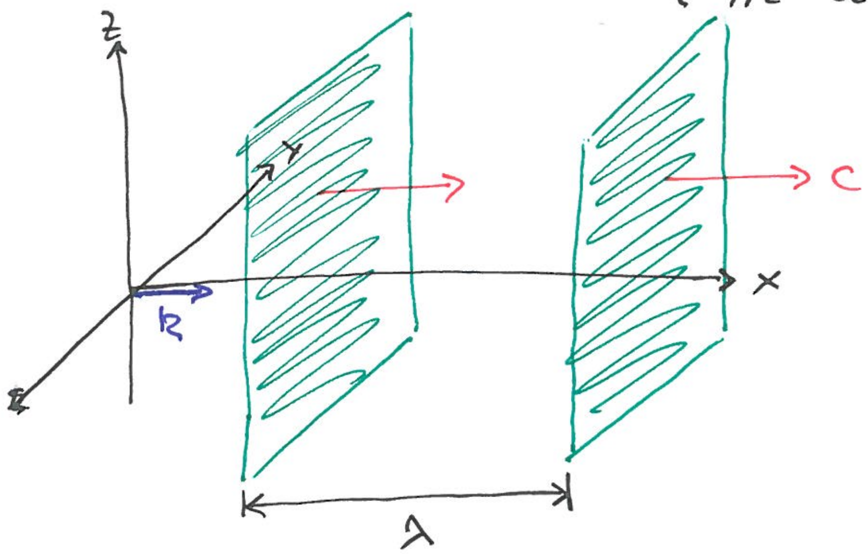
Warum "ebene" Wellen?

Ebene Wellen heißen ebene Wellen, da Flächen konstanter Phase φ Ebenen bilden.

Bsp: $\vec{k} = \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Phase $\varphi = kx - \omega t$

Gesucht seien nun alle Vektoren $\vec{r}$ mit konstanter Phase

$$\varphi = kx - \omega t \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{k}(\varphi + \omega t) \\ y, z \text{ beliebig} \end{cases}$$



Ebenen mit konstanter Phase φ bewegen sich mit Geschwindigkeit c in $\vec{k}$ - Richtung.

Kugelwellen

Phase $\varphi = kr - \omega t$ $\qquad r = |\vec{r}|$

Flächen konstanter Phase definiert durch $r = \frac{1}{k}(\varphi + \omega t)$

$\longrightarrow$ konzentrische Kugeloberflächen

Polarisation

Im folgenden betrachten wir verschiedene physikalische Realisierungen von ebenen Wellen. Da sich das Magnetfeld $\vec{B}$ eindeutig durch ein gegebenes elektrisches Feld $\vec{E}$ ergibt, können wir unsere Diskussion hierbei auf das elektrische Feld reduzieren.

Betrachte eine ebene Welle der Form

$$\vec{E}(\vec{r},t) = (E_1 \hat{e}_y + E_2 \hat{e}_z)\, e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \qquad \text{und } \vec{k} = \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

wobei E_1 und E_2 komplexwertig seien

$$E_1 = |E_1|\, e^{i\varphi_1} \qquad \text{und} \qquad E_2 = |E_2|\, e^{i\varphi_2}$$

so daß sich ergibt

$$E_1 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} = |E_1| \cdot e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \varphi_1)}$$

Für das physikalische Feld ergibt sich somit

$$\operatorname{Re} \vec{E}(\vec{r},t) = \begin{pmatrix} 0 \\ |E_1| \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \varphi_1) \\ |E_2| \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \varphi_2) \end{pmatrix}$$

Für identische Phasen $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$ ergibt sich eine linear polarisierte Welle in Richtung $(|E_1|\hat{e}_y + |E_2|\hat{e}_z)$.

$$\operatorname{Re} \vec{E}(\vec{r},t) = (|E_1|\hat{e}_y + |E_2|\hat{e}_z) \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \varphi)$$

Das entsprechende Magnetfeld steht hierzu senkrecht mit synchroner Phase

$$\operatorname{Re} \vec{B}(\vec{r},t) = (|E_1|\hat{e}_z - |E_2|\hat{e}_y) \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \varphi)$$

Zirkular polarisierte Wellen

Als nächstes betrachten wir den Fall, daß

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{\pi}{2}$$

und gleiche Amplituden $|E_1| = |E_2| = E$.

Dann erhalten wir

$$\mathrm{Re}\,\vec{E}(\vec{r},t) = E \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \varphi_1) \\ \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \varphi_1 + \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix}$$

$$= E\hat{e}_y \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \varphi_1) - E\hat{e}_z \sin(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \varphi_1)$$

$\Rightarrow$ $\vec{E}$ bewegt sich im Kreis, weshalb man von zirkular polarisiertem Licht spricht.

Im Raum ergibt die Bewegung von $\vec{E}$ eine Spirale mit charakteristischer Periode gegeben durch $\lambda = \frac{2\pi}{k}$.

Die Orientierung dieser Spirale ergibt sich aus dem Unterschied der Phasen. Für $\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{\pi}{2}$ spricht man von links polarisierten Wellen (oder negativer Helizität); für $\varphi_2 = \varphi_1 - \frac{\pi}{2}$ von rechts polarisierten Wellen (oder positiver Helizität).

Überlagerung elektromagnetischer Wellen

Behauptung: Eine Überlagerung elektromagnetischer Wellen mit verschiedenen $\vec{k}$-Vektoren der Form

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r},t) = \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_0(\vec{k}_i)\, e^{i(\vec{k}_i\vec{r} - \omega(\vec{k}_i)t)}}$$

oder

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r},t) = \int d^3k\ \vec{E}_0(\vec{k})\, e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega(\vec{k})t)}}$$

mit analogen magnetischen Feldern $\vec{B}(\vec{r},t)$ ist ebenfalls eine Lösung der Maxwell-Gleichungen für $\rho = 0$ und $\vec{j} = 0$.

Beweis: Die Maxwell-Gleichungen sind linear!

z.B. $\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{E}_1(\vec{r},t) + \vec{E}_2(\vec{r},t)\right) = \vec{\nabla}\cdot\vec{E}_1(\vec{r},t) + \vec{\nabla}\cdot\vec{E}_2(\vec{r},t)$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\left[\int d^3k\ \vec{E}_0(\vec{k})\, e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega(\vec{k})t)}\right]$$

$$= \int d^3k\ \underbrace{\vec{\nabla}\cdot\left[\vec{E}_0(\vec{k})\, e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega(\vec{k})t)}\right]}$$

$$= \int d^3k\ i\vec{E}_0(\vec{k})\cdot\vec{k}\ e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega(\vec{k})t)}$$

Es soll gelten: $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}(\vec{r},t) = 0$ für alle $\vec{r}, t$

$\Rightarrow \vec{E}_0(\vec{k}) \perp \vec{k}$ für jedes $\vec{k}$

Außerdem gilt für das magnetische Feld:

$$\vec{B}_0(\vec{k}) = \frac{c}{\omega(\vec{k})}\,\vec{k} \times \vec{E}_0(\vec{k})$$

sowie

$$\vec{k}^2 = \frac{\omega(\vec{k})^2}{c^2} \quad \rightarrow \quad \omega(\vec{k}) = k \cdot c$$

Endliche Wellenpakete

Wir machen zunächst wieder die Vereinfachung

$$\vec{k} = \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \int d^3k \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dk$$

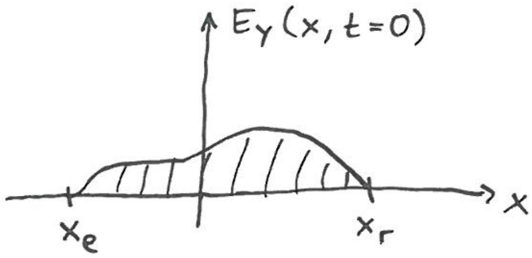
sowie

$$\vec{E}_0(\vec{k}) = \begin{pmatrix} 0 \\ E_0(k) \\ 0 \end{pmatrix}$$ d.h. alle $\vec{E}_0(\vec{k})$ zeigen in y-Richtung

Damit können wir für die Überlagerung mehrer el.-mag. Wellen etwa schreiben

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \begin{pmatrix} 0 \\ E_y(x,t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit } E_y(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} dk \; E_0(k)\, e^{i(kx-\omega(k)t)}$$

Zur Zeit $t=0$ sei $E_y(x,t)$ etwa wie folgt vorgegeben



$$\Rightarrow \quad E_y(x,t=0) = \int_{-\infty}^{\infty} dk \; E_0(k)\, e^{ikx}$$

"endliches Wellenpaket"

wobei die Amplitude $E_0(k)$ die Fourier-Transformierte von $E_y(x, t=0)$ sei

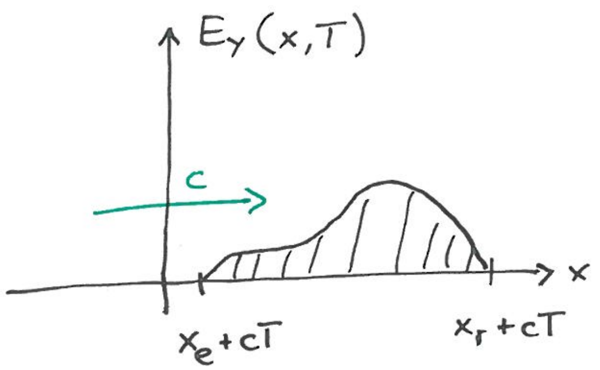
$$\boxed{E_0(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E_y(x, t=0)\, e^{-ikx}\, dx}$$

Als nächstes wollen wir zeigen, daß sich das Wellenpaket mit Lichtgeschwindigkeit c in $\vec{k}$-Richtung bewegt.

Betrachte dazu

$$E_y(x, T) = \int_{-\infty}^{\infty} dk\, E_0(k) \underbrace{e^{i(kx - \omega(k)T)}}_{\begin{subarray}{l} = e^{i(kx - kcT)} \\ = e^{ik(x - cT)} \end{subarray}}$$

$$\stackrel{!}{=} E_y(x - cT, 0)$$

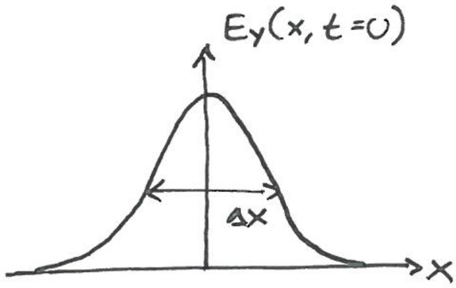


Dabei ändert sich die Form des Wellenpakets nicht!

Frequenz - Spektrum eines Wellenpakets

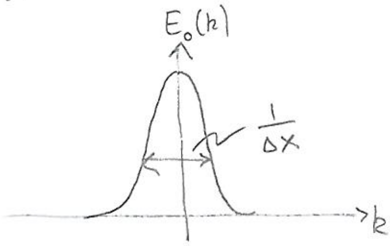
Beispiel: Gaußsches Wellenpaket

$$E_y(x, t=0) = a\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\Delta x}\right)^2}$$



$$\Rightarrow E_0(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} a\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\Delta x}\right)^2} e^{-ikx}\, dx$$

$$= a \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Delta x\, e^{-\frac{1}{2}(k\,\Delta x)^2}$$



→ ebenfalls eine Gaußverteilung aber mit Breite $\frac{1}{\Delta x}$

Unschärfe - Relation

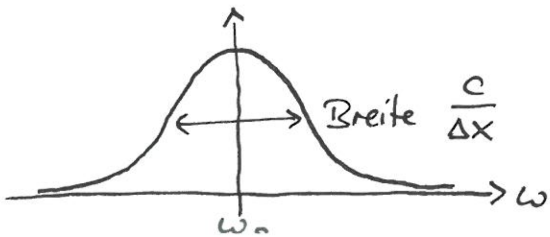
$$\underbrace{\text{Breite des Wellenpakets im Orts-Raum}}_{\Delta x} \cdot \underbrace{\text{... im k-Raum}}_{\frac{1}{\Delta x}} = \text{const}$$

Zeitentwicklung des Wellenpakets

$$E_y(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dk\; E_0(k)\, e^{i(kx - \omega(k) t)}$$

jeder Beitrag zum Integral mit Wellenzahl k erfolgt mit Frequenz $\omega(k) = kc$

Somit ergibt sich auch ein Frequenz - Spektrum der Form



Für $\Delta x \to \infty$ geht $\frac{c}{\Delta x} \to 0$
„monochromatische Welle"

Warum "zerfliest" das Wellenpaket nicht?

Der Grund, daß Wellenpakete nicht auseinanderfliessen, liegt in der linearen Dispersion der Wellen, also dem linearen Zusammenhang zwischen Kreisfrequenz $\omega(k)$ und dem Impuls $\vec{k}$

$$\boxed{\omega(k) = k \cdot c}$$

Betrachte hierzu die Phase

$$(kx - \omega(k)t) = k\left(x - \underbrace{\frac{\omega(k)}{k}}_{=c} \cdot t\right)$$

Jeder Anteil zum Integral bewegt sich mit derselben Geschwindigkeit.

Wdh.

- Ebene Wellen heißen ebene Wellen, da Flächen <u>konstanter</u> <u>Phase</u> φ Ebenen bilden.

- <u>Polarisation</u>: linear, zirkular, elliptisch

- <u>Überlagerung</u> elektromagnetischer Wellen

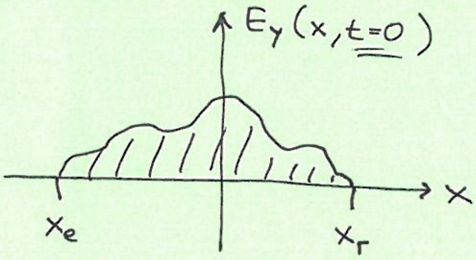
$$\vec{E}(\vec{r},t) = \int d^3k \; \vec{E}_0(\vec{k})\, e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega(\vec{k})t)}$$

und $\vec{B}$ analog.

$\rightarrow$ wieder eine Lösung der Maxwell-Gleichung, da linear.

- <u>Endliche Wellenpakete</u>

$$\vec{k} = \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{E}(\vec{r},t) = \begin{pmatrix} 0 \\ E_y(x,t) \\ 0 \end{pmatrix} \qquad E_y(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} dk \; E_0(k)\, e^{i(kx - \omega(k)t)}$$



$$\rightarrow E_y(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dk \; E_0(k)\, e^{ikx}$$

$$\rightarrow E_0(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \; E_y(x)\, e^{-ikx}$$

Fourier-Transformation

Erhaltungssätze der Elektrodynamik

In der Elektro- bzw. Magnetostatik (siehe KTP 1) haben wir schon gesehen, daß elektrische bzw. magnetische Felder Energie tragen:

1) **Elektrostatik**

elektrische Flußdichte $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$

Energie des elektrischen Feldes $\boxed{E = \frac{1}{8\pi} \int d^3r \; \vec{D}(\vec{r}) \cdot \vec{E}(\vec{r})}$,

bzw. die elektrostatische Feldenergiedichte $\boxed{u_{el} = \frac{1}{8\pi} \vec{D} \cdot \vec{E}}$

2) **Magnetostatik**

magnetische Feldstärke $\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B}$

Energie des magnetischen Feldes $\boxed{E = \frac{1}{8\pi} \int d^3r \; \vec{H}(\vec{r}) \cdot \vec{B}(\vec{r})}$,

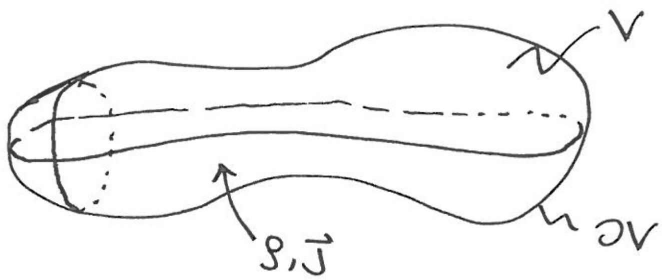
bzw. die magnetostatische Feldenergiedichte $\boxed{u_{mag} = \frac{1}{8\pi} \vec{H} \cdot \vec{B}}$

Wir wollen nun fragen, wie sich dieses Konzept der Feldenergien auf den dynamischen Fall übertragen läßt. Dabei werden wir sehen, daß ein allgemeines elektromagnetisches Feld Energie, Impuls und Drehimpuls trägt. Darüber hinaus werden wir Erhaltungssätze in der Form verallgemeinerter Kontinuitätsgleichungen finden.

Ein Prototyp dieser Verbindung zwischen Erhaltungssatz und Kontinuitätsgleichung ist uns von der lokalen Ladungserhaltung und der gewöhnlichen Kontinuitätsgleichung bekannt, nämlich:

$$\boxed{\dot{\rho} + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0}$$

Erinnerung:



gesamte Ladung $Q_V = \int_V \rho \, dV$

Es gilt:

$$\int_V \dot{\rho} \, dV = \frac{dQ_V}{dt} \overset{!}{=} -I_{\partial V} = -\int_{\partial V} \vec{j} \, d\vec{f} = -\int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{j} \, dV$$

Gaußscher Integralsatz (Spezialfall vom Satz von Stokes)

und somit

$$\int_V (\dot{\rho} + \vec{\nabla}\vec{j}) dV = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\rho} + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0$$

Feldenergie

Naiv könnte man annehmen, daß die Energie eines elektromagnetischen Feldes einfach die Summe der beiden oben angegeben elektrischen und magnetischen Komponenten ist

$$E = \frac{1}{8\pi}\int d^3r \left(\vec{E}\cdot\vec{D} + \vec{B}\cdot\vec{H}\right)$$

Wir werden sehen, daß diese Vermutung nicht vollkommen verkehrt ist. Allerdings gibt es weitere Beiträge zu dieser Feldenergie. Dies mag uns bei näherer Betrachtung aus dem Alltag bekannt sein – elektromagnetische Energie kann fließen und sich in mechanische Energie verwandeln lassen (man denke an die Vorgänge in einer Mikrowelle).

Um dies besser zu verstehen, beginnen wir mit einigen formalen Operationen der Maxwell-Gleichungen

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{D} = \frac{4\pi}{c}\vec{J}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} = 0$$

$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\vec{B}$ magn. Feldstärke

$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E}$ elektrische Flußdichte

indem wir die erste Gleichung mit $\vec{E}$ und die zweite mit $-\vec{H}$ multiplizieren und die Resultate addieren:

$$\vec{E}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{H}) - \vec{H}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{E}) - \frac{1}{c}\left(\vec{E}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\vec{D} + \vec{H}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}\right) = \frac{4\pi}{c}\vec{J}\vec{E} \qquad (*)$$

Um dies weiter zu vereinfachen, nutzen wir die Identitäten

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}) = \vec{w}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{v}) - \vec{v}(\vec{\nabla}\times\vec{w})$$

check!

sowie

$$\vec{E} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \cdot \vec{D})$$

und

$$\vec{H} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{H} \cdot \vec{B})$$

Damit ergibt sich für Gleichung (*)

$$-\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) - \frac{1}{2c} \cdot \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{B} \cdot \vec{H}) = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \cdot \vec{E}$$

beziehungsweise

$$\frac{1}{8\pi} \cdot \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{B} \cdot \vec{H}) + \frac{c}{4\pi} \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) + \vec{j} \vec{E} = 0 \; .$$

Um die Bedeutung dieser Gleichung zu verstehen, sollten wir sie über ein Testvolumen V integrieren

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \int_V d^3r \, \frac{1}{8\pi} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{B} \cdot \vec{H}) = - \int_{\partial V} d\vec{f} \, \frac{c}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{H}) - \int_V d^3r \, \vec{j} \cdot \vec{E}} \qquad (**)$$

wo wir wiederum Gauß's Theorem benutzt haben.

Der erste Term ist die Summe über die elektrische und magn. Feldenergiedichte – so wie wir es zuvor aus statischen Fällen gesehen hatten. Wir interpretieren diesen Term nun als die Energie, die in einem allgemeinen el.-mag. Feld gespeichert ist und

$$\boxed{w = \frac{1}{8\pi} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{B} \cdot \vec{H})}$$

als die elektromagnetische Feldenergiedichte.

Einen wesentlichen Unterschied zwischen dem Fall statischer Felder und der Elektrodynamik erkennen wir, wenn wir die Gleichung (**) noch einmal näher betrachten — in der Elektrodynamik kann die el.-mag. Feldenergiedichte zeitlich variieren. Die rechte Seite von (**) ist nicht einfach null wie im statischen Fall, sondern beschreibt was zu einer solchen zeitlichen Variation der Feldenergiedichte führen kann, wobei es hier zwei Mechanismen gibt:

Zum einen erkennen wir das Oberflächenintegral über das sogenannte Poynting Vektorfeld

$$\boxed{\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{H}}$$

Wir interpretieren dieses Integral über dieses Vektorfeld als den Energiestrom der durch die Fläche ∂V fließt und entsprechend das Poynting Vektorfeld als Energiestromdichte.

Wir sehen also eine Analogie der Paare

Feldenergiedichte	w	und	Poynting Vektorfeld	$\vec{S}$
Ladungsdichte	ρ	und	Stromdichte	$\vec{J}$

Ein wesentlicher Unterschied liegt allerdings darin, daß die Feldenergiedichte nicht erhalten ist.

Tatsächlich haben wir das folgende Gleichgewicht für die elektromagnetische Feldenergiedichte gefunden:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \omega + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = -\vec{J} \cdot \vec{E}} \qquad (***)$$

Die rechte Seite dieser Gleichung beinhaltet neben dem elektrischen Feld den konventionellen Ladungsstrom – ein guter Hinweis darauf, daß dieser Term die Konversion von el.-mag. Energie in mechanische Energie beschreibt.

• Mechanische Arbeit & el.-mag. Felder

Betrachte eine Punktladung q im el.-mag. Feld.
Die zeitliche Änderung der Energie $U(\vec{x}(t))$ ist gegeben via

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} U(\vec{x}(t)) &= - \vec{F} \cdot \dot{\vec{x}} \\ &= - q \Big(\vec{E} + \underbrace{\frac{\vec{v} \times \vec{B}}{c} \Big) \cdot \vec{v}}_{=0} \\ &= - q \vec{E} \cdot \vec{v} \\ &= - \int_V dV \vec{J} \vec{E} \end{aligned}$$

die magnetische Komponente der Lorentzkraft steht immer senkrecht auf die Geschwindigkeit $\vec{v}$ und verrichtet damit keine Arbeit

Die mechanische Leistungsdichte des el-mag. Feldes ist somit $\boxed{-\vec{J} \cdot \vec{E}}$

Wir stellen also fest, daß ein el.-mag. Feld Arbeit an elektrischen Punktladungen verrichten kann.
Energieerhaltung impliziert dann, daß die aufgebrachte mechanische Energie der Energie des el.-mag. Feldes entnommen werden muß, womit sich das Auftreten der mechanischen Energie in Gleichung (***) erklären läßt.

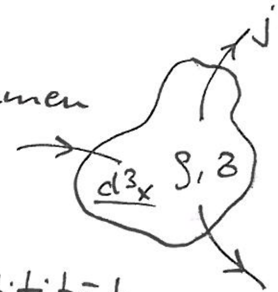
Kontinuitätsgleichungen

Gleichungen der Form

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\rho + \vec{\nabla}\vec{j} = z}$$

heißen im allgemeinen Kontinuitätsgleichungen.

Sie besagen, daß sich eine Menge (etwa Ladungen, Energie, Moleküle, ...) beschrieben durch eine Dichte ρ in einem kleinen Referenzvolumen d^3x auf zwei Art und Weisen verändern kann:



- durch einen Fluß in/aus diesem Referenzvolumen beschrieben durch eine Stromdichte $\vec{j}$
- durch eine Konversion in eine andere Entität, wobei die Rate der Konversion mit z beschrieben werde. Ist $z = 0$, sprechen wir von einer erhaltenen Größe.

Integralform der Kontinuitätsgleichung:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\int_V dV\,\rho + \int_{\partial V} d\vec{f}\cdot\vec{j} = \int_V dV\, z}$$