Makroskopische Elektrodynamik

Wir wenden uns nun einem weiteren wesentlichen Themenkomplex zu – nämlich der Frage, wie wir elektromagnetische Felder in Anwesenheit von Materie verstehen und quantitativ beschreiben können. Dies wird auch als makroskopische Elektrodynamik bezeichnet.

Puristisch betrachtet müßten wir in einer solchen Situation $O(10^{23})$ Träger von elektrischen und/oder magnetischen Momenten – Elektronen, Protonen, Neutronen, ... – im vorgegebenen Stück Materie betrachten.

Wir werden die mikroskopischen Felder dieser Quellen mit $\vec{e}, \vec{h}$, usw. bezeichnen, für welche die "mikroskopischen Maxwell-Gleichungen" gelten:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{e} = 4\pi\,\rho_\mu$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{b} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{e} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}_\mu$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{e} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{b} = 0$$
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{b} = 0$$

wobei ρ_μ und $\vec{j}_\mu$ die mikroskopischen Ladungs- und Stromdichten seien.

Es ist ziemlich offensichtlich, daß ein solcher mikroskopischer Ansatz nicht zum Erfolg führen kann: Zum einen wird es uns nicht gelingen $O(10^{23})$ dynamische Quellen via diese Differentialgleichungen beschreiben zu können. Zum anderen sind wir uns vollends bewußt, daß die mikroskopischen Quellen und ihre Dynamik letztendlich quantenmechanisch beschrieben werden müßten und eben nicht durch klassische Felder.

Tatsächlich ist es so, daß uns die mikroskopischen Felder am Ende des Tages auch gar nicht interessieren, vielmehr sind wir (im Kontext der klassischen Elektrodynamik) vielmehr daran interessiert, das System auf klassischen Skalen – makroskopischen Skalen – zu beschreiben.

Im folgenden wollen wir also eine makroskopische Theorie erarbeiten, in welcher die mikroskopischen Freiheitsgrade der Materie in effektiven Termen vereinheitlicht werden.

Makroskopische Maxwell - Gleichungen

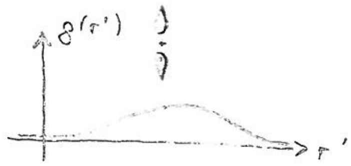
Führen wir zunächst makroskopische Felder ein, welche über die mikroskopischen Felder mitteln

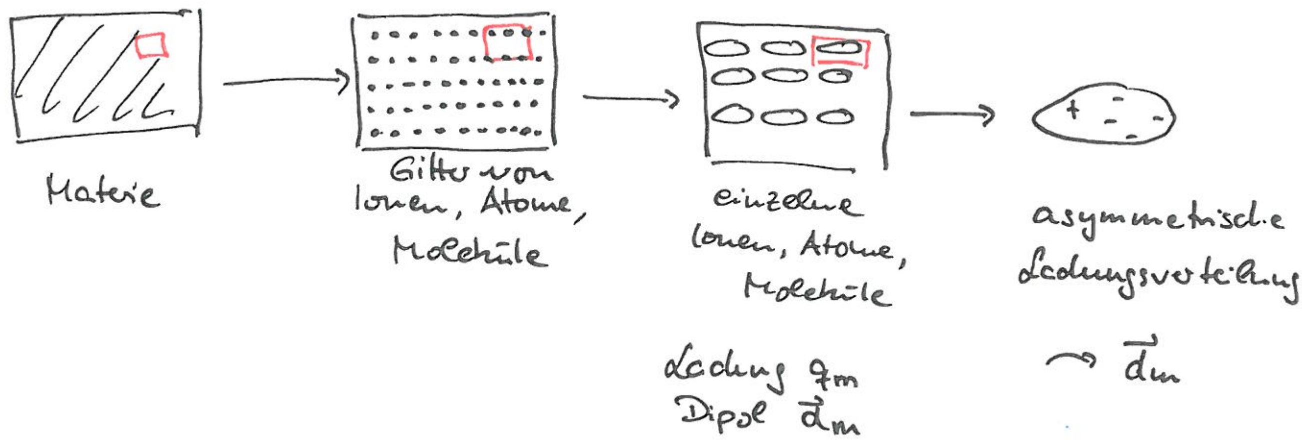
$$\vec{E} = \langle \vec{e} \rangle \quad \text{und} \quad \vec{B} = \langle \vec{b} \rangle$$

wobei das Mittel $\langle \dots \rangle$ definiert sei via

$$\langle f(\vec{r}) \rangle = \int d^3r' \, f(\vec{r} - \vec{r}') \, g(\vec{r}')$$

wobei $g(\vec{r}')$ eine Gewichtsfunktion ist, normiert auf $\int d^3r' \, g(\vec{r}') = 1$, und welche über hinreichend große Längenskalen im Raum zerfällt.





Das Mittel kommutiert mit $\left\{ \begin{matrix} \text{räumlichen} \\ \text{zeitlichen} \end{matrix} \right\}$ Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x} \vec{E} = \langle \frac{\partial}{\partial x} \vec{e} \rangle$.

Damit erhalten wir die gemittelten Maxwell - Gleichungen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi \langle \rho_M \rangle$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} = \frac{4\pi}{c} \langle \vec{j}_M \rangle$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

Gemittelte Quellen

Um das Mitteln der Quellen in einem Festkörper besser zu verstehen, müssen wir uns vergegenwärtigen, daß es im Festkörper zwei verschiedene Arten von Quellen geben kann: Zum einen gibt es gebundene (oder "lokalisierte") Ladungen – Kernladungen und Valenzelektronen – welche sich nicht weiter als eine Verschiebung $\vec{a}_{m,j}$ vom Zentrum eines Moleküls / Ions am Ort $\vec{r}_m$ befinden. Zum anderen gibt es (besonders in metallischen Systemen) freie Leitungselektronen, welche sich an beliebigen Orten im Raum $\vec{r}_i(t)$ befinden können.

Wir bezeichnen die entsprechenden Ladungsdichten mit ρ_b und ρ_f, für welche gelte: $\rho_\mu = \rho_b + \rho_f$, wobei

$$\rho_b(\vec{r},t) = \sum_{m,j} q_{m,j}\, \delta(\vec{r} - \vec{r}_m(t) - \vec{a}_{m,j}(t))$$

und

$$\rho_f(\vec{r},t) = e \sum_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i(t))$$

Damit können wir das makroskopische Mittel der gebundenen Ladungen berechnen wie folgt:

$$\langle \rho_b(\vec{r}) \rangle = \int d^3r'\, g(\vec{r}') \sum_{m,j} q_{m,j}\, \delta(\vec{r} - \vec{r}' - \vec{r}_m - \vec{a}_{m,j})$$

$$= \sum_{m,j} g(\vec{r} - \vec{r}_m - \vec{a}_{m,j}) \cdot q_{m,j}$$

Taylor-Entwicklung um den Offset $\vec{a}$ möglich, weil g sich auf deutlich größeren Skalen verändert

$$\simeq \sum_m q_m \, g(\vec{r} - \vec{r}_m) - \vec{\nabla} \sum_m g(\vec{r} - \vec{r}_m) \cdot \underbrace{\sum_j \vec{a}_{m,j} \cdot q_{m,j}}_{= \vec{d}_m}$$

$$= \sum_m q_m \langle \delta(\vec{r} - \vec{r}_m) \rangle - \vec{\nabla} \cdot \vec{P}(\vec{r})$$

wobei

$$\boxed{\vec{P}(\vec{r}, t) \equiv \left\langle \sum_m \delta(\vec{r} - \vec{r}_m(t)) \, \vec{d}_m(t) \right\rangle}$$

die <u>mittlere Polarization des Mediums</u> ist.

Die mittlere Dichte der mobilen Ladungsträger ist

$$\langle \rho_f(\vec{r}, t) \rangle = \langle e \sum_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i(t)) \rangle$$

so daß wir für die mittlere (Gesamt-)Ladungsdichte erhalten

$$\boxed{\langle \rho_\mu(\vec{r}, t) \rangle = \rho_{mittel}(\vec{r}, t) - \vec{\nabla} \cdot \vec{P}(\vec{r}, t)}$$

wobei

$$\rho_{mittel}(\vec{r}, t) = \left\langle \overbrace{\sum_m q_m \, \delta(\vec{r} - \vec{r}_m(t))}^{\text{positive Ladung der Ionen}} + \overbrace{e \sum_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i(t))}^{\text{negative Ladung der Elektronen}} \right\rangle$$

sei. Hierbei betrachten wir Atome/Moleküle als punktförmige Ladungen. Deren Polarisierbarkeit geht im zweiten Term ein.

Die meisten Festkörper sind im Mittel ladungsneutral, d.h. die positive Ladung der Ionen (erster Term) und die negativen Ladungen der Elektronen (zweiter Term) kompensieren sich gegenseitig: $\rho_{\text{mittel}}(\vec{r},t) = 0$

Damit haben wir

$$\boxed{\langle \rho_\mu(\vec{r},t)\rangle = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P}(\vec{r},t)} \qquad (*)$$

wobei $\vec{P}(\vec{r},t)$ die oben angegebene gemittelte Polarisation ist.

Das elektrische Feld in einem Medium läßt sich dann ausdrücken als Summe der gemittelten mikroskopischen Ladungsdichte und einer "externen" Ladungsdichte

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = +4\pi\,(\underbrace{\rho}_{\text{externe Ladungsdichte}} + \langle\rho_\mu\rangle)}$$

Woher kommt die externe Ladungsdichte?

- ein Materiestück im elektrischen Feld eines Kondensators, (oder im magnetischen Feld einer Spule)
- zusätzliche Ladungen (oder Ströme) können auf oder in das Materiestück gebracht werden → el.-mag. Feld im Festkörper
- Materiestück im Feld einer el.-mag. Welle

Gemittelte Stromdichten

Analog zu den Ladungsdichten können wir auch die mikroskopischen Stromdichten $\vec{J}_\mu$ mitteln (was allerdings eine etwas elaboriertere Rechnung ist → siehe Altland Skript).

Als Ergebnis erhält man

$$\langle \vec{J}_\mu \rangle \simeq \vec{J}_{mittel} + \dot{\vec{P}} + c\vec{\nabla} \times \vec{M}$$

wobei $\vec{M}(\vec{r})$ die mittlere Dichte magnetischer Dipolmomente im System ist

$$\vec{M}(\vec{r}) = \left\langle \sum_m \delta(\vec{r} - \vec{r}_m) \frac{1}{2c} \sum_j q_{m,j} \, \vec{a}_{m,j} \times \dot{\vec{a}}_{m,j} \right\rangle .$$

Die mittlere Stromdichte wiederum ergibt sich aus einem Beitrag der (punktförmigen) Ionen und der freien Elektronen

$$\vec{J}_{mittel} = \left\langle \sum_m q_m \dot{\vec{r}}_m \, \delta(\vec{r} - \vec{r}_m) \right\rangle + \left\langle e \sum_i \dot{\vec{r}}_i \, \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) \right\rangle$$

Ähnlich dem Verschwinden der mittleren Ladungsdichte, gilt für die meisten Festkörper, daß die mittlere Stromdichte verschwinden muß

$$\vec{J}_{mittel} = 0$$

so daß

$$\boxed{\langle \vec{J}_\mu \rangle = \dot{\vec{P}} + c\vec{\nabla} \times \vec{M}} \qquad (**)$$

Damit können wir nun – analog zum elektrischen Feld – das makroskopische Magnetfeld unter Einbeziehung einer "externen" Stromdichte $\vec{J}$ via die folgende makroskopische Maxwell-Gleichung beschreiben:

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{E} = \frac{4\pi}{c}\left(\vec{J} + \langle \vec{J}_\mu \rangle\right)}$$

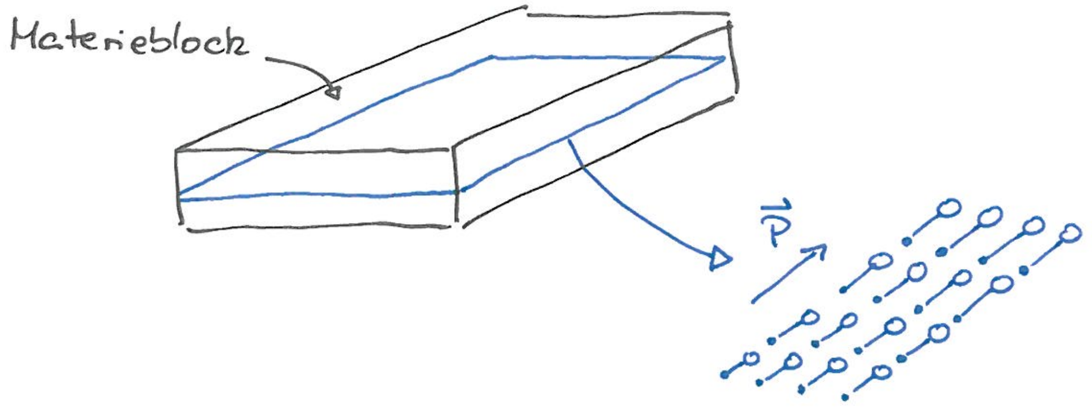
Interpretation (Quellterme)

Wir wollen an dieser Stelle noch einmal zurücktreten, um die bisherigen Betrachtungen einzuordnen. Speziell wollen wir die beiden Gleichungen, welche das räumliche Mittel der mikroskopischen Quellen berechnen verschieden interpretieren:

$$\langle \rho_\mu(\vec{r},t) \rangle = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P}(\vec{r},t) \quad \text{und} \quad \langle \vec{J}_\mu(\vec{r},t) \rangle = \frac{\partial}{\partial t}\vec{P}(\vec{r},t) + c\,\vec{\nabla}\times\vec{M}(\vec{r},t$$

Betrachten wir dazu zunächst die rechten Seiten dieser Gleichungen. Die mittlere Ladungsdichte etwa sei gegeben als Divergenz eines Vektorfelds $\vec{P}$, welches die mittlere Polarisation des Mediums darstellt.

Betrachten wir zur Interpretation dieses Resultats folgende Skizze:



mikr. Elemente $\circ\!\!-\!\!\bullet$ sind polarisiert in eine Richtung

→ Polarisierung beschrieben durch Vektorfeld $\vec{P}$

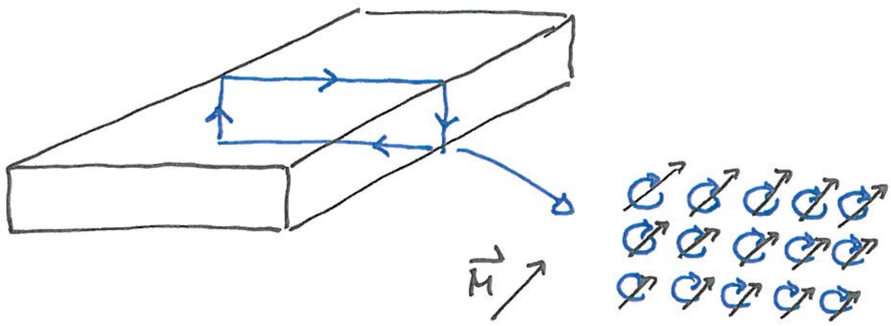
Im Inneren (bulk) des Materieblocks neutralisieren sich positive und negative Enden der mikroskopischen Dipole $\circ\!\!-\!\!\bullet$, so daß netto keine Ladungsdichte verbleibt. Dies entspricht auch unserer Annahme, daß der Materieblock elektrisch neutral sei.

Am Rand hingegen ergibt sich ein anderes Bild – dort akkumuliert sich unkompensierte positive (bzw. negative) Ladung am oberen (unteren) Rand in unserem Beispiel. Somit ergibt sich am Rand eine endliche Ladungsdichte.

Formal beginnt und endet das Vektorfeld $\vec{P}$ am Rand (und hat damit dort seine Quellen), so daß die Divergenz $\vec{\nabla}\cdot\vec{P}$ hier nicht verschwindet. Dies erklärt das Auftreten dieser Divergenz der Polarisation in den Maxwell-Gleichungen.

Eine zeitliche Änderung der Polarisierung $\frac{\partial}{\partial t}\vec{P} \neq 0$, wie sie etwa durch Fluktuationen der Orientierung von polaren Molekülen hervorgerufen wird, können wir als Bewegung von Ladungen parallel zu $\vec{P}$ interpretieren. Damit entspricht die Rate $\frac{\partial}{\partial t}\vec{P}$ einer Stromdichte in Richtung von $\vec{P}$, welche sich im kompletten Materieblock ergibt. Deshalb erscheint $\frac{\partial}{\partial t}\vec{P}$ als Quelle einer Stromdichte in den Maxwell-Gleichungen.

Schließlich können wir ähnliche Betrachtungen für eine nicht-verschwindende Magnetisierung anstellen:



Eine solche endliche Magnetisierung entspricht dem Fluß eines zirkular-orientierten Flusses in der Ebene senkrecht zu $\vec{M}$. Im Inneren löschen sich diese Ströme gegenseitig aus, am Rand bleibt ein Oberflächenstrom bestehen.
Formal wird dieser Oberflächenstrom via die Rotation von $\vec{M}$ beschrieben, was erklärt, weshalb $c\vec{\nabla}\times\vec{M}$ als Quellenterm in den Maxwell-Gleichungen auftaucht.

Interpretation (Felder)

In unserer obigen Diskussion haben wir die Terme $\vec{\nabla}\cdot\vec{P}$, $\frac{\partial}{\partial t}\vec{P}$ und $\vec{\nabla}\times\vec{M}$ als Quellterme in den Maxwell-Gleichungen interpretiert. Es bleibt die Frage, wie diese Quellterme in einem Medium tatsächlich entstehen.
Dazu sollten wir uns vor Augen führen, daß die allerwenigsten Materialien in Abwesenheit von externen Feldern $\vec{E}=0, \vec{B}=0$ eine spontane Magnetisierung oder Polarisierung zeigen.

[Tatsächlich gibt es solche Materialien insbesondere in der Form sogenannter Ferromagnete (spontane Magnetisierung) wie Eisen, Kobalt, Nickel oder sogenannter Ferroelektrika (spontane Polarisierung) wie die Seignettesalze.
Eine noch kleinere Gruppe von Materialien zeigt beide Phänomene – spontane Magnetisierung und Polarisierung – simultan. Diese werden Multiferroica genannt.
Die technischen Anwendungsmöglichkeiten all dieser Materialien ist hoch, weshalb es ein nachhaltiges Interesse an weiteren Untersuchungen + Synthese solcher Materialien gibt.]

In den meisten Materialien haben wir also stattdessen den Fall, daß die auftretenden Magnetisierungen und Polarisierungen sehr sensitiv auf die im Material befindlichen magnetischen und elektrischen Felder sind.

Insbesondere heißt dies, daß es eines externen elektrischen Feldes bedarf, um die mikroskopischen Dipolmomente zu polarisieren und eine endliche Polarisierung zu erzeugen. Entsprechend bedarf es eines äußeren Magnetfelds um eine endliche Magnetisierung zu erzeugen.

$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 4\pi\varrho - \vec{\nabla}\cdot\vec{P}$

Damit verbinden wir aber auf nicht-triviale Weise die Felder auf der linken Seite der Maxwell-Gleichungen mit den Quellen auf der rechten Seite, so daß deren Lösung ein Selbstkonsistenz-Problem aufwirft:

Eine externe Ladungsdichte ϱ in einem Medium erzeugt ein elektrisches Feld. Dieses Feld wiederum erzeugt eine Polarisierung $\vec{P}[\vec{E}]$, welche wiederum die elektrischen Quellterme modifiziert

$$\varrho \rightarrow \varrho_{eff}[\vec{E}] = \varrho - \vec{\nabla}\cdot\vec{P}[\vec{E}]$$

Unsere Aufgabe besteht also darin, die Maxwell-Gleichung

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 4\pi\varrho_{eff}[\vec{E}]$$

zu lösen, wobei eben zu beachten ist, daß die Quellterme von dem von ihnen erzeugten elektrischen Feldern abhängen.

In ähnlicher Form stellt sich dieses Selbstkonsistenzproblem auch für die Stromdichten und die erzeugten/rückkoppelnden elektrische und magnetische Felder.

Selbstkonsistente Lösungen der Maxwell-Gleichungen

Um eine selbstkonsistente Lösung der Maxwell-Gleichungen zu erarbeiten, werden wir hierzu die Polarisation und Magnetisierung noch einmal neu interpretieren.

Hierzu schreiben wir die erste Maxwell-Gleichung um

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} + 4\pi \vec{P}) = 4\pi \underbrace{\rho}_{\text{"externe" Ladungsdichte}}$$

Die Form dieser Gleichung schlägt vor, ein neues Feld

$$\boxed{\vec{D} = \vec{E} + 4\pi \vec{P}}$$

einzuführen, welches wir dielektrisches Verschiebungsfeld nennen. Die Quellen des dielektrischen Verschiebungsfeldes sind die externen Ladungsdichten

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 4\pi \rho$$

Damit kommen wir auch zu einer unterschiedlichen Interpretation der Polarisierung: Zuvor hatten wir das elektrische Feld $\vec{E}$ als Summe der externen Ladungsdichte und der internen, polarisierten Ladungsdichten interpretiert. Jetzt betrachten wir ein fiktives Verschiebungsfeld $\vec{D}$ dessen Quellen allein aus externen Ladungsdichten besteht und die Polarisierung in eben diese "Verschiebung" eingeht.

Ähnlich können wir nun mit der zweiten Maxwell-Gleichung verfahren:

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{E} = \frac{4\pi}{c}\left(\vec{J} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{P} + c\,\vec{\nabla}\times\vec{M}\right)$$

$$\rightarrow \quad \vec{\nabla}\times\underbrace{\left(\vec{B} - 4\pi\vec{M}\right)}_{\vec{H}} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\left(\vec{E} + 4\pi\vec{P}\right)}_{\vec{D}} = \frac{4\pi}{c}\vec{J}$$

Die Form dieser Gleichung motiviert die Einführung einer magnetischen Feldstärke

$$\vec{H} = \vec{B} - 4\pi\vec{M} \quad ,$$

so daß wir Maxwell-Gleichungen erhalten, die ausschließlich von den externen Stromdichten $\vec{J}$ abhängen:

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{D} = \frac{4\pi}{c}\vec{J}$$

Die magnetische Feldstärke $\vec{H}$ spielt damit eine ähnliche Rolle wie das dielektrische Verschiebungsfeld $\vec{D}$. Sie hängt nur von den äußeren Dichten ab. Die Feldstärke $\vec{H}$ unterscheidet sich vom Magnetfeld $\vec{B}$ – welches ein Magnetometer in dem Materieblock messen würde – um den Beitrag der Magnetisierung.

Elektrische und magnetische Suszeptibilitäten

In unseren obigen Betrachtungen zum Selbstkonsistenz-Problem der Maxwell-Gleichungen in Materie hatten wir schon antizipiert, daß die Polarisierung typischerweise durch ein elektrisches Feld induziert wird:

$$\boxed{\vec{P} = \vec{P}[\vec{E}]}$$

Dabei gilt es nun zu beachten, daß die externen elektrischen Felder, welche eine endliche Polarisierung erzeugen, erheblich kleiner sind als die intrinsischen mikroskopischen Felder, welche den Festkörper zusammenhalten.

Dies bedeutet, daß wir die Abhängigkeit von Polarisation zu elektrischem Feld durch eine lineare Abhängigkeit (führende Abhängigkeit, "linear response") approximieren können.

Die allgemeinste Form dieser linearen Abhängigkeit hat die Form

$$\boxed{\vec{P}(\vec{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3r' \int dt' \, \chi(\vec{r},t;\vec{r}',t') \, \vec{E}(\vec{r}',t')}$$

also eine Konvolution von χ und $\vec{E}$, wobei $\boxed{\chi}$ die sogenannte elektrische Suszeptibilität des Medium sei, $t > t'$ gelte, und der Faktor $\frac{1}{(2\pi)^4}$ zur späteren Erleichterung gewählt wurde.

Die el. Suszeptibilität beschreibt also, wie ein elektrisches Feld am Ort $\vec{r}'$ zur Zeit t' die Polarisation am Ort $\vec{r}$ zur Zeit t beeinflußt. Die el. Suszeptibilität ist eine allgemeine Materialeigenschaft.

Tatsächlich läßt sich der Zusammenhang zwischen Polarisierung und elektrischem Feld noch eleganter formulieren, indem man in den Fourier-Raum wechselt:

$$\vec{P}(q) = \chi(q)\,\vec{E}(q)$$

wobei $q = \begin{pmatrix} \omega/c \\ \vec{k} \end{pmatrix}$ ein vier-dimensionaler Vektor im Frequenz- und Impulsraum sei.

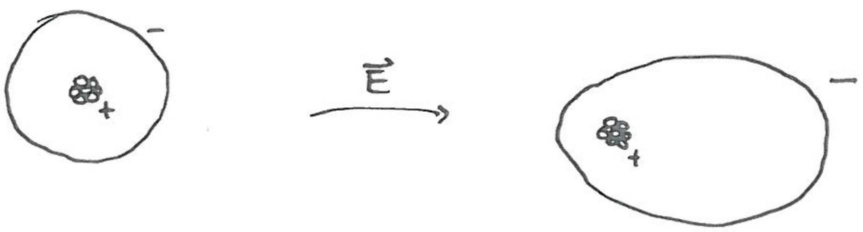
Damit ergibt sich dann auch für das dielektrische Verschiebungsfeld ein linearer Zusammenhang

$$\boxed{\vec{D}(q) = \varepsilon(q)\,\vec{E}(q) \qquad \text{wobei} \quad \varepsilon(q) = 1 + 4\pi\,\chi(q)}$$

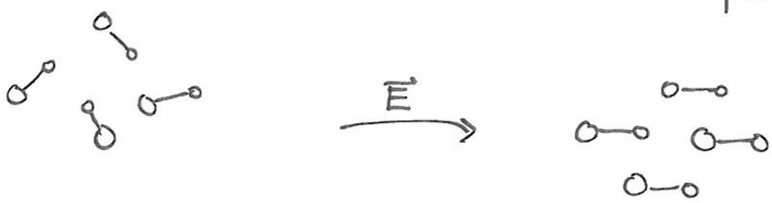
Die Funktion $\boxed{\varepsilon(q)}$ wird dabei als dielektrische Funktion bezeichnet.

Auf mikroskopischer Ebene können wir eine Reihe von unterschiedlichen Mechanismen identifizieren, welche eine Feld-induzierte Polarisation herbeiführen:

1) Verzerrung der Elektronenwolke in neutralen Atomen/Molekül



2) Orientierung von Molekülen mit permanentem Dipolmoment



Wie die tatsächliche Abhängigkeit der dielektrischen Funktion von Frequenz und Impuls für einen gegebenen Materiezustand aussieht, geht über die feldtheoretischen Betrachtungen der klassischen Elektrodynamik hinaus und ist Aufgabe für spezialisiertere Gebiete wie die Festkörpertheorie oder Plasmaphysik.

Dabei stellt sich durchaus heraus, daß eine Abhängigkeit der dielektrischen Funktion von Frequenz und Impuls – etwa im Bereich der Plasma- oder Metallphysik – nicht vernachlässigbar ist. Ein entsprechendes Beispiel werden wir in der nächsten Vorlesung besprechen. Dennoch wird oft als einfachste Näherung ebendiese Abhängigkeit vernachlässigt, und angenommen daß

$$\varepsilon(q) \approx \varepsilon$$

das heißt (siehe Fourier-transformationen), daß
$\chi(\vec{r}, t; \vec{r}\,', t') \propto \delta(\vec{r} - \vec{r}\,') \cdot \delta(t - t')$ angenommen wird.

Damit ergibt sich der stark vereinfachte Zusammenhang

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

wobei ε als Materialkonstante zu bestimmen ist.

Analoge Überlegungen können wir nun auch für das magnetische Feld und die von ihm erzeugte Magnetisierung anstellen: Die erzeugte Magnetisierung $\vec{M}$ hängt vom äußeren Magnetfeld $\vec{H}$ ab

$$\boxed{\vec{M} = \vec{M}[\vec{H}]}$$

und ist deutlich geringer als die intrinsischen mikroskopischen Felder. Es gilt:

$$\vec{B} = \vec{H} + 4\pi \vec{M}[\vec{H}],$$

wobei $\vec{M}[\vec{H}]$ linear von $\vec{H}$ abhänge, was wir wiederum ausdrücken können als

$$\vec{M}(\vec{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3r' \int dt' \; \chi_m(\vec{r},t;\vec{r}',t')\, \vec{H}(\vec{r}',t')$$

wobei wir mit $\boxed{\chi_m}$ die magnetische Suszeptibilität bezeichnen. Die magnetische Suszeptibilität beschreibt also wiederum wie ein magnetisches Feld am Ort $(\vec{r}',t')$ die Magnetisierung am Ort $(\vec{r},t)$ beeinflußt.

In kompletter Analogie zu unseren Betrachtungen im elektrischen Sektor, können wir also wieder in den Fourier-Raum wechseln

$$\boxed{\vec{M}(q) = \chi_m(q)\, \vec{H}(q)} \qquad q = \begin{pmatrix} \omega/c \\ \vec{k} \end{pmatrix}$$

so daß

$$\boxed{\vec{B}(q) = \mu(q)\, \vec{H}(q)} \quad \text{mit} \quad \boxed{\mu(q) = 1 + 4\pi \chi_m(q)}$$

wobei $\boxed{\mu(q)}$ die sogenannte magnetische Permeabilität ist.

Und wiederum wird oft die Näherung gemacht, daß die Permeabilität keine explizite Abhängigkeit von Frequenz und Impuls besitze, so daß vereinfacht gelte

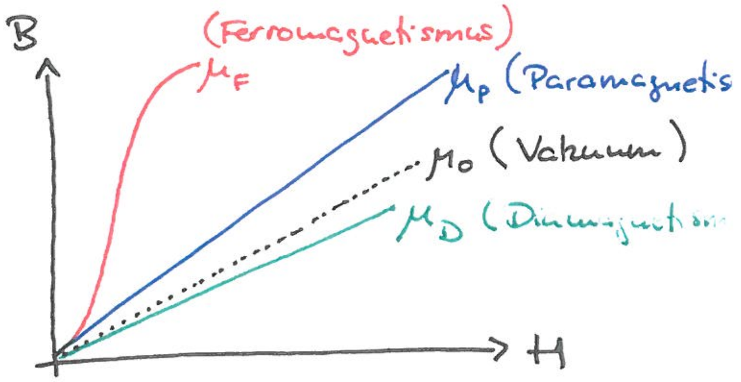
$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

wobei μ eine zu bestimmende Materialkonstante sei.

Auf mikroskopischer Ebene unterscheiden wir wiederum unterschiedliche Mechanismen, welche eine magnetische Permeabilität $\boxed{\mu \neq 1}$ induzieren: In Abwesenheit von intrinsischen magnetischen Momenten können ebensolche induziert werden, etwa indem das äußere Magnetfeld Ströme in Molekülen induziert. Diese induzierten magnetischen Momente zeigen in die entgegengesetzte Richtung des äußeren magnetischen Feldes — ein Effekt, dessen mikroskopische Beschreibung nicht ganz trivial ist und im Bereich der Quantenmechanik angesiedelt ist. Am stärksten ist er in Supraleitern, welche das äußere Magnetfeld im Inneren komplett kompensieren (→ Meissner Effekt) (Siehe auch Geim → schwebende Frösche). Damit ergibt sich $\boxed{\mu < 1}$, wobei $1-\mu \sim O(10^{-4})$ ist. Dies nennt man Diamagnetismus.

Moleküle, welche ein kleines endliches magnetisches Moment besitzen, können wiederum orientiert werden, was in einer Verstärkung des äußeren Magnetfeld resultiert, so daß $\boxed{\mu > 1}$ — dies nennt man Paramagnetismus. Typische Größenordnung $\mu - 1 \sim O(10^{-5})$ bis $O(10^{-2})$

Damit können wir die unterschiedlichen Formen von Magnetismus zusammenfassen:



Zusammenfassung (Elektrodynamik in Materie)

- Die räumlich gemittelten Ladungs- und Stromdichten erzeugen das dielektrische Verschiebungsfeld $\vec{D}$ und das magnetische Feld $\vec{H}$.

- Diese Felder bestimmen das elektrische Feld $\vec{E}$ und das magnetische Feld / die magnetische Induktion $\vec{B}$ via

$$\vec{D}(q) = \varepsilon(q)\vec{E}(q) \qquad \varepsilon(q) = 1 + 4\pi\chi(q)$$

und

$$\vec{B}(\vec{q}) = \mu(q)\vec{H}(q) \qquad \mu(q) = 1 + 4\pi\chi_m(q)$$

- Im Experiment bestimmen wir immer die Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$. Es sind auch diese Felder, welche die Kopplung zwischen Feldern und Materie (etwa via die Lorentz-Kraft) beschreiben. Entsprechend gelten die homogenen Maxwell-Gleichungen (in Abwesenheit von Materie) immer für $\vec{E}$ und $\vec{B}$.

Zusammenfassung letzte Vorlesung

Makroskopische Elektrodynamik

- räumlich gemittelten Maxwell-Gleichungen

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 4\pi\langle\rho_\mu\rangle$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{E} = \frac{4\pi}{c}\langle\vec{j}_\mu\rangle$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} = 0$$
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$$

wobei: $\vec{E} = \langle\vec{e}\rangle$ (mikroskopische Felder)

$\vec{B} = \langle\vec{b}\rangle$

mit Mittel

$$\langle f(\vec{r})\rangle = \int d^3r'\, f(\vec{r}-\vec{r}')\, g(\vec{r}')$$

Gewichtsfunktion

- $\langle\rho_\mu(\vec{r},t)\rangle = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P}(\vec{r},t) + \rho_{\text{mittel}}$ $\quad \rho_{\text{mittel}} = 0$

mit Polarisation $\vec{P}(\vec{r},t) = \left\langle \sum_m \delta(\vec{r}-\vec{r}_m(t))\,\vec{d}_m(t)\right\rangle$

$$\rightarrow \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 4\pi(\rho + \langle\rho_\mu\rangle) = 4\pi\rho - \vec{\nabla}\cdot\vec{P}$$

ρ: "externe" Ladungsdichte

- $\langle\vec{j}_\mu(\vec{r},t)\rangle = \frac{\partial}{\partial t}\vec{P}(\vec{r},t) + c\,\vec{\nabla}\times\vec{M}(\vec{r},t)$

mit Magnetisierung $\vec{M}(\vec{r},t) = \left\langle \sum_m \delta(\vec{r}-\vec{r}_m(t))\,\frac{1}{2c}\sum_j q_{mj}\,\vec{a}_{mj}(t)\times\frac{\partial}{\partial t}\vec{a}_{mj}(\right.$

$$\rightarrow \quad \vec{\nabla}\times\vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{E} = \frac{4\pi}{c}\left(\vec{j} + \langle\vec{j}_\mu\rangle\right)$$

$\vec{j}$: "externe" Stromdichte

Zusammenfassung letzte Vorlesung

Makroskopische Elektrodynamik

- dielektrisches Verschiebungsfeld $\vec{D} = \vec{E} + 4\pi \vec{P}$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 4\pi \rho$$

- magnetische Feldstärke $\vec{H} = \vec{B} - 4\pi \vec{M}$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}$$

- dielektrische Funktion

$$\vec{D}(\vec{k}, \omega) = \varepsilon(\vec{k}, \omega) \vec{E}(\vec{k}, \omega)$$

$$\varepsilon(\vec{k}, \omega) = 1 + 4\pi \chi(\vec{k}, \omega)$$

Suszeptibilität

- magnetische Permeabilität

$$\vec{B}(\vec{k}, \omega) = \mu(\vec{k}, \omega) \vec{H}(\vec{k}, \omega)$$

$$\mu(\vec{k}, \omega) = 1 + 4\pi \chi_m(\vec{k}, \omega)$$

$\mu < 1$ Diamagnetismus

$\mu > 1$ Paramagnetismus

- Im Experiment bestimmen wir immer die Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$.