Spezielle Relativitätstheorie

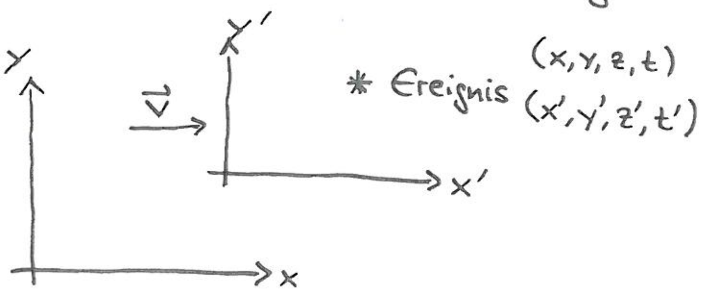
Nachdem Maxwell in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts die von ihm entwickelte Theorie der Elektrodynamik abgeschlossen hatte, ergab sich trotz deren enormen Erfolg in der Beschreibung elektromagnetischer Phänome ein fundamentales, konzeptionelles Problem – wie war die Maxwellsche Theorie vereinbar mit dem Relativitätsprinzip?

Relativitätsprinzip (Galilei)

1) Alle Inertialsysteme sind gleichwertig.
2) Die Newtonschen Axiome gelten in allen Inertialsystemen.

Gleichwertig heißt hiebei, daß alle grundlegenden physikalischen Gesetze in allen Inertialsystemen die gleiche Form annehmen.
Ein Inertialsystem im Galileis Sinne war hiebei ein Koordinatensystem, welches sich mit konstanter Geschwindigkeit zum Fixsternhimmel bewegt. Er beschreibt damit das Konzept eines absoluten Raum

Betrachten wir also zwei Koordinatensysteme K und K', welche sich mit konstanter Geschwindigkeit $\vec{v}$ zueinander bewegen:



Ein Ereignis sei definiert durch seine Koordinaten $(\vec{x}, t)$ im Koordinatensystem K. Die entsprechenden Koordinaten des gleichen Ereignisses im Koordinatensystem K' $(\vec{x}', t')$ ergeben sich durch die sogenannte Galilei-Transformat

$$\vec{x}' = \vec{x} - \vec{v} \cdot t$$
$$t' = t$$

Eine solche Galilei-Transformation läßt die Newtonschen Bewegungsgleichungen invariant, speziell gelte im Koordinatensystem K

$$K: \quad \frac{d^2 \vec{x}_i}{dt^2} = - \vec{\nabla}_{x_i} \sum_j V_{ij} (\vec{x}_i - \vec{x}_j)$$

wobei $\vec{x}_i$ eine Teilchenkoordinate in K sei, und V_{ij} ein Paarpotential, welches ausschließlich vom Abstand zweier Teilchen abhängt.
Im bewegten Koordinatensystem K' gilt dann entsprechend:

$$K': \quad \frac{d^2 \vec{x}_i'}{dt'^2} = - \vec{\nabla}_{x_i'} \sum_j V_{ij} (\vec{x}_i' - \vec{x}_j')$$

wenn wir die Galilei-transformierten Variablen einsetzen, denn es gilt: $\vec{x} = (x, y, z)$ $\quad \vec{x}' = (x', y', z')$

- $\frac{dx}{dt} = \frac{d(x' + vt)}{dt} = \frac{dx'}{dt} + v \rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x'}{dt^2}$
- $x_i - x_j = x_i' + vt - x_j' - vt = x_i' - x_j'$
- $\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial x'}{\partial x} \cdot \frac{\partial V}{\partial x'} = \frac{\partial V}{\partial x'}$

Nehmen wir nun an, daß ein bestimmtes physikalisches Phänomen im Koordinatensystem K durch eine Wellengleichung beschrieben werde:

$$K: \quad \left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) f(\vec{x},t) = 0$$

Wenn wir nun die Galilei-transformierten Koordinaten in diese Wellengleichung einsetzen, erhalten wir für das Koordinatensystem K'

$$K': \quad \left(\Delta' - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial}{\partial t} - \vec{v}\cdot\vec{\nabla}'\right)^2\right) f(\vec{x}',t') = 0$$

und somit eine Wellengleichung von unterschiedlicher Form. Dies ist an sich kein Widerspruch, wenn wir etwa uns eine Materiewelle (Wasserwelle, akustische Welle, ...) vorstellen, welche sich in einem Medium (Wasser, Luft, ...) bewegt. Während dieses Medium im Koordinatensystem K in Ruhe ist, bewegt es sich mit Geschwindigkeit $\vec{v}$ im Koordinatensystem K' – was die kompliziertere Form der Wellengleichung in K' rechtfertigt.

Betrachte hierzu etwa eine Wellenfront, welche zum Zeitpunkt $t = t' = 0$ am Ursprung von Koordinatensystem K erzeugt wird. Angenommen diese Wellenfront bewege sich mit Geschwindigkeit c im Koordinatensystem K, d.h.

$$K: \quad \frac{dx}{dt} = c \quad \rightarrow \quad x = c\cdot t$$

Nach Galilei-Transformation erhalten wir für das Koordinatensystem K'

$$K': \quad x' = x - vt = (c-v)\cdot t = (c-v)\cdot t'$$

$$\text{d.h.} \quad \frac{dx'}{dt'} = c - v$$

Somit bewegt sich die Wellenfront im Koordinatensystem K' mit Geschwindigkeit $c-v$.

Wenn wir nun aber eine elektromagnetische Welle betrachten, stellen wir fest, daß die Maxwell-Gleichungen und Galilei-Invarianz nicht miteinander vereinbar sind, sollten die Maxwell-Gleichungen doch zum einen in allen Inertialsystemen gelten und zum anderen nehmen diese eine gleichförmige Ausbreitungsgeschwindigkeit der el.-mag. Wellen in allen Inertialsystemen an, eben die Lichtgeschwindigkeit. $\rightarrow$ Michelson-Morley experiment (1887)
heute (2009) $\frac{\Delta c}{c} \sim 10^{-17}$

Wir finden uns also in der Situation wieder, daß wir realisieren, daß nicht alle drei Konzepte – die Newtonsche Mechanik, Galileis Relativitätsprinzip und Maxwells Theorie der Elektrodynamik – simultan gelten können.

An dieser Stelle betritt Albert Einstein die Bühne, welcher zum Schluß gekommen ist, daß Maxwells Theorie Bestand hat, das Relativitätsprinzip aber nicht auf Galileis Transformationen fußen kann und daß Newtons Mechanik einer entsprechenden Anpassung bedarf.

Zusammenfassung letzte Vorlesung

- Einstieg in die spezielle Relativitätstheorie

Relativitätsprinzip (Galilei)

1) Alle Inertialsysteme sind gleichwertig

2) Die Newtonschen Axiome gelten in allen Inertialsystemen

Galilei-Transformation

$$\vec{x}' = \vec{x} - \vec{v} \cdot t$$
$$t' = t$$

$\rightarrow$ Newtonsche Bewegungsgleichung invariant

$\rightarrow$ Wellengleichung nicht invariant

Wellenfront

$$K: \quad \frac{dx}{dt} = c \quad \longrightarrow \quad x = c \cdot t$$

$$K': \quad x' = x - vt = (c-v)t = (c-v) \cdot t' \quad \text{d.h.} \quad \frac{dx'}{dt'} = c - v$$

Elektromagnetische Wellen haben unterschiedliche Ausbreitungsgeschwindigkeit in verschiedenen Inertialsystemen.

Relativitätsprinzip (Einstein)

Um ein neuartiges Relativitätsprinzip aufzustellen, hat Einstein zwei Postulate gemacht:

1) Alle Inertialsysteme sind gleichwertig.

2) Licht pflanzt sich in jedem Inertialsystem mit derselben Geschwindigkeit c aus – die Lichtgeschwindigkeit ist konstant.

Wir wollen diese beiden Postulate nun näher untersuchen und erste Konsequenzen daraus ableiten:

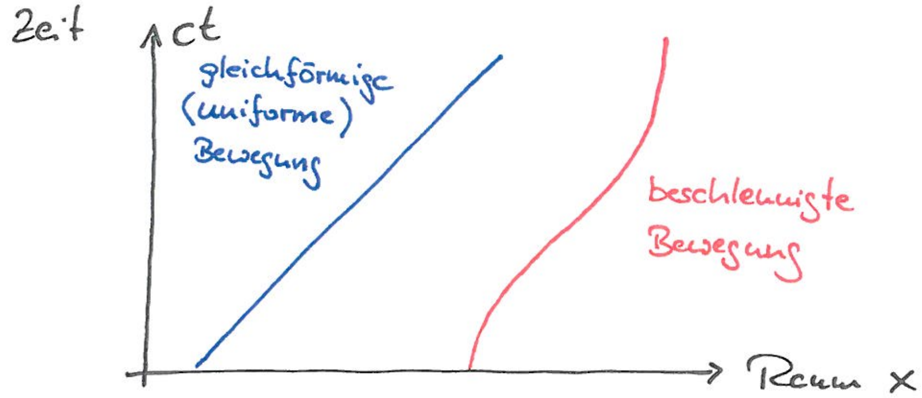
Das erste Postulat ist das der Relativität. In negierter Form sagt es, daß es keine absolute Ruhe, keine absolute Geschwindigkeit, und keinen absoluten Ort im Raum gibt – denn Einstein bezieht sich, wenn er von Inertialsystemen spricht, nicht wie Galilei auf den Fixsternhimmel (von welchem wir heute wissen, daß er auch gar nicht räumlich fixiert ist) also einen absoluten Raum.
In positiver Form besagt das Einsteinsche Konzept der Relativität, daß zwei Koordinatensysteme inertial zueinander sind, wenn sich das eine in das andere überführen läßt durch:

- eine Translation im Raum oder Zeit
- eine konstante Drehung im Raum
- eine konstante Bewegung

oder eine Kombination dieser Operationen.
Gleichwertigkeit bedeutet wiederum, daß alle Naturgesetze dieselbe Form annehmen (und als solche niemals auf absolute Koordinaten/Zeiten zurückgreifen können.)

Ein fundamentales Konzept der Newtonschen Mechanik und der Galilei-Transformation ist jenes der <u>Gleichzeitigkeit</u>: Zwei Ereignisse, welche in einem Bezugssystem gleichzeitig geschehen, sind dies auch in einem zweiten Bezugssystem, welche wir via Galilei-Transformation erhalten.

Dieses Prinzip gilt in der Einsteinschen Relativitätstheorie nicht. Betrachten wir dazu einen Körper und seine Trajektorie, welche wir als Sequenz von instantanen Ereignissen betrachten können. In Raum-Zeit Koordinaten ergibt diese Sequenz von Ereignissen eine sogenannte <u>Weltlinie</u>:



Die wichtigste Eigenschaft der relativen Bewegung zweier Inertialsysteme im Einsteinschen Sinne ist, daß keine Beschleunigung auftritt. Das bedeutet insbesondere, daß eine gleichförmige (uniforme) Bewegung in einem Inertialsystem in eine gleichförmige Bewegung in einem anderen Inertialsystem übergeht: <u>gerade Weltlinien gehen in gerade Weltlinien über</u>.

Die allgemeinste Form dieser Transformation ist also jene der <u>affinen Transformationen</u>

lineare Abbildung $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$

$$\boxed{x' = \Lambda x + b}$$

Vektor in $\mathbb{R}^4$, $b=0$ homogene Transformati

wobei $x' = (ct', x', y', z')$ und $x = (ct, x, y, z)$ Vektoren im 4-dim.

Bevor wir diese allgemeinen affinen Transformationen und speziell die Form der Übergangsmatrix Λ bestimmen wollen, wollen wir uns noch folgender Beobachtung bewußt werden:

Unsere obigen Überlegungen zu Transformationen zwischen Inertialsystemen, lassen uns überdies zu, Inertialsysteme an sich zu definieren:

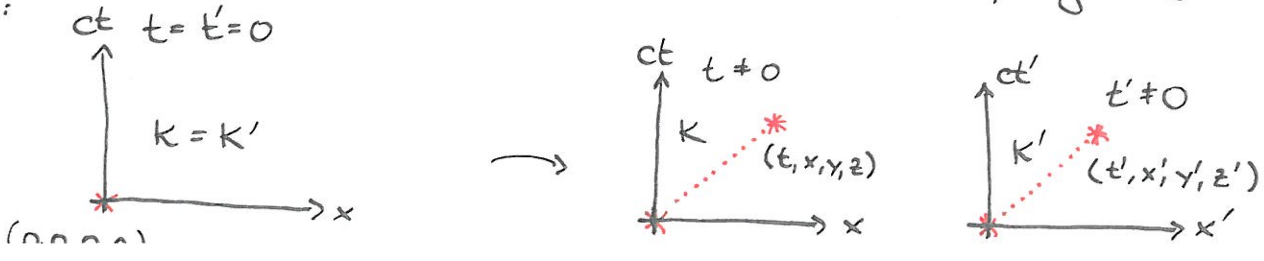
> Ein Inertialsystem ist ein Bezugssystem, in welchem die Bewegung eines Körpers, welcher keinen Kräften unterliegt, eine geradlinige Weltlinie beschreibt.

Hierbei ist der absolute Charakter dieser Aussage zu beachten. Während sich also das Konzept von Raum und Zeit nicht absolut formulieren lässt, können wir Inertialsysteme absolut bestimmen.

Obige Definition schließt also insbesondere rotierende Bezugssysteme aus — warum?

Betrachten wir nun Einsteins zweites Postulat der konstanten Lichtgeschwindigkeit näher, was uns auch ein Stück weiter bringen wird die oben erwähnten affinen Transformationen näher zu bestimmen.

Betrachten wir hierzu zwei Inertialsysteme K und K', welche durch eine homogene Transformation miteinander verbunden seien, d.h. für welche zum Zeitpunkt $t=t'=0$ der Ursprung übereinstimme:



Zum Zeitpunkt $t = 0$ sende nun eine Quelle am Ort $\vec{x} = 0$ ein Lichtsignal aus. Im Inertialsystem K bewegt sich die Wellenfront des Lichtsignals auf einer Weltlinie, für welche gilt:

$$\boxed{K: \quad \vec{x}^{\,2} - c^2 t^2 = 0} \quad ,$$

d.h. die Wellenfront propagiert mit der Lichtgeschwindigkeit.

Nach Einsteins zweitem Postulat gilt aber ebendies auch für das bewegte Inertialsystem K', wo sich das Lichtsignal also ebenfalls mit der Geschwindigkeit c ausbreitet. Es gilt also auch in K':

$$\boxed{K': \quad \vec{x}^{\,\prime 2} - c^2 t^{\prime 2} = 0}$$

Damit stellen wir fest, daß ein auf die obige Art und Weise berechneter Abstand zwischen zwei Ereignissen, Emission eines Photons bei $(0,0,0,0)$ und Absorption eines Photons bei (t, x, y, z) bzw. (t', x', y', z'), in beiden Inertialsystemen den gleichen Wert (hier $= 0$) annimmt. Auf der Verallgemeinerung dieses Konzept (Gleichheit der Abstände) fußt schließlich die sogenannte Lorentz-Transformation, welche eben jene affine Transformation darstellt, nach der wir Ausschau gehalten haben.

Lorentz – Transformationen

Zur Vereinfachung der Schreibweise nummerieren wir die Raum - Zeit - Koordinaten x^α im folgenden von $\alpha = 0$ bis $\alpha = 3$

$$(x^\alpha) = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z),$$

wobei wir die Indices immer oben schreiben (Konvention), und griechische Indices im Allgemeinen von 0..3 laufen.

Wir definieren

$$\eta = (\eta_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Damit können wir den Abstand zwischen zwei infinitesimal benachbarten Ereignissen schreiben als

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = \sum_{\alpha=0}^{3} \sum_{\beta=0}^{3} \eta_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta$$

$$\equiv \eta_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta$$

wobei wir im letzten Schritt die Summenkonvention benutzt haben: Über zwei gleiche Indices (einer unten, einer oben) wird summiert.

Es soll für zwei Inertialsysteme K und K' gelten

$$\boxed{ds^2 = ds'^2} \qquad (*)$$

Im folgenden wollen wir die Transformation aufstellen, welche die Gleichung (*) erfüllt.

Ansatz:

$$\boxed{x'^\alpha = \Lambda^\alpha{}_\beta \, x^\beta + b^\alpha}$$ Lorentz-Transformatio

wobei $\Lambda^\alpha{}_\beta$ und b^α von der Relation zwischen K und K' abhängen, aber nicht von den Koordinaten (Homogenität von Raum und Zeit).

Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda^0{}_0 & \Lambda^0{}_1 & \Lambda^0{}_2 & \Lambda^0{}_3 \\ \Lambda^1{}_0 & \Lambda^1{}_1 & \Lambda^1{}_2 & \Lambda^1{}_3 \\ \Lambda^2{}_0 & \Lambda^2{}_1 & \Lambda^2{}_2 & \Lambda^2{}_3 \\ \Lambda^3{}_0 & \Lambda^3{}_1 & \Lambda^3{}_2 & \Lambda^3{}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b^0 \\ b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{pmatrix}$$

bzw. $\underline{x' = \Lambda x + b}$ wie zuvor mit $x' = (x'^\alpha)$, $\Lambda = (\Lambda^\alpha{}_\beta)$

Es gilt: $dx'^\alpha = \Lambda^\alpha{}_\beta \, dx^\beta$

Beweis: Betrachte $\Delta x'^\alpha = x_1'^\alpha - x_2'^\alpha = \Lambda^\alpha{}_\beta x_1^\beta + b^\alpha - \Lambda^\alpha{}_\beta x_2^\beta - b^\alpha$

$$= \underline{\Lambda^\alpha{}_\beta (x_1^\beta - x_2^\beta) = \Lambda^\alpha{}_\beta \, \Delta x^\beta}$$

Aus der Invarianz $ds^2 = ds'^2$ folgt damit:

$$\left.\begin{aligned} ds'^2 &= \eta_{\alpha\beta} dx'^\alpha dx'^\beta &&= \eta_{\alpha\beta} \Lambda^\alpha{}_\gamma dx^\gamma \Lambda^\beta{}_\delta dx^\delta \\ &= ds^2 &&= \eta_{\gamma\delta} dx^\gamma dx^\delta \end{aligned}\right\}$$ Diese Gleichung soll für beliebige dx gelten

$$\rightarrow \quad \Lambda^\alpha{}_\gamma \Lambda^\beta{}_\delta \eta_{\alpha\beta} = \eta_{\gamma\delta}$$

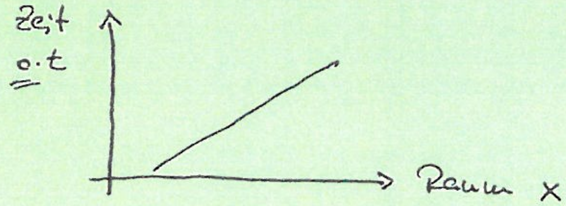
Zusammenfassung letzte Vorlesung

- Einsteins Relativitätsprinzip

  1) Alle Inertialsysteme sind gleichwertig.

  2) Licht pflanzt sich in jedem Inertialsystem mit derselben Lichtgeschwindigkeit c aus.

- Ein Inertialsystem ist ein Bezugssystem, in welchem die Bewegung eines Körpers, welcher keinen Kräften unterliegt, eine geradlinige Weltlinie beschreibt



- Vierer-Vektoren $(x^\alpha) = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$

$$\eta = (\eta_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

$\longrightarrow$ Viererabstände

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \equiv \eta_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta$$

(Summenkonvention)

- $ds^2 = ds'^2 \longrightarrow$ Lorentz-Transformation

$$x'^\alpha = \Lambda^\alpha{}_\beta\, x^\beta + b^\alpha$$

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta \qquad \Lambda^\alpha{}_\gamma\, \Lambda^\beta{}_\delta\, \eta_{\alpha\beta} = \eta_{\gamma\delta}$$