Übungsblatt 11

Ausgabe 10.1.2017
Abgabe 16.1.2017, 12:00 Uhr
Besprechung 19.1.2017

Aufgabe	1	2	3	4	Summe
Punkte					

Allgemeine Informationen

- Abgabe nur in Gruppen von min. 2 bis max. 3 Personen (Ausnahme 0. und 1. Übungsblatt). **Einzelabgaben werden nicht akzeptiert.**
- Alle Namen sind auf der ersten Seite anzugeben. Gruppenmitglieder müssen zur gleichen Gruppe gehören.
- **Bitte unbedingt die Nummer der Übungsgruppe / den Übungsgruppenleiter auf dem Blatt mit angeben.**
- Das Angabenblatt muss mit abgegeben werden.
- Abgebene Aufgaben müssen vorgerechnet werden können. Für Modul III a (9 LP) und b (6 LP) muss eine Übung aus den Übungen 1 – 9 an der Tafel vorgerechnet werden, für Modul III a zusätzlich eine Übung aus den Übungen 10 – 13, um zur Klausur zugelassen zu werden.
- Für Modul III a (9 LP) und b (6 LP) müssen 50% der Punkte aus den Übungen 1 – 9, für Modul III a zusätzlich 50% aus den Übungen 10 – 13 erreicht werden, um zur Klausur zugelassen zu werden.
- Weitere Information finden Sie auch auf https://hera.ph1.uni-koeln.de/~walch/Elektrodynamik16/Inhalt.html

Aufgabe 1 [4 Punkte]

Betrachten Sie ein Teilchen mit der Ruhemasse m, das sich mit der Geschwindigkeit $\vec{u}$ bewegt. Der relativistische Viererimpuls ist dann gegeben durch

$$P = (E/c, \gamma m \vec{u})\,, \tag{1}$$

wobei $E = \gamma mc^2$ ist.

1. Berechnen Sie P^2 und zeigen Sie damit, dass die Länge der Viererimpulses invariant ist.

2. Berechnen Sie, welche Beschleunigungsspannung nötig ist, um ein Elektron auf 20% der Lichtgeschwindigkeit zu beschleunigen. Vergleichen Sie diese mit der Spannung aus der nicht-relativistischen Rechnung.

Aufgabe 2 [9 Punkte]

Ein Teilchen der Masse M, das den Viererimpuls P_0 besitzt, zerfalle in zwei Teilchen mit den Massen m_1 und m_2.

1. Benutzen Sie die Erhaltung von Energie und Impuls sowie die unter Aufgabe 1.1 gezeigte Invarianz der Skalarprodukte von Vierervektoren, um zu zeigen, dass die Gesamtenergie des ersten Teilchens im Ruhesystem des zerfallenden Teilchen durch
$$E_1 = \frac{M^2 + m_1^2 - m_2^2}{2M} \cdot c^2 \tag{2}$$
gegeben ist

2. Das geladene Pi-Meson (Ruheenergie $Mc^2 = 139.6$ MeV) zerfällt in ein Mü-Meson ($m_1c^2 = 105{,}7$ MeV) und ein Neutrino ($m_2 = 0$). Berechnen Sie die kinetische Energie des Mü-Mesons und Neutrinos im Ruhesystem des Pi-Mesons.

Aufgabe 3 [7 Punkte]

Betrachten Sie einen Stab, der die Länge l' in seinem Ruhesystem S' hat und entlang der x-Achse ausgerichtet ist und sich auch in dieselbe Richtung mit der Geschwindigkeit v im Laborsystem S bewegt.

1. Berechnen Sie die beobachtete Länge des Stabes im Laborsystem S. Was bedeutet dies?
   Hinweis: Beachten Sie, dass die Längenmessung, d.h. die Positionsbestimmung der Spitze und des Endes des Stabes in S zu *einem* Zeitpunkt geschehen muss.

2. Berechnen Sie die Geschwindigkeit v, wenn der Stab in S um 1% verkürzt erscheint.

Aufgabe 4 [10 Punkte]

Ein Raumschiff verlässt im Jahr 2017 die Erde mit einem von zwei Zwillingen an Bord. Das Raumschiff ist so konstruiert, dass es von der Erde aus gesehen über einen Zeitraum von 1 Jahr mit einer Beschleunigung von $a = 5\ \mathrm{m/s^2}$ gradlinig von der Erde wegbeschleunigt. Nach diesen 1 Jahr verlangsamt sich das Raumschiff für ein weiteres Jahr mit a. Anschließend kehrt das Raumschiff um und fliegt zur Erde zurück. Auch hier beschleunigt es zunächst für 1 Jahr (von der Erde aus gesehen) mit a, dann bremst dann für 1 Jahr ab und erreicht somit wieder der Erde. Der Zwilling auf der Erde ist in dieser Zeit also um 4 Jahre gealtert.

1. Um wie viel ist der andere Zwilling, der im Raumschiff war, in dieser Zeit gealtert?

2. Wie weit hat sich das Raumschiff maximal von der Erde entfernt?

3. Wie weit ist die Erde entfernt aus Sicht des Zwillings an Bord des Raumschiffes, in dem Moment, an dem er die Maximalgeschwindigkeit erreicht, d.h. nach einem Jahr?
   Hinweis: Sie können dazu das Ergebnis aus Aufgabe 3.1 verwenden.

4. Wiederholen Sie die Rechnung aus 4.1, nun aber mit der Zusatz, das nach den beiden Beschleunigungsphasen (also nach 1 und 3 Jahren) das Raumschiff für 1 Jahr mit der dann erreichten Geschwindigkeit weiterfliegt. Um wieviel ist dann der Zwilling an Bord gealtert? Berechnen Sie zudem das Verhältnis der Zeiten, die auf der Erde und dem Raumschiff vergangen sind für diesen Fall sowie den unter 4.1 verwendeten Fall.

Anmerkung: Üblicherweise wird bei diesem Beispiel angenommen, dass die Beschleunigung im Ruhesystem des Raumschiffes konstant ist, was die Rechnung jedoch um einiges komplizierter macht.

TP 3 - Übung 11 19.1.17

Aufg. 1

(1) $p = \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ m\gamma\vec{u} \end{pmatrix}$ $g = \begin{pmatrix} +1 & & & \\ & -1 & & 0 \\ & 0 & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$

$\rightarrow p^2 = E^2/c^2 - m^2\gamma^2\vec{u}\cdot\vec{u}$ $E = \gamma mc^2$

$= \gamma^2 m^2(c^2 - \vec{u}^2)$ $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$

$= \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-1} m^2 \cdot \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) c^2$

$= m^2c^2 = \text{konst}$

$|p| = \sqrt{p^2} = \text{konst}$

$p^\mu = m\frac{dx^\mu}{d\tau}$

$p^\mu p_\mu = m^2c^2$

(2) $E_{kin} = e \cdot U = E - E_0$

$E^2 = c^2p^2 + E_0^2$

$p = \frac{Ev}{c^2}$

$E^2 = \frac{E^2v^2}{c^2} + E_0^2 \rightarrow E = E_0 \underbrace{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}}_{\gamma}$

$E_{kin} = \gamma mc^2 - m$

$\Rightarrow U = \frac{E_0(\gamma - 1)}{e}$ $v = 0{,}2c$ $E_0 = 511\ \text{keV}$

$U = 10{,}54\ \text{keV}$

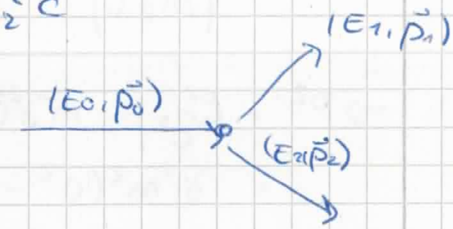
$U = 10{,}54\ \text{keV}$

Aufg. 2

(1)

$$p_0 = \begin{pmatrix} E/c \\ \vec{p}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E/c \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M \cdot c \\ 0 \end{pmatrix} \qquad p_0^2 = M^2 c^2$$

$$p_1 = \begin{pmatrix} E_1/c \\ p_1 \end{pmatrix} \qquad p_2 = \begin{pmatrix} E_2/c \\ p_2 \end{pmatrix} \qquad p_1^2 = m_1^2 c^2 \qquad p_2^2 = m_2^2 c^2$$



$$p_0 = p_1 + p_2$$

$$p_2 = p_0 - p_1$$

$$p_2^2 = (p_0 - p_1)^2 = m_1^2 c^2 - M^2 c^2 - 2Mc \cdot \frac{E_1}{c} + m_1 c^2$$

$$\Leftrightarrow \quad E_1 = \frac{M^2 + m_1^2 - m_2^2}{2M} \cdot c^2$$

(2)

$$E_{kin\,1} = E_1 - m_1 c^2 = \frac{M^2 + m_1^2 - m_2^2}{2M} \cdot c^2 - m_1 c^2$$

$m_2 \approx 0$

$$= \frac{(Mc^2)^2 + (m_1 c^2)^2}{2Mc^2} - m_1 c^2$$

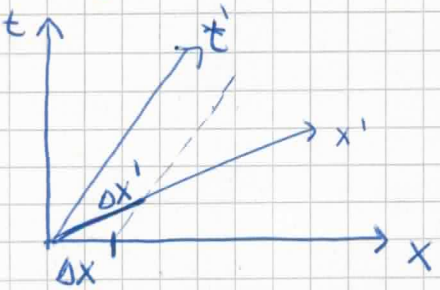
$m_\nu < 0{,}2 \frac{eV}{c^2}$

$E_{kin} = 4{,}12$ MeV

$$E_{kin\,2} = \frac{(M^2 + m_2^2 - m_1^2)\,c^2}{2M} = \frac{(Mc^2)^2 - (m_1 c^2)^2}{2Mc^2} = 29{,}78 \text{ MeV}$$

Aufg. 3

(1)



$$x' = (x - vt)\,\gamma(v)$$

$$t' = \left(t - x\frac{v}{c^2}\right)\gamma(v)$$

$$\Delta x' = (\Delta x - v\underbrace{\Delta t}_{=0})\,\gamma(v)$$

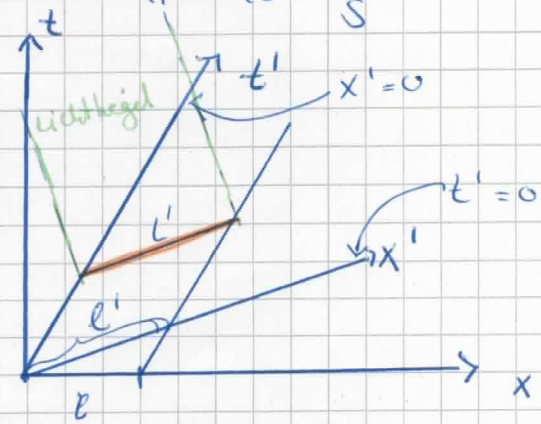
$$\Delta x' = \gamma\,\Delta x$$

$\Rightarrow \Delta x = \frac{\Delta x'}{\gamma}$ $\Rightarrow \Delta x \leq \Delta x'$ $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \geq 1$

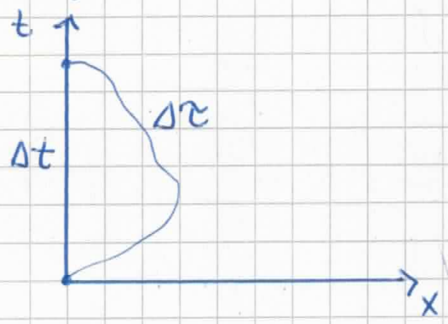
→ Stab erscheint kürzer

(2) $\frac{\Delta x' - \Delta x}{\Delta x} = 0{,}01$ → $v = 4{,}23 \cdot 10^7\ \frac{m}{s}$

$\Delta x = c\,\Delta t$



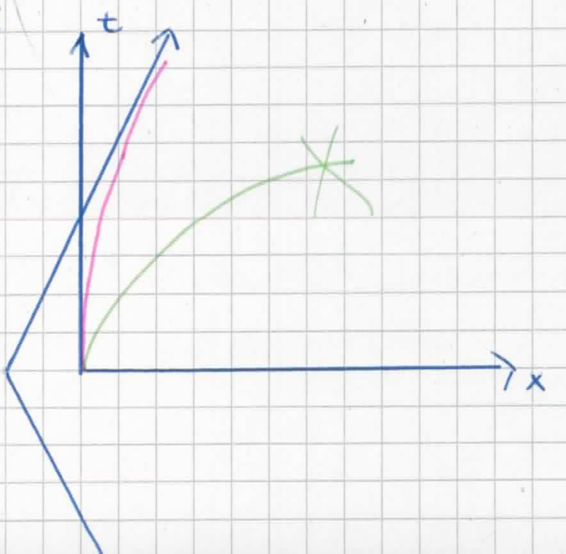
Aufg. 4



eigentlich: $a^\mu = \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2}$

$\underline{a} \cdot \underline{a} = a_\mu \cdot a^\mu = |a|$

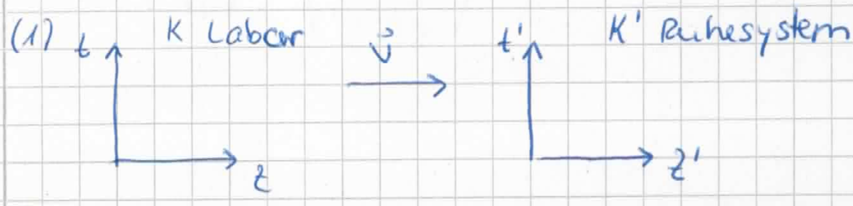
s. Abgabe



TP3 – Übung 12 27.1.17

Aufg. 1

(1)



$$F' = \begin{pmatrix} 0 & -E_x'/c & -E_y'/c & -E_z'/c \\ E_x'/c & 0 & \cancel{-B_z'} & \cancel{B_y'} \\ E_y'/c & \cancel{B_z'} & 0 & \cancel{-B_x'} \\ \cancel{E_z'/c} & \cancel{-B_y'} & \cancel{B_x'} & 0 \end{pmatrix}$$

$$F' \Rightarrow F = \Lambda^{(-v)} F' \Lambda^T(-v)$$

$$\Lambda(v) = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

Blatt 1. Aufg. 1

$$\vec{E}' = \frac{2Q}{R}\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{B}' = 0$$

$$F^T = -F$$

$$F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$$

$$F = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma E_x'/c & -\gamma E_y'/c & 0 \\ & 0 & 0 & \frac{v}{c^2}E_x' \\ & & 0 & \frac{v}{c^2}E_y'\,\gamma \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_x = \gamma \frac{2Q}{R}\cos\varphi$$

$$E_y = \gamma \frac{2Q}{R}\sin\varphi$$

$$B_x = +\beta\gamma\frac{2Q}{R}\sin\varphi$$

$$B_y = -\beta\gamma\frac{2Q}{R}\cos\varphi$$

(2) $j' = \begin{pmatrix} \rho' c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $j = \Lambda(-v)\, j' = \begin{pmatrix} \gamma \rho' c \\ 0 \\ 0 \\ \gamma\beta\rho' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho c \\ 0 \\ 0 \\ j_z \end{pmatrix}$

(3) $\vec{E} = \frac{\gamma 2 Q}{R} \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{B} = -2 \frac{\beta\gamma Q}{R} \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$ aus Blatt 6, Aufg. 1

j durch $\gamma\beta\rho'$

Aufg. 2

(1) $\vec{E} \to \vec{B}$ $F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = -2(E^2 - \underbrace{B^2}_{=0})$ ist Lorentzinvariant
$\vec{B} \to -\vec{E}$

$\tilde{F}_{\mu\nu} = \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\alpha\beta}$

$\vec{E} = 0 \Rightarrow F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = 2B^2 \geq 0$ in K: $\vec{E} = 0$, $\vec{B} \neq 0$

$\vec{B} = 0 \Rightarrow F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = -2E^2 \leq 0$ $\lightning$ K': $\vec{E}' \neq 0$, $\vec{B}' = 0$

oder:

$E'_{\parallel} = E_{\parallel} \to E_{\parallel} = 0$

$E_{\perp,1} = \gamma(E_{\perp,1} + \beta B_{\perp,2}) = \gamma E_{\perp,1} \Rightarrow E'_{\perp,1} = 0$

$E_{\perp,2} = \gamma(E_{\perp,2} - \beta B_{\perp,1}) = \gamma E_{\perp,2} \Rightarrow E'_{\perp,2} = 0$

$\Rightarrow \vec{E} = \vec{E}' = 0$

analog für B