

**Московский государственный университет  
имени М.В. Ломоносова**

**Факультет вычислительной математики и кибернетики**

**Формальная постановка задачи для  
задания по алгоритму имитации отжига**

Выполнил:  
Студент гр. 421  
Соловьев Павел Аеатольевич

Москва, 2025

# Прикладная задача

Дано  $N$  независимых работ, для каждой работы задано время выполнения. Требуется построить расписание выполнения работ без прерываний на  $M$  процессорах. На расписании должно достигаться минимальное значение *критерия К2*.

**Критерий К2:** суммарное время ожидания (т.е. сумма, по всем работам в расписании, времён завершения работ)

## Формальная постановка задачи

**Дано:**

- $N$  – количество работ;
- $J = \{j_1, j_2, \dots, j_N\}$  – множество работ;
- $\tau = \{t_1, t_2, \dots, t_N\}$  – множество времён выполнения соответствующих заданий  $j_i$ , где  $\forall i \in [1, N] : t_i > 0$ ;
- $M$  – количество процессоров;
- $P = \{p_1, p_2, \dots, p_M\}$  – множество процессоров, на которых выполняются работы.

**Расписание:**

Расписанием будем называть булеву матрицу  $HP \in B^{N \times M}$ , где элемент  $h_{ij} \in \{0, 1\}$ ,  $i \in [1, N]$ ,  $j \in [1, M]$ . Значение  $h_{ij} = 1$  означает, что работа с номером  $i$  выполняется на процессоре с номером  $j$ , а  $h_{ij} = 0$  – что работа  $i$  не выполняется на процессоре  $j$ .

**Требуется:**

Построить расписание  $HP^{N \times M}$ , при котором будет минимизирован выбранный критерий, при этом все задания  $J$  будут выполнены на множестве процессоров  $P$  без прерываний и без пересечений во времени на каждом процессоре, т.е.:

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M h_{ij} = N, \quad \forall i \in [1, N] \quad \sum_{j=1}^M h_{ij} = 1$$

### Критерий минимизации:

Выбран критерий  $K_2$  — суммарное время ожидания.

Обозначим  $G_j$  — упорядоченное по последовательности выполнения множество индексов работ, которые выполняются на  $j$ -ом процессоре. Для каждой работы  $i \in G_j$  определим время завершения  $C_i$  как сумму длительностей всех работ, выполняющихся на данном процессоре до и включая текущую:

$$C_i = \sum_{k \in G_j, k \text{ перед } i} t_k + t_i$$

Тогда суммарное время ожидания всех работ (критерий  $K_2$ ) определяется как:

$$K_2 = \sum_{i=1}^N C_i$$

Необходимо найти такое распределение работ по процессорам (расписание  $HP$ ), которое минимизирует данный критерий:

$$\min_{HP} K_2 = \min_{HP} \sum_{i=1}^N C_i$$

### Ограничения:

- Каждый процессор  $p_j \in P$  в любой момент времени может выполнять не более одного задания.
- Во время выполнения задания прерывания не допускаются.
- Процессор может мгновенно переключаться между заданиями без потери времени.
- Время выполнения каждой работы  $t_i \in \tau$  фиксировано и известно заранее.