

Semestrální projekt do předmětu FYO
Difrakce na obdélníkové a kruhové štěrbině

17. března 2015

Autoři: Pavel Frýz, xfryzp00
Lukáš Němec, xnemec60

Abstrakt

Cílem této práce je seznámit čtenáře se základy difrakce. Práce popisuje základy difrakce a rozdělení difrakce na Fresnelovu a Fraunhoferovu. Dále čtenáře seznámí s případy difrakce na obdélníkové a kruhové štěrbíně. Součástí je i popis aplikace pro vizualizaci Fraunhoferovy difrakce na těchto štěrbínách.

Klíčová slova

difrakce, Fresnelova aproximace, Fresnelova difrakce, Fraunhoferova aproximace, Fraunhoferova difrakce, obdélníková apertura, kruhová apertura, ohyb světla

Obsah

1	Úvod	2
2	Difrakce světla	2
2.1	Huygens-Fresnelův princip	3
2.2	Fresnelova difrakce	4
2.3	Fraunhoferova difrakce	4
3	Kruhová a obdélníková apertura	5
3.1	Obdélníková apertura	5
3.2	Kruhová apertura	6
4	Praktická část aplikace	7
5	Závěr	7

1 Úvod

Když paprsek světla prochází úzkou štěrbinou, šíří se do určité míry i do oblasti geometrického stínu. Tento efekt je příklad difrakce, způsobu změny přímočarého pohybu světla jiného než lomem nebo odrazem. Tento efekt může být uspokojivě vysvětlen za předpokladu vlnového charakteru světla.

V kapitole 2 jsou pak popsány základy difrakce, princip Huygens-Fresnelova principu a rozdělení difrakce podle použité aproximace na Fresnelovu difrakci a Fraunhoferovu difrakci.

V další kapitole 3 je podrobněji popsán případ Fraunhoferovy difrakce na obdélníkové štěrbině a na kruhové štěrbině.

V kapitole 4 pak najdete popis aplikace pro vizualizaci difrakčního obrazce, který vzniká při průchodu světlem obdélníkovou, resp. kruhovou štěrbinou.

V závěru najdete shrnutí problému a možné aplikace.

2 Difrakce světla

K difrakci světla dochází, když rovinná vlna projde skrz otvor na neprůhledné stěně (difrakční rovině) a dále se šíří ve volném prostoru. V takovém případě můžeme v určité vzdálenosti od difrakční roviny pozorovat distribuci intenzity světla a vzniká nám difrakční obrazec. Pokud by se světlo šířilo dle paprskové optiky, mohli bychom na stínítku pozorovat difrakční obrazec, který by odpovídal geometrickému stínu otvoru. Ale díky vlnovému charakteru světla se obrazec na stínítku může více či méně lišit od geometrického stínu a světlo se může šířit i do oblasti geometrického stínu, kde vlnový charakter je možno popsat pomocí Huygens-Fresnelova principu, viz 2.1. Tvar difrakčního obrazce závisí na vzdálenosti pozorovací roviny od otvoru, stejně tak vlnové délce dopadajícího světla a rozměrech otvoru. Je těžké určit, jak přesně ovlivní stěna s otvorem dopadající vlnu.

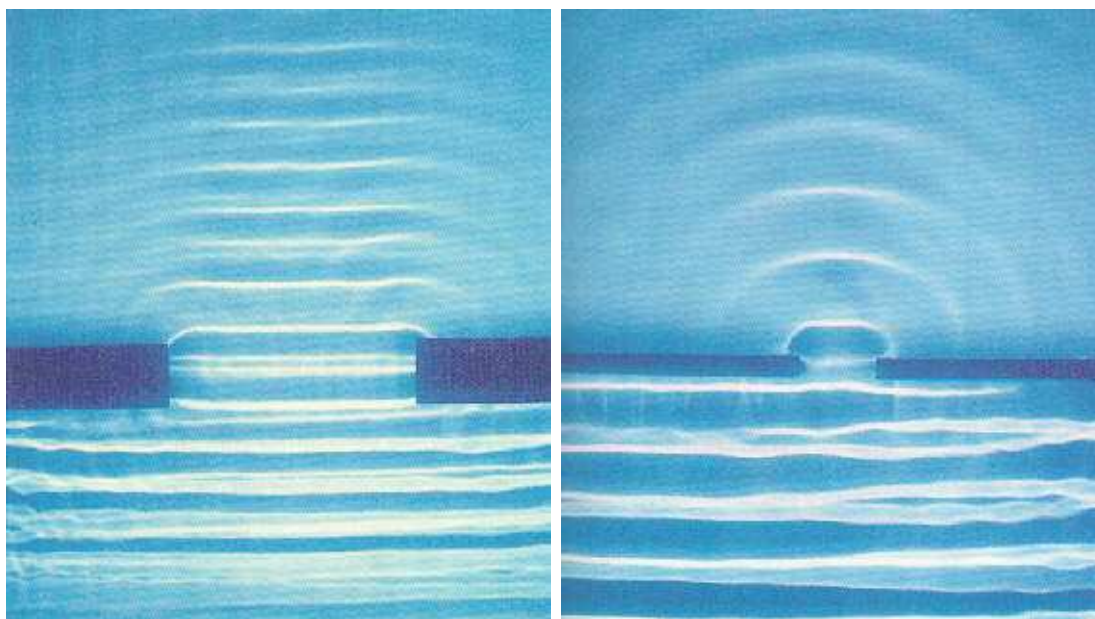
Nejjednoduší teorie difrakce je založena na předpokladu, že dopadající vlna se při průchodu štěrbinou nemění, a v místech mimo ní je zredukována na nulu. Pokud $U(x, y)$ je komplexní amplituda vlny těsně před stěnou a $f(x, y)$ je komplexní amplituda těsně za stěnou, tak v souladu s tímto předpokladem,

$$f(x, y) = p(x, y)U(x, y), \quad (1)$$

kde $p(x, y)$ je aperturní funkce a je definována následovně:

$$p(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{uvnitř otvoru} \\ 0 & \text{mimo otvor} \end{cases} \quad (2)$$

Máme-li komplexní amplitudu $f(x, y)$, tak komplexní amplitudy $g(x, y)$ na pozorovací rovině ve vzdálenosti d od štěrniny, můžeme určit pomocí šíření světla v prostoru. Na základě zvolené Fresnelovy aproximace nebo Fraunhoferovy aproximace šíření světla rozlišujeme i difrakci. Intenzita pozorovaného difrakčního obrazce je dána vztahem $I(x, y) = g(x, y)^2$.

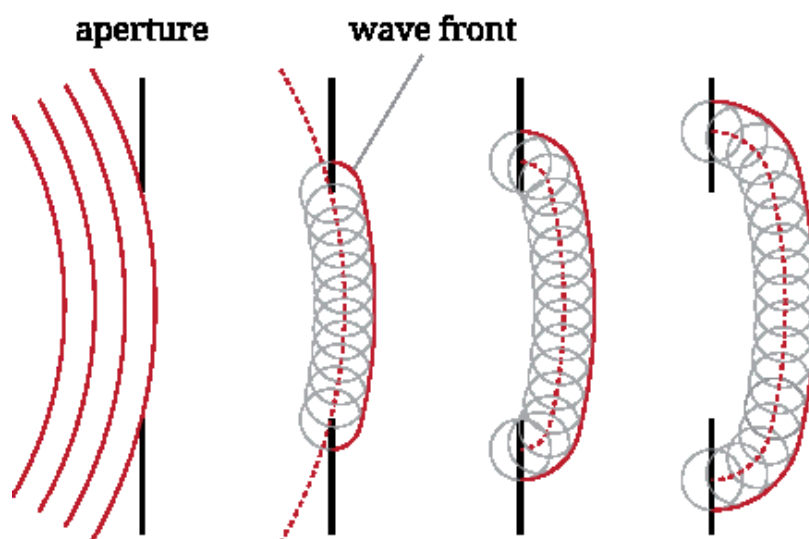


Obrázek 1: Znázornění difrakce na vodě [3]

2.1 Huygens-Fresnelův princip

Huygens-Fresnelův princip říká, že každý bod v čele vlny je zdrojem nové sférické vlny. Tyhle nové vlny vytvářejí nové čelo vlny. Jejich superpozice představuje rovinnou vlnu.

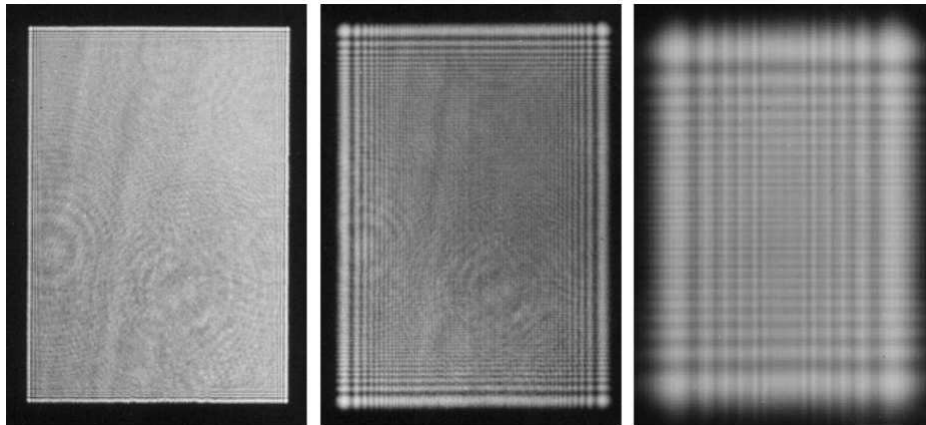
Na obrázku 2 je znázorněn Huygens-Fresnelův princip, kdy vlny přicházejí ke štěrbině. Jednotlivé body vlny se stávají zdrojem nových sférických vln a tvoří čelo nové vlny. Princip se opakuje pro nově vytvořenou vlnu.



Obrázek 2: Znázornění Huygens-Fresnelova principy při průchodu štěrbinou [5]

2.2 Fresnelova difrakce

Teorie Fresnelovy difrakce je založena na předpokladu, že dopadající vlna je pronásobena aperturní funkcí $p(x, y)$ a šíří se v prostoru podle Fresnelovy aproximace. Fresnelova difrakce popisuje difrakční obrazec, který vzniká na pozorovací rovině při malé vzdálenosti. Pokud je pozorovací rovina dostatečně blízko vzniká na ní ostrý obraz šterbiny, s postupným vzdalováním pozorovací roviny od difrakční roviny se na okraji obrazu začínají objevovat proužky bez výraznějšího zkreslení obrazu. Na pozorovací rovině tedy vzniká obraz překážky lemovaný světlými a tmavými proužky. Tyto vlastnosti je možno pozorovat na obrázku 3, kde je zobrazen difrakční obrazec, který vzniká při průchodu obdélníkovou šterbinou, můžeme vidět změnu difrakčního obrazce při zvětšující se vzdálenosti. Při dostatečné vzdálenosti, kdy paprsky dopadající na pozorovací rovinu jsou prakticky rovnoběžné, dostáváme Fraunhoferovu difrakci.



Obrázek 3: Fresnelova difrakce obdélníkové apertury [2]

2.3 Fraunhoferova difrakce

Fraunhoferova difrakce je teorie šíření světla skrz aperturu, předpokládá, že dopadající vlna je pronásobena s aperturní funkcí $p(x, y)$ a v prostoru za šterbinou se šíří podle Fraunhoferovy aproximace. Aby tato aproximace mohla být platná, musí platit, že vzdálenost šterbiny a pozorovací roviny d tak velká, aby Fresnelovo číslo $N_F = a^2/\lambda d$ bylo menší než jedna, kde a je maximální šířka šterbiny.

Uvažujme konfiguraci znázorněnou na obrázku 4. Předpokládejme, že rovinná vlna o intenzitě I_i přichází ve směru osy z . Takže komplexní amplituda $U(x, y) = \sqrt{I_i}$, potom komplexní amplituda za difrakční rovinou je dána $f(x, y) = p(x, y)\sqrt{I_i}$. Amplituda na pozorovací rovině je potom dle [4] dána vztahem,

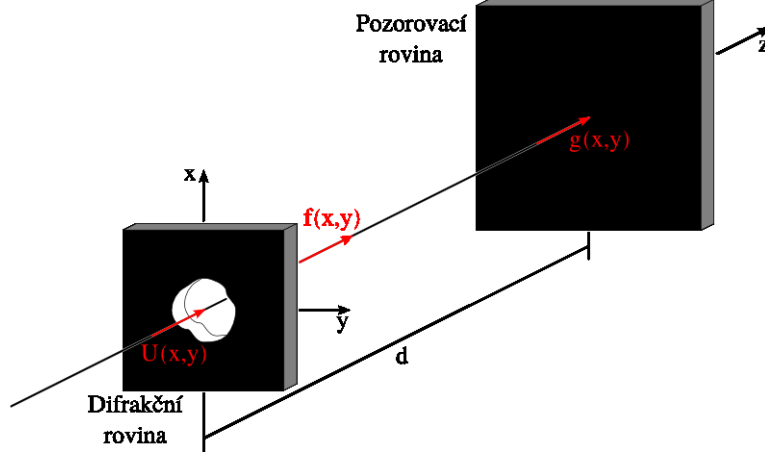
$$g(x, y) = \sqrt{I_i} h_0 P\left(\frac{x}{\lambda d}, \frac{y}{\lambda d}\right), \quad (3)$$

kde

$$P(v_x, v_y) = \iint p(x, y) \exp[j2\pi(v_x x + v_y y)] \, dx \, dy \quad (4)$$

je Fourierova transformace. Difrakční obrazec je definován takto,

$$I(x, y) = \frac{I_i}{(\lambda d)^2} \left| P\left(\frac{x}{\lambda d}, \frac{y}{\lambda d}\right) \right|^2 \quad (5)$$



Obrázek 4: Obecná apertura

3 Kruhová a obdélníková apertura

Tato kapitola popisuje vztahy Frauhofera difrakčního obrazce vzhledem k druhu apertury.

3.1 Obdélníková apertura

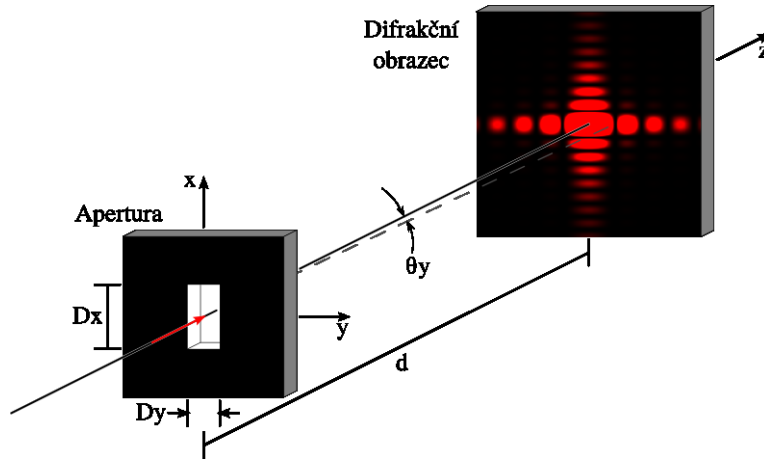
Obdélníková apertura je definována pomocí šířky D_y a výšky D_x obdélníkové štěrby. Uvažujme konfiguraci na obrázku 5, nyní můžeme specifikovat rovnici 5 pro obdélníkovou štěrbinu. Obrazec je pak specifikován následující rovnicí,

$$I(x, y) = I_0 \text{sinc}^2 \frac{\pi D_x x}{\lambda d} \text{sinc}^2 \frac{\pi D_y y}{\lambda d} \quad (6)$$

, kde $I_0 = (D_x D_y / \lambda d)^2 I_i$ je nejvyšší intenzita a $\text{sinc}(x) = \sin(x)/x$.

Difrakční minima výsledného obrazu nastanou za podmínky, že $\text{sinc}^2 \frac{\pi D_x x}{\lambda d} = 0$, resp. $\text{sinc}^2 \frac{\pi D_y y}{\lambda d}$. Z toho vztahu můžeme určit, že minimum nastane pro $\frac{D_x x}{\lambda d} = k, k \in \mathbb{Z}, k \neq 0$, resp. $\frac{D_y y}{\lambda d} = k, k \in \mathbb{Z}, k \neq 0$.

Pokud je $D_y < D_x$ pak difrakční obrazec je širší ve směru y než ve směru x, jak je zobrazeno na obrázku 5.



Obrázek 5: Obdélníková apertura

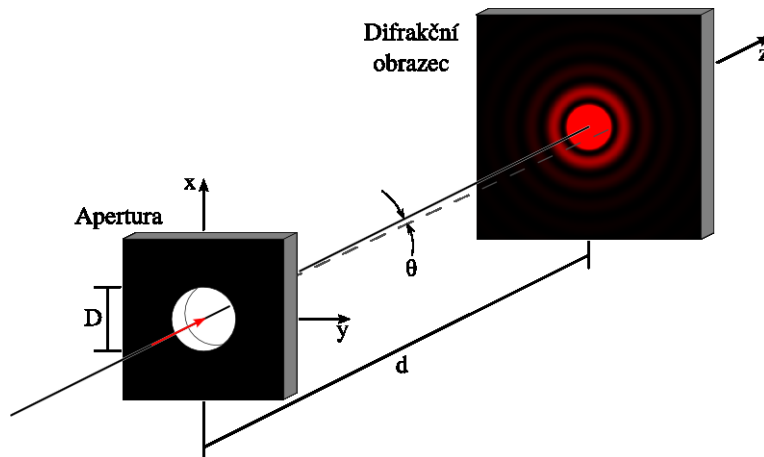
3.2 Kruhová apertura

Fraunhoferova difrakce na kruhové apertuře má velký praktický přínos ve studiu optiky [1]. Představme si typickou sestavu, kdy rovinná vlna dopadající na difrakční rovinu obsahující kruhovou aperturu vytváří vzdálený difrakční obrazec na pozorovací rovině. Pomocí spojky můžeme difrakční obrazec přiblížit blíže k difrakční rovině. Nyní pokud je čočka umístěna tak, že zachytí všechny paprsky přicházející ze štěrby, zůstává difrakční obrazec prakticky beze změny. Světelné vlny přicházející k difrakční rovině jsou ořezány, tak že jenom prochází čočkou a tvoří obraz v ohniskové rovině. Tento princip je stejný jako v oku, teleskopu, mikroskopu nebo kameře.

Kruhová apertura je charakterizována pomocí průměru D kruhové štěrby. Uvažujme znázorněnou konfiguraci na obrázku 6. Po specifikaci rovnice 5 pro kruhovou štěrbinu, dostaneme následující rovnici 7, která určuje výsledný difrakční obrazec.

$$I(x, y) = I_0 \left[\frac{2J_1(\pi D \rho / \lambda d)}{\pi D \rho / \lambda d} \right], \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (7)$$

,kde $I_0 = (\pi D^2)/4\lambda d)^2 I_i$ je nejvyšší intenzita a $J_1()$ je Besselova funkce prvního řádu.



Obrázek 6: Kruhová apertura

4 Praktická část aplikace

V praktické části projektu do FYO, jsme se rozhodli naimplementovat vizualizaci difrakčního obrazce, který vzniká při Fraunhoferově difrakci. Aplikace je vytvořena v jazyce Java za použití standardních knihoven a knihovny Common Math, které je využita při výpočtu Besselovy funkce prvního řádu.

V aplikaci je možné zvolit typ štěrbin, můžeme vybrat buď kruhovou šterbinu, nebo obdélníkovou šterbinu. Pomocí posuvníku je poté možné zvolit parametry šterbiny, průměr šterbiny u kruhové, resp. šířku a výšku u obdélníkové.

Dále je možné pomocí posuvníku upravit parametry, které jsou nezávislé na typu šterbiny. Jedná se o vlnovou délku přichozího světla a vzdálenost mezi šterbinou a pozorovací rovinou.

Podle zadaných parametrů se je v okně zobrazován difrakční obrazec a graf intenzity pro střední řádek. Zobrazené hodnoty je možné oříznout pomocí nastavitelného prahu, aby bylo možné zobrazit i místa s nízkou intenzitou.

5 Závěr

Cílem práce bylo nastudovat a seznámit čtenáře s problematikou difrakce na obdélníkové a kruhové šterbině.

V rámci práce byla vytvořena vizuální aplikace, která znázorňuje Fraunhoferovu difrakci na kruhové a obdélníkové šterbině, která umožňuje lépe porozumět různým faktorům, které ovlivňují výsledný difrakční obrazec.

Jelikož je aplikace zaměřena pouze na Fraunhoferovu difrakci, bylo by možné ji rozšířit o vizualizaci Fresnelovy difrakce. Dále by bylo možné přidat i jiné typy šterbin, případně umožnit více šterbin.

Literatura

- [1] HECHT, E. *Optics*. 4. vyd. San Francisco: Addison Wealey, 2002. ISBN 0-321-18878-0.
- [2] KOMRSKA, J. *Difrakce, rozdělení difrakčních jevů a difrakční integrály* [online]. 2006, Poslední modifikace 25. leden 2007 [cit. 2015-3-16]. Dostupné na: <http://physics.fme.vutbr.cz/komrska/Difrakce/KapD02.pdf>.
- [3] NATTRASS, C. *Diffraction* [online]. 2012, Poslední modifikace 4. říjen 2012 [cit. 2015-3-16]. Dostupné na: http://web.utk.edu/cnattras/Phys250Fall2012/modules/module1/diffraction_and_interference.htm.
- [4] SALEH, B. E. A. a TEICH, M. C. *Fundamentals of Photonics*. 2. vyd. New Jersey: Wiley, 2007. ISBN 978-0-471-35832-9.
- [5] WINTER, M. *Scalar Diffraction - Huygens, Fresnel, Fraunhofer* [online]. 2011, Poslední modifikace 17. březen 2015 [cit. 2015-3-16]. Dostupné na: <http://www.marcuswinter.de/archives/1351>.

Symbols a jednotky

d	=	Vzdálenost difrakční a pozorovací roviny
D	=	Průměr štěrby
D_x	=	Výška štěrby
D_y	=	Šířka štěrby
f	=	Amplituda vlny za štěrbinou
g	=	Amplituda vlny na pozorovací rovině
I	=	Intenzita
J_1	=	Besselova funkce prvního řádu
λ	=	Vlnová délka světla
N_F	=	Fresnelovo číslo
p	=	Aperturní funkce
P	=	Fourierova transformace
U	=	Amplituda vlny před štěrbinou