

Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова

Факультет вычислительной математики и кибернетики

**Формальная постановка задачи для
задания по алгоритму имитации отжига**

Выполнил:
Студент гр. 421
Соловьев Павел Асатольевич

Москва, 2025

Прикладная задача

Дано N независимых работ, для каждой работы задано время выполнения. Требуется построить расписание выполнения работ без прерываний на M процессорах. На расписании должно достигаться минимальное значение *критерия K2*.

Критерий K2: суммарное время ожидания (т.е. сумма, по всем работам в расписании, времён завершения работ)

Формальная постановка задачи

Дано:

- N – количество работ;
- $J = \{j_1, j_2, \dots, j_N\}$ – множество работ;
- $\tau = \{t_1, t_2, \dots, t_N\}$ – множество времён выполнения соответствующих заданий j_i , где $\forall i \in [1, N] : t_i > 0$;
- M – количество процессоров;
- $P = \{p_1, p_2, \dots, p_M\}$ – множество процессоров, на которых выполняются работы.

Расписание:

Расписанием будем называть булеву матрицу $HP \in B^{N \times M}$, где элемент $h_{ij} \in \{0, 1\}$, $i \in [1, N], j \in [1, M]$. Значение $h_{ij} = 1$ означает, что работа с номером i выполняется на процессоре с номером j , а $h_{ij} = 0$ – что работа i не выполняется на процессоре j .

Требуется:

Построить расписание $HP^{N \times M}$, при котором будет минимизирован выбранный критерий, при этом все задания J будут выполнены на множестве процессоров P без прерываний и без пересечений во времени на каждом процессоре, т.е.:

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M h_{ij} = N, \quad \forall i \in [1, N] \quad \sum_{j=1}^M h_{ij} = 1$$

Критерий минимизации:

Выбран **критерий K_2 — суммарное время ожидания.**

Обозначим G_j — упорядоченное по последовательности выполнения множество индексов работ, которые выполняются на j -ом процессоре. Для каждой работы $i \in G_j$ определим время завершения C_i как сумму длительностей всех работ, выполняющихся на данном процессоре до и включая текущую:

$$C_i = \sum_{k \in G_j, k \text{ перед } i} t_k + t_i$$

Тогда суммарное время ожидания всех работ (критерий K_2) определяется как:

$$K_2 = \sum_{i=1}^N C_i$$

Необходимо найти такое распределение работ по процессорам (расписание HP), которое минимизирует данный критерий:

$$\min_{HP} K_2 = \min_{HP} \sum_{i=1}^N C_i$$

Ограничения:

- Каждый процессор $p_j \in P$ в любой момент времени может выполнять не более одного задания.
- Во время выполнения задания прерывания не допускаются.
- Процессор может мгновенно переключаться между заданиями без потерь времени.
- Время выполнения каждой работы $t_i \in \tau$ фиксировано и известно заранее.