Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
Институт информационных технологий, математики и механики

Отчёт по лабораторной работе
Уравнения математической физики

Студенты:	Петров Павел, Михайлова Екатерина
Группа:	381803-1

Нижний Новгород
2021

Глава 1

Задача Штурма-Лиувилля

Задача Штурма-Лиувилля является простейшей задачей о поиске ортонормированной системы: найти те значения параметра λ, при которых существует нетривиальные решения задачи:

$$X'' + \lambda X = 0$$

$$\alpha X(0) - \beta X'(0) = 0, \quad \alpha \geq 0, \beta \geq 0, \alpha + \beta > 0,$$
$$\gamma X(l) + \delta X'(l) = 0, \quad \gamma \geq 0, \delta \geq 0, \gamma + \delta > 0,$$

а также найти эти решения. Такие значения параметра λ называются **собственными значениями**, а соответствующие им нетривиальные решения - **собственными функциями**.

Из анализа ограничений на параметры были получены девять случаев значений параметров:

1. $\alpha > 0, \beta = 0, \gamma > 0, \delta = 0.$
2. $\alpha > 0, \beta = 0, \gamma = 0, \delta > 0.$
3. $\alpha = 0, \beta > 0, \gamma > 0, \delta = 0.$
4. $\alpha = 0, \beta > 0, \gamma = 0, \delta > 0.$
5. $\alpha > 0, \beta = 0, \gamma > 0, \delta > 0.$
6. $\alpha = 0, \beta > 0, \gamma > 0, \delta > 0.$
7. $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0, \delta = 0.$
8. $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma = 0, \delta > 0.$
9. $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0, \delta > 0.$

1.1 Для всех возможных девяти случаев найти собственные числа и собственный функции задачи Штурма-Лиувилля (собственные функции отнормировать!)

Рассмотрим разные значения λ в задаче Штурма-Лиувилля.

1.1.1 $\lambda = 0$

В этом случае уравнение имеет вид:

$$X'' = 0,$$

а его решение:

$$X(x) = C_1 x + C_2,$$

где C_1 и C_2 - произвольные постоянные. Подставим это решение в граничные условия и получим, что:

$$\alpha C_2 - \beta C_1 = 0, \quad \gamma(C_1 l + C_2) + \delta C_1 = 0.$$

$\alpha > 0, \beta = 0, \gamma > 0, \delta = 0.$

В этом случае:

$$\alpha C_2 = 0, \quad \gamma(C_1 l + C_2) = 0,$$
$$C_2 = 0, \quad \gamma C_1 l = 0.$$

Так как по условию γ и l отличны от нуля, то равенство последнего уравнения нулю возможно только в одном случае, когда $C_1 = 0$. Как итог:

$$C_1 = 0,\ C_2 = 0,\ X(x) = 0.$$

Получили тривиальное решение, но оно нас не интересует.

$\alpha > 0, \beta = 0, \gamma = 0, \delta > 0.$

В этом случае:

$$\alpha C_2 = 0, \quad \delta C_1 = 0.$$

Исходя из условий, получаем:

$$C_1 = 0,\ C_2 = 0,\ X(x) = 0.$$

Получили тривиальное решение, но оно нас не интересует.

$\alpha = 0, \beta > 0, \gamma > 0, \delta = 0.$

В этом случае:

$$-\beta C_1 = 0, \quad \gamma(C_1 l + C_2) = 0,$$
$$C_1 = 0, \quad \gamma C_2 = 0.$$

Так как по условию γ отлична от нуля, то равенство последнего уравнения нулю возможно только в одном случае, когда $C_2 = 0$. Как итог:

$$C_1 = 0,\ C_2 = 0,\ X(x) = 0.$$

Получили тривиальное решение, но оно нас не интересует.

$\alpha = 0, \beta > 0, \gamma = 0, \delta > 0.$

В этом случае:

$$-\beta C_1 = 0, \quad \delta C_1 = 0.$$

Исходя из условий, получаем, что $C_1 = 0$, а на C_2 ограничений нет. Значит, чтобы получить нетривиальное решение, надо взять C_2 произвольной константой, отличной от нуля. Итог:

$$C_1 = 0,\ C_2 = const \neq 0,\ X(x) = C_2.$$

Получили нетривиальное решение.

$\alpha > 0, \beta = 0, \gamma > 0, \delta > 0.$

В этом случае:

$$\alpha C_2 = 0, \quad \gamma(C_1 l + C_2) + \delta C_1 = 0,$$
$$C_2 = 0, \quad (\gamma l + \delta)C_1 = 0.$$

Так как по условию γ, l и δ строго больше нуля, то равенство последнего уравнения нулю возможно только в одном случае, когда $C_1 = 0$. Как итог:

$$C_1 = 0,\ C_2 = 0,\ X(x) = 0.$$

Получили тривиальное решение, но оно нас не интересует.

$\alpha = 0, \beta > 0, \gamma > 0, \delta > 0.$

В этом случае:

$$-\beta C_1 = 0, \quad \gamma(C_1 l + C_2) + \delta C_1 = 0,$$
$$C_1 = 0, \quad \gamma C_2 = 0.$$

Так как по условию γ отлична от нуля, то равенство последнего уравнения нулю возможно только в одном случае, когда $C_2 = 0$. Как итог:

$$C_1 = 0,\ C_2 = 0,\ X(x) = 0.$$

Получили тривиальное решение, но оно нас не интересует.

$\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0, \delta = 0.$

В этом случае:

$$\alpha C_2 - \beta C_1 = 0, \quad \gamma(C_1 l + C_2) = 0,$$
$$C_2 = \frac{\beta}{\alpha}C_1, \quad (\gamma l + \frac{\gamma\beta}{\alpha})C_1 = 0.$$

Так как по условию все представленные параметры строго больше нуля, то равенство последнего уравнения нулю возможно только в одном случае, когда $C_1 = 0$, следовательно и $C_2 = 0$. Как итог:

$$C_1 = 0,\ C_2 = 0,\ X(x) = 0.$$

Получили тривиальное решение, но оно нас не интересует.

$\alpha > 0, \beta > 0, \gamma = 0, \delta > 0.$

В этом случае:

$$\alpha C_2 - \beta C_1 = 0, \quad \delta C_1 = 0,$$
$$\alpha C_2 = 0, \quad C_1 = 0.$$

Так как по условию α строго больше нуля, то равенство первого уравнения нулю возможно только в одном случае, когда $C_2 = 0$. Как итог:

$$C_1 = 0,\ C_2 = 0,\ X(x) = 0.$$

Получили тривиальное решение, но оно нас не интересует.

$\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0, \delta > 0.$

В этом случае:

$$\alpha C_2 - \beta C_1 = 0, \quad \gamma(C_1 l + C_2) + \delta C_1 = 0,$$
$$C_2 = \frac{\beta}{\alpha} C_1, \quad (\gamma l + \delta + \frac{\gamma\beta}{\alpha}) C_1 = 0.$$

Так как по условию все представленные параметры строго больше нуля, то равенство последнего уравнения нулю возможно только в одном случае, когда $C_1 = 0$, следовательно и $C_2 = 0$. Как итог:

$$C_1 = 0,\ C_2 = 0,\ X(x) = 0.$$

Получили тривиальное решение, но оно нас не интересует.

1.1.2 $\lambda < 0$

В этом случае решение уравнения имеет вид:

$$X(x) = C_1 e^{-\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{\sqrt{-\lambda}x}.$$

Заменим $\sqrt{-\lambda}$ на μ и подставим решение в граничные условия. Получим:

$$\begin{cases} \alpha(C_1 + C_2) - \beta\mu(C_2 - C_1) = 0, \\ \gamma(C_1 e^{-\mu l} + C_2 e^{\mu l}) + \delta\mu(C_2 e^{\mu l} - C_1 e^{-\mu l}) = 0 \end{cases}$$

$\alpha > 0, \beta = 0, \gamma > 0, \delta = 0.$

В этом случае:

$$\begin{cases} \alpha(C_1 + C_2) = 0, \\ \gamma(C_1 e^{-\mu l} + C_2 e^{\mu l}) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 = -C_2, \\ \gamma C_1 (e^{-\mu l} - e^{\mu l}) = 0 \end{cases}$$

Интересуемся нетривиальными решениями, поэтому приравняем $e^{-\mu l} - e^{\mu l}$ к нулю. Но здесь равенство нулю возможно только в случае равенства нулю μl, что невозможно, исходя из условий. Поэтому возможно только $C_1 = 0$ и, следовательно, $C_2 = 0$. Таким образом получаем тривиальное решение, что нам не подходит.

$$C_1 = 0,\ C_2 = 0,\ X(x) = 0.$$

$\alpha > 0, \beta = 0, \gamma = 0, \delta > 0.$

В этом случае:

$$\begin{cases} \alpha(C_1 + C_2) = 0, \\ \delta\mu(C_2 e^{\mu l} - C_1 e^{-\mu l}) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 = -C_2, \\ -\delta\mu C_1 (e^{\mu l} + e^{-\mu l}) = 0 \end{cases}$$

Второе уравнения равно нулю только в одном случае, когда $C_1 = 0$, так как по условию параметры строго больше нуля, а $e^{\mu l} + e^{-\mu l}$ никогда не может быть равно нулю, так как представляет собой сумму положительных функций. Следовательно, $C_2 = 0$, и получаем тривиальное решение, что нам не подходит.

$$C_1 = 0,\ C_2 = 0,\ X(x) = 0.$$

$\alpha = 0, \beta > 0, \gamma > 0, \delta = 0.$

В этом случае:

$$\begin{cases} -\beta\mu(C_2 - C_1) = 0, \\ \gamma(C_1 e^{-\mu l} + C_2 e^{\mu l}) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_2 = C_1, \\ \gamma C_1(e^{-\mu l} + e^{\mu l}) = 0 \end{cases}$$

Второе уравнения равно нулю только в одном случае, когда $C_1 = 0$, так как по условию параметр строго больше нуля, а $e^{\mu l} + e^{-\mu l}$ никогда не может быть равно нулю, так как представляет собой сумму положительных функций. Следовательно, $C_2 = 0$, и получаем тривиальное решение, что нам не подходит.

$$C_1 = 0,\ C_2 = 0,\ X(x) = 0.$$

$\alpha = 0, \beta > 0, \gamma = 0, \delta > 0.$

В этом случае:

$$\begin{cases} -\beta\mu(C_2 - C_1) = 0, \\ \delta\mu(C_2 e^{\mu l} - C_1 e^{-\mu l}) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_2 = C_1, \\ \delta\mu C_1(e^{\mu l} - e^{-\mu l}) = 0 \end{cases}$$

Интересуемся нетривиальными решениями, поэтому приравняем $e^{\mu l} - e^{-\mu l}$ к нулю. Но здесь равенство нулю возможно только в случае равенства нулю μl, что невозможно, исходя из условий. Поэтому возможно только $C_1 = 0$ и, следовательно, $C_2 = 0$. Таким образом получаем тривиальное решение, что нам не подходит.

$$C_1 = 0,\ C_2 = 0,\ X(x) = 0.$$

$\alpha > 0, \beta = 0, \gamma > 0, \delta > 0.$

В этом случае:

$$\begin{cases} \alpha(C_1 + C_2) = 0, \\ \gamma(C_1 e^{-\mu l} + C_2 e^{\mu l}) + \delta\mu(C_2 e^{\mu l} - C_1 e^{-\mu l}) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 = -C_2, \\ C_1(\gamma(e^{-\mu l} - e^{\mu l}) - \delta\mu(e^{\mu l} + e^{-\mu l})) = 0 \end{cases}$$

Интересуемся нетривиальными решениями, поэтому во втором уравнении занулим скобку:

$$\gamma(e^{-\mu l} - e^{\mu l}) - \delta\mu(e^{\mu l} + e^{-\mu l}) = 0,$$

затем умножим на $e^{\mu l}$ и соберём слагаемые с экспонентами и без:

$$(\gamma - \delta\mu) - (\gamma + \delta\mu)e^{2\mu l} = 0.$$

Получаем уравнение, которое надо решить относительно μ:

$$e^{2\mu l} = \frac{\gamma - \delta\mu}{\gamma + \delta\mu}.$$

Слева в уравнении, очевидно, стоит монотонно возрастающая функция. Справа имеем гиперболу с вертикальной асимптотой $\mu = -\frac{\gamma}{\delta} < 0$. Но $\mu = \sqrt{-\lambda}$, поэтому рассматриваем только положительные μ. Производная функции справа по μ равна: $\frac{-2\delta\gamma}{(\delta\mu+\gamma)^2} < 0$, значит гипербола убывает на всей своей области определения. При $\mu = 0$ функции совпадают, затем расходятся, поэтому при положительных μ обращение скобки в нуль невозможно. Значит возможно только $C_1 = 0$ и, следовательно, $C_2 = 0$, и решение тривиально.

$$C_1 = 0,\ C_2 = 0,\ X(x) = 0.$$

$\alpha = 0, \beta > 0, \gamma > 0, \delta > 0.$

В этом случае:

$$\begin{cases} -\beta\mu(C_2 - C_1) = 0, \\ \gamma(C_1 e^{-\mu l} + C_2 e^{\mu l}) + \delta\mu(C_2 e^{\mu l} - C_1 e^{-\mu l}) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_2 = C_1, \\ C_1(\gamma(e^{-\mu l} + e^{\mu l}) + \delta\mu(e^{\mu l} - e^{-\mu l})) = 0 \end{cases}$$

Интересуемся нетривиальными решениями, поэтому во втором уравнении занулим скобку:

$$\gamma(e^{-\mu l} + e^{\mu l}) + \delta\mu(e^{\mu l} - e^{-\mu l}) = 0,$$

затем умножим на $e^{\mu l}$ и соберём слагаемые с экспонентами и без:

$$(\gamma - \delta\mu) + (\gamma + \delta\mu)e^{2\mu l} = 0.$$

Получаем уравнение, которое надо решить относительно μ:

$$e^{2\mu l} = \frac{\delta\mu - \gamma}{\delta\mu + \gamma}.$$

Слева в уравнении, очевидно, стоит монотонно возрастающая функция. Справа имеем гиперболу с вертикальной асимптотой $\mu = -\frac{\gamma}{\delta} < 0$. Но $\mu = \sqrt{-\lambda}$, поэтому рассматриваем только положительные μ. Производная функции справа по μ равна: $\frac{2\delta\gamma}{(\delta\mu+\gamma)^2} < 0$, значит гипербола возрастает на всей своей области определения. При $\mu = 0$ функция слева равна 1, справа равна -1, при стремлении μ к бесконечности, гипербола стремится к 1, пока экспонента в это время уходит на бесконечность, поэтому нет такого значения μ, при котором скобка обращалась бы в нуль. Значит возможно только $C_1 = 0$ и, следовательно, $C_2 = 0$, и решение тривиально.

$$C_1 = 0,\ C_2 = 0,\ X(x) = 0.$$

$\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0, \delta = 0.$

В этом случае:

$$\begin{cases} C_1(\alpha - \beta) + \sqrt{-\lambda}C_2(\alpha + \beta) = 0, \\ C_1\sqrt{-\lambda}e^{\sqrt{-\lambda}l} - C_2\sqrt{-\lambda}e^{\sqrt{-\lambda}l} = 0 \end{cases}$$

Пусть C_1 и C_2 не обращаются одновременно в 0: Выразим выражение $\frac{C_1}{C_2}$ через первое и второе уравнение в системе:

$$\frac{C_1}{C_2} = e^{-2\sqrt{-\lambda}l} = -\frac{\sqrt{-\lambda}(\alpha + \beta)}{\beta - \alpha}$$

Это уравнение не имеет решений. Из второго уравнения следует, что равняться нулю только одна из констант не может, поэтому наша задача имеет только тривиальное решение $X_n(x) = 0$.

$\alpha > 0, \beta > 0, \gamma = 0, \delta > 0.$

В этом случае:

$$\begin{cases} \alpha(C_1 + C_2) - \beta\mu(C_2 - C_1) = 0, \\ \delta\mu(C_2 e^{\mu l} - C_1 e^{-\mu l}) = 0 \end{cases}$$

Выразим C_2 через C_1 в первом уравнении:

$$\begin{cases} C_2 = -\frac{\beta\mu+\alpha}{\beta\mu-\alpha} C_1, \\ -\delta\mu C_1(\frac{\beta\mu+\alpha}{\beta\mu-\alpha} e^{\mu l} + e^{-\mu l}) = 0 \end{cases}$$

Домножим последнее уравнение на $e^{\mu l}$ и $\frac{\beta\mu-\alpha}{\beta\mu+\alpha}$ и занулим скобку:

$$e^{2\mu l} = -\frac{\beta\mu - \alpha}{\beta\mu + \alpha}$$

Слева в уравнении, очевидно, стоит монотонно возрастающая функция. Справа имеем гиперболу с вертикальной асимптотой $\mu = -\frac{\alpha}{\beta} < 0$. Но $\mu = \sqrt{-\lambda}$, поэтому рассматриваем только положительные μ. Производная функции справа по μ равна: $\frac{-2\alpha\beta}{(\beta\mu+\alpha)^2} < 0$, значит гипербола убывает на всей своей области определения. При $\mu = 0$ функции совпадают, затем расходятся, поэтому при положительных μ обращение скобки в нуль невозможно. Значит возможно только $C_1 = 0$ и, следовательно, $C_2 = 0$, и решение тривиально.

$$C_1 = 0,\ C_2 = 0,\ X(x) = 0.$$

$\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0, \delta > 0.$

В этом случае:

$$\begin{cases} \alpha(C_1 + C_2) - \beta\mu(C_2 - C_1) = 0, \\ \gamma(C_1 e^{-\mu l} + C_2 e^{\mu l}) + \delta\mu(C_2 e^{\mu l} - C_1 e^{-\mu l}) = 0 \end{cases}$$

Выразим C_2 через C_1 в первом уравнении:

$$\begin{cases} C_2 = -\frac{\beta\mu+\alpha}{\beta\mu-\alpha} C_1, \\ \gamma(C_1 e^{-\mu l} - \frac{\beta\mu+\alpha}{\beta\mu-\alpha} C_1 e^{\mu l}) + \delta\mu(-\frac{\beta\mu+\alpha}{\beta\mu-\alpha} C_1 e^{\mu l} - C_1 e^{-\mu l}) = 0 \end{cases}$$

Умножим последнее уравнение на $e^{\mu l} C_1$:

$$\begin{cases} C_2 = -\frac{\beta\mu+\alpha}{\beta\mu-\alpha} C_1, \\ \gamma C_1(1 - \frac{\beta\mu+\alpha}{\beta\mu-\alpha} e^{2\mu l}) + \delta\mu C_1(-\frac{\beta\mu+\alpha}{\beta\mu-\alpha} e^{2\mu l} - 1) = 0 \end{cases}$$

Преобразуем второй уравнение:

$$C_1(-\frac{\beta\mu + \alpha}{\beta\mu - \alpha}(\gamma + \delta\mu)e^{2\mu l} - (\delta\mu - \gamma)) = 0$$

Приравняем скобку к нулю и получим уравнение, которое нужно решить относительно μ:

$$e^{2\mu l} = -\frac{\beta\mu - \alpha}{\beta\mu + \alpha} \frac{\delta\mu - \gamma}{\delta\mu + \gamma}$$

При $\mu = 0$ экспонента равна 1, а функция справа -1, на бесконечности экспонента устремляется к бесконечности, монотонно возрастая, а функция справа стремится к -1, причём скорость роста экспоненты выше, чем скорость функции справа, поэтому пересечения графиков быть не может. Следовательно, скобка не может обратиться к нуль, а значит равенство нулю второго уравнения системы возможно только лишь в случае $C_1 = 0$. Из этого следует, что $C_2 = 0$ и решение тривиально.

$$C_1 = 0,\ C_2 = 0,\ X(x) = 0.$$

1.1.3 $\lambda > 0$

В этом случае решение уравнения имеет вид:

$$X(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x.$$

Заменим $\sqrt{\lambda}$ на μ и подставим решение в граничные условия. Получим:

$$\begin{cases} \alpha C_1 - \beta\mu C_2 = 0, \\ \gamma(C_1 \cos\mu l + C_2 \sin\mu l) + \delta\mu(-C_1 \sin\mu l + C_2 \cos\mu l) = 0 \end{cases}$$

$\alpha > 0, \beta = 0, \gamma > 0, \delta = 0.$

В этом случае:

$$\begin{cases} \alpha C_2 = 0, \\ \gamma C_1 sin(\sqrt{\lambda}l) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_2 = 0, \\ C_1 sin(\sqrt{\lambda}l) = 0 \end{cases}$$

Интересуемся нетривиальными решениями, C_1 не может быть равно 0, поэтому приравняем $sin(\sqrt{\lambda}l)$ к нулю:

$$sin(\sqrt{\lambda}l) = 0,$$

$$\sqrt{\lambda}l = \pi n, n \in N,$$

$$\lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}, n \in N.$$

Найдем собственные функции:

$$X_n(x) = C_k sin(\frac{\pi n}{l}x), n \in N,$$

Отнормируем собственные функции:

$$1 = (C_k sin(\frac{\pi n}{l}x), C_k sin(\frac{\pi n}{l}x)) = C_k^2 \int_0^l \sin(\frac{\pi n}{l}x)dx = \frac{C_k^2 l}{2}$$

Отсюда:

$$C_k = \sqrt{\frac{2}{l}}$$

$\alpha > 0, \beta = 0, \gamma = 0, \delta > 0.$

В этом случае:

$$\begin{cases} \alpha C_2 = 0, \\ \delta C_1 cos(\sqrt{\lambda}l) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_2 = 0, \\ C_1 cos(\sqrt{\lambda}l) = 0 \end{cases}$$

Интересуемся нетривиальными решениями, поэтому приравняем $cos(\sqrt{\lambda}l)$к нулю

$$cos(\sqrt{\lambda}l) = 0,$$

$$\sqrt{\lambda}l = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in N,$$

Отсюда

$$\lambda_n = \frac{\pi^2(n-\frac{1}{2})^2}{l^2}, n \in N$$

Найдем собственные функции:

$$X_n(x) = C_K sin(\frac{\pi(n-\frac{1}{2})}{l}x), n \in N$$

Отнормируем собственные функции:

$$1 = (C_k sin(\frac{\pi(n-\frac{1}{2})}{l}x)), C_k sin(\frac{\pi(n-\frac{1}{2})}{l}x)) = C_k^2 \int_0^l \sin^2(\frac{\pi(n-\frac{1}{2})}{l}x)dx = \frac{C_k^2 l}{2}$$

Отсюда:

$$C_k = \sqrt{\frac{2}{l}}$$

$\alpha = 0, \beta > 0, \gamma > 0, \delta = 0.$

В этом случае:

$$\begin{cases} \beta C_1\sqrt{\lambda} = 0, \\ \gamma C_2 cos(\sqrt{\lambda}l) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 = 0, \\ C_2 cos(\sqrt{\lambda}l) = 0 \end{cases}$$

Интересуемся нетривиальными решениями, поэтому приравняем $cos(\sqrt{\lambda}l)$к нулю

$$cos(\sqrt{\lambda}l) = 0$$

$$\sqrt{\lambda}l = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in N$$

Отсюда

$$\lambda_n = \frac{\pi^2(n-\frac{1}{2})^2}{l^2}, n \in N$$

Найдем собственные функции:

$$X_n(x) = C_k cos(\frac{\pi(n-\frac{1}{2})}{l}x), n \in N$$

Отнормируем собственные функции:

$$1 = (C_k cos(\frac{\pi(n-\frac{1}{2})}{l}x), C_k cos(\frac{\pi(n-\frac{1}{2})}{l}x)) = C_k^2 \int_0^l \cos^2(\frac{\pi(n-\frac{1}{2})}{l}x)dx = \frac{C_k^2 l}{2}$$

Отсюда:

$$C_k = \sqrt{\frac{2}{l}}$$

$\alpha = 0, \beta > 0, \gamma = 0, \delta > 0.$

В этом случае:

$$\begin{cases} \beta C_1 \sqrt{\lambda} = 0, \\ \delta \sqrt{\lambda} C_2 sin(\sqrt{\lambda} l) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 = 0, \\ C_2 sin(\sqrt{\lambda} e) = 0 \end{cases}$$

Интересуемся нетривиальными решениями, поэтому приравняем $sin(\sqrt{\lambda} l)$к нулю

$$sin(\sqrt{\lambda} l) = 0$$

$$\sqrt{\lambda} l = \pi n, n \in N$$

Отсюда

$$\lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}, n \in N$$

Найдем собственные функции:

$$X_n(x) = C_k cos(\frac{\pi n}{l} x), n \in N$$

Отнормируем собственные функции:

$$1 = (C_k cos(\frac{\pi n}{l} x), C_k cos(\frac{\pi n}{l} x)) = C_k^2 \int_0^l \cos^2(\frac{\pi n}{l} x) x) dx = \frac{C_k^2 l}{2}$$

Отсюда:

$$C_k = \sqrt{\frac{2}{l}}$$

$\alpha > 0, \beta = 0, \gamma > 0, \delta > 0.$

В этом случае:

$$\begin{cases} \alpha C_2 = 0, \\ C_1(\gamma sin(\sqrt{\lambda} l) + \delta \sqrt{\lambda} cos(\sqrt{\lambda} l)) = 0 \end{cases}$$

Интересуемся нетривиальными решениями, поэтому приравняем $\gamma sin(\sqrt{\lambda} l) + \delta \sqrt{\lambda} cos(\sqrt{\lambda} l)$ к нулю

$$\begin{cases} C_2 = 0, \\ \gamma sin(\sqrt{\lambda} l) = -\delta \sqrt{\lambda} cos(\sqrt{\lambda} l) \end{cases}$$

Так как $cos(\sqrt{\lambda} l)$ и $sin(\sqrt{\lambda} l)$ не могут одновременно равняться 0:

$$\lambda = \frac{\gamma^2}{\delta^2} tg^2(\sqrt{\lambda} l)$$

это уравнение имеет бесконечно много решений.
Найдем собственные функции:

$$X_n(x) = sin(\sqrt{\lambda_n} x), n \in N$$

$\alpha = 0, \beta > 0, \gamma > 0, \delta > 0.$

В этом случае:

$$\begin{cases} C_2 = 0, \\ C_1(\gamma \cos \mu l - \delta\mu \sin \mu l) = 0 \end{cases}$$

Ищем нетривиальные решения, поэтому занулим во втором уравнении скобку и сделаем некоторое преобразование:

$$\sqrt{\gamma^2 + (\delta\mu)^2}(\frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 + (\delta\mu)^2}} \cos \mu l - \frac{\delta\mu}{\sqrt{\gamma^2 + (\delta\mu)^2}} \sin \mu l) = 0$$

Обозначим $\operatorname{tg} \Omega = \frac{\delta\mu}{\gamma}$ и свернём получившееся выражение в скобке по формуле косинуса суммы:

$$\sqrt{\gamma^2 + (\delta\mu)^2} cos(\mu l + \operatorname{arctg} \frac{\delta\mu}{\gamma}) = 0$$

Из условий на параметры и на собственное число получим, что:

$$\mu l + \operatorname{arctg} \frac{\delta\mu}{\gamma} = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{N}.$$

Слева получили, очевидно, монотонно возрастающую функцию, справа уравнение горизонтальной прямой. Понятно, что, в силу свойств функций, обязательно найдётся при каждом k такое μ_k^*, которое будет удовлетворять полученному уравнению. Значит $C_1 \neq 0$ и получено нетривиальное решение (или собственная функция), соответствующая собственному числу μ_k^*.

$$C_1 = const \neq 0,\ C_2 = 0,\ X(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda_k} x,\ \sqrt{\lambda_k} \in \{\sqrt{\lambda}\,|\sqrt{\lambda} l + \operatorname{arctg} \frac{\delta\sqrt{\lambda}}{\gamma} = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{N}\}.$$

Отнормируем собственную функцию:

$$1 = (C_k \cos \sqrt{\lambda_k} x, C_k \cos \sqrt{\lambda_k} x) = C_k^2 \int_0^l \cos^2 \sqrt{\lambda_k} x dx = C_k^2 (\frac{x}{2} + \frac{1}{2\lambda_k} \sin 2\lambda_k x)_0^l = C_k^2 (\frac{l}{2} + \frac{1}{2\lambda_k} \sin 2\lambda_k l)$$

Отсюда:

$$C_k = \sqrt{\frac{1}{\frac{l}{2} + \frac{1}{2\lambda_k} \sin 2\lambda_k l}}.$$

$\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0, \delta = 0.$

В этом случае:

$$\begin{cases} \alpha C_1 - \beta\mu C_2 = 0, \\ \gamma(C_1 \cos \mu l + C_2 \sin \mu l) = 0 \end{cases}$$

Выразим C_2 через C_1 и подставим во второе уравнение:

$$\begin{cases} C_2 = \frac{\alpha}{\beta\mu} C_1, \\ C_1(\cos \mu l + \frac{\alpha}{\beta\mu} \sin \mu l) = 0 \end{cases}$$

Преобразуем:

$$\begin{cases} C_2 = \frac{\alpha}{\beta\mu} C_1, \\ C_1(\beta\mu \cos \mu l + \alpha \sin \mu l) = 0 \end{cases}$$

Интересуемся нетривиальными решениями, поэтому во втором уравнении занулим скобку и проведём некоторое преобразование:

$$\sqrt{(\beta\mu)^2+\alpha^2}(\frac{\beta\mu}{\sqrt{(\beta\mu)^2+\alpha^2}}\cos\mu l+\frac{\alpha}{\sqrt{(\beta\mu)^2+\alpha^2}}\sin\mu l)=0$$

В силу ограничений на параметры и собственное число равенство нулю возможно только в том случае, когда выражение, получившееся в скобке равно нулю. Свернём его по формуле синуса суммы, при условии что $\operatorname{tg}\Omega=\frac{\beta\mu}{\alpha}$:

$$\sin(\mu l+\operatorname{arctg}\frac{\beta\mu}{\alpha})=0$$

Нужно решить следующее уравнение относительно μ:

$$\mu l+\operatorname{arctg}\frac{\beta\mu}{\alpha}=\pi k,\ k\in\mathbb{N}.$$

Очевидно, что слева стоит монотонно возрастающая функция, справа функция, график которой является горизонтальной прямой, поэтому для любого k найдётся μ_k^*, которое будет удовлетворять полученному уравнению. Значит $C_1\neq 0$ и получено нетривиальное решение (или собственная функция), соответствующая собственному числу μ_k^*.

$$C_1=const\neq 0,\ C_2=\frac{\alpha}{\beta\mu_k}C_1,\ X(x)=C_k(\cos\sqrt{\lambda_k}x+\frac{\alpha}{\beta\mu}\sin\sqrt{\lambda_k}x),$$

$$\sqrt{\lambda_k}\in\{\sqrt{\lambda}\,|\,\sqrt{\lambda}l+\operatorname{arctg}\frac{\beta\sqrt{\lambda}}{\alpha}=\pi k,\ k\in\mathbb{N}.\}$$

Отнормируем собственную функцию ($\operatorname{tg}\varphi=\frac{\mu\beta}{\alpha}$):

$$1=C_k^2\int_0^l(\cos\sqrt{\lambda_k}x+\frac{\alpha}{\beta\mu_k}\sin\sqrt{\lambda_k}x)^2=C_k^2(1+(\frac{\alpha}{\beta\mu_k})^2)\int_0^l\sin^2(\sqrt{\lambda_k}x+\varphi)dx=$$

$$=C_k^2(1+(\frac{\alpha}{\beta\mu_k})^2)(\frac{x}{2}-\frac{1}{2\sqrt{\lambda_k}}\sin(2\sqrt{\lambda_k}x+\varphi))_0^l=C_k^2(1+(\frac{\alpha}{\beta\mu_k})^2)(\frac{l}{2}-\frac{1}{2\sqrt{\lambda_k}}(\sin(2\sqrt{\lambda_k}l+\varphi)+\sin 2\varphi))$$

Отсюда:

$$C_k=\sqrt{\frac{1}{(1+(\frac{\alpha}{\beta\sqrt{\lambda_k}})^2)(\frac{l}{2}-\frac{1}{2\sqrt{\lambda_k}}(\sin(2\sqrt{\lambda_k}l+\varphi)+\sin 2\varphi))}}$$

$\alpha>0,\beta>0,\gamma=0,\delta>0.$

В этом случае:

$$\begin{cases}\alpha C_1-\beta\mu C_2=0,\\ \delta\mu(-C_1\sin\mu l+C_2\cos\mu l)=0\end{cases}$$

Преобразуем:

$$\begin{cases}C_2=\frac{\alpha}{\beta\mu}C_1,\\ C_1(-\beta\mu\sin\mu l+\alpha\cos\mu l)=0\end{cases}$$

Интересуемся нетривиальными решениями, поэтому приравняем в нулю скобку во втором уравнении системы, сделав некоторые преобразования:

$$\sqrt{(\beta\mu)^2+\alpha^2}(\frac{\alpha}{\sqrt{(\beta\mu)^2+\alpha^2}}\cos\mu l-\frac{\beta\mu}{\sqrt{(\beta\mu)^2+\alpha^2}}\sin\mu l)=0$$

Свернём получившееся выражение в скобках по формуле косинуса суммы, предварительно обозначив $\operatorname{tg}\Omega = \frac{\beta\mu}{\alpha}$:

$$\cos(\mu l + \operatorname{arctg}(\frac{\beta\mu}{\alpha})) = 0$$

$$\mu l + \operatorname{arctg}(\frac{\beta\mu}{\alpha}) = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{N}$$

Рассуждения аналогичны предыдущему случаю. $C_1 \neq 0$ и получено нетривиальное решение (или собственная функция), соответствующая собственному числу μ_k^*.

$$C_1 = const \neq 0,\ C_2 = \frac{\alpha}{\beta\mu_k}C_1,\ X(x) = C_k(\cos\sqrt{\lambda_k}x + \frac{\alpha}{\beta\mu}\sin\sqrt{\lambda_k}x),$$

$$\sqrt{\lambda_k} \in \{\sqrt{\lambda} \mid \sqrt{\lambda}l + \operatorname{arctg}\frac{\beta\sqrt{\lambda}}{\alpha} = \pi k,\ k \in \mathbb{N}.\}$$

Отнормируем собственную функцию ($\operatorname{tg}\varphi = \frac{\mu\beta}{\alpha}$):

$$1 = C_k^2\int_0^l(\cos\sqrt{\lambda_k}x + \frac{\alpha}{\beta\mu_k}\sin\sqrt{\lambda_k}x)^2 = C_k^2(1+(\frac{\alpha}{\beta\mu_k})^2)\int_0^l \sin^2(\sqrt{\lambda_k}x+\varphi)dx =$$

$$= C_k^2(1+(\frac{\alpha}{\beta\mu_k})^2)(\frac{x}{2} - \frac{1}{2\sqrt{\lambda_k}}\sin(2\sqrt{\lambda_k}x+\varphi))_0^l = C_k^2(1+(\frac{\alpha}{\beta\mu_k})^2)(\frac{l}{2} - \frac{1}{2\sqrt{\lambda_k}}(\sin(2\sqrt{\lambda_k}l+\varphi)+\sin 2\varphi))$$

Отсюда:

$$C_k = \sqrt{\frac{1}{(1+(\frac{\alpha}{\beta\sqrt{\lambda_k}})^2)(\frac{l}{2} - \frac{1}{2\sqrt{\lambda_k}}(\sin(2\sqrt{\lambda_k}l+\varphi)+\sin 2\varphi))}}$$

$\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0, \delta > 0.$

В этом случае:

$$\begin{cases} \alpha C_1 - \beta\mu C_2 = 0, \\ \gamma(C_1\cos\mu l + C_2\sin\mu l) + \delta\mu(-C_1\sin\mu l + C_2\cos\mu l) = 0 \end{cases}$$

Преобразуем:

$$\begin{cases} C_2 = \frac{\alpha}{\beta\mu}C_1, \\ \gamma(C_1\cos\mu l + \frac{\alpha}{\beta\mu}C_1\sin\mu l) + \delta\mu(-C_1\sin\mu l + \frac{\alpha}{\beta\mu}C_1\cos\mu l) = 0 \end{cases}$$

Интересуемся нетривиальными решениями, поэтому сократим на C_1 и умножим на $\beta\mu$ последнее уравнение в системе:

$$\gamma(\beta\mu\cos\mu l + \alpha\sin\mu l) + \delta\mu(-\beta\mu\sin\mu l + \alpha\cos\mu l) = 0$$

$$\cos\mu l(\gamma\beta\mu + \alpha\delta\mu) + \sin\mu l(\alpha\gamma - \beta\delta\mu^2) = 0$$

Обозначим $A = (\gamma\beta\mu + \alpha\delta\mu)$ и $B = (\alpha\gamma - \beta\delta\mu^2)$, тогда:

$$\sqrt{A^2+B^2}\cos(\mu l - \operatorname{arctg}\frac{B}{A}) = 0$$

$$\mu l - \operatorname{arctg}\frac{\alpha\gamma - \beta\delta\mu^2}{\gamma\beta\mu + \alpha\delta\mu} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{N}$$

$$\mu l + \operatorname{arctg}\frac{\beta\delta\mu^2 - \alpha\gamma}{\gamma\beta\mu + \alpha\delta\mu} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{N}$$

Рассуждения аналогичны предыдущему случаю. $C_1 \neq 0$ и получено нетривиальное решение (или собственная функция), соответствующая собственному числу μ_k^*.

$$C_1 = const \neq 0,\ C_2 = \frac{\alpha}{\beta\mu_k}C_1,\ X(x) = C_k(\cos\sqrt{\lambda_k}x + \frac{\alpha}{\beta\mu}\sin\sqrt{\lambda_k}x),$$

$$\sqrt{\lambda_k} \in \{\sqrt{\lambda}\,|\,\mu l + \operatorname{arctg}\frac{\beta\delta\lambda - \alpha\gamma}{\gamma\beta\sqrt{\lambda} + \alpha\delta\sqrt{\lambda}} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{N}.\}$$

Отнормируем собственную функцию ($\operatorname{tg}\varphi = \frac{\mu\beta}{\alpha}$):

$$1 = C_k^2\int_0^l(\cos\sqrt{\lambda_k}x + \frac{\alpha}{\beta\mu_k}\sin\sqrt{\lambda_k}x)^2 = C_k^2(1 + (\frac{\alpha}{\beta\mu_k})^2)\int_0^l \sin^2(\sqrt{\lambda_k}x + \varphi)dx =$$

$$= C_k^2(1 + (\frac{\alpha}{\beta\mu_k})^2)(\frac{x}{2} - \frac{1}{2\sqrt{\lambda_k}}\sin(2\sqrt{\lambda_k}x + \varphi))_0^l = C_k^2(1 + (\frac{\alpha}{\beta\mu_k})^2)(\frac{l}{2} - \frac{1}{2\sqrt{\lambda_k}}(\sin(2\sqrt{\lambda_k}l + \varphi) + \sin 2\varphi))$$

Отсюда:

$$C_k = \sqrt{\frac{1}{(1 + (\frac{\alpha}{\beta\sqrt{\lambda_k}})^2)(\frac{l}{2} - \frac{1}{2\sqrt{\lambda_k}}(\sin(2\sqrt{\lambda_k}l + \varphi) + \sin 2\varphi))}}$$

1.2 Численное построение графиков собственных функций

Для последнего случая при $\lambda > 0$ были найдены численно пять собственных значений, построены графики собственных функций, отвечающих этим собственным значениям, а также был построен график изменения амплитуды колебания с ростом значения собственного числа.

Численно найденные собственные значения: $\lambda_1 = 1.52170$, $\lambda_2 = 2.30388$, $\lambda_3 = 3.38247$, $\lambda_4 = 4.55452$, $\lambda_5 = 8.22286$.

Построенные графики представлены ниже.

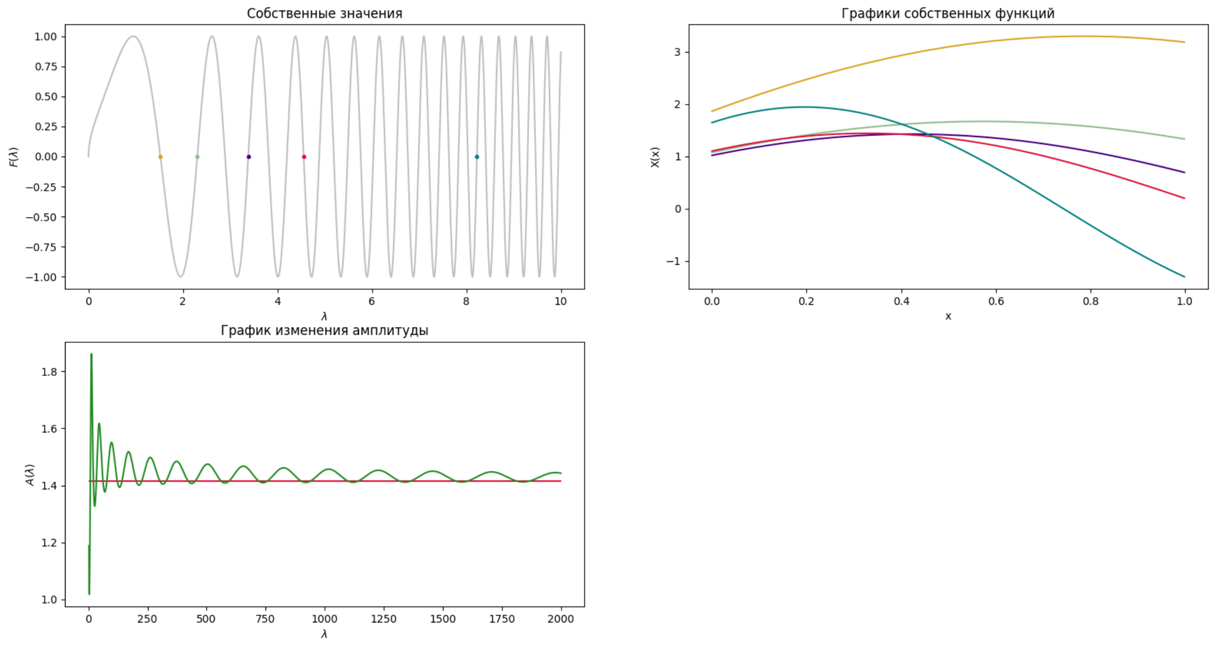

Рис. 1.1: Численно построенные графики

На графиках собственных функций жёлтая линия соответствует собственному значению $\lambda_1 = 1.52170$, зелёная - $\lambda_2 = 2.30388$, фиолетовая - $\lambda_3 = 3.38247$, красная - $\lambda_4 = 4.55452$ и синяя - $\lambda_5 = 8.22286$. Как видно из последнего графика, показывающего зависимость амплитуды колебаний от собственного значения, амплитуда колебаний при большом собственном значении оказывается примерно равным $\sqrt{\frac{2}{l}}$. Это же подтверждается и аналитически

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\sqrt{\frac{1}{(1+(\frac{\alpha}{\beta\sqrt{\lambda}})^2)(\frac{l}{2}-\frac{1}{2\sqrt{\lambda}}(\sin(2\sqrt{\lambda}l+\varphi)+\sin 2\varphi))}}=\sqrt{\frac{2}{l}}.$$

1.3 Основные свойства собственных чисел и собственных функций

1. Существует счётное число собственных значений $\lambda_1 < \lambda_2 < ... < \lambda_n < ...$, которым соответсвуют нетривиальные решения задачи - собственные функции $X_1(x), X_2(x), ..., X_n(x), ...$

2. Собственные функции $X_n(x), X_m(x), n \neq m$ ортогональны между собой с весом $\rho(x)$ на отрезке $0 \leq x \leq l$.
$$\int_0^l X_n(x)X_m(x)\rho(x)dx = 0, \quad (n \neq m).$$

3. Если $X_n(x)$ является собственной функцией при собственном значении λ_n, то функция $A_nX_n(x)$ (A_n - произвольная постоянная) также является собственной функцией для того же значения.

Чтобы исключить неопределённость в выборе множителся, можно подчинить собственные функции требованию нормировки:

$$||X_n(x)||^2 = \int_0^l X_n^2(x)\rho(x)dx = 1.$$

Тогда такие собственные функции образуют ортогональную и нормированную систему:

$$\int_0^l X_n(x)X_m(x)\rho(x)dx = \begin{cases} 0, n \neq m, \\ 1, n = m. \end{cases}$$

1.4 Определения замкнтуности и полноты ортонормированной системы

Определение. Ортонормированная система $X_n(x)$ называется *замкнутой*, если каждая функция $f(x)$ может быть разложена в сходящийся в среднем ряд Фурье по функциям данной системы.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall f \quad \exists f_1 f_2 ... f_n \quad | \quad ||\sum_{i=1}^n f_i X_i(x) - f(x)|| < \varepsilon$$

Определение. Ортонормированная система $X_n(x)$ называется *полной*, если не существует такой нетривиальной функции $f(x)$, что $\int_0^l f(x)X_n(x)\rho(x)dx = 0 \quad \forall n$.

1.5 Определения поточечной и равномерной сходимости рядов Фурье. Теорема Стеклова о равномерной сходимости

Определение. Ряд Фурье сходится поточечно , если

$$\forall x \in [0,l] \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \quad \forall n > N \quad ||\sum_{i=1}^{n} f_i X_i(x) - f(x)|| < \varepsilon$$

Определение. Ряд Фурье сходится равномерно, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \quad \forall n > N \quad \forall x \in [0,l] \quad ||\sum_{i=1}^{n} f_i X_i(x) - f(x)|| < \varepsilon$$

Теорема В.А. Стеклова. Произвольная, дважды непрерывно дифференцируемая функция $f(x)$, удовлетворяющая граничным условиям $f(0) = f(l) = 0$, разлагается в равномерно и абсолютно сходящийся ряд по собственным функциям $X_n(x)$:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n X_n(x) \quad f_n = \frac{1}{||X_n(x)||^2} \int_0^l f(x) X_n(x) \rho(x) dx \quad ||X_n(x)||^2 = \int_0^l X_n^2(x) \rho(x) dx$$

Глава 2

Специальные функции

2.1 Функции Бесселя

2.1.1 Найти фундаментальную систему решений уравнения Бесселя $\nu-$го порядка

Уравнение имеет вид:

$$y'' + \frac{y'}{x} + (1 - \frac{\nu^2}{x^2})y = 0,$$

где $\nu \in \mathbb{R}$ или $\nu \in \mathbb{C} \quad | \quad Re\nu < 0$.

Решение будем искать в виде:

$$y = x^\sigma \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \quad a_0 \neq 0,$$

поскольку уравнение имеет особенность в точке $x = 0$, σ называется характеристическим показателем.

Подставим ряд в уравнение и соберём слагаемые при $x^{n+\sigma-2}$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+\sigma)(n+\sigma-1)a_n x^{n+\sigma-2} + (n+\sigma)a_n x^{n+\sigma-2} + a_n x^{n+\sigma} - \nu^2 a_n x^{n+\sigma-2} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+\sigma-2}((n+\sigma)^2 - \nu^2 + x^2) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+\sigma-2}((n+\sigma)^2 - \nu^2) + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+\sigma} = 0$$

Приравняем к нулю коэффициенты при степенях $\sigma - 2$, $\sigma - 1$, ..., $n + \sigma - 2$:

$$\begin{cases} a_0(\sigma^2 - \nu^2) = 0 \\ a_1((1+\sigma)^2 - \nu^2) = 0 \\ a_2((2+\sigma)^2 - \nu^2) + a_0 = 0 \\ a_3((3+\sigma)^2 - \nu^2) + a_1 = 0 \\ \ldots \\ a_n((n+\sigma)^2 - \nu^2) + a_{n-2} = 0 \end{cases}$$

Поскольку $a_0 \neq 0$ по условию, то $\sigma^2 - \nu^2 = 0$ и $\sigma = \pm\nu$. Для второго уравнения системы с учётом предыдущей выкладки имеем:

$$a_1(1 + 2\sigma + \sigma^2 - \nu^2) = a_1(1 + 2\sigma) = 0 \Rightarrow a_1 = 0.$$

$\forall n > 1$ получим рекуррентную формулу для коэффициентов a_n:

$$a_n(n+\sigma-\nu)(n+\sigma+\nu)+a_{n-2}=0$$

$$a_n=-\frac{a_{n-2}}{(n+\sigma-\nu)(n+\sigma+\nu)}$$

Поскольку ранее было показано, что $a_1=0$, то из рекуррентной формулы можно увидеть, что все $a_{2l+1}=0, \quad l>0$.