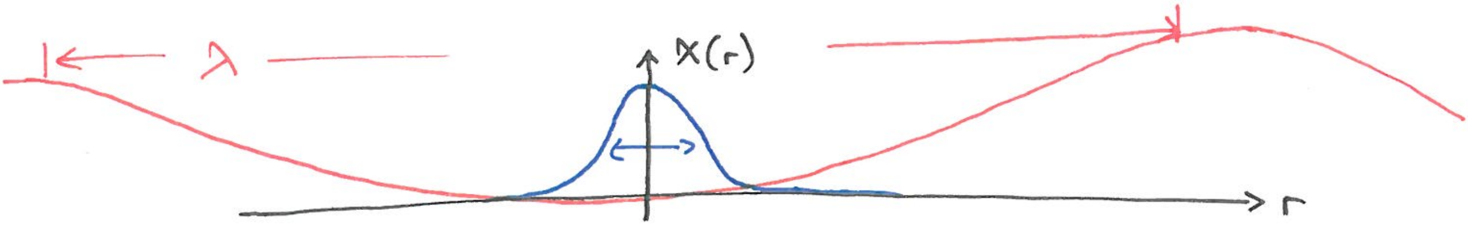
Elektromagnetische Wellen in Materie

Als letztes Thema unserer Betrachtungen zur makroskopisch Elektrodynamik wollen wir uns heute damit beschäftigen, was passiert, wenn eine elektromagnetische Welle auf ein Medium mit nicht-trivialer dielektrischer Funktion $\varepsilon(\vec{k},\omega)$ (und magnetischer Permeabilität $\mu(\vec{k},\omega)$) trifft.

Die Abhängigkeit der dielektrischen Funktion $\varepsilon(\vec{k},\omega)$ von Impuls und Frequenz spiegelt hierbei die Wechselwirkung zwischen el.-mag. Welle und Materie wider.
Die Frequenzabhängigkeit etwa rührt daher, daß eine el.-mag Welle Anregungen der Moleküle im Medium erzeugen kann, welche eine typische Frequenzabhängigkeit besitzen. Das Feedback dieser Anregungen auf die el.-mag. Welle ist dann in der dielektrischen Funktion beschrieben.
Es ist hierfür sinnvoll sich die relevanten Frequenzskalen zu vergegenwärtigen. Typische Anregungen im Festkörper tragen Energien $\hbar\omega < 1\,\mathrm{eV}$. Mit $\hbar \simeq 0{,}6 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{eVs}$ ergeben sich damit typische Frequenzen von $\omega < 10^{15}\,s^{-1}$, bei denen die diel. Funkti spezielle Merkmale aufweisen wird. Dieser Frequenzbereich entspricht Wellenlängen von $\lambda \sim \frac{2\pi c}{\omega} \sim 10^{-6}\,m$ und ist damit um einiges größer als die typischen Abstände zwischen den Atomen ($10^{-10} - 10^{-8}\,m$).
1Å – 100Å

Damit sind die relevanten Wellenlängen auch erheblich größer als die Längenskalen, auf welches etwa eine lokale Polarisation abgeschirmt wird – was der "Reichweite" der Suszeptibilität entspricht:



Die räumliche Abhängigkeit der Suszeptibilität kommt also einer leicht verbreiteten δ-Funktion gleich. Somit können wir die dielektrische Funktion (und auch die mag. Permeabilität) allgemein modellieren als:

$$\boxed{\varepsilon(\vec{k},\omega) \longrightarrow \varepsilon(\omega) \qquad \mu(\vec{k},\omega) \longrightarrow \mu(\omega)}$$

Allerdings nehmen wir im allgemeinen Fall an, daß $\varepsilon(\omega)$ und $\mu(\omega)$ komplexe Funktionen sind – deren Bedeutung uns im folgenden noch klar wird.

Untersuchen wir nun eine monochromatische Welle mit fester Frequenz ω:

dielektrisches Verschiebungsfeld

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\left(\vec{E}(\vec{r})\, e^{-i\omega t}\right) \qquad \vec{D}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\left(\varepsilon(\omega)\vec{E}(\vec{r})\, e^{-i\omega t}\right)$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\left(\vec{B}(\vec{r})\, e^{-i\omega t}\right) \qquad \vec{H}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\left(\frac{\vec{B}(\vec{r})}{\mu(\omega)}\, e^{-i\omega t}\right)$$

magnetische Feldstärke

Setzen wir diesen Ansatz in die makroskopischen Maxwell-Gleichungen ein:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = 4\pi\rho$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{D} = \frac{4\pi}{c}\vec{J}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$$

wobei wir den quellfreien Fall $\rho = 0$ und $\vec{J} = 0$ betrachten wollen. Mit $\frac{\partial}{\partial t}\vec{D}(\vec{r},t) = -i\omega\,\vec{D}(\vec{r},t)$; $\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}(\vec{r},t) = -i\omega\,\vec{B}(\vec{r},t$

ergibt sich:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}(\vec{r}) = 0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}(\vec{r}) + \frac{i\omega\,\varepsilon(\omega)\mu(\omega)}{c}\vec{E}(\vec{r}) = 0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}(\vec{r}) - \frac{i\omega}{c}\vec{B}(\vec{r}) = 0$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}(\vec{r}) = 0$$

Mit $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B}(\vec{r})) = -\Delta\vec{B}(\vec{r}) + \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}(\vec{r})) = -\Delta\vec{B}(r)$

ergibt sich:

$$\left(\Delta + \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\mu\right)\vec{B}(\vec{r}) = 0$$

und analog

$$\left(\Delta + \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\mu\right)\vec{E}(\vec{r}) = 0$$

Diese Gleichungen werden durch die Ansätze

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_0 \, e^{i\vec{k}\vec{r}} \qquad \text{und} \qquad \vec{B}(\vec{r}) = \vec{B}_0 \, e^{i\vec{k}\vec{r}} \qquad (**)$$

gelöst, wobei $\vec{E}_0$ und $\vec{B}_0$ beliebige Amplituden seien, und für den Wellenvektor $\vec{k}$ die Bedingung

$$\omega^2 = \frac{c^2 \vec{k}^2}{\varepsilon\mu} = \frac{c^2 \vec{k}^2}{n^2} \qquad (*)$$

Brechungsindex

erfüllt sei.

Hierbei haben wir den sogenannten Brechungsindex

$$\boxed{n = \sqrt{\varepsilon\mu} = n_r + i\varkappa = |n| e^{i\delta}} \qquad \delta = \arctan \frac{\varkappa}{n_r}$$

eingeführt, welcher im Allgemeinen komplex ist. Real- und Imaginärteil des Brechungsindex werden auch optische Konstante genannt, die wie $\varepsilon(\omega)$ und $\mu(\omega)$ von der Frequenz abhängen:

$$\boxed{n = n(\omega) \qquad n_r = n_r(\omega) \qquad \varkappa = \varkappa(\omega)}$$

Wenn aber der Brechungsindex im Allgemeinen komplex ist, so muß auch der Wellenvektor $\vec{k}$ komplex sein, um $(*)$ zu erfüllen.

Wir schreiben

$$\vec{k} = \vec{k}_r + i\vec{k}_i \qquad \left.\begin{matrix}\vec{k}_r\\ \vec{k}_i\end{matrix}\right\} \text{reelle Vektoren}$$

so daß für eine Welle der Form

$$e^{i\vec{k}\vec{r}} = e^{i\vec{k}_r\vec{r}} \cdot e^{-\vec{k}_i\vec{r}}$$

die Phasenflächen $\vec{k}_r \cdot \vec{r} = \text{const.}$ allgemein verschieden sind von Flächen gleicher Amplitude $\vec{k}_i \cdot \vec{r} = \text{const.}$

Während im allgemeinsten Fall $\vec{k}_r$ und $\vec{k}_i$ in beliebige Richtungen zeigen können, beschränken wir uns im folgenden auf den Fall $\vec{k}_r \parallel \vec{k}_i$. Für diesen Fall können wir $\vec{k}$ ansetzen als

$$\vec{k} = n\vec{k}_0 \qquad \text{mit } k_0 = |\vec{k}_0| = \frac{\omega}{c}$$

Auf den Ebenen $\vec{k}_0 \cdot \vec{r} = \text{const.}$ sind sowohl Phase als auch Amplitude konstant, weshalb wir wiederum von ebenen Wellen sprechen.

Wie schon bei unserer Diskussion der ebenen Wellen im Vakuum, können wir die räumliche Abhängigkeit der Amplituden (**) zurück in die Maxwell-Gleichungen einsetzen und erhalten:

$$\vec{k}_0 \cdot \vec{E}_0 = 0 \qquad \vec{k}_0 \times (n\vec{E}_0) = k_0 \vec{B}_0$$

$$\vec{k}_0 \cdot \vec{B}_0 = 0 \qquad \vec{k}_0 \times \vec{B}_0 = -k_0 (n\vec{E}_0)$$

Damit erhalten wir schließlich:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\left(\vec{E}_0 \, e^{i(n_r \vec{k}_0 \cdot \vec{r} - \omega t)}\right) e^{-\varkappa \vec{k}_0 \vec{r}}$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = |n| \frac{\vec{k}_0}{|\vec{k}_0|} \times \mathrm{Re}\left(\vec{E}_0 \, e^{i(n_r \vec{k}_0 \cdot \vec{r} - \omega t + \delta)}\right) e^{-\varkappa \vec{k}_0 \vec{r}}$$

Zur weiteren Festlegung der Lösung ist ein reelles Wellenvektor $\vec{k}_0$ mit $k_0 = \frac{\omega}{c}$ und ein (komplexer) Amplitudenvektor $\vec{E}_0$ mit $\vec{k}_0 \cdot \vec{E}_0 = 0$ zu wählen.

Für reelle Amplitude $\vec{E}_0$ ergibt sich eine linear polarisierte Welle

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 \cos(n_r \vec{k}_0 \cdot \vec{r} - \omega t)\, e^{-\varkappa \vec{k}_0 \vec{r}}$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = |n| \frac{\vec{k}_0}{k_0} \times \vec{E}_0 \cos(n_r \vec{k}_0 \cdot \vec{r} - \omega t + \delta)\, e^{-\varkappa \vec{k}_0 \vec{r}}$$

Damit ergeben sich für el.-mag. Wellen in Materie folgende Eigenschaften:

1) Transversalität

Wie im Vakuum gilt $\vec{E}(\vec{r},t) \perp \vec{k}_0$ und $\vec{B}(\vec{r},t) \perp \vec{k}_0$

2) Polarisation

Die Zeitabhängigkeit des Feldvektors stellt sich wie im Fall des Vakuums dar $\rightarrow$ Diskussion der Polarisation analog.

3) Phasengeschwindigkeit

Betrachten wir eine Welle in x-Richtung, also $\vec{k}_0 = k_0 \hat{e}_x$. Dann gilt für die Phase

$$\varphi(t) = n_r k_0 x - \omega t \;(+\delta)$$

Das Maximum der Welle stellt sich bei $\varphi(t) = 0^{(+\delta)}$ ein und verschiebt sich mit der Geschwindigkeit

$$v_p = \frac{x}{t} = \frac{\omega}{k_0} \cdot \frac{1}{n_r} = \frac{c}{n_r}$$

Die Phasengeschwindigkeit ist damit um einen Faktor n_r relativ zur Lichtgeschwindigkeit [illegible]

4) Wellenlänge

Zwei benachbarte Maxima des Feldes sind durch die Phase 2π voneinander getrennt, was einer Wellenlänge λ entspricht:

$$n_r k_0 \lambda = 2\pi \rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k_0} \cdot \frac{1}{n_r} = \frac{\lambda_0}{n_r}$$

wobei λ_0 die Wellenlänge im Vakuum ist.

5) Amplitudenverhältnis und Phasenverschiebung

Für die Amplituden gilt:

$$\frac{|\vec{B}_{max}|}{|\vec{E}_{max}|} = \frac{|\vec{B}(\vec{r}, t + \delta/\omega)|}{|\vec{E}(\vec{r}, t)|} = |n|$$

Wir erkennen überdies eine Phasenverschiebung $\delta = \arctan \frac{\varkappa}{n_r}$ der Maxima der beiden Felder.

Dies steht im Gegensatz zur Vakuumswelle, wo die Amplitud gleiche Größe besitzen und die beiden Felder phasengleich oszillieren.

6) Dämpfung

Die el.-mag. Welle ist für $\varkappa \neq 0$ gedämpft.

Als Absorptionskoeffizienten α definiert man

$$\alpha(\omega) = 2k_0\, \varkappa(\omega)$$

Für die Feldenergiedichte erhalten wir

$$w = \frac{1}{8\pi}\left(\vec{E}\cdot\vec{D} + \vec{B}\cdot\vec{H}\right) = \frac{1}{8\pi}\left(\varepsilon\,|\vec{E}|^2 + \frac{1}{\mu}|\vec{B}|^2\right)$$

$$\propto e^{-2\varkappa_0 \vec{k}_0 \vec{r}} = e^{-\alpha\cdot e} \qquad \text{mit } e = \frac{\vec{k}_0\vec{r}}{k_0}$$

Die Welle fällt damit auf Skalen von $\frac{1}{\alpha}$ ab.

Mikroskopisches Mechanismus der Dämpfung

Die Dämpfung der Welle bedeutet also, daß die Welle Energie verlert. Diese Energie wird an das Medium abgegeben. Für einen Isolator (im Gegensatz zu einem Metall oder Plasma) können wir uns hierzu eines mikroskopisches Oszillatormodell der im Atom gebundenen Elektronen bedienen:

Ein einzelnes Elektron an der Koordinate $\vec{r}$ (relativ zum Nuhleus) wird hierbei als Oszillator mit Bewegungsgleichung

$$m_e\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\omega_0^2}{2} + \Gamma\frac{\partial}{\partial t}\right)\vec{r}(t) = e\cdot\vec{E}(t)$$

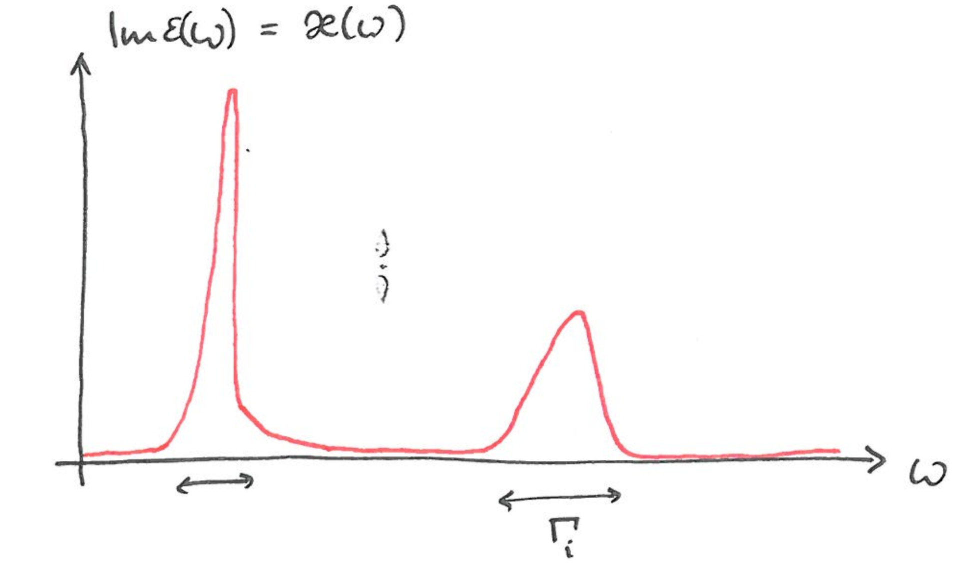
beschrieben, wobei ω_0 die charakteristische Frequenz der Oszillatorbewegung sei, Γ die Relaxationskonstante, und ω die Frequenz des äußeren Feldes (d.h. der el.-mag. Welle).

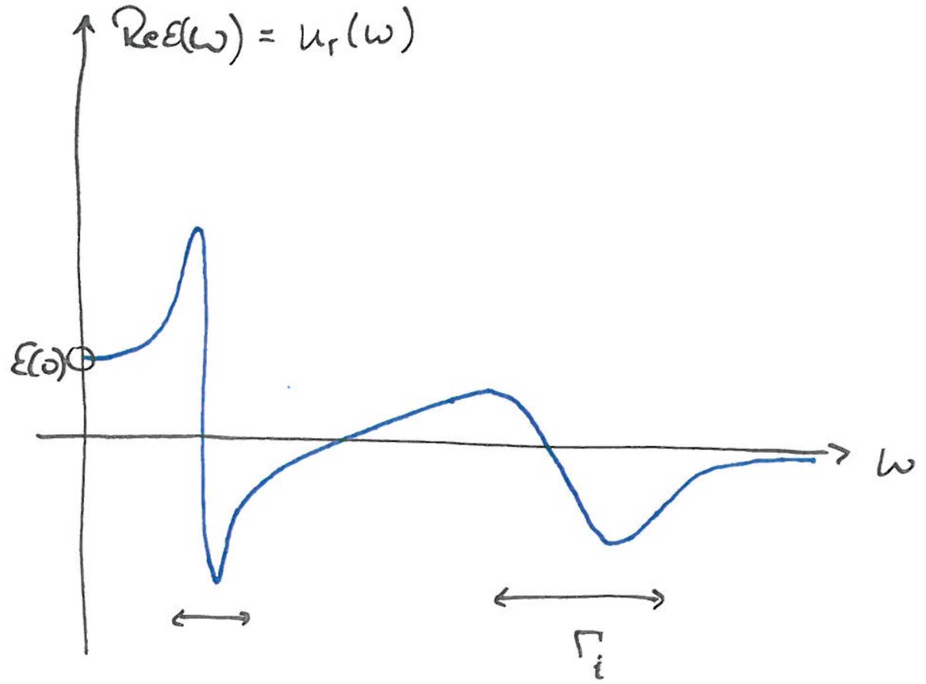
Via Fouriertransformation erhalten wir daraus

$$\vec{d}(\omega) = e\,\vec{r}(\omega) = \frac{e^2\cdot\vec{E}(\omega)}{m_e\left(\omega_0^2 - \omega^2 - i\Gamma\omega\right)}$$

Verallgemeinern wir dieses Dipolmoment eines einzelnen Elektrons auf ein Molekül, welches mit einer Dichte ρ im Festkörper auftrete, mit mehreren Elektronen f_i bei Eigenfrequenz ω_i und Relaxation Γ_i, so erhalten wir für die dielektrische Funktion

$$\varepsilon(\omega) = 1 + 4\pi \frac{\rho e^2}{m_e} \sum_i \frac{f_i}{\omega_i^2 - \omega^2 - i\Gamma_i \omega}$$





Zum Verlauf dieser Kurven stellen wir fest, daß

- die Materialkonstante ε typischerweise $\varepsilon(\omega=0)$ entspricht, wo lediglich der Realteil beiträgt und der zum Imaginärteil proportionale Absorptionskoeffizient verschwindet

- fern der Resonanzfrequenzen ω_i verschwindet der Absorptionskoeffizient und es gilt überdies $\frac{\partial}{\partial\omega} n_r(\omega) > 0$, was als normale Dispersion bezeichnet wird

- in der unmittelbaren Nähe der atomaren Resonanzfrequenzen $|\omega - \omega_i| < \frac{\Gamma_i}{2}$ schießt der Absorptionskoeffizient in die Höhe, während die Ableitung $\frac{\partial}{\partial\omega} n_r(\omega) < 0$ negativ wird. Dies wird als anomale Dispersion bezeichnet.