Übungsblatt 10

Ausgabe 20.12.2016
Abgabe 09.1.2017, 12:00 Uhr
Besprechung 12.1.2017

Aufgabe	1	2	3	Summe
Punkte				

Allgemeine Informationen

- Abgabe nur in Gruppen von min. 2 bis max. 3 Personen (Ausnahme 0. und 1. Übungsblatt). **Einzelabgaben werden nicht akzeptiert.**
- Alle Namen sind auf der ersten Seite anzugeben. Gruppenmitglieder müssen zur gleichen Gruppe gehören.
- **Bitte unbedingt die Nummer der Übungsgruppe / den Übungsgruppenleiter auf dem Blatt mit angeben.**
- Das Angabenblatt muss mit abgegeben werden.
- Abgebene Aufgaben müssen vorgerechnet werden können. Für Modul III a (9 LP) und b (6 LP) muss eine Übung aus den Übungen 1 – 9 an der Tafel vorgerechnet werden, für Modul III a zusätzlich eine Übung aus den Übungen 10 – 13, um zur Klausur zugelassen zu werden.
- Für Modul III a (9 LP) und b (6 LP) müssen 50% der Punkte aus den Übungen 1 – 9, für Modul III a zusätzlich 50% aus den Übungen 10 – 13 erreicht werden, um zur Klausur zugelassen zu werden.
- Weitere Information finden Sie auch auf https://hera.ph1.uni-koeln.de/~walch/Elektrodynamik16/Inhalt.html

Aufgabe 1 [9 Punkte]

Betrachten Sie eine Quelle, die Licht mit der Wellenzahl k_0 in Richtung eines Beobachters aussendet. Die Lichtquelle bewege sich mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$, die mit der Richtung des Beobachters (sprich dem Wellenvektor $\vec{k}$) den Winkel θ einschließt. Die in der Vorlesung erwähnte Aberrationsgleichung

$$\tan\theta' = \frac{\sin\theta}{\gamma(\cos\theta - \beta)} \tag{1}$$

beschreibt den Winkel θ', unter der der Beobachter das Licht bei sich auftreffen sieht, d.h. der Winkel den der Wellenvektor $\vec{k}'$ und $\vec{v}$ in seinem Bezugssystem einschließen.

1. Leiten Sie die oben angegebene Aberrationsgleichung her.
2. Diskutieren Sie die Fälle v << c und v → c.

Hinweis: Je nach Herangehensweise erhalten Sie die Aberrationsgleichung in unterschiedlichen Repräsentation, d.h. mit verschiedenen trigonometrischen Funktionen. Führen Sie diese in die oben angegebene Gleichung über.

Aufgabe 2 [9 Punkte]

Zeigen Sie, dass zwei aufeinanderfolgende Lorentz-Transformationen in die gleiche Richtung mit den Geschwindigkeiten v_1 und v_2 identisch sind zu einer einzelnen Transformation mit

$$v_3 = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}} \,. \tag{2}$$

Aufgabe 3 [12 Punkte]

Betrachten Sie zwei identische Teilchen a und b, die sich im Laborsystem L genau aufeinander zu bewegen mit den (anti-)parallelen Geschwindigkeiten v_a und v_b.

1. Berechnen Sie die Geschwindigkeit des Schwerpunktssystems im relativistischen Fall.
2. Vergleichen Sie die Lösung mit dem nicht-relativistischen Fall.
3. Betrachten Sie nun das System im Ruhesystem des Teilchens a. Zeigen Sie, dass der Betrag des Gesamt-Viererimpulses, d.h. von Teilchen a und b, in diesem System gleich dem Betrag der Viererimpulses im Laborsystem L ist.

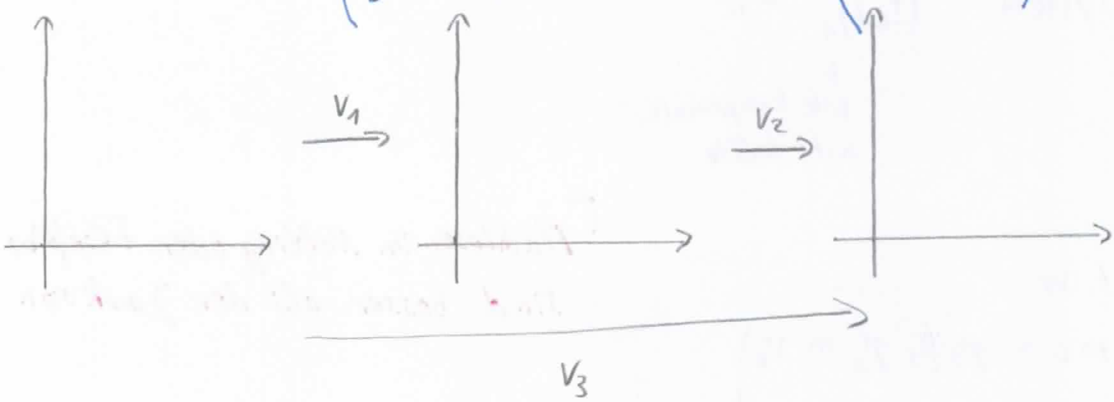
Aufg. 2

Lorentz-Transformation in Matrixschreibweise

$$\Lambda(v) = \gamma(v)\begin{pmatrix} 1 & -\frac{v}{c} \\ \frac{v}{c} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda(v_2)\,\Lambda(v_1) = \underbrace{\gamma(v_1)\,\gamma(v_2)\left(1-\frac{v_1 v_2}{c^2}\right)}_{=\gamma\left(\frac{v_1+v_2}{1+\frac{v_1 v_2}{c^2}}\right)} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{c}\left(\frac{v_1+v_2}{1+\frac{v_1 v_2}{c^2}}\right) \\ \frac{1}{c}\left(\frac{v_1+v_2}{1+\frac{v_1 v_2}{c^2}}\right) & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \gamma(v_3)\begin{pmatrix} 1 & -\frac{v_3}{c} \\ \frac{v_3}{c} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad v_3 = \left(\frac{v_1+v_2}{1+\frac{v_1 v_2}{c^2}}\right)$$



Lorentz-Transformation in Komponentenschreibweise:

$$(x^0)_1 = \gamma_1\,(x^0 - \beta_1 x^1)$$

$$(x^1)_1 = \gamma_1\,(x^1 - \beta_1 x^0)$$

$$(x^0)_{12} = \gamma_2\,\left((x^0)_1 - \beta_2\,(x^1)_1\right)$$

$$(x^1)_{12} = \gamma_2\left((x^1)_1 - \beta_2\,(x^0)_1\right)$$

$$(x^0)_{12} = \gamma_1\gamma_2\left([1+(\beta_1\beta_2)]x^0 - (\beta_1+\beta_2)\,x^1\right) \overset{!}{=} (x^0)_3 = \gamma_3\,(x^0 - \beta_3\,x^1)$$

$$(x^0)_{12} = \underbrace{\gamma_1\gamma_2\,(1+\beta_1\beta_2)}_{\gamma_3}\left(x_0 - \frac{(\beta_1+\beta_2)}{\underbrace{1+\beta_1\beta_2}_{\beta_3}}\,x^1\right) \qquad \text{mit } c\cdot\beta_3 = v_3 = \frac{\beta_1+\beta_2}{1+\beta_1\beta_2}$$

$$= \frac{v_1+v_2}{1+\frac{v_1 v_2}{c^2}}$$

Falls $v_1, v_2 \ll c \Rightarrow c \cdot \beta_3 = v_3 \approx v_1 + v_2$

Aufg. 3

1.

$$\underline{P}_a = \gamma_a \, m \begin{pmatrix} c \\ v_a \end{pmatrix}$$

$$\underline{P}_b = \gamma_b \, m \begin{pmatrix} c \\ v_b \end{pmatrix}$$

$$\underline{P}_{tot} = \underline{P}_a + \underline{P}_b$$

Im Schwerpunktssystem $\left(\underline{P}'_{tot}\right)_1 \overset{!}{=} 0$

$\downarrow$
erste Komponente, nicht Nullte

⌜Nachlesen im Nolting oder Fließbach, sind besser als der Jackson⌟

Lorentzboost mit v_s

$$\underline{P}_a' = \begin{pmatrix} \gamma_s \gamma_a m c - \gamma_s \beta_s \gamma_a m v_a \\ \gamma_s \gamma_a m v_a - \gamma_s \beta_s \gamma_a m c \end{pmatrix}$$

$\underline{P}_b' = (\ldots)$ Analog zu $\underline{P}_a'$ mit γ_b anstatt γ_a

$$\left(\underline{P}'_{tot}\right)_1 = \left(\underline{P}_a' + \underline{P}_b'\right)_1 \overset{!}{=} 0$$

4er-Impuls/Vektor $\underline{P} = \begin{pmatrix} \gamma m c \\ \vec{P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E/c \\ \vec{P} \end{pmatrix}$

Nach v_s auflösen

$$\Rightarrow v_s = \frac{\gamma_a v_a + \gamma_b v_b}{\gamma_a + \gamma_b}$$

Aufg. 3 (Weiterführung)

2. Betrachte nicht rel. Grenzfall:

$$|v_a|, |v_b| \ll c \quad \Rightarrow \gamma_{a,b} \approx 1$$

$$\Rightarrow \quad v_s = \frac{v_a + v_b}{2}$$

3. LT mit v_a $\Rightarrow$ $(P_{tot}'')^2 = (P_{tot})^2$ Länge von 4er-Vektoren sind invariant unter Lorentz-Transformation

Einschub: Herleitung von $E = mc^2$

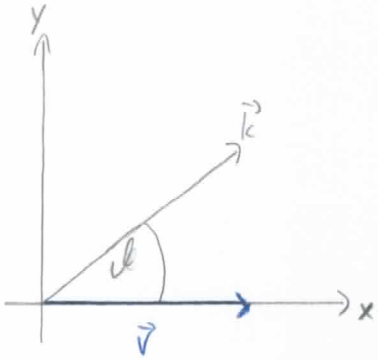
$$p^\mu := m \frac{dx^\mu}{d\tau} = \begin{pmatrix} \gamma mc \\ \vec{p} \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} E/c \\ \vec{p} \end{pmatrix}$$

$$\gamma mc^2 = \frac{mc^2}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} \underset{\substack{\text{Taylor um} \\ v=0}}{\approx} mc^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

Rechne: $p_\mu p^\mu \underset{\substack{\vec{p}=0 \text{ und} \\ \gamma=1 \text{ im Ruhe-} \\ \text{system des} \\ \text{Teilchens}}}{=} -m^2c^2 \underset{\text{Def. oben}}{\overset{!}{=}} -\frac{E^2}{c^2} + \vec{p}^2 \Rightarrow E = \sqrt{m^2c^4 + \vec{p}^2 c^2}$

im Ruhesystem $E = mc^2$

Aufg. 1



z.z.: $\tan(\vartheta') = \dfrac{\sin(\vartheta)}{\gamma\,(\cos(\vartheta) - \beta)}$ (Einstein 1905)

$$k^\mu = \begin{pmatrix} k^0 \\ k^1 \\ k^2 \\ k^3 \end{pmatrix} \qquad k^0 = |\vec{k}|$$

$$k^\mu = \begin{pmatrix} k \\ k \cdot \cos(\vartheta) \\ k \cdot \sin(\vartheta) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$k'^\mu = k' \begin{pmatrix} 1 \\ \cos(\vartheta') \\ \sin(\vartheta') \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ k\cos(\vartheta) \\ k\sin(\vartheta) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lösung vom Gleichungssystem gibt

$$\tan(\vartheta') = \frac{\sin(\vartheta)\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{\cos(\vartheta) - \frac{v}{c}}$$

$v \ll c \Rightarrow \tan(\vartheta') \to \dfrac{\sin(\vartheta)}{\cos(\vartheta)}$ im nicht relativistischen sind die Winkel fast gleich

$\vartheta' \to \vartheta$

$v \to c \Rightarrow \tan(\vartheta') \to 0$

Aus Sicht des Beobachters bewegt sich die Quelle weg

relativistisches Beaming