МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Санкт-Петербургский государственный
электротехнический университет
«ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина)
Кафедра САПР

ОТЧЕТ
по лабораторной работе №1
по дисциплине «Основы цифровой обработки сигналов»
Тема: «Оцифровка аналогово сигнала»

Студент гр.2301		Титова С.М.
Студент гр.2301		Комиссаров П.Е.
Студент гр.2301		Решетов А.А.
Студент гр.2301		Федоренко А.Е.
Преподаватель:		Пестерев. Д. О.

Санкт-Петербург
2024

Задание

1. Значения синусоидального сигнала с амплитудой в пределах [0.5; 2.5] В и частотой: 250 Гц, 500 Гц, 1000, Гц, 2000 Гц, 10кГц, 20кГц; полученные с помощью оцифровки аналогового сигнала с NI Elvis. Без delay и с delay(1) [delay(0.9)] с длительностью 10 секунд.

2. Экспериментальная оценка снизу для частоты дискретизации АЦП arduino.

Содержание отчета

1. Данные о ЦАП микроконтроллера Arduino, на котором проводилась лабораторная работа, из datasheet.

2. На основе полученных данных и графиков оценка частоты дискретизации АЦП arduino. Использование полученного значения в дальнейшем.

3. Графики полученных в ходе работы с NI Elvis синусоидальных сигналов. Выбираем интервал времени так, чтобы на графике помещалось около четырех периодов сигнала. Строим в том же окне график синусоидального сигнала заданной частоты и амплитуды, полученный с помощью функции sin(), и сравниваем их.

4. Строим амплитудный и фазовый спектр исследуемых сигналов. Строим амплитудный и фазовый спектр исследуемых сигналов с использованием оконной функции Хемминга на интервале в один период.

5. Описываем полученные результаты для сигналов, частота которых превышает частоту дискретизации.

6. Проверяем 10 свойств преобразования Фурье с помощью символьных вычислений.

7. Проверяем 1, 2, 4, 7, 8 свойство с помощью функции fft.

Лабораторная работа №1 «Оцифровка аналогово сигнала»

1. Данные о ЦАП микроконтроллера Arduino из datasheet:

Тактовая частота в Arduino по умолчанию 125 кГц, то есть АЦП выполняет 125 000 тактов в секунду. Тактовая частота определяет скорость, с которой АЦП может выполнять преобразования аналогового сигнала в цифровой.

Одно аналого-цифровое преобразование занимает 13 тактов АЦП. Это время, необходимое для того, чтобы АЦП смог точно измерить аналоговый сигнал и преобразовать его в цифровой код.

Частота дискретизации — это количество раз, которое АЦП может выполнить преобразование в секунду. Она рассчитывается как отношение тактовой частоты АЦП к количеству тактов, необходимых для одного преобразования, следовательно получаем:

$$\frac{125000}{13} = 9615.3846$$

Получается, что АЦП может выполнять около 9615 преобразований в секунду.

Также Arduino использует 10-разрядный АЦП. Разрядность АЦП определяет количество уровней квантования, то есть количество различных значений, которые АЦП может выдать в результате преобразования.

$$2^{10} = 1024$$

Таким образом, 10-разрядный АЦП в Arduino имеет 1024 уровня квантования. Это означает, что АЦП может различать 1024 различных значения аналогового сигнала.

2. На основе полученных данных мы оценили частоту дискретизации АЦП arduino и получили следующие результаты:

$$F_s = \frac{34438}{10} \approx 3444 - \text{без задержки};$$
$$F_s = \frac{7740}{10} \approx 774 - \text{с задержкой delay(1)}.$$

Количество записей в файл мы делим на 10, так как записывались данные в течение 10 секунд

3. Далее были построены графики двух синусоид, полученных экспериментальным и теоретическим путём, для различных частот: 250, 500, 1000, 2000, 10000, 20000 Гц.

Графики синусоидального сигнала без задержки:

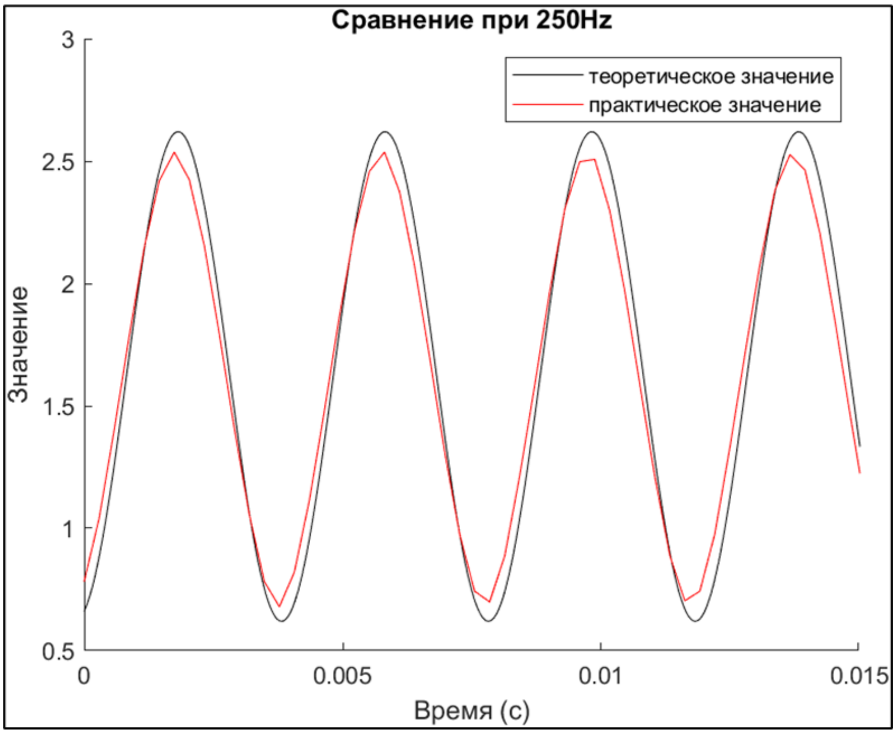

Рисунок 1 - Сигнал при 250Hz

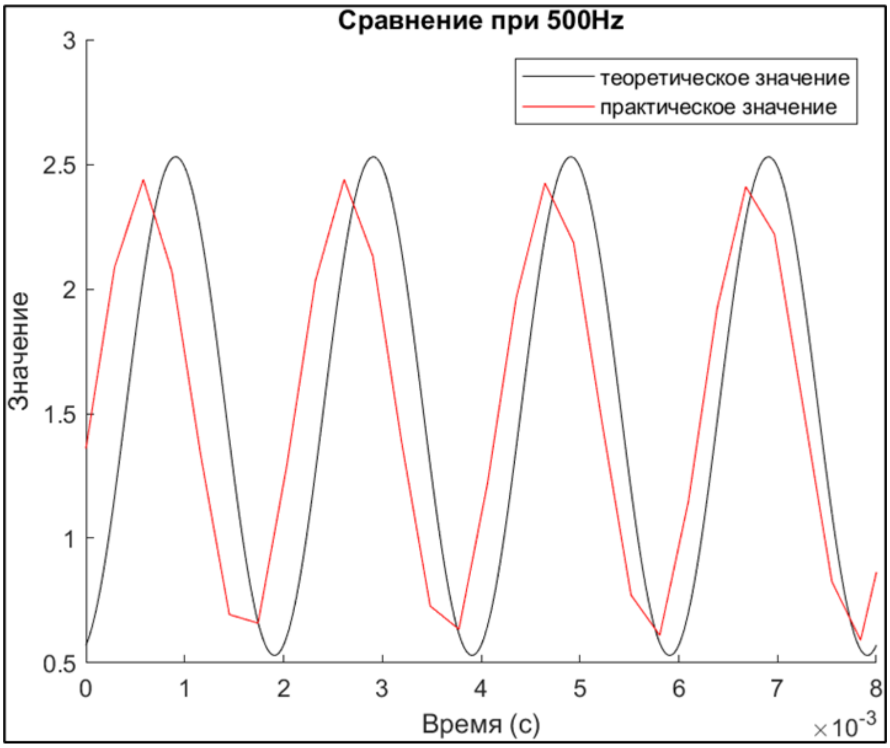

Рисунок 2 - Сигнал при 500Hz

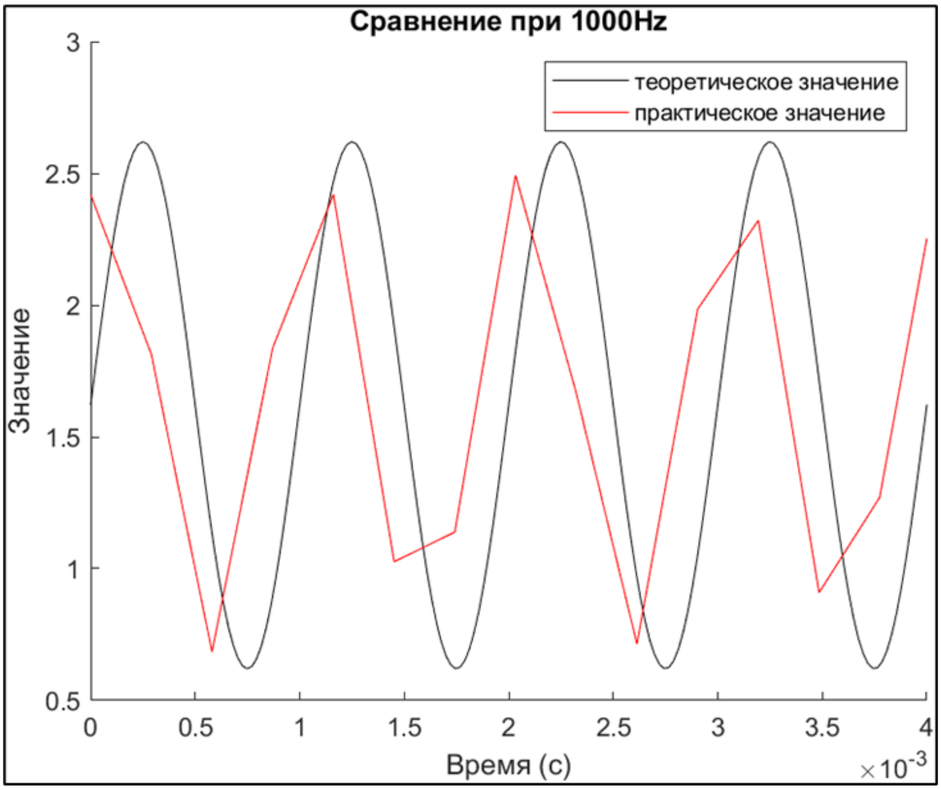

Рисунок 3 - Сигнал при 1000Hz

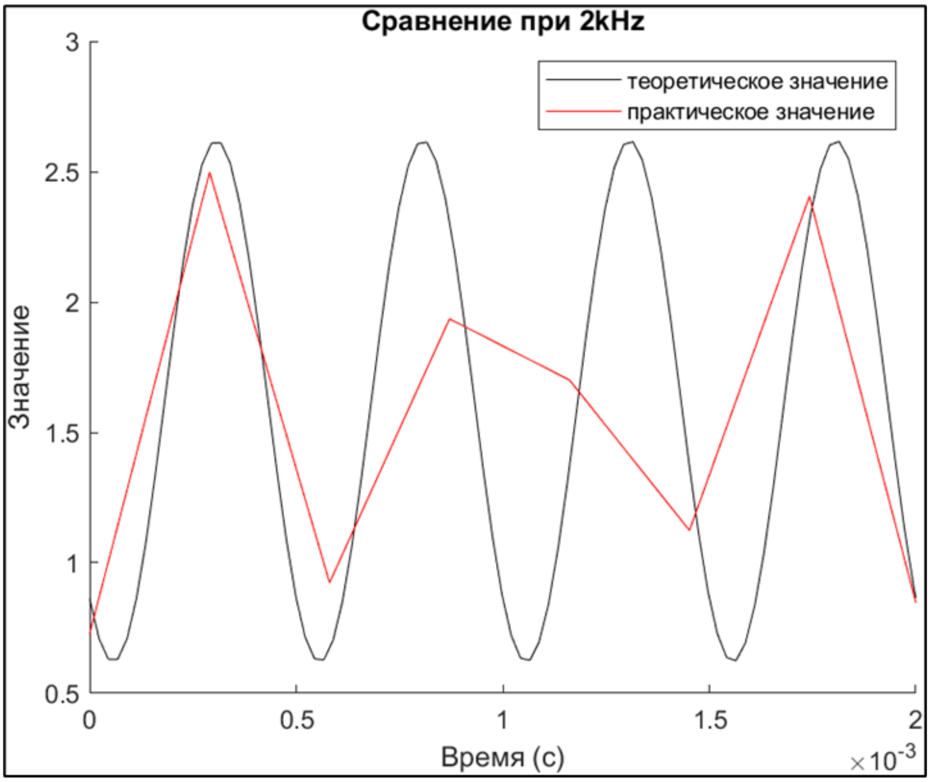

Рисунок 4 - Сигнал при 2kHz

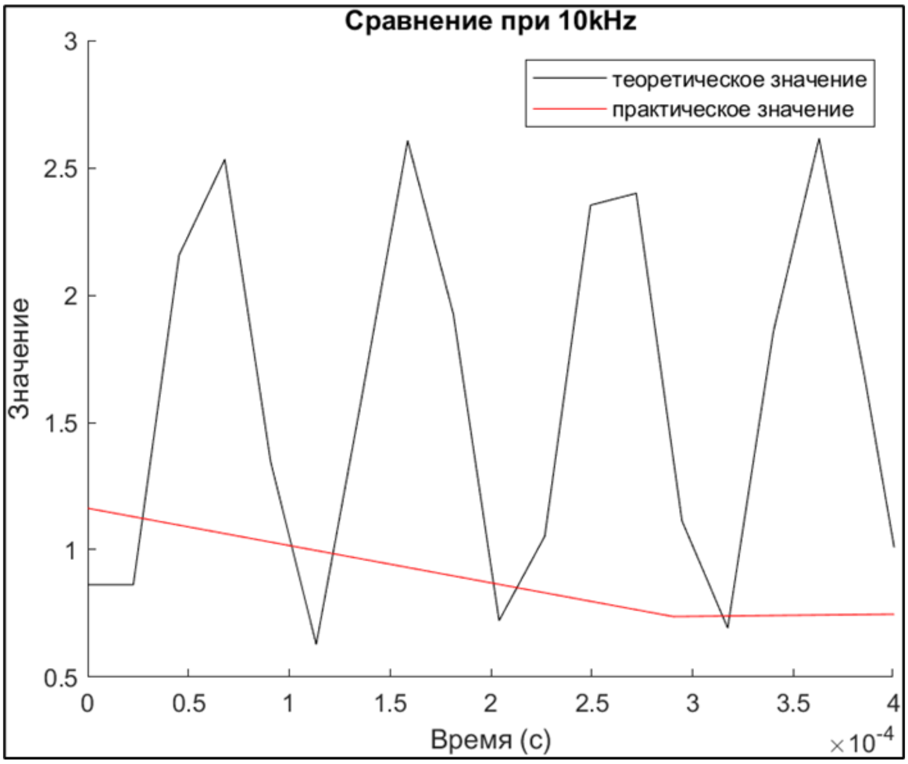

Рисунок 5 - Сигнал при 10kHz(1)

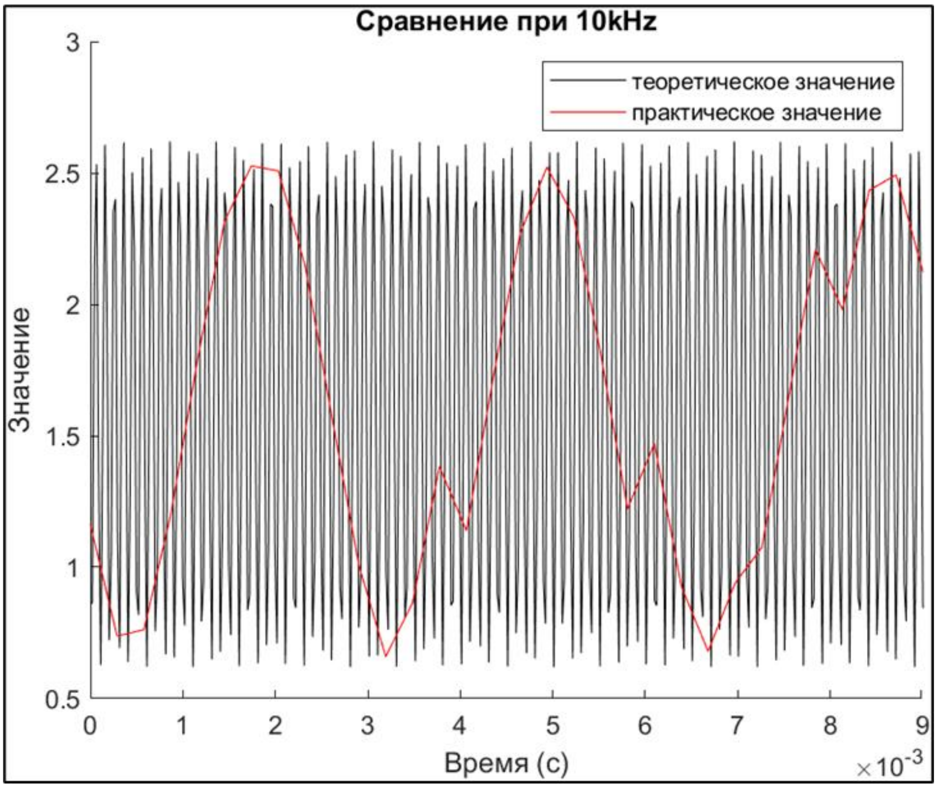

Рисунок 6 - Сигнал при 10kHz(2)

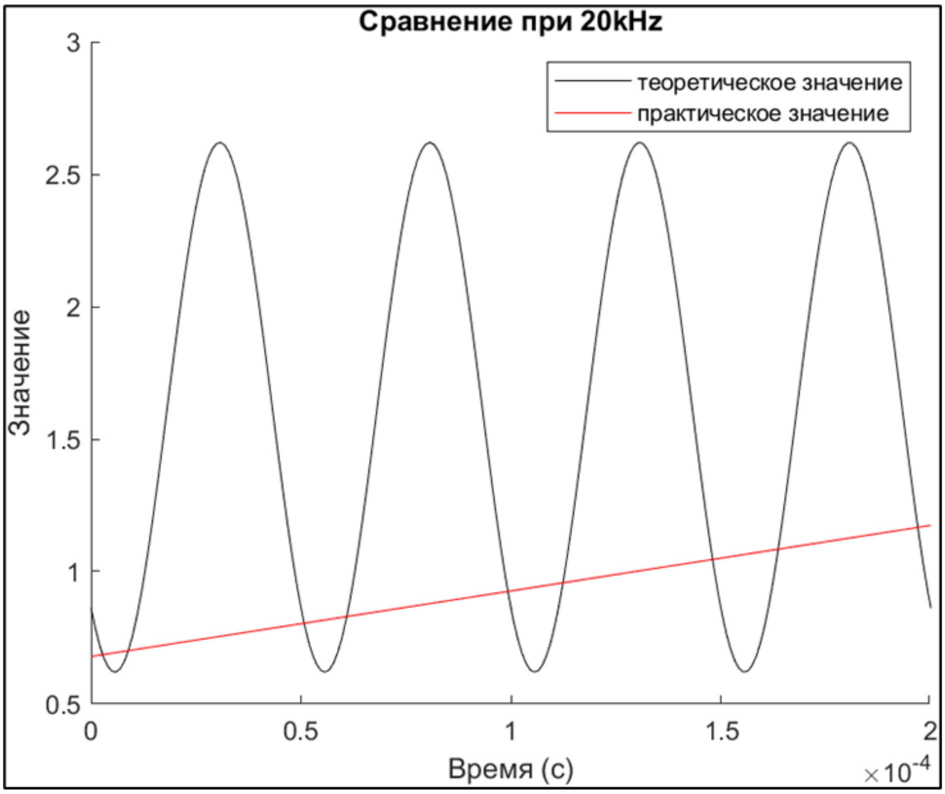

Рисунок 7 - Сигнал при 20kHz(1)

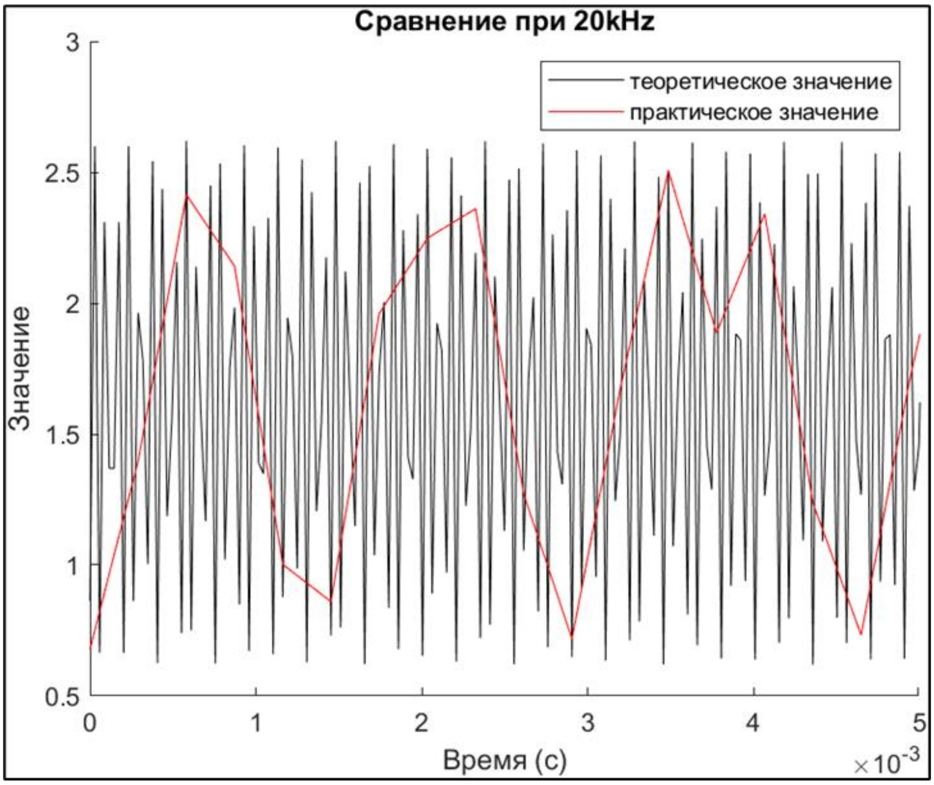

Рисунок 8 - Сигнал при 20kHz(2)

Графики синусоидального сигнала с задержкой:

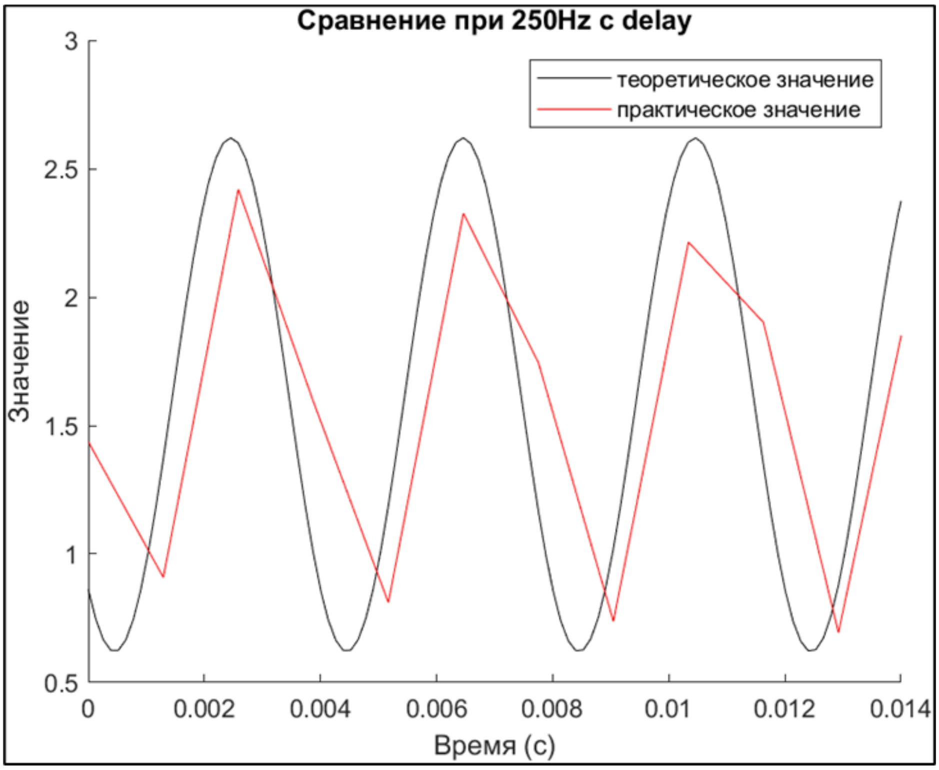

Рисунок 9 - Сигнал при 250Hz с задержкой

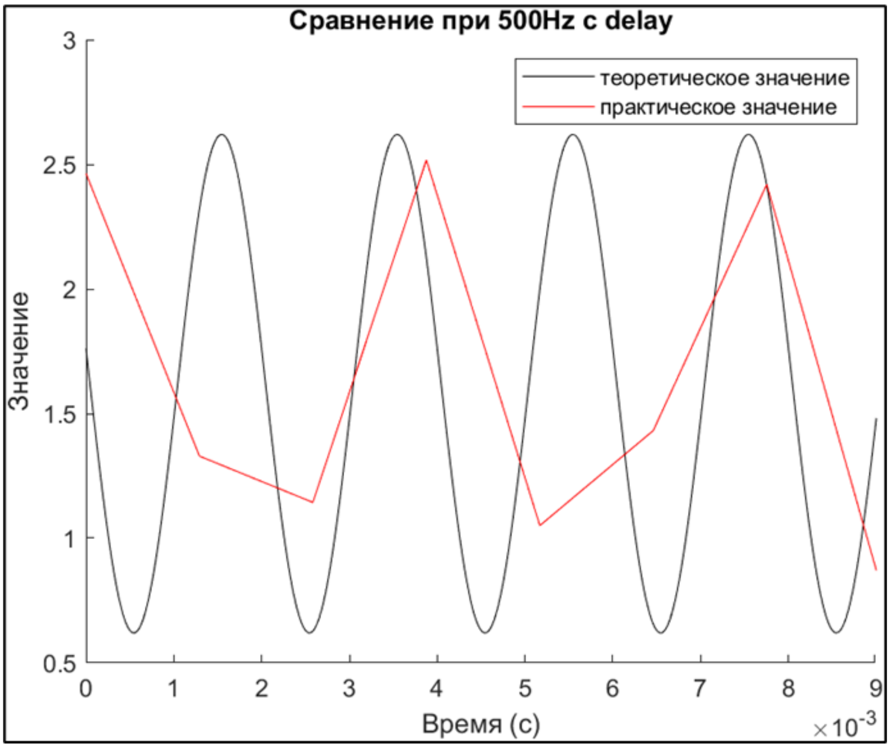

Рисунок 10 - Сигнал при 500Hz с задержкой

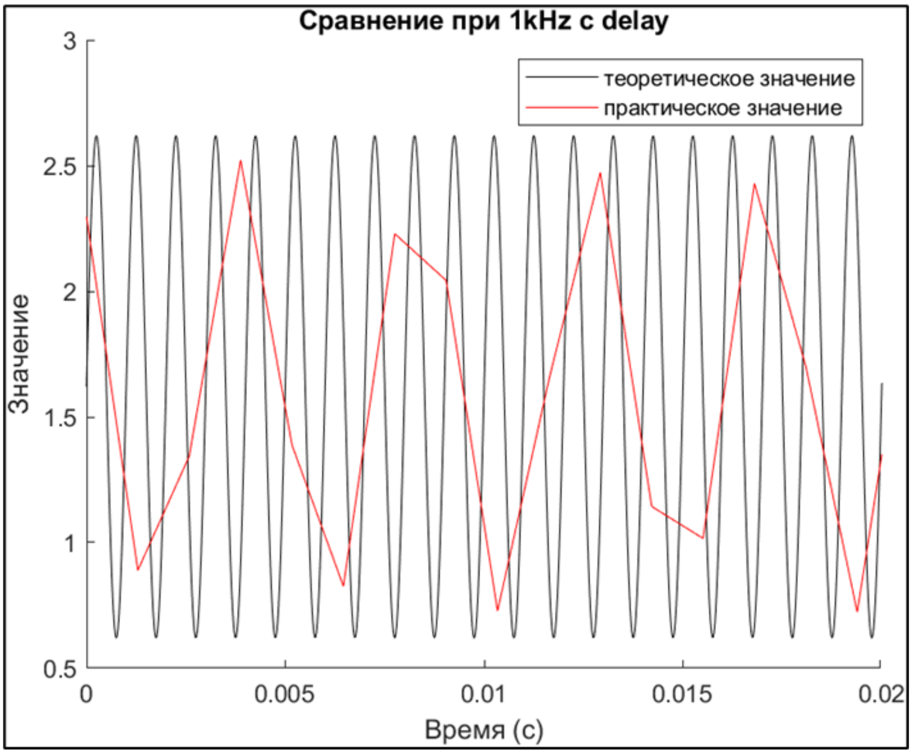

Рисунок 11 - Сигнал при 1000Hz с задержкой(1)

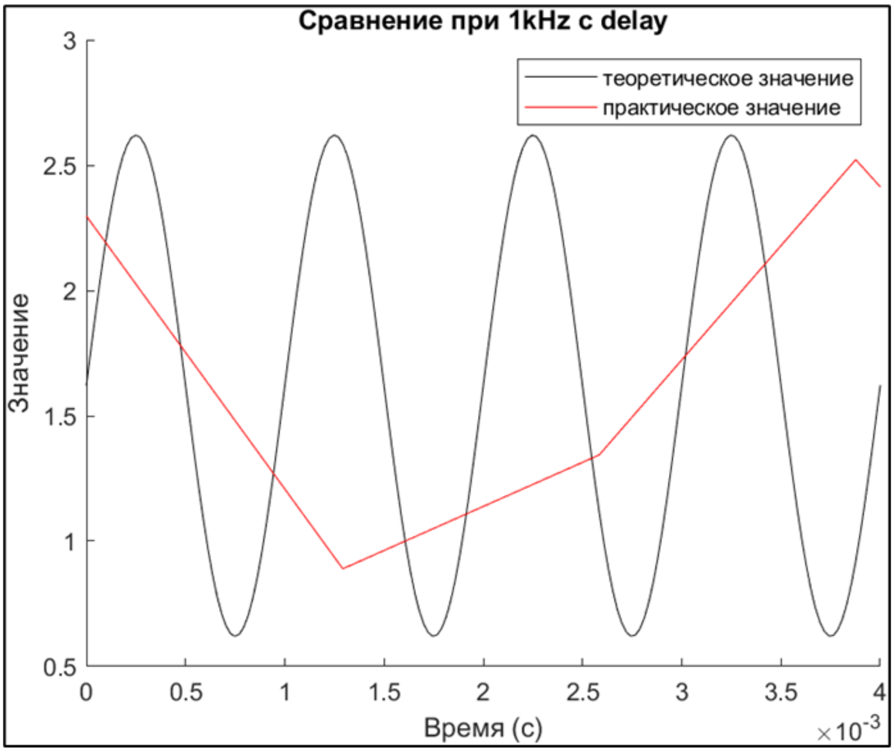

Рисунок 12 - Сигнал при 1000Hz с задержкой(2)

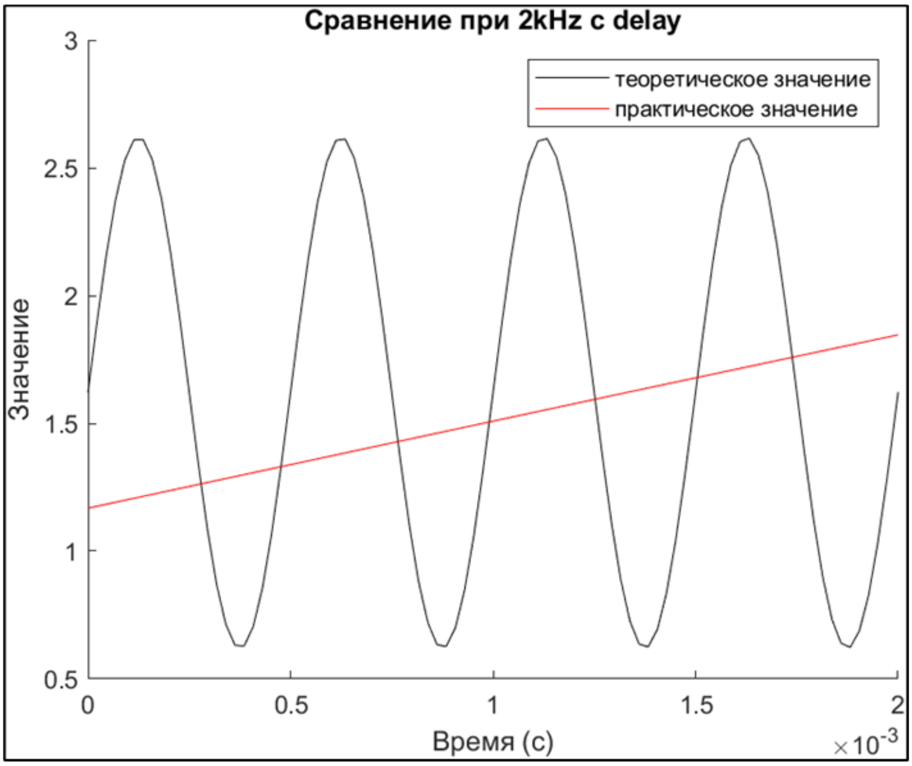

Рисунок 13 - Сигнал при 2kHz с задержкой(1)

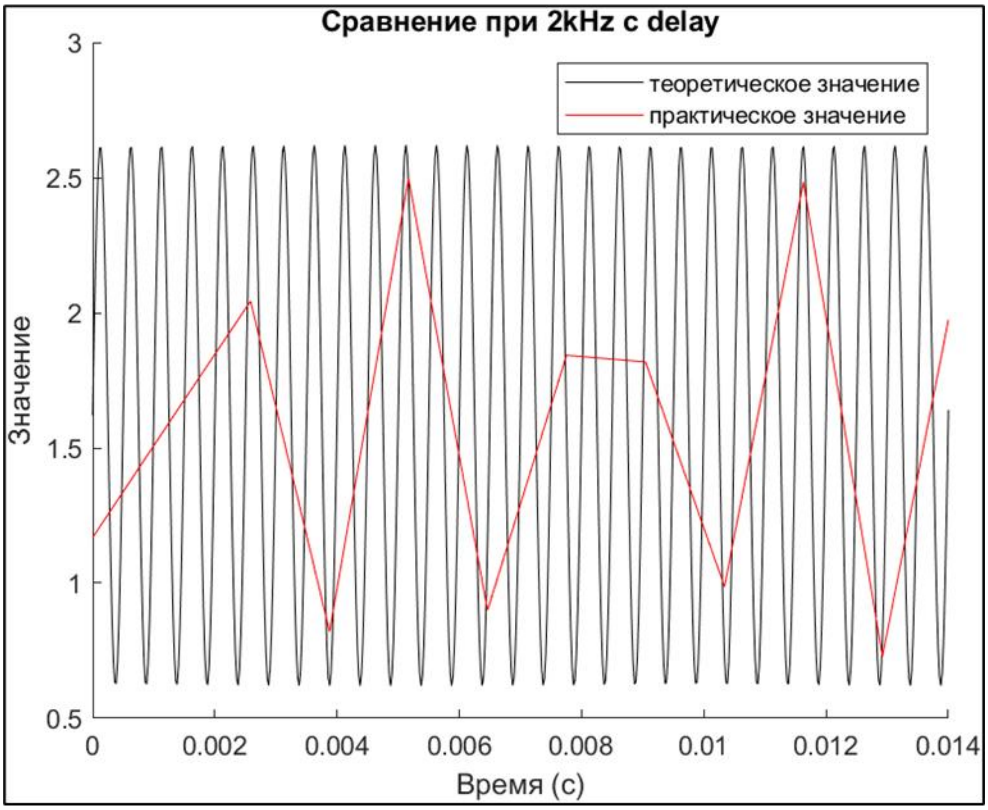

Рисунок 14 - Сигнал при 2kHz с задержкой(2)

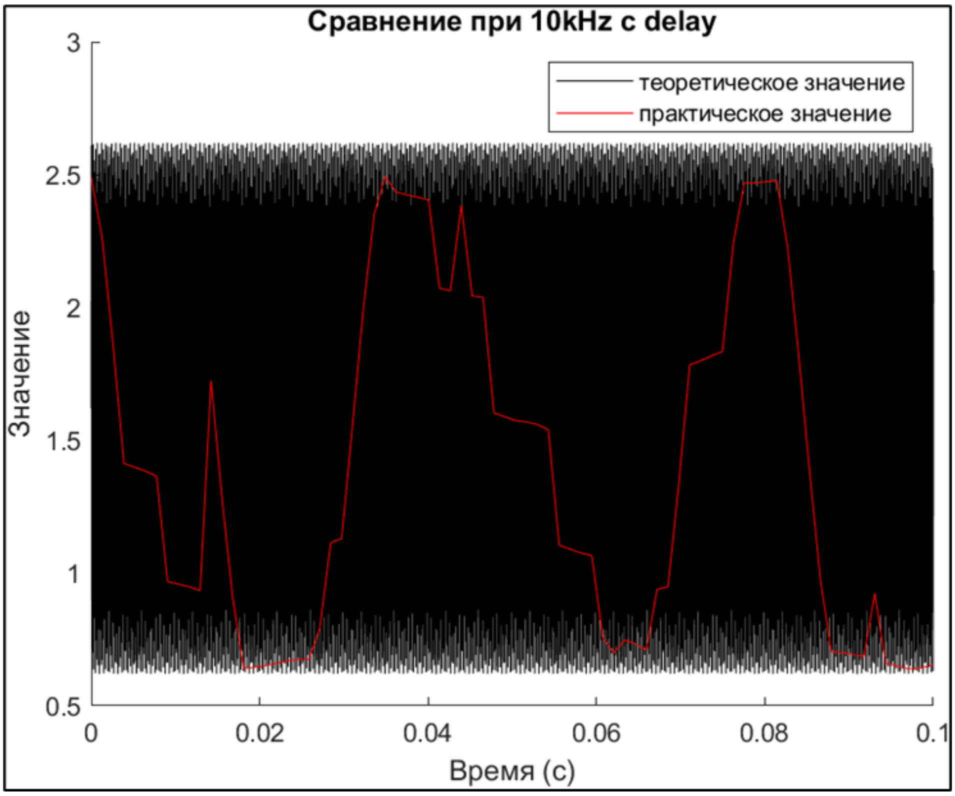

Рисунок 15 - Сигнал при 10kHz с задержкой(1)

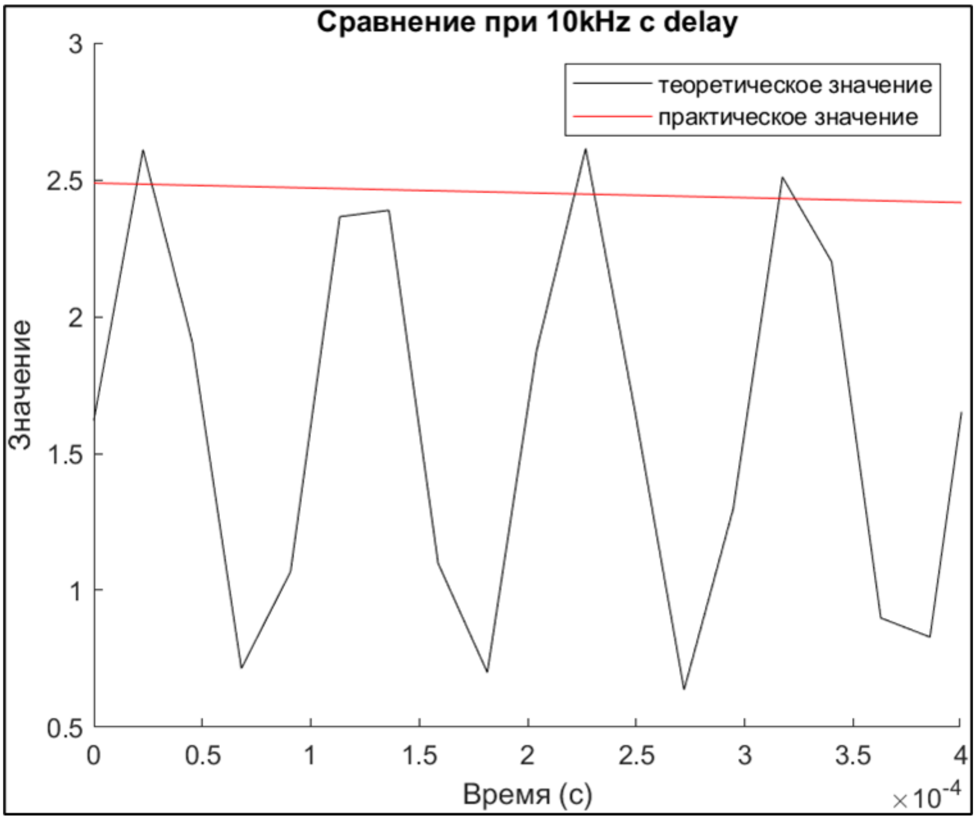

Рисунок 16 - Сигнал при 10kHz с задержкой(2)

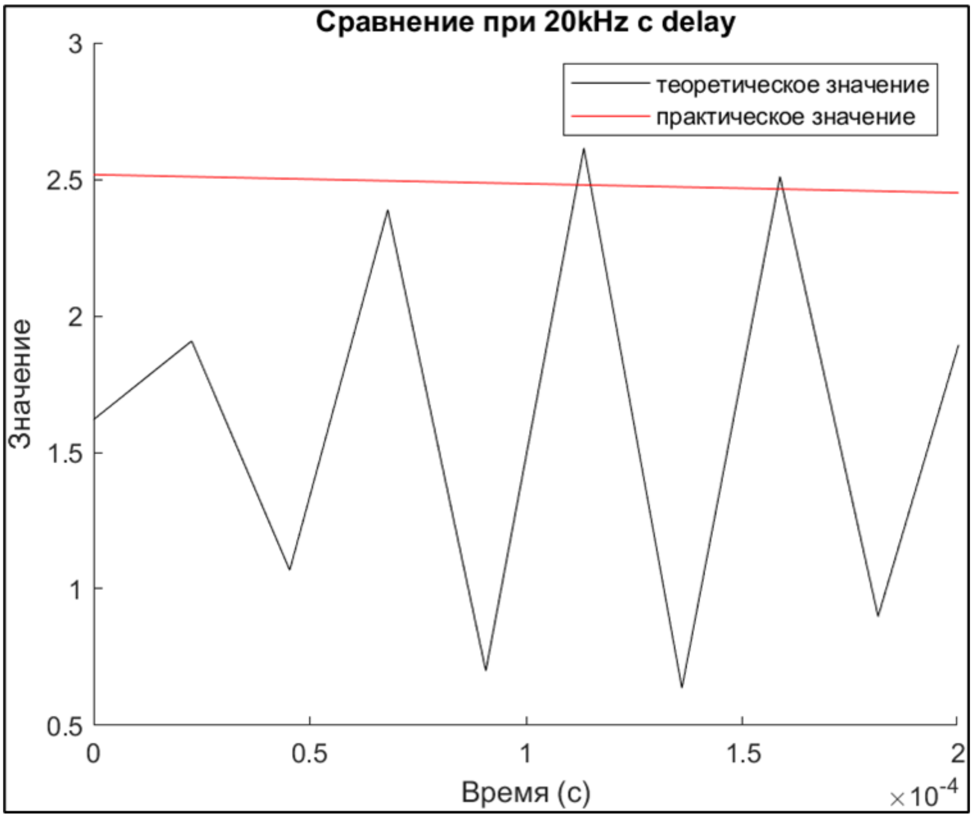

Рисунок 17 - Сигнал при 20kHz с задержкой(1)

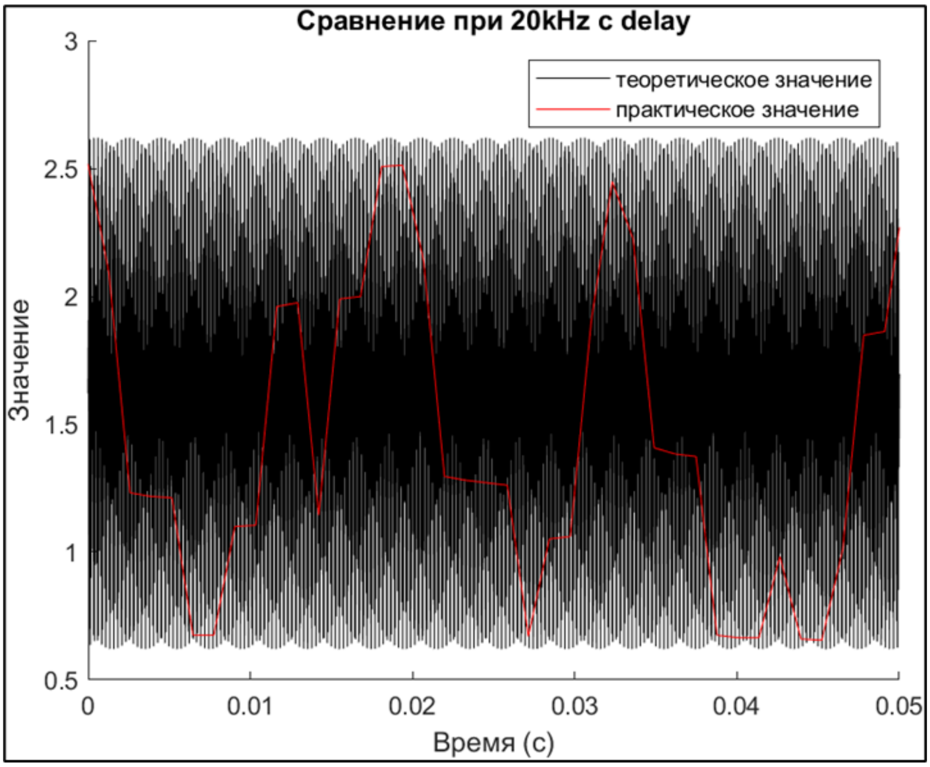

Рисунок 18 - Сигнал при 20kHz с задержкой(2)

Теорема Котельникова-Найквиста гласит о том, что непрерывный сигнал с ограниченным спектром можно точно восстановить по его дискретным отсчётам, если они были взяты с частотой дискретизации, превышающего максимальную частоту сигнала минимум в два раза.

Основываясь на данной теореме, мы провели анализ графиков синусоидального сигнала, которые мы получили в результате исследования.

Анализ графиков синусоидального сигнала без задержки:

Сигналы с частотами 250, 500, 1000 Гц отображаются четко, частоты значительно ниже частоты дискретизации, следовательно требования теоремы выполнены (частота дискретизации 3444 Гц).

Что касается графиков с частотами 2 кГц, 10 кГц и 20 кГц, то экспериментальные графики этих сигналов не совпадают с теоретическими. На графиках наблюдается эффект наложения спектров, что приводит к неверному восприятию сигналов. Практические сигналы отображаются с частотами, значительно ниже их реальных значений.

Сигналы с частотами до 1000 Гц включительно отображаются четко за счет соотношения частот, удовлетворяющих теорему Котельникова-Найквиста. В свою очередь сигналы с частотами 2 кГц, 10 кГц и 20 кГц искажаются из-за того, что значения не удовлетворяют условия теоремы. Из этого можно сделать вывод, что для точного восстановления сигнала важно соблюдение теоремы Котельникова-Найквиста.

Анализ графиков синусоидального сигнала с задержкой:

По аналогии с анализом сигналов без задержки, мы оцениваем графики сигналов с задержкой в 1 секунду. Частота дискретизации равна 774 Гц. Сигнал на частоте 250 Гц отображается без искажений, остальные отображаются некорректно, из-за несоблюдения условия теоремы Котельникова-Найквиста.

АЧХ и ФЧХ синусоидального сигнала без задержки:

Рисунок 19 – АЧХ сигнала при 250Hz

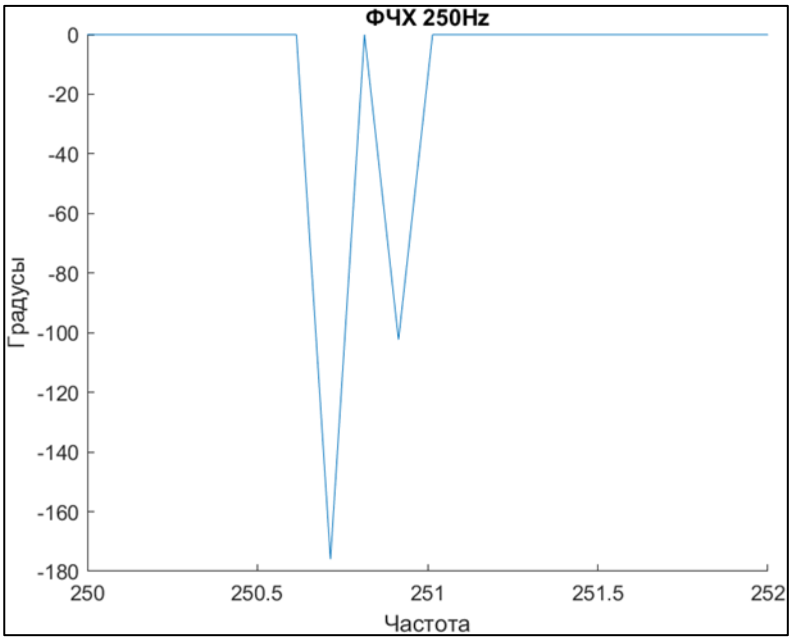

Рисунок 20 – ФЧХ сигнала при 250Hz

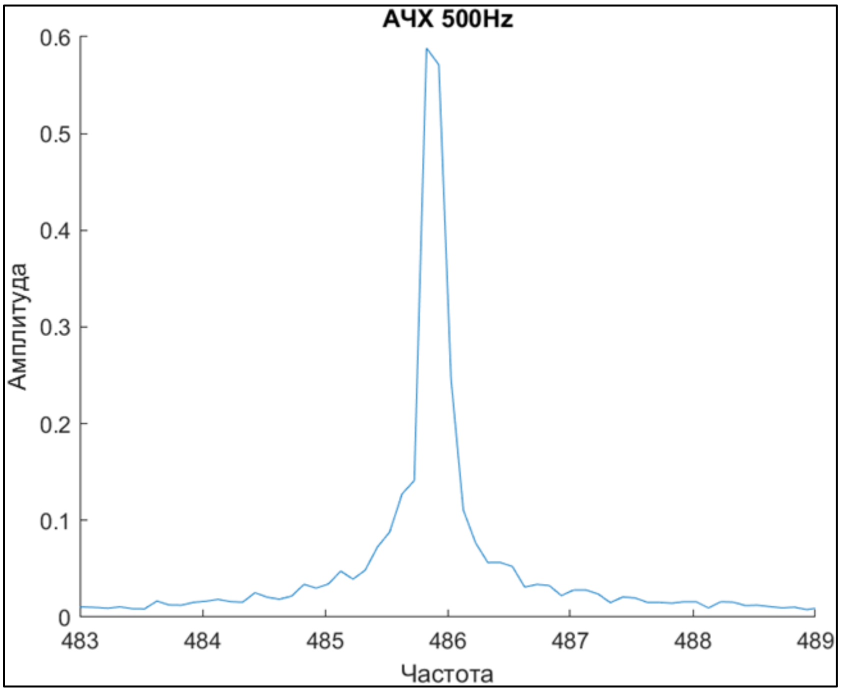

Рисунок 21– АЧХ сигнала при 500Hz

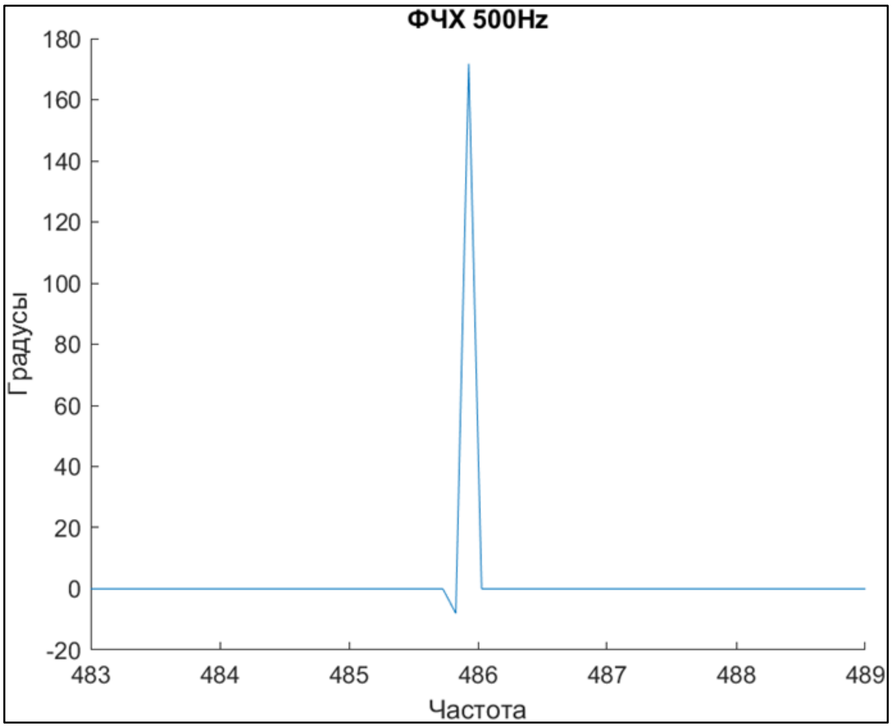

Рисунок 22 – ФЧХ сигнала при 250Hz

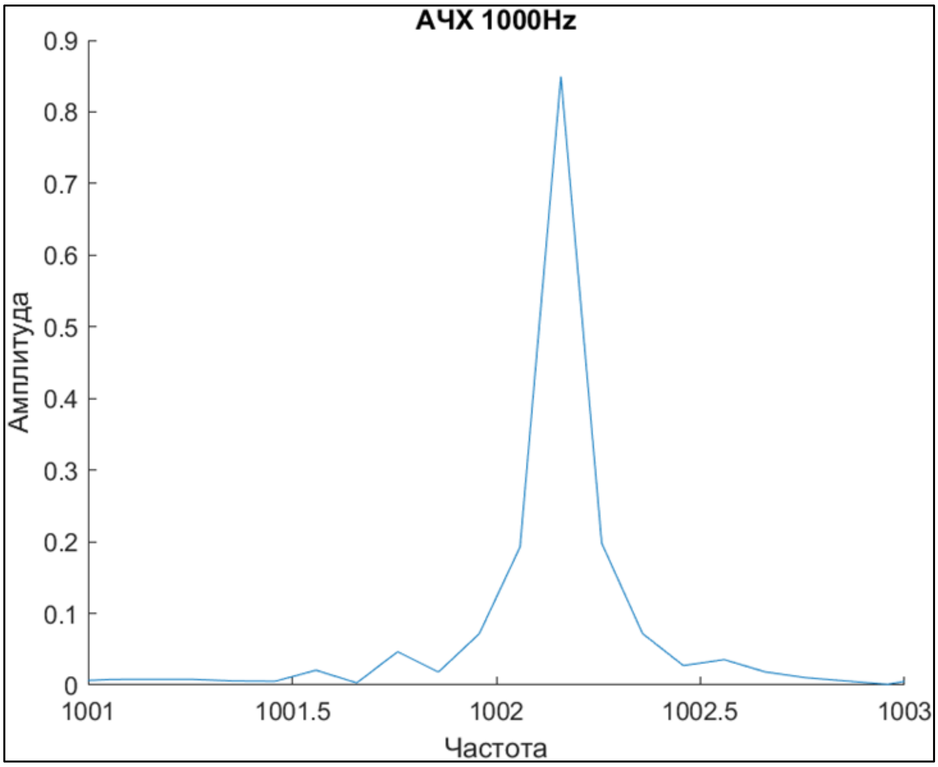

Рисунок 23 – АЧХ сигнала при 1000Hz

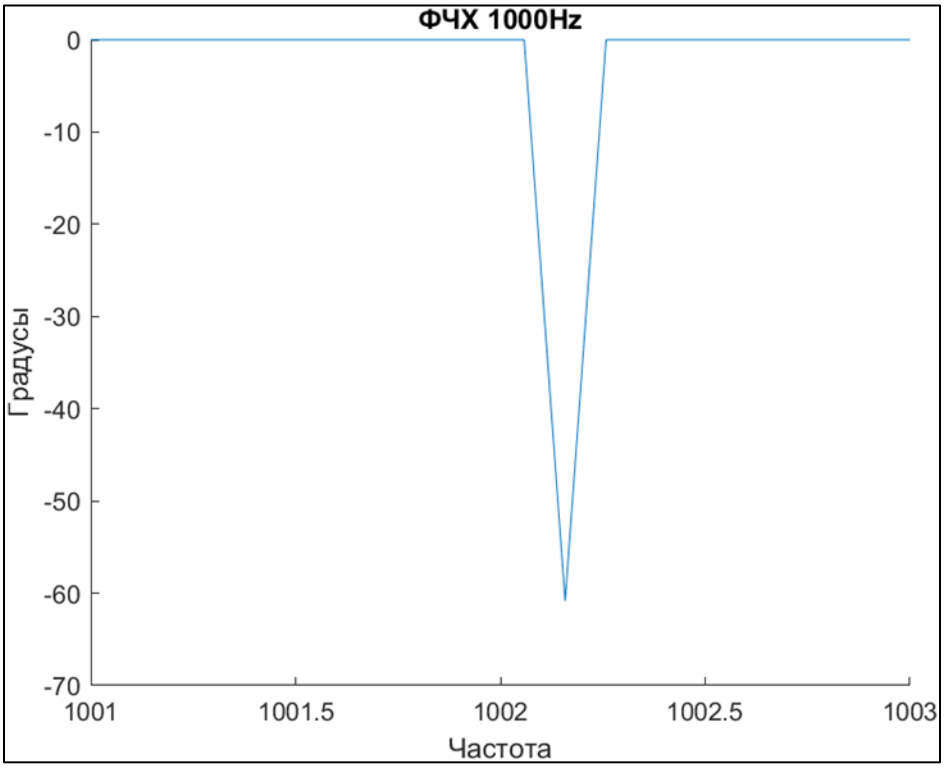

Рисунок 24 – ФЧХ сигнала при 1000Hz

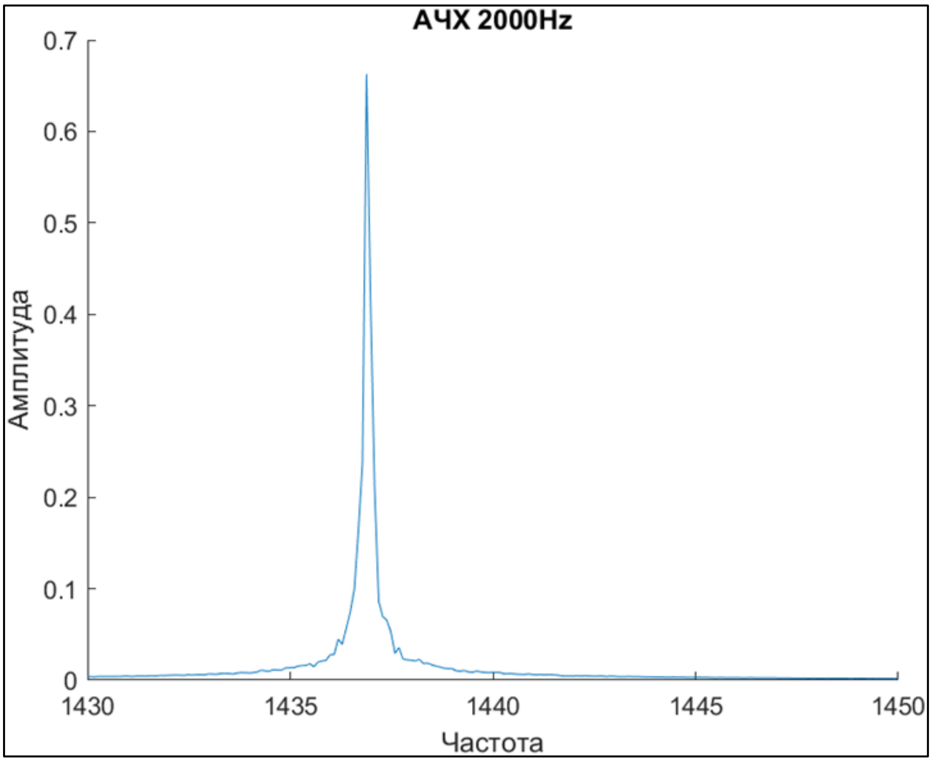

Рисунок 25 – АЧХ сигнала при 2kHz

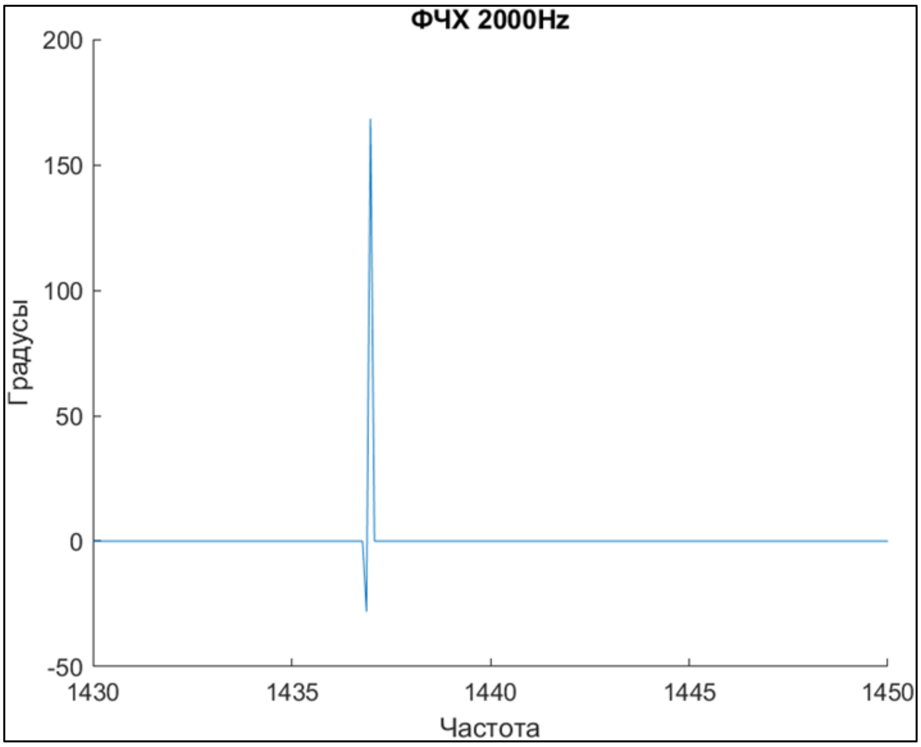

Рисунок 26 – ФЧХ сигнала при 2kHz

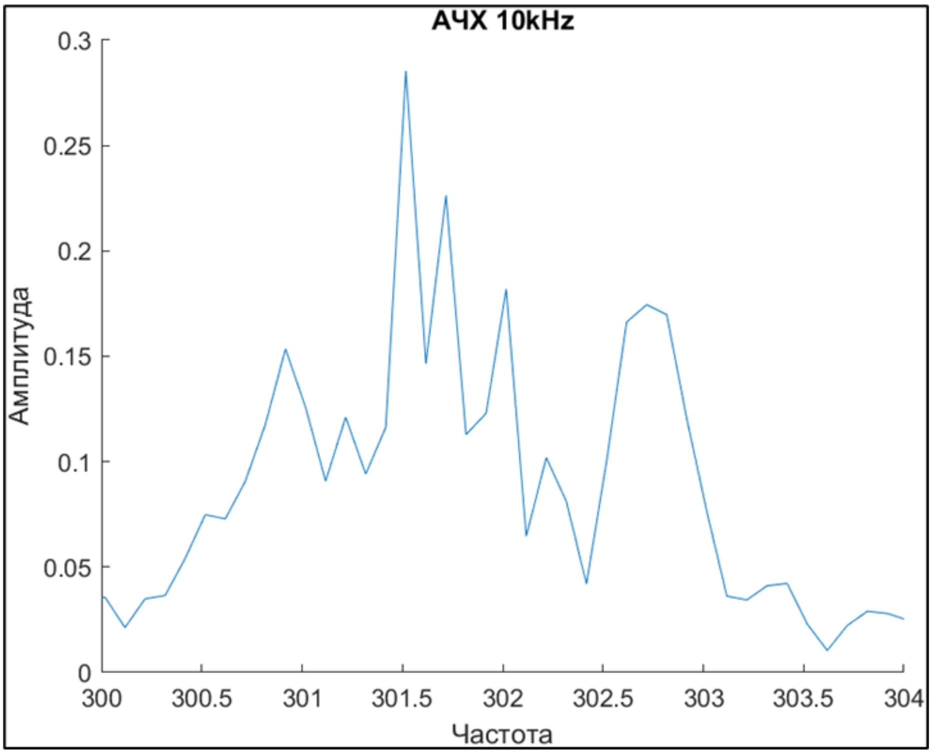

Рисунок 27 – АЧХ сигнала при 10kHz

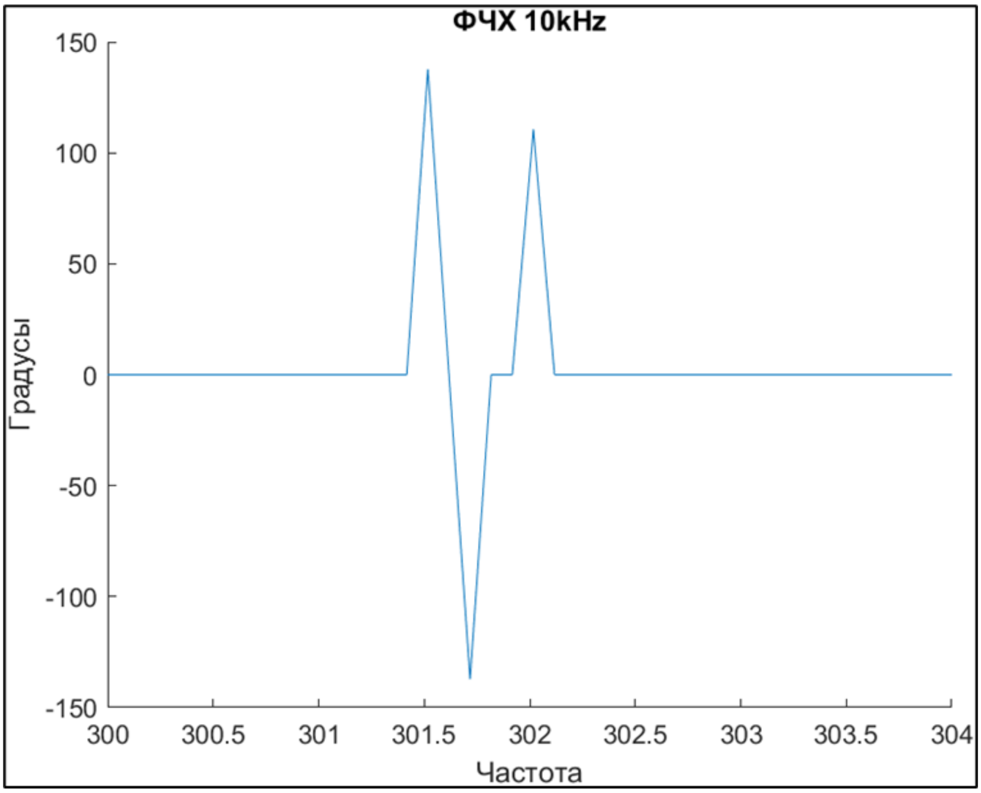

Рисунок 28 – ФЧХ сигнала при 10kHz

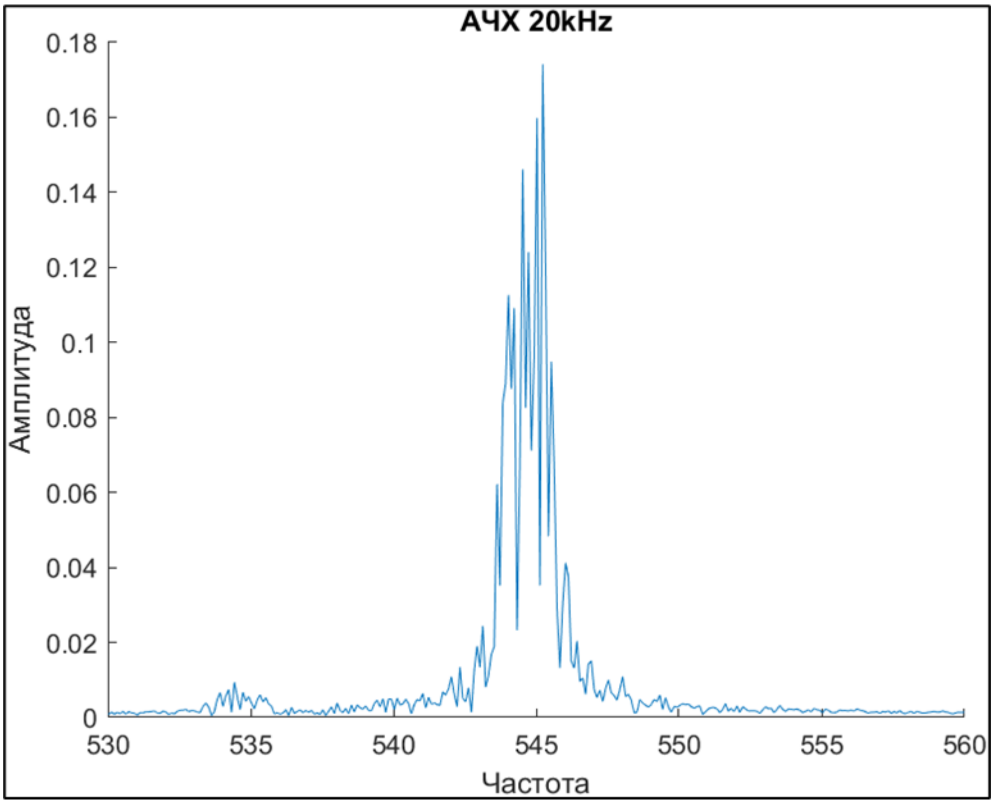

Рисунок 29 – АЧХ сигнала при 20kHz

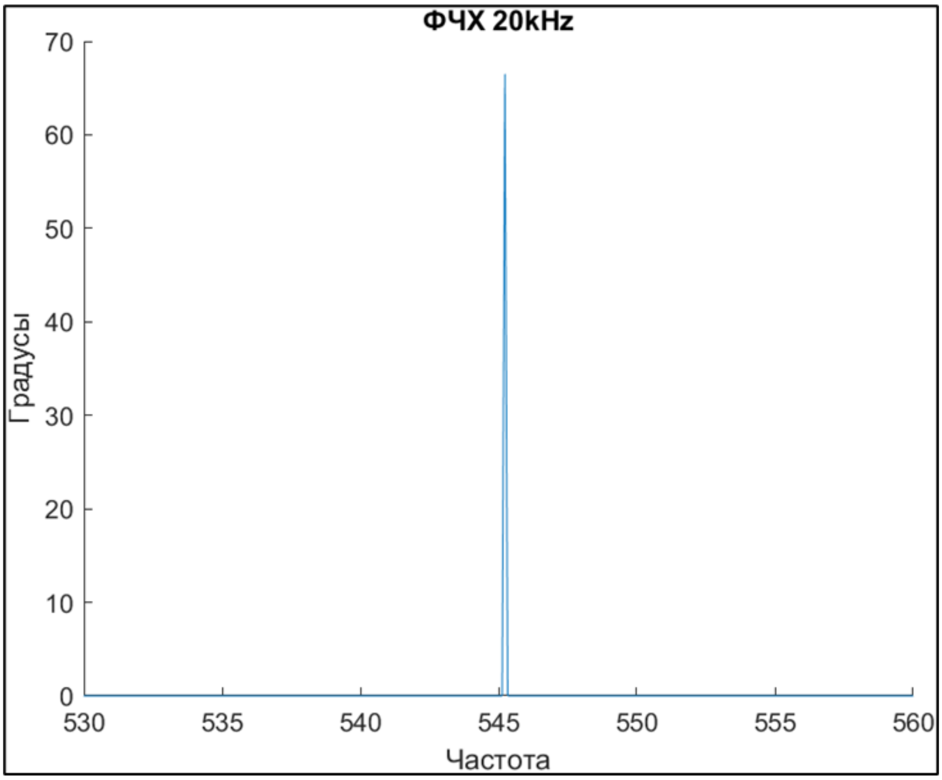

Рисунок 30 – ФЧХ сигнала при 20kHz

АЧХ и ФЧХ синусоидального сигнала с задержкой:

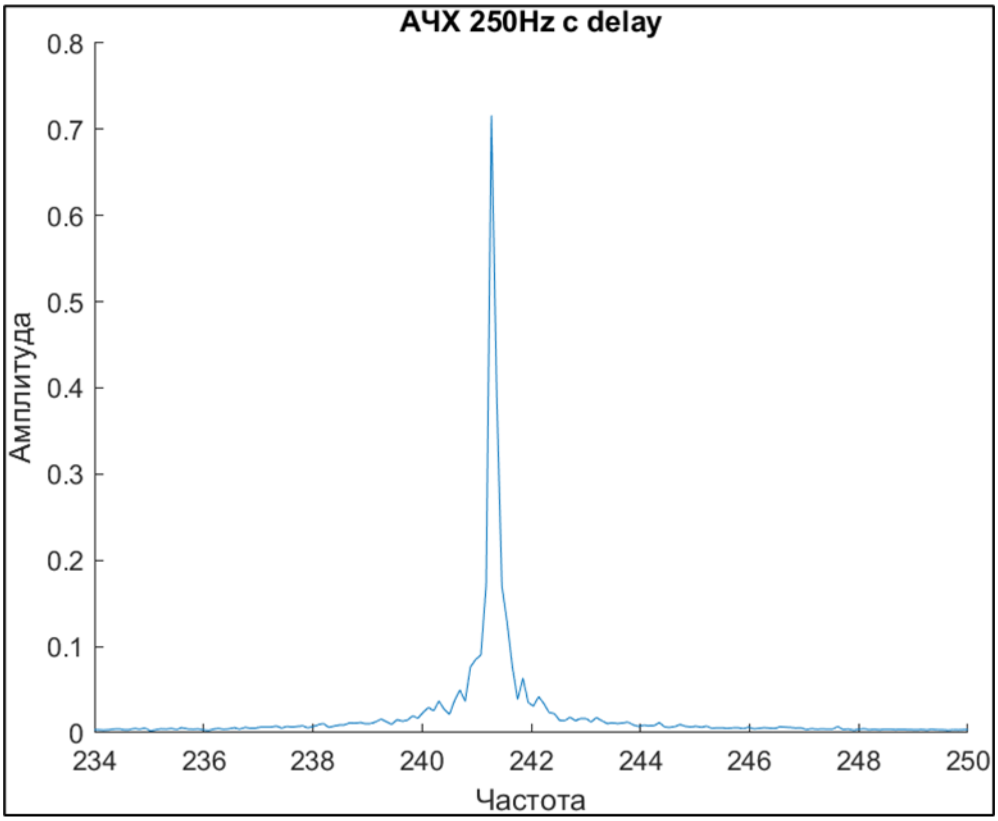

Рисунок 31 – АЧХ сигнала при 250Hz с задержкой

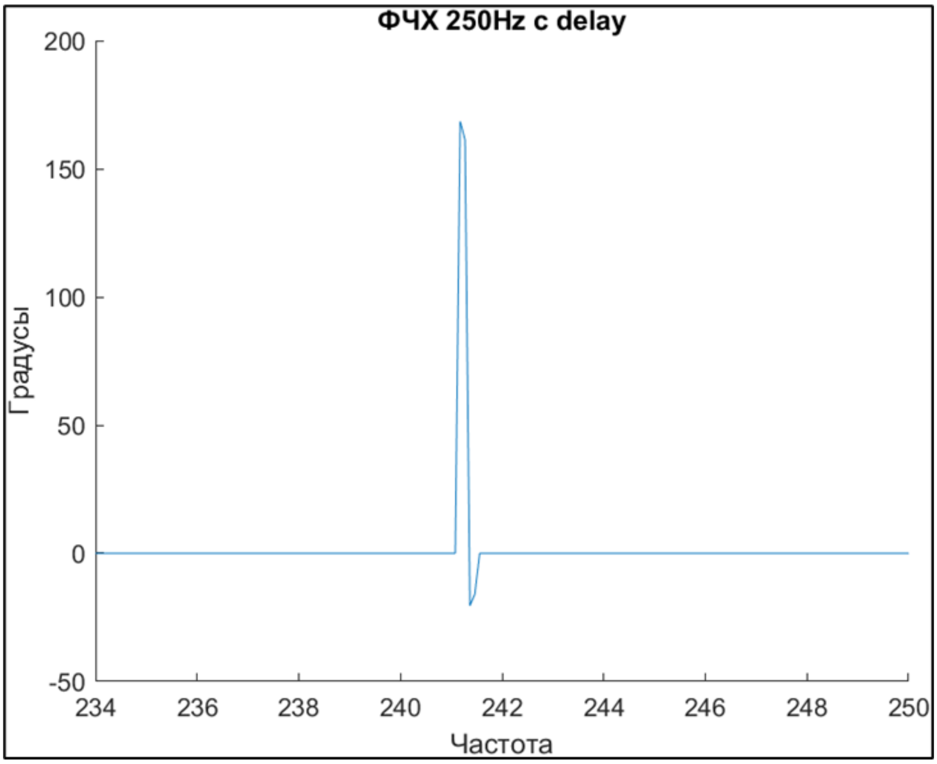

Рисунок 32 – ФЧХ сигнала при 250Hz с задержкой

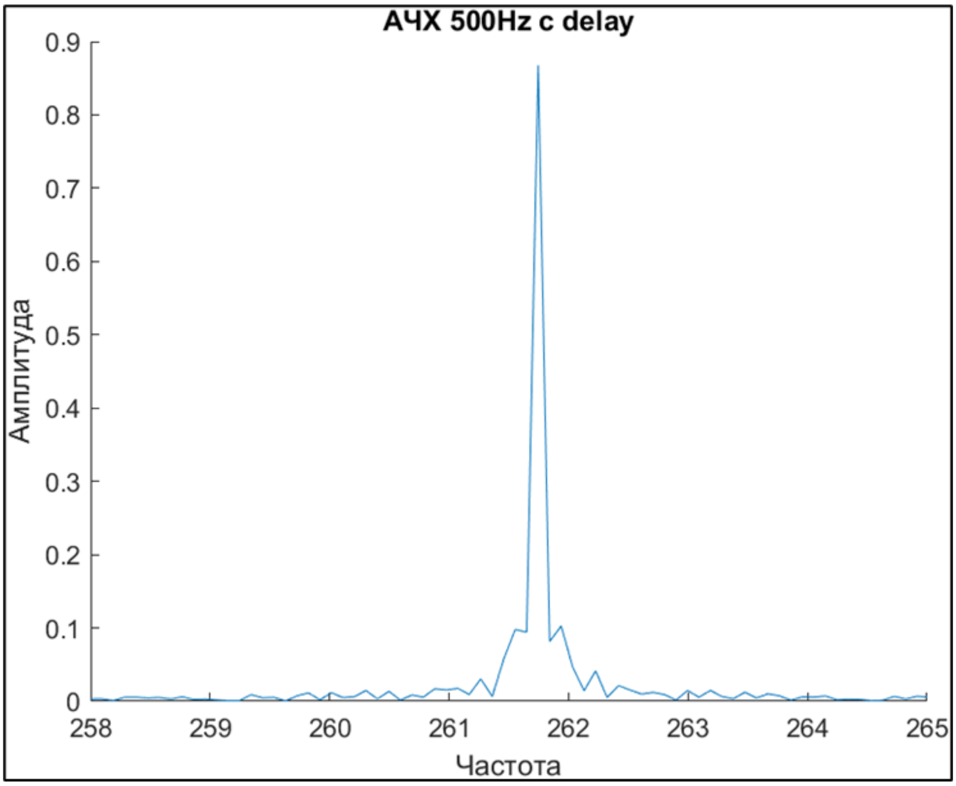

Рисунок 33 – АЧХ сигнала при 500Hz с задержкой

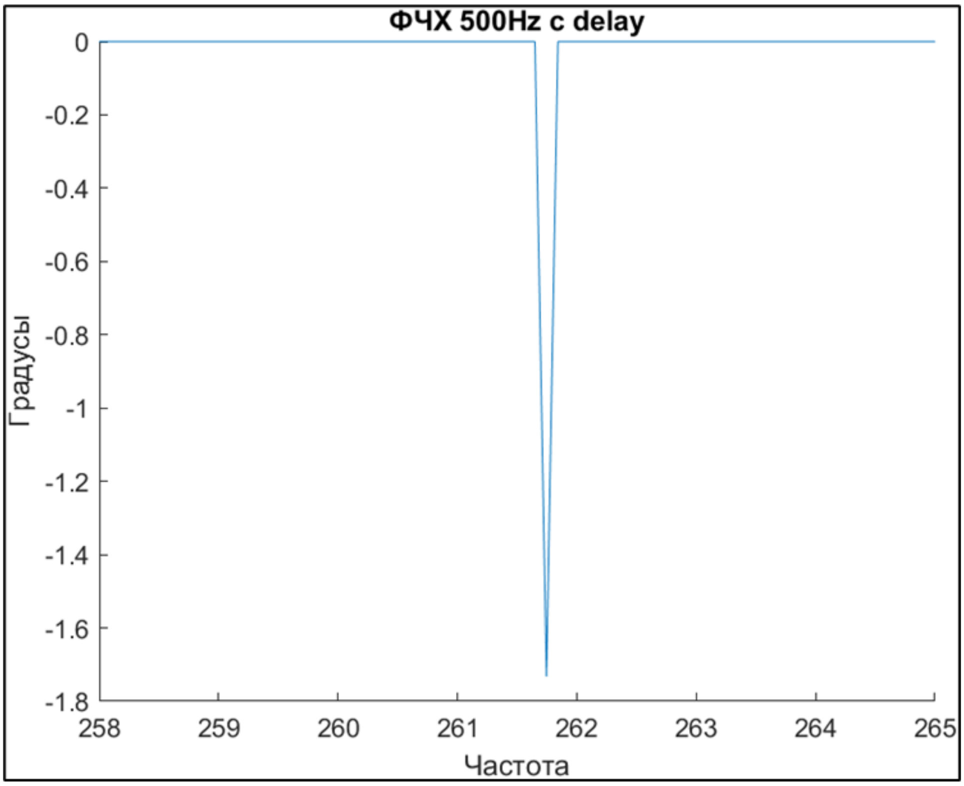

Рисунок 34 – ФЧХ сигнала при 500Hz с задержкой

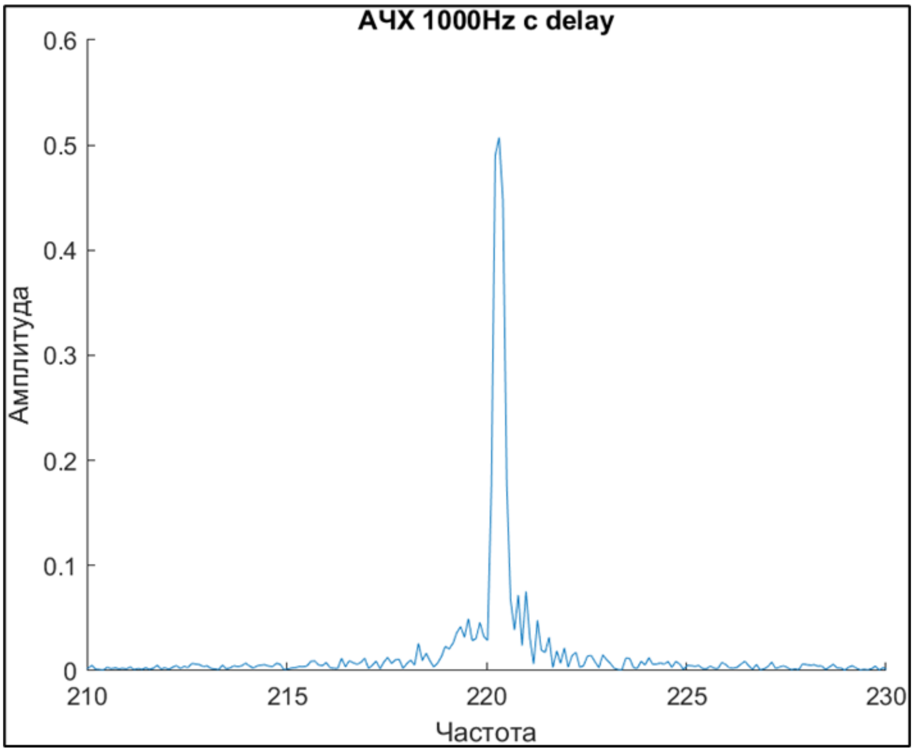

Рисунок 35 – АЧХ сигнала при 100Hz с задержкой

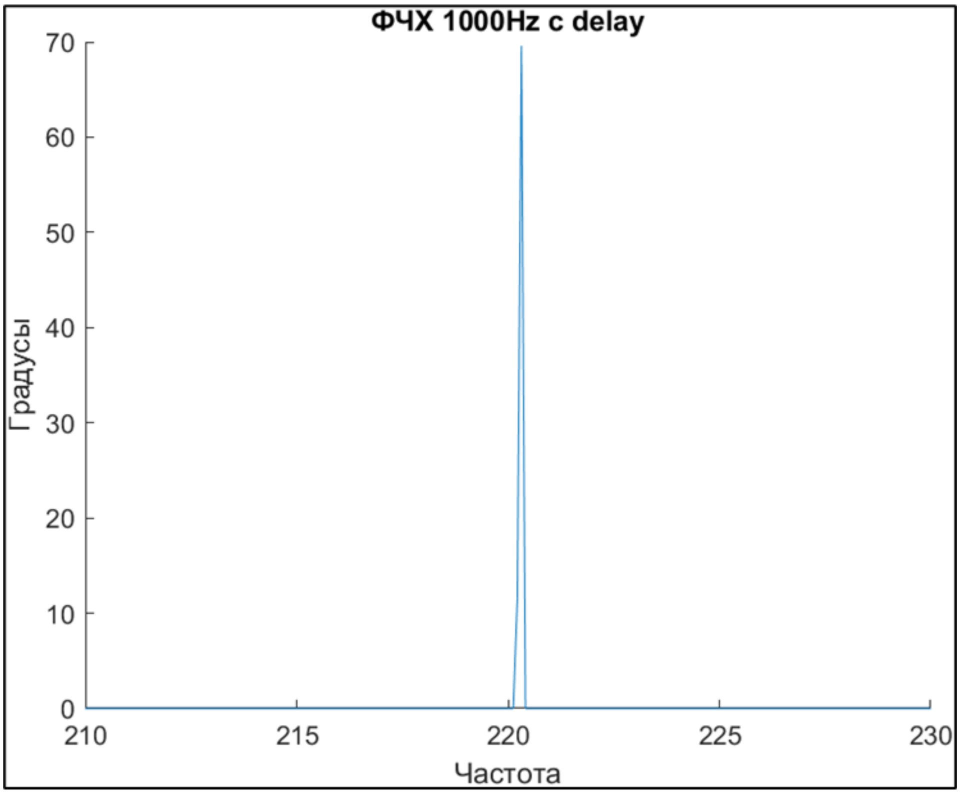

Рисунок 36 – ФЧХ сигнала при 1000Hz с задержкой

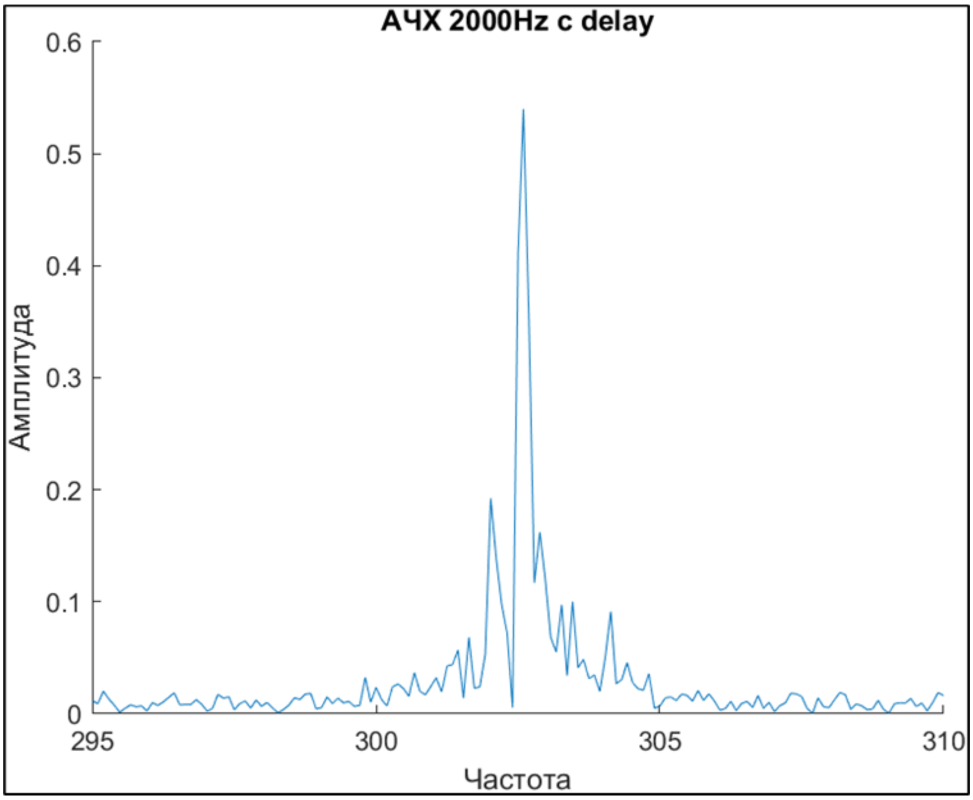

Рисунок 37 – АЧХ сигнала при 2kHz с задержкой

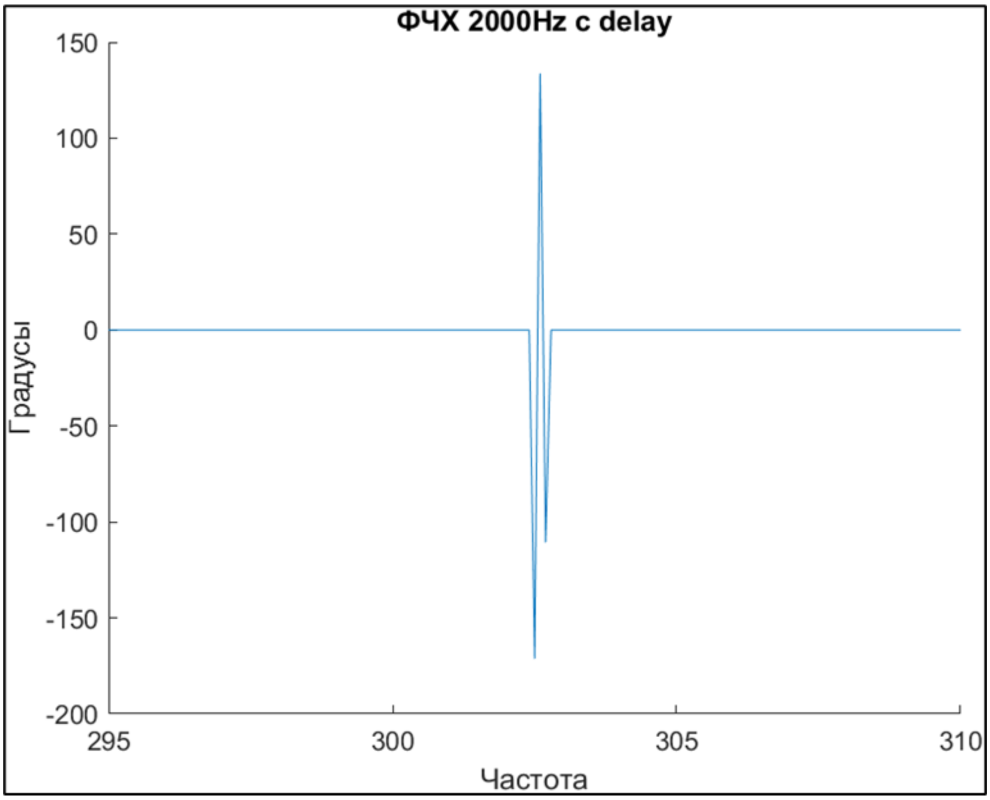

Рисунок 38 – ФЧХ сигнала при 2kHz с задержкой

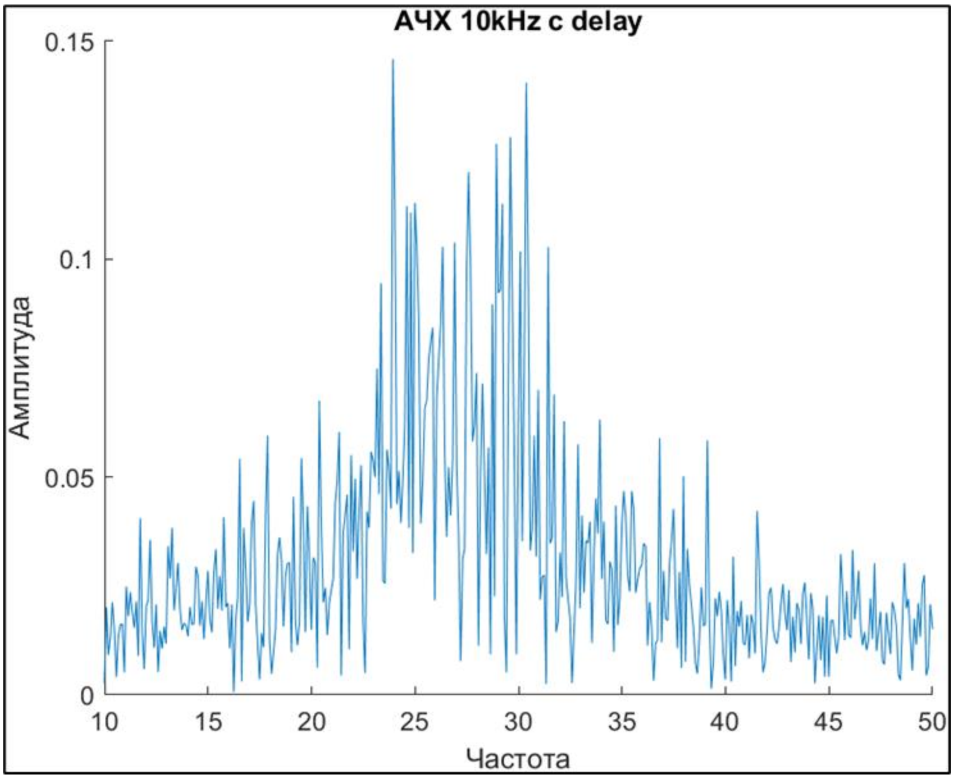

Рисунок 39 – АЧХ сигнала при 10kHz с задержкой

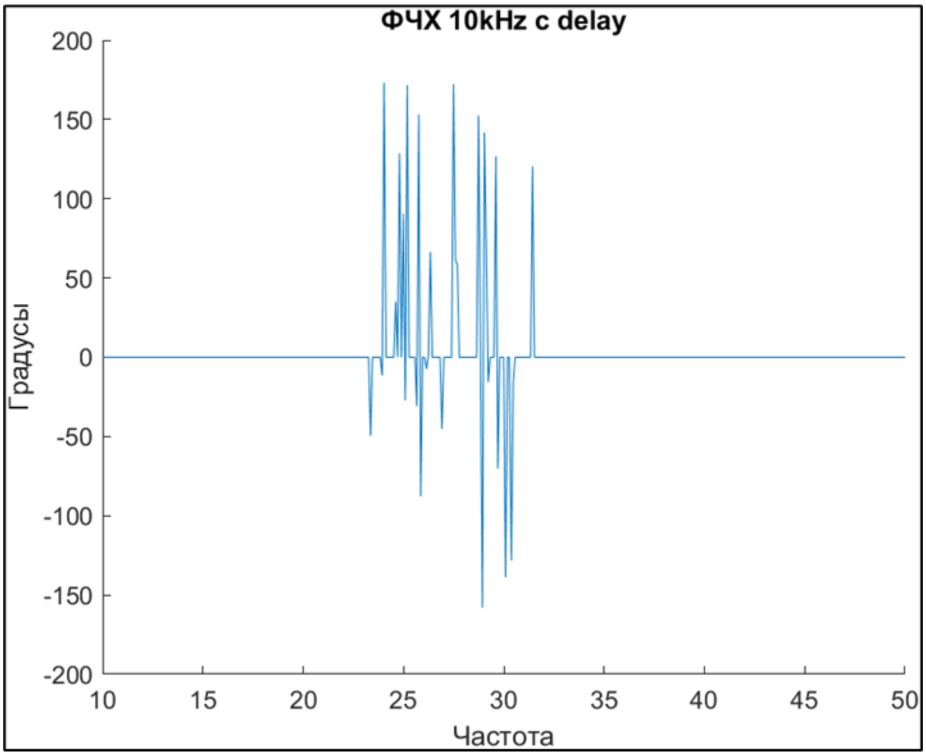

Рисунок 40 – ФЧХ сигнала при 10kHz с задержкой

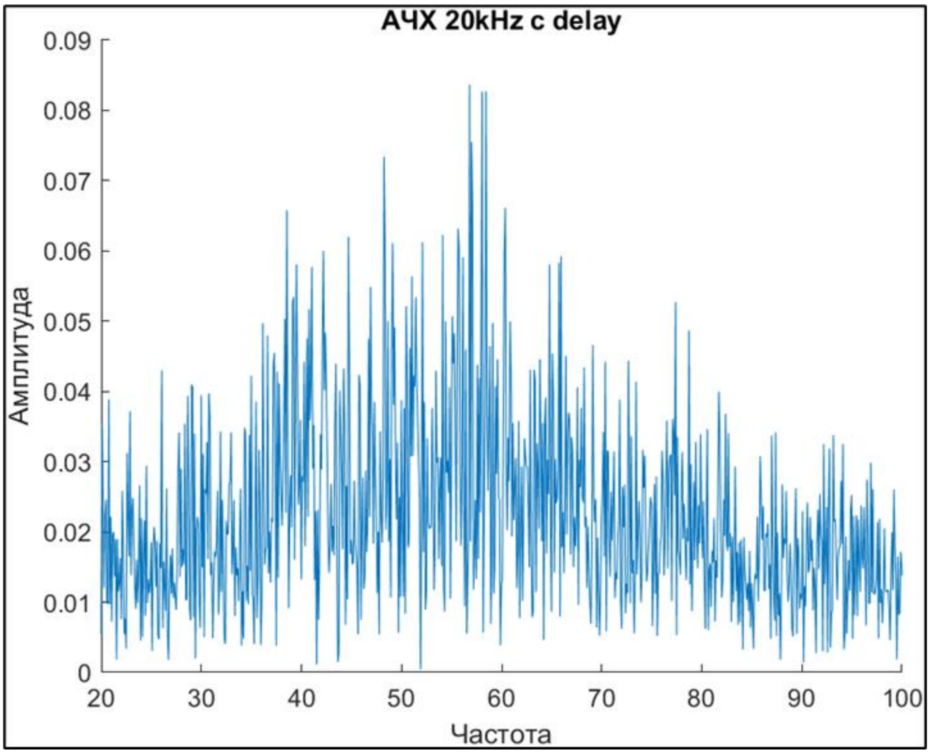

Рисунок 41 – АЧХ сигнала при 20kHz с задержкой

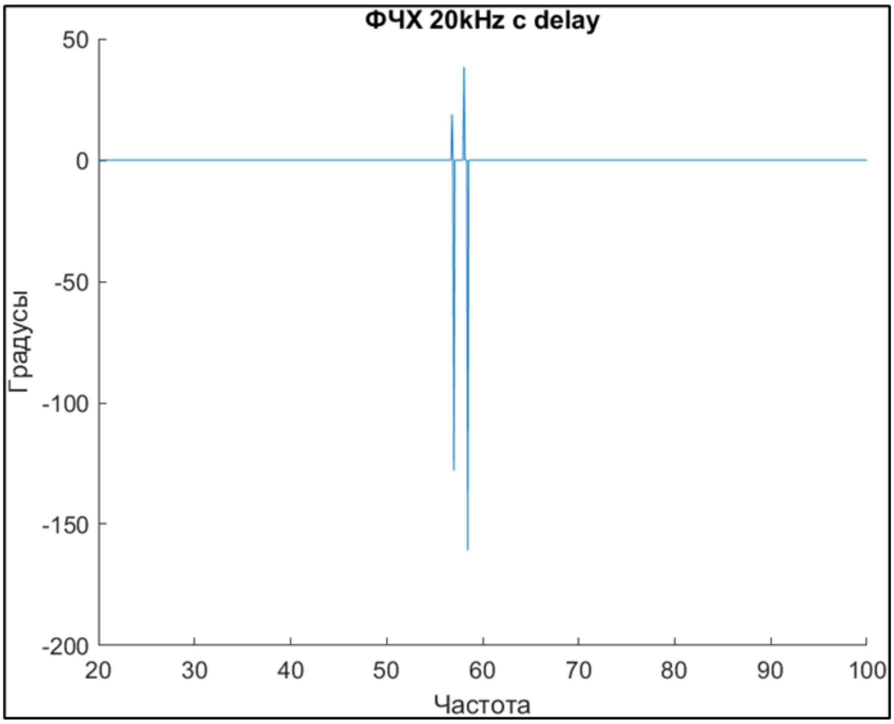

Рисунок 42 – ФЧХ сигнала при 20kHz с задержкой

6. Проверка свойств преобразований Фурье при помощи символьных вычислений:

1) Свойство линейности

Пусть даны непериодические сигналы $f(t)$ и $g(t)$, а также их спектральные плотности $F(w)$ и $G(w)$ соответственно. $f(t)$ и g(t) — абсолютно интегрируемые сигналы, тогда:

$$S(w) = F(af(t) + bg(t)) = aF(w) + bG(w)$$

```
>> syms a b f(x) g(x)
>> fourier(a*f(x)+b*g(x));
>> ans

ans =

a*fourier(f(x), x, w) + b*fourier(g(x), x, w)
```

Рисунок 43 – Доказательство линейности

2) Свойство временного сдвига

Рассмотрим сигнал $s(t) = f(t - a)$ как результат временного сдвига исходного сигнала $f(t)$ на произвольную величину a. Тогда преобразование Фурье сигнала имеет вид:

$$S(w) = F(f(t-a)) = e^{-jwa}F(w)$$

Таким образом, задержка сигнала во времени приводит к изменению фазы его спектральной плотности без изменения амплитуды.

```
>> fourier(f(x-a))

ans =

exp(-a*w*1i)*fourier(f(x), x, w)
```

Рисунок 44 - Доказательство временного сдвига

3) Свойство частотного сдвига

Рассмотрим сигнал $s(t) = f(t)e^{jat}$ как результат умножения исходного сигнала $f(t)$ на комплексную экспоненту с частотой a. Тогда преобразование Фурье сигнала имеет вид:

$$S(\omega) = F(f(t)e^{jat}) = F(\omega - a)$$

Таким образом, умножение сигнала на комплексную экспоненту с частотой a приводит к сдвигу его спектральной плотности на a.

```
>> ifourier(f(x-a))

ans =

(exp(a*t*1i)*fourier(f(x), x, -t))/(2*pi)
```

Рисунок 45 - Доказательство частотного сдвига

4) Свойство масштабирования

Рассмотрим сигнал $s(t) = f(at)$ как результат масштабирования исходного сигнала $f(t)$ с коэффициентом a. Тогда преобразование Фурье сигнала имеет вид:

$$S(\omega) = |a|^{-1} F(\omega/a)$$

Таким образом, масштабирование сигнала во времени приводит к обратному масштабированию его спектральной плотности по частоте.

```
>> fourier(f(a*x))

ans =

fourier(f(x), x, w/a)/abs(a)
```

Рисунок 46 - Доказательство масштабирования

5) Свойство дифференцирования

Рассмотрим сигнал $s(t) = df(t)/dt$ как результат дифференцирования исходного сигнала $f(t)$. Тогда преобразование Фурье сигнала имеет вид:

$$S(\omega) = F(df(t)/dt)=j\omega F(\omega)$$

Таким образом, дифференцирование сигнала во времени эквивалентно умножению его спектральной плотности на $j\omega$.

```
>>  fourier(diff(f(x)))

ans =

w*fourier(f(x), x, w)*1i
```

Рисунок 47 - Доказательство дифференцирования

6) Свойство дифференцирования

Рассмотрим сигнал $s(t) = t*f(t)$ как результат перемножения t и сигнала $f(t)$. Тогда преобразование Фурье сигнала имеет вид:

$$S(\omega) = F(t*f(t)) = i * df(t)/dt$$

```
>> ifourier(i*diff(fourier(f(x))))

ans =

x*f(x)
```

Рисунок 48 - Доказательство дифференцирования

7) Свойство свертки

Рассмотрим сигнал $s(t) = (f*g)(t)$ как результат умножения двух сигналов $f(t)$ и $g(t)$. Тогда преобразование Фурье сигнала имеет вид:

$$S(\omega) = F((f*g)(t)) = \sqrt{2\pi} * F(\omega) * G(\omega)$$

Таким образом, преобразование Фурье произведения двух сигналов равно произведению их спектральных плотностей, умноженной на $\sqrt{2\pi}$.

8) Свойство умножения

Рассмотрим сигнал $s(t) = f(t)g(t)$ как результат умножения двух сигналов $f(t)$ и $g(t)$. Тогда преобразование Фурье сигнала имеет вид:

$$S(\omega) = F(f(t)g(t)) = (F * G)(\omega)/\sqrt{2\pi}$$

Таким образом, преобразование Фурье произведения двух сигналов равно свертке их спектральных плотностей, деленной на $\sqrt{2\pi}$.

9) Преобразование Фурье дельта-функции Дирака

Рассмотрим сигнал $s(t) = \delta(t)$. Тогда преобразование Фурье сигнала имеет вид:

$$S(\omega) = F(\delta(t)) = 1/\sqrt{2\pi}$$

Преобразование Фурье дельта-функции Дирака $\delta(t)$ равно константе $1/\sqrt{2\pi}$. Это означает, что дельта-функция, которая представляет собой идеальный импульс в момент времени t = 0, имеет равномерный спектр по всем частотам.

```
>> fourier(dirac(x))

ans =

1
```

Рисунок 49 - Доказательство дельта-функции Дирака

10) Преобразование Фурье константы

Рассмотрим сигнал $s(t) = 1$. Тогда преобразование Фурье сигнала имеет вид:

$$S(\omega) = F(1) = \sqrt{2}\pi\, \delta(\omega)$$

Преобразование Фурье константы (единичного сигнала) равно 2π умноженному на дельта-функцию Дирака $\delta(\omega)$. Это означает, что постоянный сигнал имеет спектр, сосредоточенный только на нулевой частоте, что соответствует наличию постоянной составляющей.

```
>> syms t w
>> fourier(1, t, w)

ans =

2*pi*dirac(w)
```

Рисунок 50 - Доказательство константы

7. Проверим свойства 1, 2, 4, 7, 8 с помощью функции fft.

1) $S(w) = F(af(t) + bg(t)) = aF(w) + bG(w)$

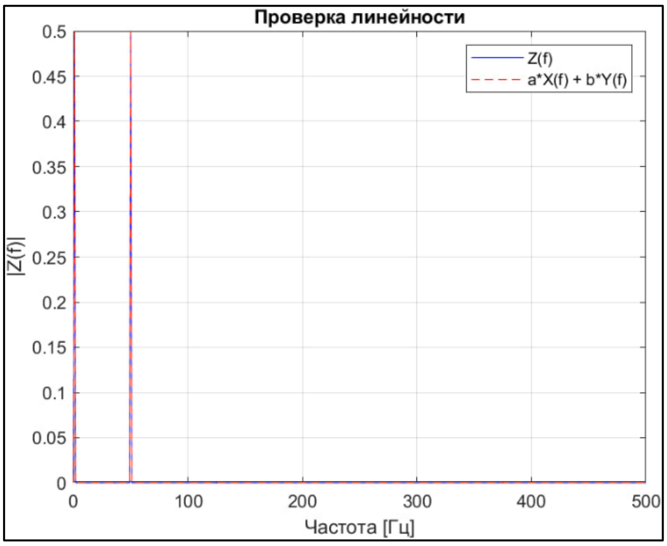

Рисунок 51 - Свойство линейности

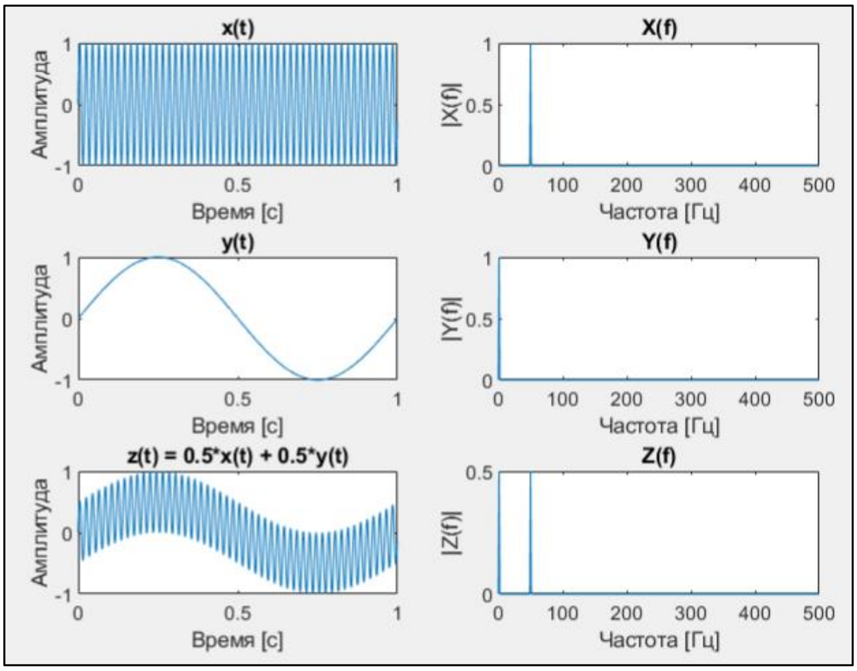

Рисунок 52 - Свойство линейности

2) $S(w) = F(f(t - a)) = e^{-jwa}F(w)$

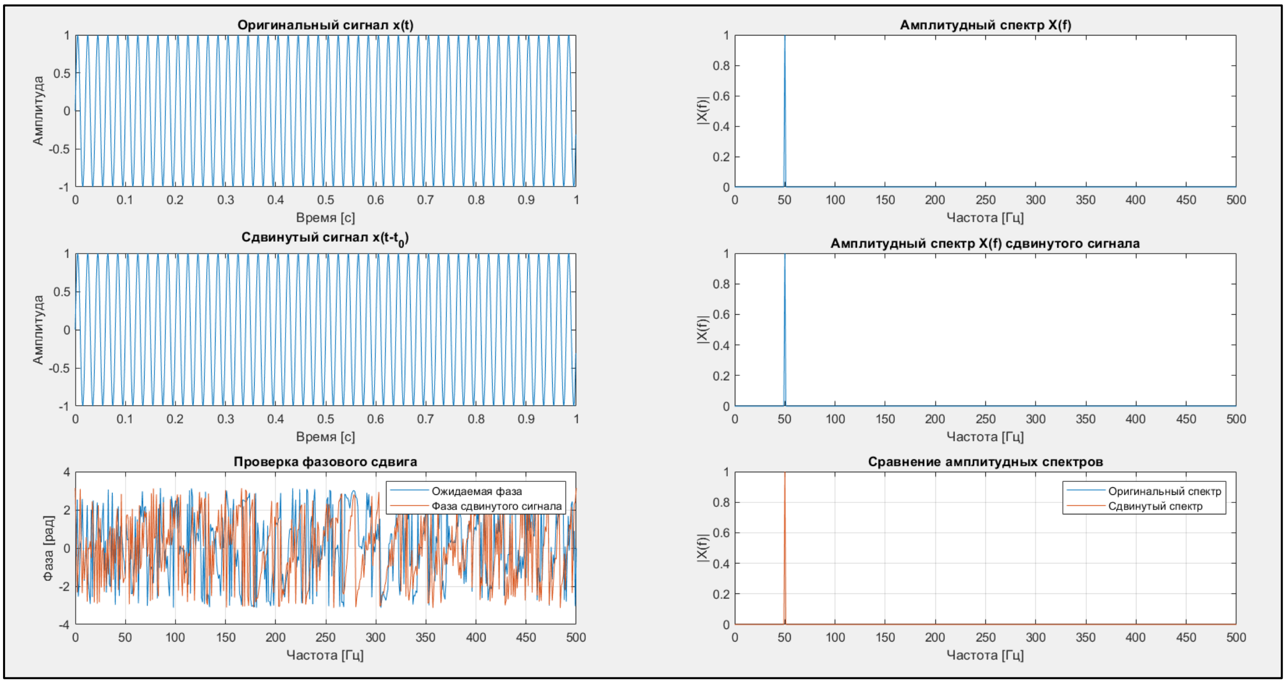

Рисунок 53 - Свойство временного сдвига

4) $S(\omega) = |a|^{-1} F(\omega/a)$

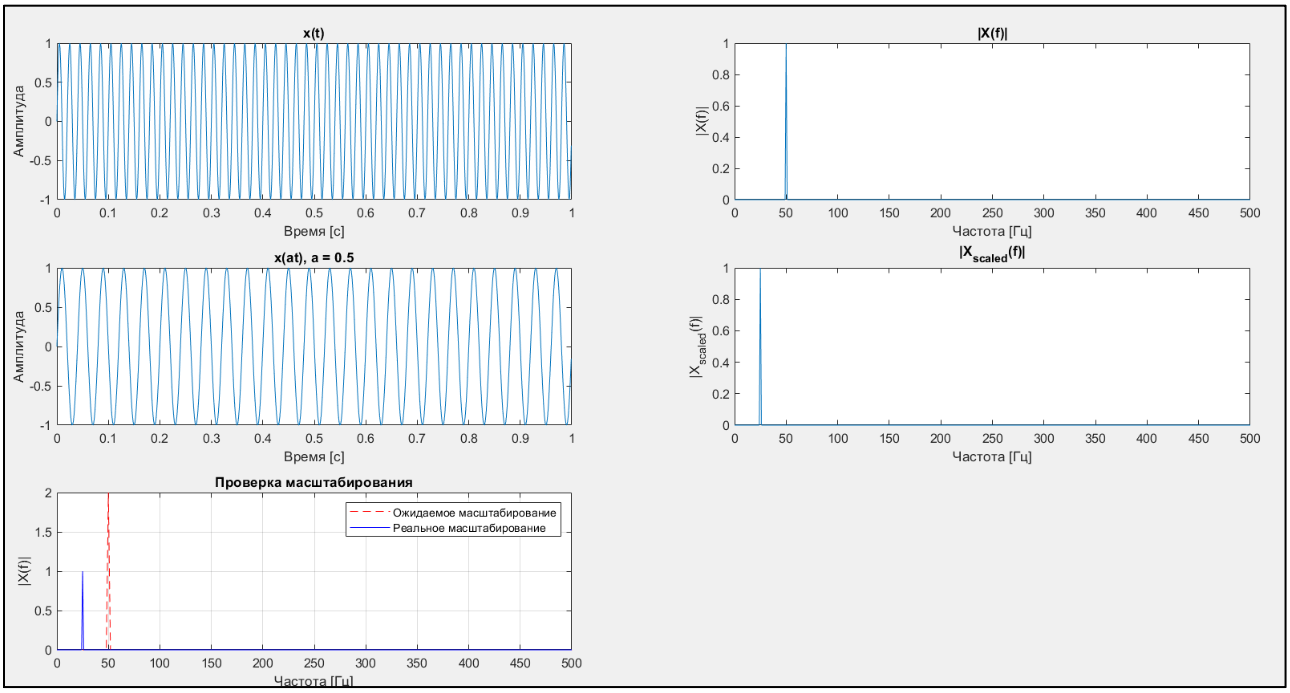

Рисунок 54 - Свойство масштабирования

7) $S(\omega) = F((f{*}g)(t)) = \sqrt{2\pi} * F(\omega) * G(\omega)$

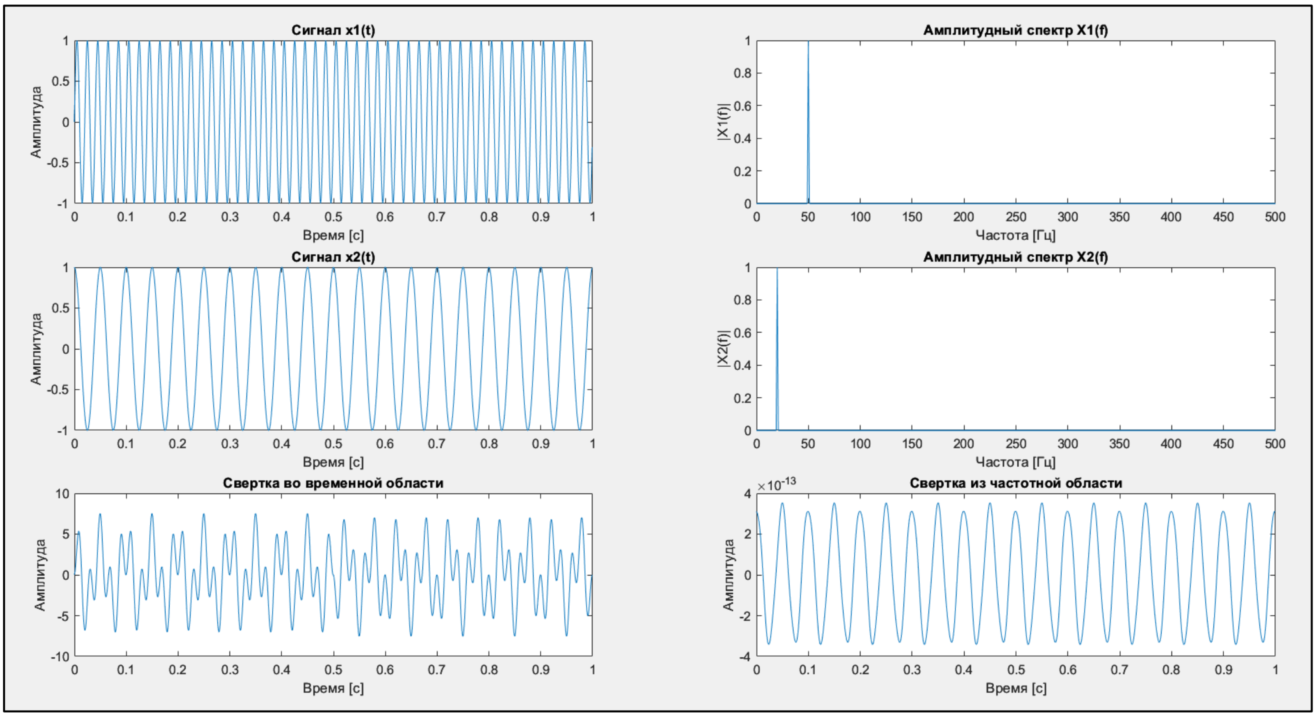

Рисунок 55 - Свойство свертки

8) $S(\omega) = F(f(t)g(t)) = (F * G)(\omega)/\sqrt{2\pi}$

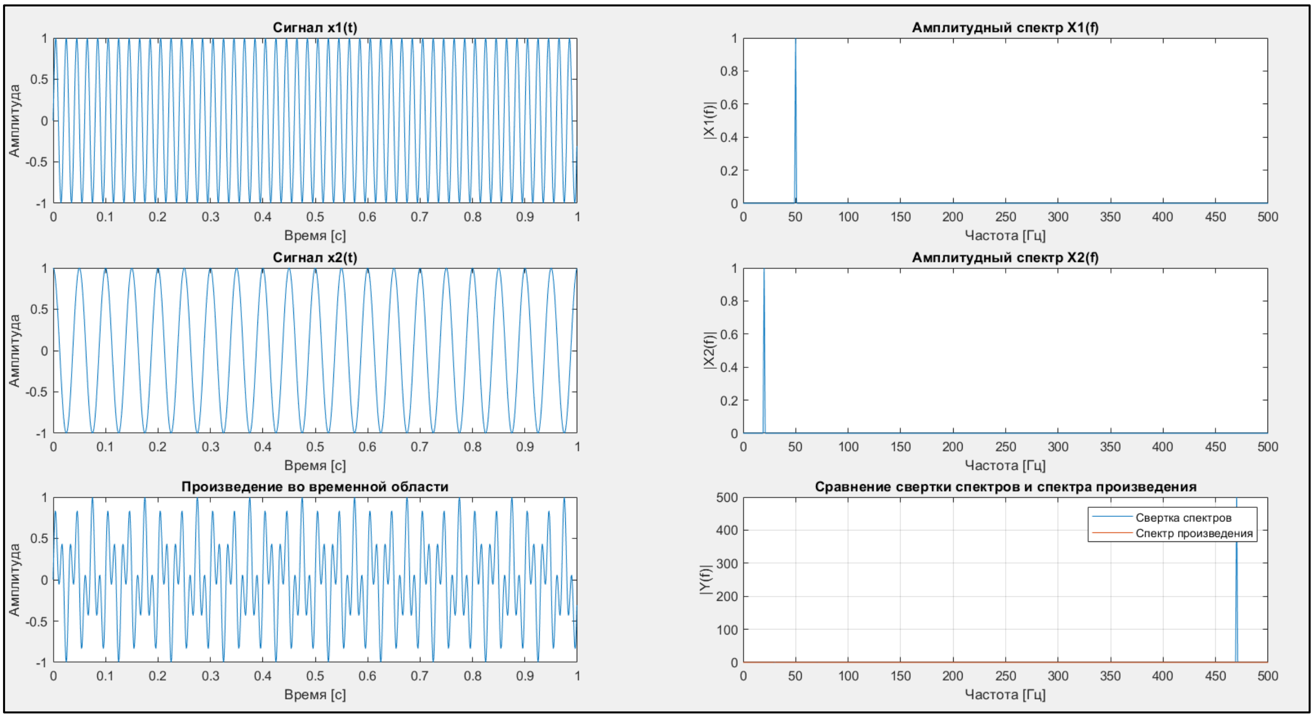

Рисунок 56 - Свойство умножения

Вывод:

В ходе выполнения лабораторной работы были изучены процессы оцифровки аналогового сигнала с помощью устройств NI Elvis и микроконтроллера Arduino. Были построены графики сигналов с различными частотами, проведен их анализ, а также исследовано влияние частоты дискретизации на искажение сигналов.

Частота дискретизации: для корректного отображения и анализа сигналов важно соблюдать теорему Котельникова-Найквиста, согласно которой частота дискретизации должна быть как минимум в два раза больше, чем максимальная частота сигнала. Это было подтверждено на графиках: сигналы с частотами до 1000 Гц отображаются четко, а сигналы с более высокими частотами (2000 Гц, 10 кГц, 20 кГц) искажаются из-за несоблюдения данного условия.

Преобразование Фурье: проверка свойств преобразования Фурье, таких как линейность, временной и частотный сдвиги, масштабирование и дифференцирование, показала их справедливость для исследуемых сигналов. Это подтвердило корректность теоретических основ и необходимость их учета при анализе сигналов.

В заключение, данная работа продемонстрировала важность правильного выбора частоты дискретизации при работе с аналоговыми сигналами, а также применение преобразования Фурье для анализа сигналов в частотной области. Это знание может быть полезным для дальнейших исследований в области цифровой обработки сигналов.