Pay per problem

Pavel Flores

Problema. Sea $f : \mathbb{R}^d \backslash \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ homogénea de grado $\gamma \in \mathbb{R}$ es decir

$$f(tx) = t^\gamma f(x) \quad x \in R^d \backslash \{0\},\ t > 0. \tag{1}$$

Entonces si f es diferenciable

$$< x, \nabla f(x) >= \gamma \nabla f(x)$$

.

Demostración.

Consideremos $F(t) = f(x(t))$. Esto es que para cada x definimos $x(t) = tx$. Entonces

$$\begin{aligned} \frac{dF(tx)}{dt} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F(tx)}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial (tx_i)}{\partial t} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F(tx)}{\partial x_i} \cdot x_i \\ &=< x, \nabla F(tx) > \end{aligned}$$

Luego por regla de la derivada del producto de funciones

$$\frac{d}{dt} t^\gamma f(x) = \gamma t^{\gamma-1} f(x) + t^\gamma df(x)/dt = \gamma t^{\gamma-1} f(x)$$

.

Como f es homogénea, podemos derivar la ecuación 1 y por todas las cuentas anteriores, y que ambos lados de la derivada de 1 tienen que coincidir, se deduce que

$$< x, \nabla f(x) >= \gamma \nabla f(x).$$

Nota. Sea $L(t, x_1(t), ..., x_n(t))$ entonces

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}L(t, x_1(t), ..., x_n(t)) &= \frac{\partial L}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_i(t)}{\partial t} \\ &= \frac{\partial L}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_i(t)}{\partial t}\end{aligned}$$