Gruppe Nr. 4

Leiter: Nick

Daniel Gros 6071449

Anna Bohn 6024495

Benita Dünne-bier 6026400

Klassische Feldtheorie III — WS 16/17

Prof. Stefanie Walch — Übungsleiter: D. Seifried

Übungsblatt 4

Ausgabe 8.11.2016
Abgabe 14.11.2016, 12:00 Uhr
Besprechung 17.11.2016

Aufgabe	1	2	3	Summe
Punkte	12	8	6	26

Allgemeine Informationen

- Abgabe nur in Gruppen von min. 2 bis max. 3 Personen (Ausnahme 0. und 1. Übungsblatt). **Einzelabgaben werden nicht akzeptiert.**
- Alle Namen sind auf der ersten Seite anzugeben. Gruppenmitglieder müssen zur gleichen Gruppe gehören.
- **Bitte unbedingt die Nummer der Übungsgruppe / den Übungsgruppenleiter auf dem Blatt mit angeben.**
- Das Angabenblatt muss mit abgegeben werden.
- Abgebene Aufgaben müssen vorgerechnet werden können. Für Modul III a (9 LP) und b (6 LP) muss eine Übung aus den Übungen 1 – 9 an der Tafel vorgerechnet werden, für Modul III a zusätzlich eine Übung aus den Übungen 10 – 13, um zur Klausur zugelassen zu werden.
- Für Modul III a (9 LP) und b (6 LP) müssen 50% der Punkte aus den Übungen 1 – 9, für Modul III a zusätzlich 50% aus den Übungen 10 – 13 erreicht werden, um zur Klausur zugelassen zu werden.
- Weitere Information finden Sie auch auf https://hera.ph1.uni-koeln.de/~walch/Elektrodynamik16/Inhalt.html

Aufgabe 1 [14 Punkte]

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass in sphärischen Koordinaten die Laplace-Gleichung mit Hilfe der Legendre Polynome P_l^m gelöst werden kann. Für azimuthal-symmetrische Probleme, d.h. m = 0, erhält man dann allgemein die Lösung für das Potential

$$\Phi(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}) P_l(\cos\theta)\,. \tag{1}$$

Man betrachte nun das Potential einer Punktladung an der Stelle $\vec{x}'$, die sich in einem Abstand r' genau auf der z-Achse befinde, d.h. $\theta' = 0$

$$\Phi = \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} (A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}) P_l(\cos\theta) \,. \tag{2}$$

Dabei sei θ der Winkel, den der Vektor $\vec{x}$ mit dem Vektor $\vec{x}'$, d.h. hier mit der z-Achse, einschließt und r dessen Länge. Betrachten im Sie im Folgenden den Fall, dass $\vec{x}$ ebenfalls auf der z-Achse liegt.

1. Was bedeutet dies für P_l sowie den Ausdruck $\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$?

2. Durch die vorherigen Überlegungen erhalten Sie für Gleichung 2 eine Gleichung, die nur von r und r' abhängt. Betrachten Sie im Folgenden die Fälle $r > r'$ und $r < r'$ getrennt. Entwickeln (Taylorreihe) Sie im ersten Fall den Ausdruck für $\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$ für r' um r und im zweiten Fall umgekehrt.

3. Sie erhalten für die Entwicklung eine unendliche Reihe. Durch Koeffizientenvergleich mit der rechten Seite von Gleichung 2 bestimmen Sie nun für die Fälle $r > r'$ und $r < r'$ die Faktoren A_l und B_l.

Sie sollten am Ende als Lösung $\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}$ erhalten, wobei $r_<$ bzw. $r_>$ der kleinere bzw. größere Wert von $|r|$ und $|r'|$ ist. D.h. für allgemeine Fälle, dass $\vec{x}$ nicht auf der z-Achse liegt, lautet das Potential einer Punktladung

$$\Phi = \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} P_l(\cos\theta) \,. \tag{3}$$

Betrachten Sie nun den Fall, dass sich eine zweite Punktladung mit der identischen Ladung bzw. mit der entgegengesetzten Ladung an der Stelle -$\vec{x}'$, d.h. ebenfalls auf der z-Achse mit dem gleichen Abstand zum Ursprung r' (allerdings in negative Richtung) befindet.

4. Berechnen Sie das Potential in der Umgebung (d.h. nicht nur auf der z-Achse) durch das Superpositionsprinzip für eine gleiche und eine entgegengesetze Ladung. Betrachten Sie nur den Fall $r < r'$. Machen Sie dazu von den Symmetrieeigenschaften von P_l(x) Gebrauch und vereinfachen Sie die unter Verwendung von Gleichung 3 resultierende unendliche Reihe soweit wie möglich. Fertigen Sie zur Verdeutlichung zudem eine Skizze an.

Aufgabe 2 [10 Punkte]

1. Betrachten Sie die Laplace-Gleichung in Zylinderkoordinaten. Leiten Sie daraus in Analogie zur Vorlesung die drei Differentialgleichungen für r, ϕ und z durch Variablenseparation her.

2. Lösen Sie die Gleichungen für die Azimuthal- und z-Komponente.

3. Welche Lösung besitzt die Gleichung für die radiale Komponente? Nennen Sie nur die Lösung und geben Sie die Funktion(en) an. Ein Beweis ist nicht nötig.

Aufgabe 3 [6 Punkte]

Berechnen Sie die Kapazität von zwei langen Drähten mit Durchmesser a und Abstand d. Nehmen Sie an das $d >> a$. Sie sollten als Kapazität pro Längeneinheit näherungsweise

$$C/L = (4\ln(d/a))^{-1} \tag{4}$$

erhalten.
Hinweis:
Benutzen Sie das Potential für zwei Drähte, das Sie auf dem 1. Übungsblatt in Aufgabe 2.2 berechnet haben.

TP 3 – Übung 4

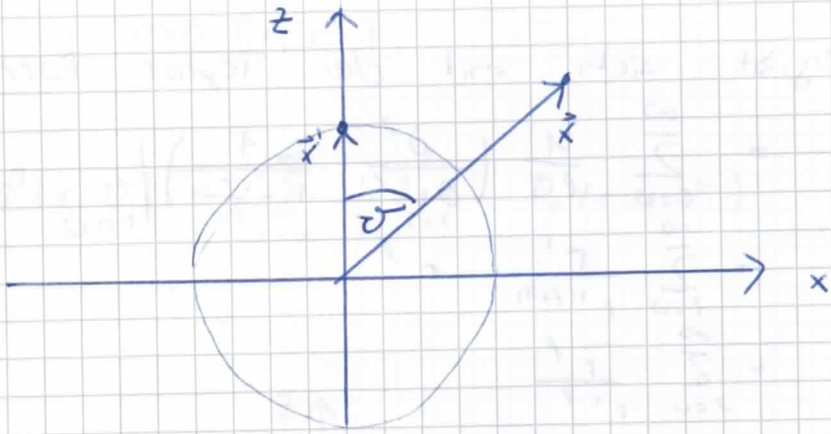
Aufgabe 1

Es gilt:

$$\phi(r,\vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} (A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}) P_l(\cos\vartheta)$$

Potential einer Punktladung an der Stelle $\vec{x}'$

$$\phi = \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} (A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}) P_l(\cos\vartheta)$$



1. Sei $\vartheta = 0$

$\Rightarrow P_l(\cos\vartheta) = P_l(\cos 0) = P_l(1) \underset{\text{Definition}}{=} 1$

$\phi = \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$ gilt überall, außer bei $|\vec{x}| = |\vec{x}'|$

$\Rightarrow$ betrachte $|\vec{x}| = r < r' = |\vec{x}'|$

und $|\vec{x}| = r > r' = |\vec{x}'|$

2. Wir betrachten $\phi = \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$

$$\phi = \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\vartheta}} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'}}$$

$$\underset{\text{Binom}}{=} \frac{1}{\sqrt{(r-r')^2}} = \begin{cases} \frac{1}{r'-r} & r < r' \\ \frac{1}{r-r'} & r > r' \end{cases}$$

1. Fall: $r < r'$

$$\frac{1}{r'-r} = \frac{1}{r'} \frac{1}{1-\frac{r}{r'}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+\frac{r}{r'}} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r^l}{r'^l} (-1)^l = \phi$$

vgl. mit

$$\phi = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + B_l r^{-(l+1)} \right) P_l(-x)$$

$$= \sum \left(A_l r^l + B_l r^{-(l+1)} \right) (-1)^l P_l(x)$$

$\uparrow$

kürzt sich mit $(-1)^l$ aus der Ableitung weg

~~$\rightarrow$ selbes Potential für gleiche Ladung~~

$$\cancel{\phi_2 = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} P_l(\cos\vartheta)}$$

~~Bei einer entgegengesetzten Ladung folgt:~~

$$\cancel{\phi_3 = - \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} P_l(\cos\vartheta)}$$

~~Für~~ OK

Siehe Übung!

2)

1. $$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=0$$

$$f(r,\theta,z)=R(r)\cdot Q(\theta)\cdot Z(z)$$

$$R''QZ+\frac{1}{r}R'QZ+\frac{1}{r^2}RQ''Z+RQZ''=0 \qquad \Big|\cdot\frac{1}{QRZ}$$

$$\underbrace{\frac{R''}{R}+\frac{R'}{rR}+\frac{Q''}{r^2Q}}_{\text{Abhängig von } r,\theta \ \Downarrow\ \text{const.}}+\underbrace{\frac{Z''}{Z}}_{\text{Abhängig von } z \ \Downarrow\ \text{const.}}=0$$

$$\frac{R''}{R}+\frac{R'}{rR}+\frac{Q''}{r^2Q}=-\frac{Z''}{Z}=-k^2$$

$$\Rightarrow Z''-k^2Z=0$$

$$\frac{R''}{R}+\frac{R'}{rR}+\frac{Q}{r^2Q}=-k^2 \qquad \Big|-\frac{Q}{r^2Q}+k^2 \quad \Big|\cdot r^2$$

$$\frac{r^2R''}{R}+\frac{rR'}{R}+r^2k^2=-\frac{Q''}{Q}=m^2$$

$$\Rightarrow Q''+m^2Q=0$$

$$\frac{r^2R''}{R}+\frac{rR'}{R}+r^2k^2=m^2 \qquad \Big|-m^2 \quad \Big|\cdot R$$

$$r^2R''+rR'+(r^2k^2-m^2)R=0$$

2. $$Z''-k^2Z=0$$

$$Z(z)=a e^{kz}+b e^{-kz} \qquad a,b\in\mathbb{C}$$

$$\left(\cancel{\lim_{z\to\infty} Z(z)=0 \Rightarrow a=0 \Rightarrow Z(z)=be^{-kz}}\right) \qquad ,\ K\in\mathbb{C}$$

$$Q''+m^2Q=0$$

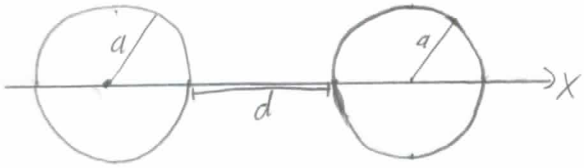
$$Q(\theta)=c\sin(m\theta)+d\cos(m\theta)$$

$$c,d\in\mathbb{C} \quad ,\quad m\in\mathbb{Z}$$

Aufg. 3

Potential einer Zylinder (kabel/Drähte)

$$\phi = -2Q \ln(r)$$



$d \gg a$

Betrachtet man beide Drähte, so kann man durch $d \gg a$ nur die Verbindungslinie zwischen beiden betrachten.

Sei $a \leq x \leq d-a$ (Beide Oberflächen der Zylinder/Drähte)

$$\Rightarrow \phi_1(x) = \phi(x) - \phi(d-x) = -2Q\left[\ln(x) - \ln(d-x)\right]$$

Eigentlich müssen die Potentiale auf der Oberfläche nach Neumann konst sein, ist aber auch wegen $d \gg a$ vernachlässigbar.

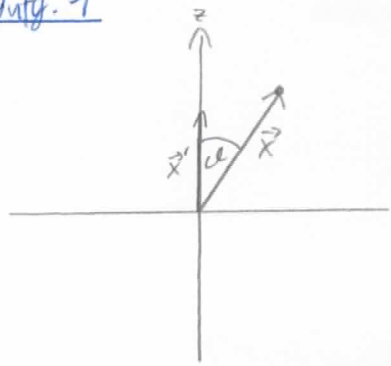
Potentialdifferenz $\Delta\phi = \phi(a) - \phi(d-a) = -2Q\left[\ln(a) - \ln(d-a) - \ln(d-a) + \ln(a)\right]$

$$= 2Q \ln\left(\frac{(d-a)^2}{a^2}\right)$$

$$\underset{\substack{d \gg a \\ \Rightarrow d-a \approx d}}{\approx} 2Q \ln\left(\frac{d^2}{a^2}\right) = 4Q \ln\left(\frac{d^2}{a^2}\right)$$

$$\underset{\substack{\text{da } d \gg a \text{ reicht es die} \\ \text{jeweiligen Ränder zu betrachten}}}{C \approx} \frac{Q}{\Delta\phi} = \frac{Q}{4Q \cdot \ln\left(\frac{d^2}{a^2}\right)} = \left(4 \cdot \ln\left(\frac{d}{a}\right)\right)^{-1}$$

Aufg. 1



1. $\vartheta = 0$

$P_\ell(\cos(\vartheta)) = P_\ell(1) = 1$

$$\phi = \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = \frac{1}{|r-r'|}$$ mit $\vec{x} = r < r' = |\vec{x}'|$
$\vec{x} = r > r' = |\vec{x}'|$

2. $$\phi = \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = \frac{1}{\sqrt{(r-r')^2}} = \begin{cases} \frac{1}{r'-r} & r < r' \quad \text{Fall 1.} \\ \frac{1}{r-r'} & r > r' \quad \text{Fall 2.} \end{cases}$$

1. Fall:

$$\frac{1}{r'-r} = \frac{1}{r'}\,\frac{1}{1-\frac{r}{r'}}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\,\frac{1}{1-\frac{r}{r'}} \underset{\substack{\frac{r'}{r'^2}\text{ nicht} \\ \text{vergessen}}}{=} \frac{r'}{(r'-r)^2}$$

$$\frac{\partial^\ell}{\partial r^\ell}\,\frac{1}{1-\frac{r}{r'}} = \ell!\,\frac{r'^\ell}{(r'-r)^{\ell+1}}$$

$$\frac{1}{1-\frac{r}{r'}} = \sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{1}{\ell!}\,\ell!\,\frac{r'}{(r'-r)^{\ell+1}}\bigg|_{r=0}\cdot r^\ell = \sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{r^\ell}{r'^\ell}$$

$$\Rightarrow \phi(r,0) = \begin{cases} \frac{1}{r'}\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{r^\ell}{r'^\ell} & r < r' \\ \frac{1}{r}\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{r'^\ell}{r^\ell} & r > r' \end{cases}$$

3. $\phi(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}\right)$ $+ \dots$ uninteressant für Koeffizienten Vergleich

<u>1. Fall:</u> $r < r'$ $\quad A_l = \frac{1}{r'^{(l+1)}}$ $\quad B_l = 0$

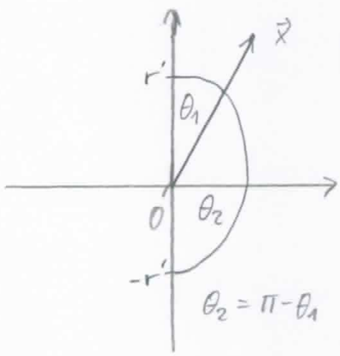
<u>2. Fall:</u> $\quad A_l = 0$ $\quad B_l = r'^{l}$

$$\phi(r,\theta) = \begin{cases} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r^l}{r'^{(l+1)}} P_l(\cos(\theta)) & r < r' \\ \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r'^l}{r^{(l+1)}} P_l(\cos(\theta)) & r > r' \end{cases}$$

$r_> = \max(r, r')$

$r_< = \max(r, r')$

4.



Identitäten: • $\cos(\theta_2) = \cos(\pi - \theta_1) = -\cos(\theta_1)$

• $P_l(-x) = (-1)^l P_l(x)$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ r<r'}}{\phi =} \sum_{l=0}^{\infty} \left[\frac{r^l}{r'^{l+1}} P_l(\cos(\theta_1)) \pm \frac{r^l}{r'^{l+1}} \underbrace{(-1)^l P_l(\cos(\theta_1))}_{P_l(-\cos(\theta_1))} \right]$$

"+" Fall gleiche Ladungen (gerade Terme betrachten / ungerade Terme kürzen sich raus)

$$\phi = 2 \cdot \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2 r^{2l}}{r'^{2l+1}} P_{2l}(\cos(\theta_1))$$

"−" Fall entgegengesetze Ladungen (ungerade Terme)

$$\phi = 2 \cdot \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2 r^{2l}}{r'^{2l+1}} P_{2l}(\cos(\theta_1))$$

Aufg. 2

großes Phi

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial \Phi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial \phi}{\partial z^2}$$

kleines Phi

Herleitung: $\Delta\phi(r = (x^2+y^2)^{1/2}, \varphi(x,y), z)$

$\phi(r, \phi, z) = R(r)\, Q(\phi)\, Z(z)$

$$\Rightarrow QZ\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{QZ}{r}\frac{\partial R}{\partial r} + \frac{RZ}{r^2}\frac{d^2Q}{\partial\phi^2} + RQ\frac{d^2Z}{dz^2}$$

groß

klein

$$\frac{1}{R}\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{rR}\frac{\partial R}{\partial r} + \frac{1}{Qr^2}\frac{\partial^2 Q}{\partial\phi} = -\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}$$

beide Seiten sind const

$\Rightarrow$ rechte Seite $= -k^2$ $(k \in \mathbb{C})$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2Z}{dz^2} - k^2 Z = 0}$$

$$\boxed{Z(z) = a_1 e^{-kz} + a_2 e^{kz}}$$

$$\boxed{\frac{d^2Q}{d\phi^2} + m^2 Q = 0}$$

$$\boxed{Q(\phi) = k_1 \sin(m\phi) + k_2 \cdot \cos(m\phi)}$$

$m \in \mathbb{Z}$

DGLs

Lösungen der DGLs

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Subs.: } x = kr \\ x^2R'' + xR' + (x^2 - m^2)R = 0\end{array}}$$

Beachten, dass in der Ableitung auch substituiert werden muss

$$\boxed{R(x) = C_1 \cdot J_m(x) + C_2 J_{-m}(x)}$$

Besselfunktion

$m \geq 0$

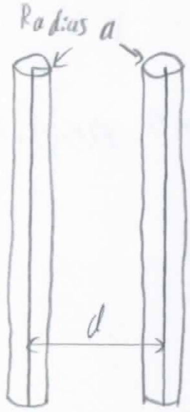
$m \neq k\frac{1}{2}$

$k = 0, 1, 2, \ldots$

$\boxed{\text{Anschauen: Besselfunktion}}$

Ist Lösung von Schwingungen

Aufg. 3



$d >> a$

$$\phi = -\frac{Q}{2\pi \varepsilon_0 \cdot L} \ln(r)$$

sehr schwammig

$$\phi = -\frac{Q}{2\pi L \varepsilon_0} \underbrace{\ln\left(\frac{(r-d)}{r}\right)}_{\ln\left(\frac{(x-d)^2+y^2}{x^2+y^2}\right)}$$

$$\Delta\phi = \left|\phi(a) - \phi(d-a)\right| = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L} \ln\left(\frac{d^2}{a^2}\right)$$

$$C = \frac{Q}{\Delta\phi} = 2\pi\varepsilon_0 L \cdot \left[\ln\left(\frac{d^2}{a^2}\right)\right]^{-1}$$

Rumgewurschtel mit Gauss und SI (cgs)

$$\Rightarrow \frac{C}{L} = \left(4 \cdot \ln\left(\frac{d}{a}\right)\right)^{-1}$$

Hier nur in Gauss:

$$\phi(a,0) = 2q \cdot \ln\left(\frac{d}{a}\right)$$

$$\phi((d-a),0) = 2q \cdot \ln\left(\frac{d}{d}\right)$$