Übung 4 Daniel Oros 6047449
Anna Bohn 6024495
Benita Dünnebier 6026400

Klassische Feldtheorie III
Prof. Stefanie Walch

WS 16/17
Übungsleiter: D. Seifried

Übungsblatt 3

Ausgabe 1.11.2016
Abgabe 7.11.2016, 12:00 Uhr
Besprechung 10.11.2016

Aufgabe	1	2	3	Summe
Punkte	7.5/14	1/12	4/4	

Allgemeine Informationen

- Abgabe nur in Gruppen von min. 2 bis max. 3 Personen (Ausnahme 0. und 1. Übungsblatt). **Einzelabgaben werden nicht akzeptiert.**
- Alle Namen sind auf der ersten Seite anzugeben. Gruppenmitglieder müssen zur gleichen Gruppe gehören.
- **Bitte unbedingt die Nummer der Übungsgruppe / den Übungsgruppenleiter auf dem Blatt mit angeben.**
- Das Angabenblatt muss mit abgegeben werden.
- Abgebene Aufgaben müssen vorgerechnet werden können. Für Modul III a (9 LP) und b (6 LP) muss eine Übung aus den Übungen 1 – 9 an der Tafel vorgerechnet werden, für Modul III a zusätzlich eine Übung aus den Übungen 10 – 13, um zur Klausur zugelassen zu werden.
- Für Modul III a (9 LP) und b (6 LP) müssen 50% der Punkte aus den Übungen 1 – 9, für Modul III a zusätzlich 50% aus den Übungen 10 – 13 erreicht werden, um zur Klausur zugelassen zu werden.
- Weitere Information finden Sie auch auf https://hera.ph1.uni-koeln.de/~walch/Elektrodynamik16/Inhalt.html

Aufgabe 1 [14 Punkte]

Diese Aufgabe dient zur Verdeutlichung der Bildladungsmethode, welche durch die Greenfunktion motiviert werden kann. Dazu nimmt man an, dass man durch geschicktes Platzieren einer (mehrerer) hypothetischen Punktladung das Potential auf einer vorgegebenen Oberfläche in Anwesenheit einer tatsächlichen Punktladung gemäß der gewünschten Bedingung anpassen kann, z.B. für einen geerdeten Leiter $\phi_{\text{Leiter}} = 0$. Wir betrachten im Folgenden eine geerdete Kugel mit Radius a, die ihren Mittelpunkt im Ursprung besitzt. Im Abstand $d>a$ vom Ursprung sitzt eine Punktladung q.

Aufgaben auf Astro-Blättern

1. Berechnen Sie die Position und die Ladung der Bildladung. Welche Annahme machen Sie dazu bez. des Potentials ϕ?
2. Plotten Sie die Isocontourlinien von ϕ in der $z = 0$ Ebene.
3. Berechnen Sie die Arbeit, die man erbringen muss, um die Punktladung q vom Abstand d bis nach ∞ zu bringen.
4. Betrachten Sie nun die Anordnung, in der sich die Punktladung q *innerhalb* einer hohlen leitenden, geerdeten Kugel (wieder mit Radius a) befindet, d.h. $d < a$. Was gilt nun für die Bildladung? Berechnen Sie die Kraft auf die Punktladung.

Aufgabe 2 [12 Punkte]

Betrachten Sie das Potentialproblem im Halbraum, d.h. $z > 0$, mit Dirichlet Randbedingungen. D.h. ϕ ist bei $z = 0$ gegeben. Aus der Vorlesung wissen Sie, dass die Greenfunktion $G(\vec{x}, \vec{x'})$ für die Laplacegleichung gleich $\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x'}|}$ ist.

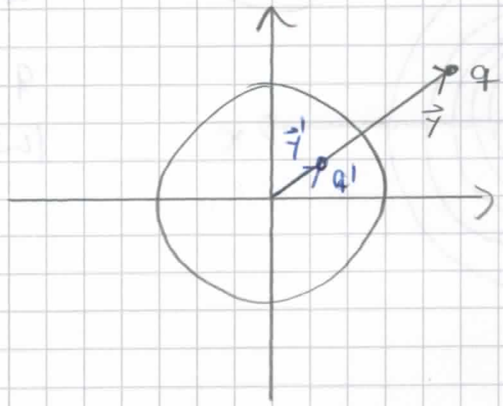
1. Beweisen Sie, dass die Greenfunktion im Halbraum $\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x'}|}$ - $\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x''}|}$ ist, wobei $\vec{x''}$ $= (x', y', -z')$. Welche Bedingung nutzen Sie dazu aus?
2. Betrachten Sie das Potential ϕ auf der begrenzenden Oberfläche bei $z = 0$. Dieses soll dort den Wert ϕ_c innerhalb einer Kreises mit Radius R um den Ursprung annehmen, außerhalb sei $\phi = 0$. Berechnen Sie die Integralgleichung für das Potential $\phi(\vec{x})$.
   Hinweise:
   Berechnen Sie dazu zunächst $\frac{\partial}{\partial z'} G(\vec{x}, \vec{x'})$.
   Sie müssen die entstehende Integralgleichung nicht lösen. Vereinfachen Sie diese lediglich soweit wie möglich.
3. Berechnen Sie nun das Potential entlang der Achse des Kreises, d.h. bei $x = y = 0$. Sie sollten folgendes Ergebnis erhalten: $\phi = \phi_c(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}})$.

Aufgabe 3 [4 Punkte]

Berechnen Sie die Kapazität von zwei konzentrischen, leitenden Kugeln.

Aufgabe 1

a)



Suche : $\phi(\vec{x})$ mit $\phi(|\vec{x}| = a) = 0$

$$\phi(\vec{x}) = \frac{q}{|\vec{x} - \vec{y}|} + \frac{q'}{|\vec{x} - \vec{y}'|}$$ ohne konstanten Faktor

Mit Einheitsvektoren $\vec{e}$ und $\vec{e}'$ in Richtung $\vec{x}$ und $\vec{y}$

$$\Rightarrow \quad \phi(\vec{x}) = \frac{q}{|x\vec{e} - y\vec{e}'|} + \frac{q'}{|x\vec{e} - y'\vec{e}'|}$$ ✓

mit $x = |\vec{x}|$, $y = |\vec{y}|$, $y' = |\vec{y}'|$ und Umformung

$$\Rightarrow \quad \phi(\vec{x}) = \frac{q}{x|\vec{e} - \frac{y}{x}\vec{e}'|} + \frac{q'}{y'|\vec{e}' - \frac{x}{y'}\vec{e}|}$$ ✓

mit Randbed $|\vec{x}| = a$

$$\Rightarrow \quad \phi(|\vec{x}| = a) = \frac{q}{a|\vec{e} - \frac{y}{a}\vec{e}'|} + \frac{q'}{y'|\vec{e}' - \frac{a}{y'}\vec{e}|} \overset{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{y'}{a} \frac{|\vec{e}' - \frac{a}{y'}\vec{e}|}{|\vec{e} - \frac{y}{a}\vec{e}'|} = -\frac{q'}{q}$$

ist erfüllt, wenn

$$\frac{y'}{a} = -\frac{q'}{q} \quad \Rightarrow \quad q' = -\frac{a}{y} q$$ ✓

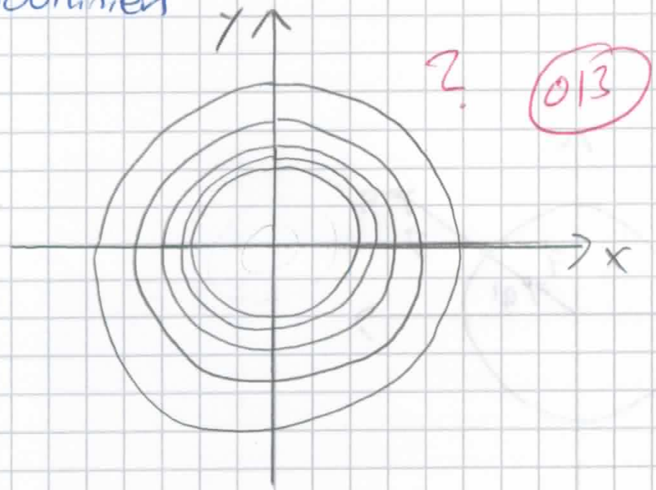
und

$$\frac{a}{y'} = \frac{y}{a} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{a^2}{y}$$ ← a^2 ✓

Potential noch hinschreiben.

5/5

b) Isocontourlinien



? 0|3

Für $q = (0,0,2)$

$d = 1$

$q \approx 1$

(Wolfram Alpha)

c) Arbeit

$$W = q \int_{P_1}^{P_2} \vec{E}\, d\vec{s}$$

$$= q \underbrace{\int_{\vec{y}}^{\infty} \vec{E}\, d\vec{s}}_{\phi(\vec{y})}$$

Brauche ϕ_{Bild}*!

nicht ganz ϕ

wobei $\vec{y}$ der Ortsvektor zum Punkt d ist

$$\Rightarrow \quad W = q\,\phi(\vec{y})$$

↳ Ausrechnen!

0.5|2

d) Punktladung q innerhalb der Hohlkugel

analog zu a) ✓, da wir dort nirgendwo die Bedingung $d > a$ benutzt haben ✓

Kraft auf Punktladung

- Kraft von q' auf q (mit q' als „real")

$$F = \frac{q q'}{4\pi\varepsilon_0\, d^2(q,q')} = \frac{q q'}{4\pi\varepsilon_0\, |y - y'|^2}$$

→ Jetzt ist aber q', y' unsere Variable

↓

- Kraft von q' auf q (wobei q' nur diese imaginäre Einheit? ist)

$$F = 0$$?

Schreibe y, q als Funkt.'en von y', q'!!

2|4

2)

1. $\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} - \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}''|} \overset{?}{=} G(\vec{x},\vec{x}')$

$$\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} - \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}''|} = \frac{1}{\left|\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}\right|} - \frac{1}{\left|\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x'\\y'\\-z'\end{pmatrix}\right|} = \frac{1}{\left|\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}\right|} - \frac{1}{\left|\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\2z'\end{pmatrix}\right|}$$

$$\overset{z'>0}{=} \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} - \frac{1}{\cancel{|\vec{x}-\vec{x}'|+2z'}} \quad f$$

0|3

$$\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|+2z'} = \frac{1}{|\vec{x}'-\vec{x}|+2z} \quad \Rightarrow \quad z'=z$$

2. $z=0 \Rightarrow z'=0$ ✓

$$\frac{\partial}{\partial z'} G(\vec{x};\vec{x}')$$

$$\frac{\partial}{\partial z'} \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = \frac{\partial}{\partial z'} \left((x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\right)^{-1/2}$$

$$= -2(z-z')\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right)\cdot\left((x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\right)^{-3/2}$$

$$= \frac{(z-z')}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}$$

Ansatz richtig, aber das ist Falsch

f

$$\frac{\partial}{\partial z'} \cancel{\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|+2z'}} = \frac{\partial}{\partial z'}\left(\left((x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\right)^{1/2}+2z'\right)^{-1}$$

$$= -1\left(\tfrac{1}{2}\cdot 2(z-z')\left((x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\right)^{-1/2}+2\right)^{-2}$$

$$= \frac{-1}{\left(\frac{z-z'}{|\vec{x}-\vec{x}'|}+2\right)^2}$$

1|5

$$\phi(\vec{x}) = \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S ds'\cdot\left(V\cdot\frac{\partial}{\partial z'}G(\vec{x},\vec{x}')\right)$$

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S ds'\left(V\cdot\left(\frac{(z-z')}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}+\frac{1}{\left(\frac{z-z'}{|\vec{x}-\vec{x}'|}+2\right)^2}\right)\right)$$

nur $z'=0$!

$$\overset{z=z'=0}{=} -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S ds'\left(V\cdot\overset{2}{\tfrac{1}{4}}\right)$$

~~2.2~~

2.3 ? → 0|4

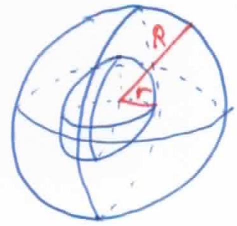
Aufg. 3

E-Feld einer Kugel bekannt: $E = \frac{Q}{4\pi \cdot r^2}$

$\Downarrow$

Gauß $\Rightarrow$ $\oint \vec{E}\, d\vec{A} = E \cdot A = E \cdot 4\pi r^2 = q_{\text{eingeschlossen}} = Q$

$\times 4\pi$ oder $\frac{1}{\varepsilon_0}$ Einheiten!



Nach VL gilt: $\phi = -\int_R^r E\, ds = \frac{-q_{eing.}}{4\pi} \int_R^r \frac{1}{r'^2}\, dr' = \underbrace{-\frac{q_{eing.}}{4\pi}}_{=:\alpha} \left[-\frac{1}{r'}\right]_R^r$

$= \alpha \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right) = \frac{q_{eing.}}{4\pi} \frac{R-r}{R \cdot r}$

Kapazität ist: $q = C \cdot \phi \Leftrightarrow C = \frac{q_{eing.}}{\phi} = 4\pi \frac{R \cdot r}{R-r}$

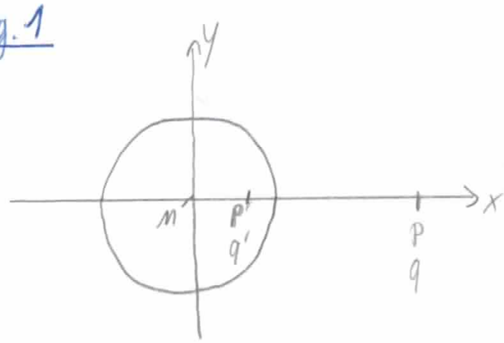
od.

$C = \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)^{-1}$

4 4

Aufg. 1

1.



$$\phi|_{\partial V} = 0$$

$$\phi(\underline{x}) = \frac{q}{|\underline{x} - p\cdot\hat{e}_x|} + \frac{q'}{|\underline{x} - p\cdot\hat{e}_x|}$$

$$\phi(a\hat{n}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi(a\hat{n}) = \frac{q}{|a\hat{n} - p\cdot\hat{e}_x|} + \frac{q'}{|a\hat{n} - p'\cdot\hat{e}_x|}$$

$$= \frac{q}{a\,|\hat{n} - \frac{p}{a}\hat{e}_x|} + \frac{q'}{p'\,|\frac{a}{p'} - \hat{e}_x|}$$

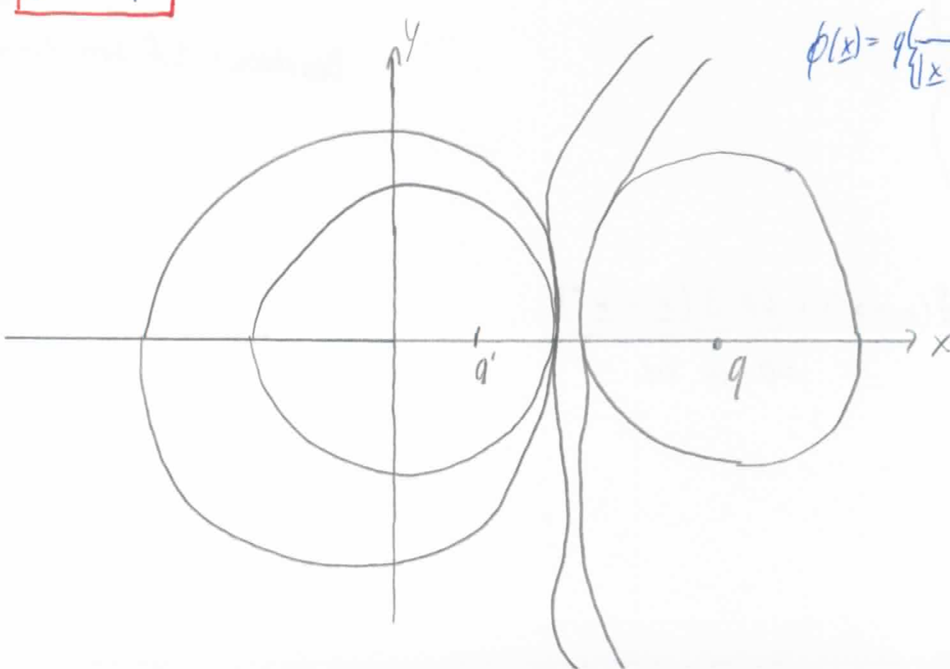
$$\Rightarrow \frac{q}{a} = -\frac{q'}{p'} \qquad |\hat{n} - \frac{p}{a}\hat{e}_x| = \sqrt{\underbrace{\hat{n}\hat{n}}_{1} + \frac{p^2}{a^2}\underbrace{\hat{e}_x\hat{e}_x}_{1} - 2\frac{p}{a}\hat{n}\cdot\hat{e}_x}$$

$$\frac{p}{a} = \frac{a}{p'} \qquad = \sqrt{\left(\frac{p}{a}\hat{n} - \hat{e}_x\right)\cdot\left(\frac{p}{a}\hat{n} - \hat{e}_x\right)}$$

$$\Rightarrow q' = -\frac{q}{a}\cdot p' \qquad \boxed{q' = \frac{a}{p}q}$$

$$\boxed{p' = \frac{a^2}{p}}$$

2.



$$\phi(\underline{x}) = q\left\{\frac{1}{|\underline{x} - p\,\hat{e}_x|} \underbrace{- \frac{a}{p}\frac{1}{|\underline{x} - \frac{a^2}{p}\cdot\hat{e}_x|}}_{\phi_{Bild}}\right\}$$

negatives Vorzeichen nicht vergessen

3. Arbeit

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

$$= -q \int_p^\infty \vec{\nabla}\phi \, d\vec{s} \qquad (\vec{\nabla}\phi)\vec{n} = \frac{\partial \phi}{\partial \vec{n}} \quad \text{bzw.} \quad (\vec{\nabla}\phi)\cdot \underbrace{\vec{n}\, ds}_{d\vec{s}} = \frac{\partial \phi}{\partial s}$$

$$= -q \left[\phi\right]_p^\infty$$

$$= -q \left[\phi(\infty) - \phi(p)\right]$$

$$= q\, \phi(p)$$

$$\Rightarrow \boxed{W = q\, \phi_{Bild}(p) = -\frac{q^2 \cdot a}{p^2 - a^2}}$$

4. Potential ist gleich, aber p, q ist jetzt in der Kugel

$$\vec{F} = -q\, \vec{\nabla}\phi_{Bild} = \frac{-q^2 \cdot a}{p} \cdot \frac{x - \frac{a^2}{p}\hat{e}_x}{|x - \frac{a^2}{p}\hat{e}_x|^3} = -\frac{q^2 \cdot a}{p} \frac{(p - \frac{a^2}{p})\hat{e}_x}{|p - \frac{a^2}{p}|^3 \underbrace{|\hat{e}_x|}_{=1}}$$

$\downarrow$ mit $\nabla \frac{1}{r} = \frac{-\vec{r}}{r^3}$

$a > p \Rightarrow a^2 > p^2$

$\Rightarrow \frac{a^2}{p} > p$

Aufg. 2

$$G(\underline{x}, \underline{x}') = \frac{1}{|\underline{x} - \underline{x}'|} - \frac{1}{|\underline{x} - \underline{x}''|}$$

$$\underline{x}'' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ -z' \end{pmatrix}$$

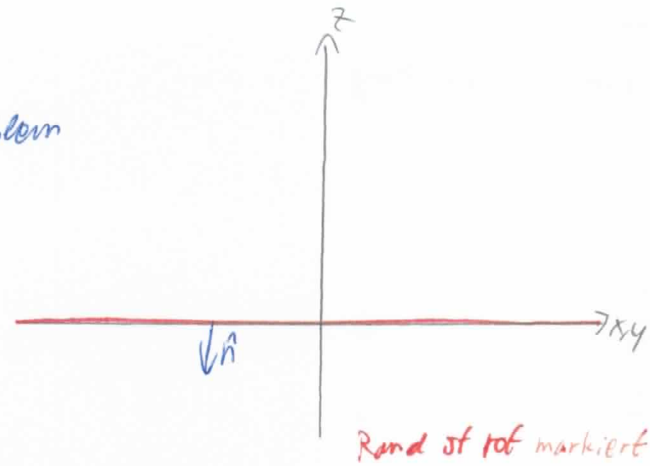
$$\underline{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

Es wird nur der obere Halbraum betrachtet

$\Rightarrow \vec{x} - \vec{x}'' \neq 0 \quad \forall \vec{x}$, da $\vec{x}''$ im unteren Halbraum liegt.

Beachten: Auf dem Rand nicht definiert

$$\Delta_x G = -4\pi\, \delta(\underline{x} - \underline{x}') + \underbrace{4\pi\, \delta(\underline{x} - \underline{x}'')}_{=0 \text{ in Vol.}}$$



2. von Neumann: $\frac{\partial \phi}{\partial n'}$
Dirichlet : $\phi(x)$
} Sind gegeben im jeweiligen Problem

$$\phi(\underline{x}) = \frac{-1}{4\pi} \int_{\partial V} \phi(\underline{x}') \frac{\partial G(\underline{x},\underline{x}')}{\partial n'} da'$$

$$\Rightarrow \frac{\partial G}{\partial n'} = \frac{-\partial G}{\partial z'} = \frac{-\partial}{\partial z'} \left\{ \frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}'|} - \frac{1}{\underbrace{|\underline{x}-\underline{x}''|}_{= \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z+z')^2}}} \right\}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial G}{\partial n'} = -\frac{z-z'}{|\underline{x}-\underline{x}'|} - \frac{z+z'}{|\underline{x}-\underline{x}''|} \Rightarrow \left.\frac{\partial G}{\partial n'}\right|_{\substack{Rand \\ (z'=0)}} = -\frac{2z}{|\underline{x}-\underline{x}'|}$$

$$\phi(\underline{x}) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\partial V} \phi(\underline{x}) \frac{\partial G(\underline{x},\underline{x}')}{\partial n'} \underbrace{dx'\,dy'}_{da'} = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial V} \phi(\underline{x}') \frac{2z}{|\underline{x}-\underline{x}'|} da'$$

1. z.z.: $G'|_{Rand} = 0$

$$G(\underline{x},\underline{x}') = \frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}'|} - \frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}''|}$$

$$\Delta G = -4\pi\,\delta(\underline{x}-\underline{x}') + 4\pi \underbrace{\delta(\underline{x}-\underline{x}'')}_{\text{Immer null, da oberer Halbraum}}$$

3. $$\phi(\underline{x}) = \frac{z}{2\pi} \phi_c \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{z} r\,dr \frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}'|^3}$$

$x = y = 0$

$$\Rightarrow \phi(\underline{x}) = \frac{z}{2\pi} \phi_c \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{R} r\,dr \frac{1}{(\underbrace{x'^2+y'^2}_{r} + z^2)^{3/2}} = z \cdot \phi_c \int_0^R r\,dr \frac{1}{(r^2+z^2)^{3/2}}$$

$$= z \cdot \phi_c \; -\left[\frac{1}{(r^2+z^2)^{1/2}}\right]_0^R = \phi_c \left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)$$

Aufg. 3

richtig in der Übung