Gruppe 4
Leiter: Nick
Daniel Oros 6071449
Anna Bohn 6024495
Benita Dünnebier 6026400

Übungsblatt 7

$\Sigma \approx 70\%$

Ausgabe 29.11.2016
Abgabe 5.12.2016, 12:00 Uhr
Besprechung 8.12.2016

Aufgabe	1	2	3	Summe
Punkte	3	16	/	19

Allgemeine Informationen

- Abgabe nur in Gruppen von min. 2 bis max. 3 Personen (Ausnahme 0. und 1. Übungsblatt). **Einzelabgaben werden nicht akzeptiert.**
- Alle Namen sind auf der ersten Seite anzugeben. Gruppenmitglieder müssen zur gleichen Gruppe gehören.
- **Bitte unbedingt die Nummer der Übungsgruppe / den Übungsgruppenleiter auf dem Blatt mit angeben.**
- Das Angabenblatt muss mit abgegeben werden.
- Abgebene Aufgaben müssen vorgerechnet werden können. Für Modul III a (9 LP) und b (6 LP) muss eine Übung aus den Übungen 1 – 9 an der Tafel vorgerechnet werden, für Modul III a zusätzlich eine Übung aus den Übungen 10 – 13, um zur Klausur zugelassen zu werden.
- Für Modul III a (9 LP) und b (6 LP) müssen 50% der Punkte aus den Übungen 1 – 9, für Modul III a zusätzlich 50% aus den Übungen 10 – 13 erreicht werden, um zur Klausur zugelassen zu werden.
- Weitere Information finden Sie auch auf https://hera.ph1.uni-koeln.de/~walch/Elektrodynamik16/Inhalt.html

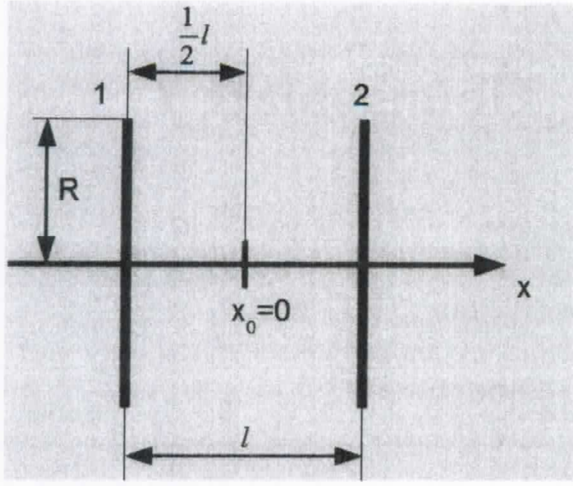

Abbildung 1: Seitenansicht zweier planparalleler Spulen 1 und 2 mit dem Radius R im Abstand l.

Aufgabe 1 [6 Punkte]

Betrachten Sie zwei gleichsinning vom Strom I durchflossene Kreisringe vom Radius R, die im Abstand l parallel zueinander angeordnet sind wie in Figur 1 skizziert. Wie müssen R und l aufeinander abgestimmt sein, dass um den Mittelpunkt x_0 herum das Magnetfeld möglichst homogen ist?

Hinweis:

Sie können dazu das Ergebnis aus Aufgabe 2.1 des Übungsblattes 6 verwenden

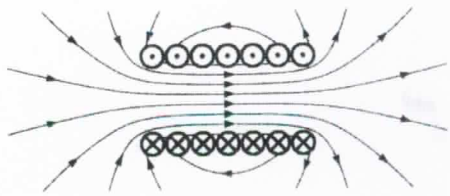

Abbildung 2: Seitenansicht einer langen Spule.

Aufgabe 2 [16 Punkte]

Betrachten Sie eine lange Spule der Länge L, die aus N Windungen mit dem Radius R besteht, die vom Strom I durchflossen werden (siehe Figur 2). Die Spule befinde sich im Vakuum, d.h. $\mu = 1$.

1. Berechnen Sie die Magnetfeldstärke H auf der Längsachse der Spule.
2. Was gilt im Grenzfall L >> R?
3. Nehmen Sie nun an, dass sich im Inneren der Spule ein Material mit einer Permeabililtätszahl $\mu_M > 1$ befindet. Was bedeutet dies für die Magnetfeldstärke H sowie für die magnetische Induktion B innerhalb und außerhalb der Spule (Fallunterscheidung!)? Machen Sie hierbei von den Randbedingungen für H und B Gebrauch.
4. Berechnen Sie das Magnetfeld weit entfernt von der Spule (allgemein, nicht nur auf der Spulenachse) unter Verwendung der Dipolnäherung.

Hinweis:
Sie können dazu wiederum das Ergebnis aus Aufgabe 2.1 des Übungsblattes 6 verwenden. Nehmen sie dazu an, dass eine Windung der Breite dz den Strom $I\frac{N}{L}dz$ führt.

Aufgabe 3 [8 Punkte]

Betrachten Sie einen starken Ferromagneten mit der Permeabililtätszahl $\mu_F >> 1$. Was gilt für das Magnetfeld bzw. für die magnetische Induktion (Tangential- und Normalkomponente!)

1. innerhalb des Ferromagneten, wenn ein äußeres Magnetfeld (Permeabililtätszahl $\mu_A << \mu_F$) gegeben ist?
2. außerhalb des Ferromagneten, wenn ein Magnetfeld im Ferromagneten gegeben ist?

Deuten Sie beide Fälle für den Grenzfall $\mu_F/\mu_A \to \infty$.

Aufg. 1

$|\vec{B}|_z$ nach Übung 6, Aufg. 2.1 ist:

$$|\vec{B}|_z = \underbrace{\frac{I}{c} 2\pi R^2}_{:=\gamma} \cdot \frac{1}{(R^2+z^2)^{3/2}}$$ ✓

$\ell/2$　　$-\ell/2$

Plaziere ein Magnetfeld bei $\cancel{z}$ und eins bei $-\cancel{z}$

$$\Rightarrow B_{ges} = |\vec{B}(-z)|_z + |\vec{B}(z)|_z = \gamma \cdot \frac{2}{(R^2+(z)^2)^{3/2}} = \underbrace{2\cdot\gamma}_{=:\alpha} \cdot |\vec{B}|_z \quad f$$

$z \pm \frac{\ell}{2}$

B kann interpretiert werden bzw. ist die Magnetische Flussdichte.

$\frac{\partial B_{ges}}{\partial z}$ ist also die Änderung der Flussdichte bei Variation um ein kleines Δz.　?

Da das Feld Homogen sein soll, soll sich die Flussdichte pro Länge nicht ändern

$$\frac{\partial B_{ges}}{\partial z} \overset{!}{=} \beta \qquad \text{mit } \beta \text{ als const}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 B_{ges}}{\partial z^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial B_{ges}}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left[\alpha \cdot \frac{(-\frac{3}{2})}{(R^2+z^2)^{5/2}} 2z\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow 0 = \alpha \cdot \left[\frac{-3}{(R^2+z^2)^{5/2}} - \frac{(3\cdot z)}{(R^2+z^2)^{7/2}} \left(-\frac{5}{2}\right)\cdot(2z)\right]$$

$$\Leftrightarrow 0 = \alpha \cdot \left[\frac{-3(R^2+z^2)+15z^2}{(R^2+z^2)^{7/2}}\right] = \alpha \cdot \left[\frac{12z^2-3R^2}{(R^2+z^2)^{7/2}}\right] \underset{z=\frac{\ell}{2}}{=} \alpha \cdot \left[\frac{3(\ell^2-R^2)}{(R^2+z^2)^{7/2}}\right]$$

Da der Nenner Null werden muss um die Gl. zu erfüllen $\Rightarrow \ell^2 - R^2 = 0$

$$\Leftrightarrow \ell = R$$ ✓

Somit müssen zwei Ringströme im Abstand R plaziert werden, damit das Magnetfeld möglichst homogen ist.

Aufg. 2

1. $|\vec{B}|_z = \underbrace{\frac{I}{c} 2\pi R^2}_{=: \alpha/I} \frac{1}{(R^2+z^2)^{3/2}}$

Beschreibt Abstand vom Ursprung mit distanz z.

Befindet man sich nun aber bei z und die Spule bei z', so ist das B-Feld gegeben durch $|\vec{B}|_z = \alpha \cdot \frac{1}{(R^2+(z-z')^2)^{3/2}}$

Der Strom ist gegeben durch $I \frac{N}{L} dz'$, da über die Positionen z' später integriert wird und nicht über z (was dem Ort des Beobachters entsprechen würde)

I aus $I\frac{N}{L}$ ist in α enthalten

$\Rightarrow \quad B_{Ges} \underset{\text{Spulmitte in der Mitte vom Koordinatensystem}}{=} \alpha \cdot \int_{-L/2}^{L/2} \frac{N}{L(R^2+(z-z')^2)^{3/2}} dz' = \frac{I \cdot N}{L} \cdot \alpha \int_{-L/2}^{L/2} \frac{1}{(R^2+(z-z')^2)^{3/2}} dz'$

$\Leftrightarrow \quad B_{Ges} \underset{\text{Wolfram-Alpha für Lösung des Integrals, da seltsame tan(...) Terme}}{=} \frac{I\cdot N}{L} \cdot \alpha \left[\frac{z'-z}{R^2(R^2+(z'-z)^2)^{1/2}} \right]_{-L/2}^{L/2}$

$\Leftrightarrow \quad B_{Ges} = \frac{N}{L} \cdot \frac{I}{c} 2\pi R^2 \left[\frac{L/2 - z}{R^2(R^2+(L/2-z)^2)^{1/2}} - \frac{-L/2-z}{R^2(R^2+(L/2+z)^2)^{1/2}} \right]$

Nun gilt $\vec{B} = \mu \cdot \vec{H} \underset{\mu=1}{=} \vec{H} \quad \Rightarrow \quad \vec{B}_{Ges} = \vec{H}$

2. Im Grenzfall ist somit $L >> R \Rightarrow \sqrt{R^2 + (\frac{L}{2} - z)^2} \approx |\frac{L}{2} - z|$

$$\Rightarrow \frac{L-z}{|L-z|} + \frac{L+z}{|L+z|} = 2$$

Vorzeichen von $L-z$ $L+z$ kürzen sich raus

$\Rightarrow \vec{B} = \vec{H} = \frac{N}{L} \cdot \frac{4\pi}{c} \cdot I$ Somit ist das Magnetfeld im inneren const.

3. Die Randbedingungen sind $\vec{B}_1 \cdot \vec{n} = \vec{B}_2 \vec{n}$ & $\vec{B}_2 \times \vec{n} = \frac{\mu_2}{\mu_1} \vec{B}_1 \times \vec{n}$

und $\vec{H}_2 \cdot \vec{n} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \vec{H}_1 \cdot \vec{n}$ & $\vec{H}_2 \times \vec{n} = \vec{H}_1 \times \vec{n}$

Somit hat ein $\mu_m > 1$ keinen Einfluss auf das H Feld nach $\vec{H}_2 \times \vec{n} = \vec{H}_1 \times \vec{n}$, verstärkt das $B_{\parallel}$-Feld aber um μ_m nach $\vec{B}_2 \times \vec{n} = \mu_m \vec{B}_1 \times \vec{n}$ beim Übergang ins Medium (Spule) von außerhalb. OK

4. Ist man weit weg von der Spule, so ist die Länge der Spule zu vernachlässigen und er wird ein Kreisstrom mit $N \cdot I$ betrachtet, somit ist $\vec{m} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \pi R^2 \end{pmatrix} \cdot \frac{I \cdot N}{2}$

Berechnung der einzelnen Komponenten nach $\vec{B} = \frac{1}{c} \left(\frac{3\vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{m}) - \vec{m}}{|\vec{x}|^3} \right)$

$$\vec{B}_x = \frac{-\vec{m}}{|\vec{x}|^3}$$

?

$$\vec{B}_y = \frac{-\vec{m}}{|\vec{x}|^3}$$

$$\vec{B}_z = \frac{3\vec{m} - \vec{m}}{|\vec{z}|^3} = \frac{2\vec{m}}{|z|^3}$$

$$\Rightarrow \vec{B}_{Ges} = \vec{m} \left(\frac{1}{|x|^3} + \frac{1}{|y|^3} - \frac{2}{|z|^3} \right)$$

Aufg. 1

Zwei Leiterschleifen mit ℓ Abstand auf der x-Achse und jeweils Radius R

$$B_x(x) = \frac{2\pi R^2 I}{c}\left[\frac{1}{\left(R^2+\left(x-\frac{\ell}{2}\right)^2\right)^{3/2}} + \frac{1}{\left(R^2+\left(x+\frac{\ell}{2}\right)^2\right)^{3/2}}\right]$$

Taylor um $x=0$

$$\Rightarrow \quad B_x(x) = \frac{2\pi R^2 I}{c}\left[\frac{2}{\left(\left(\frac{\ell^2}{4}\right)+R^2\right)^{3/2}} + \frac{3(\ell^2-R^2)x^2}{\left(\frac{\ell^2}{4}+R^2\right)^{7/2}} + \dots\right]$$

Da das Feld homogen sein soll $\Rightarrow B \overset{!}{=} const$ $\Rightarrow$ zweiter Term soll verschwinden da x Abhängigkeit

$\Rightarrow R = \ell$

Aufg. 2

4. Lösung: (ohne Rechnung)

$$\vec{B} = \frac{1}{c}\left(\frac{3\vec{n}\,(\vec{n}\cdot\vec{m}) - \vec{m}}{|\vec{x}|^3}\right)$$

$$= \frac{N\cdot I\cdot \pi\cdot R^2}{2\cdot c}\left(\frac{3\vec{n}\,n_z - \vec{e}_z}{|\vec{x}|^3}\right)$$

3. Randbedingungen Jackson S. 18 + statik Lesen!

- $(\vec{B}_{innen} - \vec{B}_{außen})\,\vec{n} = 0 \quad \Rightarrow \quad B_{\perp,i} - B_{\perp,a} = 0$

$$n \times (\vec{H}_{innen} - \vec{H}_{außen}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} H_\parallel & \text{stetig} \\ B_\perp & \text{stetig} \end{cases}$$

$\mu_M > 1$

$\vec{B}_{Neu} = \mu_M \cdot \vec{H}_{alt}$ ↗ Gilt nur im inneren mit $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$ also $\vec{H}$-Feld wird erzeugt durch Ströme ($\vec{j}$)

Innerhalb der Spule
- $\vec{H}$ bleibt unverändert
- $\vec{B}$ wird großer um μ_M

Außerhalb der Spule
- B_z ist stetig

$B_{z,innen} = B_{z,außen}$

$\Rightarrow$ $B_{z,außen}$ wird um Faktor μ_M größer

- $\vec{H} = \vec{B} \cdot \underbrace{\mu}_{=1}$ gilt für außerhalb $\Rightarrow$ H_z wird größer (H_z nicht stetig)

$\boxed{\text{Materialgleichungen gelten nur lokal! } \mu_M \text{ am zu messenden Ort von } \vec{H} \text{ oder } \vec{B}}$

Aufg. 3

1. $\mu_F \gg 1$

	B	H
Normalkomponente	$\vec{B}_A \cdot \vec{n} = \vec{B}_i \cdot \vec{n}$	$\vec{H}_A \cdot \vec{n} = \frac{\mu_I}{\mu_A} \vec{H}_i \cdot \vec{n}$
Tangentialkomponente	$\vec{B}_A \times \vec{n} = \frac{\mu_A}{\mu_I} \vec{B}_i \times \vec{n}$	$H_A \times \vec{n} = H_i \times \vec{n}$

Magnetfeld außen bekannt!

$\mu_A \ll \mu_I$ Normalkomponente von $H_A \gg H_I$

$B_A \hat{=} B_i$

Tangentialkomponente von $H_A \hat{=} H_i$

$B_A \ll B_i$

Aufg. 3 (weiterführung)

2. Normalkomponente:

$$H_{A,\perp} = \frac{\mu_F}{\mu_A} H_{F,\perp} \quad \rightarrow \infty$$

$$B_{\parallel,A} = \frac{\mu_A}{\mu_F} B_{\parallel,F} \quad \rightarrow 0$$