Lassen wir den Lösungsweg zur Konstruktion der spez. Lösung der inhomogenen DGL in der Elektrostatik noch einmal wie folgt zusammen:

① Poisson-Gleichung

$$\Delta \phi(\vec{r}) = -4\pi \rho(\vec{r})$$

Green-Funktion

$$\Delta G(\vec{r}-\vec{r}\,') = -\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')$$

Potential

$$\phi(\vec{r}) = 4\pi \int d^3r' \, G(\vec{r}-\vec{r}\,)\rho(\vec{r}\,') \overset{②}{=} \int d^3r' \, \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

② Bestimmung der Green-Funktion durch Fourier-Transformation

$$\Delta G(\vec{r}) = -\delta(\vec{r}) \xrightarrow{FT} G(\vec{k}) = \frac{1}{k^2} \xrightarrow{FT} G(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi r}$$

Greensche Funktionen der inhomogenen Wellengleichung

In analoger Weise können wir nun die inhomogene Wellengleichung behandeln

$$\Delta \phi(\vec{r},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi(\vec{r},t) = -4\pi\rho(\vec{r},t)$$

$$\Box\, \phi(\vec{r},t) = -4\pi\rho(\vec{r},t)$$

Die Greensche Funktion $G(\vec{r},t,\vec{r}',t')$ erfülle

$$\Box\, G(\vec{r},t,\vec{r}',t') = -\delta(\vec{r}-\vec{r}')\,\delta(t-t')$$

und wiederum gilt wegen Translationssymmetrie

$$G(\vec{r},t,\vec{r}',t') = G(\vec{r}-\vec{r}',\, t-t')$$

und folglich

$$\boxed{\Box\, G(\vec{r},t) = -\delta(\vec{r})\,\delta(t)}$$

Ganz analog wie zu unseren Betrachtungen der Wellengleichung können wir die explizite Zeitabhängigkeit in dieser Gleichung durch Fourier-Transformation eliminieren und erhalten mit

$$\boxed{(\Delta + k^2)\, G_\omega(\vec{r}) = -\frac{1}{2\pi}\,\delta(\vec{r})}$$

die sogenannte Helmholtz-Gleichung, welche eine große Ähnlichkeit zur Poisson-Gleichung der Elektrostatik besitzt.

Die explizite Form der Greenschen Funktion $G_\omega(\vec{r})$ läßt sich nun wieder durch Fourier-Transformation bestimmen (wobei wir auf eine explizite Herleitung hier verzichten → Übung). Es ergibt sich – was sich auch durch Einsetzen in die Helmholtz-Gleichung verifizieren läßt – die folgende Form

$$\boxed{G^{\pm}_{\omega}(\vec{r}) = \frac{1}{8\pi^2} \frac{e^{\pm ik|\vec{r}|}}{|\vec{r}|}}$$

$\Delta G(\vec{r}) = -\delta(\vec{r})$

$\downarrow$

$G(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{r}$

bzw.

$$\boxed{G^{\pm}_{\omega}(\vec{r}-\vec{r}\,') = \frac{1}{8\pi^2} \frac{e^{\pm ik|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}$$

wobei die Festlegung des Vorzeichens im Exponenten hierbei keine reine Konventionssache ist sondern sich aus dem physikalischen Kontext ergibt. Dazu in Kürze mehr.

Damit können wir als ersten Zwischenschritt die Lösungen $\phi_\omega(\vec{r})$ der inhomogenen Gleichung

$$(\Delta + k^2)\,\phi_\omega(\vec{r}) = -4\pi\,\rho_\omega(\vec{r})$$

bestimmen als

$$\phi_\omega(\vec{r}) = 4\pi \int d^3r'\, G^{\pm}_{\omega}(\vec{r}-\vec{r}\,')\,\rho(\vec{r}\,')$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int d^3r'\, \frac{e^{\pm ik|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\rho(\vec{r}\,')$$

Schließlich können wir die explizite Form der Greenschen Funktion im Zeitraum bestimmen – wiederum anhand einer Fourier-Transformation:

$$G^{\pm}(\vec{r},t) = \int d\omega \; e^{-i\omega t} \; G_\omega(\vec{r})$$

$$= \int d\omega \; e^{-i\omega t} \frac{1}{8\pi^2} \frac{e^{\pm ik|\vec{r}|}}{|\vec{r}|}$$

$$\overset{(k=\frac{\omega}{c})}{=} \frac{1}{4\pi|\vec{r}|} \int d\omega \frac{1}{2\pi} e^{-i\omega(t \mp |\vec{r}|/c)}$$

$$= \frac{1}{4\pi|\vec{r}|} \delta(t \mp |\vec{r}|/c)$$

und somit

$$\boxed{G^{\pm}(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi|\vec{r}|} \delta(t \mp |\vec{r}|/c)}$$

bzw.

$$\boxed{G^{\pm}(\vec{r}-\vec{r}\,', t-t') = \frac{1}{4\pi} \frac{\delta\left(t - t' \mp \frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}$$

Wir nennen hierbei <u>G^+ die retardierte Greensche Funktion</u> und <u>G^- die avancierte Greenschen Funktion</u>.

Retardierte Greensche Funktion – physikalische Bedeutung

Um die physikalische Bedeutung dieser beiden Greenschen Funktionen einordnen zu können, betrachten wir die sich ergebenden Potentiale, etwa

$$\phi^{\pm}(\vec{r}, t) = 4\pi \int d^3r' \int dt' \, G^{\pm}(\vec{r}-\vec{r}', t-t') \, \rho(\vec{r}', t')$$

$$= \int d^3r' \, \frac{\rho\left(\vec{r}', t \mp \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

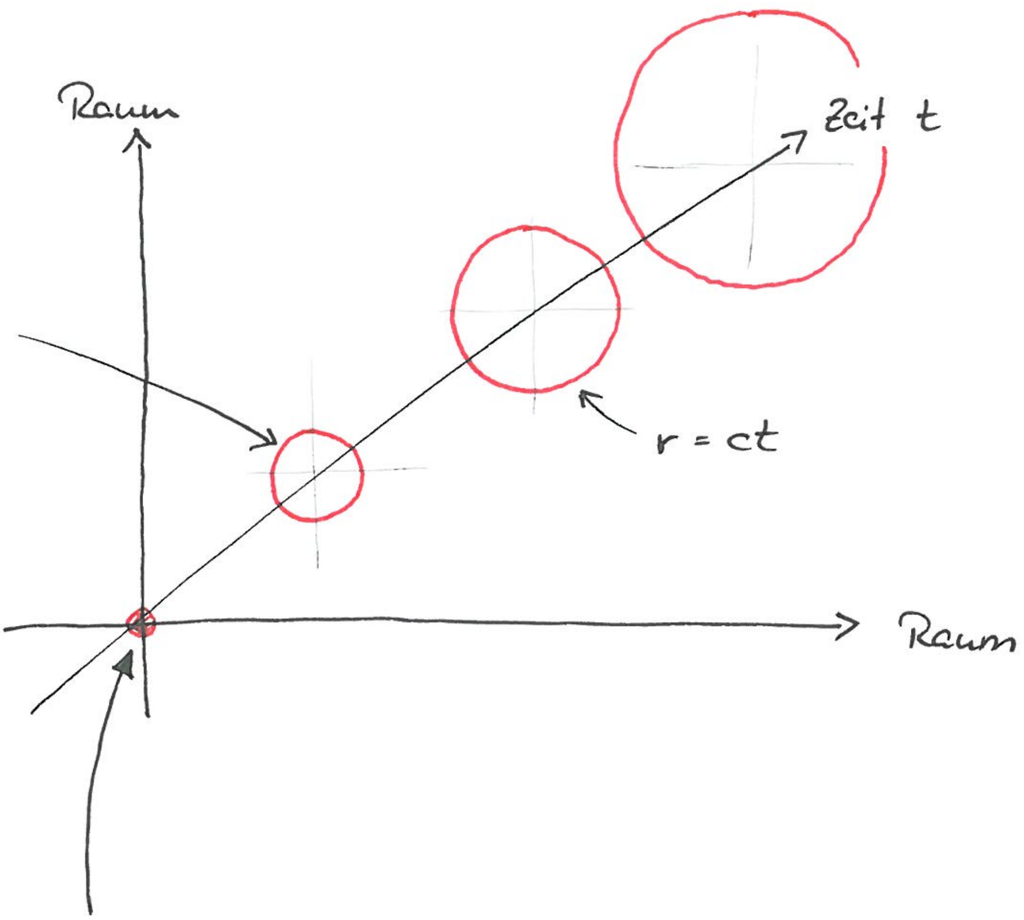
Für den retardierten Fall $(\phi^{+}(\vec{r}, t))$ erkennen wir also, daß die Lösung gegeben ist durch die Ladungsverteilung an allen Orten im Raum $\vec{r}'$ zu einem fixierten früheren Zeitpunkt

$$\boxed{t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c} = t_{red}}$$

Anders ausgedrückt heißt dies, daß eine Zeit $\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}$ verstreichen muß bis die Ladungsverteilung $\rho(\vec{r}', t_{red})$ einen Effekt auf das Potential am Ort/Zeitpunkt $(\vec{r}, t)$ bewirkt.

Dies nennt man Retardierung. Die Stärke des Signals hängt wie in der Elektrostatik nur von den räumlichen Abständen ab und fällt mit $1/|\vec{r}-\vec{r}'|$ ab.

Beispiel Retardierung



② Das Signal zu einem späteren Zeitpunkt ist eine Kugelwelle

$F(t - \frac{|r|}{c}) / |\vec{r}|$.

① Eine Quelle am Ursprung breite zum Zeitpunkt $t=0$ ein kurzes Signal aus, beschrieben durch die Funktion $F(t=0)$.

Avancierte Greensche Funktion

Die zweite Lösung der Greenschen Funktion verbindet das Potential zu einem gegebenen Zeitpunkt t mit der Ladungsverteilung zum späteren Zeitpunkt

$$t + \frac{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}{c} = t_{av} .$$

Diese Wirkung aus der Zukunft verletzt das Ursache-Wirkungs-Prinzip und ist damit keine physikalisch sinnvolle Lösung.
Wir verwerfen damit diese rein mathematisch sinnvolle Lösung der inhomogenen Gleichung bis wir dieses Konzept in der Quantenmechanik noch einmal neu aufgreifen.

Retardierte Potentiale

Fassen wir das bisher erreichte also noch einmal zusammen:

Die speziellen Lösungen der partikulären DGLs

$$\Box\, \phi(\vec{r},t) = -4\pi \rho(\vec{r},t)$$

$$\Box\, \vec{A}(\vec{r},t) = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r},t)$$

in Lorenz-Eichung

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}(\vec{r},t) + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\phi(\vec{r},t) = 0$$

sind die sogenannten retardierten Potentiale

$$\boxed{\begin{aligned} \phi_{ret}(\vec{r},t) &= \int d^3r' \, \frac{\rho\left(\vec{r}\,', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \\[2ex] \vec{A}_{ret}(\vec{r},t) &= \frac{1}{c}\int d^3r' \, \frac{\vec{j}\left(\vec{r}\,', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \end{aligned}}$$

für das skalare Potential und das Vektorpotential.

Denn $\phi_{ret}(\vec{r},t) = 4\pi \int d^3r' \int dt' \, G_{ret}(\vec{r}-\vec{r}\,', t-t')\, \rho(\vec{r}\,', t')$.