Gruppe 4 | Daniel [illegible] 00[illegible]
Anna Bohn 0024475
Leiter: Nick | Bonita 0026400

Klassische Feldtheorie III
Prof. Stefanie Walch

WS 16/17
Übungsleiter: D. Seifried

Übungsblatt 9

Ausgabe 13.12.2016
Abgabe 19.12.2016, 12:00 Uhr
Besprechung 22.12.2016

Aufgabe	1	2	3	Summe
Punkte	16	8	1	25

Allgemeine Informationen

- Abgabe nur in Gruppen von min. 2 bis max. 3 Personen (Ausnahme 0. und 1. Übungsblatt). **Einzelabgaben werden nicht akzeptiert.**
- Alle Namen sind auf der ersten Seite anzugeben. Gruppenmitglieder müssen zur gleichen Gruppe gehören.
- **Bitte unbedingt die Nummer der Übungsgruppe / den Übungsgruppenleiter auf dem Blatt mit angeben.**
- Das Angabenblatt muss mit abgegeben werden.
- Abgebene Aufgaben müssen vorgerechnet werden können. Für Modul III a (9 LP) und b (6 LP) muss eine Übung aus den Übungen 1 – 9 an der Tafel vorgerechnet werden, für Modul III a zusätzlich eine Übung aus den Übungen 10 – 13, um zur Klausur zugelassen zu werden.
- Für Modul III a (9 LP) und b (6 LP) müssen 50% der Punkte aus den Übungen 1 – 9, für Modul III a zusätzlich 50% aus den Übungen 10 – 13 erreicht werden, um zur Klausur zugelassen zu werden.
- Weitere Information finden Sie auch auf https://hera.ph1.uni-koeln.de/~walch/Elektrodynamik16/Inhalt.html

Aufgabe 1 [16 Punkte]

Betrachten Sie eine kreisförmige Leiterschleife, deren Flächennormale ursprünglich entlang der z-Richtung zeigt und die nun um den Winkel θ um die y-Achse gedreht wird. Ihr Zentrum sei im Koordinatenursprung und die Schleife trage einen Strom I, der im Uhrzeigersinn fließt, ihr Radius sei der Einfachheit halber gleich 1. Die Schleife sei mit einem magnetischen Feld $\vec{B}$ durchsetzt, das die Komponenten $B_x = B_0 \cdot (1 + \beta y)$, $B_y = B_0 \cdot (1 + \beta x)$ und $B_z = 0$ besitzt.

1. Berechnen Sie zunächst die Koordinaten der (gedrehten) Schleife. Berechnen sie zudem die Richtung, in die die Schleifenelemente $\vec{dl}$ zeigen.
2. Berechnen Sie nun die Kraft, die durch das Magnetfeld $\vec{B}$ auf die Schleife ausgeübt wird.
3. Betrachten Sie nun nur das Magnetfeld $\vec{B}_S$, das durch die Leiterschleife selbst hervorgerufen wird. Berechnen Sie $\vec{B}_S$ weit entfernt vom Ursprung auf der z-Achse und fertigen Sie eine Skizze des Magnetfeldes an (Hinweise: Es reicht hier, das Magnetfeld in der x-z-Ebene zu betrachten. Achten Sie auf eine qualitativ korrekte Darstellung.)

Aufgabe 2 [8 Punkte]

Betrachten Sie erneut die in der Vorlesung behandelte Wellengleichung

$$\Delta\psi(\vec{x}, t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 4\pi f(\vec{x}, t)\,. \tag{1}$$

In 1D und 2D lauten die zugehörigen Greenfunktionen

$$G(\vec{x}, \vec{x}', t, t')_{1D} = \frac{1}{2}\theta(t - t' - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c}) \tag{2}$$

$$G(\vec{x}, \vec{x}', t, t')_{2D} = \frac{1}{2\pi}\frac{\theta(t - t' - \frac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{c})}{\sqrt{(t-t')^2 - \frac{|\vec{x}-\vec{x}'|^2}{c^2}}}\,. \tag{3}$$

Man nehme nun an, dass eine Strahlungsquelle existiert mit $f(\vec{x}, t) = \delta(\vec{x})\delta(t)$.

1. Berechnen Sie $\psi(\vec{x}, t)$ für den 1D und 2D Fall.
2. Diskutieren Sie beide Lösungen kurz. Was fällt auf, wenn Sie die Lösungen mit dem Fall für 3D vergleichen (siehe Aufgabe 2.2 auf Übungsblatt 8).

Aufgabe 3 [8 Punkte]

1. Berechnen Sie den Maxwell'schen Spannungstensor in Komponentenschreibweise für einen beliebigen magnetischen Dipol $\vec{m}$, der im Ursprung sitzt.

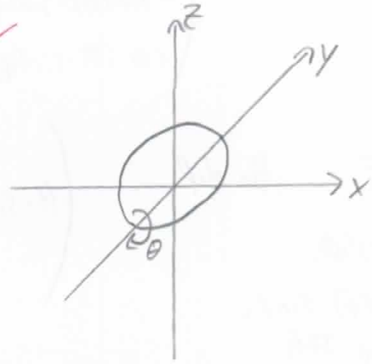
2. Berechnen Sie nun damit den Tensor in Matrizenform auf der z-Achse.
3. Vereinfachen Sie den Tensor nun noch weiter für den Fall, dass $m_i = \delta_{i2} \cdot m$ ist (ebenfalls wiederum nur auf der z-Achse).

TP III Übung 9 18.12.2016

Aufg. 1

1.
$\vec{m} = I \cdot \pi \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ für die ursprüngliche Leiterschleife

Parametrisierung der Schleife $\vec{r}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$



Rotation der Schleife wird beschrieben durch:

$$\underline{\underline{R}} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Rotationsmatrix um y-Achse (Wikipedia oder herleiten) um Winkel θ

$$\Rightarrow \vec{r} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta)\cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ -\sin(\theta)\cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

$\vec{r}$ steht stets $\perp$ auf der Leiterschleife (Ortsvektor), somit steht $\frac{d\vec{r}}{d\varphi}$ senkrecht auf der Leiterschleife (Änderung in φ-Richtung)

$$\rightarrow \vec{R} = \frac{d\vec{r}}{d\varphi} = \begin{pmatrix} +\cos(\theta)\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ -\sin(\theta)\sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

Differentielle Änderung ist beschrieben durch infinitisimale Änderung in φ-Richtung

$$\Rightarrow d\vec{l} = -\vec{R}\, d\varphi$$

?

Nun ist nicht ganz klar in welche Richtung $d\vec{l}$ zeigen soll, manchmal haben wir die rechte Hand Regel benutzt, manchmal anscheinend die linke Hand Regel. $\vec{m}$ zeigt somit in pos. z-Richtung und wir benutzen die linke Hand-Regel, damit die Angaben der Aufgabenstellung stimmen ($\vec{m}$ pos. z-Richtung und Stromrichtung im Uhrzeigersinn)

[$\vec{r}$ ist allerdings rechtshändig definiert, daher das neg. Vorzeichen in der Def. von $d\vec{l}$]

Mit welcher Hand-Regel bestimmt man nun die Richtung von $\vec{m}$ bei gegebenem I Verlaufen ?

2.

$$\vec{B}(\vec{r}(\varphi)) = B_0 \begin{pmatrix} 1+\beta y \\ 1+\beta x \\ 0 \end{pmatrix} = B_0 \cdot \begin{pmatrix} 1-\beta \sin(\varphi) \\ 1-\beta\cos(\theta)\cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

NR:

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} d\vec{\ell} \times \vec{B} = \int_0^{2\pi} B_0 \, d\ell \begin{pmatrix} +\sin(\theta)\sin(\varphi) - \beta\cdot\cos(\theta)\cdot\cos(\varphi)\cdot\sin(\theta)\cdot\sin(\varphi) \\ -\sin(\theta)\cdot\sin(\varphi) + \beta\sin(\theta)\cdot\sin^2(\varphi) \\ \cos(\theta)\cdot\sin(\varphi) - \beta\cdot\cos^2(\theta)\cdot\sin(\varphi)\cdot\cos(\varphi) + \cos(\varphi) - \beta\cdot\sin\cdot\cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

$$\underset{\downarrow}{=} B_0 \begin{pmatrix} 0 \\ \beta\cdot\sin(\theta)\int_0^{2\pi}\sin^2(\varphi)\,d\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \underset{\downarrow}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ \beta\cdot B_0\cdot\pi\cdot\sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\int_0^{2\pi} \sin^2(\theta) = 2\pi$

$\sin(\varphi)$, $\cos(\varphi)$, $\sin(\varphi)\cdot\cos(\varphi)$ sind Periodische Fkt.
$\Rightarrow$ Integration über volle Periode ist Null

Somit fallen die x und z-Komponente sowie der Erste Term der y-Komponente weg

gut

$$\vec{F} = \frac{1}{c}\int \vec{j}\times\vec{B}\, d^3x \underset{\downarrow}{=} \frac{I}{c}\int_{\gamma} d\vec{\ell}\times\vec{B} = \frac{I}{c} = \int_0^{2\pi}[\ldots] = \frac{I\cdot\pi\cdot B_0\cdot\beta}{c}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ \sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit 1-Dim. Leiterschleife gilt $\vec{j}\times\vec{B}\cdot d^3x = d\vec{\ell}\times\vec{B}\cdot I$

3. Magnetfeld der Leiterschleife $\vec{B}_S$

$$\vec{x} \underset{\downarrow}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \qquad \vec{m} = I\cdot\pi\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

da nur z-Komponente

$\Rightarrow$ Drehung um θ führt zu $\vec{m}_\theta$

$$\vec{m}_\theta = \underline{\underline{R}}\cdot\vec{m} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(\theta) \\ 0 \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Für große Entfernungen gilt die Dipolnährung: $\vec{B} = \frac{1}{c}\left[\frac{3\vec{n}\,[\vec{n}\cdot\vec{m}] - \vec{m}}{|\vec{x}|^3}\right]$ mit $\vec{n} = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{1}{c}\,\frac{\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} I\cdot\pi\cos(\theta) - I\cdot\pi\begin{pmatrix} \sin(\theta) \\ 0 \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}\right]}{z^3} = \frac{I\cdot\pi}{c\cdot z^3}\begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ 0 \\ 2\cdot\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

gut

TP III. Übung 8 10.12.2016

Aufg. 2

Neg. oder pos. Vorzeichen?
Literatur sagt Negativ. Warum?

1. $\Delta \psi(\vec{x},t) - \frac{1}{c} \frac{\partial \psi^2}{\partial t^2} = 4\pi \, f(\vec{x},t)$

$$G(\vec{x}, \vec{x}', t, t')_{1D} = \frac{1}{2} \, \theta\left(t - t' - \frac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{c}\right)$$

$$G(\vec{x}, \vec{x}', t, t')_{2D} = \frac{1}{2\pi} \frac{\theta\left(t - t' - \frac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{c}\right)}{\sqrt{(t-t')^2 - \frac{|\vec{x}-\vec{x}'|^2}{c^2}}}$$

$$f(\vec{x},t) = \delta(\vec{x}) \cdot \delta(t)$$

$$\Rightarrow \psi_{1D}(\vec{x},t) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x' \int_{\mathbb{R}} dt' \; \frac{1}{2} \theta\left(t - t' - \frac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{c}\right) \delta(\vec{x}') \, \delta(t')$$

$$= \int_{\mathbb{R}^3} d^3x' \; \frac{1}{2} \theta\left(t - \frac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{c}\right) \delta(\vec{x}')$$

$$= \frac{1}{2} \, \theta\left(t - \frac{|\vec{x}|}{c}\right)$$

& $$\psi_{2D}(\vec{x},t) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x' \int_{\mathbb{R}} dt' \; \frac{1}{2\pi} \; \theta\left(t - t' - \frac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{c}\right) \delta(\vec{x}') \, \delta(t')$$

$$= \int_{\mathbb{R}^3} d^3x' \; \frac{1}{2\pi} \; \frac{\theta\left(t - \frac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{c}\right)}{\sqrt{t^2 - \frac{|\vec{x}-\vec{x}'|^2}{c^2}}} \; \delta(\vec{x}')$$

$$= \frac{1}{2\pi} \; \frac{\theta\left(t - \frac{|\vec{x}|}{c}\right)}{\sqrt{t^2 - \frac{|\vec{x}|^2}{c^2}}}$$

2. **1D:** Die Welle breitet sich räumlich & zeitlich mit konstanter Intensität aus

2D: ——————— " ——————— Abnehmender Intensität aus,

und ist dabei proportional zu $\frac{1}{\left(t^2 - \frac{|\vec{x}|^2}{c^2}\right)^{1/2}}$, schwächt also mit dem Abstand um

einen Wurzelfaktor ab.

Vergleich mit 3D: Die 3D-Lösung (vermutlich ist 2.4 gemeint, und nicht 2.2) schwacht mit $\frac{1}{|\vec{x}|}$ ab.

Es lässt sich also sagen, das die Intensität umso schneller abfällt, umso höher die Dimension ist, in welcher sie sich ausbreitet.

$\ulcorner$ 3D Lösung: $\psi(\vec{x}, t) = \frac{\delta\left(t - \frac{|\vec{x}|}{c}\right)}{|\vec{x}|}$ $\lrcorner$

Übung 9

Aufg. 3

1. $\vec{m}$ ist bel. $\Rightarrow$ $\vec{m} = \begin{pmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{pmatrix}$

Dipolnäherung in großer Entfernung:

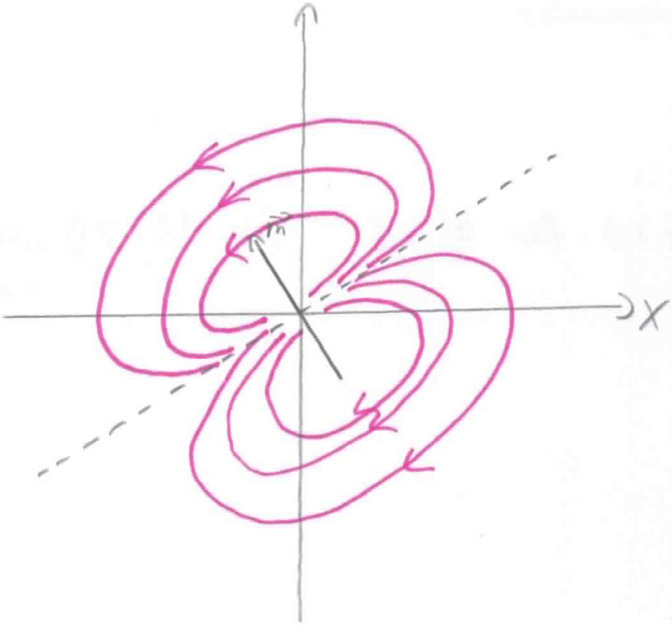
$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{1}{c} \left[\frac{3\vec{n}\,(\vec{n}\cdot\vec{m}) - \vec{m}}{|\vec{x}|^3} \right]$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{1}{c\cdot|\vec{x}|^3} \left[\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^2} \cdot \left(\sum_{i=1}^{3} m_i x_i \right) - \vec{m} \right]$$

Nun wird $E = 0$ gesetzt, da nur ein B-Feld vorhanden ist. ← Was passiert mit dem E-Feld eines z.B. Leiters (kreisförmig), welcher ja auch als Magn. Dipol gesehen werden kann?! ?

Übung 9

c)



Aufg. 2

1. **1D** $G_{1D} = \frac{1}{2}\,\theta\left(t - t' - \frac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{c}\right)$

$$\psi_{1D}(\vec{x},t) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x' \int_{\mathbb{R}} dt' \; G(\vec{x}-\vec{x}',\, t-t')\; f(\vec{x},t)$$

$$= \frac{1}{2}\,\theta\left(t - \frac{|\vec{x}|}{c}\right)$$

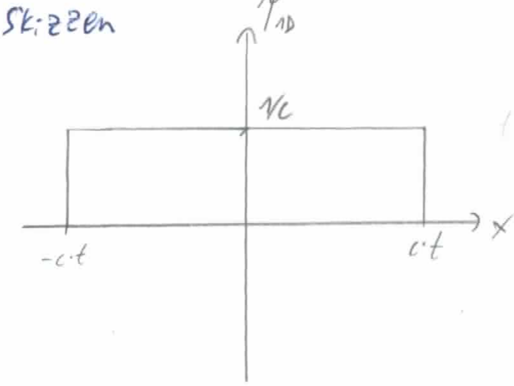
- - - - -

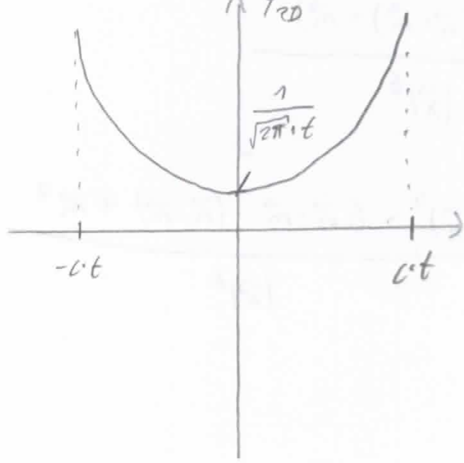
2D

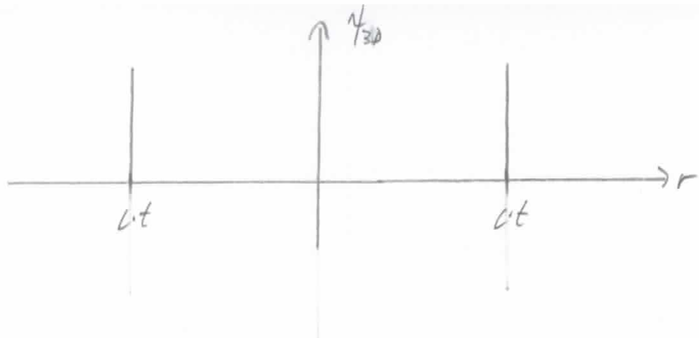
$$G_{2D} = \frac{1}{2\pi}\,\theta\left(t-t' - \frac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{c}\right)\left((t-t')^2 - \frac{|\vec{x}-\vec{x}'|^2}{c^2}\right)^{-1/2}$$

$$\psi_{2D}(\vec{x},t) = \frac{1}{2\pi}\;\theta\left(t - \frac{|\vec{x}|}{c}\right)\cdot\left(t^2 - \frac{|\vec{x}|^2}{c^2}\right)^{-1/2}$$

Skizzen







2. • Obwohl Quelle zeitlich begrenzt ist $\psi \neq 0$ für $\frac{|x|}{c} < t$ (in 1D + 2D, wegen Heavyside Fkt.)

• In 1D: $\psi = \text{const}$ $\left|\frac{x}{c}\right| < t$

In 2D: ψ nimmt mit t ab

In 3D: ψ ist $\frac{1}{|\vec{x}|}$ delta-Fkt.

Aufg. 3

1. $$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi}\left[E_\alpha E_\beta - B_\alpha B_\beta - \frac{1}{2}\left(\vec{E}\cdot\vec{E} + \vec{B}\cdot\vec{B}\right)\delta_{\alpha\beta}\right] = \frac{1}{4\pi}\left(B_\alpha B_\beta - \frac{1}{2}B^2\delta_{\alpha\beta}\right)$$

$$\vec{E} = 0$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c}\left[\frac{3\vec{n}\,(\vec{n}\cdot\vec{m}) - \vec{m}}{|\vec{x}|^3}\right]$$

$$\Rightarrow \quad B_i = \frac{1}{c}\left[\frac{3\,n_i\,(\vec{n}\cdot\vec{m}) - m_i}{|\vec{x}|^3}\right]$$

~~mit $\vec{e}_i = \langle \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}, \hat{e}_i \rangle$ Vektor $\vec{n}$ i-te Komponente~~

$$B^2 = \frac{1}{c^2}\left[\frac{\left(3\vec{n}\,(\vec{n}\cdot\vec{m}) - \vec{m}\right)^2}{|\vec{x}|^6}\right]$$

$$= \frac{1}{c^2}\,\frac{9(\vec{n}\cdot\vec{m})^2 - 6\,\vec{n}\cdot\vec{m}\,(\vec{n}\cdot\vec{m}) + \vec{m}^2}{|\vec{x}|^6}$$

Übung 9

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi c^2 |\vec{x}|^6} \left[\left(3n_\alpha \; (\vec{n} \cdot \vec{m}) - m_\alpha\right) \cdot \left(3n_\beta \; (\vec{n} \cdot \vec{m}) - m_\beta\right) - \frac{1}{2} \left(3(\vec{n} \cdot \vec{m})^2 + \vec{m}^2\right) \delta_{\alpha\beta} \right]$$

2. Auf z-Achse $\Rightarrow$ $n_\alpha = \delta_{\alpha 3}$ also $\vec{x}$ nur in z-Richtung

$$\{T_{\alpha\beta}\} = T = \frac{1}{4\pi c^2 |\vec{x}|^6} \begin{pmatrix} m_1^2 - \left(\frac{1}{2} \; 3m_3^2 + m^2\right) & m_1 m_2 & -2\, m_1 m_3 \\ m_2 m_1 & m_2^2 - \frac{1}{2}\left(3m_3^2 + m^2\right) & -2 m_2 m_3 \\ -2 m_1 m_3 & -2 m_2 m_3 & 4m_3^2 - \frac{1}{2}\left(3m_3^2 + m^2\right) \end{pmatrix}$$

3. $\vec{m} = m\,\vec{e}_1$

$$\Rightarrow T = \frac{m^2}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$