisen Sie, dass das Potential Φ in einem Volumen V mit Rand S mit vorgegebenen Randbedingungen, d.h. entweder Φ_S oder $\frac{\partial \Phi_S}{\partial n}$, eindeutig ist.
Hinweise:

1. Nehmen Sie dazu an, es gäbe zwei Lösungen Φ_1 und Φ_2, mit der Differenz $U = \Phi_1 - \Phi_2$.

2. Verwenden Sie die erste Greensche Identität
$$\int_V (\phi\nabla^2\psi + \nabla\phi \cdot \nabla\phi) dx^3 = \int_S \phi \frac{\partial\psi}{\partial n} dS \qquad (2)$$
und setzen Sie die beiden darin vorkommenden Funktionen ϕ und ψ gleich U.

3. Betrachten Sie dann zunächst die rechte Seite.

Aufgabe 4 [7 Punkte]

1. Eine Punktladung befinde sich im Abstand d einer ebenen, unendlich ausgedehnten, geerdeten und leitfähigen Platte. Berechnen Sie das Potential sowie das elektrische Feld der Punktladung mit Hilfe der Bildladungsmethode. Beschreiben Sie im Detail die einzelnen Schritte. Skizzieren Sie sowohl das Potential als auch das elektrische Feld. Achten Sie bei der Skizze darauf, dass alle wesentlichen Ergebnisse qualitativ richtig wiedergegeben werden

2. Zeigen Sie, dass sich zusätzliche Ladungen (d.h. das Objekt ist insgesamt nicht elektrisch neutral) in einem perfekten Leiter immer an der Oberfläche aufhalten. Benutzen Sie dazu den Gauss'schen Satz. Was folgt daraus für das elektrische Potential?

Aufgabe 1

1. Potential Φ_e der Elektronenladung

$$\Phi_e(\vec{R}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{dq}{|\vec{R}-\vec{R}'|} \qquad \text{mit } dq = \rho(R)\, dV$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(R)}{R}\, dV$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{r} \frac{\rho(R)}{R} R^2 \sin\vartheta \, dR\, d\varphi\, d\vartheta$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot 2 \cdot 2\pi \cdot \int_0^r R\cdot\rho(R)\, dR$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0} \int_0^r -\frac{e_0}{\pi a^3} e^{-\frac{2R}{a}} R\, dR \qquad f$$

$$= -\frac{e_0}{\varepsilon_0 \pi a^3} \int_0^r R\, e^{-\frac{2R}{a}}\, dR$$

$$= -\frac{e_0}{\varepsilon_0 \pi a^3} \left(\left[R\cdot \frac{-a}{2} e^{-\frac{2R}{a}} \right]_0^r - \int_0^r -\frac{a}{2} e^{-\frac{2R}{a}}\, dR \right)$$

$$= -\frac{e_0}{\varepsilon_0 \pi a^3} \left(-r\frac{a}{2} e^{-\frac{2r}{a}} - \left[\frac{a^2}{4} e^{-\frac{2R}{a}} \right]_0^r \right)$$

$$= -\frac{e_0}{\varepsilon_0 \pi a^3} \left(-r\frac{a}{2} e^{-\frac{2r}{a}} - \frac{a^2}{4} e^{-\frac{2r}{a}} + \frac{a^2}{4} \right)$$

$$= \frac{e_0}{\varepsilon_0 \pi a^3} \left(\frac{r}{2} e^{-\frac{2r}{a}} + \frac{a}{4} e^{-\frac{2r}{a}} - \frac{a}{4} \right)$$

Idee gut. Ist aber nicht so einfach

wobei sich r zwischen 0 und a befindet.

$$r \in [0, a]$$

Somit ergibt sich für das elektrische Feld

$$\vec{E}_e = -\nabla \Phi_e$$

$$= \frac{e_0}{\varepsilon_0 \pi a^3} e^{-\frac{2r}{a}} \vec{r} \qquad ff$$

↑

Wolfram Alpha

2. Gesamtpotential

Potential des Protons ist gegeben durch (Punktladung)

$$\Phi_p = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e_0}{r}$$

Für das Gesamtpotential gilt somit

$$\Phi = \Phi_e + \Phi_p$$

$$= \frac{e_0}{\varepsilon_0 \pi a^3} \left(\frac{r}{2} e^{-\frac{2r}{a}} + \frac{a}{4} e^{-\frac{2r}{a}} - \frac{a}{4} \right) - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e_0}{r}$$

$$= \frac{e_0}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{2r}{a^3} e^{-\frac{2r}{a}} + \frac{1}{a^2} e^{-\frac{2r}{a}} - \frac{1}{a^2} - \frac{1}{r} \right) \qquad ff$$

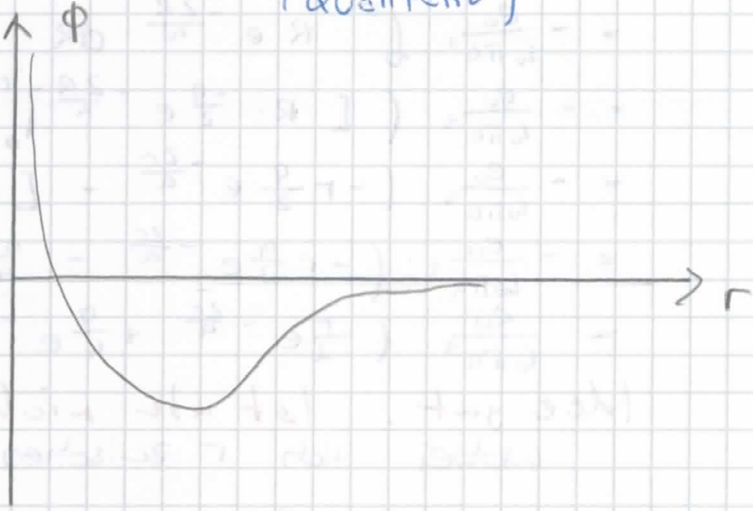
Somit ergibt sich für das gesamte elektrische Feld

$$\vec{E} = -\nabla\phi$$
$$= -\vec{r}\left(\frac{1}{r^3} - \frac{4}{a^4}e^{-\frac{2r}{a}}\right)$$

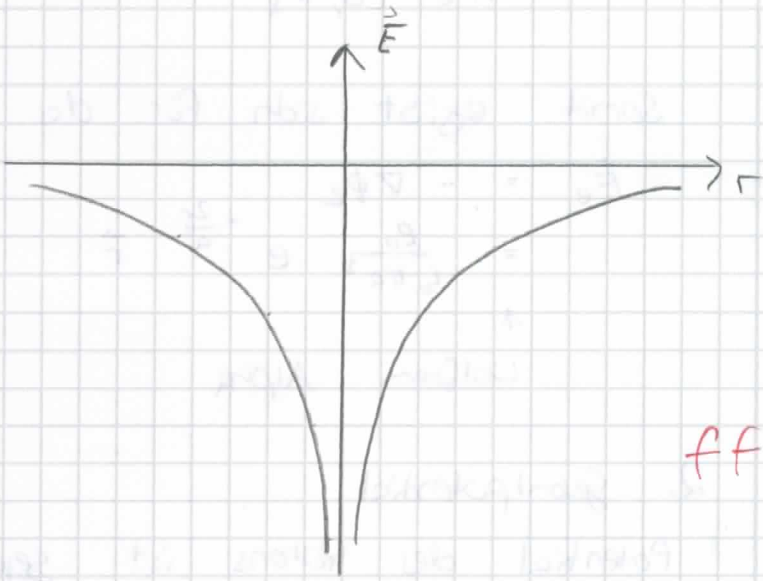
↑
wolfram Alpha

3. r - Abhängigkeit (Qualitativ)

i) von ϕ



ii) von $\vec{E}$



ff

Aufgabe 3

Eindeutigkeit von ϕ in V mit S mit RB

i) ϕ_S eindeutig

ii) $\frac{\partial \phi_S}{\partial n}$ eindeutig

Seien ϕ_1 und ϕ_2 Lösungen von $\Delta\phi = -4\pi \rho_0$

mit $u = \phi_1 - \phi_2$

$\Rightarrow \Delta u = 0$, da $\Delta u = \Delta\phi_1 - \Delta\phi_2 = -4\pi\rho_0 - (-4\pi\rho_0) = 0$

Aus den Randbedingungen folgt

i) $u = 0$ auf S, da ϕ eindeutig $\Rightarrow \phi_1 - \phi_2 = 0$

ii) $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ auf S analog

Greensche Identität:

$$\int_V (\phi \nabla^2 \psi + \nabla\phi \cdot \nabla\phi)\, dx^3 = \int_S \phi \frac{\partial \psi}{\partial n}\, dS$$

mit $\phi = \psi = u$

$$\int_V (\underbrace{u \Delta u}_{=0,\ \text{da } \Delta u = 0} + (\nabla u)^2)\, dx^3 = \underbrace{\int_S u \frac{\partial u}{\partial n}\, dS}_{= 0 \text{ wegen i) oder ii)}}$$

$\Rightarrow \int_V (\nabla u)^2\, dx^3 = 0$ ✓

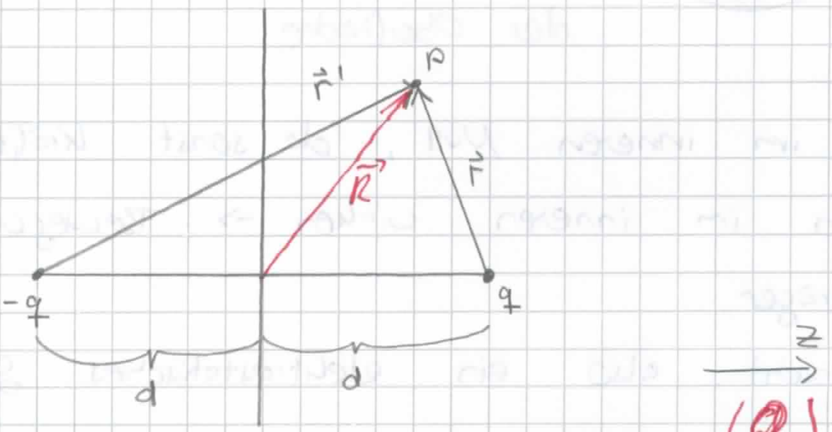
$\Rightarrow \nabla u = 0$ ✓

$\Rightarrow u = \text{const}$ ✓

$\Rightarrow$ Potential eindeutig bis auf const.

Aufgabe 4

1. Punktladung in Abstand d von ebener, unendlich ausgedehnter, geerdeten und leitenden Platte



$$\vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d \end{pmatrix}$$

mit den Bedingungen

$$\phi(z=0) = 0$$
$$\phi(\infty) = 0$$

Für das Potential $\phi(\rho)$ gilt

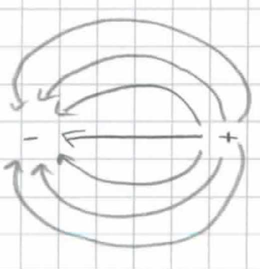
$$\phi(\rho) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right] = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{|\vec{R}-\vec{d}|} - \frac{1}{|\vec{R}+\vec{d}|}\right]$$

Für das elektrische Feld gilt:

$$\vec{E} = -\nabla\phi$$
$$= -\left(\frac{\vec{r}'}{r'^3} - \frac{\vec{r}}{r^3}\right)$$
$$= \frac{\vec{r}'}{r'^3} + \frac{\vec{r}}{r^3}$$

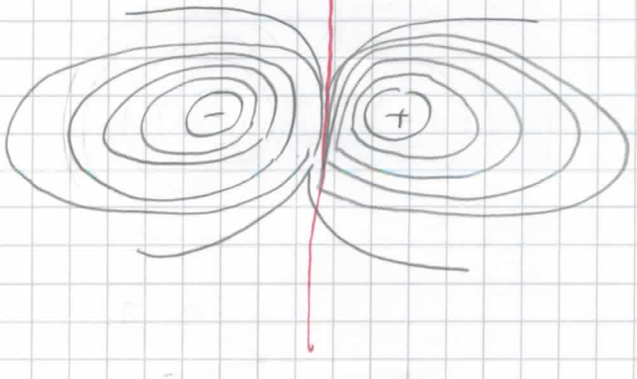
OK

elektrisches Feld

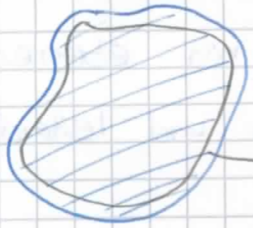


Potential

(Äquipotential linien)



4.2



- perfekter Leiter

Gaußsche Fläche dicht unterhalb der Oberfläche

$\vec{E}$-Feld im inneren Null, da sonst Kräfte auf Ladungen im inneren wirken -> Bewegung der Ladungsträger

Es herrscht also ein elektrostatisches Gleichgewicht ✓

Alle Punkte auf Gauß-Fläche haben den Wert für das E-Feld Null

=> Fluss des E-Feldes durch Gauß-Fläche ist Null

Gaußsche Satz: $\oint_A \vec{E}\, d\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$

$\Longrightarrow$ Gesamtladung innerhalb der Gauß-Fläche ist Null ✓

=> Überschussladung zw. Gauß-Fläche und Oberfläche des Leiters

=> Gauß-Fläche ist nah an Oberfläche

=> Beh.

OK

Aufg. 2

$$\Delta G(\vec{r}) = -4\pi\,\delta(\vec{r})$$

Fourier-Transformation: $\tilde{f}(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} d\vec{r}\; e^{-i\vec{k}\vec{r}}\, f(\vec{r})$

$$f(\vec{r}) = \int_{\mathbb{R}^n} d\vec{k}\; e^{i\vec{r}\vec{k}}\, \tilde{f}(\vec{k})$$

$$\delta(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} d\vec{k}\; e^{i\vec{k}\vec{r}}$$

$$F(\Delta G) = \frac{-4\pi}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\vec{r})\, e^{i\vec{r}\vec{k}}\, d\vec{r}$$

mit $\underbrace{\Delta \int d\vec{k}}_{\text{wirkt nur auf e-Fkt.}}\, e^{i\vec{k}\vec{r}}\, \tilde{G}(\vec{k}) = -\int d\vec{k}\, |\vec{k}|^2 e^{i\vec{k}\vec{r}}\, \tilde{G}(\vec{k})$

$F(\Delta G)$ Ableiten

$$\Rightarrow \quad -|\vec{k}|^2 F(G) = -\frac{2}{(2\pi)^{n-1}} \iff \boxed{F(G) = \frac{2}{(2\pi)^{n-1}} \frac{1}{|\vec{k}|^2}}$$

$$\Rightarrow G = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{(2\pi)^{n-1}} \frac{1}{|\vec{k}|^2} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\, d\vec{k} \qquad \left\ulcorner d^3\vec{k} = |\vec{k}|^2 \sin(\theta)\, dk\, d\theta\, d\phi \right\lrcorner$$

$$\overset{n=3}{\Rightarrow} G(\vec{r}) = \int_0^{\infty} \cancel{|\vec{k}|^2} \int_0^{\pi} \sin(\theta) \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{\cancel{|\vec{k}|^2}}\, dk\, d\theta\, d\varphi \cdot \frac{2}{4\pi^2} \qquad \left\ulcorner \vec{r}\cdot\vec{k} = r\cdot k\cdot \cos(\theta) \right\lrcorner$$

$$= -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dk \int_{-1}^{1} \underbrace{d(\cos(\theta))}_{=:u}\, e^{ikr\cdot \underbrace{\cos(\theta)}_{=:u}} = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{ikr} \cdot e^{ikru}\Big|_{-1}^{1}\, dk$$

$\sin(\theta)\, d\theta = -d(\cos(\theta))$

$\theta = \cos(\theta)$

$\left(\frac{d\theta}{d\theta}=\right) \frac{d\cos(\theta)}{d\theta}$

$= -\sin(\theta)$

$$= -\frac{1}{\pi} \int \frac{1}{ikr} \left(e^{ikr} - e^{-ikr}\right) dk$$

$$= -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{kr} \cdot 2\cdot \sin(kr)\, dk \qquad \left\ulcorner \sin(x) = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right) \right\lrcorner$$

$kr = x$

$$= -\frac{2}{\pi}\frac{1}{r}\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\, dx$$

$$= - \frac{2}{\pi r}\cdot\frac{\pi}{r} = \frac{1}{r}$$

Vorzeichen falsch, irgendwo verloren

Idee:

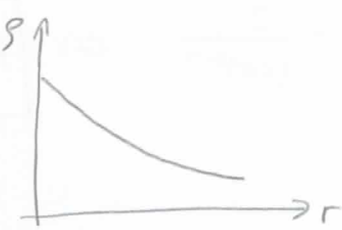
$$\Delta\phi = -4\pi\rho$$

$$\phi(\vec r) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(\vec r\,')}{|\vec r - \vec r\,'|}\, d\vec r\,' = \int_{\mathbb{R}^3} G(\vec r - \vec r\,')\, \rho(\vec r\,')\, d\vec r\,'$$

$\Rightarrow$ Green-Fkt.

Aufg. 1

1.
$$\rho(r) = \frac{-e_0}{\pi a^3}\cdot e^{-\frac{2r}{a}}$$



$e_0 > 0$

$Q = -e_0$

$$\Delta\phi = 4\pi\rho$$

$$\Rightarrow \left[\frac{1}{r^2}\partial_r(r^2\partial_r)\right]\phi = c\cdot e^{-kr}$$

$c := \frac{4e_0}{a^3}$

$k := \frac{2}{a}$

$$r^2\partial_r\phi = \int_0^r dr'\, c r'^2 e^{-kr'}$$

$$= c\cdot\frac{\partial^2}{\partial k^2}\int_0^r e^{-kr'}\, dr$$

Feynman-Trick um Integral zu vereinfachen

$$= c\,\frac{\partial^2}{\partial k^2}\left[-\frac{1}{k}e^{-kr'}\right]_0^r$$

$$= c \cdot \left[\frac{2}{k^3} - \frac{e^{-kr}}{k^3}\left(k^2 r + 2kr + 2\right)\right]$$

$$\Rightarrow \quad \phi(r) - \phi(0) = c \int_0^r dr' \left[\frac{2}{k^3 r'^2} - \frac{e^{-kr'}}{k^3 r'^2}\left[k^2 r'^2 - 2kr' + 2\right]\right]$$

Trick: $\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{e^{-kr}}{r}\right] \Rightarrow \quad \phi(r) - \phi(0) = c \int_0^r dr' \left[\frac{2}{k^3 r'^2} - \frac{e^{-kr'}}{k} + \frac{\partial}{\partial r'}\left(2 \cdot \frac{e^{-kr'}}{k^3 r'}\right)\right]$

$$\Leftrightarrow \quad \phi(r) - \phi(0) = \frac{c}{k^3}\left[e^{-kr'}\left(k + \frac{2}{r'}\right) - \frac{2}{r'}\right]_0^r$$

, hier $\lim r \to 0$, sonst durch 0 teilen! Böse!

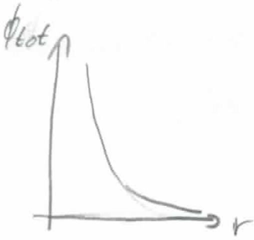
$$= \frac{c}{k^3}\left(e^{-kr}\left(k + \frac{2}{r}\right) - \frac{2}{r} - k\right)$$

$$\phi(\infty) \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \phi(0) = \frac{c}{k^2}$$

$$\phi_e(r) = e_0 \left(e^{-\frac{2r}{a}}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r}\right)$$

2.

$$\phi_{tot} = \phi_e(r) + \frac{e_0}{r} = e_0\, e^{-\frac{2r}{a}}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{r}\right)$$



$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi_{tot} = -\phi_{tot}' \frac{\vec{r}}{r} = E_r \frac{\vec{r}}{r}$$

$$E_r(r) = -\phi_{tot}'(r) = e_0\, e^{-\frac{2r}{a}}\left(\frac{2}{a^2} + \frac{2}{ar} + \frac{1}{r^2}\right)$$

Aufg. 3

Seien ϕ_1 und ϕ_2 Lösungen

von $\Delta\phi = -4\pi\rho_0$

Setze: $u = \phi_1 - \phi_2$

$$\Delta u = 0$$

(i) $u = 0$ Dirichlet-Bed.

(ii) $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ Neumann - Bed.

$$\int_V (\phi \nabla^2 \psi + \nabla\phi \nabla\phi)\, dx^3 = \int_S \phi \frac{\partial\psi}{\partial n}\, ds$$

$\phi = \psi = u$

$$\Rightarrow \int_V (u \Delta u + (\nabla u)^2)\, dx^3 = \int_S \underbrace{u \frac{\partial u}{\partial n}}_{\overset{!}{=}0}\, ds$$

, wegen RB von $u = 0$ und $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$

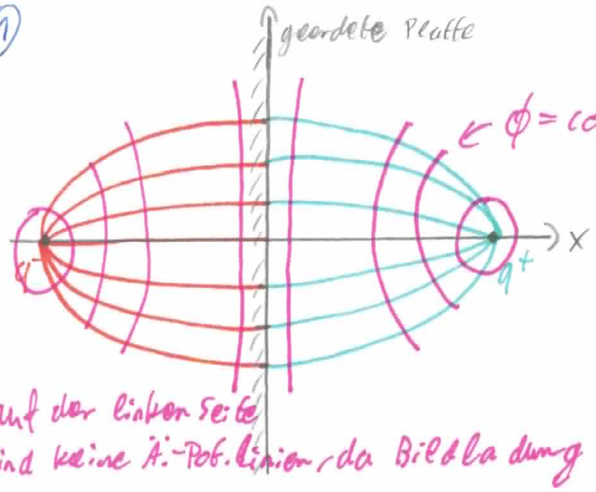
$$\Rightarrow \int_V (\nabla u)^2\, dx^3 = 0 \quad \Rightarrow \nabla u = 0$$

$\Rightarrow u = \text{const} = 0$ für Dirichlet $\Rightarrow$ eindeutig

für Neumann Variabel, aber const

Aufg. 4

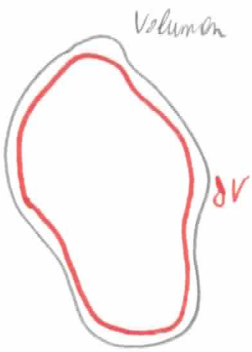
①



$$\phi(\vec r) = \frac{q}{\sqrt{(x-d)^2+y^2+z^2}} - \frac{q}{\sqrt{(x+d)^2+y^2+z^2}}$$

$$\vec E = -\vec\nabla \phi(\vec r) = \frac{q}{((x-d)^2+y^2+z^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} x-d \\ y \\ z \end{pmatrix} - \frac{q}{((x+d)^2+y^2+z^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} x+d \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

②



$\vec E_{Leiter} = 0$

$$\underset{\partial V}{\int} \underset{\substack{\shortparallel \\ 0}}{E\, dA} = -4\, Q_{Eingeschlossen}$$

0, da Idealer Leiter und $\phi = 0 \Rightarrow \vec E = 0$

$\Rightarrow \quad Q_{Eingeschlossen} = 0$

$\Rightarrow$ Potential muss const sein