Lorentz-Invarianz des Elektromagnetismus

Nachdem wir in der letzten Vorlesung die Verallgemeinerung der Newtonschen Mechanik zur relativistischen Mechanik mit all ihren Konsequenzen (insbesondere der weltberühmten Erkenntnis der Äquivalenz von Masse und Energie $E = mc^2$), wollen wir uns heute daran begeben, eine relativistische Beschreibung des Elektromagnetismus zu erarbeiten.

Wir erinnern uns, daß dies auch Einsteins Startpunkt für seine Relativitätstheorie gewesen ist in seinem Paper von 1905 unter dem Titel "Zur Elektrodynamik bewegter Körper". Sein dort formuliertes Postulat der konstanten Lichtgeschwindigkeit impliziert, daß die Maxwell-Gleichungen unverändert in allen Inertialsysteme gelten.

Mittlerweile haben wir uns den mathematischen Rahmen erarbeitet dies etwas formaler zu formulieren: Die Maxwell-Gleichungen ändern ihre Form nicht unter Lorentz-Transformation. Diese Forminvarianz bezeichnen wir auch als Kovarianz.

Lorentz-Invarianz der Ladung

Als ersten Schritt hin zu einer relativistischen Formulierung betrachten wir die Lorentz-Invarianz der Ladung. Dazu starten wir von der Kontinuitätsgleichung:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\rho(\vec{r},t) + \vec{\nabla}\cdot\vec{j}(\vec{r},t) = 0}$$

So ausgestattet, können wir nun eine (kontravariante) Viererstromdichte j^α definieren als

$$\boxed{(j^\alpha) = (c\rho, j_x, j_y, j_z)}$$

Die Kontinuitätsgleichung läßt sich dann in folgender Form schreiben

$$\boxed{\partial_\alpha j^\alpha(x) = 0}$$

wobei $\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$

d.h. $(\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3) = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3}\right)$

$= \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$

Beweis: $\partial_\alpha j^\alpha(x) = \sum_{\alpha=0}^{3} \partial_\alpha j^\alpha(x) = \sum_{\alpha=0}^{3} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} j^\alpha(x)$

$$= \frac{\partial}{\partial x^0} j^0(x) + \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} j^\alpha(x)$$

$$= \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} c\rho(\vec{r},t) + \frac{\partial}{\partial x} j^x(\vec{r},t) + \frac{\partial}{\partial y} j^y(\vec{r},t) + \frac{\partial}{\partial z} j^z(\vec{r},t)$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\rho(\vec{r},t) + \vec{\nabla}\cdot\vec{j}(\vec{r},t) = 0 \quad \checkmark$$

Wie wir früher gezeigt haben, folgt die Kontinuitätsgleichung direkt aus den Maxwell-Gleichungen. Da letztere in allen IS gelten sollen, muß also auch die Kontinuitätsgleichung in allen IS gelten:

$$\boxed{\begin{array}{l} K: \ \partial_\alpha j^\alpha(x) = 0 \\ K': \ \partial'_\alpha j'^\alpha(x') = 0 \end{array}}$$

$\longrightarrow$ $\partial_\alpha j^\alpha$ ist $\left\{\begin{array}{l} \text{ein Lorentzskalar} \\ \text{Lorentz-invariant} \end{array}\right.$

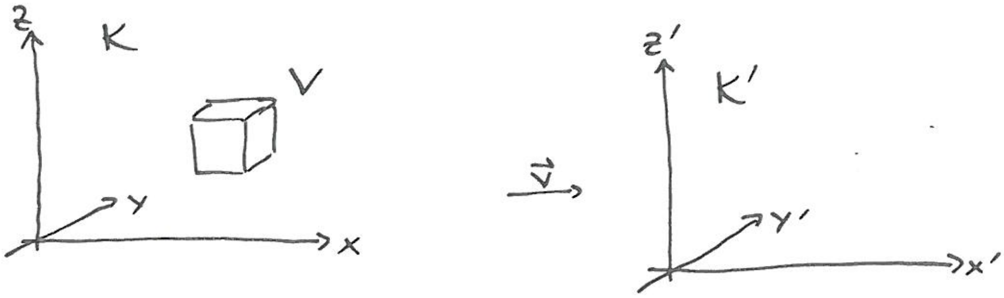
$j^\alpha(x)$ ist ein Lorentz-Vektorfeld (4-Vektorfeld), für das gilt:

$$\boxed{j'^\alpha(x') = \Lambda^\alpha{}_\beta \, j^\beta(x)}$$

Betrachten wir hiezu ein Beispiel:

Sei $(j^\alpha) = (c\rho, 0, 0, 0)$ d.h. nur Ladung, kein Strom

Mit der Ladungsdichte $\rho(\vec{r},t)$ können wir die Ladung in einem Volumen V betrachten, welche wir als q bezeichnen, und das Verhalten unter Lorentz-Transformation betrachten:



Nehmen wir $\rho(\vec{r},t) = \rho = \text{const.}$ an $\rightarrow$ $q = \rho \cdot V$.

Wir wollen nun die Ladung q' berechnen, welche sich in diesem Volumen aus der Sicht des IS K' befindet.

1. Transformation der Viererstromdichte

$$\begin{pmatrix} j'^0 \\ j'^1 \\ j'^2 \\ j'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\frac{v}{c} & 0 & 0 \\ -\gamma\frac{v}{c} & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\rho \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma c\rho \\ -\gamma v\rho \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ Die Ladungsdichte ρ' in K' ist somit:

$$j'^0 = c \cdot \rho' = \gamma c \rho \quad \rightarrow \quad \rho' = \gamma\rho$$

2. Längenkontraktion

$$V' = \frac{V}{\gamma}$$

Damit folgt:

$$q' = \rho' V' = \gamma\rho\frac{V}{\gamma} = \rho V = q$$

$\boxed{\text{Die Ladung ist ein Lorentzskalar.}}$

Außerdem:
$j'^1 = -\gamma v\rho = -v\rho'$
Strom in x-Richtung

Die Lorentz-Invarianz der Ladung bedeutet physikalisch, daß die Ladung eines Teilchens unabhängig von der Bewegung ist – man beachte den Gegensatz zur Masse eines Teilchens. Experimenteller Nachweis: Ladungsneutralität des Wasserstoffatoms.

Die Kontinuitätsgleichung impliziert also, daß die Ladung eines geschlossenen Systems nicht von der Zeit abhängt und nicht von ihrem Bewegungszustand.

Kovariante Maxwell-Gleichungen

Wir stellen nun die kovariante Form der Maxwell-Gleichungen auf. Zunächst für die Potentiale

$$\Box \vec{A}(\vec{r},t) = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}(\vec{r},t)$$
$$\Box \phi(\vec{r},t) = -4\pi\rho(\vec{r},t)$$

mit dem d'Alembert Operator $\Box = \Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t^2}$.

Wir definieren das Viererpotential das 4-Vektorfeld

$$\boxed{(A^\alpha) = (\phi, A_x, A_y, A_z)}.$$

Damit ergeben sich die kovarianten Maxwell-Gleichungen für die Potentiale

$$\boxed{\Box A^\alpha(x) = +\frac{4\pi}{c} j^\alpha(x)}$$

wobei gelte

$$\Box = \partial_\beta \partial^\beta \qquad \text{Lorentz-Skalar}$$

denn $$\partial_\beta \partial^\beta = \sum_{\beta=0}^{3} \partial_\beta \partial^\beta = \sum_{\beta=0}^{3} \frac{\partial}{\partial x^\beta} \frac{\partial}{\partial x_\beta}$$

$$= \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$$

Die Lorenz-Eichung

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \phi(\vec{r},t) + \vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r},t) = 0$$

können wir nun ebenfalls kovariant formulieren als

$$\boxed{\partial_\alpha A^\alpha(x) = 0} \; .$$

denn $$\partial_\alpha A^\alpha = \partial_0 A^0 + \sum_{\alpha=1}^{3} \partial_\alpha A^\alpha = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \phi + \frac{\partial}{\partial x} A_x + \frac{\partial}{\partial y} A_y + \frac{\partial}{\partial z} A$$

$$= \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \phi + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$$

Damit haben wir nun die Maxwell-Gleichungen, Lorenz-Eichung, und Kontinuitätsgleichung als kovariante Gleichungen formuliert, d.h. die Gleichungen sind forminvariant unter Lorentz-Transformation.

Zusammenfassung letzte Vorlesung

- Kovariante Formulierung des Elektromagnetismus
  - Lorentz-Invarianz der Ladung
  - kovariante Kontinuitätsgleichung

$$\partial_\alpha j^\alpha(x) = 0 \qquad \text{mit} \quad (j^\alpha) = (c\rho, \vec{j})$$

  - Kovariante Maxwell-Gleichungen der Potentiale

$$(A^\alpha) = (\phi, \vec{A})$$

$$\Box A^\alpha(x) = \frac{4\pi}{c} j^\alpha(x)$$

  - Lorenz-Eichung

$$\partial_\alpha A^\alpha(x) = 0$$

$$(\partial_\alpha) = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \qquad \text{kovariant}$$

$$(\partial^\alpha) = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial z}\right) \qquad \text{kontravariant}$$

Wir wollen nun die kovariante Form der Maxwell-Gleichungen für die Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ aufstellen. Für letztere gibt es keine relativistische Verallgemeinerung als 4-Vektoren, was sich am Transformationsverhalten der Felder sofort erkennen läßt:

Nehmen wir an, daß sich ein geladenes Teilchen im IS K in Ruhe befinde. Das Teilchen erzeugt damit ein Coulomb-artiges elektrisches Feld. In einem relativ dazu bewegten IS K', ist das geladene Teilchen dagegen in Bewegung und erzeugt somit ein Magnetfeld. Elektrische und magnetische Felder werden beim Wechsel eines Inertialsystems ineinander transformiert.

Wir suchen somit ein relativistisch invariantes Objekt, welches die 6 Komponenten von elektrischem und magnetischen Feld beinhaltet. Ein derartiges Objekt ist der antisymmetrische Feldstärketensor $F^{\alpha\beta}$ mit

$$\boxed{F^{\alpha\beta} = \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha}$$

welches offensichtlich antisymmetrisch ist $F^{\alpha\beta} = - F^{\beta\alpha}$.

Für die Komponenten des Feldstärketensors gilt:

Zeile Spalte

$$\boxed{\left(F^{\alpha\beta}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}}$$

denn:

- für die Diagonalelemente gilt: $F^{\alpha\alpha} = \partial^\alpha A^\alpha - \partial^\alpha A^\alpha = 0$
- Mit $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}$ gilt etwa $E_x = -\frac{\partial}{\partial x}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}A_x$

  und somit

$$F^{01} = \partial^0 A^1 - \partial^1 A^0 = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}A_x - \left(-\frac{\partial}{\partial x}\phi\right) = -E_x \quad \checkmark$$

  F^{02}, F^{03} analog

- Mit $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$ gilt etwa $B_z = \frac{\partial}{\partial x}A_y - \frac{\partial}{\partial y}A_x$

  und somit

$$F^{12} = \partial^1 A^2 - \partial^2 A^1 = -\frac{\partial}{\partial x}A_y - \left(-\frac{\partial}{\partial y}A_x\right) = -B_z \quad \checkmark$$

$$F^{13} = \partial^1 A^3 - \partial^3 A^1 = -\frac{\partial}{\partial x}A_z + \frac{\partial}{\partial z}A_x = B_y \quad \checkmark$$

$$F^{23} = \partial^2 A^3 - \partial^3 A^2 = -\frac{\partial}{\partial y}A_z + \frac{\partial}{\partial z}A_y = -B_x \quad \checkmark$$

Übergang zum <u>kovarianten Feldstärketensor $F_{\alpha\beta}$</u>:

$$F_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\gamma}\eta_{\beta\delta}F^{\gamma\delta} = \sum_{\gamma=0}^{3}\sum_{\delta=0}^{3}\eta_{\alpha\gamma}\eta_{\beta\delta}F^{\gamma\delta}$$

$$= \underbrace{\eta_{\alpha\alpha}\eta_{\beta\beta}}_{\text{ergibt } +1 \text{ oder } -1} F^{\alpha\beta}$$

Vorzeichenwechsel

$$\rightarrow \boxed{(F_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}}$$

Mit dem Feldstärketensor ausgerüstet betrachten wir noch einmal die Maxwell-Gleichungen für die Potentiale

$$\underbrace{\partial_\beta \partial^\beta}_{=\Box} A^\alpha = \frac{4\pi}{c} j^\alpha$$

Fügen wir auf der linken Seite den Term $-\partial_\beta \partial^\alpha A^\beta$ hinzu,

denn $$\partial_\beta \partial^\alpha A^\beta = \partial^\alpha \underbrace{\partial_\beta A^\beta}_{\substack{=0 \\ \text{Lorenz-Eichung}}} = 0$$

so daß

$$\partial_\beta \partial^\beta A^\alpha - \partial_\beta \partial^\alpha A^\beta = \frac{4\pi}{c} j^\alpha$$

$$\leftrightarrow \quad \partial_\beta \underbrace{\left(\partial^\beta A^\alpha - \partial^\alpha A^\beta \right)}_{F^{\beta\alpha}} = \frac{4\pi}{c} j^\alpha$$

Daraus folgen die vier inhomogenen Maxwell-Gleichungen für $F^{\alpha\beta}$

$$\boxed{\partial_\beta F^{\beta\alpha} = \frac{4\pi}{c} j^\alpha}$$

was den Maxwell-Gleichungen in der bekannten Form entspricht.

⌈ denn: $\underline{\alpha = 0}$: $$\partial_\beta F^{\beta 0} = \sum_{\beta=1}^{3} \partial_\beta F^{\beta 0} = \frac{\partial}{\partial x} E_x + \frac{\partial}{\partial y} E_y + \frac{\partial}{\partial z} E_z$$

$$= \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \overset{!}{=} \frac{4\pi}{c} j^0 = 4\pi \rho \quad \checkmark$$

$\underline{\alpha = 1}$: $$\partial_\beta F^{\beta 1} = \underbrace{\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}(-E_x) + \frac{\partial}{\partial y} B_z + \frac{\partial}{\partial z}(-B_y)}_{x\text{-Komponente von } -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{E} + \vec{\nabla} \times \vec{B}} = \frac{4\pi}{c} j^1 = \frac{4\pi}{c} \quad \checkmark$$

$\alpha = 2, 3$ analog.

Um auch die homogenen Maxwell-Gleichungen kovariant zu schreiben, definieren wir schließlich noch den <u>dualen Feldstärketensor</u> $\tilde{F}$ als

$$\boxed{\tilde{F}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\gamma\delta}}$$

wobei: $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ der sogenannte Levi-Civita-Tensor oder der "total antisymmetrische Pseudotensor" ist

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = \begin{cases} +1 & \text{falls } (\alpha,\beta,\gamma,\delta) \text{ \underline{gerade} Permutation von } (0,1, \\ -1 & \text{falls } (\alpha,\beta,\gamma,\delta) \text{ \underline{ungerade} Permutation von } (0,1,2,3) \\ 0 & \end{cases}$$

Beispiel: $$\tilde{F}^{01} = \frac{1}{2}\varepsilon^{01\gamma\delta}F_{\gamma\delta} = \frac{1}{2}\Big(\underbrace{\varepsilon^{0123}}_{=1} \underset{\substack{\downarrow \\ -B_x}}{F_{23}} + \underbrace{\varepsilon^{0132}}_{=-1} \underset{\substack{\downarrow \\ B_x}}{F_{32}}\Big) = -B_x$$

Insgesamt:

$$\boxed{\left(\tilde{F}^{\alpha\beta}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & E_z & -E_y \\ B_y & -E_z & 0 & E_x \\ B_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix}}$$

Damit lassen sich die homogenen Maxwell-Gleichungen darstellen als

$$\boxed{\partial_\beta \tilde{F}^{\beta\alpha} = 0} \qquad \begin{cases} \alpha = 0: & \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \\ \alpha = i = 1,2,3: & \vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} = 0 \end{cases}$$

Damit lauten die kovarianten Maxwell-Gleichungen für die elektromagnetischen Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ ausgedrückt durch die Feldstärketensoren $F^{\alpha\beta}$:

$$\boxed{\partial_\beta F^{\beta\alpha} = \frac{4\pi}{c} j^\alpha \qquad \text{und} \qquad \partial_\beta \tilde{F}^{\beta\alpha} = 0}$$

Gegenüber unserer ursprünglichen Formulierung der Maxwell-Gleichungen für die Felder gewinnen wir :

- eine einfachere / kompaktere Form
- eine Struktur, welche die Kovarianz gegenüber Lorentz-Transformationen widerspiegelt.

Beweis der Kovarianz:

- (∂^α) ist ein Lorentzvektor, d.h. $\partial'^\beta = \Lambda^\beta{}_\alpha \partial^\alpha$

  $\rightarrow$ $\Box = \partial_\alpha \partial^\alpha$ ist ein Lorentzskalar

- $\partial_\alpha j^\alpha = 0$ (Kontinuitätsgleichung) gilt in jedem IS

  $\rightarrow$ $\partial_\alpha j^\alpha$ ist ein Lorentzskalar

  $\rightarrow$ (j^α) ist ein Lorentzvektor.

- $\underbrace{\Box A^\alpha}_{} = \frac{4\pi}{c} j^\alpha$

  $\rightarrow$ Lorentzvektor (wie rechte Seite) $\rightarrow$ (A^α) ist ein Lorentzvektor.

- $F^{\alpha\beta} = \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha$

$\rightarrow$ $(F^{\alpha\beta})$ ist ein Lorentztensor zweiter Stufe, d.h.

$$F'^{\alpha\beta} = \Lambda^\alpha_{\ \gamma} \Lambda^\beta_{\ \delta} F^{\gamma\delta} \qquad F' = \Lambda^T F \Lambda$$

Um die Kovarianz zu zeigen, nehmen wir also an, daß in einem IS gilt:

$$\partial_\beta F^{\beta\alpha} = \frac{4\pi}{c} j^\alpha$$

Nun gilt es, zu zeigen, daß in einem IS' dann auch gilt:

$$\partial'_\beta F'^{\beta\alpha} = \frac{4\pi}{c} j'^\alpha$$

Denn:

$$\partial_\beta F^{\beta\alpha} = \frac{4\pi}{c} j^\alpha \quad \Big| \cdot \Lambda^\gamma_{\ \alpha}$$

$$\rightarrow \quad \partial_\beta \Lambda^\gamma_{\ \alpha} F^{\beta\alpha} = \frac{4\pi}{c} \underbrace{\Lambda^\gamma_{\ \alpha} j^\alpha}_{= j'^\gamma}$$

da (j^α) Lorentzvektor

Weiterhin $\partial_\beta = \eta_{\beta\delta} \partial^\delta$ (kovariante Komponente)

Mit $\eta = \Lambda^T \eta \Lambda$ können wir schreiben

$$\eta_{\beta\delta} = \eta_{\xi\nu} \Lambda^\xi_{\ \beta} \Lambda^\nu_{\ \delta}$$

$$\rightarrow \quad \partial^\delta \eta_{\xi\nu} \Lambda^\xi_{\ \beta} \Lambda^\nu_{\ \delta} \Lambda^\gamma_{\ \alpha} F^{\beta\alpha} = \frac{4\pi}{c} j'^\gamma$$

$$\rightarrow \quad \underbrace{\partial^\delta \eta_{\xi\nu} \Lambda^\nu{}_\delta}_{} \; \underbrace{\Lambda^\xi{}_\beta \Lambda^\gamma{}_\alpha F^{\beta\alpha}}_{F'^{\xi\gamma}} = \frac{4\pi}{c} j'^\gamma$$

da $(F^{\beta\alpha})$ Lorentztensor

$$\eta_{\xi\nu} \underline{\Lambda^\nu{}_\delta \partial^\delta} = \eta_{\xi\nu} \partial'^\nu$$ da (∂^δ) Lorentzvektor

$$= \partial'_\xi$$

$$\rightarrow \quad \boxed{\partial'_\xi F'^{\xi\gamma} = \frac{4\pi}{c} j'^\gamma}$$

Die Maxwell-Gleichungen des Feldes sind kovariant.
Damit existieren in allen IS' Lösungen der Maxwell-Gleichungen, die sich mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten.

Zusammenfassung: Transformation des el.-mag. Feldes

IS K: $\rho, \vec{J}$ gegeben $\longrightarrow$ $\vec{E}, \vec{B}$ aus Lösung der Maxwell-Gleichungen in K.

$$\downarrow \; j' = \Lambda j \qquad\qquad\qquad \downarrow \; F' = \Lambda F \Lambda^T$$

IS K': $\rho', \vec{J}'$ bestimmt $\qquad$ $\vec{E}', \vec{B}'$ sind Lösungen der Maxwell-Gleichungen in K' für $\rho', \vec{J}'$.

Die Transformation des Feldstärketensors ergibt explizit:

$$\left(F'^{\alpha\beta}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -E_x' & -E_y' & -E_z' \\ E_x' & 0 & -B_z' & +B_y' \\ E_y' & B_z' & 0 & -B_x' \\ E_z' & -B_y' & B_x & 0 \end{pmatrix} = \Lambda F \Lambda^T$$

welches ausgeschrieben für die Felder ergibt:

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{E}_\parallel' &= \vec{E}_\parallel \quad , \quad & \vec{E}_\perp' &= \gamma\left(\vec{E}_\perp + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}\right) \\ \vec{B}_\parallel' &= \vec{B}_\parallel \quad , \quad & \vec{B}_\perp' &= \gamma\left(\vec{B}_\perp - \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{E}\right) \end{aligned}}$$