Benita Dünnebier 6026400
Daniel Oros 6071449
Anna Bohn 6024475

Übungsblatt 1

Ausgabe 18.10.2016
Abgabe 24.10.2016
Besprechung 27.10.2016

Aufgabe	1	2	3	4	Summe
Punkte	10	6	4	4	24

Allgemeine Informationen

- Abgabe nur in Gruppen von min. 2 bis max. 3 Personen (Ausnahme 0. und 1. Übungsblatt). Einzelabgaben werden nicht akzeptiert.
- Alle Namen sind auf der ersten Seite anzugeben. Gruppenmitglieder müssen zur gleichen Gruppe gehören.
- **Bitte unbedingt die Nummer der Übungsgruppe / den Übungsgruppenleiter auf dem Blatt mit angeben.**
- Das Angabenblatt muss mit abgegeben werden.
- Abgebene Aufgaben müssen vorgerechnet werden können. Für Modul III a (9 LP) und b (6 LP) muss eine Übung aus den Übungen 1 – 9 an der Tafel vorgerechnet werden, für Modul III a zusätzlich eine Übung aus den Übungen 10 – 13, um zur Klausur zugelassen zu werden.
- Für Modul III a (9 LP) und b (6 LP) müssen 50% der Punkte aus den Übungen 1 – 9, für Modul III a zusätzlich 50% aus den Übungen 10 – 13 erreicht werden, um zur Klausur zugelassen zu werden.
- Weitere Information finden Sie auch auf https://hera.ph1.uni-koeln.de/~walch/Elektrodynamik16/Inhalt.html

Aufgabe 1 [12 Punkte]

Berechnen Sie

1. $\nabla \cdot (r\vec{a})$ und $\nabla \cdot (r^n \vec{r})$, wobei, $\vec{a}$ ein konstanter Vektor und $\vec{r}$ der Ortsvektor ist.
2. Gegeben seien die skalaren Felder $\phi = \sin(\vec{k}\vec{r})$ und $\psi = e^{-\alpha r^2}$, wobei $\vec{k}$ ein konstanter Vektor und α ein konstanter Skalar sein sollen. Berechnen Sie die Gradientenfelder und anschließend deren Quellen.

3. Für welche Funktionen $f(r)$ ist das Vektorfeld $\vec{A} = f(r)\vec{r}$ quellenfrei?

Aufgabe 2 [8 Punkte]

1. Berechnen Sie die Feldstärke mit Hilfe des Gaußschen Satzes in der Umgebung eines homogen geladenen geraden langen (zylinderförmigen) Drahtes mit dem Radius R und der Ladungsdichte pro Länge $q = Q/L$.

2. Berechnen Sie das Potential und daraus das elektrische Feld in der Umgebung von zwei entgegengesetzt geladenen Drähten mit dem Abstand d.

Aufgabe 3 [4 Punkte]

Berechnen Sie:

1. $\int_{-\infty}^{\infty}(x + x^2)[\delta(1 - x) + \delta(2 + x)]\mathrm{d}x$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^4 \delta(x - n + 1/2)\mathrm{d}x$

Aufgabe 4 [6 Punkte]

1. Berechnen Sie das elektrische Feld einer homogen geladenen Kugel zunächst mit Hilfe des Gaußschen Satzes.

2. Zeigen Sie, dass man das elektrische Feld auch über die Lösung der Poisson-Gleichung
$$\Delta\phi(\vec{r}) = -4\pi\rho(\vec{r}) \ , \tag{1}$$
erhält.

Hinweise:
1. Die Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$ und das elektrostatische Potential $\phi(\vec{r})$ hängen nur von $r = |\vec{r}|$ ab. Deswegen lässt sich die Rechnung vereinfachen, indem man den Laplace-Operator in Kugelkoordinaten verwendet:
$$\Delta\phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \dots \ , \tag{2}$$
dabei steht ... für Terme, die partielle Ableitungen nach ϑ und φ enthalten.
2. Die Integrationskonstanten sollen durch folgende Randbedingungen festgelegt werden: $\phi(0)$ endlich, $\phi(\infty) = 0$, $\phi(r)$ stetig bei R und $\phi'(r)$ stetig bei R.

Aufg. 1

1. (i) $\nabla(r\cdot\vec{a}) = \nabla r \cdot \vec{a} = a\cdot\frac{\vec{r}}{r}$ ✓

(ii) $\nabla\cdot(r^n\vec{r}) = (\nabla r^n)\cdot\vec{r} + (\nabla\vec{r})\, r^n$

$= \nabla(x^2+y^2+z^2)^{n/2}\cdot\vec{r} + \underbrace{\nabla\vec{r}}_{=3}\, r^n$

$= \frac{n}{2}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n-2}{2}}\begin{pmatrix}2x\\2y\\2z\end{pmatrix}\cdot\vec{r} + 3r^n$

$= n\,(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n-2}{2}}(x^2+y^2+z^2) + 3r^n$

$= r^n(n+3)$ ✓

2.

(i) $\phi = \sin(\vec{k}\cdot\vec{r})$ $\vec{k}=\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{pmatrix}$

$\nabla\phi = \cos(\vec{k}\cdot\vec{r})\begin{pmatrix}\partial_x\\\partial_y\\\partial_z\end{pmatrix}(k_1x+k_2y+k_3z)$

$= \cos(\vec{k}\cdot\vec{r})\cdot\vec{k}$ ✓ Grad.-Feld

$\nabla\cdot\nabla\phi = \nabla\cos(\vec{k}\cdot\vec{r})\cdot\vec{k}$

$= -\sin(\vec{k}\cdot\vec{r})\cdot\vec{k}\cdot\vec{k}$

$= -\sin(\vec{k}\cdot\vec{r})\cdot(k_1^2+k_2^2+k_3^2)$ ✓ Quelle

(ii) $\psi = e^{-\alpha r^2}$

$\nabla\psi = -e^{-\alpha r^2}\alpha\cdot 2k\cdot\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}2x\\2y\\2z\end{pmatrix}$

$= -\alpha 2\, e^{-\alpha r^2}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = -2\alpha\, e^{-\alpha r^2}\,\vec{r}$ ✓

$\nabla\nabla\psi = \nabla(-2\alpha\, e^{-\alpha r^2}\,\vec{r})$

$= \nabla\begin{pmatrix}-2\alpha\cdot e^{-\alpha r^2}x\\-2\alpha\cdot e^{-\alpha r^2}y\\-2\alpha\cdot e^{-\alpha r^2}z\end{pmatrix} = 3\cdot(-2)\alpha\cdot e^{-\alpha r^2}\,(x\,2\alpha^2\cdot e^{-\alpha r^2}\,2k\cdot\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2x$
$+y\,2\alpha^2\cdot e^{-\alpha r^2}\,2y$
$+z\,2\alpha^2\cdot e^{-\alpha r^2}\,2z)$

Aufg. 1 (weiterführung)

$$\nabla\nabla\Psi = -12\,\alpha^3 \cdot e^{-2\alpha r^2}\,(2x^2+2y^2+2z^2) \quad f \quad \Delta\Psi = -2\alpha e^{-\alpha r}(3-2\alpha r^2)$$

$$= -24\,\alpha^3 \cdot e^{-2\alpha r^2} \cdot r^2$$

3. Quellenfreiheit: $\nabla(f(x)\,\vec{x}) = 0$

$$\Rightarrow \nabla(f(r)\,\vec{r}) \overset{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow f'(r)\cdot r + f(r)\cdot 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow -f(r)\frac{3}{r} = f'(r)$$

DGL 1. Ordnung.
Lösung mit trennung der Variablen

$$-f(r)\frac{3}{r} = \frac{df(r)}{dr}$$

$$\Leftrightarrow -\int \frac{3}{r}\,dr = \int \frac{1}{f}\,df$$

$$\Leftrightarrow -3\cdot \ln(r) = \ln(f) + C$$

$$\Leftrightarrow \ln(r^{-3}) = \ln(f) + C \Rightarrow f \propto \frac{1}{r^3}$$

OK

Test: $$\mathrm{div}\left(\frac{1}{r^3}\cdot\vec{r}\right) = \partial_x \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + \partial_y (\ldots) + \partial_z (\ldots) = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + \frac{\cancel{2}x\cdot x}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}\cdot\left(-\frac{3}{\cancel{2}}\right)$$

$$+ \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \frac{3y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

$$+ \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \frac{3z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

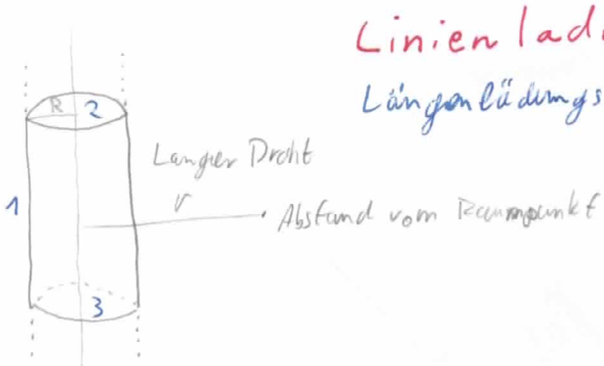
$$= \frac{3}{r^3} - \frac{3\cancel{r^2}}{r^{\cancel{5}3}} = 0$$

$\Rightarrow$ Das Vektorfeld $\vec{A} = f(r)\,\vec{r}$ ist quellenfrei für $f = \frac{1}{r^3}$ (gelöste DGL).
Allgemein ist $\mathrm{div}(\vec{A}) = 0$ für alle Fkt. f die $f'(r) = -f(r)\frac{3}{r}$ lösen.

Aufg. 2

Linienladungsdichte

1.



Längenladungsdichte $q = Q/L$

Da es sich um einen langen Draht handelt, können die E-Feldlinien als parrallel angenommen werden $\Rightarrow \langle E, \vec{n} \rangle = 0$ für Fläche 2 und 3.

kontinuierliche Ladungsverteilung:
$$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} \, dA = 4\pi \int_V q \, d^3x$$

Da über den kompletten Zylinder integriert wird, gilt für den vollen Zylinder:

$$\int q \, d^3x = Q$$

1. Fall $r > R$

Für den Zylindermantel gilt: $\langle \vec{E}, \vec{n} \rangle = E$

$$\Rightarrow \oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} \, dA = 4\pi Q \Leftrightarrow E \cdot \cancel{2\pi} r L = \cancel{4\pi} Q \cdot 2 \Leftrightarrow E = \frac{Q}{L} \cdot \frac{2}{r}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{E = \frac{2q}{r}}}$$ ✓

2. Fall $r < R$ **Ausserhalb hätte gereicht**

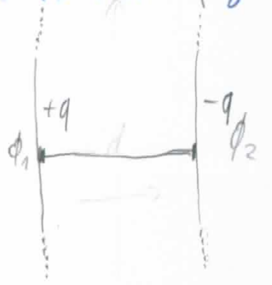
Berechnung der Ladung: Prozentuale Betrachtung führt zu:
(durch superpositionsprinzip)

$$\int_V q \, d^3x = Q \cdot \frac{\pi r^2 \cancel{L}}{\pi R^2 \cancel{L}} = Q \left(\frac{r}{R}\right)^2$$

$$\Rightarrow \overset{2}{\cancel{4\pi}} Q \cdot \left(\frac{r}{R}\right)^2 = \underset{\text{wie Fall 1.}}{E \cdot \cancel{2\pi} r L} \Leftrightarrow 2Q\left(\frac{r}{R}\right)^2 = E r L \Leftrightarrow E = \frac{2}{r} \underbrace{\frac{Q}{L}}_{q} \cdot \left(\frac{r}{R}\right)^2$$

$$\underline{\underline{= \frac{2}{r} q \left(\frac{r}{R}\right)^2}}$$ ✓

2. In der Aufgabe steht nichts von Ausdehnung, deswegen nehme ich die Ausdehnung als vernachlässigbar an



Lege (+q) Draht in den Ursprung

Es gilt: $\phi_1(\vec{x}) = \int_V \frac{q(x)}{|\vec{x}-\vec{x}'|} d^3x'$

$-\nabla \phi_1 = E_1$

$\Rightarrow \phi_1 = -\int E \, dr = -\int \frac{2(+q)}{r} dr = +2q \ln(r)$

in Zylinderkoord. — bekannt aus a)

$\Rightarrow \phi_2$ ist um d verschoben, aber der Abstand muss immer pos. sein

$\phi_2 = -\int E dr = -\int \frac{2(-q)}{|\vec{r}-\vec{d}|} dr = \int \frac{2q}{|\vec{d}-\vec{r}|} dr = + \ln(|d-r|) 2(+q)$

$\vec{d} = d\vec{e}_x$ und $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \phi = \phi_1 + \phi_2 = 2q \ \ln\left(\frac{|\vec{r}|}{|\vec{d}-\vec{r}|}\right)$

$\nabla \phi = 2q \ \frac{|d-r|}{|r|} \cdot \left(\frac{1}{(d-r)} - \frac{|r|}{|d-r|}\right)$ Vektorfeld?

f

Aufg. 3

1. $\int_{-\infty}^{\infty} (x+x^2)\,[\delta(1-x)+\delta(2+x)]\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{(x+x^2)}_{:=f(x)}\,\delta(1-x) + \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta(2+x)\,dx$

Es gilt: $\int_a^b f(x)\,\underbrace{\delta(x-x_0)}_{=\delta(x_0-x)} = f(x_0)$ siehe letzte Übung

$\Rightarrow x_1 = 1$

$\vee\ x_2 = -2$

$f(x_1) = 2$

$f(x_2) = 2$

$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} (\ldots) = 4$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^4 \delta(x-(n+1/2))\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \begin{cases} 0-4 & 1 \\ \text{sonst} & 0 \end{cases} = f(1/2)+f(3/2)+f(5/2)+f(7/2) = 4$

$f(x) \equiv 1$

Aufgabe 4

1. Gauss Gesetz: $\frac{Q}{\varepsilon_0} = \oiint_S \vec{E}\, d\vec{A}$

Vorsicht. Ihr verwendet hier SI-Einheiten

$= E(r) \oint d\vec{A}$

$= E(r)\, 4\pi r^2$

Da E konstant (homogen geladene Kugel)

$\Rightarrow \frac{Q}{\varepsilon_0} = E(r)\, 4\pi r^2$

$\Leftrightarrow E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2}$ ✓

Innenraum?

2. Poisson-Gleichung und jetzt Gauss-Einheiten und $\varepsilon_0 = 1$.

$\Delta\phi(\vec{r}) = -4\pi\rho(\vec{r})$

Im Außenraum der homogen geladenen Kugel:

$\Delta\phi(\vec{r}) = 0$, da $\rho(\vec{r}) = 0$

mit Laplace-Operator in Kugelkoordinaten

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta \frac{\partial}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

wegen der Symmetrie (unabh. von ϑ und φ) fallen die beiden letzten Therme weg.

$\Rightarrow \Delta\phi(\vec{r}) = \frac{d}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial\phi}{\partial r}\right) = 0 \quad | \int dr$

$\Rightarrow \int \frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{d\phi}{\partial r}\right) dr = \int 0\, dr$

$\Leftrightarrow r^2 \frac{\partial\phi}{\partial r} = c_1 \quad | : r^2$

$\Leftrightarrow \frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{c_1}{r^2} \quad | \int dr$

$\Leftrightarrow \int \frac{\partial\phi}{\partial r} dr = \int \frac{c_1}{r^2} dr$

$\Leftrightarrow \phi = \frac{\tilde{c}_1}{r} + c_2$

Aus 1. wissen wir

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}$$

mit der Poisson-Gl. folgt:

$$\nabla\phi = -\vec{E} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} \quad ?$$

(Daraus folgt $c_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}$, $c_2 = 0$)

Folgt ~~aus~~ aus der Forderung dass ϕ stetig differenzierbar ist ∇ ?

Man erhält das elektrische Feld also auch über die Poisson-Gleichung!

Innenraum der Kugel fehlt

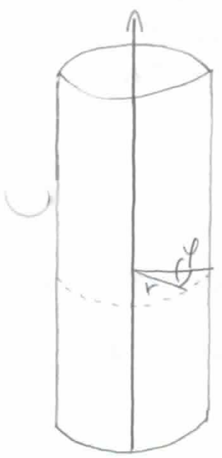
Aufg. 1

3. Nur Quellenfrei auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, da Fkt. in 0 nicht definiert

Aufg. 2

1. $\nabla \cdot \vec{D} = \rho$

$$\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E} \quad , \varepsilon = 1, \ \varepsilon_0 = 1$$



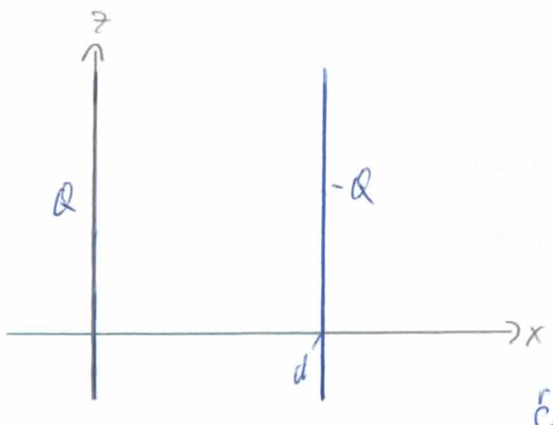
$$\int dV \, \nabla \cdot \vec{E} = \int \rho \, dV \cdot 4\pi = 4\pi Q \qquad \text{mit} \quad \vec{E} = E_r(r) \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\parallel$$

$$\underbrace{\int dA}_{r \int_0^L dz \int_0^{2\pi} d\varphi} \vec{E} \cdot \frac{\vec{r}}{r} = 2\pi L \, E_r(r) \, r \qquad \Leftrightarrow E_r(r) = \frac{2Q}{L \cdot r} = \frac{2q}{r}$$

$$q = \frac{Q}{L}$$

2.



$$\Delta \phi = -4\pi \rho$$

$$\Delta = \frac{1}{r} \partial_r (r \, \partial_r) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Ansatz: $\phi := \phi(r)$ [Δ in Zylinderkoordinaten]

$$\partial_r (r \, \partial_r) \phi = -4\pi \rho r$$

$$\overset{\int_0^r dr}{\Rightarrow} \ r \, \partial_r \phi = -\frac{2Q}{L} = -4\pi \int_0^r \rho \cdot r \, dr$$

$$\rho = \frac{Q}{\pi L R^2} \, \Theta(R - r)$$

$$\Rightarrow \partial_r \phi = \frac{2Q}{L} \cdot \frac{1}{r}$$

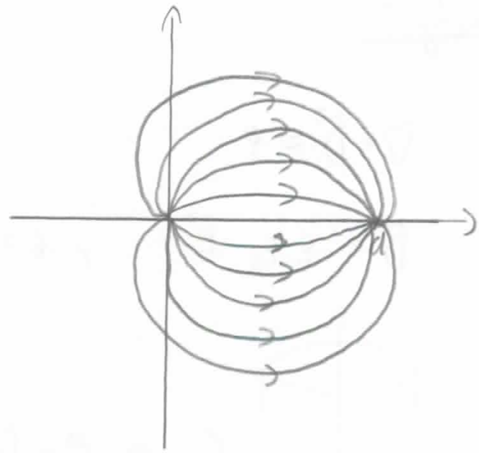
$$\Rightarrow \phi_0(r) = -2q \, \ln(|r|)$$

$$\phi_{Ges} = \phi_0 + \phi_d$$

$$\phi_d(\vec r) = 2q \quad \ln\left(\sqrt{(x-d)^2+y^2}\right)$$

falls d nicht nur in x-Richtung, dreht man das System einfach.

$$\Rightarrow \quad \phi_{Ges}(x,y) = \cancel{2}q \quad \ln\left[\left(\frac{x^2+y^2}{(x-d)^2+y^2}\right)^{\cancel{1/2}}\right]$$



E-Feld berechnen:

$$\vec E = -\nabla\phi$$

$$= -2q\left[\frac{1}{(x-d)^2+y^2}\begin{pmatrix}x-d\\y\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix}\right]$$

Aufg. 3

Richtig auf dem Blatt, beachten, dass gilt:

$$\int_a^b \delta(x-x_0)\cdot f(x)\,dx = \begin{cases} f(x_0) & \text{für } x\in(a,b) \\ 0 & \text{für } x\notin(a,b)\end{cases}$$

Aufg. 4

1.

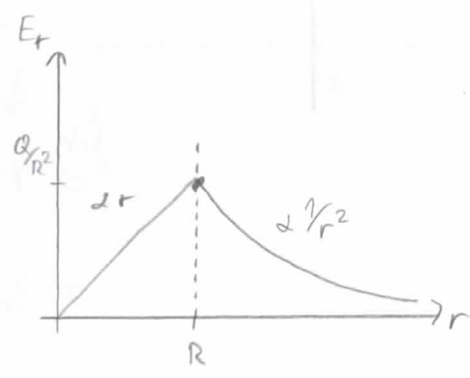
Ansatz: $\vec E = E_r(r)\,\frac{\vec r}{r}$

$$\underset{\partial B_r(0)}{\int} d\vec A\cdot\vec E = 4\pi \underset{B_r(0)}{\int} \rho\, dV = 4\pi Q \begin{cases} \frac{r^3}{R^3} & , r<R \\ 1 & , r\geq R\end{cases}$$

$$\| $$

$$4\pi r^2\, E_r(r)$$

$$\Rightarrow E_r(r) = Q\begin{cases}\frac{r}{R^3} & , r<R \\ \frac{1}{r^2} & , r\geq R\end{cases}$$



Aufg. 2 (weiterführung)

2. $\Delta\phi = 4\pi\rho \begin{cases} 1 & r<R \\ 0 & r \geq R \end{cases}$ $\qquad \rho = \dfrac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$

$$\frac{1}{r^2}\partial_r (r^2 \partial_r)\,\phi = -4\pi\rho \begin{cases} 1 & , r<R \\ 0 & , r\geq R \end{cases}$$

$\int dr \Rightarrow \quad r^2 \partial_r \phi = \begin{cases} -\frac{4\pi}{3}\rho + c_1 & , r<R \\ c_2 & , r\geq R \end{cases}$

$\int dr \Rightarrow \quad \phi(r) = \begin{cases} \frac{-2\pi\rho}{3} r^2 - \frac{c_1}{r} + \phi(0) & , r<R \\ -\frac{c_2}{r} + \phi(R) & r\geq R \end{cases}$

setze $c_1 = 0$ (Punktladung)

$\phi(R) = 0$ (da $\phi(\infty) \stackrel{!}{=} 0$ gelten soll und es sonst $\phi(R)$ wäre für $r \to \infty$)

$$\phi(r) = \begin{cases} -\frac{Q}{2}\frac{r^2}{R^3} + \phi(0) & r<R \\ -\frac{c_2}{r} & r\geq R \end{cases}$$

Fordere ϕ stetig diff. bar

$$\Rightarrow \phi'(r) = \begin{cases} \frac{-Qr}{R^3} & r<R \\ \frac{-c_2}{r^2} & r\geq R \end{cases}$$

$$\lim_{r\nearrow R} \phi'(r) = \lim_{r\searrow R} \phi'(r)$$

$\Rightarrow \frac{Q}{R^2} = \frac{-c_2}{R^2} \Rightarrow c_2 = -Q$ und $\phi(0) \stackrel{\text{Stetigkeit}}{=} \frac{3}{2}\frac{Q}{R}$

Prüfe: $E_r(r) = -\phi'(r)$

$$\Rightarrow \phi(r) = \begin{cases} \frac{Q}{2R}\left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right) & , r<R \\ \frac{Q}{r^2} & , r\geq R \end{cases}$$