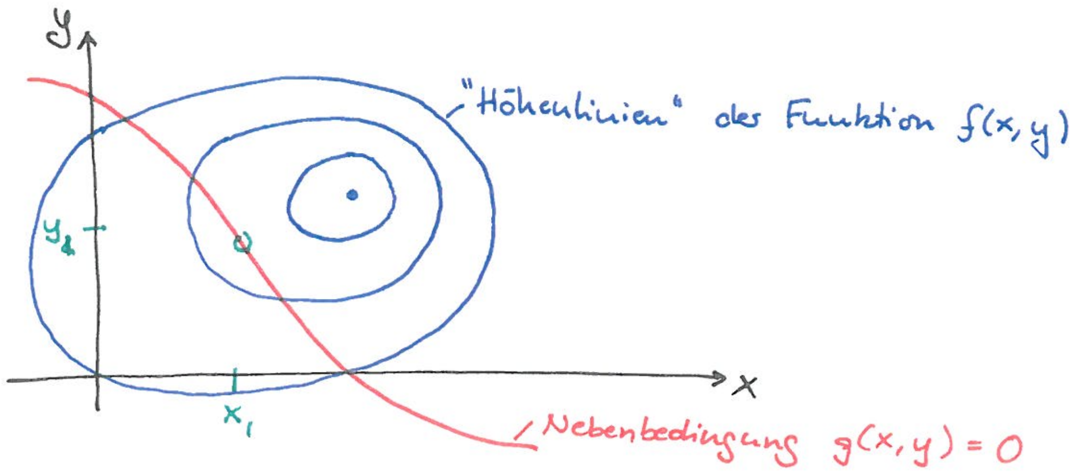
Extremum einer Funktion unter Nebenbedingungen



Gesucht sind die Werte x_1 und y_1, für welche $f(x,y)$ unter der Nebenbedingung $g(x,y)=0$ minimal wird.

Annahme: $g(x,y)=0$ kann nach $y=y_g(x)$ aufgelöst werden (was natürlich im allgemeinen nicht der Fall ist).

$\rightarrow$ bestimme das Minimum von $f(x, y_g(x))$

$$\frac{d}{dx} f(x, y_g(x)) = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y_g(x)) + \frac{\partial}{\partial y} f(x, y_g(x))\, y_g'(x)$$

$$= 0 \qquad \text{(A)}$$

$\rightarrow$ Gleichung zur Bestimmung von x_1

Alternativ: Löse diese Aufgabe mit Hilfe von Lagrange-Multiplikatoren

Betrachte dazu die folgenden 3 Gleichungen:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) - \lambda \frac{\partial}{\partial x} g(x,y) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) - \lambda \frac{\partial}{\partial y} g(x,y) &= 0 \\ g(x,y) &= 0 \end{aligned}} \qquad \text{(B)}$$

mit x, y, λ unbekannt

<u>Behauptung</u>: (B) ist äquivalent zu (A).

<u>Beweis</u>: Die Nebenbedingung läßt sich auch schreiben als

$$g(x,y) = y - y_g(x) = 0$$

so daß

$$\frac{\partial}{\partial x} g(x,y) = -y_g'(x) \quad \rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) + \lambda\, y_g'(x) = 0 \qquad (\mathrm{I})$$

$$\frac{\partial}{\partial y} g(x,y) = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) - \lambda = 0 \qquad (\mathrm{II})$$

Bilde $(\mathrm{I}) + y_g'\,(\mathrm{II})$:

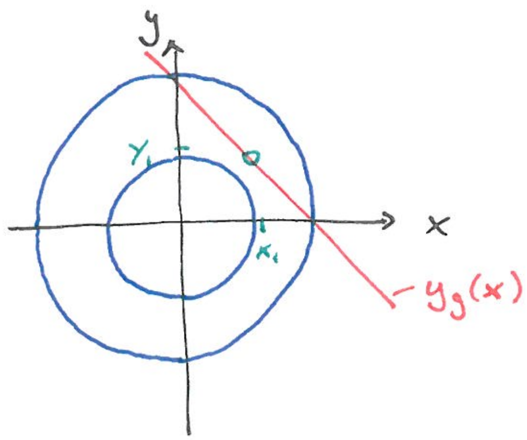
$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) + y_g' \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)}_{= (A) \text{ für } y \to y_g(x)} = 0$$

Das heißt, jede Lösung von (B) ist auch eine Lösung von

(B) läßt sich auch so formulieren:

$$\boxed{\begin{array}{l} f^*(x,y) = f(x,y) - \lambda\, g(x,y) \quad \text{minimal} \\[1em] \text{und} \quad g(x,y) = 0 . \end{array}}$$

Beispiel: $f(x,y) = x^2 + y^2$; $g(x,y) = y + x - 1$



A) $y_g(x) = 1 - x \rightarrow f(x, y_g(x)) = 2x^2 - 2x + 1 = h(x)$

$\rightarrow h'(x) = 4x - 2 \overset{!}{=} 0$ (A)

$\rightarrow x_1 = \frac{1}{2}$ $\qquad y_1 = y_g(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$

B) Lagrange-Multiplikatoren

$f^*(x,y) = f(x,y) - \lambda\, g(x,y) = x^2 + y^2 - \lambda(y + x - 1$

$$\rightarrow \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} f^*(x,y) = 2x - \lambda = 0 \rightarrow x = \frac{\lambda}{2} \\ \frac{\partial}{\partial y} f^*(x,y) = 2y - \lambda = 0 \rightarrow y = \frac{\lambda}{2} \end{cases}$$

$\rightarrow g(x,y) = \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{2} - 1 = \lambda - 1 = 0 \rightarrow \lambda = 1$

$\rightarrow x_1 = y_1 = \frac{1}{2}$ ok ✓

Extremum eines Funktionals unter Nebenbedingungen

Gehen wir zurück zur Kettenlinie und formulieren das allgemeinere Problem:

Welche Funktion $y(x)$ macht das Funktional

$$S = S[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx \; L(y, y', x)$$

minimal, wobei die Nebenbedingung gelte, daß ein anderes Funktional N gleich einer gegebenen Konstante C ist

$$N = N[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx \; G(y, y', x) = C$$

Dabei sollen wieder die Randwerte

$$y(x_1) = y_1 \quad \text{und} \quad y(x_2) = y_2$$

festgehalten werden.

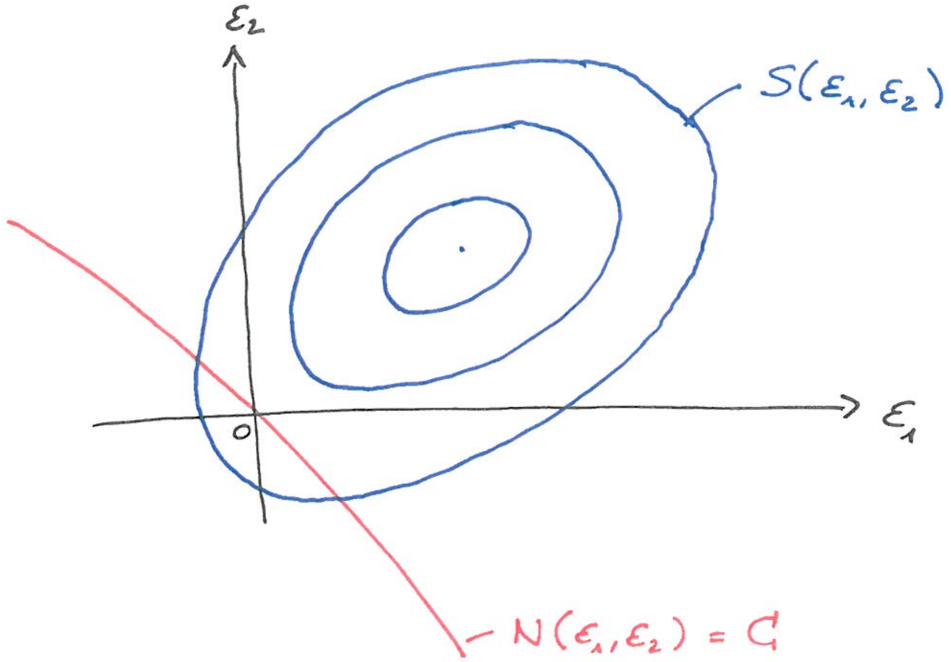
Es sei $y(x)$ die gesuchte Funktion.
Für eine beliebige Abweichung $\delta y = \varepsilon \cdot \eta(x)$ erfüllt $y + \varepsilon\eta$ die Nebenbedingung $N[y + \varepsilon\eta] = C$ für $\varepsilon = 0$. Im Allgemeinen gilt dann $N[y + \varepsilon\eta] = C + O(\varepsilon)$, was $\varepsilon = 0$ bedingt $\rightarrow$ keine Variation

Betrachten wir deshalb <u>zwei</u> linear unabhängige Funktionen $\eta_1(x)$ und $\eta_2(x)$, welche wiederum am Rand verschwinden: $\eta_{1/2}(x_1) = \eta_{1/2}(x_2) = 0$
Und die Abweichung

$$\delta y = \varepsilon_1 \cdot \eta_1(x) + \varepsilon_2 \cdot \eta_2(x)$$

$$\rightarrow \quad S(\varepsilon_1, \varepsilon_2) := S[y + \varepsilon_1 \eta_1 + \varepsilon_2 \eta_2]$$

$$N(\varepsilon_1, \varepsilon_2) := N[y + \varepsilon_1 \eta_1 + \varepsilon_2 \eta_2]$$



Vergleich mit der vorherigen Aufgabenstellung:

- $f(x,y)$ extremal unter der Nebenbedingung $g(x,y) = 0$

Jetzt:

- $S(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ extremal unter der Nebenbedingung $N(\varepsilon_1, \varepsilon_2) - C = 0$

$$\rightarrow \quad S(\varepsilon_1, \varepsilon_2) - \lambda\left(N(\varepsilon_1, \varepsilon_2) - C\right) \text{ minimal}$$

$$\rightarrow \quad S(\varepsilon_1, \varepsilon_2) - \lambda N(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \text{ minimal, d.h.}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon_i}(S - \lambda N)\right)_{\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0} = 0 \qquad \text{für beliebige } \eta_1(x), \eta_2(x)$$

Wie zuvor folgt auch hier die Euler-Lagrange-Gleichung für das Funktional

$$S^*[y] = S[y] - \lambda N[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx \left\{ \underbrace{L(y,y',x) - \lambda G(y,y',x)}_{=: L^*(y,y',x)} \right\}$$

$$\rightarrow \quad \boxed{\frac{d}{dx} \frac{\partial L^*(y,y',x)}{\partial y'} = \frac{\partial L^*(y,y',x)}{\partial y}}$$

Lagrange-Formalismus der Mechanik

Wir betrachten wiederum ein mechanisches System, welches einer Reihe von Zwangsbedingungen unterliegen möge. Es gilt, die mechanische Bewegung dieses Systems zu beschreiben, d.h. die Bewegungsgleichungen aufzustellen und zu lösen.

Ein wenig konkreter formuliert, möge das System aus N Massepunkten bestehen und R Zwangsbedingungen unterliegen. Damit ergeben sich

$$\boxed{f = 3N - R}$$

voneinander unabhängige Koordinaten, welche wir auch Freiheitsgrade nennen.

Wir wollen das System nunmehr durch eine geeignete Wahl von f verallgemeinerten Koordinaten (oder generalisierten Koordinaten

$$\boxed{q_1, q_2, \ldots, q_f}$$

beschreiben, welche zum einen sämtliche Koordinaten der Massepunkte festlegen

$$x_n = x_n(q_1, q_2, \ldots, q_f, t) \quad \text{mit} \quad n = 1, 2, \ldots, 3N$$

und gleichzeitig die Zwangsbedingungen für beliebige Werte der q_i erfüllen

$$g_\alpha\left(x_1(q_1, q_2, \ldots, q_f, t),\ x_2(q_1, q_2, \ldots, q_f, t), \ldots, x_{3N}(\ldots)\right) = 0$$

Beispiele für verallgemeinerte Koordinaten

1) Ebenes Pendel mit variabler Länge $\ell(t)$

$N = 1$ Massepunkte $\rightarrow$ 3 kartesische Koordinaten

$R = 2$ Nebenbedingungen : $z = 0$

$x^2 + y^2 - \ell(t)^2 = 0$

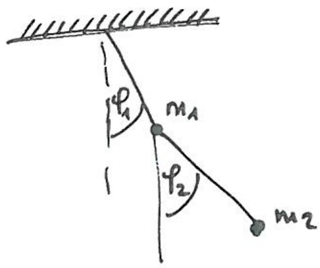
$f = 3N - R = 1$

Verallgemeinerte Koordinate $q = \varphi$

$$x = x(\varphi, t) = \ell(t) \cdot \sin\varphi$$
$$y = y(\varphi, t) = -\ell(t) \cdot \cos\varphi$$
$$z = z(\varphi, t) = 0$$

Die Zwangsbedingungen sind für jeden Wert von φ erfüllt.

2) Doppelpendel



$N = 2$
$R = 4$

$f = 3N - R = 2$

$q_1 = \varphi_1$ und $q_2 = \varphi_2$ $\longrightarrow$

$x_1 = \ell_1 \cdot \sin\varphi_1$ $\qquad$ $x_2 = x_1 + \ell_2 \sin\varphi_2$

$y_1 = -\ell_1 \cdot \cos\varphi_1$ $\qquad$ $y_2 = y_1 - \ell_2 \cos\varphi_2$

$z_1 = 0$ $\qquad$ $z_2 = 0$

Wir sehen also, daß die Einführung generalisierter Koordinaten ein alternativer Weg ist, sich der Zwangsbedingungen auf elegante Weise zu entledigen.

Es möge also unser mechanisches System nunmehr durch einen Set generalisierter Koordinaten und Geschwindigkeiten beschrieben werden:

$$q_1, q_2, \dots, q_f \quad \text{und} \quad \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_f$$

Für diese Freiheitsgrade stellen wir die Lagrange-Funktion

$$\boxed{\mathcal{L}(q,\dot{q},t) = T(q,\dot{q},t) - U(q,\dot{q},t)}$$

auf.
(Im Gegensatz zur kinetischen und potentiellen Energie ist die Lagrange-Funktion $\mathcal{L}$ keine direkt meßbare physikalische Größe.)

Jeder Bahnkurve $q(t)$ ordnet das sogenannte Wirkungsfunktional

$$\boxed{S = S[q] = \int_{t_1}^{t_2} dt \; \mathcal{L}(q,\dot{q},t)} \qquad q = (q_1,\dots,q_f), \quad \dot{q} = (\dot{q}_1,\dots,\dot{q}_f)$$

eine skalare Größe zu, die sogenannte Wirkung.
Hierbei werden die beiden Endpunkte $q(t_1)$ und $q(t_2)$ festgehalten.

Das **Hamiltonsche Prinzip** besagt nun, daß die physikalische Bahnkurve $q(t)$ jene ist, für welche das Wirkungsfunktional stationär ist

$$\boxed{\delta S[q] = 0}.$$

Dies nennt man auch das Prinzip der kleinsten Wirkung.
Wie wir oben gesehen haben, ergeben sich damit unmittelbar die Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}}$$

Lagrange-Gleichungen 1. Art

In unserer vorherigen Beschreibung des Lagrange-Formalismus haben wir uns der Zwangsbedingungen durch die geschickte Wahl generalisierter Koordinaten entledigt. Betrachten wir nun den Fall, daß wir in den gewöhnlichen kartesischen Koordinaten rechnen wollen und die Zwangsbedingungen explizit behandeln müssen. Dies wird zu den sogenannten Lagrange-Gleichungen 1. Art führen.

Es sei:

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}, t) = T(x, \dot{x}, t) - U(x, \dot{x}, t)$$

die Lagrange-Funktion in kartesischen Koordinaten.

Betrachte R Zwangsbedingungen

$$g_\alpha(x, t) = g_\alpha(x_1, x_2, \dots, x_{3N}, t) = 0 \qquad \alpha = 1, \dots, R$$

→ Variationsproblem nach Hamiltonschen Prinzip

$$S = S[x] = \int_{t_1}^{t_2} dt\, \mathcal{L}(x, \dot{x}, t) \text{ minimal} \qquad \underline{\text{mit}}\ g_\alpha(x,t) = 0$$

→ Euler-Lagrange-Gleichungen für

$$\mathcal{L}^*(x, \dot{x}, t) = \mathcal{L}(x, \dot{x}, t) + \sum_{\alpha=1}^{R} \lambda_\alpha(t)\, g_\alpha(x, t)$$

→ $\delta \int_{t_1}^{t_2} dt\, \mathcal{L}^*(x, \dot{x}, t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad$ EL für $\mathcal{L}^*$

"Lagrange-Gleichungen 1. Art"

Erhaltungsgrößen

Eine besondere Qualität des Lagrange-Formalismus ist, daß er es erlaubt, Erhaltungsgrößen zu identifizieren. Wir vergegenwärtigen uns dies zunächst an einfacheren Beispielen und werden im nächsten Schritt den Zusammenhang zwischen Erhaltungsgrößen und Symmetrien anhand des Noether-Theorems diskutieren.

Als ersten Schritt führen wir zunächst das Konzept des verallgemeinerten Impulses ein. Zu jeder generalisierten Koordinate q_i gehört ein verallgemeinerter Impuls der Form

$$\boxed{p_i = \frac{\partial \mathcal{L}(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}_i}}$$

Für kartesische Koordinaten gilt: $p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = m\dot{q}_i$, was dem bekannten Impuls entspricht.

$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{q}_i^2 + U(q)$

Wir nennen eine Koordinate zyklisch, wenn diese nicht explizit in der Lagrange-Funktion auftaucht, d.h.

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}(q,\dot{q},t)}{\partial q_i} = 0}$$

Für die durch die Euler-Lagrange-Gleichung definierte physikalische Bewegung bedeutet dies, daß p_i eine Erhaltungsgröße ist, denn

$$\frac{d}{dt} p_i = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \longrightarrow p_i = \text{const.}$$

Eine weitere Erhaltungsgröße hatten wir zuvor schon identifiziert für den Fall, daß die Lagrange-Funktion keine explizite Zeitabhängigkeit besitzt:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(q,\dot{q},t)}{\partial t} = 0 \longrightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \cdot \dot{q} - \mathcal{L} = \text{const.}$$

Betrachten wir die so erhaltene Erhaltungsgröße für ein System mit Lagrange-Funktion $\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - U$ genauer:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \cdot \dot{q} - \mathcal{L} = m\dot{q}^2 - \frac{1}{2} m\dot{q}^2 + U$$

$$= \frac{1}{2} m\dot{q}^2 + U = E_{\text{total}}$$

Wir sehen, daß für die Bahnkurve eines solchen Systems dessen Lagrange-Funktion zeitunabhängig ist gilt, daß die Gesamtenergie erhalten bleibt.

Wenn wir die beiden obigen Beobachtungen zusammenfassen wollen, stellen wir fest, daß sich die Erhaltungsgrößen offenbar aus der Invarianz der Lagrange-Funktion (und damit der Wirkung) gegenüber bestimmten Transformationen ergibt:

Translations-Invarianz $\longrightarrow$ Impulserhaltung

Zeit-Invarianz $\longrightarrow$ Energieerhaltung

Der hier erahnte Zusammenhang zwischen Symmetrien des Systems und Erhaltungsgrößen wird im Noether-Theorem formalisiert.

Noether-Theorem (Emmy Noether, 1918)

Das Noether-Theorem stellt einen expliziten Zusammenhang zwischen den (kontinuierlichen) Symmetrien eines Systems und dem Auftreten von Erhaltungsgrößen auf. Es besagt:

> Zu jeder kontinuierlichen Symmetrie eines physikalischen Systems gehört eine Erhaltungsgröße.

Beispiele:

Homogenität der Zeit	$\longleftrightarrow$	Energieerhaltung
Homogenität des Raums	$\longleftrightarrow$	Impulserhaltung
Isotropie des Raums	$\longleftrightarrow$	Drehimpulserhaltung

Das Noether-Theorem gilt weit über die klassische Mechanik hinaus.

Mathematische Formulierung und Beweis

Wir gehen vom Hamiltonschen Prinzip aus

$$\delta S[q] = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt\, \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) = 0$$

Im Argument der Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) = \mathcal{L}(q_1, q_2, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_f, t)$$

benutzen wir die Abkürzung

$$q = (q_1(t), q_2(t), \dots, q_f(t)) \quad \text{und} \quad \dot{q} = (\dot{q}_1(t), \dot{q}_2(t), \dots, \dot{q}_f(t$$

wobei $q_i(t)$ beliebige (verallgemeinerte) Koordinaten sind oder auch kartesische Koordinaten.

Wir betrachten nun Transformationen der Koordinaten + Zeit, welche von einem kontinuierlichen Parameter ε abhängen

$$q_i \longrightarrow \tilde{q}_i = q_i + \varepsilon \cdot \psi_i(q, \dot{q}, t) + O(\varepsilon^2)$$

$$t \longrightarrow \tilde{t} = t + \varepsilon \cdot \varphi(q, \dot{q}, t) + O(\varepsilon^2)$$

Mit $\varepsilon = 0 \Leftrightarrow$ identische Transformation. Terme von $O(\varepsilon^2)$ werden im folgenden vernachlässigt.

Entsprechend werden auch die Bahnkurven $q(t)$ in neue Bahnkurven $\tilde{q}(\tilde{t})$ transformiert

$$\tilde{q}_i(\tilde{t}) = q_i(t) + \varepsilon \cdot \psi_i(q(t), \dot{q}(t), t)$$

$$\tilde{t}(t) = t + \varepsilon \cdot \varphi(q(t), \dot{q}(t), t)$$

Betrachte nun das Funktional $S[q(t)]$ für die Bahn $q(t)$ mit Randwerten t_1 und t_2 und vergleiche dies mit dem Funktional $\tilde{S} = S[\tilde{q}(\tilde{t})]$, welches sich für die transformierte Bahn $\tilde{q}(\tilde{t})$ mit entsprechenden Randwerten $\tilde{t}_1$ und $\tilde{t}_2$ ergibt.

Wenn $\tilde{S} = S$, also wenn

$$\int_{\tilde{t}_1}^{\tilde{t}_2} d\tilde{t}\; \mathcal{L}(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}, \tilde{t}) = \int_{t_1}^{t_2} dt\; \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) \qquad (1) \qquad \dot{\tilde{q}} = \frac{d\tilde{q}}{d\tilde{t}}$$

gilt, dann ist das Funktional invariant unter dieser Transformation. Diese Invarianz des Wirkungsfunktionals spiegelt also die Symmetrie des durch die Lagrange-Funktion $\mathcal{L}$ beschriebenen Systems bezüglich der betrachteten Transformation wider.

Betrachten wir die linke Seite von obiger Gleichung (1)

$$\int_{\tilde{t}_1}^{\tilde{t}_2} d\tilde{t}\; \mathcal{L}\left(\tilde{q}, \frac{d\tilde{q}}{d\tilde{t}}, \tilde{t}\right) = \int_{t_1}^{t_2} dt\; \underbrace{\mathcal{L}\left(\tilde{q}, \frac{d\tilde{q}}{d\tilde{t}}, \tilde{t}\right) \frac{d\tilde{t}}{dt}}_{f(\varepsilon)}$$

mit $f(\varepsilon) = f(0) + \varepsilon \cdot f'(0) + O(\varepsilon^2)$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) + \varepsilon \cdot \frac{d}{d\varepsilon} \left(\mathcal{L}\left(\tilde{q}, \frac{d\tilde{q}}{d\tilde{t}}, \tilde{t}\right) \frac{d\tilde{t}}{dt} \right)_{\varepsilon} \right.$$

→ Invarianzbedingung (1):
$$\frac{d}{d\varepsilon} \left[\mathcal{L}\left(\tilde{q}, \frac{d\tilde{q}}{d\tilde{t}}, \tilde{t}\right) \frac{d\tilde{t}}{dt} \right]_{\varepsilon = 0} = 0 \qquad (2)$$

Es gilt:
$$\frac{d\tilde{t}}{dt} = 1 + \varepsilon \cdot \frac{d\varphi(q, \dot{q}, t)}{dt} = 1 + \varepsilon \cdot \frac{d\varphi}{dt}$$

$$\frac{d\tilde{q}_i}{d\tilde{t}} = \frac{d\tilde{q}_i}{dt} \cdot \frac{dt}{d\tilde{t}} = \left(\dot{q}_i + \varepsilon \frac{d\psi_i}{dt} \right) \left(1 - \varepsilon \cdot \frac{d\varphi}{dt} \right)$$

wegen Inversion

$$= \dot{q}_i + \varepsilon \frac{d\psi_i}{dt} - \varepsilon \dot{q}_i \frac{d\varphi}{dt} + O(\varepsilon^2)$$

Somit gilt für die Invarianzbedingung (2):

$$\frac{d}{d\varepsilon}\left[\mathcal{L}\left(q_i + \varepsilon \psi_i \,,\; \dot{q}_i + \varepsilon \frac{d\psi_i}{dt} - \varepsilon \dot{q}_i \frac{d\varphi}{dt} \,,\; t + \varepsilon\varphi \right) \cdot \left(1 + \varepsilon \frac{d\varphi}{dt} \right) \right]_{\varepsilon = 0}$$

$$= \sum_{i=1}^{f} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \psi_i + \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{d\psi_i}{dt} - \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \frac{d\varphi}{dt} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \varphi + \mathcal{L} \frac{d\varphi}{dt}$$

$$= \underbrace{\frac{d}{dt} \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \psi_i}_{\substack{\text{wegen EL} \\ + \text{Produktregel}}} + \left(\mathcal{L} - \sum_{i=1}^{f} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) \frac{d\varphi}{dt} + \varphi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \stackrel{!}{=} 0$$

$$= \frac{d}{dt} \left[\sum_{i=1}^{f} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \psi_i + \left(\mathcal{L} - \sum_{i=1}^{f} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) \varphi \right] \stackrel{!}{=} 0$$

denn $\displaystyle \frac{d}{dt} \left(\mathcal{L} - \sum_{i=1}^{f} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) \stackrel{!}{=} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$ (siehe oben)

Damit erhalten wir aus der Invarianzbedingung

$$\frac{d}{d\varepsilon} \left[\mathcal{L}\left(\tilde{q}, \frac{d\tilde{q}}{d\tilde{t}}, \tilde{t} \right) \frac{d\tilde{t}}{dt} \right]_{\varepsilon = 0} = \frac{d}{dt} \left[\sum_{i=1}^{f} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \psi_i + \left(\mathcal{L} - \sum_{i=1}^{f} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) \varphi \right] =$$

so daß wir eine Erhaltungsgröße finden

$$\boxed{Q = Q(q, \dot{q}, t) = \sum_{i=1}^{f} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \psi_i + \left(\mathcal{L} - \sum_{i=1}^{f} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) \varphi = \text{const.}}$$

Beispiele:

1) $\mathcal{L}$ hänge nicht explizit von t ab, also $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q, \dot{q})$.

Transformation: $\tilde{q}_i = q_i \qquad \psi_i = 0$

$\tilde{t} = t + \varepsilon \qquad \varphi = 1$

Erhaltungsgröße:

$$Q = \mathcal{L} - \sum_{i=1}^{f} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = \text{const.}$$

(Energieerhaltung)

2) $\mathcal{L}$ hänge nicht von einer bestimmten Koordinate q_k ab, also $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_1, q_2, \dots, q_{k-1}, q_{k+1}, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_f, t)$.

Transformation: $\tilde{q}_i = q_i + \varepsilon \delta_{ik} \qquad \psi_i = \delta_{ik}$

$\tilde{t} = t \qquad \varphi = 0$

Erhaltungsgröße:

$$Q = \sum_{i=1}^{f} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta_{ik} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} = p_k = \text{const.}$$