

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования  
Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И.  
Лобачевского  
Институт информационных технологий, математики и механики

**ОТЧЁТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ:  
"ЗАДАЧА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ"**

Студенты: Петров Павел, Михайлова Екатерина

Группа: 381803-1

Нижний Новгород  
2020

# 1 Задача Штурма-Лиувилля

Задача Штурма-Лиувилля является простейшей задачей о поиске ортонормированной системы: найти те значения параметра  $\lambda$ , при которых существуют нетривиальные решения задачи:

$$X'' + \lambda X = 0$$

$$\alpha X(0) - \beta X'(0) = 0, \quad \alpha \geq 0, \beta \geq 0, \alpha + \beta > 0,$$

$$\gamma X(l) + \delta X'(l) = 0, \quad \gamma \geq 0, \delta \geq 0, \gamma + \delta > 0,$$

а также найти эти решения. Такие значения параметра  $\lambda$  называются **собственными значениями**, а соответствующие им нетривиальные решения - **собственными функциями**.

Из анализа ограничений на параметры были получены девять случаев значений параметров:

1.  $\alpha > 0, \beta = 0, \gamma > 0, \delta = 0$ .
2.  $\alpha > 0, \beta = 0, \gamma = 0, \delta > 0$ .
3.  $\alpha = 0, \beta > 0, \gamma > 0, \delta = 0$ .
4.  $\alpha = 0, \beta > 0, \gamma = 0, \delta > 0$ .
5.  $\alpha > 0, \beta = 0, \gamma > 0, \delta > 0$ .
6.  $\alpha = 0, \beta > 0, \gamma > 0, \delta > 0$ .
7.  $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0, \delta = 0$ .
8.  $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma = 0, \delta > 0$ .
9.  $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0, \delta > 0$ .

## 2 Для всех возможных девяти случаев найти собственные числа и собственные функции задачи Штурма-Лиувилля (собственные функции отнормировать!)

Рассмотрим разные значения  $\lambda$  в задаче Штурма-Лиувилля.

### 2.1 $\lambda = 0$

В этом случае уравнение имеет вид:

$$X'' = 0,$$

а его решение:

$$X(x) = C_1 x + C_2,$$

где  $C_1$  и  $C_2$  - произвольные постоянные. Подставим это решение в граничные условия и получим, что:

$$\alpha C_2 - \beta C_1 = 0, \quad \gamma(C_1 l + C_2) + \delta C_1 = 0.$$

**2.1.1**  $\alpha > 0, \beta = 0, \gamma > 0, \delta = 0$ .

В этом случае:

$$\begin{aligned}\alpha C_2 &= 0, & \gamma(C_1 l + C_2) &= 0, \\ C_2 &= 0, & \gamma C_1 l &= 0.\end{aligned}$$

Так как по условию  $\gamma$  и  $l$  отличны от нуля, то равенство последнего уравнения нулю возможно только в одном случае, когда  $C_1 = 0$ . Как итог:

$$C_1 = 0, C_2 = 0, X(x) = 0.$$

Получили тривиальное решение, но оно нас не интересует.

**2.1.2**  $\alpha > 0, \beta = 0, \gamma = 0, \delta > 0$ .

В этом случае:

$$\alpha C_2 = 0, \quad \delta C_1 = 0.$$

Исходя из условий, получаем:

$$C_1 = 0, C_2 = 0, X(x) = 0.$$

Получили тривиальное решение, но оно нас не интересует.

**2.1.3**  $\alpha = 0, \beta > 0, \gamma > 0, \delta = 0$ .

В этом случае:

$$\begin{aligned}-\beta C_1 &= 0, & \gamma(C_1 l + C_2) &= 0, \\ C_1 &= 0, & \gamma C_2 &= 0.\end{aligned}$$

Так как по условию  $\gamma$  отлична от нуля, то равенство последнего уравнения нулю возможно только в одном случае, когда  $C_2 = 0$ . Как итог:

$$C_1 = 0, C_2 = 0, X(x) = 0.$$

Получили тривиальное решение, но оно нас не интересует.

**2.1.4**  $\alpha = 0, \beta > 0, \gamma = 0, \delta > 0$ .

В этом случае:

$$-\beta C_1 = 0, \quad \delta C_1 = 0.$$

Исходя из условий, получаем, что  $C_1 = 0$ , а на  $C_2$  ограничений нет. Значит, чтобы получить нетривиальное решение, надо взять  $C_2$  произвольной константой, отличной от нуля. Итог:

$$C_1 = 0, C_2 = \text{const} \neq 0, X(x) = C_2.$$

Получили нетривиальное решение.

**2.1.5**  $\alpha > 0, \beta = 0, \gamma > 0, \delta > 0$ .

В этом случае:

$$\begin{aligned}\alpha C_2 &= 0, & \gamma(C_1 l + C_2) + \delta C_1 &= 0, \\ C_2 &= 0, & (\gamma l + \delta) C_1 &= 0.\end{aligned}$$

Так как по условию  $\gamma$ ,  $l$  и  $\delta$  строго больше нуля, то равенство последнего уравнения нулю возможно только в одном случае, когда  $C_1 = 0$ . Как итог:

$$C_1 = 0, C_2 = 0, X(x) = 0.$$

Получили тривиальное решение, но оно нас не интересует.

**2.1.6**  $\alpha = 0, \beta > 0, \gamma > 0, \delta > 0$ .

В этом случае:

$$\begin{aligned} -\beta C_1 &= 0, & \gamma(C_1 l + C_2) + \delta C_1 &= 0, \\ C_1 &= 0, & \gamma C_2 &= 0. \end{aligned}$$

Так как по условию  $\gamma$  отлична от нуля, то равенство последнего уравнения нулю возможно только в одном случае, когда  $C_2 = 0$ . Как итог:

$$C_1 = 0, C_2 = 0, X(x) = 0.$$

Получили тривиальное решение, но оно нас не интересует.

**2.1.7**  $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0, \delta = 0$ .

В этом случае:

$$\begin{aligned} \alpha C_2 - \beta C_1 &= 0, & \gamma(C_1 l + C_2) &= 0, \\ C_2 &= \frac{\beta}{\alpha} C_1, & (\gamma l + \frac{\gamma \beta}{\alpha}) C_1 &= 0. \end{aligned}$$

Так как по условию все представленные параметры строго больше нуля, то равенство последнего уравнения нулю возможно только в одном случае, когда  $C_1 = 0$ , следовательно и  $C_2 = 0$ . Как итог:

$$C_1 = 0, C_2 = 0, X(x) = 0.$$

Получили тривиальное решение, но оно нас не интересует.

**2.1.8**  $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma = 0, \delta > 0$ .

В этом случае:

$$\begin{aligned} \alpha C_2 - \beta C_1 &= 0, & \delta C_1 &= 0, \\ \alpha C_2 &= 0, & C_1 &= 0. \end{aligned}$$

Так как по условию  $\alpha$  строго больше нуля, то равенство первого уравнения нулю возможно только в одном случае, когда  $C_2 = 0$ . Как итог:

$$C_1 = 0, C_2 = 0, X(x) = 0.$$

Получили тривиальное решение, но оно нас не интересует.

**2.1.9**  $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0, \delta > 0$ .

В этом случае:

$$\begin{aligned} \alpha C_2 - \beta C_1 &= 0, & \gamma(C_1 l + C_2) + \delta C_1 &= 0, \\ C_2 &= \frac{\beta}{\alpha} C_1, & (\gamma l + \delta + \frac{\gamma \beta}{\alpha}) C_1 &= 0. \end{aligned}$$

Так как по условию все представленные параметры строго больше нуля, то равенство последнего уравнения нулю возможно только в одном случае, когда  $C_1 = 0$ , следовательно и  $C_2 = 0$ . Как итог:

$$C_1 = 0, C_2 = 0, X(x) = 0.$$

Получили тривиальное решение, но оно нас не интересует.

## 2.2 $\lambda < 0$

В этом случае решение уравнения имеет вид:

$$X(x) = C_1 e^{-\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{\sqrt{-\lambda}x}.$$

Заменяем  $\sqrt{-\lambda}$  на  $\mu$  и подставим решение в граничные условия. Получим:

$$\begin{cases} \alpha(C_1 + C_2) - \beta\mu(C_2 - C_1) = 0, \\ \gamma(C_1 e^{-\mu l} + C_2 e^{\mu l}) + \delta\mu(C_2 e^{\mu l} - C_1 e^{-\mu l}) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

### 2.2.1 $\alpha > 0, \beta = 0, \gamma > 0, \delta = 0$ .

В этом случае:

$$\begin{cases} \alpha(C_1 + C_2) = 0, \\ \gamma(C_1 e^{-\mu l} + C_2 e^{\mu l}) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} C_1 = -C_2, \\ \gamma C_1(e^{-\mu l} - e^{\mu l}) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Интересуемся нетривиальными решениями, поэтому приравняем  $e^{-\mu l} - e^{\mu l}$  к нулю. Но здесь равенство нулю возможно только в случае равенства нулю  $\mu l$ , что невозможно, исходя из условий. Поэтому возможно только  $C_1 = 0$  и, следовательно,  $C_2 = 0$ . Таким образом получаем тривиальное решение, что нам не подходит.

$$C_1 = 0, C_2 = 0, X(x) = 0.$$

### 2.2.2 $\alpha > 0, \beta = 0, \gamma = 0, \delta > 0$ .

В этом случае:

$$\begin{cases} \alpha(C_1 + C_2) = 0, \\ \delta\mu(C_2 e^{\mu l} - C_1 e^{-\mu l}) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} C_1 = -C_2, \\ -\delta\mu C_1(e^{\mu l} + e^{-\mu l}) = 0 \end{cases} \quad (5)$$

Второе уравнения равно нулю только в одном случае, когда  $C_1 = 0$ , так как по условию параметры строго больше нуля, а  $e^{\mu l} + e^{-\mu l}$  никогда не может быть равно нулю, так как представляет собой сумму положительных функций. Следовательно,  $C_2 = 0$ , и получаем тривиальное решение, что нам не подходит.

$$C_1 = 0, C_2 = 0, X(x) = 0.$$

### 2.2.3 $\alpha = 0, \beta > 0, \gamma > 0, \delta = 0$ .

В этом случае:

$$\begin{cases} -\beta\mu(C_2 - C_1) = 0, \\ \gamma(C_1 e^{-\mu l} + C_2 e^{\mu l}) = 0 \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} C_2 = C_1, \\ \gamma C_1(e^{-\mu l} + e^{\mu l}) = 0 \end{cases} \quad (7)$$

Второе уравнения равно нулю только в одном случае, когда  $C_1 = 0$ , так как по условию параметр строго больше нуля, а  $e^{\mu l} + e^{-\mu l}$  никогда не может быть равно нулю, так как представляет собой сумму положительных функций. Следовательно,  $C_2 = 0$ , и получаем тривиальное решение, что нам не подходит.

$$C_1 = 0, C_2 = 0, X(x) = 0.$$

#### 2.2.4 $\alpha = 0, \beta > 0, \gamma = 0, \delta > 0$ .

В этом случае:

$$\begin{cases} -\beta\mu(C_2 - C_1) = 0, \\ \delta\mu(C_2e^{\mu l} - C_1e^{-\mu l}) = 0 \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} C_2 = C_1, \\ \delta\mu C_1(e^{\mu l} - e^{-\mu l}) = 0 \end{cases} \quad (9)$$

Интересуемся нетривиальными решениями, поэтому приравняем  $e^{\mu l} - e^{-\mu l}$  к нулю. Но здесь равенство нулю возможно только в случае равенства нулю  $\mu l$ , что невозможно, исходя из условий. Поэтому возможно только  $C_1 = 0$  и, следовательно,  $C_2 = 0$ . Таким образом получаем тривиальное решение, что нам не подходит.

$$C_1 = 0, C_2 = 0, X(x) = 0.$$

#### 2.2.5 $\alpha > 0, \beta = 0, \gamma > 0, \delta > 0$ .

В этом случае:

$$\begin{cases} \alpha(C_1 + C_2) = 0, \\ \gamma(C_1e^{-\mu l} + C_2e^{\mu l}) + \delta\mu(C_2e^{\mu l} - C_1e^{-\mu l}) = 0 \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{cases} C_1 = -C_2, \\ C_1(\gamma(e^{-\mu l} - e^{\mu l}) - \delta\mu(e^{\mu l} + e^{-\mu l})) = 0 \end{cases} \quad (11)$$

Интересуемся нетривиальными решениями, поэтому во втором уравнении занулим скобку:

$$\gamma(e^{-\mu l} - e^{\mu l}) - \delta\mu(e^{\mu l} + e^{-\mu l}) = 0,$$

затем умножим на  $e^{\mu l}$  и соберём слагаемые с экспонентами и без:

$$(\gamma - \delta\mu) - (\gamma + \delta\mu)e^{2\mu l} = 0.$$

Получаем уравнение, которое надо решить относительно  $\mu$ :

$$e^{2\mu l} = \frac{\gamma - \delta\mu}{\gamma + \delta\mu}.$$

Слева в уравнении, очевидно, стоит монотонно возрастающая функция. Справа имеем гиперболу с вертикальной асимптотой  $\mu = -\frac{\gamma}{\delta} < 0$ . Но  $\mu = \sqrt{-\lambda}$ , поэтому рассматриваем только положительные  $\mu$ . Производная функции справа по  $\mu$  равна:  $\frac{-2\delta\gamma}{(\delta\mu + \gamma)^2} < 0$ , значит гипербола убывает на всей своей области определения. При  $\mu = 0$  функции совпадают, затем расходятся, поэтому при положительных  $\mu$  обращение скобки в нуль невозможно. Значит возможно только  $C_1 = 0$  и, следовательно,  $C_2 = 0$ , и решение тривиально.

$$C_1 = 0, C_2 = 0, X(x) = 0.$$

**2.2.6**  $\alpha = 0, \beta > 0, \gamma > 0, \delta > 0.$

В этом случае:

$$\begin{cases} -\beta\mu(C_2 - C_1) = 0, \\ \gamma(C_1e^{-\mu l} + C_2e^{\mu l}) + \delta\mu(C_2e^{\mu l} - C_1e^{-\mu l}) = 0 \end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{cases} C_2 = C_1, \\ C_1(\gamma(e^{-\mu l} + e^{\mu l}) + \delta\mu(e^{\mu l} - e^{-\mu l})) = 0 \end{cases} \quad (13)$$

Интересуемся нетривиальными решениями, поэтому во втором уравнении занулим скобку:

$$\gamma(e^{-\mu l} + e^{\mu l}) + \delta\mu(e^{\mu l} - e^{-\mu l}) = 0,$$

затем умножим на  $e^{\mu l}$  и соберём слагаемые с экспонентами и без:

$$(\gamma - \delta\mu) + (\gamma + \delta\mu)e^{2\mu l} = 0.$$

Получаем уравнение, которое надо решить относительно  $\mu$ :

$$e^{2\mu l} = \frac{\delta\mu - \gamma}{\delta\mu + \gamma}.$$

Слева в уравнении, очевидно, стоит монотонно возрастающая функция. Справа имеем гиперболу с вертикальной асимптотой  $\mu = -\frac{\gamma}{\delta} < 0$ . Но  $\mu = \sqrt{-\lambda}$ , поэтому рассматриваем только положительные  $\mu$ . Производная функции справа по  $\mu$  равна:  $\frac{2\delta\gamma}{(\delta\mu + \gamma)^2} < 0$ , значит гипербола возрастает на всей своей области определения. При  $\mu = 0$  функция слева равна 1, справа равна -1, при стремлении  $\mu$  к бесконечности, гипербола стремится к 1, пока экспонента в это время уходит на бесконечность, поэтому нет такого значения  $\mu$ , при котором скобка обращалась бы в нуль. Значит возможно только  $C_1 = 0$  и, следовательно,  $C_2 = 0$ , и решение тривиально.

$$C_1 = 0, C_2 = 0, X(x) = 0.$$

**2.2.7**  $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0, \delta = 0.$

**2.2.8**  $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma = 0, \delta > 0.$

**2.2.9**  $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0, \delta > 0.$

**2.3**  $\lambda > 0$

**2.3.1**  $\alpha > 0, \beta = 0, \gamma > 0, \delta = 0.$

**2.3.2**  $\alpha > 0, \beta = 0, \gamma = 0, \delta > 0.$

**2.3.3**  $\alpha = 0, \beta > 0, \gamma > 0, \delta = 0.$

**2.3.4**  $\alpha = 0, \beta > 0, \gamma = 0, \delta > 0.$

**2.3.5**  $\alpha > 0, \beta = 0, \gamma > 0, \delta > 0.$

**2.3.6**  $\alpha = 0, \beta > 0, \gamma > 0, \delta > 0.$

**2.3.7**  $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0, \delta = 0.$

**2.3.8**  $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma = 0, \delta > 0.$

**2.3.9**  $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0, \delta > 0.$