Zusammenfassung letzte Vorlesung

- Erhaltungssätze der Elektrodynamik

- Ein el.-mag. Feld trägt Energie, el.-mag. Feldenergiedichte

$$w = \frac{1}{8\pi}\left(\vec{E}\cdot\vec{D} + \vec{B}\cdot\vec{H}\right)$$

- Energiestromdichte, Poynting Vektorfeld

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\,\vec{E}\times\vec{H}$$

- Verbunden über Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} w + \vec{\nabla}\vec{S} = \underbrace{-\vec{J}\,\vec{E}}_{\text{Konversion in mechanische Energie}}$$

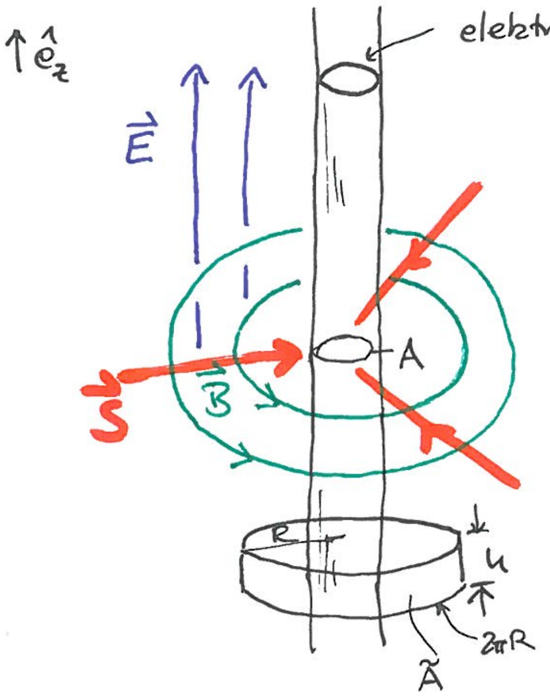
- Ganz allgemein haben wir erkannt, daß Gleichungen der Art

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\text{scalar function \#1}\right) + \vec{\nabla}\cdot\left(\text{Vektorfeld}\right) = \text{scalar function \#2}$$

Kontinuitätsgleichungen darstellen.

Das Vektorfeld stellt dabei den Strom bezüglich Funktion #1 dar.

Beispiel



Betrachte einen elektrischen Leiter in $\hat{e}_z$-Richtung in einem parallel angelegten elektrischen Feld $\vec{E} = E_0 \cdot \hat{e}_z$

$\rightsquigarrow$ Strom $I = A\sigma E_0$

$\rightsquigarrow$ Magnetfeld $\vec{B} = \frac{I}{2\pi r}\hat{e}_\varphi$

$$= \frac{A\sigma E_0}{2\pi r}\hat{e}_\varphi$$

Für die Energiestromdichte erhalten wir dann

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\vec{E}\times\vec{H} = +\frac{c}{4\pi}\cdot\frac{A\sigma E_0^2}{2\pi r}(-\hat{e}_r)$$

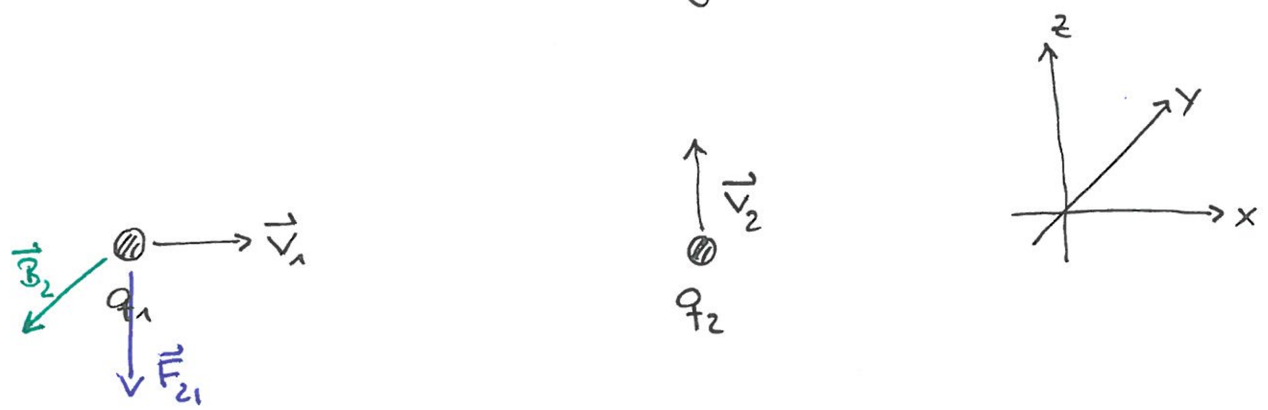
Weiterhin gilt:

$$\int_{\partial V}\vec{S}\cdot d\vec{f} = -\frac{c}{4\pi}\underbrace{\tilde{A}\cdot h}_{=V}\sigma E_0^2 \overset{!}{=} -\int_V \vec{j}\vec{E}\,dV$$

Impulssatz der Elektrodynamik

Nachdem wir in der letzten Vorlesung gesehen haben, daß ein el.-mag. Feld Energie trägt, wenden wir uns heute einer weiteren Eigenschaft zu – ein el.-mag. Feld trägt überdies auch Impuls und Drehimpuls.

Betrachten wir zur Motivation das folgende Beispiel zweier sich bewegender Punktladungen:



- $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_2 \end{pmatrix}$

- $\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} r_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} r_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \begin{pmatrix} r_2 - r_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \propto \hat{e}_x$

  $\vec{r}_{21} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} r_1 - r_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \propto -\hat{e}_x$

- $\vec{B}_1(\vec{r}_2) \propto \vec{v}_1 \times \vec{r}_{12} = 0$

  $\vec{B}_2(\vec{r}_1) \propto \vec{v}_2 \times \vec{r}_{21} \propto \hat{e}_z \times (-\hat{e}_x) \propto -\hat{e}_y$

- Kraft auf Teilchen 1: $\vec{F}_{21} \propto \vec{v}_1 \times \vec{B}_2(\vec{r}_1)$

Kraft auf Teilchen 2: $\vec{F}_{12} \propto \vec{v}_2 \times \vec{B}_1(\vec{r}_2) = 0$

- Somit stellen wir eine Verletzung von Newton's Gegenwirkungsprinzips fest, denn es gilt offenbar

$$\vec{F}_{21} \neq -\vec{F}_{12}$$

Der mechanische Gesamtimpuls $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$ <u>nicht</u> konstant, denn $\dot{\vec{p}} = \dot{\vec{p}}_1 + \dot{\vec{p}}_2 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} \neq 0$

- Die Lösung zu diesem offenbaren Problem:

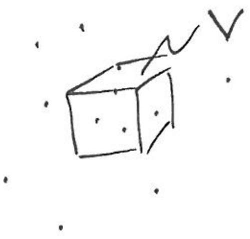
Dem el.-mag. Feld kann eine Impulsdichte zugeschrieben werden, derart daß

$$\text{„} \vec{P}_{mech} + \vec{P}_{el.-mag} = \text{konstant!“}$$

Ähnlich der Energie kann also auch der Impuls zwischen elektrischen Feld und mechanischen Entitäten = Materie ausgetauscht werden.

Feldimpuls (und Maxwellscher Spannungstensor)

Betrachte den mechanischen Impuls $\vec{P}_{mech}$ aller Ladungen in einem Referenzvolumen V und seine zeitliche Änderung:



$\rho, \vec{J}$

$$\frac{d}{dt}\vec{P}_{mech} = \vec{F}_V = \int_V dV\, \vec{f} \quad \text{Lorentz-Kraft Dichte}$$

$$= \int_V dV \left(\rho\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{J}\times\vec{B}\right)$$

- Nun wollen wir die Quellen ρ und $\vec{J}$ verschwinden lassen, indem wir auf die Maxwell-Gleichungen zurückgreifen

$$\rho = \frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}\cdot\vec{E} \qquad \text{und} \qquad \vec{J} = \frac{c}{4\pi}\left(\vec{\nabla}\times\vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}\right)$$

wobei wir uns auf die Betrachtungen im Vakuum beschränken.

Damit ergibt sich

$$\frac{d}{dt}\vec{P}_{mech} = \frac{1}{4\pi}\int_V dV\left[(\vec{\nabla}\cdot\vec{E})\cdot\vec{E} + (\vec{\nabla}\times\vec{B})\times\vec{B} - \frac{1}{c}\dot{\vec{E}}\times\vec{B}\right]$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_V dV\left[(\vec{\nabla}\cdot\vec{E})\cdot\vec{E} - \vec{B}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B}) + \frac{1}{c}\vec{B}\times\dot{\vec{E}}\right] \qquad (*)$$

Dies können wir weiter vereinfachen via

$$\vec{B}\times\dot{\vec{E}} = \frac{d}{dt}(\vec{B}\times\vec{E}) - \dot{\vec{B}}\times\vec{E} = \frac{d}{dt}(\vec{B}\times\vec{E}) - c\vec{E}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E})$$

Maxwell: $\dot{\vec{B}} = -c\,\vec{\nabla}\times\vec{E}$

Damit ergibt sich für (*)

$$\frac{d}{dt}\vec{P}_{mech} = \frac{1}{4\pi}\int_V dV\left[(\vec{\nabla}\cdot\vec{E})\cdot\vec{E} - \vec{E}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E}) - B\times(\vec{\nabla}\times\vec{B}) + \frac{1}{c}\cdot\frac{d}{dt}(\vec{B}\times\vec{E})\right]$$

Ergänzen wir auf der rechten Seite $0 = (\vec{\nabla}\cdot\vec{B})\cdot\vec{B}$ und sortieren:

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{P}_{mech} - \frac{1}{4\pi c}\int_V dV\,\vec{B}\times\vec{E}\right) = \frac{1}{4\pi}\int_V dV\left[(\vec{\nabla}\cdot\vec{E})\cdot\vec{E} - \vec{E}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E}) + (\vec{\nabla}\cdot\vec{B})\cdot\vec{B} - \vec{B}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B})\right]$$

Wiederum erkennen wir in der <u>Form dieser Gleichung</u>

"$\frac{d}{dt}$ (Funktion #1) = (Vektorfeld)" eine <u>Kontinuitätsgleichung</u>.

Die erhaltene Größe auf der linken Seite ist die Summe der mechanischen Impulsdichte $\vec{P}_{mech}$ und das Integral

Vorzeichen!

$$\boxed{\vec{P}_{Feld} = \int_V dV\,\vec{g} \qquad \text{wobei} \quad \vec{g} = \frac{1}{4\pi c}\vec{E}\times\vec{B} = \frac{1}{c^2}\vec{S}}$$

welches wir als Integral über den Impuls des elektromagnetischen Feldes interpretieren, so daß

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{P}_{mech} + \vec{P}_{Feld}\right) = \frac{1}{4\pi}\int_V dV\left[(\vec{\nabla}\cdot\vec{E})\cdot\vec{E} - \vec{E}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E}) + (\vec{\nabla}\cdot\vec{B})\cdot\vec{B} - \vec{B}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B})\right] \qquad (**)$$

Maxwellscher Spannungstensor

Wenn unsere Interpretation von Gleichung (**) als Kontinuitätsgleichung Sinn machen soll, sollten wir in der Lage sein, das Volumenintegral auf der rechten Seite in ein Oberflächenintegral über eine passende Divergenz auszudrücken, d.h. daß wir die Komponenten des Vektorfelds im Integranden darstellen können als

$$\boxed{V_j \equiv \partial/\partial_i \, T_{ij}}$$

also als Divergenz eines Tensorfelds mit Komponenten T_{ij}.

Exkurs: Tensoren und Tensorfelder

Tensor(feld) 0. Stufe $\equiv$ Skalarfeld — z.B. Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$, Energiedichte $w(\vec{r})$

Tensor(feld) 1. Stufe $\equiv$ Vektorfeld — z.B. elektrisches Feld $\vec{E}(\vec{r})$, magnetisches Feld $\vec{B}(\vec{r})$, Stromdichte $\vec{j}(\vec{r})$, Poynting Vektorfeld $\vec{S}(\vec{r})$

Tensor(feld) 2. Stufe $\equiv$ "Tensorfeld" — z.B. Spannungstensor $\underline{\underline{T}}$, Leitfähigkeit $\underline{\underline{\sigma}}$

$$\underline{\underline{T}} = (T_{ij})_{ij=x,y,z} = \begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ \underbrace{T_{zx}}_{\vec{T}_x} & \underbrace{T_{zy}}_{\vec{T}_y} & \underbrace{T_{zz}}_{\vec{T}_z} \end{pmatrix}$$

Zusammenfassung letzte Vorlesung

- Erhaltungssätze der Elektrodynamik

- Ein el.-mag. Feld trägt Impuls, el.-mag. Impulsdichte

$$\vec{g} = \frac{1}{4\pi c}\vec{E}\times\vec{B} = \frac{1}{c^2}\vec{S}$$

$$\vec{P}_{feld} = \int_V dV\,\vec{g}$$

- Tensoren und Tensorfelder

- Maxwellscher Spannungstensor

$$T_{ij} = \frac{1}{4\pi}\Big[E_i E_j + B_i B_j - \frac{\delta_{ij}}{2}(\vec{E}\cdot\vec{E} + \vec{B}\cdot\vec{B})$$

- Kontinuitätsgleichung für Impulserhaltung

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{P}_{mech} + \vec{P}_{feld}\right)_j = \int_{\partial V} df\;\vec{n}\cdot\vec{T}_j$$

Mit $V_j = \frac{\partial}{\partial_i} T_{ij}$ schreiben wir also das Volumenintegral auf der rechten Seite von (**) um in ein Oberflächenintegral der Form

$$\int_V dV\, V_j = \int_V dV \frac{\partial}{\partial_i} T_{ij} = \int_{\partial V} d\vec{f} \cdot \vec{T}_j = \int_{\partial V} df\, \vec{n} \cdot \vec{T}_j$$

Oberflächen-Normale

In der Tat läßt sich relativ direkt zeigen:

$$\left[(\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) - \vec{V} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V}) \right]_j = \frac{\partial}{\partial_i} \left[V_i V_j - \frac{\delta_{ij}}{2} \vec{V} \cdot \vec{V} \right]$$

Setzen wir für $\vec{V} = \vec{E}$ bzw. $\vec{V} = \vec{B}$ ein, können wir den sogenannten <u>Maxwellschen Spannungstensor</u> definieren als

$$\boxed{T_{ij} = \frac{1}{4\pi} \left[E_i E_j + B_i B_j - \frac{\delta_{ij}}{2} (\vec{E} \cdot \vec{E} + \vec{B} \cdot \vec{B}) \right]}$$

Damit können wir die Kontinuitätsgleichung (**) in die Form einer <u>Impulserhaltung</u> bringen:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left(\vec{P}_{mech} + \vec{P}_{Feld} \right)_j = \int_{\partial V} df\, \vec{n} \cdot \vec{T}_j}$$

Physikalisch ist $dt\, df\, \vec{n} \cdot \vec{T}_j$ die j-Komponente des Impulses, welcher in Zeit dt durch die Fläche df gedrückt wird.

Somit ist $df\, \vec{n}\, \vec{T}_j$ der Impuls pro Zeit = Kraft, welche auf die Fläche df wirkt. Damit ist $\boxed{\vec{n}\, \vec{T}_j}$ die Kraft pro Fläche, oder <u>Strahlungsdruck</u>, welcher sich aus der Impulserhaltung ergibt.

Drehimpuls in der Elektrodynamik

Unsere obige Diskussion zum Impuls des elektromagnetischen Feldes läßt sich direkt übertragen auf den Drehimpuls:

> Der mechanische Drehimpuls in einem System geladener Teilchen läßt sich konvertieren in einen Drehimpuls des el.-mag. Feldes.

Insbesondere läßt sich die Drehimpulsdichte des el.-mag. Feldes bestimmen als

$$\boxed{\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{g} = \frac{1}{4\pi c}\, \vec{r} \times (\vec{E} \times \vec{B})} \, .$$

Zusammenfassung: Erhaltungssätze der Elektrodynamik

Ladung $\longrightarrow$	$\dot{\varrho} + \vec{\nabla}\vec{j} = 0$	$\frac{\partial}{\partial t}\int_V dV \varrho + \int_{\partial V} d\vec{f} \cdot \vec{j} = 0$
Energie $\longrightarrow$	$\dot{\omega} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = -\vec{j} \cdot \vec{E}$	$\frac{\partial}{\partial t}\int_V dV \omega + \int_{\partial V} d\vec{f} \cdot \vec{S} = -\int_V dV \vec{j}\vec{E}$
Impuls $\longrightarrow$	$\dot{\vec{P}}_{mech} + \dot{\vec{P}}_{Feld} = \vec{\nabla} \cdot \underline{\underline{T}}$	$\frac{d}{dt}(\vec{P}_{mech} + \vec{P}_{Feld}) = \int_{\partial V} df\, \vec{n} \cdot \underline{\underline{T}}$

Energie und Impuls ebener el.-mag. Wellen

Betrachten wir wieder eine ebene Welle im Vakuum mit Ausbreitungsrichtung entlang der x-Achse:

$$\vec{k} = \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{E}(\vec{r},t) = (E_1\hat{e}_y + E_2\hat{e}_z)\,e^{i(kx-\omega t)}$$

wobei wir wiederum komplex-wertige Amplituden annehmen:

$$E_1 = |E_1|\,e^{i\varphi_1} \quad \text{und} \quad E_2 = |E_2|\,e^{i\varphi_2}$$

Für das physikalische Feld hatten wir dann gesehen:

$$\mathrm{Re}\,\vec{E}(\vec{r},t) = \begin{pmatrix} 0 \\ |E_1|\cos(kx-\omega t+\varphi_1) \\ |E_2|\cos(kx-\omega t+\varphi_2) \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Re}\,\vec{B}(\vec{r},t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -|E_2|\cos(kx-\omega t+\varphi_2) \\ |E_1|\cos(kx-\omega t+\varphi_1) \end{pmatrix} = \mathrm{Re}\left(\hat{e}_x \times \vec{E}(\vec{r},t)\right)$$

Damit ergibt sich für die Energiedichte

$$w(\vec{r},t) = \frac{1}{8\pi}\left(\vec{E}^2 + \vec{B}^2\right) = \frac{1}{4\pi}\left(|E_1|^2\cos^2(kx-\omega t+\varphi_1) + |E_2|^2\cos(kx-\omega t+\varphi_2)\right)$$

und das Poynting Vektorfeld

Die Welle transportiert ihre Energie mit der Geschwindigkeit c in Richtung des Wellenvektors.

$$\vec{S}(\vec{r},t) = \frac{c}{4\pi}\vec{E}\times\vec{B} = c\cdot w(\vec{r},t)\cdot\frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} = c\cdot w(\vec{r},t)\hat{e}_x$$

sowie Impulsdichte

$$\vec{P}_{Feld}(\vec{r},t) = \frac{1}{c^2}\vec{S}(\vec{r},t) = \frac{1}{c}\cdot w(\vec{r},t)\cdot\frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} = \frac{1}{c}\,w(\vec{r},t)\hat{e}_x$$