Ausgeschrieben:

$$\eta_{\gamma\delta} = \sum_{\alpha=0}^{3}\sum_{\beta=0}^{3} \underbrace{\Lambda^{\alpha}{}_{\gamma}}_{=(\Lambda^T)^{\gamma}{}_{\alpha}} \eta_{\alpha\beta} \Lambda^{\beta}{}_{\delta} = \underbrace{\left(\Lambda^T \eta \Lambda\right)}_{\text{Matrixprodukt}}{}_{\gamma\delta}$$

transponierte Matrix

$$\longrightarrow \quad \Lambda^T \eta \Lambda = \eta$$

Dies entspricht der Bedingung $\alpha^T \alpha = 1$ bei orthogonalen Transformation

Spezielle Lorentztransformation

Für Drehungen und räumliche oder zeitliche Verschiebungen ergeben sich keine Unterschiede zwischen Galilei- und Lorentz-Transformation. Das Relativitätsprinzip von Galilei und Einstein implizieren gleichermaßen die Isotropie und Homogenität des Raumes und der Zeit. Wir beschränken uns daher im folgenden auf die Relativbewegung zwischen zwei Inertialsystemen:

wobei wir nur eine Relativbewegung in x-Richtung betrachten wollen, d.h. $y = y'$ und $z = z'$.

Überdies sollen sich die beiden Inertialsysteme zum Zeitpunkt $t=0$ überdecken, also

$$K: \ (ct, x, y, z) = (0,0,0,0)$$

$$K': \ (ct', x', y', z') = (0,0,0,0)$$

Zunächst einmal folgt aus dieser Konstruktion, daß die Lorentz-Transformation homogen ist, denn:

$$x'^{\alpha} = \Lambda^{\alpha}{}_{\beta}\, x^{\beta} + b^{\alpha}$$

$$\leftrightarrow \quad 0 = 0 + b^{\alpha} \qquad \Rightarrow \quad b^{\alpha} = 0$$

Weil überdies gilt $x'^2 = x^2$ und $x'^3 = x^3$, folgt unmittelbar

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda^0{}_0 & \Lambda^0{}_1 & 0 & 0 \\ \Lambda^1{}_0 & \Lambda^1{}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

Aufgrund dessen, daß die x-Koordinate des Ursprungs von K' im Inertialsystem K die Koordinate v·t besitzt, muß gelten

$$\begin{pmatrix} x'^0 = ct' \\ x'^1 = 0 \end{pmatrix} \overset{LT}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} x^0 = ct \\ x^1 = vt \end{pmatrix}$$

Für diese Folge von Ereignissen gilt also:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda^0{}_0 & \Lambda^0{}_1 \\ \Lambda^1{}_0 & \Lambda^1{}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ vt \end{pmatrix} \qquad (**)$$

Die Matrixelemente wollen wir nun bestimmen. Zunächst gilt, daß diese nicht unabhängig sind, denn es gilt:

$$\Lambda^{\alpha}{}_{\gamma}\, \Lambda^{\beta}{}_{\delta}\, \eta_{\alpha\beta} = \eta_{\gamma\delta} \qquad \text{bzw.} \quad \Lambda^T \eta \Lambda = \eta$$

welches sich im relevanten Unterraum schreiben läßt als:

$$\begin{pmatrix} \Lambda^0{}_0 & \Lambda^1{}_0 \\ \Lambda^0{}_1 & \Lambda^1{}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda^0{}_0 & \Lambda^0{}_1 \\ \Lambda^1{}_0 & \Lambda^1{}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ausmultiplizieren ergibt:

$$\begin{pmatrix} (\Lambda^0{}_0)^2 - (\Lambda^1{}_0)^2 & \Lambda^0{}_0 \Lambda^0{}_1 - \Lambda^1{}_0 \Lambda^1{}_1 \\ \Lambda^0{}_1 \Lambda^0{}_0 - \Lambda^1{}_1 \Lambda^1{}_0 & (\Lambda^0{}_1)^2 - (\Lambda^1{}_1)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Dies ergibt insgesamt 3 unabhängige Bedingungen.

Behauptung: Diese Bedingungen lassen sich erfüllen durch:

$$\begin{pmatrix} \Lambda^0{}_0 & \Lambda^0{}_1 \\ \Lambda^1{}_0 & \Lambda^1{}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\psi & -\sinh\psi \\ -\sinh\psi & \cosh\psi \end{pmatrix}$$

Beweis:

$$\left.\begin{aligned} \cosh\psi &= \tfrac{1}{2}\left(e^{\psi} + e^{-\psi}\right) \\ \sinh\psi &= \tfrac{1}{2}\left(e^{\psi} - e^{-\psi}\right) \end{aligned}\right\} \text{ es gilt: } \cosh^2\psi - \sinh^2\psi = 1$$

Für die 3 Bedingungen oben gilt:

1) $(\Lambda^0{}_0)^2 - (\Lambda^1{}_0)^2 = \cosh^2\psi - \sinh^2\psi = 1$ ✓

2) $(\Lambda^0{}_1)^2 - (\Lambda^1{}_1)^2 = \sinh^2\psi - \cosh^2\psi = -1$ ✓

3) $\Lambda^0{}_0 \Lambda^0{}_1 - \Lambda^1{}_0 \Lambda^1{}_1 = \cosh\psi(-\sinh\psi) - (-\sinh\psi)\cosh\psi =$

Eingesetzt in (**) ergibt dann:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\psi & -\sinh\psi \\ -\sinh\psi & \cosh\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ vt \end{pmatrix}$$

→ 2 Gleichungen:

$$\text{I} \quad ct' = ct \cdot \cosh\psi - vt \cdot \sinh\psi$$

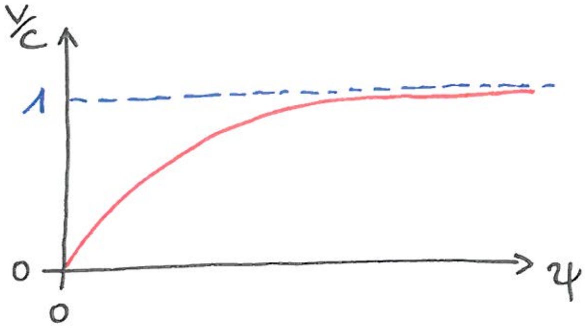
$$\text{II} \quad 0 = -ct \cdot \sinh\psi + vt \cdot \cosh\psi$$

Aus Gleichung II folgt unmittelbar:

$$ct \cdot \sinh\psi = vt \cdot \cosh\psi$$

$$\rightarrow \quad \frac{\sinh\psi}{\cosh\psi} = \tanh\psi = \frac{v}{c} \qquad \boxed{\psi = \operatorname{arctanh}\frac{v}{c}}$$

Rapidität



Daraus ergibt sich die unmittelbare Einschränkung $v/c < 1$, denn:

$$\boxed{\frac{v}{c} = \frac{e^{\psi} - e^{-\psi}}{e^{\psi} + e^{-\psi}} < 1}$$

Die spezielle Lorentz-Transformation für beliebige Ereignisse (ct, x, y, z) erhält damit die Form

$$\boxed{\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\psi & -\sinh\psi \\ -\sinh\psi & \cosh\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \qquad y' = y \qquad z' = z}$$

mit $\psi = \operatorname{arctanh}\frac{v}{c}$

Definition: $$\gamma = \cosh\psi = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Beweis: $$\frac{v}{c} = \frac{\sinh\psi}{\cosh\psi} \Rightarrow 1 - \frac{v^2}{c^2} = 1 - \frac{\sinh^2\psi}{\cosh^2\psi}$$
$$= \frac{1}{\cosh^2\psi}\underbrace{\left(\cosh^2\psi - \sinh^2\psi\right)}_{=1} = \frac{1}{\gamma^2}$$

Außerdem: $$\frac{v}{c} = \frac{\sinh\psi}{\gamma} \Rightarrow \sinh\psi = \gamma \cdot \frac{v}{c}$$

Damit gelangen wir schließlich zu dem Ergebnis, daß die spezielle Lorentz-Transformation die folgende Form annimmt:

$$\boxed{\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma \frac{v}{c} \\ -\gamma \frac{v}{c} & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \qquad y' = y \qquad z' = z}$$

Ausgeschrieben:

$$ct' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left(ct - x \cdot \frac{v}{c}\right)$$

$$x' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left(x - vt\right)$$

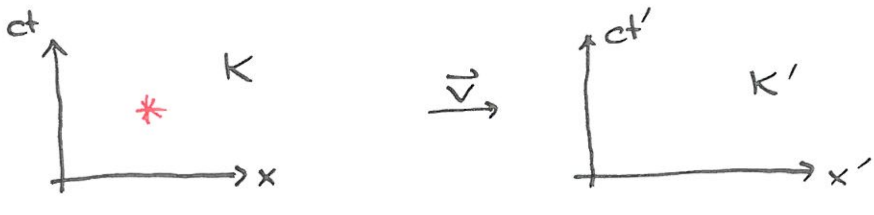
$$y' = y$$
$$z' = z$$

Limes $\frac{v}{c} \ll 1 \qquad \gamma \to 1$

$$\left.\begin{aligned} ct' &= ct \\ x' &= x - vt \end{aligned}\right\} \text{Galilei-Transform}$$

Kurze Zusammenfassung des bisher erreichten

Betrachte ein Ereignis (ct, x, y, z) im Inertialsystem K



Die spezielle Lorentz-Transformation $x'^{\alpha} = \Lambda^{\alpha}_{\ \beta} x^{\beta}$ ergibt die Koordinaten dieses Ereignisses im bewegten Inertialsystem $K': (ct', x', y', z')$

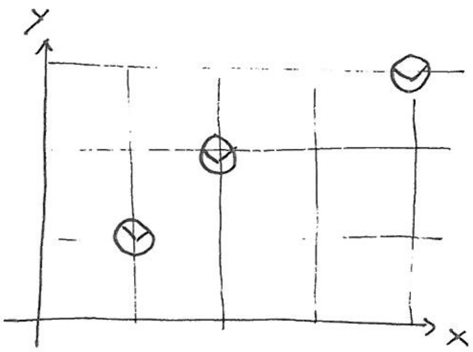
Im folgenden wollen wir nun die Verknüpfung verschiedener Ereignisse in K und K' untersuchen. z.B.:
- Form von Objekten → Längenkontraktion
- bewegte Uhren → Zeitdilatation

Längen- und Zeitmessung

Ausgestattet mit der Lorentz-Transformation, welche ein Ereigniss (ct, x, y, z) im Inertialsystem K mit dem entsprechende Ereignis (ct', x', y', z') im bewegten Inertialsystem K' verbindet, wollen wir uns im folgenden die Verknüpfung verschiedener Ereignisse in K und K' anschauen,

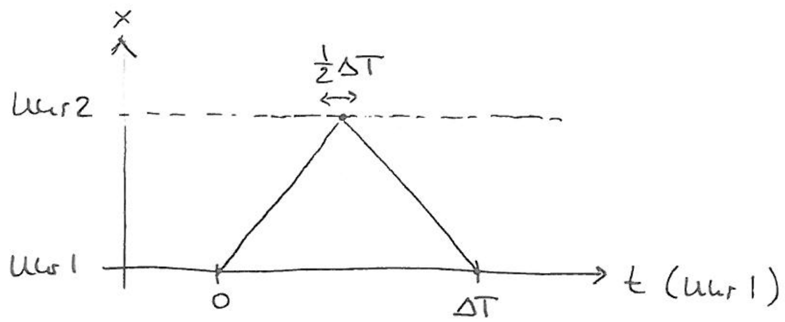
z. B.
- Bahnkurve → Folge von Ereignissen
- Form von Objekten, z. B. ▭ → Längenkontraktion
- bewegte Uhren → Zeitdilatation

Um dies zu tun, wollen wir als erstes ein Koordinatennetz für ein Inertialsystem K definieren

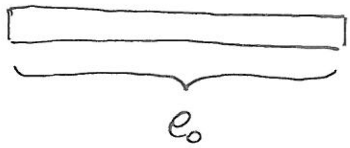


- realisiert durch ruhende, geeichte Längenmaßstäbe
- außerdem: ruhende, gleichartige Uhren, die alle dieselbe K-Zeit des Inertialsystems anzeigen.

⇒ Synchronisation der Uhren → etwa durch den Austausch von Signalen



Längenkontraktion – bewegter Maßstab

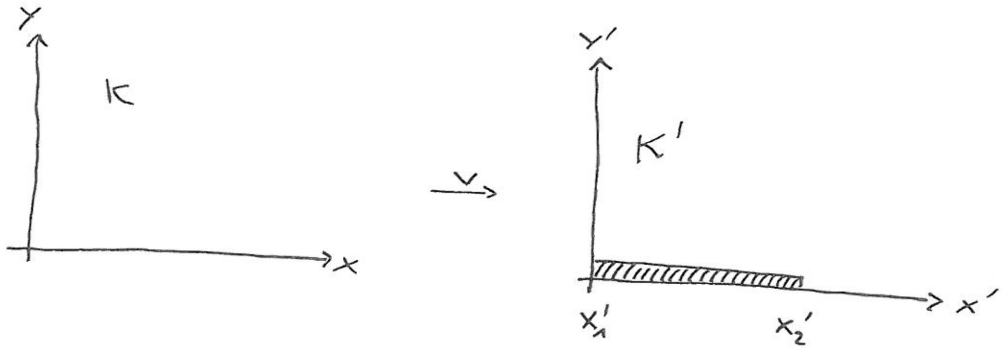


Stab ruht in einem Inertialsystem K'

Messung der Länge in K' ergibt die Eigenlänge.

(Die Eigenlänge ist unabhängig vom Inertialsystem → Lorentzskalar)

Betrachte jetzt eine Situation, in welcher sich K' relativ zum Inertialsystem K mit Geschwindigkeit v bewegt:



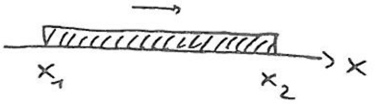
↳ $l_0 = x_2' - x_1'$

Wir wollen nun die Länge des Stabs im Inertialsystem K messen

→ verlangt eine genaue Meßvorschrift!

Hier: Markiere zur K-Zeit $t=0$ die Position von Stabanfang und Stabende auf der x-Achse → 2 Ereignisse!

$K: t=0$



Ereignis 1: $x_1 = 0\,, \quad t_1 = 0$

$x_1' = 0\,, \quad t_1' = 0$ ← K und K' fallen zur Zeit $t_1 = t_1' = 0$ zusammen

Ereignis 2: $x_2\,, \quad t_2 = 0$

$x_2' = l_0\,, \quad t_2'$

Für beide Ereignisse gilt, daß sie durch die spezielle Lorentz-Transformation miteinander verbunden sind. Allgemein

$$ct' = \gamma\left(ct - x\frac{v}{c}\right)$$
$$x' = \gamma\left(x - vt\right)$$

Diese Transformation ist für Ereignis 1 trivial gegeben.

Für Ereignis 2 gilt:

$$ct_2' = \gamma\left(ct_2 - x_2\frac{v}{c}\right) \overset{t_2=0}{=} -\gamma\frac{v}{c}x_2$$
$$x_2' = \gamma\left(x_2 - vt_2\right) = \gamma x_2 = \ell_0$$

$\Rightarrow$ Länge des Stabs im Inertialsystem K: $\ell = x_2 - x_1 \overset{x_1=0}{=} x_2 = \frac{1}{\gamma}\ell_0$

Damit erhalten wir die sogenannte <u>Längenkontraktion</u>

$$\boxed{\ell = \ell_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad \text{mit } 0 \le \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \le 1$$

Für t_2' folgt damit: $ct_2' = -\gamma\frac{v}{c}\cdot\frac{1}{\gamma}\ell_0 = -\frac{v}{c}\cdot\ell_0 \le 0$!

d.h. Ereignis 1 und 2 sind gleichzeitig in K, aber <u>nicht</u> gleichzeitig in K'.

<u>Achtung</u>: Die Längenkontraktion ist eine Aussage, die sich auf eine bestimmte Meßvorschrift bezieht!

Zusammenfassung letzte Vorlesung

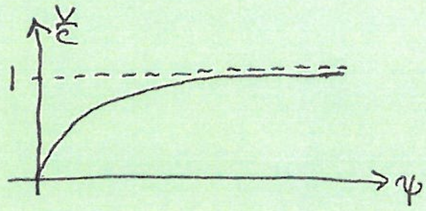
- Spezielle Lorentz-Transformation für Boost entlang x-Achse

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\psi & -\sinh\psi \\ -\sinh\psi & \cosh\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \qquad y' = y \quad z' = z$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma \frac{v}{c} \\ -\gamma\frac{v}{c} & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$$

wobei $\psi = \operatorname{arctanh} \frac{v}{c}$ die sogenannte Rapidität ist

und $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$



- Längenkontraktion

Ereignis 1: $x_1 = 0 \quad t_1 = 0$

$x_1' = 0 \quad t_1' = 0$

Ereignis 2: $x_2 \quad t_2 = 0$

$x_2' = l_0 \quad t_2'$

Lorentz-Transformation

$$ct_2' = -\gamma \frac{v}{c} x_2$$

$$x_2' = \gamma x_2 = l_0$$

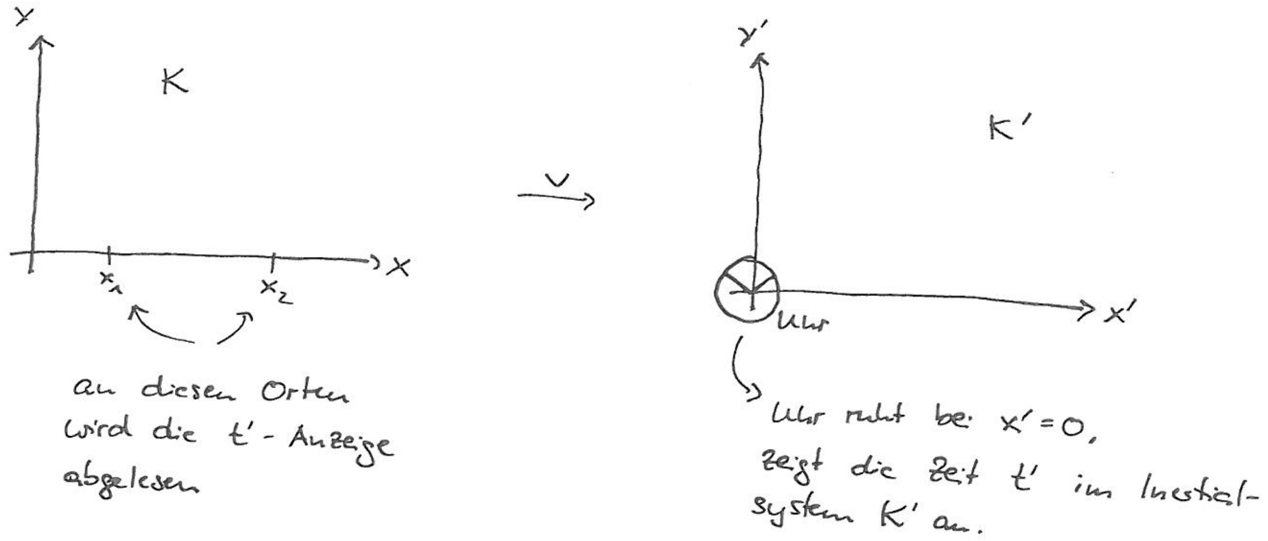
$$x_2 = \frac{1}{\gamma} l_0 = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, l_0$$

$$ct_2' = -\gamma \frac{v}{c} \frac{1}{\gamma} l_0 = -\frac{v}{c} l_0$$

Ereignis 1 und 2 sind <u>nicht</u> gleichzeitig in K'.

Zeitdilatation – bewegte Uhr

Betrachte den Gang einer in K' ruhenden Uhr vom Inertialsystem aus



Definieren wir wieder zwei Ereignisse:

Ereignis 1: K'-Uhr passiert Beobachter in K bei $x_1 = 0$ zur Zeit $t_1 = 0$

Koordinaten: $x_1 = 0 \ , \ t_1 = 0$

$x_1' = 0 \ , \ t_1' = 0$

Ereignis 2: K'-Uhr passiert Beobachter in K bei $x_2 = vt_2$ zur Zeit t_2

Koordinaten: $x_2 = vt_2 \ , \ t_2$

$x_2' = 0 \ , \ t_2'$

Spezielle Lorentz-Transformation für Ereignis 2:

$$ct_2' = \gamma \left(ct_2 - x_2 \frac{v}{c} \right)$$

$$= \gamma \left(ct_2 - \frac{v^2}{c} t_2 \right)$$

$$\Rightarrow \quad t_2' = t_2 \gamma \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = t_2 \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Beim Ereignis 2 zeigt die bewegte Uhr: $t_0 = t_2' - t_1' = t_2'$

$= K'$ - Zeitintervall zwischen E_1 und E_2

Wohingegen eine K-Uhr bei x_2 die Zeit $t = t_2 - t_1 = t_2$

$= K$ - Zeitintervall zwischen E_1 und E_2

anzeigt.

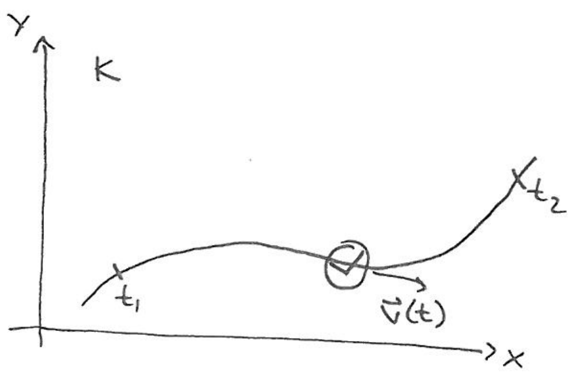
$\Rightarrow$ Zeitdilatation $\boxed{t = t_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}$ d.h. $t > t_0$ für $v \neq 0$

Die <u>bewegte Uhr geht nach</u> im Vergleich zu den K-Uhren.

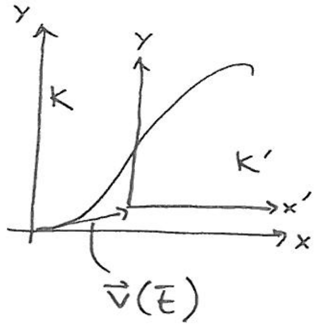
<u>Achtung:</u> Die verkürzte Aussage „eine bewegte Uhr geht langsamer" ist problematisch!

<u>Eigenzeit</u>

Betrachten wir jetzt eine Situation, in welcher sich eine Uhr relativ zum Inertialsystem K mit einer <u>zeitabhängigen</u> Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$ bewege:



Für $t = \bar{t}$ führe ein Inertialsystem K' ein, das sich mit einer <u>konstanten</u> Geschwindigkeit $\vec{v}(\bar{t})$ relativ zu K bewegt



Zunächst wissen wir nun um die Zeitdilatation für Bewegung in beliebige Richtung:

$$t = \frac{t'}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}(\bar{t})^2}{c^2}}}$$

Für ein Zeitintervall der K'-Uhr gilt entsprechend

$$dt' = dt \sqrt{1 - \frac{\vec{v}(\bar{t})^2}{c^2}}$$

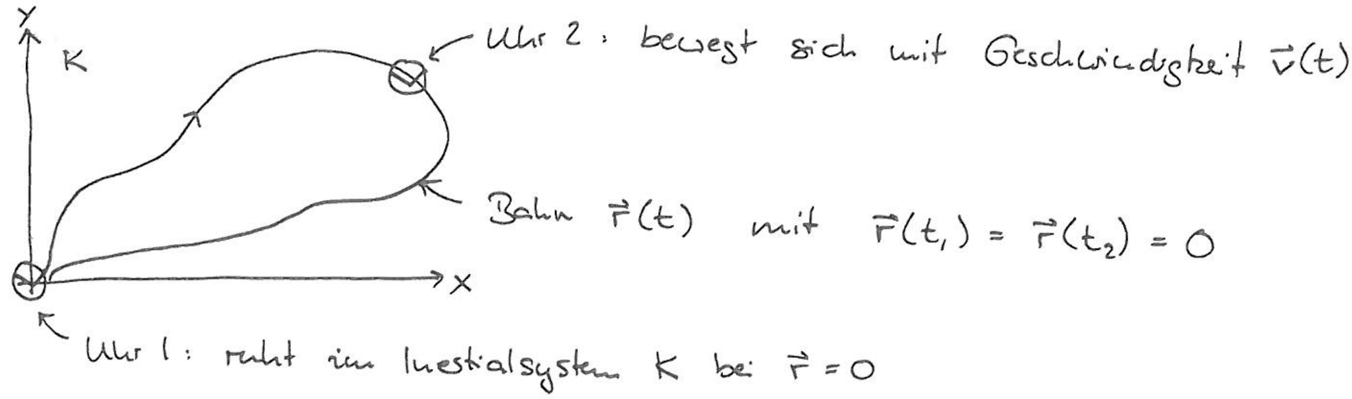
$= d\tau$ Zeitintervall auf der bewegten Uhr

Das gesamte Zeitintervall

$$\boxed{\tau = \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{1 - \frac{\vec{v}(t)^2}{c^2}}}$$

heißt <u>Eigenzeit</u> und ist eine vom Inertialsystem unabhängige Größe!

- Für $\vec{v}(t) = 0$ gilt: $\tau = t_2 - t_1$
- Für $\vec{v}(t) \neq 0$ gilt: $\sqrt{1 - \frac{\vec{v}(t)^2}{c^2}} < 1 \rightarrow \tau < t_2 - t_1$



Anzeige der beiden Uhren zur K-Zeit t_2: Uhr 1 $\rightarrow t_2$

Uhr 2 $\rightarrow t_1 + \tau < t_2$

Gleichzeitigkeit

Wir wollen uns nun abschließend die Frage stellen, inwieweit die zeitliche Reihenfolge von Ereignissen willkürlich ist.

Betrachte zwei Ereignisse:

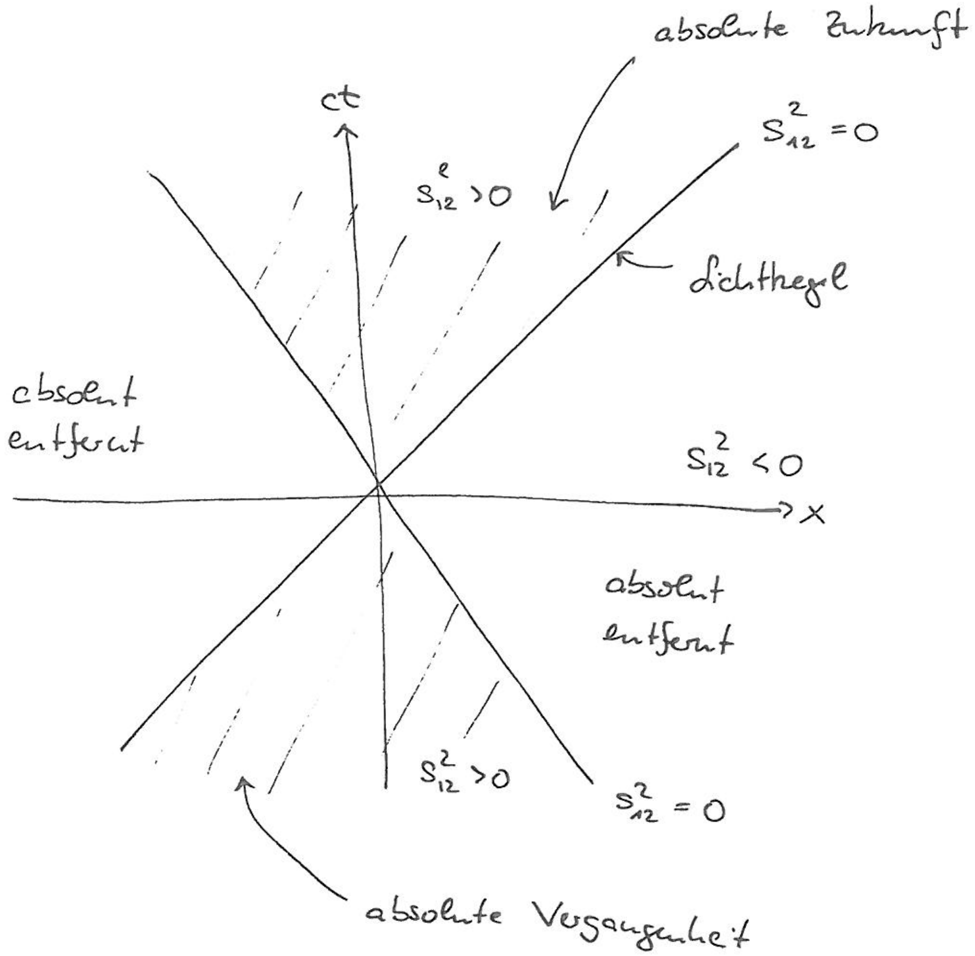
Ereignis 1: $\begin{cases} x_1 = 0, & t_1 = 0 \\ x_1' = 0, & t_1' = 0 \end{cases}$ Ereignis 2: $\begin{cases} x_2 = x, & t_2 = t \\ x_2' = x', & t_2' = t' \end{cases}$

Der Abstand der beiden Ereignisse berechnet sich zu:

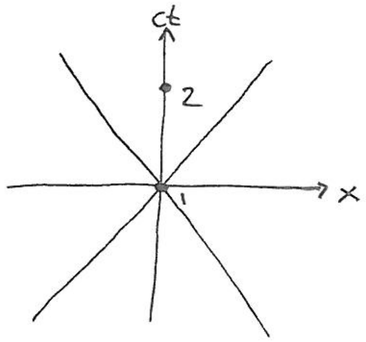
$$s_{12}^2 = c^2 t^2 - x^2 \stackrel{!}{=} c^2 t'^2 - x'^2 \begin{cases} = 0 & \text{lichtartig} \\ < 0 & \text{raumartig} \\ > 0 & \text{zeitartig} \end{cases}$$

Diese Klassifizierung ist unabhängig vom Inertialsystem.

Darstellung in K:



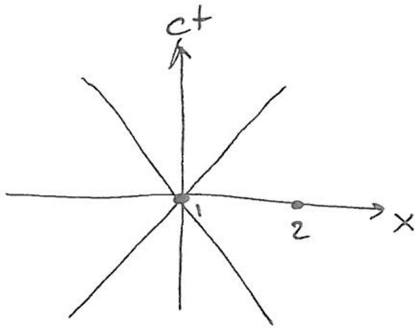
Beispiele: $x_2 = 0$, $t_2 = t$



$\rightarrow \; s_{12}^2 = c^2 t^2 > 0 \;\rightarrow$ zeitartig

- E_2 auf jeden Fall nach E_1
- die beiden Ereignisse können kausal zusammenhängen.

$x_2 = x$, $t_2 = 0$



$\rightarrow \; s_{12}^2 = -x^2 < 0 \;\rightarrow$ raumartig

- zeitliche Abfolge abhängig vom Inertialsystem
- die beiden Ereignisse können nicht kausal zusammenhängen

Relativistische Mechanik

Nachdem wir nun schon die ersten Erkenntnisse zu Einsteins Relativitätsprinzip gewonnen haben, wollen wir uns nun daran machen, die Newtonsche Mechanik (wie angekündigt) an diesen Relativitätsbegriff zu adaptieren.

Wir starten dazu vom 2. Newtonschen Axiom

$$\boxed{m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_N}$$ Newton

welches wir nun relativistisch verallgemeinern zu

$$\boxed{m \frac{du^\alpha}{d\tau} = F^\alpha}$$ relativistische Bewegungsgleichung

wobei: m : Ruhemasse (Lorentz-Skalar)

$$d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{\vec{v}(t)^2}{c^2}} = \frac{1}{\gamma} dt$$ mit τ Eigenzeit

und

(u^α) : 4-Geschwindigkeit definiert als $u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau}$

also $$(u^\alpha) = \gamma\left(\frac{dx^0}{dt}, \frac{dx^1}{dt}, \frac{dx^2}{dt}, \frac{dx^3}{dt}\right)$$
$$= \gamma(c, v^1, v^2, v^3)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}(c, \vec{v})$$

Damit haben wir zunächst die linke Seite der Newtonschen Gleichung durch 4-Vektoren dargestellt.

Wir können sogar noch einen Schritt weitergehen und einen 4-Impuls einführen

$$(p^\alpha) = (m u^\alpha) = \left(\frac{mc}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} , \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right)$$

Jede Komponente dieses 4-Impuls hat Dimension "Energie/Geschwindigkei[t]" was uns dazu führt, die Ø. Komponente dieses 4-Impuls mit eines charakteristischen Energie E zu identifizieren:

$$(p^\alpha) = \left(\frac{E}{c} , \vec{p} \right) \qquad E = \gamma \cdot mc^2$$

Die Bewegungsgleichungen lauten dann

$$\frac{dp^\alpha}{d\tau} = F^\alpha$$

Jetzt bleibt der 4-Vektor der Kraft auf der rechten Seite zu bestimmen. Dazu wollen wir uns den Fall eines Teilchens mit Ladung q anschauen, auf welches eine Lorentz-Kraft wirkt. Für die raumartigen Komponenten nehmen wir also die uns wohl vertraute Form der Lorentz-Kraft an

$$\frac{d}{dt} \vec{P} = \underbrace{q \left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right)}_{\vec{F}_L}$$

Diese Gleichung wollen wir nun zunächst in die obige Form ausgedrückt durch die Eigenzeit τ bringen.

Mit $\frac{d}{dt} = \frac{1}{\gamma} \frac{d}{d\tau}$ schreiben wir

$$\frac{d}{d\tau} \vec{p} = \vec{f} \qquad \text{mit } \vec{f} = q \cdot \gamma \left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right)$$

Nun müssen wir schließlich die $\emptyset$. Komponente, f^0, der Kraft bestimmen. Betrachten wir hierzu die $\emptyset$. Komponente auf der linken Seite der Newtonschen Gleichungen noch einmal

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{E}{c} \right) = \frac{\gamma}{c} \cdot \frac{d}{dt} E = \frac{\gamma}{c} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \text{Rate, mit welcher die Energie} \\ \text{des Teilchens sich ändert} \end{array} \right.$$

Wir haben zuvor gesehen, daß sich die potentielle Energie eines geladenen Teilchens im elektrostatischen Fall ändert wie

$$\frac{d}{dt} U = - \vec{F}_L \cdot \vec{v} = - q \vec{E} \cdot \vec{v} = q \cdot \frac{d}{dt} \emptyset(\vec{r}, t)$$

Diese Energie wird in kinetische Energie verwandelt, so daß $- q \cdot \frac{d}{dt} \emptyset(\vec{r}, t)$ die oben gesuchte Rate ist, mit welcher sich die Energie des Teilchens ändert.

Damit identifizieren wir die $\emptyset$. Komponente der Kraft mit

$$f^0 = - \frac{\gamma}{c} q \cdot \frac{d}{dt} \emptyset(\vec{r}, t)$$

Für die 0. Komponente der Bewegungsgleichung gilt damit

$$m \frac{du^0}{d\tau} = -\frac{\gamma}{c} q \cdot \frac{d}{dt} \phi(\vec{r},t)$$

bzw.

$$m \cdot \cancel{\gamma} \cdot \frac{d}{dt} \frac{c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = -\frac{\cancel{\gamma}}{c} q \cdot \frac{d}{dt} \phi(\vec{r},t)$$

$$\frac{d}{dt} \underbrace{\left[\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + q\,\phi(\vec{r},t) \right]}_{= \text{const.} \rightarrow \text{Erhaltungsgröße}} = 0$$

d.h. $\gamma \cdot mc^2 + q\phi(\vec{r}) = \text{const.}$

oder

$$\boxed{\underbrace{mc^2}_{\text{Ruheenergie}} + \underbrace{mc^2(\gamma-1)}_{\text{kinetische Energie}} + \underbrace{q\,\phi(\vec{r})}_{\text{potentielle Energie}} = \text{const.}}$$